

План практических занятий по математике, ч. 1 (1 семестр)

Лектор Стаценко И.В.

Занятие 1 . Предел функции

1. Вычислить предел функции:

- 1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x+6}{3x-7}$; 2) $\lim_{x \rightarrow 7/3} \frac{4x+6}{3x-7}$; 3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x+6}{3x-7}$; 4) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-5x+6}{x^2-2x}$; 5) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-5x+6}{x^2-2x}$;
6) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-5x+6}{x^2-2x}$; 7) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-x^2-x+1}{x^3+x^2-x-1}$; 8) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4^x+6^{x+1}}{4^{x+1}-6^x}$; 9) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x+7x^2+9}{2^{x+1}-x^2+4x}$;
10) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2}$; 11) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$; 12) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2+3x})$;
13) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{(x+1)(x+2)} - x^2)$; 14) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x^2-2}$.

2. Вычислить предел функции с помощью 2 замечательного предела:

- 1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^x$; 2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{7x^2}\right)^{2x}$; 3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{3x}$; 4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x+1}{x-1}\right)^{3x}$;
5) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{2x-1}\right)^{3x}$; 6) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5}{x^2}\right)^{3x^3}$; 7) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2-2x+1}{x^2+5x-1}\right)^{4x}$; 8) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - 5x^2)^{\frac{2}{x^2}}$;
9) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 5x^3)^{\frac{2}{x^2}}$.

Д.З. 5.272-5.280; 5.288-5.299; 5.320-5.326

Занятие 2 . Первый замечательный предел. Бесконечно малые функции

1. Вычислить предел функции, используя 1 замечательный предел или эквивалентность бесконечно малых величин:

- 1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{3x}$; 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{\sin 3x}$; 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x-2x}{\operatorname{tg} 5x}$; 4) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \sin \frac{1}{x}$;
5) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sin(3x-9)}{2x-6}$; 6) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x-a}$; 7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - \cos 2x}{x^2}$; 8) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sin 5x}{x - \sin 7x}$;
9) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x - 2 \operatorname{arctg} 2x}{x + \arcsin 3x}$; 10) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\sin x} - \sqrt{1-\sin x}}{x}$, 11) $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}$;
12) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin x}{1 - \cos x}$; 13) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\ln(1-x)}$; 14) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{\ln(e-2x)-1}$; 15) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin 2x}$;
16) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{9+x}-3}{3 \operatorname{tg} 2x}$; 17) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{x^3}$; 18) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin^2 3x}{\cos 4x - \cos 3x}$; 19) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-1}{\ln x}$;
20) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sin(x-3)}{x^2-4x+3}$, 21) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos 3x - \cos x}{\operatorname{tg}^2 2x}$; 22) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2-x-1}-1}{\ln(x-1)}$; 23) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\ln \cos x}$.

Д.З. 5.303-5.316; 5.366-5.370

Занятие 3. КМ-1 «Пределы»

Занятие 4 Сравнение бесконечно малых и бесконечно больших. Вычисление пределов

1. Доказать, что функции $\frac{2x^2}{1+x}$ и x^2 являются бесконечно малыми одного порядка при $x \rightarrow 0$.
2. Доказать, что порядок функции $\frac{x^3+2x^5}{3-x}$ выше, чем порядок функции x^2 при $x \rightarrow 0$.
3. Доказать, что бесконечно малые при $x \rightarrow 0$ функции $\frac{x}{1-x}$ и $\frac{x}{1+x^2}$ эквивалентны.
4. Определить порядок малости бесконечно малой при $x \rightarrow 0$ функции $\alpha(x) = 1 - \cos x$ относительно функции $\beta(x) = x$.
5. Определить порядок роста бесконечно большой при $x \rightarrow \infty$ функции $A(x) = \sqrt[3]{x^2 - x} + \sqrt{x}$ относительно функции $B(x) = x$.
6. Вычислить предел функции:

1) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\operatorname{ctg} x}$; 2) $\lim_{x \rightarrow \pi/2} (1 - \cos x)^{\operatorname{tg} x}$; 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3 \sin x + 1}{2x + 1} \right)^{3/x}$

4) $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{x \left(2 + \operatorname{arctg} \frac{1}{x} \right) + 8 \cos x}$; 5) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x + \sqrt[3]{1 - x^3})$ 6) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x + \sqrt[3]{1 - x^3})$

7) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \ln(1 + 2x^3))^{3/(x \cdot \sin^2 x)}$ 8) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 3x)^{1/\operatorname{arctg}^2 x}$ 9) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+x^{3x}}{1+x^{2x}} \right)^{1/x^2}$

10) $\lim_{x \rightarrow \pi/2} (\sin x)^{\operatorname{tg} x}$ 11) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x}{\cos 2x} \right)^{-1/x^2}$ 12) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{\sin x}{\sin 2} \right)^{1/(x-2)}$

Д.з. 5.349-5.353; 5.372-5.374

Занятие 5-6.Односторонние пределы. Непрерывность функций. Точки разрыва

1. Вычислить односторонний предел:

1) $\lim_{x \rightarrow -0} \frac{x-|x|}{2x}$; 2) $\lim_{x \rightarrow 1 \pm 0} \frac{2-2x^2+|1-x^2|}{3-3x^2-|1-x^2|}$; 3) $\lim_{x \rightarrow -2 \pm 0} \frac{2x+4-|x^2-4|}{|x+2|+|x^3+8|}$; 4) $\lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{1-e^{\frac{1}{x-2}}}{\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x-2}}}}$.

2. Исследовать функции на непрерывность, найти точки разрыва; указать характер разрыва. В случае устранимого разрыва доопределить до непрерывной функции:

1) $f(x) = \frac{\sin x}{x}$; 2) $f(x) = \begin{cases} \frac{|x+1|}{x+1} x - 1, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$; 3) $y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x-4}$; 4) $y = e^{\frac{1}{x+1}}$; 5) $y = e^{-\frac{1}{|x+1|}}$

6) $f(x) = \frac{x^2-25}{x+5}$; 7) $f(x) = \frac{1}{2^{1-x}-2}$; 8) $y = \frac{\sqrt{x+15}-3}{x^2-36}$; 9) $y = \begin{cases} \cos x, & -\frac{\pi}{2} \leq x < -\pi/4 \\ 4/x, & x \in [-\frac{\pi}{4}; 2) \\ x^2 - 2, & 2 \leq x \end{cases}$

10) $f(x) = \frac{1}{\sin 1/x}$; 11) $y = \frac{1}{x} 3^{\frac{1}{x+3}}$; 12) $y = \begin{cases} 3x, & x > 1 \\ \frac{1}{x+2}, & x < 1 \end{cases}$; 13) $y = \frac{6}{2+3^{2-x}}$; 14) $y = \frac{1-\sqrt{2x+5}}{x^2-4}$;

15) $y = \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+5}}{\frac{1}{1-x} - \frac{1}{x-5}}$; 16) $y = \frac{\cos(x+3)}{x+3}$; 17) $y = \frac{3x-5}{\log_5|x-5|}$; 18) $y = \frac{\sin(x+3)}{(x+3)\left(1-2^{\frac{1}{x}}\right)}$.

Д.з. 5.338-5.345; 5.387-5.402

Занятие 7-8 . Производная функции

1. Вычислить производную функции $y = \cos(2x)$, используя определение производной.
2. Вычислить производную функции $y=f(x)$:

$$1) y = \sqrt[3]{x^5} \cos x - \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^4} ; \quad 2) y = \frac{\operatorname{tg} x}{\arccos x} + \ln x \cdot 3^x - \operatorname{sh} x ; \quad 3) y = \cos^3 x ;$$

$$4) y = \cos x^3 ; \quad 5) y = \frac{1}{\sqrt{x^2+3x+1}} ; \quad 6) y = \ln(\operatorname{arctg} x) ; \quad 7) y = \frac{\arcsin^2 x}{\sqrt{1-x^2}} ;$$

$$8) y = \sqrt{(1 + \arccos x)^3} ; \quad 9) y = 2\ln(x^2 - 5x + 3) + \operatorname{th} 9\sqrt{x} - \cos 3 ;$$

$$10) y = \ln(\cos^2 x + \sqrt{1 + \cos^4 x}) ; \quad 11) y = (\arcsin(2^x))^4 ; \quad 12) y = \sin(3\sqrt{\operatorname{tg} \ln x}) ;$$

$$13) y = x - \ln(1 + e^x) - \left(\operatorname{arctg} e^{\frac{x}{2}} \right)^2 ; \quad 14) y = \cos^2(3x) - 2 \frac{4^{x^3}}{5 + 3 \operatorname{arctg} x} ;$$

$$15) y = \ln(4x^2 - 16x) + \cos 2 ; \quad 16) y = e^{x/(x+1)} \cdot \sin 3x + \operatorname{ctg}(x^3)$$

$$17) y = \frac{3^x \sin 3x (\ln 3 + \cos 4x)}{16 + \ln^2 x} ; \quad 18) y = \sqrt{\cos x} \cdot 2^{\sqrt{\sin x}}$$

2. Вычислить логарифмическую производную:

$$1) y = x^x ; \quad 2) y = (\operatorname{ctg} x)^{x^3} ; \quad 3) y = x^{2\sqrt{x}} + 2^{x^x} \quad 4) y = \frac{3^x \operatorname{tg}^2 x \sqrt[5]{(2x-1)^3}}{20\sqrt{x+1}\sqrt[3]{1-x}}.$$

$$5) f(x) = \operatorname{arctg} \left(4 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} - e^x \sin^3 \frac{1}{3x} \right) + \ln 2 \cdot (\arcsin 2x)^{\operatorname{tg} x}$$

Д.з. 6.9-6.12; 6.21-6.76; 6.81-6.91

Занятие 9-10. Дифференциал функции. Производные и дифференциалы высших порядков. Неявно и параметрически заданные функции

- 1.. Найти производную x'_y функции $y = 3x + x^3$

2. Найти производную неявно заданной функции:

$$1) x^3 y^2 + 5xy + 4x^4 - 3y^3 = 0 \quad 2) x^2 y^2 + \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = 3 \quad 3) x^y = y^x$$

3. Найти производную параметрически заданной функции:

$$1) \begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \sin t \end{cases} ; \quad 2) \begin{cases} x = \frac{3t}{1+t^3} \\ y = \frac{3t^2}{1+t^3} \end{cases} ; \quad 3) \begin{cases} x = \ln^2 \sin t \\ y = 3\cos 4t - t \sin 2t \end{cases}.$$

4. Вычислить дифференциал заданной функции :

1) $y = (1 + \operatorname{tg} 3x)^8$; 2) $y = \operatorname{arctg} \ln \sin 2^x$

5. Вычислить производную функции указанного порядка:

1) $y = \operatorname{tg} x$, $y'' = ?$; 2) $y = (x + 1)^5$, $y''' = ?$; 3) $y = x^3 e^x$, $y^{IV} = ?$

6. Вычислить дифференциал третьего порядка функции $y = \operatorname{arctg} x$

7. Найти производные n-го порядка от функций:

1) $y = \frac{1}{1-x}$; 2) $y = \sin 2x$

8. Найти производную второго порядка неявно заданной функции:

1) $\operatorname{arctg} y - y + xy = 0$; 2) $e^{2xy^2} + 4xy^2 = e^2$.

9. Найти производную третьего порядка параметрически заданной функции:

1) $\begin{cases} x = \ln t \\ y = \sin 2t \end{cases}$; 2) $\begin{cases} x = \sin t - t \cos t \\ y = \cos t + t \sin t \end{cases}$

10. Найти уравнение касательной и нормали к кривой $y=f(x)$ в указанной точке:

1) $y = x^3 + 2x$, $M(1,3)$; 2) $y = \frac{\ln x}{x}$, $x_0 = 1$;

3) касательная к кривой $y = \ln x$ параллельна прямой $y = 2x - 3$;

4) $y = e^{1-x^2}$ в точках пересечения с прямой $y = 1$.

Д.з. 6.146-6.157; 6.163-6.165; 6.168-6.179; 6.184-6.188; 6.199-6.200; 6.235-6.240

Занятие 11 . КМ-3 «Дифференцирование»