# Типовой вариант контрольной работы по теме: кратные интегралы и элементы теории поля

**Задача 1.** Вычислить интеграл $\iint\limits_D \frac{x}{1+x^2y^2}dxdy$,

$$D: \quad \{0 \le x \le 1; \quad 0 \le y \le x.\}$$

**Решение:** $\iint\limits_D \frac{x^4}{1+x^2y^2}dxdy = \int\limits_0^1 x^3dx\int\limits_0^x \frac{d(xy)}{1+x^2y^2} = \int\limits_0^1 x^3dx\left[arctg(xy)\right]\Big|_0^x =$

$$= \int\limits_0^1 x^2 arctg\left(x^2\right)xdx = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 tarctg(t)dt = \frac{1}{2}\left(\frac{t^2}{2}\cdot arctg(t)\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \frac{t^2dy}{1+t^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\left(1-\frac{\pi}{4}\right)\right) = -\frac{1}{4}+\frac{\pi}{8}.$$

**Задача 2.** Найти интеграл $\iint\limits_D \frac{dxdy}{\sqrt{9+x^2+y^2}}$, $\qquad D: x^2+y^2 \le 16; \quad x \ge 0.$

**Решение:**

Область интегрирования $D$ - правая половина круга радиуса $R=4$ с центром в начале координат. Представим данную область в полярных координатах $O\rho\varphi$:

$$\tilde{D}: \left\{\left(\rho\cos(\varphi)\right)^2 + \left(\rho\sin(\varphi)\right)^2 \le 16; \qquad -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}.\right\};$$

или
$$\tilde{D}: \left\{0 \le \rho \le 4; \qquad -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}.\right\}.$$

Тогда

$$\iint\limits_D \frac{dxdy}{\sqrt{9+x^2+y^2}} = \iint\limits_{\tilde{D}} \frac{\rho d\rho d\varphi}{\sqrt{9+\left(\rho\cos(\varphi)\right)^2+\left(\rho\sin(\varphi)\right)^2}} = \iint\limits_{\tilde{D}} \frac{\rho d\rho d\varphi}{\sqrt{9+\rho^2}} =$$

$$=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\int_0^4\frac{\rho d\rho}{\sqrt{9+\rho^2}}\right)d\varphi=\frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}d\varphi\int_0^4\frac{d\left(\rho^2+9\right)}{\sqrt{9+\rho^2}}=$$

$$=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left[\left(\sqrt{9+\rho^2}\right)\Big|_0^4\right]d\varphi=2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}d\varphi=2\pi.$$

**Ответ:** $2\pi$.

**Задача 3.** Вычислить внешний объем тела, ограниченного поверхностями:

$$z=6-\sqrt{x^2+y^2};\ \ z\ =\ x^2+y^2;\ z=0.$$

**Решение:** $V_1$ – внешнее пространство между параболоидом и конусом и плоскостью $z=0$ равно

$$V_1=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^2\rho d\rho\int_0^{\rho^2}dz+\int_0^{2\pi}d\varphi\int_2^6\rho d\rho\int_0^{6-\rho}dz=\frac{184}{3}\pi\approx 191{,}6.$$

**Задача 4.** Найти часть площади поверхности сферы:

$$\Sigma:\left\{\ x^2+y^2+z^2=16,\quad 0\le z\le 4,\quad 0\le y\le 4\right\}.$$

**Решение:** $$S=\iint_{\Sigma}d\sigma=\iint_{D_{Oxy}}\sqrt{1+\left(z'_x\right)^2+\left(z'_y\right)^2}\,dxdy.$$

Полагаем, что для заданной поверхности $\Sigma$ можно записать уравнение поверхности в виде: $z(x,y)=\sqrt{16-x^2-y^2}$. Тогда

$$\sqrt{1+\left(z'_x\right)^2+\left(z'_y\right)^2}=\frac{4}{\sqrt{16-x^2-y^2}}.$$

Поверхность сферы проецируется на плоскость $Oxy$ в полукруг следующего вида:

$$D_{Oxy}:\left\{\, x^2+y^2\le 16,\quad 0\le y\le 4\right\}.$$

Тогда

$$S=4\iint\limits_{D_{Oxy}}\frac{dxdy}{\sqrt{16-x^2-y^2}}=4\int\limits_0^{\pi}d\varphi\int\limits_0^4\frac{\rho}{\sqrt{16-\rho^2}}d\rho=16\pi.$$

**Задача 5.** Найти модуль потока векторного поля $\vec{a}=3x\vec{i}-y\vec{j}+z\vec{k}$ через замкнутую поверхность $\Sigma:\left\{z=\sqrt{10-x^2-y^2};\ z=3\sqrt{x^2+y^2}\right\}$.

**Решение:**

$$\varPi=3\iiint\limits_{\Omega}dxdydz=3\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1\left(\rho^1\right)d\rho\int\limits_{3\rho}^{\sqrt{10-\rho^2}}dz=2\pi\left(10^{3/2}-30\right)\approx 10,2.$$