

ChatGPT - Решение задач по погрешности

Задача 1.1. Объем цилиндра V рассчитывается по формуле:

$$V = \frac{\pi d^2}{4} h, \quad (1)$$

где d – диаметр, h – высота сосуда.

1) Записать разложение функции $f(\pi, d, h)$ в ряд Тейлора; 2) получить строгое выражение для оценки СКО величины V в предположении возможности линеаризации исходной функции; 3) указать коэффициенты корреляции между параметрами, которые необходимо оценить.

Задача 1.2 Оценить случайную (S) составляющую погрешности объема V и границу неисключенной систематической погрешности θ , если объем V , см^3 определяется по формуле (1):

$$V = \frac{\pi d^2}{4} h,$$

где d – диаметр, h – высота сосуда.

Диаметр и высота получены в ходе прямых многократных измерений, результаты которых приведены в таблице:

	1	2	3	4	5	6	7
$d, \text{см}$	9,5	9,6	9,7	9,4	9,5	9,6	9,5
$h, \text{см}$	10,0	10,1	10,0	10,1	10,0	10,1	10,0

Инструментальная погрешность определения d и h : $\Delta d = \Delta h = \Delta_{\text{СИ}} = 0,05 \text{ см}$.

Число π при расчетах принято равным $3,140 \pm 0,002$.

Замечание: рекомендуется оценивать относительную погрешность V .

При выполнении расчетов учесть, что величины Δd и Δh коррелированы между собой, так как измерения выполняются одним СИ.

Реши эти задачи пожалуйста

Для решения задач 1.1 и 1.2 необходимо выполнить несколько шагов. Я подробно опишу их ниже:

Задача 1.1

Объем цилиндра вычисляется по формуле:

$$V = \frac{\pi d^2}{4} h,$$

где d — диаметр, h — высота.

Шаг 1: Разложение функции $V(\pi, d, h)$ в ряд Тейлора

Функция $V(\pi, d, h)$ зависит от трех переменных: π , d , и h . Линеаризация предполагает разложение функции в окрестности средних значений π_0, d_0, h_0 :

$$V \approx V_0 + \frac{\partial V}{\partial \pi} \Delta \pi + \frac{\partial V}{\partial d} \Delta d + \frac{\partial V}{\partial h} \Delta h,$$

где $V_0 = V(\pi_0, d_0, h_0)$, а $\Delta \pi, \Delta d, \Delta h$ — отклонения от средних значений.

Найдем частные производные:

$$1. \quad \frac{\partial V}{\partial \pi} = \frac{d^2}{4} h,$$

2. $\frac{\partial V}{\partial d} = \frac{\pi d}{2} h,$
 3. $\frac{\partial V}{\partial h} = \frac{\pi d^2}{4}.$
-

Шаг 2: Выражение для оценки стандартного отклонения σ_V

Используя формулу для оценки СКО:

$$\sigma_V^2 = \left(\frac{\partial V}{\partial \pi} \sigma_\pi \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial d} \sigma_d \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial h} \sigma_h \right)^2 + 2r_{d,h} \frac{\partial V}{\partial d} \frac{\partial V}{\partial h} \sigma_d \sigma_h,$$

где $r_{d,h}$ — коэффициент корреляции между d и h .

Подставляем производные и стандартные отклонения ($\sigma_\pi, \sigma_d, \sigma_h$).

Шаг 3: Коэффициенты корреляции

Так как измерения d и h выполнены одной системой, можно считать, что Δd и Δh коррелированы. Значение коэффициента корреляции $r_{d,h}$ обычно задается или оценивается.

Задача 1.2

Оценим случайную составляющую погрешности S и границу систематической погрешности Θ .

Шаг 1: Вычислим средние значения

Для диаметра d и высоты h :

$$\bar{d} = \frac{\sum d_i}{n}, \quad \bar{h} = \frac{\sum h_i}{n}.$$

Подставляем значения из таблицы.

Шаг 2: Вычислим стандартные отклонения σ_d, σ_h

Используем формулу для выборочного СКО:

$$\sigma_d = \sqrt{\frac{\sum (d_i - \bar{d})^2}{n - 1}}, \quad \sigma_h = \sqrt{\frac{\sum (h_i - \bar{h})^2}{n - 1}}.$$

Шаг 3: Погрешность объема

Используем формулу для относительной погрешности:

$$\varepsilon_V = \sqrt{\left(2 \frac{\sigma_d}{\bar{d}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_h}{\bar{h}}\right)^2 + 2r_{d,h} \cdot 2 \frac{\sigma_d}{\bar{d}} \cdot \frac{\sigma_h}{\bar{h}}}.$$

Систематическую погрешность Θ определяем как:

$$\Theta = V \cdot \sqrt{\left(2 \frac{\Delta d}{\bar{d}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta h}{\bar{h}}\right)^2}.$$

Если хочешь, могу провести численные расчеты для этих формул. Скажи, нужно ли это?

Давай

Результаты расчетов:

1. Средний объем V : 717.93 см³
2. Относительная случайная погрешность ε_V : 2.58%
3. Систематическая погрешность Θ : 1.16%

Эти значения позволяют оценить точность измерений и качество данных. Если требуется, могу сделать дополнительные вычисления или уточнения!