Министерство образования и науки Российской Федерации

Национальный Исследовательский университет "МЭИ"

РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ ЭЛЕМЕНТОВ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО ОБОРУДОВАНИЯ

Курсовая работа
по курсу «Прикладная физика» 4 семестр

К защите
15.06.24

Студент: Жаркова А.Э.
Группа: ТФ-13-22
Преподаватель: Мамаева Р.В

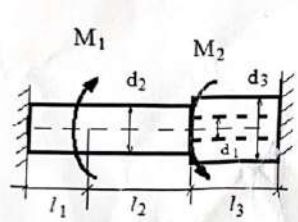
Вариант численных данных: 10

Москва 2024

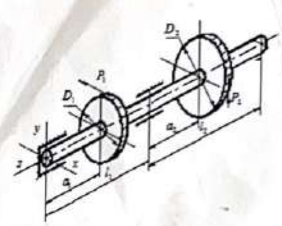
ИТАЭ Курсовая работа по курсу **Прикладная физика** Задание 8

Расчеты на прочность элементов энергетического оборудования

1



2,6



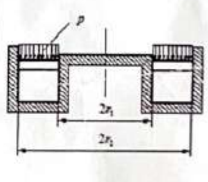
Группа ТФ- 13-22

Студент Жарикова А.

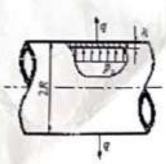
Вариант численных данных 10

Подпись преподавателя

4



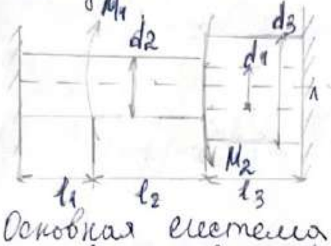
5



Задача № 1 $M_2 = kM_1$

Дано: $l_1 = 1{,}5$ м; $l_2 = 1{,}5$ м; $l_3 = 3$ м; $d_1 = 16$ мм; $d_2 = 30$ мм; $d_3 = 38$ мм; $k = 3$; $G = 80$ ГПа; $[\tau_{доп}] = 100$ МПа

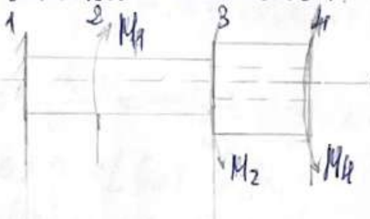
Исходная система:



Исходная система статически неопределима, поэтому отбросим правую заделку, приложив момент M_4

$$J_p = \frac{\pi d^4}{32}$$

Основная система:



В правой заделке $\varphi_4 = 0$ — ур-е совместности деформаций

$$\varphi_4 = \varphi_4(M_4) + \varphi_4(M_2) + \varphi_4(M_1) = 0$$

$$\varphi_4(M_4) = \frac{M_4 l_3}{GJ_p^{43}} + \frac{M_4 l_2}{GJ_p^{32}} + \frac{M_4 l_1}{GJ_p^{21}} = \frac{M_4}{G}\left(\frac{l_3}{J_p} + \frac{l_2}{J_p}\ \frac{l_1}{J_p}\right) = 0{,}00333319M_4$$

$$\varphi_4(M_2) = \frac{M_2}{G}\left(\frac{l_2}{J_p^{32}} + \frac{l_1}{J_p^{21}}\right) = 0{,}00315M_2$$

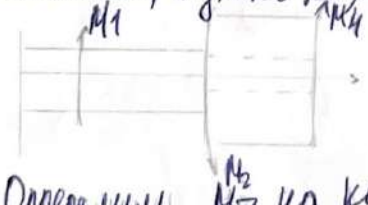
$$\varphi_4(M_1) = -\frac{M_1}{G}\left(\frac{l_1}{J_p^{21}}\right) = -0{,}00291421M_1$$

Отсюда: $0{,}00333319M_4 + 0{,}00315M_2 - 0{,}00291421M_1 = 0$

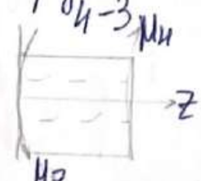
$M_2 = kM_1 = 3M_1 \Rightarrow 0{,}00333319M_4 + 0{,}00653579M_1 = 0$

$M_4 = -1{,}96082M_1$

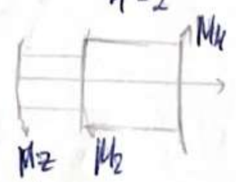
Получили, что M_1 — отрицательный момент по правилу знаков, соответственно, нужно направить момент M_4 в другую сторону.



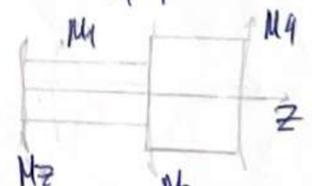
Определим M_z на каждом участке:



$M_z = M_4 = -1{,}96082M_1$



$M_z = M_2 - M_4 = 3M_1 - 1{,}96082M_1 = 1{,}03918M_1$



$M_z = -M_1 + M_2 - M_4 = 2M_1 - 1{,}96082M_1 = 0{,}03918M_1$

Найдём M_1 из расчёта $max\,\tau \le [\tau]$

$\tau_{21} = \frac{M_{21}}{W_p^{21}} = \frac{0{,}03918}{W_p^{21}} = 7390{,}44486\,M_1$

$W_p^{21} = \frac{\pi d_2^{\,3}}{16} = 5{,}30144 \cdot 10^{-6}$

$W^{32} = W^{21}$

$W_{43} = \frac{\pi d_3^3}{16}(1 - C^4) = \frac{\pi d_3^3\left(1 - \left(\frac{d_1}{d_3}\right)^4\right)}{16} = 1{,}04355 \cdot 10^{-5}$

$\tau_{32} = \frac{M_{32}}{W_{32}} = -196018{,}44027\,M_1$

$\tau_{43} = \frac{M_{43}}{W_{43}} = -369865{,}54596\,M_1$

$max\,\tau = [\tau_{43}] \Rightarrow M_1 = \frac{[\tau]}{[\tau_{43}]} \approx 270{,}4$ Н·м

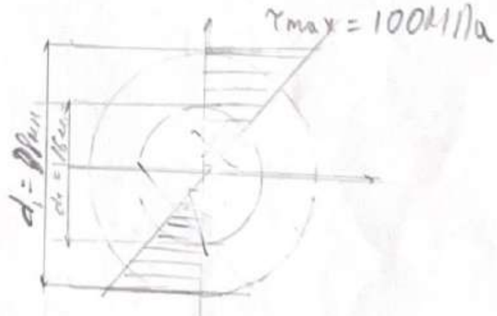
Найдём углы поворота

$\varphi_4 = 0$; $\varphi_3 = \varphi_4 + \frac{M_{43} l_3}{G J_{43}} = -0{,}0971273$ рад

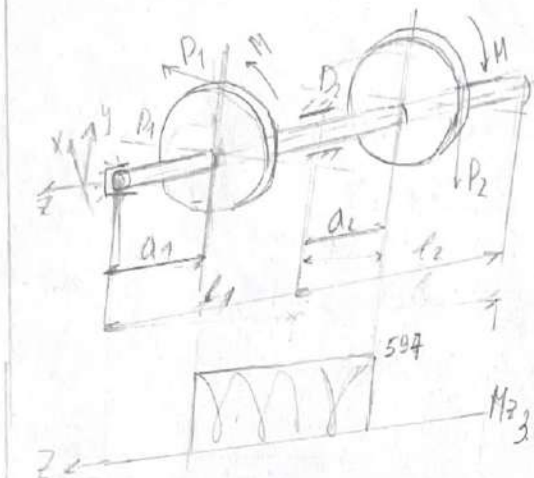
$\varphi_2 = \varphi_3 + \frac{M_{32}\, l_2}{G J_{32}} \approx -0{,}030873$ рад

$\varphi_1 = \varphi_2 + \frac{M_{21} l_1}{G J_{21}} \approx 0{,}0000000976 \approx 0$

Эпюры углов поворота сечений



Задача 2 Дано: $N = 12{,}5$ кВт; $n_0 = 200$ об/мин; $D_1 = 0{,}35$ м; $D_2 = 0{,}4$ м; $l_1 = 0{,}55$ м; $l_2 = 0{,}75$ м; $a_1 = 0{,}3$ м; $a_2 = 0{,}3$ м; марка стали: Сталь 35



Решение:

1. Угловая скорость вращ. вала: $\omega = n_0 \cdot \frac{2\pi}{60} = 200 \cdot \frac{\pi}{30} \approx 20{,}94395$ рад/с

2. Крутящий момент, передаваемый валу:
$M = \frac{N}{\omega} = \frac{12{,}5 \cdot 10^3 \cdot 3}{20\pi} = 596{,}83104$ Н·м

3. Определим P_1 и P_2:
$M = \frac{P_1 D_1}{2} = \frac{P_2 D_2}{2}$

$P_1 = \frac{2M}{D_1} = \frac{2 \cdot 597}{0{,}35} = 3410{,}4634$ Н

$P_2 = \frac{2M}{D_2} = \frac{2 \cdot 596{,}83104}{0{,}4} = 2984{,}1552$ Н

4. Построим эпюру крутящего момента М XOZ — вид сверху

1) OX: $\Sigma F_x = 0: -A_x + P_1 - B_x = 0$ в т. B - шарнирно-подвижная опора => 1 реакция

OZ: $\Sigma F_z = 0$: ~~$A_z - B_z$~~ $\ominus$ => ~~$A_z - B_z = 0$, т.к. нет внешних усилий~~ направленных вдоль вала

2) $\Sigma mom_A F = 0: P_1 a_1 - B_x \cdot l_1 = 0$; $B_x = \frac{P_1 a_1}{l_1} = \frac{3410{,}463 \cdot 0{,}3}{0{,}55} = 1860{,}2526$

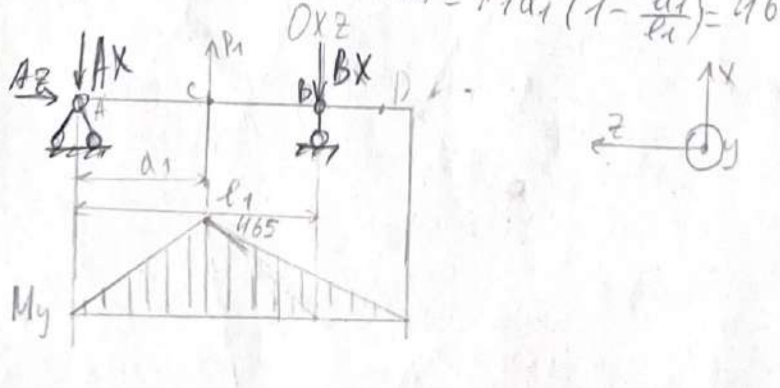
$B_x =$

$-A_x + P_1 - \frac{P_1 a_1}{l_1} = 0 \Rightarrow A_x = P_1\left(1 - \frac{a_1}{l_1}\right) = 1550{,}2105$ Н

Проверка: $\Sigma mom_C F = A_x a_1 - B_x(l_1 - a_1) = P_1 a_1\left(1 - \frac{a_1}{l_1}\right) - P_1 \frac{a_1}{l_1}(l_1 - a_1) = -\frac{P_1 a_1^2}{l} + P_1 a_1 - P_1 a_1 + \frac{P_1 a_1^2}{l_1} = 0$ (тождественно)

Эпюра $M_{max} = M_c = A_x a_1 = P_1 a_1\left(1 - \frac{a_1}{l_1}\right) = 465{,}06315$ Н·м

OXZ



Б) Построим эпюру в плоскости OYZ (для M_x)

1) $Ox: \sum F_x = 0: -A_y + B_y - P_2 = 0 \Rightarrow A_y = B_y - P_2$

2) $\sum mom_A F = 0: B_y \cdot l_1 - P_2(l_1 + a_2) = 0$

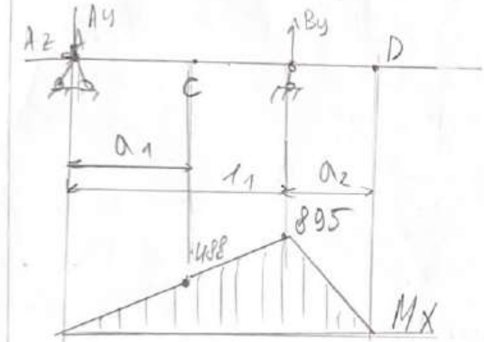
$$B_y = \frac{P_2(l_1 + a_2)}{l_1} = P_2\left(1 + \frac{a_2}{l_1}\right) = 4611{,}8762\ H$$

$$A_y = P_2 \cdot \frac{l_1 + a_2}{l_1} - P_2 = 1627{,}7210\ H$$

$M_{max} = M_B = A_y \cdot l_1 = 895{,}2466\ H \cdot м$

Проверка: $\sum mom_D F = 0: A_y \cdot (l_1 + a_2) - B_y \cdot a_2 = P_2 \frac{a_2}{l_1}(l_1 + a_2) - \cancel{A_y} P_2\left(1 - \frac{a_2}{l_1}\right) \cdot a_2 = P_2 a_2 + \frac{P_2 a_2}{l_1} - P_2 a_2 - \frac{P_2 a_2}{l_1} = 0$ (тождеств.)

$M_x(C) = A_y \cdot a_1 = \cancel{8}\,1627{,}7210 \cdot 0{,}3 = 488{,}3163\ H \cdot м$



6) Определим диаметр вала:

1. Критерий Мизеса: $\sigma_{экв} = \frac{M_{экв\,max}}{W_x}$; $M_{экв} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + \frac{3}{4} M_z^2}$

$M_{экв}(C) = \sqrt{488{,}3163^2 + 465{,}0632^2 + \frac{3}{4} \cdot 596{,}8310^2} = 849{,}6423\ H \cdot м$

2. Условие прочности: ~~$\sigma_{экв} \le [\tau]$~~ $\Rightarrow \frac{M_{экв}}{W_x} \le [\sigma_{доп}] = \frac{\sigma_{тек}}{n}$

т.к. $\sigma_T = 280$ МПа

нормативный коэф-т запаса прочности. $[n] = 2{,}5$; $W_x = \frac{\pi d^3}{32}$

$[\tau] \geq \frac{849{,}6423 \cdot 32}{\pi d^3} \Rightarrow d = \sqrt[3]{\frac{849{,}6423 \cdot 32 \cdot 2{,}5}{280 \cdot 10^6 \cdot \pi}} = 0{,}0425931 =$

$\approx 4{,}26$ см в соотв. с ГОСТ возьмём $d = 45$ мм

3. $\sigma_B = 520$ МПа; $\sigma_{-1} = 220$ МПа; $\tau_T = 150$ МПа

$K_\sigma = 2{,}08$; $K_{d\sigma} = 0{,}72$; $K_F = 0{,}8$

$|\tau_c| = \frac{M_{из}}{W_x}$

$M_{из\,C} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2} = \sqrt{488{,}3163^2 + 465{,}0632^2} = 674{,}3416\ H \cdot м$

$|\sigma_c| = \frac{674{,}3416 \cdot 32}{\pi \cdot 0{,}045^3} = 7{,}53776 \cdot 10^7$ Па

$K = \frac{K_\sigma}{K_F K_{d\sigma}} = \frac{2{,}08}{0{,}72 \cdot 0{,}8} = 3{,}61$

$n_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_c \cdot k} = \frac{220 \cdot 10^6}{3{,}61 \cdot 7{,}53776 \cdot 10^7} = 0{,}808487$

$\tau_{max} = \frac{\max M_z}{W_p} = \frac{596{,}83104 \cdot 16}{\pi\, 0{,}045^3} = 3{,}33568 \cdot 10^7$ Па

$n_\tau = \frac{\tau_T}{\tau_{max}} = \frac{150 \cdot 10^6}{3{,}33568 \cdot 10^7} = 4{,}49683$

$n_c = \frac{n_\sigma \cdot n_\tau}{\sqrt{n_\sigma^2 + n_\tau^2}} = 0{,}795728$

$d = 45$ не подходит, т.к. не выполняется условие $1{,}4 < n_c < 1{,}7$

пусть $d = 60$ $\quad k_d = 0{,}72$

$|\sigma_c| = \frac{674{,}3416 \cdot 32}{\pi \cdot 0{,}060^3} = 3{,}17999 \cdot 10^7$ Па

$k = 3{,}61 \qquad \tau_{max} = \frac{596{,}83104 \cdot 16}{\pi \cdot 0{,}060^3} = 1{,}40724 \cdot 10^7$

$n_\sigma = 1{,}91642 \qquad n_\tau = \frac{\tau_T}{\tau_{max}} = \frac{150 \cdot 10^6}{1{,}40724 \cdot 10^7} = 10{,}65916$

$n_c \approx 1{,}88818 > 1{,}7$

условие прочности не соответствует условию задачи $d = 60$

Задача 3

Дано:

$r_1 = 16$ см

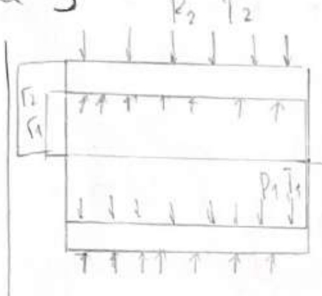
$r_2 = 21$ см

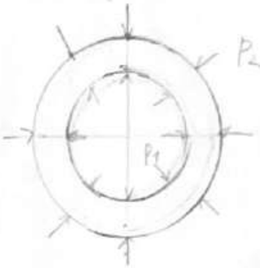
$P_1 = 11$ МПа

$P_2 = 3$ МПа

$T_1 = 180$ °С

$T_2 = 120$ °С





1) Вторая формула Ламе

$$\sigma_{r,\theta}(r) = \frac{P_1 r_1^2 - P_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \mp \frac{(P_1 - P_2) r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \cdot \frac{1}{r^2} \quad (1)$$

2) для сечений, достаточно удалённых от краёв

$$\sigma_z(r) = \frac{P_1 r_1^2 - P_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}$$

Расчёт численных данных с помощью Python

Радиальные напряжения по ф-ле (1)

$\sigma_r(r_1) = -11$ МПа ; $\sigma_r(r_2) = -3$ МПа

Окружное напряжение по формуле (1)

$\sigma_\theta(r_1) = 27{,}140541$ МПа ; $\sigma_\theta(r_2) = 19{,}140541$ МПа

Осевое напряжение от давлений по ф-ле (2)

$\sigma_z(r) = 8{,}070270$ МПа $\qquad$ Эпюры на миллиметровке

3) логарифмический закон изменения температуры

$$T(r) = T_2 + (T_1 - T_2) \cdot \frac{\ln \frac{r_2}{r}}{\ln \frac{r_2}{r_1}}$$

температурные напряжения рассч-ся по след. ф-лам:

$$1.\ \sigma_{rt} = -\frac{E\alpha\Delta T}{2(1-\mu)\ln\frac{r_2}{r_1}}\left(\ln\frac{r_2}{r} + \frac{r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}\left(1 - \frac{r_2^2}{r^2}\right)\ln\frac{r_2}{r_1}\right)$$

$$2.\ \sigma_{\theta t} = \frac{E\alpha\Delta T}{2(1-\mu)\ln\frac{r_2}{r_1}}\left(1 - \ln\frac{r_2}{r} - \frac{r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}\left(1 + \frac{r_2^2}{r^2}\right)\ln\frac{r_2}{r_1}\right)$$

3. $\sigma_{zt} = \dfrac{E\alpha\Delta T}{2(1-\mu)\ln\frac{r_2}{r_1}}\left(1-2\ln\frac{r_2}{r}-\frac{2r_1^2}{r_2^2-r_1^2}\ln\frac{r_2}{r_1}\right)$

где $E = 200 \cdot 10^9$ Па – модуль упругости для стали,

$\alpha = 12 \cdot 10^{-6} \left(\frac{1}{°C}\right)$ – коэф. линейного расширения металла для стали,

$\mu = 0{,}3$ (коэф. Пуассона)

$\Delta T = |T_2 - T_1| = |120 - 180| = 60$

Расчёт с помощью Python:

$\sigma_{rt}(r_1) = \cancel{116}\ -2{,}187159 \cdot 10^{-8}$ радиальные температурные напр-я

$\sigma_{rt}(r_2) = -0.0$

$\sigma_{\theta t}(r_1) = 116{,}807231$ МПа } окружные температурные напр-я
$\sigma_{\theta t}(r_2) = -97{,}478482$ МПа

$\sigma_{zt}(r_1) = 116{,}807231$ МПа } осевые температурные напр-я
$\sigma_{zt}(r_2) = -97{,}478482$ МПа

Эпюры на миллиметровке.

4) Эпюры суммарных напряжений

1) $\sigma_r = \sigma_{rp} + \sigma_{rt}$

$\sigma_r(r_1) = -11$ МПа ; $\sigma_r(r_2) = -3$ МПа

2) $\sigma_\theta = \sigma_{\theta p} + \sigma_{\theta t}$

$\sigma_\theta(r_1) = 143{,}947772$ МПа $\sigma_\theta(r_2) = -78{,}337941$ МПа

3) $\sigma_z = \sigma_{zp} + \sigma_{zt}$

$\sigma_z(r_1) = 124{,}877502$ МПа $\sigma_z(r_2) = -89{,}408212$ МПа

Эпюры на миллиметровке

5) Нахождение эквивалентного напряжения по критерию Мизеса: $\sigma_{экв} = \sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2-\sigma_1\sigma_2-\sigma_2\sigma_3-\sigma_1\sigma_3}$

$\sigma_1 = \sigma_\theta$; $\sigma_2 = \sigma_z$; $\sigma_3 = \sigma_r$ $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$

$\sigma_{экв}(r_1) = 1{,}46348 \cdot 10^8$ Па > $\sigma_{допус.}$

~~$\sigma_{экв}(r_2) =$~~ 6) Условие прочности Сен-Венана:

$\sigma_1 - \sigma_3 = 143{,}94772$ МПа $+ 11$ МПа ≈ 155 МПа ≤ 200 МПа

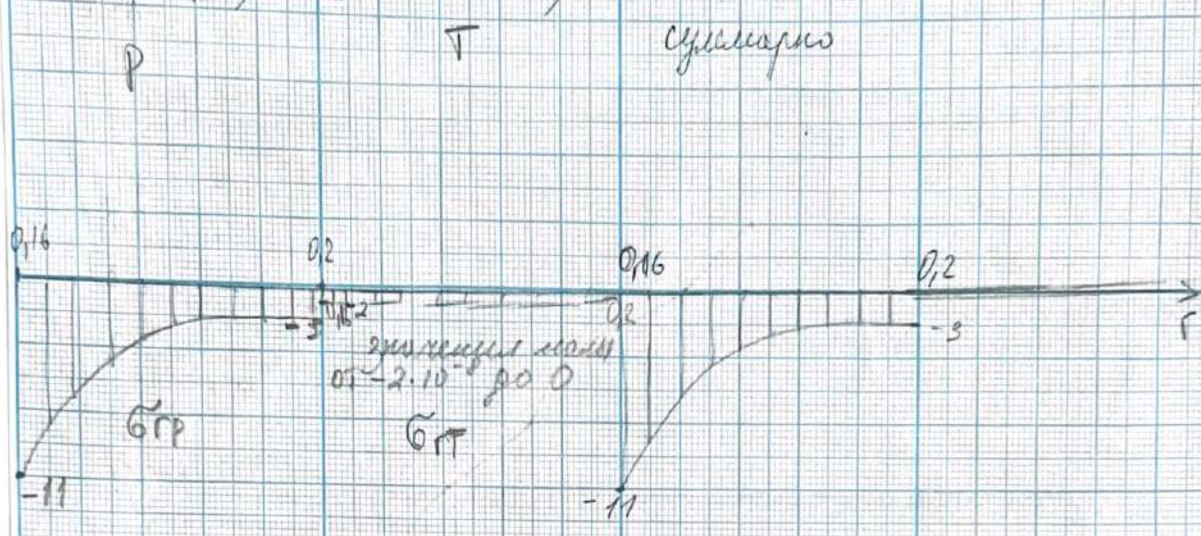
условие Сен-Венана выполнено

По критерию Мизеса усл-е прочности: $\sigma_{экв} < \frac{\sigma_T}{n}$, $[\sigma_T] = 294$ МПа

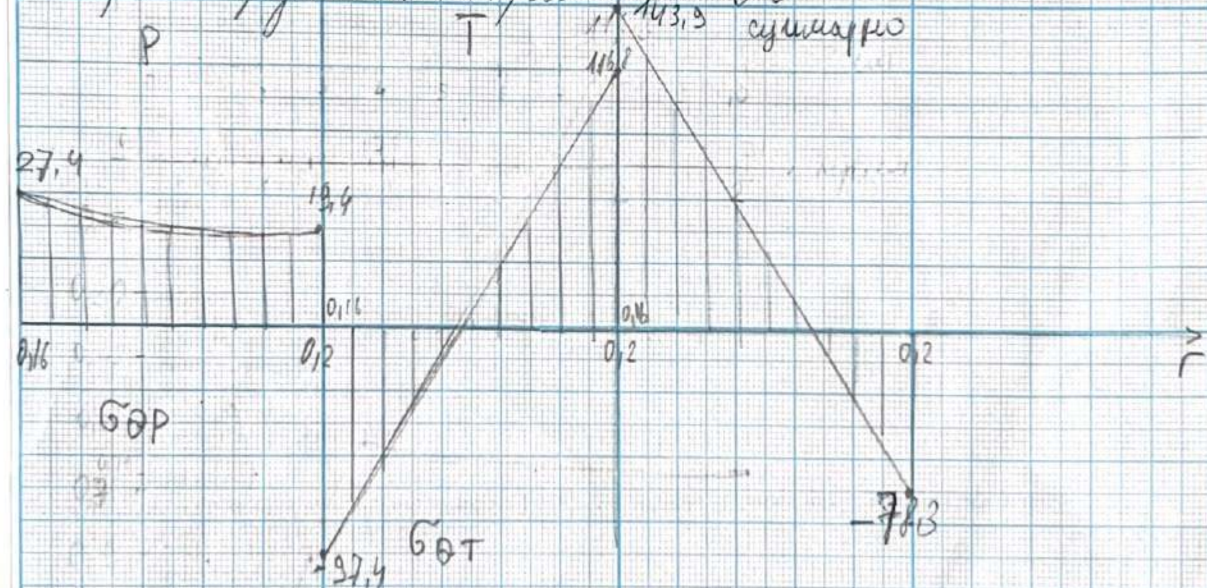
n – коэф-т запаса прочности: $n = \frac{\sigma_T}{\sigma_{экв}} = \frac{294 \cdot 10^6}{1{,}46348 \cdot 10^8} \approx 3{,}55191$

$1 < n < 2{,}5$ => данная конструкция переутяжелена и её нужно оптимизировать, выбрав другую сталь или увеличив внутр. радиус

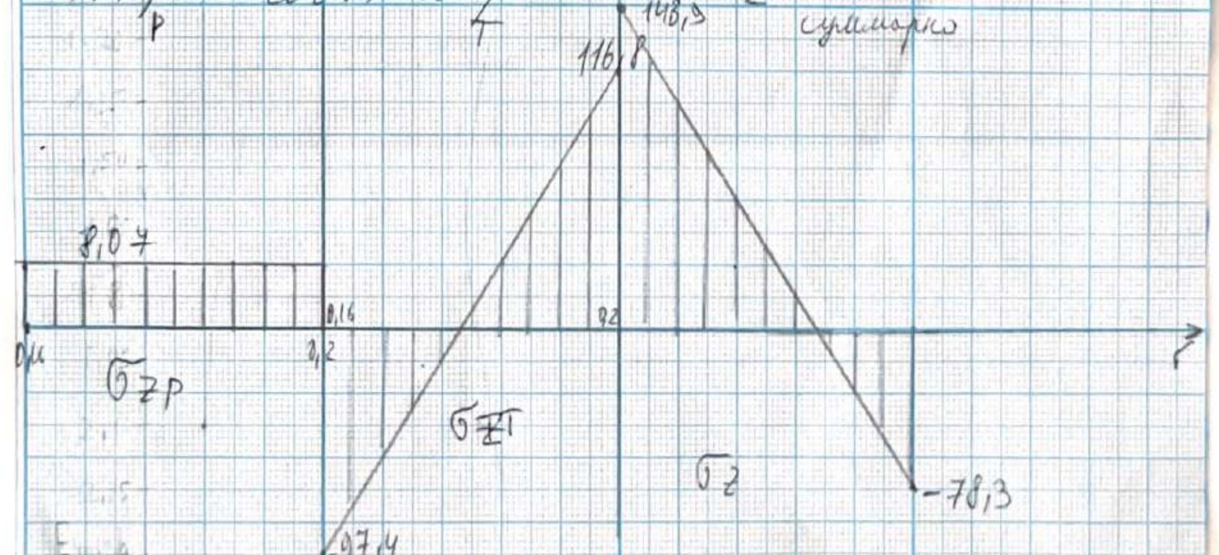
Эпюры радиальных напряжений σ_r



Эпюры окружных напряжений σ_θ



Эпюры осевых напряжений σ_z



```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
r1=16*10**(-2)
r2=21*10**(-2)
p1=11*10**6
p2=3*10**6
T1=180
T2=120
α=1.25*10**(-5)
E=200*10**9
σ=240*10**6
μ=0.3

def σrp(r):
    return ((p1*r1**2-p2*r2**2)/(r2**2-r1**2))-1/r**2*(((r1**2)*(r2**2)*(p1-p2))/(r2**2-r1**2))
print('Радиальные напряжения:')
result_r1rp=σrp(r1)
print('σrp(r1)=',result_r1rp)
result_r2rp=σrp(r2)
print('σrp(r2)=',result_r2rp)

def σθp(r):
    return ((p1*r1**2-p2*r2**2)/(r2**2-r1**2))+1/r**2*(((r1**2)*(r2**2)*(p1-p2))/(r2**2-r1**2))
print('Окружные напряжения:')
result_r1rp=σθp(r1)
print('σθp(r1)=',result_r1rp)
result_r2rp=σθp(r2)
print('σθp(r2)=',result_r2rp)

def σzp(r):
    return ((p1*r1**2-p2*r2**2)/(r2**2-r1**2))
print('Осевые напряжения:')
result_r1rp=σzp(r1)
print('σzp(r1)=',result_r1rp)
result_r2rp=σzp(r2)
print('σzp(r2)=',result_r2rp)

def σzt(r):
    return (((-E*α*60)/(2*(1-μ)*np.log(r2/r1)))*(1-2*np.log(r2/r)-(((2*r1**2)/(r2**2-r1**2))*np.log(r2/r1))))
print('Температурные осевые напряжения:')
result_r1rp=σzt(r1)
print('σzt(r1)=',result_r1rp)
result_r2rp=σzt(r2)
print('σzt(r2)=',result_r2rp)

def σrt(r):
    return (((-E*α*60)/(2*(1-μ)*np.log(r2/r1)))*(np.log(r2/r)+(((r1**2)/(r2**2-r1**2))*(1-(r2**2/r**2))*np.lc
print('Температурные радиальные напряжения:')
result_r1rp=σrt(r1)
print('σrt(r1)=',result_r1rp)
result_r2rp=σrt(r2)
```

```
result_r2rp=σrt(r2)
print('σrt(r2)=',result_r2rp)

def σθt(r):
    return (((-E*α*6θ)/(2*(1-μ)*np.log(r2/r1)))*(1-np.log(r2/r)-(((r1**2)/(r2**2-r1**2))*(1+(r2**2/r**2))*np.
print('Температурные окружные напряжения:')
result_r1rp=σθt(r1)
print('σθt(r1)=',result_r1rp)
result_r2rp=σθt(r2)
print('σθt(r2)=',result_r2rp)

def σr(σrp, σrt):
    return (σrp+σrt)
print('Суммарные радиальные напряжения:')
result_r1rp=σrp(r1)+σrt(r1)
print('σr(σrp, σrt)=',result_r1rp)
result_r2rp=σrp(r2)+σrt(r2)
print('σr(σrp, σrt)=',result_r2rp)

def σθ(σθp, σθt):
    return (σθp+σθt)
print('Суммарные окружные напряжения:')
result_r1rp=σθp(r1)+σθt(r1)
print('σθ(σθp, σθt)=',result_r1rp)
result_r2rp=σθp(r2)+σθt(r2)
print('σθ(σθp, σθt)=',result_r2rp)
```

```
def σz(σzp, σzt):
    return (σzp+σzt)
print('Суммарные осевые напряжения:')
result_r1rp=σzp(r1)+σzt(r1)
print('σz(σzp, σzt)=',result_r1rp)
result_r2rp=σzp(r2)+σzt(r2)
print('σz(σzp, σzt)=',result_r2rp)
```

```
Радиальные напряжения:
σrp(r1)= -11000000.000000002
σrp(r2)= -3000000.0
Окружные напряжения:
σθp(r1)= 27140540.540540554
σθp(r2)= 19140540.54054055
Осевые напряжения:
σzp(r1)= 8070270.270270275
σzp(r2)= 8070270.270270275
Температурные осевые напряжения:
σzt(r1)= 116807231.84194146
σzt(r2)= -97478482.44377285
Температурные радиальные напряжения:
σrt(r1)= -2.1871592257797754e-08
σrt(r2)= -0.0
Температурные окружные напряжения:
σθt(r1)= 116807231.84194146
```

```
Температурные окружные напряжения:
σθt(r1)= 116807231.84194146
σθt(r2)= -97478482.44377285
Суммарные радиальные напряжения:
σr(σrp, σrt)= -11000000.000000024
σr(σrp, σrt)= -3000000.0
Суммарные окружные напряжения:
σθ(σθp, σθt)= 143947772.38248202
σθ(σθp, σθt)= -78337941.9032323
Суммарные осевые напряжения:
σz(σzp, σzt)= 124877502.11221173
σz(σzp, σzt)= -89408212.17350258
```

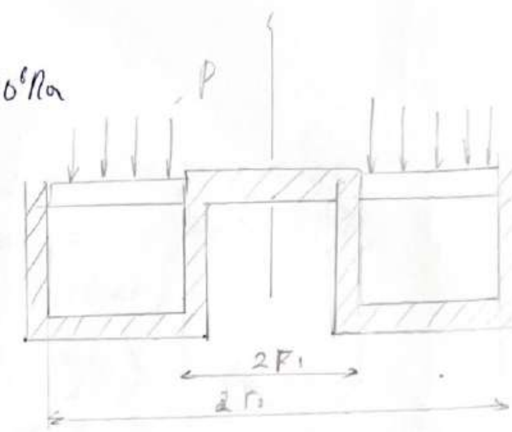
Задача 4

Дано: $r_1 = 0{,}30$ м $\mu = 0{,}3$

$r_2 = 1{,}1$ м $\sigma_{доп} = 240\cdot 10^6$ Па

$h = 0{,}10$ м

$E = 200\cdot 10^9$ Па



Решение:

1) Для кольцевой пластины решение будем искать в виде: $w(r) = C_1 + C_2 r^2 + C_3 \ln r + C_4 r^2 \ln r = \frac{Pr^4}{64D}$

Вычислим цилиндрическую жёсткость: т.к. присутствует постоянная внешняя нагрузка

$D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} = 18315018{,}3115018322$

Первая производная от прогиба:

$w'(r) = \frac{dw}{dr} = 2rC_2 + rC_4 + \frac{C_3}{r} - \frac{D}{16} Pr^3 + 2r\ln r C_4$

Вторая производная от прогиба:

$w''(r) = \frac{d^2w}{dr^2} = 2\ln r C_4 - \frac{C_3}{r^2} + 2C_2 + 3C_4 - \frac{3D}{16} Pr^2$

Граничные условия (т.к. на внутреннем r_1 и внешнем r_2 - жёсткая заделка => прогибы и углы поворота равны нулю):

система ур-й

$$
\begin{array}{ll}
W(r_1) = 0 & \left\{ \begin{array}{l}
C_1 + C_2 r_1^2 + C_3 \ln r_1 + C_4 r_1^2 \ln r_1 - \frac{Pr_1^4}{64D} \quad (1) \\
2C_2 r_1 + C_4 r_1 + \frac{C_3}{r_1} - \gamma_1 Pr_1^3 + 2r_1 \ln r_1 C_4 \quad (2) \\
C_1 + C_2 r_2^2 + C_3 \ln r_2 + C_4 r_2^2 \ln r_1 - \frac{Pr_2^4}{64D} \quad (3) \\
2C_2 r_2 + C_4 r_2 + \frac{C_3}{r_2} - \gamma_1 Pr_2^3 + 2r_2 \ln r_2 C_4 \quad (4)
\end{array} \right. \\
\varphi = \frac{dw}{dr_1}(r_1) = 0 & \\
W(r_2) = 0 & \\
\varphi \frac{dw}{dr_2}(r_2) = 0 &
\end{array}
$$

Ур-я 1-4 образуют систему относительно констант C_1, C_2, C_3, C_4 (найдены с помощью пакета Python)

$$C = \begin{pmatrix} -2{,}28 \cdot 10^{-9} \\ 2{,}059 \cdot 10^{-9} \\ -9{,}48 \cdot 10^{-10} \\ -2{,}17 \cdot 10^{-9} \end{pmatrix}$$

Изгибающие моменты в радиальном и окружном направлениях (эпюры отдельно представлены вместе с кодом на Python):

$$M_r(r) = D\left(\frac{d^2w}{dr^2} + \frac{\mu}{r}\frac{dw}{dr}\right)$$

$$M_\theta(r) = D\left(\mu\frac{d^2w}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dw}{dr}\right)$$

Напряжения в радиальном и окружном направлениях и эквивалентное напряжение по критерию Мизеса:

$$\sigma(r) = \frac{6M_r}{h^2} \qquad \sigma_\theta(r) = \frac{6M_\theta}{h^2} \qquad \sigma_{экв} = \sqrt{\sigma_r^2 + \sigma_\theta^2 - \sigma_r \cdot \sigma_\theta}$$

Результаты программы:

$\max \sigma_{экв} = 76{,}7\,p$

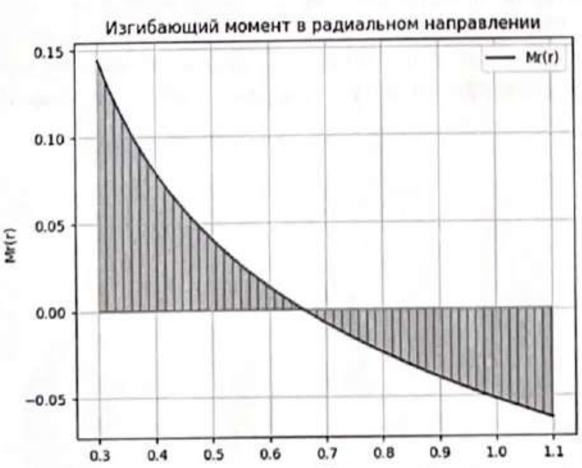
Допускаемое значение нагрузки $p = 3{,}13 \cdot 10^6$

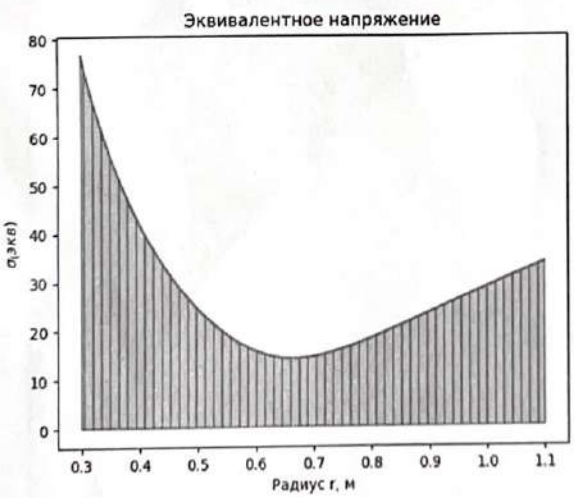
```python
import numpy as np

import matplotlib.pyplot as plt

from scipy.optimize import fsolve

r1=0.3

r2=1.1

h=0.1

E=200*10**9

m=0.3

σ=240*10**6

D=(E*h**3)/(12*(1-m**2))

print("Цилиндрическая жесткость пластины:", D)

def w(r, C, D):

   return (C[0] + C[1]*r**2 + C[2]*np.log(r) + C[3]*np.log(r)*r**2)

def w1(r, C, D):

   return (C[1]*2*r + (C[2]/r) + C[3]*r + C[3]*2*r*np.log(r))

def w2(r, C, D):

   return (C[1]*2 + (-C[2]/r**2) + C[3]*3 + C[3]*np.log(r)*2 )

def w3(r, C, D):

   return (((C[2]*2)/r**3) + ((C[3]*2)/r) )

def w4(r, C, D):

   return (D * (w3(r, C, D) + (1/r)*w2(r, C, D))+(1/(2*np.pi*r)))

def equations_to_solve(coefficients, r1, r2, D):

   C = coefficients
```

```
    eq1 = w4(r1, C, D)

    eq2 = w1(r1, C, D)

    eq3 = w(r2, C, D)

    eq4 = w1(r2, C, D)


    return [eq1, eq2, eq3, eq4]

initial_guess = [1, 1, 1, 1]

solution = fsolve(equations_to_solve, initial_guess, args=(r1, r2, D))

print("Решение системы:")

print("C1 =", solution[0])

print("C2 =", solution[1])

print("C3 =", solution[2])

print("C4 =", solution[3])


def Mr(r, C, D, m):

    return D * (w2(r, C, D) + (m/r) * w1(r, C, D))


r_values = np.linspace(r1, r2, 100)

Mr_values = [Mr(r, solution, D, m) for r in r_values]


plt.plot(r_values, Mr_values, color='blue', label='Mr(r)')

plt.fill_between(r_values, Mr_values, color='gray',alpha=0.5, hatch='||',edgecolor='black')

plt.xlabel('r')

plt.ylabel('Mr(r)')

plt.title('Изгибающий момент в радиальном направлении')

plt.grid(True)

plt.legend()

plt.show()
```

```
def M0(r, C, D, m):
    return D * (m*w2(r, C, D) + (1/r) * w1(r, C, D))

r_values = np.linspace(r1, r2, 100)
M0_values = [M0(r, solution, D, m) for r in r_values]

plt.plot(r_values, M0_values, color='blue', label='Mr(r)')
plt.fill_between(r_values, M0_values, color='gray',alpha=0.5, hatch='||',edgecolor='black')
plt.xlabel('r')
plt.ylabel('M0(r)')
plt.title('Изгибающий момент в окружном направлении')
plt.grid(True)
plt.legend()
plt.show()

def σ_r(Mr_values, h):
    return 6*np.array(Mr_values)/h**2

def σ_0(M0_values, h):
    return 6*np.array(M0_values)/h**2

def σ_eqv(σ_r,σ_0):
    return np.sqrt(σ_r**2+σ_0**2-σ_r*σ_0)


plt.plot(r_values, σ_eqv(σ_r(Mr_values, h), σ_0(M0_values, h)))
plt.fill_between(r_values, σ_eqv(σ_r(Mr_values, h), σ_0(M0_values, h)), color='gray', alpha=0.5,
hatch='||', edgecolor='black')
plt.xlabel('Радиус r, м')
plt.ylabel('$σ_(экв)$')
plt.title('Эквивалентное напряжение')
plt.show()
```

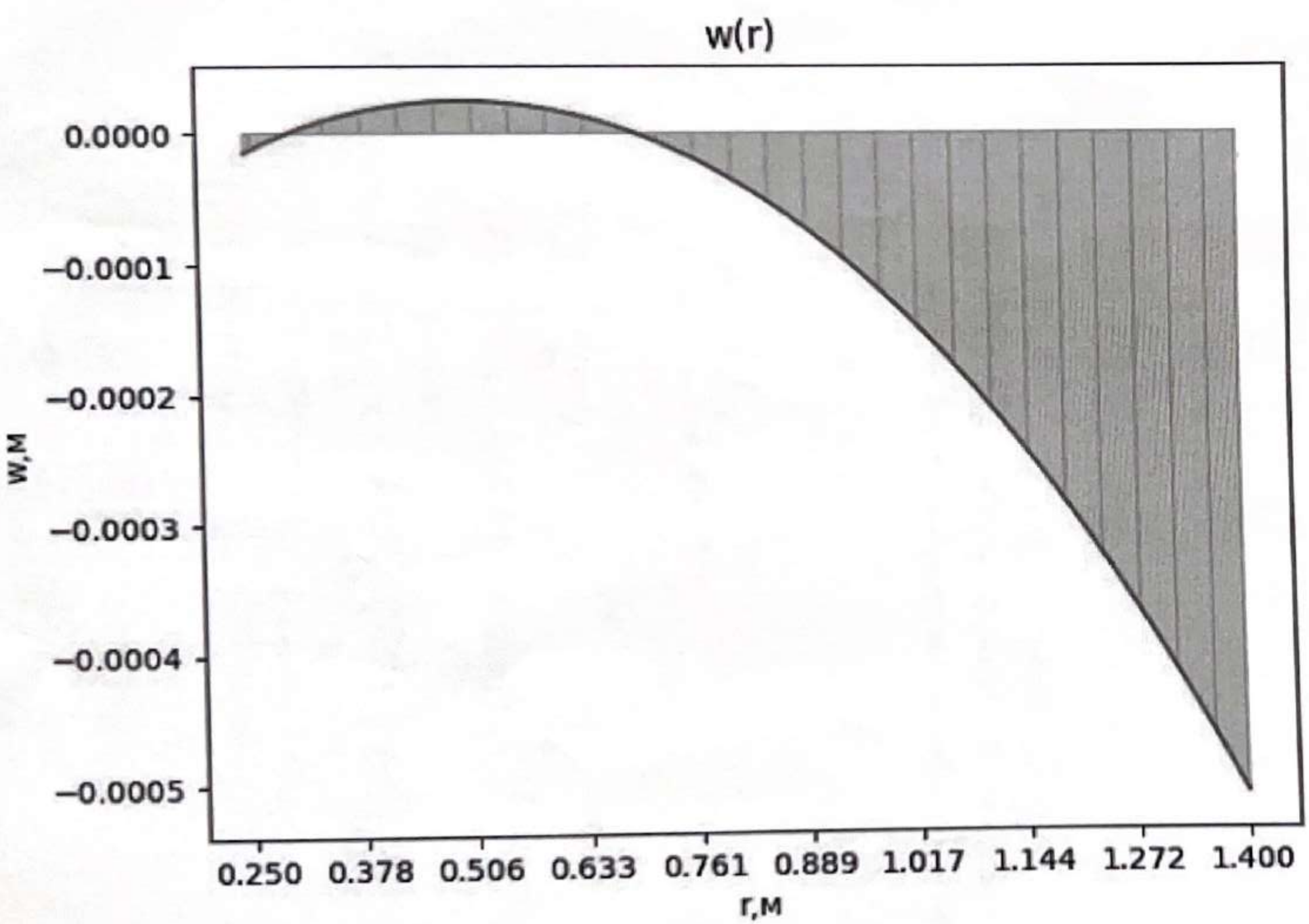
```
σ_eqv_1=σ_eqv(σ_r(Mr(r1, solution, D, m),h),σ_0(M0(r1, solution, D, m),h))
σ_eqv_2=σ_eqv(σ_r(Mr(r2, solution, D, m),h),σ_0(M0(r2, solution, D, m),h))
print("Эквивалентное напряжение при r1:", σ_eqv_1)
print("Эквивалентное напряжение при r2:", σ_eqv_2)

max_σ_eqv=max(σ_eqv_1, σ_eqv_2)
print("Максимальное напряжение:", max_σ_eqv)

p=σ/max_σ_eqv
print("Допускаемое значение нагрузки:",p)

def w_p(r, C, D, p):
    return ((C[0] + C[1]*r**2 + C[2]*np.log(r) + C[3]*np.log(r)*r**2)*p)

C = np.array([solution[0], solution[1], solution[2], solution[3]])
r_values = np.linspace(r1, r2, 50)
plt.plot(r_values, w_p(r_values, C, D, p))
plt.fill_between(r_values, w_p(r_values, C, D, p),color='gray',alpha=0.5, hatch='||',edgecolor='black')
plt.xlabel('Радиус r, м')
plt.ylabel('$W$')
plt.title('Эпюра прогиба при нагрузке равной допускаемому значению')
plt.show()
```





Эквивалентное напряжение при r1: 76.7015671029726
Эквивалентное напряжение при r2: 33.57638143561869
Максимальное напряжение: 76.7015671029726
Допускаемое значение нагрузки: 3129010.3848569044

X   x не просчиталось
Цилиндрическая жёсткость пластин 18315018, 3115018322
Решение системы
$C_1 = -2{,}28409243832707e{-}09$
$C_2 = 2{,}0591251834538345e{-}09$
$C_3 = -9{,}483207094784156e{-}10$
$C_4 = -2{,}172464073204371e{-}09$

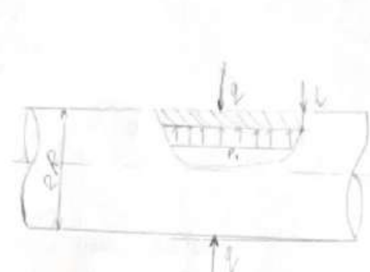

w(r)
0.0000
−0.0001
−0.0002
−0.0003
−0.0004
−0.0005
w,м
0.250
0.378
0.506
0.633
0.761
0.889
1.017
1.144
1.272
1.400
r,м

Задача №5

Имеем цилиндрическую оболочку толщиной h, нагруженную осесимметричной нагрузкой

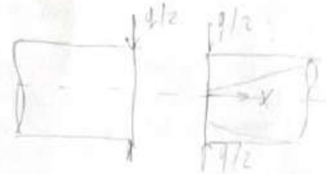
$a = 0{,}06$ м; $R = 1{,}00$ м; $D \cdot 10^{5} = 2$ М;

$P_0 = 0{,}6$ МПа; $q \cdot 10^{-6} = 0{,}2$ Н/м



Формула прогиба:

$$W(x) = C_1 e^{-kx} \sin(kx) + C_2 e^{-kx} \cos(kx) + \frac{P_0 R^2}{Eh}$$



$x = 0$

$$\varphi(0) = \frac{dw}{dx}\Big|_0 = 0$$

$$Q = D \frac{d^3 w}{dx^3}\Big|_0 = -\frac{q}{2}$$

Вычисляем формулы для угла поворота сечения и поперечной силы

$$\varphi(x) := -e^{-kx} k (\cos(kx) C_1 - \cos(kx) C_2 + \sin(kx) C_1 + \sin(kx) C_2)$$

$$Q(x) := 2D e^{-kx} k^3 (\cos(kx) C_1 + \cos(kx) C_2 - \sin(kx) C_1 + \sin(kx) C_2)$$

После подстановки в граничные условия получим:

$$-k(C_1 - C_2) = 0$$

$$2Dk^3 (C_1 + C_2) = -\frac{q}{2}$$

Решение:

$$C_1 = -\frac{1}{8} \frac{q}{Dk^3}, \quad C_2 = -\frac{1}{8} \frac{q}{Dk^3}$$

С учётом полученного результата:

$$w(x) := -\frac{1}{8} \frac{q e^{-kx} \cos(kx)}{Dk^3} - \frac{1}{8} \frac{q e^{-kx} \sin(kx)}{Dk^3}$$

$$\varphi(x) := \frac{1}{4} \cdot \frac{e^{-kx} \sin(kx) q}{k^2 D}$$

$$M_x = D(2C_1 k^2 e^{-kx} \sin(kx) - 2C_2 k^2 e^{-kx} \cos(kx)) = -\frac{1}{4} \frac{q e^{-kx} (\sin(kx) - \cos(kx))}{k}$$

$$Q(x) = -\frac{1}{2} q e^{-kx} \cos(kx)$$

$$N_y(x) := \mu N_x + \frac{Ehw}{R} = \frac{Eh\left(-\frac{1}{8} \frac{q e^{-kx} \cos(kx)}{Dk^3} - \frac{1}{8} \frac{q e^{-kx} \sin(kx)}{Dk^3}\right)}{R}$$

Цилиндрическая жёсткость: $h = 0{,}002500$ м

$h^* = 0{,}015000$ м

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} = 61813{,}186813 \text{ Н·м}$$

Волновое число:

$$k = \sqrt[4]{\frac{Eh}{4DR^2}} = \sqrt[4]{\frac{Eh\,12(1-\mu^2)}{4Eh^3R^2}} = \sqrt[4]{\frac{3(1-\mu^2)}{h^2R^2}} = 10{,}495304 \text{ м}^{-1}$$

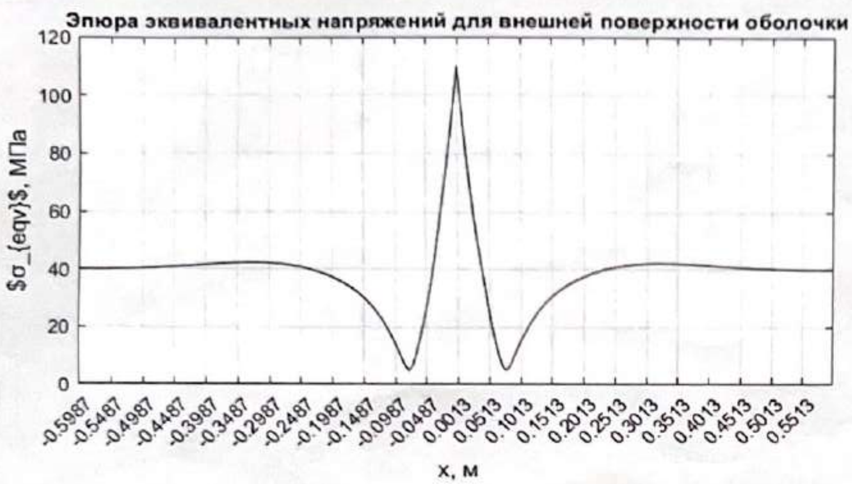
Длина краевого эффекта.

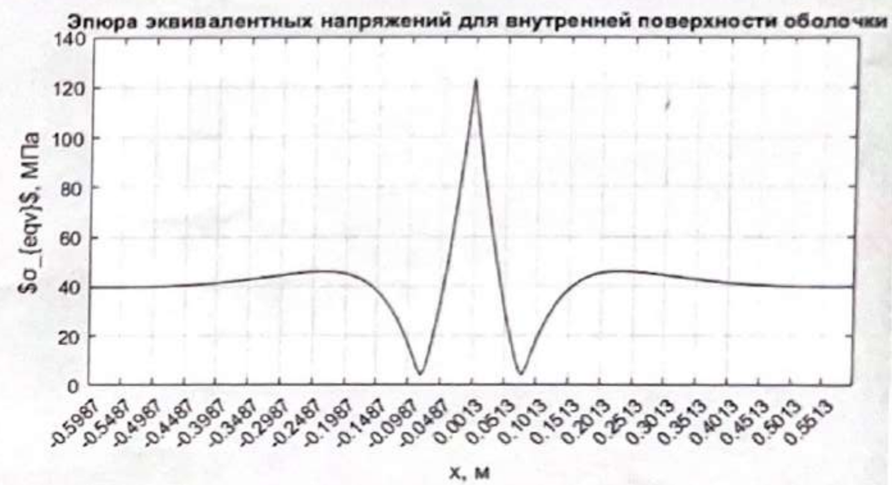
$$\lambda = \frac{\pi}{k} = 0{,}299333 \text{ м}$$

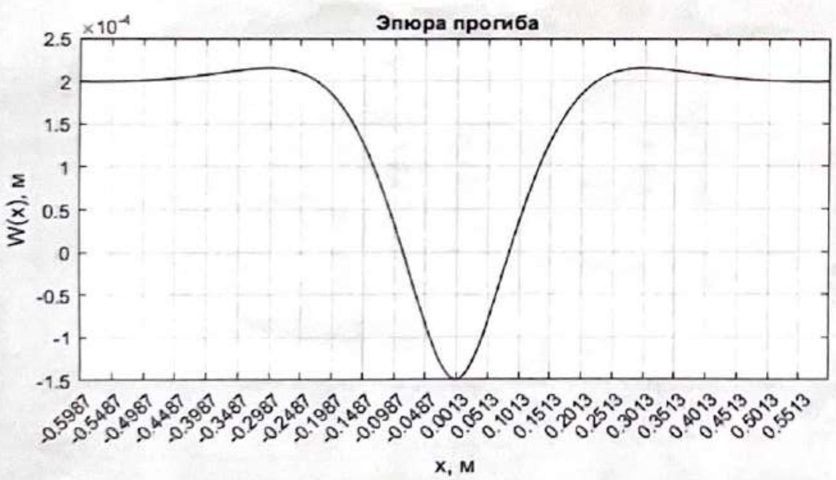
```
% var.10
a = 0.06;
R = 1;

p0 = 0.6 * 10^6;
q = 0.2 * 10^6;

E = 200 * 10^9;
sigma = 240 * 10^6;
Nx = 0;
mu = 0.3;

h = p0 * R / sigma;
fprintf('\nЗначение h = %f м\n', h);
h = 6 * h;  % Подобранное значение толщины чтобы выполнялся критерий
прочности
fprintf('Подогнанное значение h = %f м\n', h);

D = E * h^3 / (12 * (1 - mu^2));
fprintf('\nЦилиндрическая жесткость D = %f\n', D);

k = (E * h / (4 * D * R^2))^(1 / 4);
fprintf('\nВолновое число k = %f м^-1\n', k);

lambda = pi / k;
fprintf('\nДлина краевого эффекта λ = %f м\n', lambda);

C = [-1, 1;  % Первое условие - угол поворота в точке разреза (x==0) равен
нулю. Второе условие на поперечную силу в точке разреза равную q/2
     1, 1];
b = [0; -0.5 * q / (2 * D * k^3)];

consts = C \ b;
C1 = consts(1);
C2 = consts(2);
fprintf('\nКоэффициенты C равны:\nC1 = %f\nC2 = %f\n', C1, C2);

W = @(x) C1 .* exp(-k .* abs(x)) .* cos(k .* abs(x)) + C2 .* exp(-k .*
abs(x)) .* sin(k .* abs(x)) + p0 * R^2 / (E * h);
phi = @(x) -k .* exp(-k .* abs(x)) .* ((C1 - C2) .* cos(k .* abs(x)) + (C1 +
C2) .* sin(k .* abs(x)));
Mx = @(x) 2 * k^2 .* exp(-k .* abs(x)) .* D .* (C1 .* sin(k .* abs(x)) - C2
.* cos(k .* abs(x)));
My = @(x) mu .* Mx(x);
Ny = @(x) mu * Nx + E * h / R .* W(x);
Q = @(x) 2 * k^3 .* D .* exp(-k .* abs(x)) .* ((C1 + C2) .* cos(k .* abs(x))
- (C1 - C2) .* sin(k .* abs(x)));

sigma_x_inner = @(x) Nx / h + 6 * Mx(x) / h^2;
sigma_x_outer = @(x) Nx / h - 6 * Mx(x) / h^2;
sigma_y_inner = @(x) Ny(x) / h + 6 * My(x) / h^2;
sigma_y_outer = @(x) Ny(x) / h - 6 * My(x) / h^2;
sigma_eqv_inner = @(x) sqrt(sigma_x_inner(x).^2 + sigma_y_inner(x).^2 -
sigma_x_inner(x) .* sigma_y_inner(x));
sigma_eqv_outer = @(x) sqrt(sigma_x_outer(x).^2 + sigma_y_outer(x).^2 -
sigma_x_outer(x) .* sigma_y_outer(x));
```

```
x_positive = linspace(0, 2 * lambda, 100);
x_negative = linspace(-2 * lambda, 0, 100);
x = [x_negative, x_positive];

figure('Position', [100, 100, 1600, 1200]);

subplot(2, 2, 1);
plot(x, Mx(x) / 10^3, 'k');
hold on;
xlabel('x, м', 'FontSize', 12);
ylabel('$M_x$(x), кН/м', 'FontSize', 12, 'Interpreter', 'latex');
title('Эпюра момента Mx');
grid on;
xticks(-2 * lambda:0.05:2 * lambda);

subplot(2, 2, 2);
plot(x, My(x) / 10^3, 'k');
hold on;
xlabel('x, м', 'FontSize', 12);
ylabel('$M_y$(x), кН/м', 'FontSize', 12, 'Interpreter', 'latex');
title('Эпюра момента My');
grid on;
xticks(-2 * lambda:0.05:2 * lambda);

subplot(2, 2, 3);
plot(x, Ny(x) / 10^6, 'k');
hold on;
xlabel('x, м', 'FontSize', 12);
ylabel('$N_y$(x), МН/м', 'FontSize', 12, 'Interpreter', 'latex');
title('Эпюра окружного усиления');
grid on;
xticks(-2 * lambda:0.05:2 * lambda);

subplot(2, 2, 4);
plot(x, Q(x) / 10^3, 'k');
hold on;
xlabel('x, м', 'FontSize', 12);
ylabel('Q(x), кН', 'FontSize', 12, 'Interpreter', 'latex');
title('Эпюра поперечной силы Q');
grid on;
xticks(-2 * lambda:0.05:2 * lambda);

figure('Position', [100, 100, 1600, 1200]);

subplot(2, 2, 1);
plot(x, sigma_eqv_outer(x) / 10^6, 'k');
hold on;
xlabel('x, м', 'FontSize', 12);
ylabel('$σ_{eqv}$, МПа', 'FontSize', 12, 'Interpreter', 'latex');
title('Эпюра эквивалентных напряжений для внешней поверхности оболочки');
grid on;
xticks(-2 * lambda:0.05:2 * lambda);

subplot(2, 2, 2);
plot(x, sigma_eqv_inner(x) / 10^6, 'k');
```

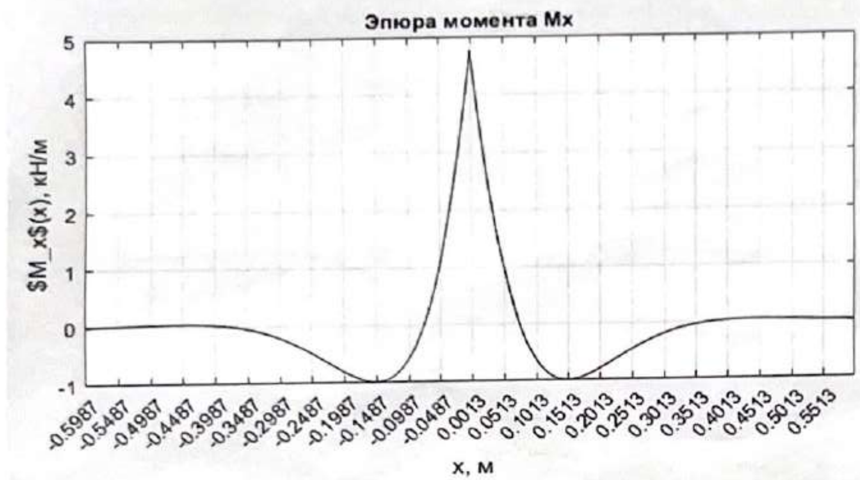
```
hold on;
xlabel('x, м', 'FontSize', 12);
ylabel('$σ_{eqv}$, МПа', 'FontSize', 12, 'Interpreter', 'latex');
title('Эпюра эквивалентных напряжений для внутренней поверхности оболочки');
grid on;
xticks(-2 * lambda:0.05:2 * lambda);

subplot(2, 2, 3);
plot(x, W(x), 'k');
hold on;
xlabel('x, м', 'FontSize', 12);
ylabel('W(x), м', 'FontSize', 12, 'Interpreter', 'latex');
title('Эпюра прогиба');
grid on;
xticks(-2 * lambda:0.05:2 * lambda);

subplot(2, 2, 4);
plot(x, phi(x), 'k');
hold on;
xlabel('x, м', 'FontSize', 12);
ylabel('ϕ(x), рад', 'FontSize', 12, 'Interpreter', 'latex');
title('Эпюра углового перемещения');
grid on;
xticks(-2 * lambda:0.05:2 * lambda);

sigma_eqv_inner_max = max(abs(sigma_eqv_inner(x)));
sigma_eqv_outer_max = max(abs(sigma_eqv_outer(x)));
fprintf('Maximum equivalent stress for inner surface σ_{eqv_inner_max} = %f
MPa\n', sigma_eqv_inner_max / 1e6);
fprintf('Maximum equivalent stress for outer surface σ_{eqv_outer_max} = %f
MPa\n', sigma_eqv_outer_max / 1e6);

if sigma_eqv_inner_max > sigma_eqv_outer_max
    n = sigma / sigma_eqv_inner_max;
else
    n = sigma / sigma_eqv_outer_max;
end
fprintf('Safety factor n = %f\n', n);
```

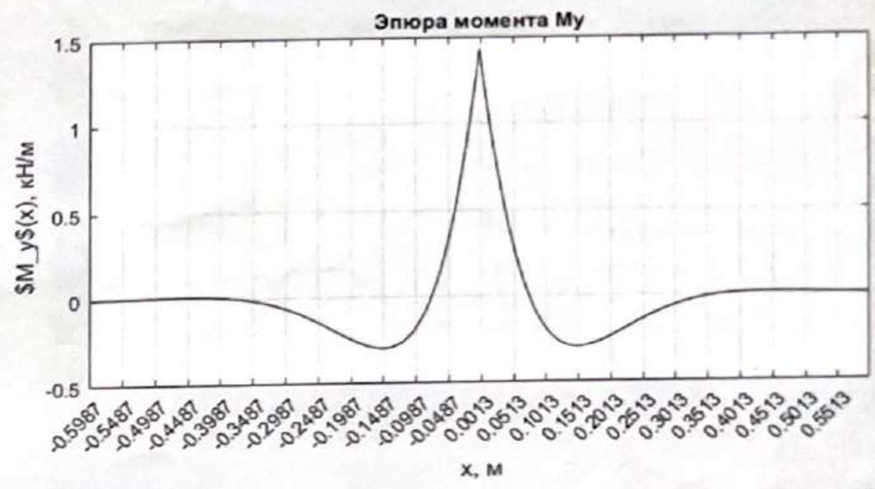

Эпюра эквивалентных напряжений для внешней поверхности оболочки
$σ_{eqv}$, МПа
x, м


Эпюра эквивалентных напряжений для внутренней поверхности оболочки
$σ_{eqv}$, МПа
x, м

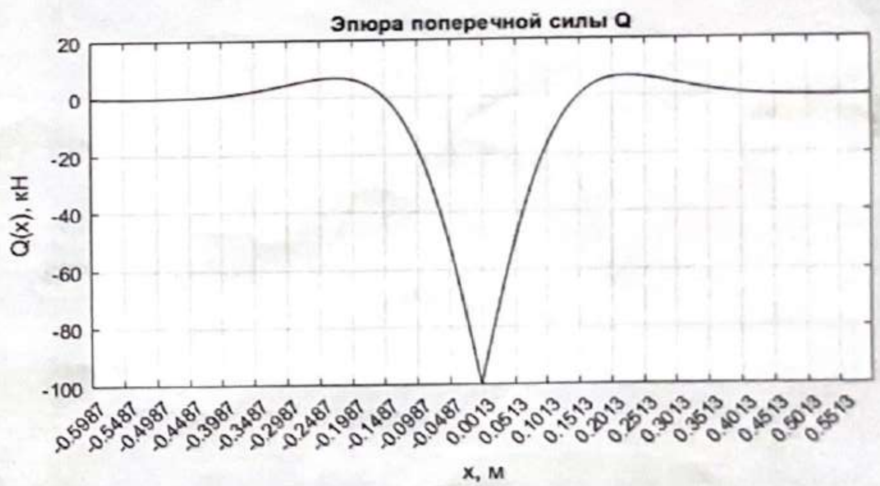

Эпюра прогиба
W(x), м
x, м


Эпюра углового перемещения
φ(x), рад
x, м


Эпюра момента Mx
M_x(x), кН/м
x, м


Эпюра момента My
M_y(x), кН/м
x, м


Эпюра окружного усиления
N_y(x), МН/м
x, м


Эпюра поперечной силы Q
Q(x), кН
x, м

Задача 6

Дано: $h_1 = 20$ мм $h_2 = 30$ мм

$e_1 = 2,5$ мм $e_2 = 3$ мм

Из № 2

$N = 12,5$ кВт $l_1 = 0,55$ м ст. 35 $\sigma_B = 520$

$n_0 = 800 \frac{об}{мин}$ $l_2 = 0,75$ м $\sigma_T = 280$

$D_1 = 0,35$ м $a_1 = 0,3$ м $\sigma_{-1} = 220$ МПа

$D_2 = 0,4$ м $a_2 = 0,3$ м $d = 60$ мм (из реш. 2)

1) Массы дисков:

$$m_1 = \rho V_1 = \rho\pi\left(\frac{D_1}{2}\right)^2 h_1 = 7850\cdot\pi\left(\frac{0,35}{2}\right)^2\cdot 20\cdot 10^{-3} = 15,2 \text{ кг}$$

$$m_2 = \rho V_2 = 7850\pi\left(\frac{0,4}{2}\right)^2\cdot 30\cdot 10^{-3} = 29,6 \text{ кг}$$

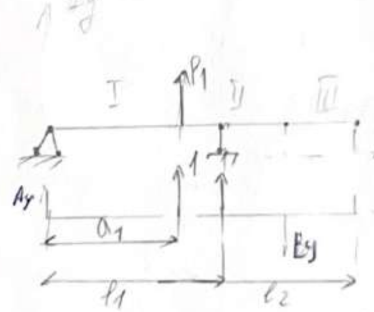
2) Найдём силы

$$P_1 = m_1 e_1 \theta^2 = 15,2\cdot 2,5\cdot 10^{-3}\theta^2 = 0,038\theta^2$$

$$P_2 = m_2 e_2 \theta^2 = 29,6\cdot 3\cdot 10^{-3}\theta^2 = 0,0888\theta^2$$

3) Найдём моменты от единичных сил ($M_y | P_1 = 1, P_2 = 0$ и $M_y | P_2 = 1, P_1 = 0$)

$M_y | P_1 = 1, P_2 = 0$:



Опорные реакции: $\Sigma mom\, A = 1\cdot a_1 - B_y l_1 = 0 \Rightarrow B_y = \frac{a_1}{l_1} = 0,54(5)$

$\Sigma F_y = 1 + A_y - B_y = 0 \Rightarrow A_y = B_y - 1 = -0,46$

I: $0 < z < a_1$

$M_y = -0,46 z$

$M(0) = 0$

$M_y(a_1) = -0,138$

II: $a_1 < z < l_1$

$\Sigma mom\, P_1 = -0,46 - M_y + 1(z - a_1) = 0 \Rightarrow M_y = 0,54z - 0,3$

$M_y(a_1) = -0,138$

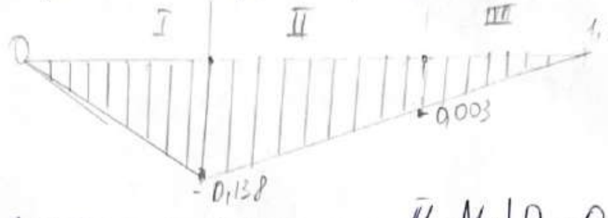
$M_y(l_1) = -0,003$

III: $l_1 < z < l_1 + l_2$

без разрезов, т.к.

$M_y(l_1 + l_2) = 0$

Эпюра $\bar{M}_1 = M_y | P_1 = 1,\ P_2 = 0$



Построим эпюру для $\bar{M}_2 = M_y | P_1 = 0,\ P_2 = 1$

Найдём опорные реакции:

$\Sigma mom_A = -1(a_2 + l_1) - B_y \cdot l_1 = 0$

$B_y = -\frac{1(a_2 + l_1)}{l_1} = \frac{0{,}3+0{,}55}{0{,}55} = -1{,}54$

$\Sigma F_y = A_y - 1 - B_y = 0 \Rightarrow A_y = 1 + B_y = -0{,}54$

$I: 0 < z < l_1 \quad \Rightarrow M_y = -0{,}54z \quad M(0) = 0$
$M(l_1) = -0{,}297$

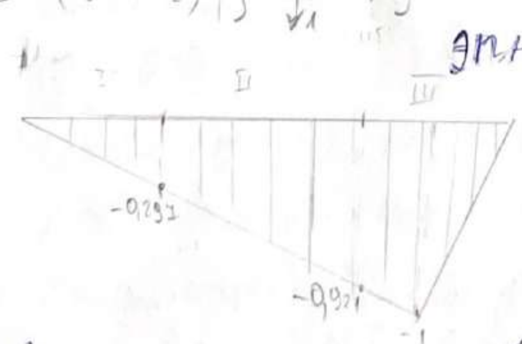
$II: l_1 < z < l_1 + a_2 \quad \Rightarrow M_y = -0{,}54z - 1{,}54(z - l_1) = -0{,}54z - 1{,}54z + 0{,}847 =$

$M_y(l_1) = -2{,}08 \cdot 0{,}55 + 0{,}847 = -0{,}297$

$M_y(l_1 + a_2) = -2{,}08(0{,}55 + 0{,}3) + 0{,}847 = -0{,}921$

$III: (0 < z < l_2) \quad M_y = -1$

Эпюра $\bar{M}_2 = M_y | P_1 = 0,\ P_2 = 1$



Воспользуемся интегралом Максвелла-Мора для поиска

$\delta_{ij} = \int_0^L \frac{M_i M_j}{EI} dz \quad I = \frac{\pi d^4}{64} \Rightarrow EI = 200 \cdot 10^9 \pi \cdot \frac{(60 \cdot 10^{-3})^4}{64} =$

$= \cancel{89836{,}7}\ 127234{,}5$

$\delta_{11} = \frac{1}{EI}\left[\int_0^{0{,}3}(-0{,}46z)^2 dz + \int_{0{,}3}^{1{,}3}(0{,}54z - 0{,}3)^2 dz\right]$

Вычисления через пакет Wolfram Alpha

$\delta_{11} = 3{,}42898 \cdot 10^{-7}$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EI}\int_0^{l_1+l_2} \bar{M}_2 \bar{M}_2 dz = \frac{1}{EI}\Big[\int_0^{0,55}(-0,54z)^2 dz + \int_{0,55}^{1,3}(\cancel{-0,54z-1,54}$$
$$-2,08z-0,847)^2 dz\Big] = 0,0000465841$$

$$\delta_{21} = \frac{1}{E}\int_0^{l_1+l_2} \bar{M}_1 \bar{M}_2 dz = \frac{1}{EI}\Big[\int_0^{0,3}(-0,46z)(-0,54z) dz + \int_{0,3}^{0,55}(0,54z-0,3)\cdot$$
$$\cdot(-0,54z)dz + \int_{0,55}^{1,3}(0,54z-0,3)(-2,08z-0,847)dz\Big] = -3,52261\cdot10^{-6}$$

Найдём Δp_1, Δp_2

$$\Delta p_1 = p_1\delta_{11} + p_2\delta_{12} = \theta^2(0,038\cdot3,42898\cdot10^{-7} + 0,0888\cdot(-3,52261\cdot10^{-6}))$$
$$= -2,99778\cdot10^{-7}\theta^2$$

$$\Delta p_2 = p_1\delta_{21} + p_2\delta_{22} = \theta^2(0,038\cdot(-3,52261\cdot10^{-6}) + 0,0888\cdot0,0000465841) =$$
$$= 4,00281\cdot10^{-6}\theta^2$$

Запишем ур-е движения:

$$\sum_{k=1}^{n} U_k'' m_k + \delta_{jk} + U_j = \Delta p_j \cos(\theta t) \quad \forall j = \overline{1,n}$$

Решение ищем в виде: $U_1(t) = D_1\cos(\theta t)$
$U_2(t) = D_2\cos(\theta t)$

$$U_j'' = -\theta^2 D_j \cos(\theta t)$$

$$\begin{cases} U_1'' m_1\delta_{11} + m_2 U_2''\delta_{12} + U_1 = \Delta p_1\cos(\theta t) \\ U_1'' m_1\delta_{21} + m_2 U_2''\delta_{22} + U_2 = \Delta p_2\cos(\theta t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\theta^2\delta_{11}m_1 D_1\cos(\theta t) - \theta^2\delta_{12}m_2 D_2\cos(\theta t) + D_1\cos(\theta t) = \Delta p_1\cos(\theta t) \\ -\theta^2\delta_{21}m_1 D_1\cos(\theta t) - \theta^2\delta_{22}m_2 D_2\cos(\theta t) + D_2\cos(\theta t) = \Delta p_2\cos(\theta t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} D_1(1-\theta^2\delta_{11}m_1) - D_2(\cancel{1-m}\,m_2\delta_{12}\theta^2) = \Delta p_1 \\ D_2(-\theta^2\delta_{21}m_1) + D_2(1-m_2\delta_{22}\theta^2) = \Delta p_2 \end{cases}$$

СЛАУ относительно $\bar{D} = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \end{pmatrix}$

$A\bar{D} = B$

Подставим δ_{ij}, m_j, Δp_j

$\cancel{D_1(1-\theta^2 3,42898\cdot10^{-7}) - D_2(1}$

$$\begin{cases} D_1(1-\theta^2 3,2120496\cdot10^{-6}) + D_2(\theta^2\cdot1,04269256\cdot10^{-7}) = -2,99778\cdot10^{-7}\theta^2 \\ D_1(\theta^2\cdot5,3543672\cdot10^{-5}) + D_2(1-\theta^2 1,37888936\cdot10^{-3}) = 4,00281\cdot10^{-6}\theta^2 \end{cases}$$

Метод Крамера: $D_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$, $D_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$

$\Delta = \det(C)$ – матрицы СЛАУ

$\Delta =$

$\Delta_1 =$

$\Delta_2 =$

$$D_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{3\cdot10^{-7}\theta^2 - 1{,}4\cdot10^{-11}\theta^4}{-1+0{,}000138520\theta^2 - 1{,}826\cdot10^{-9}\theta^4}$$

$$D_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-4\cdot10^{-6}\theta^2 + 4{,}75\cdot10^{-12}\theta^4}{-1+0{,}000138520\theta^2 - 1{,}826\cdot10^{-9}\theta^4}$$

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{\frac{m_1\delta_{11}+m_2\delta_{22}}{2} + \sqrt{\left(\frac{m_1\delta_{11}-m_2\delta_{22}}{2}\right)^2 + m_1m_2\delta_{12}\delta_{22}}}} = \left| \begin{matrix} m_1 = 15{,}2 \\ m_2 = 29{,}6 \\ \delta_{11} \ldots \\ \delta_{22} \ldots \\ \delta_{12} \ldots \end{matrix} \right| =$$

$= 127{,}489$ рад/с

$$\omega_2 = \frac{1}{\sqrt{\frac{m_1\delta_{11}+m_2\delta_{22}}{2} - \sqrt{\left(\frac{m_1\delta_{11}-m_1\delta_{22}}{2}\right)^2 + m_1m_2\delta_{12}\delta_{21}}}} = 1127{,}826\ \frac{рад}{с}$$

$n_1 = \frac{60\omega_1}{2\pi} = 1213\ \frac{об}{мин}$; $n_2 = \frac{60\omega_2}{2\pi} = 10772$ об/мин

Первая форма колебаний:

$\theta = \omega_1 = 127{,}489$ рад/сек

$$D_I = \left(\begin{matrix} D_1 \\ D_2 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \omega_1 \\ \omega_1 \end{matrix}\right) = \begin{pmatrix} 0{,}0187 \\ \cancel{-0{,}00303} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}0187 \\ -0{,}0022 \end{pmatrix}$$

Вторая форма колебаний:

$\theta = \omega_2 = 1127{,}826$ рад/сек

$$D_{II} = \left(\begin{matrix} D_1 \\ D_2 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \omega_2 \\ \omega_2 \end{matrix}\right) = \begin{pmatrix} 0{,}00573 \\ -0{,}00303 \end{pmatrix}$$

Проверка на ортогональность:

$(AD_I)^T \cdot D_{II} = 0$; $A = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}$ $\quad (AD_I)^T = (0{,}284; -0{,}064)$

$$(A\cdot D_I)^T \cdot D_{II} = (0{,}284; 0{,}064)\begin{pmatrix} 0{,}00573 \\ -0{,}00303 \end{pmatrix} = 0{,}0018$$

$$\delta = \frac{0{,}0018}{0{,}284}\cdot 100\% = 0{,}6\% < 3\%$$

Расчет центробежной силы: $P_1 = m_1\theta^2\varepsilon_1$ $\quad P_2 = m_2\theta^2\varepsilon_2$

$n_0 = 200$ об/мин $\Rightarrow \theta = \frac{2\pi n_0}{60} = 20{,}93$ рад/сек

$D_1|_{\theta=20{,}93} = (0{,}0032)$ $\cancel{0{,}0045}$ $\quad D_2|_{\theta=20{,}93} = 0{,}0045$

$P_1 = 15{,}2\cdot 20{,}93^2\cdot 2{,}5\cdot10^{-3} = 16{,}65$ Н

$P_2 = 29{,}6\cdot 20{,}93^2\cdot 3\cdot10^{-3} = 39{,}91$ Н

Для грузовой эпюры M_p: $M_p = P_1 \overline{M}_1 + P_2 \overline{M}_2$

$M_{p_1} = 0$ (эпюра из нуля)

$M_{p_2} = P_1 \cdot M_2 \cancel{(0)} + P_1 M_1 = 39{,}91 \cdot (-0{,}287) + 16{,}65 \cdot (-0{,}138) =$

$= -13.85$

$M_{p_3} = 39{,}91 \cdot (-0{,}921) + 16{,}65 \cdot (-0{,}003) = -35{,}89$

$M_{p_4} = 0$

Опасное сечение: $M_{p_3} \Rightarrow M_{p\,max} = M_{p_3}$

Динамическое напряжение:

$$\sigma = \frac{M_{p\,max}}{W_x};\quad W_x = \frac{\pi d^3}{32} \Rightarrow \sigma = \frac{\overset{35{,}89}{\cancel{16{,}99 \cdot 32}} \cdot 32}{\pi (60 \cdot 10^{-3})^3} = 1{,}69 \cdot 10^6\ Па$$

In[ ]:= $A = \begin{pmatrix} 1-\theta^2*5.2*10\text{^}-6 & \theta^2*10\text{^}-4 \\ \theta^2*5.35*10\text{^}-5 & 1-\theta^2*1.38*10\text{^}-3 \end{pmatrix}$; $b = \begin{pmatrix} -\theta^2*3*10\text{^}-7 \\ \theta^2*4*10\text{^}-6 \end{pmatrix}$;

LinearSolve[A, b]

Out[ ]=

$$\left\{\frac{1.\ (3.\times10^{-7}\,\theta^2 - 1.4\times10^{-11}\,\theta^4)}{-1. + 0.0013852\,\theta^2 - 1.826\times10^{-9}\,\theta^4},\ \frac{1.\ (-4.\times10^{-6}\,\theta^2 + 4.75\times10^{-12}\,\theta^4)}{-1. + 0.0013852\,\theta^2 - 1.826\times10^{-9}\,\theta^4}\right\}$$

In[23]:= m1 = 15.2

m2 = 29.6

d11 = 3.43 * 10^-7

d22 = 0.0000466

d12 = -3.52 * 10^-6

$$w1 = \frac{1}{\sqrt{\frac{m1*d11+m2*d22}{2} - \sqrt{\left(\frac{m1*d11-m2*d22}{2}\right)\text{^}2 + m1*m2*d12*d22}}}$$

$$w2 = \frac{1}{\sqrt{\frac{m1*d11+m2*d22}{2} + \sqrt{\left(\frac{m1*d11-m2*d22}{2}\right)\text{^}2 + m1*m2*d12*d22}}}$$

w2 = 1128

w1 = 127.489

In[36]:= n2 = 60 * 1128 / (2 * 3.1415)

n1 = 60 * 127 / (2 * 3.1415)

Out[36]=

10771.9

Out[37]=

1212.8

10771.924240012731`

In[ ]:=
$$A = \begin{pmatrix} 1-\theta^2 * 5.2 * 10\text{^}{-6} & \theta^2 * 10\text{^}{-4} \\ \theta^2 * 5.35 * 10\text{^}{-5} & 1-\theta^2 * 1.38 * 10\text{^}{-3} \end{pmatrix};\ b = \begin{pmatrix} -\theta^2 * 3 * 10\text{^}{-7} \\ \theta^2 * 4 * 10\text{^}{-6} \end{pmatrix};$$

```
θ = 127.826
LinearSolve[A, b]
```

Out[ ]=
```
127.826
```

Out[ ]=
```
{0.0186603, -0.00217637}
```

In[ ]:=
```
D1 = {0.01866, -0.002176}
```

$$A = \begin{pmatrix} m1 & 0 \\ 0 & m2 \end{pmatrix}$$

```
A * D1
```

Out[ ]=
```
{0.01866, -0.002176}
```

Out[ ]=
```
{{15.2, 0}, {0, 29.6}}
```

Out[ ]=
```
{{0.283632, 0.}, {0., -0.0644096}}
```

In[ ]:=
```
n0 = 200
θ = 2 * 3.14 * n0 / 60
```

Out[ ]=
```
200
```

Out[ ]=
```
20.9333
```

In[ ]:=
$$A = \begin{pmatrix} 1-\theta^2 * 5.2 * 10\text{^}{-6} & \theta^2 * 10\text{^}{-4} \\ \theta^2 * 5.35 * 10\text{^}{-5} & 1-\theta^2 * 1.38 * 10\text{^}{-3} \end{pmatrix};\ b = \begin{pmatrix} -\theta^2 * 3 * 10\text{^}{-7} \\ \theta^2 * 4 * 10\text{^}{-6} \end{pmatrix};$$

```
θ = 20.933
LinearSolve[A, b]
```

Out[ ]=
```
20.933
```

In[ ]:=
```
{-0.00032737527022161025`, 0.00445381057656699`}
m1
```

Out[ ]=
```
{-0.000327375, 0.00445381}
```

Out[ ]=
```
15.2
```

```
In[•]:= e1 = 2.5 * 10^-3
        e2 = 3 * 10^-3
        P1 = m1 * θ^2 * e1
Out[•]=
        0.0025
Out[•]=
        3
        ────
        1000
Out[•]=
        16.6512

In[•]:= θ

In[•]:= 20.933`
        P1
Out[•]=
        20.933
Out[•]=
        16.6512

In[•]:= P2 = m2 * θ^2 * e2
Out[•]=
        38.9113

In[•]:= P1 * (-0.003) + P2 * (-0.921)
Out[•]=
        -35.8873

In[•]:= σ = 35.9 * 32 / 3.14 / (60 * 10^-3)^3
Out[•]=
        1.6938 × 10^6
```