Выполнение расчетного задания по дисциплине Тепломассообмен в среде Mathematica 14

Студент: Григорьев К.А.

Группа: ТФ-11-22

Задача № 3

Задача 3.

Цилиндрическую заготовку диаметром d=330 мм и длиной L=0,4 м, с начальной температурой t_0=750°C поместили в охладительный бассейн с температурой жидкости $t_ж$=25°C, в котором она начала охлаждаться при постоянном коэффициенте теплоотдачи α=70 Вт/(м^2 К). Свойства материала заготовки: марка - Силумин, плотность - 2,659 г/см^3, удельная теплоёмкость - 871 Дж/(кг К), теплопроводность - 164 Вт/(м К).

Рассчитать температурное поле в цилиндре как функцию радиуса r (мм) и линейной координаты x (мм) в момент времени τ_1=1,3 мин от начала охлаждения, результаты вычислений свести в таблицы, построить графики $t(x, 0, \tau_1)$, $t(x, r_0, \tau_1)$, $t(0, r, \tau_1)$, $t(L/2, r, \tau_1)$.

Рассчитать температуру в центре цилиндра и на глубине 0,2d от поверхности как функцию времени; для стадии регулярного режима охлаждения вычислить, имитируя эксперимент, темп охлаждения цилиндра и температуропроводность материала заготовки.

Вычислить количество теплоты, отданной цилиндром за время охлаждения от его начала, до момента τ_1.

Введем исходные данные:

In[451]:=

```
d0 = UnitConvert[Quantity[330, "Millimeters"], "Meters"];

r0 = d0 / 2;
L = Quantity[0.4, "Meters"];
t0 = Quantity[750, "DegreesCelsius"];
tLiquid = Quantity[25, "DegreesCelsius"];
α = Quantity[70, "Watts"/("Meters"^2 * "Kelvins")];

ρ = Quantity[2659, "Kilograms"/"Meters"^3];

cp = Quantity[871, "Joules"/("Kilograms" * "Kelvins")];

λ = Quantity[164, "Watts"/("Meters" * "Kelvins")];

τ1 = UnitConvert[Quantity[1.3, "Minutes"], "Seconds"];
```

Найдем коэффициент температуропроводности а:

In[457]:=

```
a = UnitConvert[N[λ/(cp * ρ)], "Meters"^2/"Seconds"]
```

Out[457]=

$0.000070812081\ m^2/s$

Числа Био по радиальному(BiRadial) и вертикальному(BiVertical) направлениям:

In[458]:=

$$\text{BiRadial} = N\left[\frac{\alpha * r0}{\lambda}\right]$$

численное п

Out[458]=

0.070426829

In[459]:=

$$\text{BiVertical} = N\left[\frac{\left(\alpha * \frac{L}{2}\right)}{\lambda}\right]$$

численное при

Out[459]=

0.085365854

Числа Фурье по радиальному(FoRadial) и вертикальному(FoVertical) направлениям:

In[460]:=

$$\text{FoRadial} = \frac{a * \tau 1}{(r0)^2}$$

Out[460]=

0.20287759

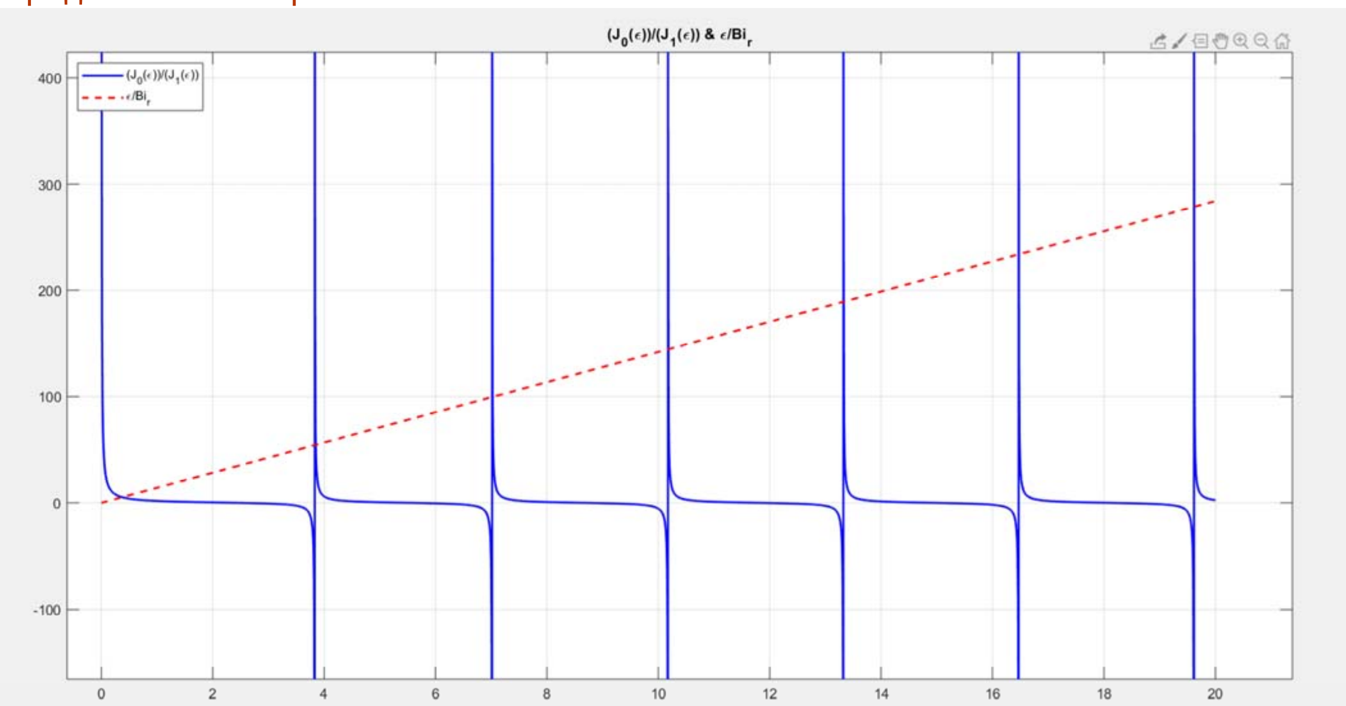
In[461]:=

$$\text{FoVertical} = \frac{a * \tau 1}{\left(\frac{L}{2}\right)^2}$$

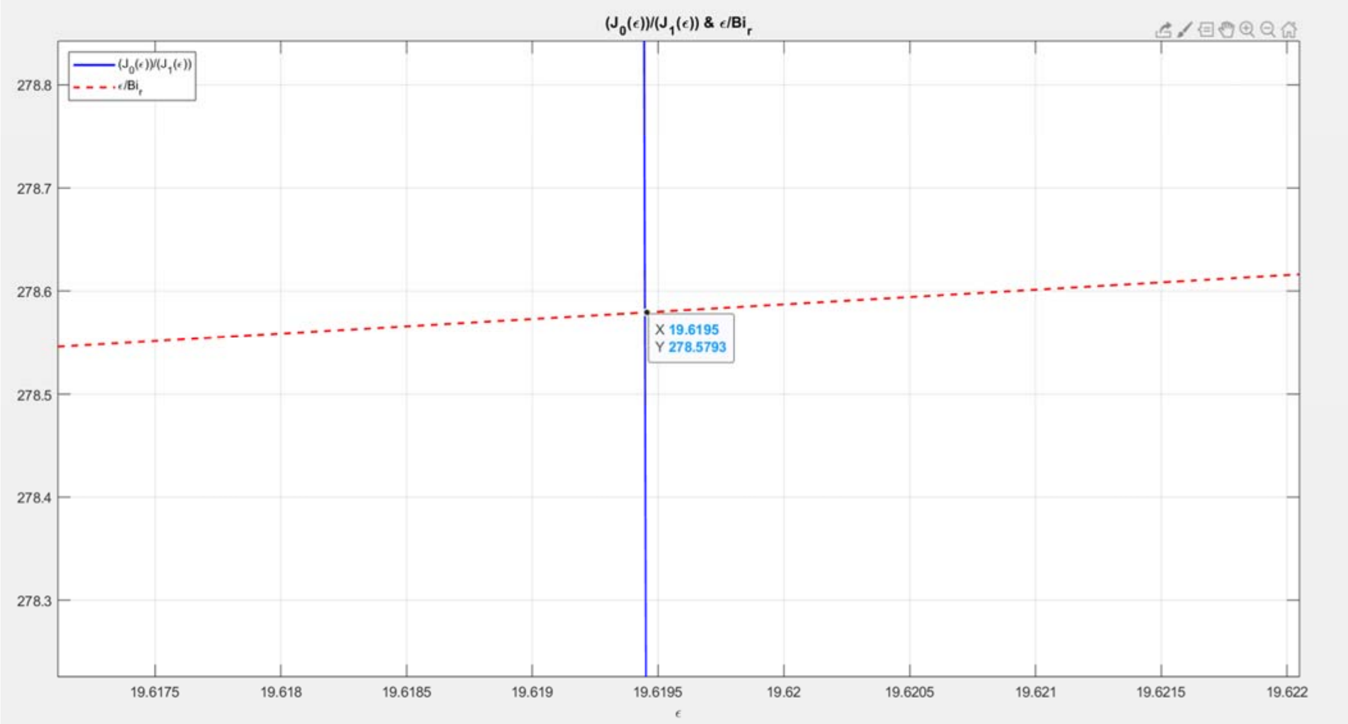
Out[461]=

0.13808356

Приступим к поиску корней характеристического уравнения(MATLAB) в радиальном направлении:



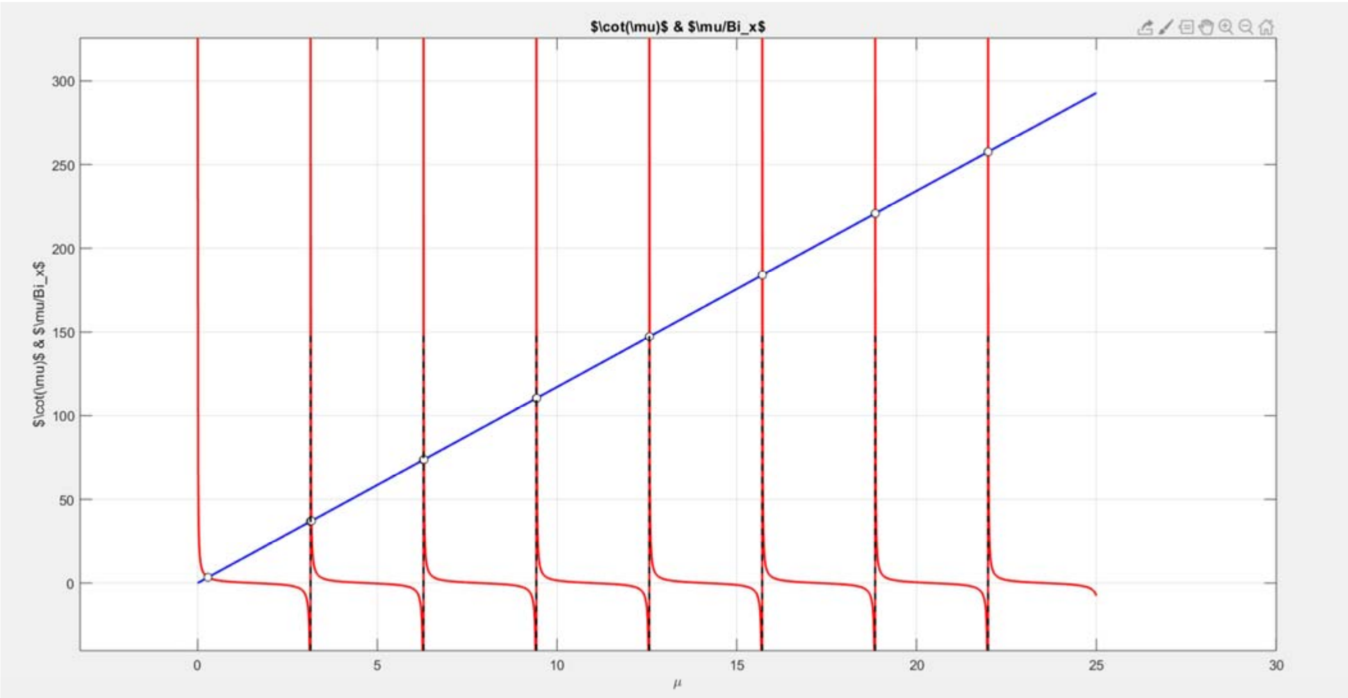
Отдельно рассмотрим седьмой корень(определим его визуально с точностью е-5)



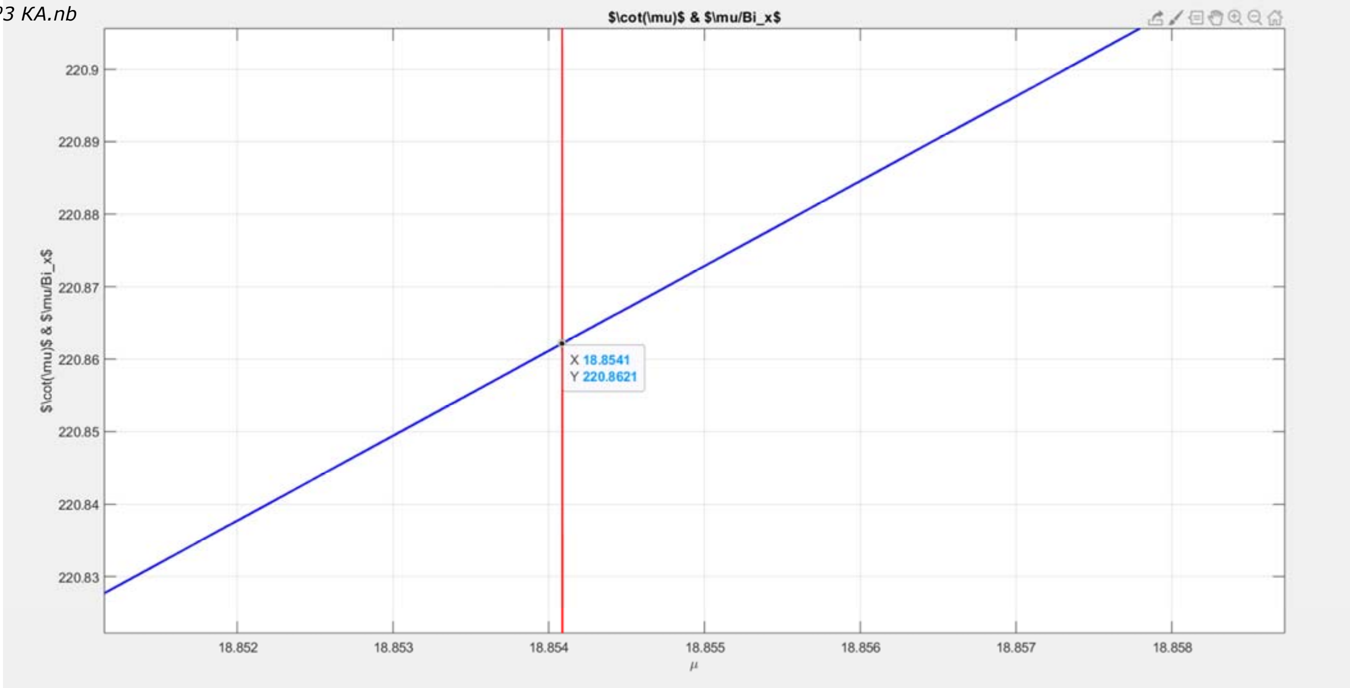
In[462]:=

```
ϵ = {0.3720  , 3.8500 ,  7.0256  , 10.1804 ,  13.3290 ,  16.4749 ,  19.6195};
```

В вертикальном
направлении:



7 корень:



In[463]:=

```
μ = {0.2881 , 3.1685 , 6.2967 , 9.4338 , 12.5732 , 15.7134 , 18.8541 };
```

Найдем функцию распределения температуры в радиальном направлении:

In[464]:=

```
ΘRadial[r_, τ_] := Total[2 * BesselJ[1, ϵ] / (ϵ * (BesselJ[0, ϵ] + BesselJ[1, ϵ]^2)) *
    BesselJ[0, ϵ * r / QuantityMagnitude[r0]] * Exp[-ϵ^2 * QuantityMagnitude[a] * τ / QuantityMagnitude[r0]^2]];
```

суммировать; функция Бесселя J; показате⋯; модуль размерной величины

In[465]:=

```
ΘRadial[0, 0]
```

Out[465]=

0.99904756

In[466]:=

```
tRadial[r_, τ_] = tLiquid + (t0 - tLiquid) * ΘRadial[r, τ];
```

In[467]:=

```
tLiquid + (t0 - tLiquid) * ΘRadial[0, 0]
```

Out[467]=

1022.4595 K

Найдем температуру на оси цилиндра в момент времени $\tau = 0$ (оно тут показывает почему то 288.71288К но в расчетах далее это нормальные 1022К, можете сами прокомпилировать << tLiquid+(t0-tLiquid)*ΘRadial[0,0] >>)

In[468]:=

```
tRadial[0, 0]
```

Out[468]=

1022.4595 K

Нормальное *tRadial[0,0]*

In[469]:=

```
tRadial[0, 0] = tLiquid + (t0 - tLiquid) * ΘRadial[0, 0]
```

Out[469]=

1022.4595 K

In[470]:=
```
UnitConvert[tRadial[0, 0], "DegreesCelsius"]
```
преобразовать единицы измерений

Out[470]=
749.30948 °C

Найдем функцию распределения температуры в вертикальном направлении:

In[471]:=
```
ΘVertical[x_, τ_] :=
```

$$\text{Total}\left[\frac{2*\text{Sin}[\mu]}{\mu+\text{Sin}[\mu]*\text{Cos}[\mu]}*\text{Cos}\left[\mu*\frac{x}{\text{QuantityMagnitude}[L/2]}\right]*\text{Exp}\left[-\mu^2*\frac{\text{QuantityMagnitude}[a]*\tau}{\text{QuantityMagnitude}\left[\left(\frac{L}{2}\right)^2\right]}\right]\right]$$

суммировать, косинус, показательная функция

In[472]:=
```
ΘVertical[0, 0]
```

Out[472]=
1.0002201

In[473]:=
```
tVertical[x_, τ_] := tLiquid + (t0 - tLiquid) * ΘVertical[x, τ];
```

Найдем температуру в центре цилиндра в момент времени $\tau = 0$

In[474]:=
```
tVertical[0, 0]
```

Out[474]=
1023.3096 K

In[475]:=
```
UnitConvert[tVertical[0, 0], "DegreesCelsius"]
```
преобразовать единицы измерений

Out[475]=
750.15958 °C

Найдем функцию распределения температурного поля в цилиндре t(x,r,τ)

In[476]:=
```
Θ3D[x_, r_, τ_] := ΘVertical[x, τ] * ΘRadial[r, τ];
```

In[477]:=
```
t[x_, r_, τ_] := tLiquid + (t0 - tLiquid) * Θ3D[x, r, τ];
```

Начнем расчет температурного поля
Сначала для r=0:

In[478]:=
```
Table[{N[x], UnitConvert[t[QuantityMagnitude[x], QuantityMagnitude[0], QuantityMagnitude[τ1]],
    "DegreesCelsius"]}, {x, {L / 2, 3 * L / 8, L / 4, L / 8, 0}}] // MatrixForm
```
таблиц··· числ··· преобразовать ··· модуль размерной величины модуль размерной величины модуль размерной величины матричная форма

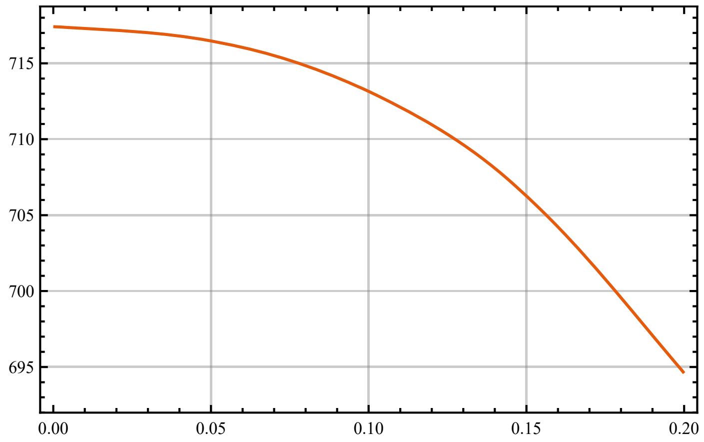
Out[478]//MatrixForm=

0.2 m	694.59737 °C
0.15 m	706.26061 °C
0.1 m	713.14792 °C
0.05 m	716.46867 °C
0.	717.41453 °C

In[479]:=

```
ListLinePlot[
линейный график данных
 Table[{ N[x], UnitConvert[t[QuantityMagnitude[x], QuantityMagnitude[0], QuantityMagnitude[τ1]],
 таблиц··· числ··· преобразовать ··· модуль размерной величины модуль размерной величины модуль размерной величины
    "DegreesCelsius"]}, {x, {L / 2, 3 * L / 8, L / 4, L / 8, 0}}],
 InterpolationOrder → 2, PlotTheme → "Scientific", GridLines → Automatic]
 порядок интерполяции       тематический стиль графика      линии коорд··· автоматический
```

Out[479]=



In[480]:=

Теперь для r=r0

In[481]:=

```
Table[{ N[x], UnitConvert[t[QuantityMagnitude[x], QuantityMagnitude[r0], QuantityMagnitude[τ1]],
таблиц··· числ··· преобразовать ··· модуль размерной величины модуль размерной величины модуль размерной величины
    "DegreesCelsius"]}, {x, {L / 2, 3 * L / 8, L / 4, L / 8, 0}}] // MatrixForm
                                                                  матричная форма
```

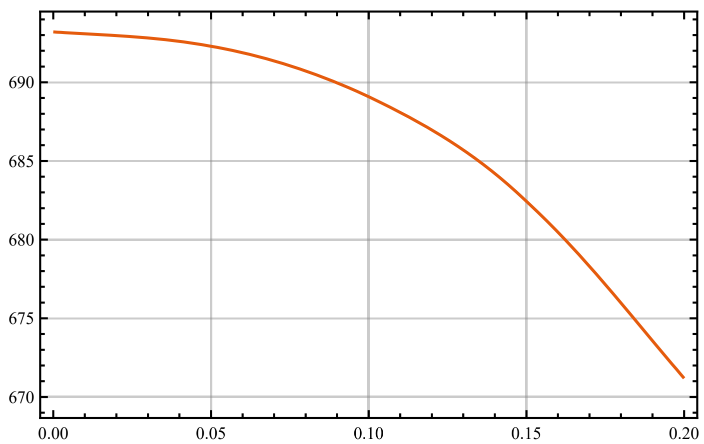
Out[481]//MatrixForm=

0.2 m	671.18264 °C
0.15 m	682.43804 °C
0.1 m	689.08451 °C
0.05 m	692.28914 °C
0.	693.20192 °C

In[482]:=

```
ListLinePlot[
линейный график данных
 Table[{ N[x], UnitConvert[t[QuantityMagnitude[x], QuantityMagnitude[r0], QuantityMagnitude[τ1]],
 таблиц··· числ··· преобразовать ··· модуль размерной величины модуль размерной величины модуль размерной величины
    "DegreesCelsius"]}, {x, {L / 2, 3 * L / 8, L / 4, L / 8, 0}}],
 InterpolationOrder → 2, PlotTheme → "Scientific", GridLines → Automatic]
 порядок интерполяции       тематический стиль графика      линии коорд··· автоматический
```

Out[482]=



Теперь для x=0

In[483]:=

```
Table[{ N[r], UnitConvert[t[QuantityMagnitude[0], QuantityMagnitude[r], QuantityMagnitude[τ1]],
 ⌊таблиц⋯ ⌊числ⋯ ⌊преобразовать ⋯ ⌊модуль размерной величины ⌊модуль размерной величины ⌊модуль размерной величины
    "DegreesCelsius"]}, {r, Reverse[{0, r0/4, r0/2, 3 * r0 / 4, r0}]}] // MatrixForm
                          ⌊расположить в обратном порядке         ⌊матричная форма
```

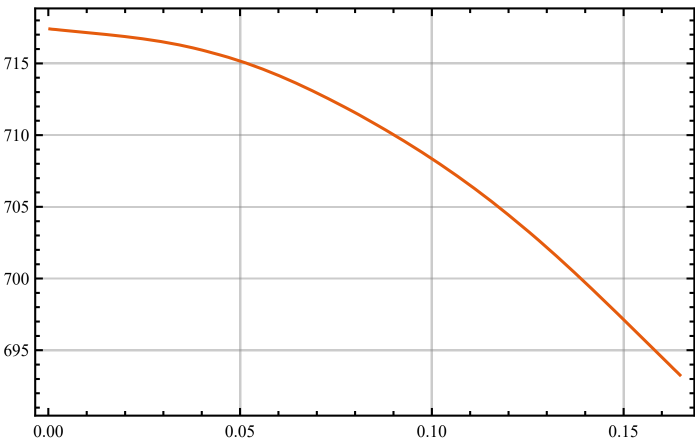
Out[483]//MatrixForm=

0.165 m	693.20192 °C
0.12375 m	703.59816 °C
0.0825 m	711.19304 °C
0.04125 m	715.84471 °C
0.	717.41453 °C

In[484]:=

```
ListLinePlot[Table[{ N[r],
⌊линейный гра⋯ ⌊таблиц⋯ ⌊численное приближение
   UnitConvert[t[QuantityMagnitude[0], QuantityMagnitude[r], QuantityMagnitude[τ1]], "DegreesCelsius"]},
   ⌊преобразовать ⋯ ⌊модуль размерной величины ⌊модуль размерной величины ⌊модуль размерной величины
   {r, Reverse[{0, r0/4, r0/2, 3 * r0 / 4, r0}]}], InterpolationOrder → 2,
       ⌊расположить в обратном порядке          ⌊порядок интерполяции
  PlotTheme → "Scientific", GridLines → Automatic]
  ⌊тематический стиль графика ⌊линии коорд⋯ ⌊автоматический
```

Out[484]=



Теперь для x=L/2

In[485]:=

```
Table[{ N[r], UnitConvert[t[QuantityMagnitude[L/2], QuantityMagnitude[r], QuantityMagnitude[τ1]],
 ⌊таблиц⋯ ⌊числ⋯ ⌊преобразовать ⋯ ⌊модуль размерной величины ⌊модуль размерной величины ⌊модуль размерной величины
    "DegreesCelsius"]}, {r, Reverse[{0, r0/4, r0/2, 3 * r0 / 4, r0}]}] // MatrixForm
                          ⌊расположить в обратном порядке         ⌊матричная форма
```

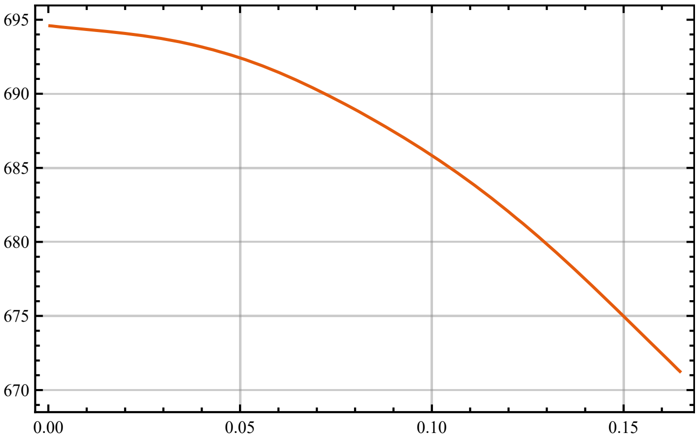
Out[485]//MatrixForm=

0.165 m	671.18264 °C
0.12375 m	681.23629 °C
0.0825 m	688.58089 °C
0.04125 m	693.07928 °C
0.	694.59737 °C

In[486]:=

```
ListLinePlot[Table[{N[r],
линейный гра⋯ таблиц⋯ численное приближение
  UnitConvert[t[QuantityMagnitude[L/2], QuantityMagnitude[r], QuantityMagnitude[τ1]], "DegreesCelsius"]},
  преобразовать ⋯ модуль размерной величины модуль размерной величины модуль размерной величины
  {r, Reverse[{0, r0/4, r0/2, 3 * r0 / 4, r0}]}], InterpolationOrder → 2,
      расположить в обратном порядке          порядок интерполяции
 PlotTheme → "Scientific", GridLines → Automatic]
 тематический стиль графика  линии коорд⋯ автоматический
```

Out[486]=



Покажем распределение температуры в центре цилиндра и на расстоянии *0.2* d_0 от поверхности как функцию времени

Сначала для центра*:*

In[487]:=

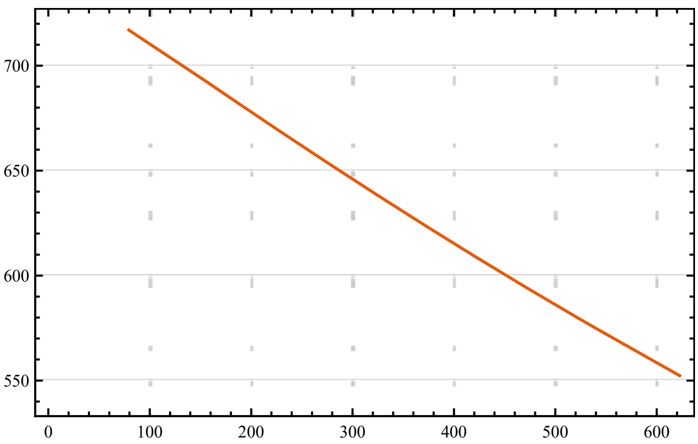
```
Table[{ N[k * τ1], UnitConvert[t[QuantityMagnitude[0], QuantityMagnitude[0], QuantityMagnitude[k * τ1]],
таблиц⋯ численное⋯ преобразовать ⋯ модуль размерной величины модуль размерной величины модуль размерной величины
    "DegreesCelsius"]}, {k, Range[8]}] // MatrixForm
                        диапазон        матричная форма
```

Out[487]//MatrixForm=

78. s	717.41453 °C
156. s	692.34822 °C
234. s	666.97298 °C
312. s	642.21016 °C
390. s	618.3142 °C
468. s	595.3218 °C
546. s	573.21516 °C
624. s	551.96413 °C

In[488]:=
```
ListLinePlot[
 Table[{N[k * τ1], UnitConvert[t[QuantityMagnitude[0], QuantityMagnitude[0], QuantityMagnitude[k * τ1]],
    "DegreesCelsius"]}, {k, Range[8]}], PlotTheme → "Scientific", GridLines → Automatic]
```
линейный график данных
таблиц⋯ численное⋯ преобразовать ⋯ модуль размерной величины модуль размерной величины модуль размерной величины
диапазон тематический стиль графика линии коорд⋯ автоматический

Out[488]=



Теперь на расстоянии 0.2 d_0 (0.4 r_0)от поверхности , следовательно r = 0.6 r_0)

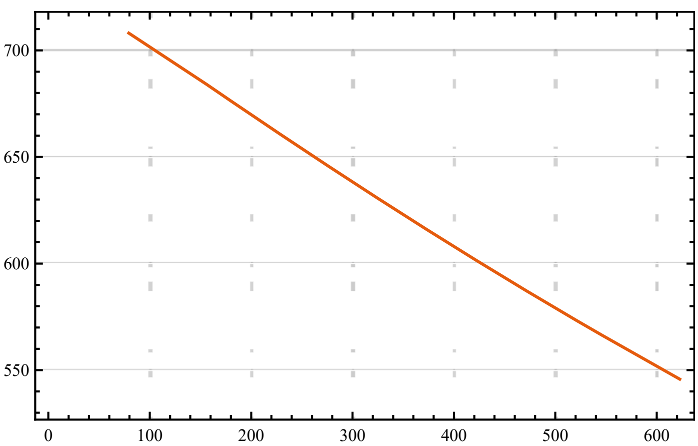
In[489]:=
```
Table[
 {N[k * τ1], UnitConvert[t[QuantityMagnitude[0], QuantityMagnitude[0.6 * r0], QuantityMagnitude[k * τ1]],
    "DegreesCelsius"]}, {k, Range[8]}] // MatrixForm
```
таблица значений
численное⋯ преобразовать ⋯ модуль размерной величины модуль размерной величины модуль размерной величины
диапазон матричная форма

Out[489]//MatrixForm=

78. s	708.49952 °C
156. s	684.04695 °C
234. s	659.00159 °C
312. s	634.54694 °C
390. s	610.9477 °C
468. s	588.24078 °C
546. s	566.40861 °C
624. s	545.42144 °C

In[490]:=
```
ListLinePlot[Table[
  {N[k * τ1], UnitConvert[t[QuantityMagnitude[0], QuantityMagnitude[0.6 * r0], QuantityMagnitude[k * τ1]],
    "DegreesCelsius"]}, {k, Range[8]}], PlotTheme → "Scientific", GridLines → Automatic]
```
линейный гра⋯ таблица значений
численное⋯ преобразовать ⋯ модуль размерной величины модуль размерной величины модуль размерной величины
диапазон тематический стиль графика линии коорд⋯ автоматический

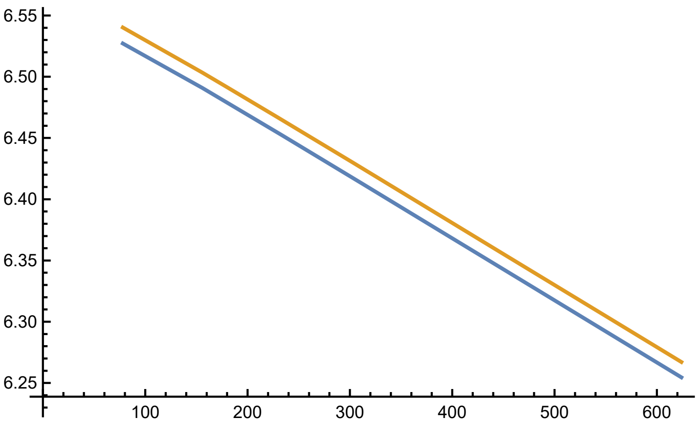
Out[490]=



Для определения темпа охлаждения и коэффициента температуропроводности заготовки

построит несколько зависимостей $ln(\theta)$ используя данные полученные выше(в центре и на $0.6r_0$).
$\theta = t\text{-}tLiquid$

In[491]:=
```
lnForCenter =
 Table[{N[k * τ1], Log[QuantityMagnitude[UnitConvert[t[QuantityMagnitude[0], QuantityMagnitude[0],
 таблиц… численное… на… модуль размерной ве… преобразовать … модуль размерной величины модуль размерной величины
      QuantityMagnitude[k * τ1]], "DegreesCelsius"] - tLiquid]]}, {k, Range[8]}]
      модуль размерной величины                                           диапазон
```
Out[491]=
```
{{78. s, 6.5401848}, {156. s, 6.503312}, {234. s, 6.4645462}, {312. s, 6.4252096},
 {390. s, 6.3857241}, {468. s, 6.3462008}, {546. s, 6.3066678}, {624. s, 6.2671325}}
```
In[492]:=
```
lnForPoint6r0 =
 Table[{N[k * τ1], Log[QuantityMagnitude[UnitConvert[t[QuantityMagnitude[0], QuantityMagnitude[0.6 * r0],
 таблиц… численное… на… модуль размерной ве… преобразовать … модуль размерной величины модуль размерной величины
      QuantityMagnitude[k * τ1]], "DegreesCelsius"] - tLiquid]]}, {k, Range[8]}]
      модуль размерной величины                                           диапазон
```
Out[492]=
```
{{78. s, 6.5272259}, {156. s, 6.4907948}, {234. s, 6.4520515}, {312. s, 6.412716},
 {390. s, 6.3732305}, {468. s, 6.3337072}, {546. s, 6.2941743}, {624. s, 6.2546389}}
```
In[493]:=
```
ListLinePlot[{lnForPoint6r0, lnForCenter}]
линейный график данных
```
Out[493]=



Нетрудно заметить,что стадии. регулярного режима гарантированно соответствует интервал [200,600] s.
Найдем число Фурье в краевых точках интервала регулярного режима и удостоверимся что оно больше 0.3

In[494]:=
$$\text{FoRadialAt200} = \frac{a * \text{Quantity}[200, \text{"Seconds"}]}{r0^2}$$
Out[494]=
0.52019894

In[495]:=
$$\text{FoRadialAt600} = \frac{a * \text{Quantity}[600, \text{"Seconds"}]}{r0^2}$$
Out[495]=
1.5605968

In[496]:=
$$\text{FoVerticalAt200} = \frac{a * \text{Quantity}[200, \text{"Seconds"}]}{\left(\frac{L}{2}\right)^2}$$
Out[496]=
0.3540604

In[497]:=

$$\text{FoVerticalAt600} = \frac{\text{a} * \text{Quantity}[600, \text{"Seconds"}]}{\left(\frac{\text{L}}{2}\right)^2}$$

Out[497]=

1.0621812

Приступим к поиску темпа охлаждения m для наших двух точек

In[498]:=

$$\text{mAtCenter} = \frac{\text{Log}\left[\frac{\text{θ3D}[0,0,200]}{\text{θ3D}[0,0,600]}\right]}{\text{Quantity}[600 - 200, \text{"Seconds"}]}$$

Out[498]=

0.00050566356 per second

In[499]:=

$$\text{mAtPoint6r0} = \frac{\text{Log}\left[\frac{\text{θ3D}[0,\text{QuantityMagnitude}[0.6*\text{r0}],200]}{\text{θ3D}[0,\text{QuantityMagnitude}[0.6*\text{r0}],600]}\right]}{\text{Quantity}[600 - 200, \text{"Seconds"}]}$$

Out[499]=

0.00050565255 per second

Берем среднее

In[500]:=

$$\text{m} = \frac{\text{mAtCenter} + \text{mAtPoint6r0}}{2}$$

Out[500]=

0.00050565806 per second

Fo > 0.3 поэтому ряд Фурье сходится быстро и первый член достаточно описывает все решение.
Найдем коэффициент формы K:

In[501]:=

$$\text{K} = \frac{1}{\left(\frac{\text{First}[\epsilon]}{\text{r0}}\right)^2 + \left(\frac{\text{First}[\mu]}{\frac{\text{L}}{2}}\right)^2}$$

Out[501]=

0.13970353 m^2

Найдем коэффициент температуропроводности по второй теореме Кондратьева(допущение что наше $m = m_\infty$) и сравним с теоретическим:

In[502]:=

aExperimental = K * m

Out[502]=

0.000070642214 m^2/s

In[503]:=

a

Out[503]=

0.000070812081 m^2/s

In[504]:=

$$\delta\text{a} = \frac{\text{Abs}[\text{a} - \text{aExperimental}]}{\text{a}}$$

Out[504]=

0.0023988449

Найдем количество теплоты, отданное цилиндром за время τ_1:

Для начала найдем сколько теплоты он отдаст до того момента как Θ==1 т.е. t=tLiquid

In[505]:=

```
Q = N[π * (r0)^2 * L * ρ * cp * (t0 - tLiquid)]
```
численное приближение

Out[505]=

5.7445002×10^{7} J

In[506]:=

$$\Theta RadialAverage = Total\left[\frac{4 * BiRadial^2}{\epsilon^2 * (\epsilon^2 + BiRadial^2)} * Exp\left[-\epsilon^2 * FoRadial\right]\right]$$
суммировать | показательная функция

Out[506]=

0.97247898

In[507]:=

$$\Theta VerticalAverage = Total\left[\frac{2 * Sin[\mu]^2}{\mu^2 + \mu * Sin[\mu] * Cos[\mu]} * Exp\left[-\mu^2 * FoVertical\right]\right]$$
суммировать | показательная функция

Out[507]=

0.98848631

In[508]:=

```
ΘAverage = ΘVerticalAverage * ΘRadialAverage
```

Out[508]=

0.96128215

In[509]:=

```
Qτ1 = Q (1 - ΘAverage)
```

Out[509]=

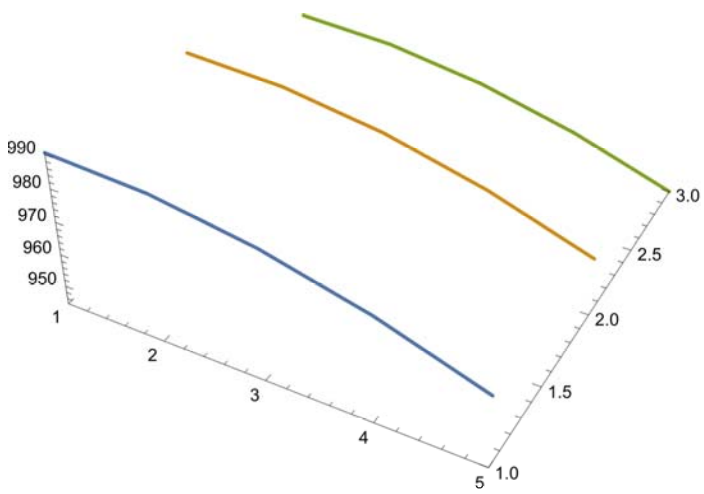
2.2241468×10^{6} J

Подытожим полным температурным полем в момент времени τ_1

In[510]:=

```
Show[ListLinePlot3D[Table[t[QuantityMagnitude[x], QuantityMagnitude[r], QuantityMagnitude[τ1]],
  {x, 0, L/2, L/4}, {r, 0, r0, r0/4}]], Boxed → False]
```
пок··· | линейный график··· | таблица··· | модуль размерной величины | модуль размерной величины | модуль размерной величины | показат·· | ложь

Out[510]=

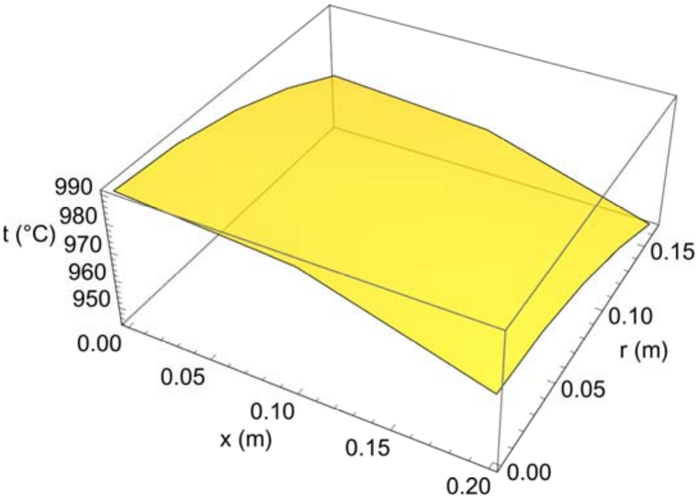


In[511]:=

```
data = Flatten[Table[{x, r, t[QuantityMagnitude[x], QuantityMagnitude[r], QuantityMagnitude[τ1]]},
       ⌊уплостить⌊таблица значений  ⌊модуль размерной величины⌊модуль размерной величины⌊модуль размерной величины
    {x, 0, L / 2, L / 4}, {r, 0, r0, r0 / 4}], 1];

ListPlot3D[data, Boxed → True, Mesh → None, PlotStyle → Directive[Opacity[0.7], Yellow],
⌊3-мерная диаграмм⋯ ⌊показат⋯ ⌊ист⋯ ⌊сетка  ⌊ни о⋯ ⌊стиль графика ⌊директива  ⌊прозрачность  ⌊жёлтый
 AxesLabel → {"x (m)", "r (m)", "t (°C)"}, LabelStyle → Directive[Medium, Black], InterpolationOrder → 4]
 ⌊обозначения на осях                       ⌊стиль отметки  ⌊директива  ⌊средний ⌊чёрный  ⌊порядок интерполяции
```

Out[512]=



(покрутите поверхность :_))