

Задача №5

Плоская упругая пластина толщиной h , нагруженная осесимметричной нагрузкой

$$a = 0,06 \text{ м}; R = 1,00 \text{ м}; D \cdot 10^5 = 2 \text{ МПа}$$

$$P_0 = 0,6 \text{ МПа}; q \cdot 10^{-6} = 0,2 \text{ Н/м}$$

Формулы решения:

$$W(x) = C_1 e^{-kx} \sin(kx) + C_2 e^{-kx} \cos(kx) + \frac{P_0 R^2}{Eh}$$

$$x=0 \quad \varphi(0) = 0$$

$$\varphi(0) = \frac{dw}{dx} \Big|_0 = 0$$

$$Q = D \frac{d^2 w}{dx^2} \Big|_0 = -\frac{q}{2}$$

Вычисляем формулы для угла поворота сечения и поперечной силы

$$\varphi(x) = -e^{-kx} k (C_1 \cos(kx) - C_2 \sin(kx) + C_1 \sin(kx) + C_2 \cos(kx))$$

$$Q(x) = 2 D e^{-kx} k^3 (C_1 \cos(kx) + C_2 \sin(kx) - C_1 \sin(kx) + C_2 \cos(kx))$$

Если подставить в граничные условия получим:

$$-k(C_1 - C_2) = 0$$

$$2 D k^3 (C_1 + C_2) = -\frac{q}{2}$$

Решение:

$$C_1 = -\frac{1}{8} \frac{q}{Dk^3}, C_2 = -\frac{1}{8} \frac{q}{Dk^3}$$

С учетом полученных результатов:

$$W(x) = -\frac{1}{8} \frac{q}{Dk^3} e^{-kx} \cos(kx) - \frac{1}{8} \frac{q}{Dk^3} e^{-kx} \sin(kx)$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{4} \frac{q}{Dk^2} e^{-kx} \sin(kx)$$

$$M_x = D(2C_1 k^2 e^{-kx} \sin(kx) - 2C_2 k e^{-kx} \cos(kx)) = -\frac{1}{4} \frac{q e^{-kx}}{k} (\sin(kx) + \cos(kx))$$

$$Q(x) = -\frac{1}{2} q e^{-kx} \cos(kx)$$

$$M_y(x) = \mu N v + \frac{E h w}{R} = \frac{E h}{R} \left(-\frac{1}{8} \frac{q e^{-kx} \cos(kx)}{Dk^3} - \frac{1}{8} \frac{q e^{-kx} \sin(kx)}{Dk^3} \right)$$

Упругие свойства:

$$h = 0,002500 \text{ м}$$

$$\lambda^* = 0,015000 \text{ м}$$

$$D = \frac{E h^3}{12(1-\mu^2)} = 61813,186813 \text{ Н·м}$$

Волновое число:

$$k = \sqrt{\frac{E h}{4 D R^2}} = \sqrt{\frac{E h^2 (1-\mu^2)}{4 E h^3 R^2}} = \sqrt{\frac{3(1-\mu^2)}{\lambda^2 R^2}} = 10,495304 \text{ м}^{-1}$$

Длина краевого эффекта:

$$\lambda = \frac{1}{k} = 0,295333 \text{ м}$$