Выполнение расчетного задания по дисциплине Тепломассообмен в среде Mathematica 14

Студент: Маркаров М.Г.

Группа: ТФ-13-22

Задача № 3

Задача 3.

Цилиндрическую заготовку диаметром d=420 мм и длиной L=38 см, с начальной температурой t_0=600°С поместили в охладительный бассейн с температурой жидкости $t_ж$=18°С, в котором она начала охлаждаться при постоянном коэффициенте теплоотдачи α=70 Вт/(м^2 К). Свойства материала заготовки: марка - Сталь 1Cr, плотность - 7865 кг/м^3, удельная теплоёмкость - 460 Дж/(кг К), теплопроводность - 61 Вт/(м К).

Рассчитать температурное поле в цилиндре как функцию радиуса r (мм) и линейной координаты x (мм) в момент времени τ_1=5,8 мин от начала охлаждения, результаты вычислений свести в таблицы, построить графики $t(x, 0, \tau_1)$, $t(x, r_0, \tau_1)$, $t(0, r, \tau_1)$, $t(L/2, r, \tau_1)$.

Рассчитать температуру в центре цилиндра и на глубине 0,2d от поверхности как функцию времени; для стадии регулярного режима охлаждения вычислить, имитируя эксперимент, темп охлаждения цилиндра и температуропроводность материала заготовки.

Вычислить количество теплоты, отданной цилиндром за время охлаждения от его начала, до момента τ_1.

Введем исходные данные:

```
In[1]:= d0 = UnitConvert[Quantity[420, "Millimeters"], "Meters"];
             преобразоват·· размерная величина

r0 = d0 / 2;
L = UnitConvert[Quantity[38, "Centimeters"], "Meters"];
    преобразоват·· размерная величина
t0 = Quantity[600, "DegreesCelsius"];
     размерная величина
tLiquid = Quantity[18, "DegreesCelsius"];
          размерная величина
α = Quantity[70, "Watts"/("Meters"^2 * "Kelvins")];
    размерная величина
ρ = Quantity[7865, "Kilograms"/"Meters"^3];
    размерная величина
cp = Quantity[460, "Joules"/("Kilograms" * "Kelvins")];
     размерная величина
λ = Quantity[61, "Watts"/("Meters" * "Kelvins")];
    размерная величина
τ1 = UnitConvert[Quantity[5.8, "Minutes"], "Seconds"];
     преобразоват·· размерная величина
```

Найдем коэффициент температуропроводности a:

In[7]:= a = UnitConvert[N[$\frac{\lambda}{cp * \rho}$], $\frac{\text{"Meters"}^2}{\text{"Seconds"}}$]
преобразоват·· численное приближение

Out[7]= 0.00001686061 m^2/s

Числа Био по радиальному(BiRadial) и вертикальному(BiVertical) направлениям:

In[8]:= BiRadial = N[$\frac{\alpha * r0}{\lambda}$]
численное п

Out[8]= 0.24098361

In[9]:= BiVertical = N[$\frac{(\alpha * \frac{L}{2})}{\lambda}$]
численное при

Out[9]= 0.21803279

Числа Фурье по радиальному(FoRadial) и вертикальному(FoVertical) направлениям:

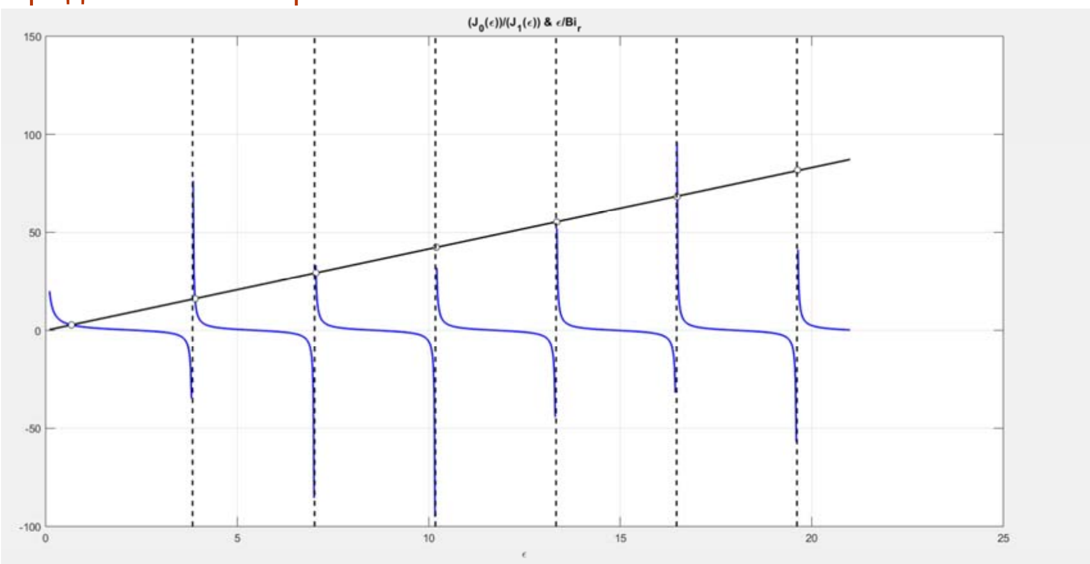
In[10]:= FoRadial = $\frac{a * \tau 1}{(r0)^2}$

Out[10]=
0.13304971

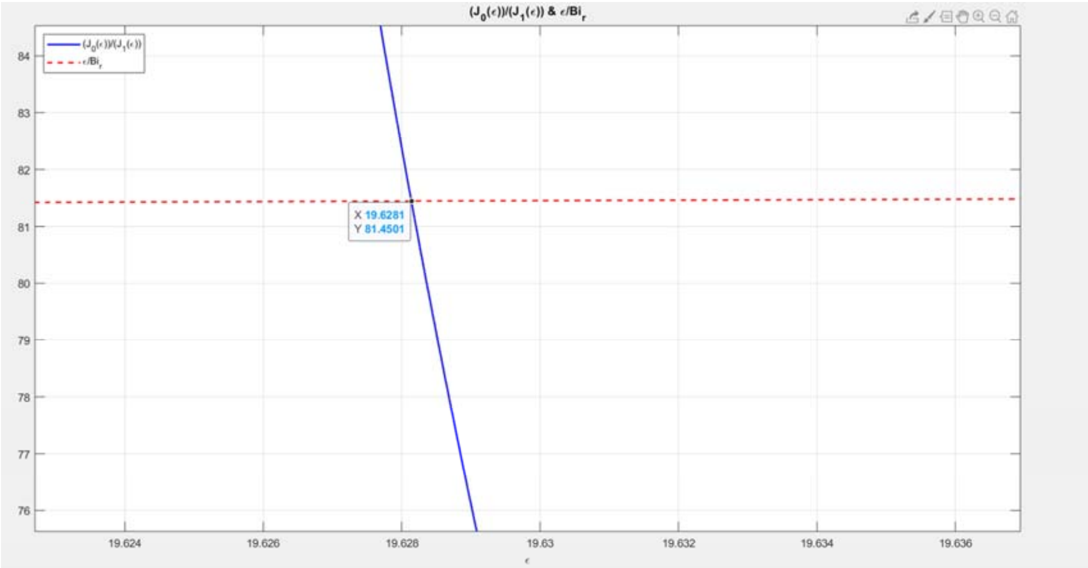
In[11]:= FoVertical = $\frac{a * \tau 1}{(\frac{L}{2})^2}$

Out[11]=
0.16253441

Приступим к поиску корней характеристического уравнения(MATLAB) в радиальном направлении:

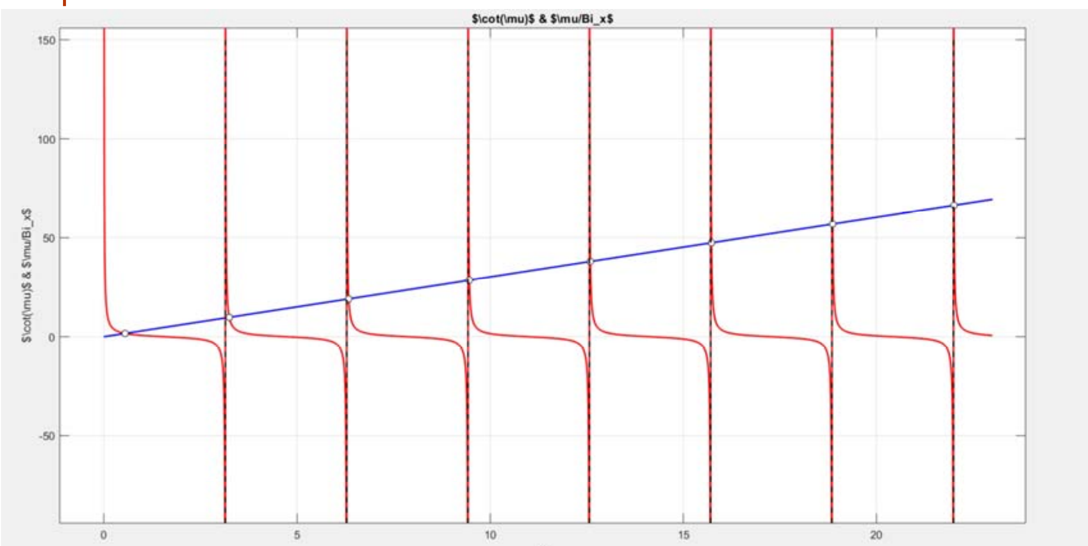


Отдельно рассмотрим седьмой корень(определим его визуально с точностью e-4)

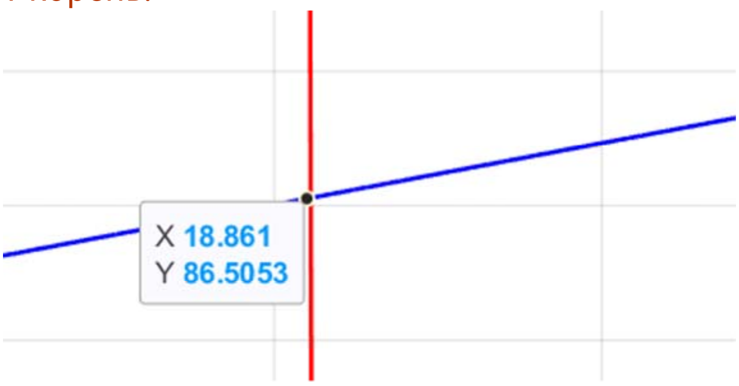


In[12]:= `ϵ = {0.6739, 3.8940, 7.0498, 10.1971, 13.3418, 16.4853, 19.6281};`

В вертикальном направлении:



7 корень:



In[13]:=
```
μ = {0.4506 , 3.2094 , 6.3177 , 9.4479 , 12.5837 , 15.7218 , 18.8611 };
```

Найдем функцию распределения температуры в радиальном направлении:

In[38]:=
$$\Theta Radial[r\_, \tau\_] := Total\left[\frac{2 * BesselJ[1, \epsilon]}{\epsilon * (BesselJ[0, \epsilon] + BesselJ[1, \epsilon]^2)} * BesselJ\left[0, \epsilon * \frac{r}{QuantityMagnitude[r0]}\right] * Exp\left[-\epsilon^2 * QuantityMagnitude[a] * \frac{\tau}{QuantityMagnitude[r0]^2}\right]\right];$$

суммировать · функция Бесселя J · показате··· · модуль размерной величины

In[22]:= ΘRadial[0, 0]

Out[22]= 1.0048639

```
tRadial[r_, τ_] = tLiquid + (t0 - tLiquid) * ΘRadial[r, τ];
```

Найдем температуру на оси цилиндра в момент времени $\tau = 0$

In[24]:= tRadial[0, 0]

Out[24]= 875.98077 K

In[27]:= UnitConvert[tRadial[0, 0], "DegreesCelsius"]

преобразовать единицы измерений

Out[27]= 602.83077 °C

Найдем функцию распределения температуры в вертикальном направлении:

In[28]:=
$$\Theta Vertical[x\_, \tau\_] := Total\left[\frac{2 * Sin[\mu]}{\mu + Sin[\mu] * Cos[\mu]} * Cos\left[\mu * \frac{x}{QuantityMagnitude[L / 2]}\right] * Exp\left[-\mu^2 * \frac{QuantityMagnitude[a] * \tau}{QuantityMagnitude\left[\left(\frac{L}{2}\right)^2\right]}\right]\right]$$

суммировать · косинус · показательная функция

In[29]:= ΘVertical[0, 0]

Out[29]= 1.00052

In[36]:=
```
tVertical[x_, τ_] := tLiquid + (t0 - tLiquid) * ΘVertical[x, τ];
```

Найдем температуру в центре цилиндра в момент времени $\tau = 0$

In[37]:= tVertical[0, 0]

Out[37]= 873.45267 K

In[32]:= UnitConvert[tVertical[0, 0], "DegreesCelsius"]

преобразовать единицы измерений

Out[32]= 600.30267 °C

Найдем функцию распределения температурного поля в цилиндре t(x,r,τ)

In[41]:=
```
Θ3D[x_, r_, τ_] := ΘVertical[x, τ] * ΘRadial[r, τ];
```

In[43]:=
```
t[x_, r_, τ_] := tLiquid + (t0 - tLiquid) * Θ3D[x, r, τ];
```

Начнем расчет температурного поля
Сначала для r=0:

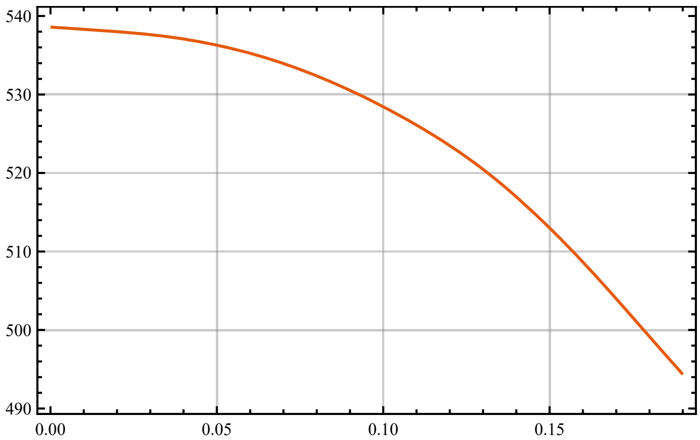
In[75]:=
```
Table[{ N[x],
 таблиц··· численное приближение
   UnitConvert[t[QuantityMagnitude[x], QuantityMagnitude[0], QuantityMagnitude[τ1]],
   преобразовать ··· модуль размерной величины модуль размерной величины модуль размерной величины
    "DegreesCelsius"]}, {x, {L / 2, 3 * L / 8, L / 4, L / 8, 0}}] // MatrixForm
                                                                   матричная форма
```

Out[75]//MatrixForm=

0.19 m	494.34726 °C
0.1425 m	515.99075 °C
0.095 m	529.51832 °C
0.0475 m	536.49663 °C
0.	538.59049 °C

In[77]:=
```
ListLinePlot[Table[{ N[x],
 линейный гра··· таблиц··· численное приближение
   UnitConvert[t[QuantityMagnitude[x], QuantityMagnitude[0], QuantityMagnitude[τ1]],
   преобразовать ··· модуль размерной величины модуль размерной величины модуль размерной величины
    "DegreesCelsius"]}, {x, {L / 2, 3 * L / 8, L / 4, L / 8, 0}}],
  InterpolationOrder → 2, PlotTheme → "Scientific", GridLines → Automatic]
  порядок интерполяции    тематический стиль графика  линии коорд··· автоматический
```

Out[77]=



Теперь для r=r0

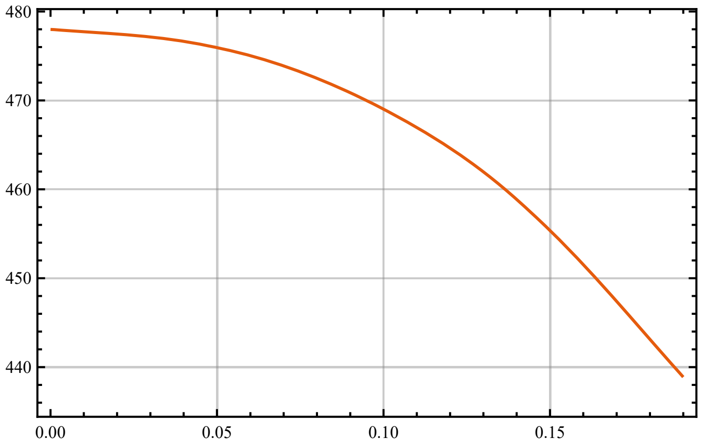
In[74]:=
```
Table[{N[x],
  UnitConvert[t[QuantityMagnitude[x], QuantityMagnitude[r0], QuantityMagnitude[τ1]],
   "DegreesCelsius"]}, {x, {L / 2, 3 * L / 8, L / 4, L / 8, 0}}] // MatrixForm
```
таблиц··· численное приближение; преобразовать ··· модуль размерной величины модуль размерной величины модуль размерной величины; матричная форма

Out[74]//MatrixForm=

0.19 m	438.88737 °C
0.1425 m	458.01096 °C
0.095 m	469.96355 °C
0.0475 m	476.12939 °C
0.	477.97947 °C

In[72]:=
```
ListLinePlot[Table[{N[x],
   UnitConvert[t[QuantityMagnitude[x], QuantityMagnitude[r0], QuantityMagnitude[τ1]],
    "DegreesCelsius"]}, {x, {L / 2, 3 * L / 8, L / 4, L / 8, 0}}],
 InterpolationOrder → 2, PlotTheme → "Scientific", GridLines → Automatic]
```
линейный гра··· таблиц··· численное приближение; преобразовать ··· модуль размерной величины модуль размерной величины модуль размерной величины; порядок интерполяции тематический стиль графика линии коорд··· автоматический

Out[72]=



Теперь для x=0

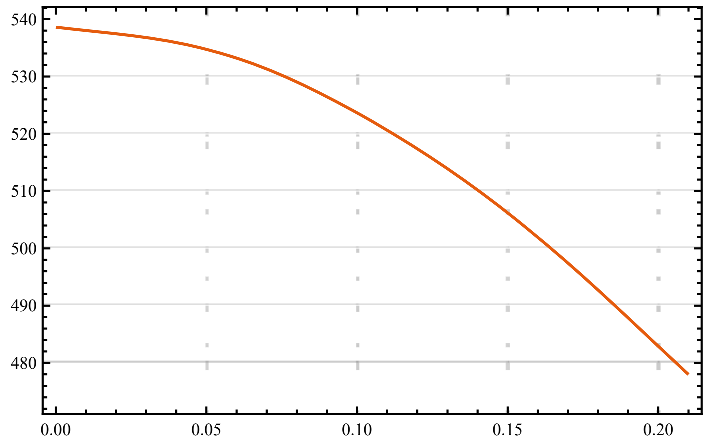
In[79]:=
```
Table[{N[r], UnitConvert[t[QuantityMagnitude[0],
    QuantityMagnitude[r], QuantityMagnitude[τ1]], "DegreesCelsius"]},
  {r, Reverse[{0, r0/4, r0/2, 3 * r0 / 4, r0}]}] // MatrixForm
```
таблиц··· числ··· преобразовать ··· модуль размерной величины; модуль размерной величины модуль размерной величины; расположить в обратном порядке; матричная форма

Out[79]//MatrixForm=

0.21 m	477.97947 °C
0.1575 m	503.00492 °C
0.105 m	522.15486 °C
0.0525 m	534.3697 °C
0.	538.59049 °C

In[80]:=
```
ListLinePlot[Table[{N[r],
    UnitConvert[t[QuantityMagnitude[θ], QuantityMagnitude[r], QuantityMagnitude[τ1]],
     "DegreesCelsius"]}, {r, Reverse[{0, r0/4, r0/2, 3*r0/4, r0}]}],
  InterpolationOrder → 2, PlotTheme → "Scientific", GridLines → Automatic]
```
линейный гра… таблиц… численное приближение
преобразовать … модуль размерной величины модуль размерной величины модуль размерной величины
расположить в обратном порядке
порядок интерполяции тематический стиль графика линии коорд… автоматический

Out[80]=



Теперь для x=L/2

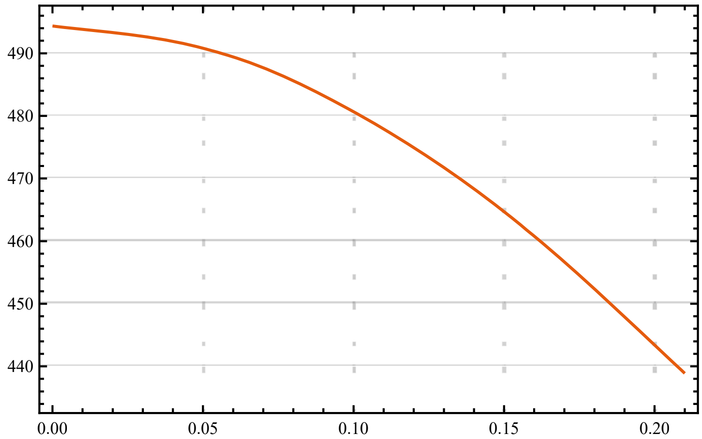
In[81]:=
```
Table[{N[r], UnitConvert[t[QuantityMagnitude[L/2],
      QuantityMagnitude[r], QuantityMagnitude[τ1]], "DegreesCelsius"]},
   {r, Reverse[{0, r0/4, r0/2, 3*r0/4, r0}]}] // MatrixForm
```
таблиц… числ… преобразовать … модуль размерной величины
модуль размерной величины модуль размерной величины
расположить в обратном порядке матричная форма

Out[81]//MatrixForm=

0.21 m	438.88737 °C
0.1575 m	461.78599 °C
0.105 m	479.30844 °C
0.0525 m	490.48519 °C
0.	494.34726 °C

```
In[82]:= ListLinePlot[Table[{N[r],
           UnitConvert[t[QuantityMagnitude[L/2], QuantityMagnitude[r], QuantityMagnitude[τ1]],
            "DegreesCelsius"]}, {r, Reverse[{0, r0/4, r0/2, 3 * r0 / 4, r0}]}],
         InterpolationOrder → 2, PlotTheme → "Scientific", GridLines → Automatic]
```

Out[82]=



Покажем распределение температуры в центре цилиндра и на расстоянии *0.2* d_0 от поверхности как функцию времени
Сначала для центра:

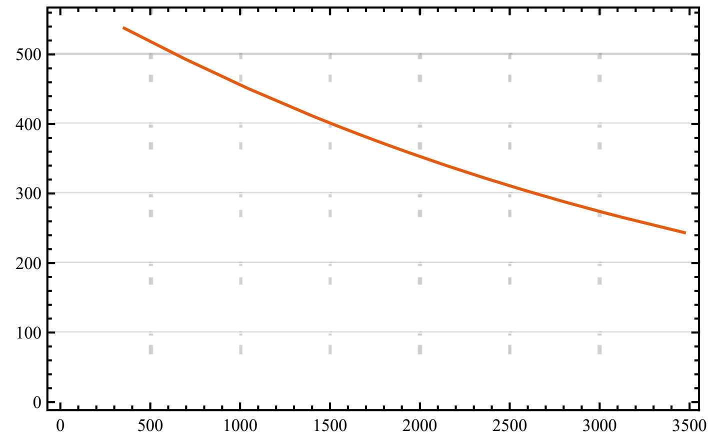
```
In[90]:= Table[{ N[k * τ1], UnitConvert[t[QuantityMagnitude[0], QuantityMagnitude[0],
            QuantityMagnitude[k * τ1]], "DegreesCelsius"]}, {k, Range[10]}] // MatrixForm
```

Out[90]//MatrixForm=

348. s	538.59049 °C
696. s	493.20474 °C
1044. s	451.09671 °C
1392. s	412.52813 °C
1740. s	377.35116 °C
2088. s	345.30186 °C
2436. s	316.10923 °C
2784. s	289.52001 °C
3132. s	265.30231 °C
3480. s	243.24464 °C

In[95]:=
```
ListLinePlot[
  Table[{N[k * τ1], UnitConvert[t[QuantityMagnitude[0], QuantityMagnitude[0],
      QuantityMagnitude[k * τ1]], "DegreesCelsius"]},
   {k, Range[10]}], PlotTheme → "Scientific", GridLines → Automatic]
```
линейный график данных; таблиц… численное… преобразовать … модуль размерной величины модуль размерной величины; модуль размерной величины; диапазон тематический стиль графика линии коорд… автоматический

Out[95]=



Теперь на расстоянии 0.2 d_0 (0.4 r_0)от поверхности , следовательно $r = 0.6\, r_0$)

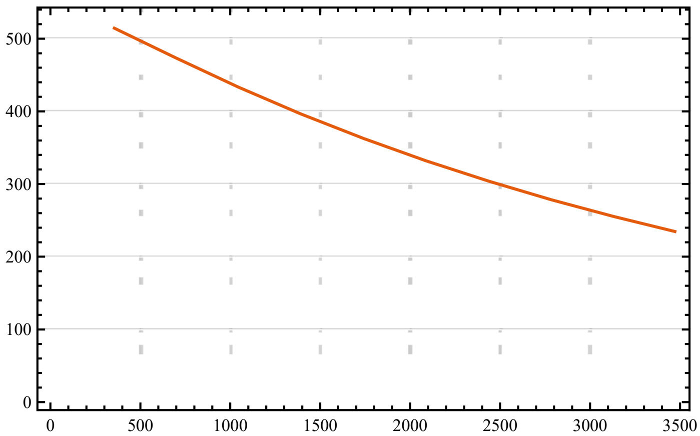
In[96]:=
```
Table[{N[k * τ1], UnitConvert[t[QuantityMagnitude[0], QuantityMagnitude[0.6 * r0],
     QuantityMagnitude[k * τ1]], "DegreesCelsius"]}, {k, Range[10]}] // MatrixForm
```
таблиц… численное… преобразовать … модуль размерной величины модуль размерной величины; модуль размерной величины; диапазон; матричная форма

Out[96]//MatrixForm=

348. s	515.2611 °C
696. s	473.68704 °C
1044. s	433.53727 °C
1392. s	396.56187 °C
1740. s	362.81228 °C
2088. s	332.06014 °C
2436. s	304.04862 °C
2784. s	278.53514 °C
3132. s	255.29721 °C
3480. s	234.13193 °C

In[97]:=
```
ListLinePlot[
 Table[{N[k * τ1], UnitConvert[t[QuantityMagnitude[0], QuantityMagnitude[0.6 * r0],
     QuantityMagnitude[k * τ1]], "DegreesCelsius"]},
  {k, Range[10]}], PlotTheme → "Scientific", GridLines → Automatic]
```
линейный график данных; таблиц⋯; численное⋯; преобразовать ⋯; модуль размерной величины; модуль размерной величины; модуль размерной величины; диапазон; тематический стиль графика; линии коорд⋯; автоматический

Out[97]=



Для определения темпа охлаждения и коэффициента температуропроводности заготовки построит несколько зависимостей *ln(θ)* используя данные полученные выше(в центре и на $0.6r_0$).
$\theta = t\text{-}tLiquid$

In[100]:=
```
lnForCenter = Table[{N[k * τ1],
   Log[QuantityMagnitude[UnitConvert[t[QuantityMagnitude[0], QuantityMagnitude[0],
        QuantityMagnitude[k * τ1]], "DegreesCelsius"] - tLiquid]]}, {k, Range[10]}]
```
таблиц⋯; численное приближение; на⋯; модуль размерной ве⋯; преобразовать ⋯; модуль размерной величины; модуль размерной величины; модуль размерной величины; диапазон

Out[100]=
```
{{348. s, 6.2549637}, {696. s, 6.1637458}, {1044. s, 6.0709611}, {1392. s, 5.9776904},
 {1740. s, 5.8843001}, {2088. s, 5.7908829}, {2436. s, 5.6974599},
 {2784. s, 5.6040358}, {3132. s, 5.5106115}, {3480. s, 5.4171871}}
```

In[101]:=
```
lnForPoint6r0 = Table[{N[k * τ1], Log[
    QuantityMagnitude[UnitConvert[t[QuantityMagnitude[0], QuantityMagnitude[0.6 * r0],
        QuantityMagnitude[k * τ1]], "DegreesCelsius"] - tLiquid]]}, {k, Range[10]}]
```
таблиц⋯; численное⋯; натуральный логарифм; модуль размерной ве⋯; преобразовать ⋯; модуль размерной величины; модуль размерной величины; модуль размерной величины; диапазон

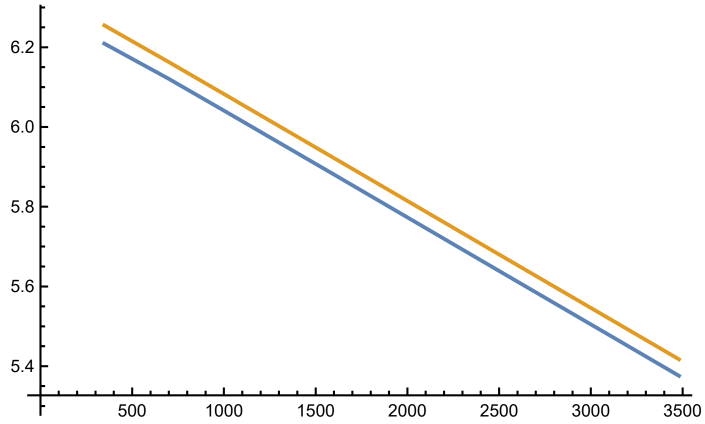
Out[101]=
```
{{348. s, 6.2091152}, {696. s, 6.1218062}, {1044. s, 6.0295723}, {1392. s, 5.9363795},
 {1740. s, 5.8430002}, {2088. s, 5.7495845}, {2436. s, 5.6561618},
 {2784. s, 5.5627377}, {3132. s, 5.4693134}, {3480. s, 5.375889}}
```

In[103]:=

```
ListLinePlot[{lnForPoint6r0, lnForCenter}]
```

линейный график данных

Out[103]=



Нетрудно заметить,что стадии регулярного режима гарантированно соответствует интервал [1000,2500] s.

Найдем число Фурье в краевых точках интервала регулярного режима и удостоверимся что оно больше 0.3

In[107]:=

$$\text{FoRadialAt1000} = \frac{a * \text{Quantity}[1000, \text{"Seconds"}]}{r0^2}$$

Out[107]=

0.38232675

In[108]:=

$$\text{FoRadialAt2500} = \frac{a * \text{Quantity}[2500, \text{"Seconds"}]}{r0^2}$$

Out[108]=

0.95581688

In[109]:=

$$\text{FoVerticalAt1000} = \frac{a * \text{Quantity}[1000, \text{"Seconds"}]}{\left(\frac{L}{2}\right)^2}$$

Out[109]=

0.4670529

In[110]:=

$$\text{FoVerticalAt2500} = \frac{a * \text{Quantity}[2500, \text{"Seconds"}]}{\left(\frac{L}{2}\right)^2}$$

Out[110]=

1.1676323

Приступим к поиску темпа охлаждения m для наших двух точек

In[116]:=

$$\text{mAtCenter} = \frac{\text{Log}\left[\frac{\theta 3D[0,0,1000]}{\theta 3D[0,0,2500]}\right]}{\text{Quantity}[2500 - 1000, \text{"Seconds"}]}$$

Out[116]=

0.00026830273 per second

In[117]:=

$$\text{mAtPoint6r0} = \frac{\text{Log}\left[\frac{\text{θ3D[0,QuantityMagnitude[0.6*r0],1000]}}{\text{θ3D[0,QuantityMagnitude[0.6*r0],2500]}}\right]}{\text{Quantity[2500 - 1000, "Seconds"]}}$$

Out[117]=

0.00026822536 per second

Берем среднее

In[118]:=

$$\text{m} = \frac{\text{mAtCenter + mAtPoint6r0}}{2}$$

Out[118]=

0.00026826405 per second

Fo > 0.3 поэтому ряд Фурье сходится быстро и первый член достаточно описывает все решение.
Найдем коэффициент формы K:

In[119]:=

$$\text{K} = \frac{1}{\left(\frac{\text{First}[\epsilon]}{\text{r0}}\right)^2 + \left(\frac{\text{First}[\mu]}{\frac{L}{2}}\right)^2}$$

Out[119]=

0.062804708 m^2

Найдем коэффициент температуропроводности по второй теореме Кондратьева(допущение что наше $m = m_\infty$) и сравним с теоретическим:

In[120]:=

```
aExperimental = K * m
```

Out[120]=

0.000016848245 m^2/s

In[121]:=

```
a
```

Out[121]=

0.00001686061 m^2/s

In[122]:=

$$\delta a = \frac{\text{Abs[a - aExperimental]}}{a}$$

Out[122]=

0.00073334795

Найдем количество теплоты, отданное цилиндром за время τ_1:
Для начала найдем сколько теплоты он отдаст до того момента как Θ==1 т.е. t=tLiquid

In[124]:=
```
Q = N[π * (r0)^2 * L * ρ * cp * (t0 - tLiquid)]
```
численное приближение

Out[124]=
1.1085406×10^{8} J

In[125]:=
$$\text{ΘRadialAverage} = \text{Total}\left[\frac{4 * \text{BiRadial}^2}{\epsilon^2 * (\epsilon^2 + \text{BiRadial}^2)} * \text{Exp}[-\epsilon^2 * \text{FoRadial}]\right]$$
суммировать показательная функция

Out[125]=
0.94018373

In[126]:=
$$\text{ΘVerticalAverage} = \text{Total}\left[\frac{2 * \text{Sin}[\mu]^2}{\mu^2 + \mu * \text{Sin}[\mu] * \text{Cos}[\mu]} * \text{Exp}[-\mu^2 * \text{FoVertical}]\right]$$
суммировать показательная функция

Out[126]=
0.96678044

In[127]:=
```
ΘAverage = ΘVerticalAverage * ΘRadialAverage
```

Out[127]=
0.90895125

In[128]:=
```
Qτ1 = Q (1 - ΘAverage)
```

Out[128]=
1.0093124×10^{7} J

Подытожим полным температурным полем в момент времени τ_1

In[138]:=

```
Show[ListLinePlot3D[
 показать  линейный график данных в 3D
  Table[t[QuantityMagnitude[x], QuantityMagnitude[r], QuantityMagnitude[τ1]],
  таблица  модуль размерной величины  модуль размерной величины  модуль размерной величины
   {x, 0, L/2, L/4}, {r, 0, r0, r0/4}]], Boxed → False]
                                          показать  ложь
```

Out[138]=