

Министерство образования и науки
Российской Федерации

Национальный Исследовательский Университет "МГУ"

РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ ЭЛЕМЕНТОВ
ЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО ОБОРУДОВАНИЯ

Курсовая работа
по курсу "Прикладная физика" 4 семестр

Исполнено
15.06.24

Студент: Исаева А.Э.

Группа: ТФ-13-22

Преподаватель: Мамасов Р.В.

Вариант тематического задания: 10

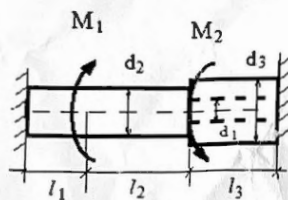
Москва 2024

ИТАЭ

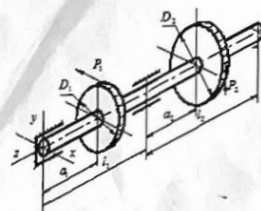
Курсовая работа по курсу Прикладная физика
Расчеты на прочность элементов энергетического оборудования

Задание 8

1

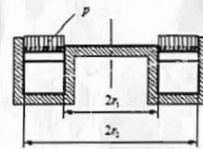


2,6

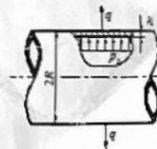


Группа ТФ- 13-22
Студент *Насирова А.*
Вариант численных данных 10
Подпись преподавателя *[Signature]*

4



5

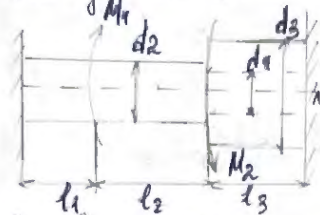


Задача № 1

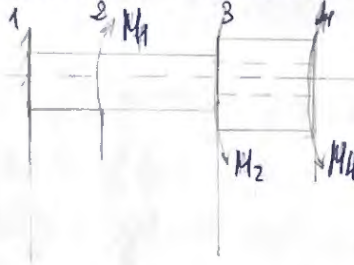
$$M_2 = k M_1$$

Дано: $l_1 = 1,5 \text{ м}$; $l_2 = 1,5 \text{ м}$; $l_3 = 3 \text{ м}$; $d_1 = 16 \text{ мм}$; $d_2 = 30 \text{ мм}$
 $d_3 = 38 \text{ мм}$; $k = 3$; $G = 80 \text{ ГПа}$; $[\sigma_{\text{доп}}] = 100 \text{ МПа}$

Ускорная система:



Основная система:



Ускорная система статически неопределима, поэтому отбросим лишнюю заданную, применим метод M_4

$$J_p = \frac{\pi d^4}{32}$$

В любой заданной $\varphi_R = 0$ - условие совместности деформаций

$$\varphi_R = \varphi_4(M_4) + \varphi_4(M_2) + \varphi_4(M_1) = 0$$

$$\varphi_4(M_1) = \frac{M_1 l_3}{G J_p^{d_3}} + \frac{M_1 l_2}{G J_p^{d_2}} + \frac{M_1 l_1}{G J_p^{d_1}} =$$

$$= \frac{M_1}{G} \left(\frac{l_3}{J_p^{d_3}} + \frac{l_2}{J_p^{d_2}} + \frac{l_1}{J_p^{d_1}} \right) = 0,0033319 M_1$$

$$\varphi_4(M_2) = \frac{M_2}{G} \left(\frac{l_2}{J_p^{d_2}} + \frac{l_1}{J_p^{d_1}} \right) = 0,00315 M_2$$

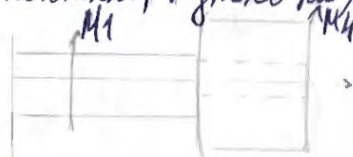
$$\varphi_4(M_4) = \frac{M_4}{G} \left(\frac{l_1}{J_p^{d_1}} \right) = -0,00291421 M_4$$

$$\text{Отсюда: } 0,0033319 M_4 + 0,00315 M_2 - 0,00291421 M_1 = 0$$

$$M_2 = k M_1 = 3 M_1 \Rightarrow 0,0033319 M_4 + 0,0065579 M_1 = 0$$

$$M_4 = -1,96082 M_1$$

Получив, что M_1 - отрицательный момент по правому знаку, соответственно, нужно направить момент M_4 в другую сторону.



Определим M_Z на контрольном участке:

4-3

$$M_Z = M_4 = -1,96082 M_1$$

4-2

$$M_Z = M_2 - M_4 =$$

$$3 M_1 - 1,96082 M_1 =$$

$$= 1,03918 M_1$$

4-1

$$M_Z = -M_1 + M_2 - M_4 =$$

$$= 2 M_1 - 1,96082 M_1 = 0,03918 M_1$$

стр 1

Найдём M_1 из расчёта $\max \tau \leq [\tau]$

$$\tau_{21} = \frac{M_{21}}{W_{p21}} = \frac{0,03918}{W_{p21}} = 7390,44486 \text{ МПа}$$

$$W_{p21} = \frac{\pi d_2^3}{16} = 5,30144 \cdot 10^{-6}$$

$$W_{32} = W_{21}$$

$$W_{43}^{\odot} = \frac{\pi d_3^3}{16} (1 - C^4) = \frac{\pi d_3^3}{16} \left(1 - \left(\frac{d_1}{d_3} \right)^4 \right) = 1,04355 \cdot 10^{-5}$$

$$\tau_{32} = \frac{M_{32}}{W_{32}} = 19608,44027 \text{ МПа}$$

$$\tau_{43} = \frac{M_{43}}{W_{43}} = 369865,54596 \text{ МПа}$$

$$\max \tau = [\tau_{43}] \Rightarrow M_1 = \frac{[\tau_{43}]}{\tau_{43}} \approx 270,4 \text{ Н}\cdot\text{м}$$

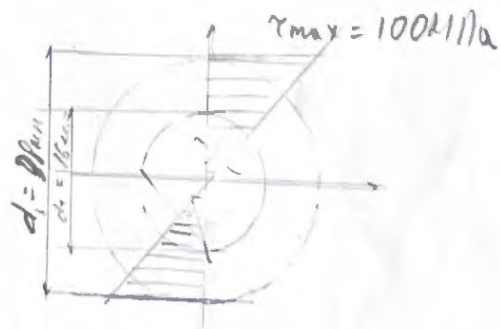
Найдём углы поворота

$$\varphi_4 = 0; \varphi_3 = \varphi_4 + \frac{M_{43} l_3}{G J_{43}} = -0,0971243 \text{ рад}$$

$$\varphi_2 = \varphi_3 + \frac{M_{32} l_2}{G J_{32}} \approx -0,030873 \text{ рад}$$

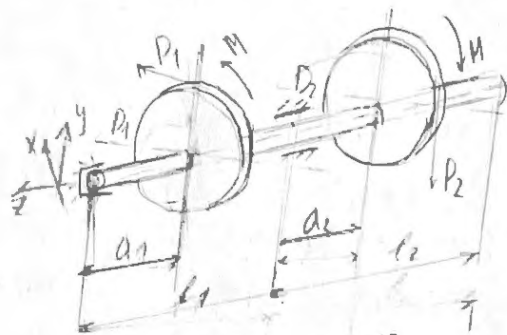
$$\varphi_1 = \varphi_2 + \frac{M_{21} l_1}{G J_{21}} \approx 0,00000976 \approx 0$$

Эпюры углов поворота сечений



Задача 2 Дано: $N = 12,5 \text{ кВт}$; $n_0 = 200 \text{ об/мин}$;
 $D_1 = 0,35 \text{ м}$; $D_2 = 0,4 \text{ м}$; $l_1 = 0,55 \text{ м}$; $l_2 = 0,75 \text{ м}$; $a_1 = 0,3 \text{ м}$;
 $a_2 = 0,3 \text{ м}$; марка стали: Сталь 35

Решение:



1. Угловая скорость вращ.
 Вала: $\omega = n_0 \cdot \frac{2\pi}{60} =$
 $= 200 \cdot \frac{\pi}{30} \approx 20,94395 \text{ рад/с}$

2. Крутящий момент, передаваемый валу:

$$M = \frac{N}{\omega} = \frac{12,5 \cdot 10^3 \cdot 3}{20\pi} =$$

$$= 596,83104 \text{ Н·м}$$

3. Определим P_1 и P_2 :

$$M = \frac{P_1 D_1}{2} = \frac{P_2 D_2}{2}$$

$$P_1 = \frac{2M}{D_1} = \frac{2 \cdot 596,83104}{0,35} = 3410,4634 \text{ Н}$$

$$P_2 = \frac{2M}{D_2} = \frac{2 \cdot 596,83104}{0,4} = 2984,1552 \text{ Н}$$

4. Построим эпюры крутящего момента и изгибающего момента

1) $\sum F_x = 0: -A_x + P_1 - B_x = 0$

В т. В. шарнирно-подпирная опора \Rightarrow реакция

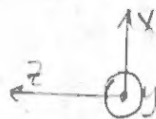
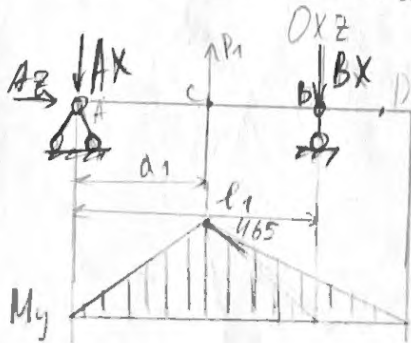
$\sum F_z = 0: A_z - B_z = 0 \Rightarrow A_z = B_z$ т.к. нет вращений \Rightarrow реакция

2) $\sum M_A F = 0: P_1 a_1 - B_x \cdot l_1 = 0; B_x = \frac{P_1 a_1}{l_1} = \frac{3410,463 \cdot 0,3}{0,55} = 1860,2526$

$-A_x + P_1 - \frac{P_1 a_1}{l_1} = 0 \Rightarrow A_x = P_1 \left(1 - \frac{a_1}{l_1}\right) = 1550,2105 \text{ Н}$

Проверка: $\sum M_B F = A_x a_1 - B_x (l_1 - a_1) = P_1 a_1 \left(1 - \frac{a_1}{l_1}\right) - P_1 \frac{a_1}{l_1} (l_1 - a_1) =$
 $= -\frac{P_1 a_1^2}{l_1} + P_1 a_1 - P_1 a_1 + \frac{P_1 a_1^2}{l_1} = 0$ (тождество)

Эпюра $M_{\max} = M_c = A_x a_1 = P_1 a_1 \left(1 - \frac{a_1}{l_1}\right) = 465,06515 \text{ Н·м}$



б) Построим эпюру в плоскости OYZ (для M_x)

1) $Ox: \sum F_x = 0: -A_y + B_y - P_2 = 0 \Rightarrow A_y = B_y - P_2$

2) $\sum m_{A} F = 0: B_y \cdot l_1 - P_2(l_1 + a_2) = 0$

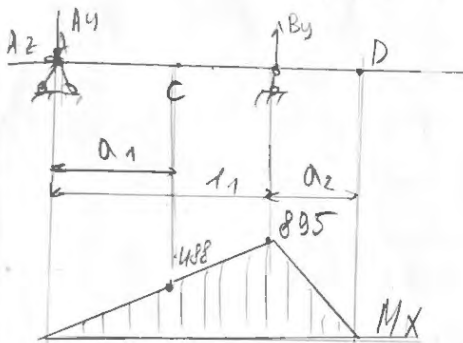
$$B_y = \frac{P_2(l_1 + a_2)}{l_1} = P_2(1 + \frac{a_2}{l_1}) = 4611,8762 \text{ Н}$$

$$A_y = P_2 \cdot \frac{l_1 + a_2}{l_1} - P_2 = 1627,7210 \text{ Н}$$

$$M_{\max} = M_B = A_y \cdot l_1 = 895,2466 \text{ Н} \cdot \text{м}$$

Проверка: $\sum m_{D} F = 0: A_y \cdot (l_1 + a_2) - B_y \cdot a_2 = P_2 \frac{a_2}{l_1} (l_1 + a_2) - A_y P_2 (1 - \frac{a_2}{l_1}) \cdot a_2 = P_2 a_2 + \frac{P_2 a_2}{l_1} - P_2 a_2 - \frac{P_2 a_2}{l_1} = 0$ (Получено.)

$$M_x(C) = A_y \cdot a_1 = 895,2466 \cdot 0,3 = 488,3763 \text{ Н} \cdot \text{м}$$



6) Определим диаметр вала:

1. Критерий Лангсена: $\sigma_{\text{вал}} = \frac{M_{\text{экв max}}}{W_x}$; $M_{\text{экв}} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + \frac{3}{4} M_z^2}$

$$M_{\text{экв}}(C) = \sqrt{488,3763^2 + 465,0632^2 + \frac{3}{4} \cdot 596,8310^2} = 849,6423 \text{ Н} \cdot \text{м}$$

2. Условие прочности: $\sigma_{\text{вал}} \leq [\sigma] \Rightarrow \frac{M_{\text{экв}}}{W_x} \leq [\sigma] = \frac{\sigma_{\text{тек}}}{n}$

т.к. $\sigma_{\text{т}} = 280 \text{ МПа}$

нормативный коэффициент запаса прочности: $[n] = 2,5$; $W_x = \frac{\pi d^3}{32}$

$$[\sigma] \geq \frac{849,6423 \cdot 32}{\pi d^3} \Rightarrow d = \sqrt[3]{\frac{849,6423 \cdot 32 \cdot 2,5}{280 \cdot 10^6 \cdot \pi}} = 0,0425931 =$$

$$\approx 42,6 \text{ мм} \text{ в соответствии ГОСТ возьмем } d = 45 \text{ мм}$$

3. $\sigma_B = 520 \text{ МПа}$

$\sigma_{-1} = 220 \text{ МПа}$

$\tau_T = 150 \text{ МПа}$

$K_B = 2,01$

$K_{\sigma} = 0,72$

$K_F = 0,8$

$|\sigma_c| = \frac{M_{\text{экв}}}{W_x}$

$$M_{\text{экв}} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2} = \sqrt{488,3763^2 + 465,0632^2} =$$

$$|\sigma_c| = \frac{874,3416 \cdot 32}{\pi \cdot 0,045^3} = 7,53776 \cdot 10^7 \text{ Па}$$

$$K = \frac{K_{\sigma}}{K_F K_{\sigma}} = \frac{2,08}{0,72 \cdot 0,8} = 3,61$$

$$n_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_c \cdot K} = \frac{220 \cdot 10^6}{3,61 \cdot 7,53776 \cdot 10^7} = 0,808484$$

$$\tau_{\max} = \frac{\max M_z}{W_p} = \frac{596,83104 \cdot 16}{\pi \cdot 0,045^3} = 3,35568 \cdot 10^7 \text{ Па}$$

$$n_{\tau} = \frac{\tau_T}{\tau_{\max}} = \frac{150 \cdot 10^6}{3,35568 \cdot 10^7} = 4,49683$$

смп4

$$n_c = \frac{n_\sigma \cdot n_\tau}{\sqrt{n_\sigma^2 + n_\tau^2}} = 0,795728$$

$d = 45$ не подходит, т.к. n_c должно быть $> 1,4$, $n_c < 1,7$
 учтем $d = 60$ $k_d = 0,72$

$$|\sigma_c| = \frac{674,3416 \cdot 32}{\pi \cdot 0,003} = 3,17999 \cdot 10^7 \text{ Па}$$

$$k = 3,61$$

$$n_\sigma = 1,91642$$

$$\tau_{max} = \frac{596,83104 \cdot 16}{\pi \cdot 0,003} = 1,40124 \cdot 10^7$$

$$n_\tau = \frac{\tau_r}{\tau_{max}} \cdot x = \frac{150 \cdot 10^6}{1,40124 \cdot 10^7} = 10,65916$$

$$n_c \approx 1,88818 > 1,4$$

условие прочности не выполняется
 Зарези 3 $d = 60$

Дано:

$$r_1 = 16 \text{ см}$$

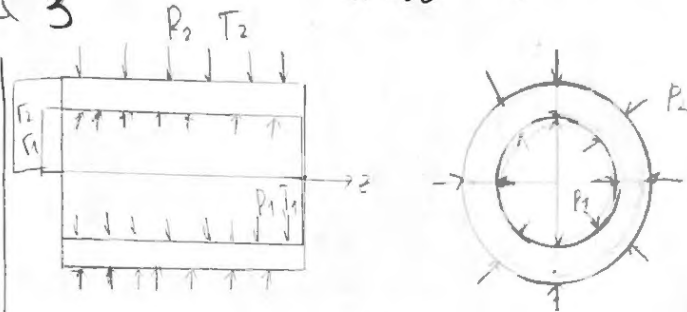
$$r_2 = 21 \text{ см}$$

$$P_1 = 11 \text{ МПа}$$

$$P_2 = 3 \text{ МПа}$$

$$T_1 = 180^\circ \text{C}$$

$$T_2 = 120^\circ \text{C}$$



1) Вторая формула Ламе

$$\sigma_r(r) = \frac{P_1 r_1^2 - P_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} + \frac{(P_1 - P_2) r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \cdot \frac{1}{r^2} (1)$$

2) для чисел, достаточно упрощенных отсюда

$$\sigma_z(r) = \frac{P_1 r_1^2 - P_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}$$

Рассчитаем численные значения с помощью Python

Внутреннее напряжение по ф-ле (1)

$$\sigma_r(r_1) = -11 \text{ МПа}; \quad \sigma_r(r_2) = -3 \text{ МПа}$$

Опорное напряжение по формуле (1)

$$\sigma_\theta(r_1) = 27,140541 \text{ МПа}; \quad \sigma_\theta(r_2) = 19,140541 \text{ МПа}$$

Давление в равновесии по ф-ле (2)

$$\sigma_z(r) = 8,070270 \text{ МПа} \quad \text{Изотермы на минимуме}$$

3) по полилогическому закону распределения температуры

$$T(r) = T_2(T_1 - T_2) \cdot \frac{\ln \frac{r_2}{r}}{\ln \frac{r_2}{r_1}}$$

температурное напряжение рассчитывается по ф-лам:

$$1. \sigma_{rt} = -\frac{E \alpha \Delta T}{2(1-\mu) \ln \frac{r_2}{r_1}} \left(2r \left(\ln \frac{r_2}{r} + \frac{r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \left(1 - \frac{r_2^2}{r^2} \right) \ln \frac{r_2}{r_1} \right) \right)$$

$$2. \sigma_{\theta t} = \frac{E \alpha \Delta T}{2(1-\mu) \ln \frac{r_2}{r_1}} \left(1 - \ln \frac{r_2}{r} - \frac{r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \left(1 + \frac{r_2^2}{r^2} \right) \ln \frac{r_2}{r_1} \right)$$

импр5

$$3. \sigma_{zt} = \frac{E \alpha \Delta T}{2(1-\mu) \ln \frac{r_2}{r_1}} \left(1 - 2 \ln \frac{r_2}{r} - \frac{2 r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \ln \frac{r_2}{r_1} \right)$$

где $E = 200 \cdot 10^9 \text{ Па}$ - модуль упругости для стали,

$\alpha = 12 \cdot 10^{-6} \left(\frac{1}{^\circ\text{C}} \right)$ - коэффициент линейного расширения для стали,

$\mu = 0,3$ (коэф. Пуассона)

$$\Delta T = |T_2 - T_1| = |120 - 180| = 60$$

Решает с помощью Python:

$$\sigma_{rt}(r_1) = 116 - 2,187159 \cdot 10^{-8} \quad \text{различное температурное напря-е}$$

$$\sigma_{rt}(r_2) = -0,0$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\theta t}(r_1) &= 116,807231 \text{ МПа} \\ \sigma_{\theta t}(r_2) &= -97,478482 \text{ МПа} \end{aligned} \right\} \text{ окружное температурное напря-е}$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{zt}(r_1) &= 116,807231 \text{ МПа} \\ \sigma_{zt}(r_2) &= -97,478482 \text{ МПа} \end{aligned} \right\} \text{ осевое температурное напря-е}$$

Интервалы на миллиметровке.

4) Интервалы суммарных напряжений

$$1) \sigma_r = \sigma_{rp} + \sigma_{rt}$$

$$\sigma_r(r_1) = -11 \text{ МПа} ; \sigma_r(r_2) = -3 \text{ МПа}$$

$$2) \sigma_{\theta} = \sigma_{\theta p} + \sigma_{\theta t}$$

$$\sigma_{\theta}(r_1) = 143,947712 \text{ МПа} \quad \sigma_{\theta}(r_2) = -78,337941 \text{ МПа}$$

$$3) \sigma_z = \sigma_{zp} + \sigma_{zt}$$

$$\sigma_z(r_1) = 124,877502 \text{ МПа} \quad \sigma_z(r_2) = -89,408212 \text{ МПа}$$

Интервал на миллиметровке

5) Нахождение эквивалентного напряжения по критерию Мизеса:

$$\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \sigma_2 - \sigma_2 \sigma_3 - \sigma_1 \sigma_3}$$

$$\sigma_1 = \sigma_{\theta} ; \sigma_2 = \sigma_z ; \sigma_3 = \sigma_r \quad \sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$$

$$\sigma_{\text{экв}}(r_1) = 1,46348 \cdot 10^8 \text{ Па} > \sigma_{\text{доп}} \text{ с.с.}$$

6) Условия прочности, с.с. (по формуле):

$$\sigma_1 - \sigma_3 = 143,947712 \text{ МПа} - (-11 \text{ МПа}) \approx 155 \text{ МПа} \leq 200 \text{ МПа}$$

Условия с.с.-Венца выполнены

По критерию Мизеса условие прочности $\sigma_{\text{экв}} \leq \frac{\sigma_T}{n}$, $[\sigma_T] = 294 \text{ МПа}$

$$n - \text{коэф-т запаса прочности: } n = \frac{\sigma_T}{\sigma_{\text{экв}}} = \frac{294 \cdot 10^6}{1,46348 \cdot 10^8} \approx 2,0091$$

$1 < n < 2,5 \Rightarrow$ расчет конструкции переусложнен и ее можно оптимизировать, выбрав другую сталь или увеличив внутр. радиус

График радиальных напряжений σ_r

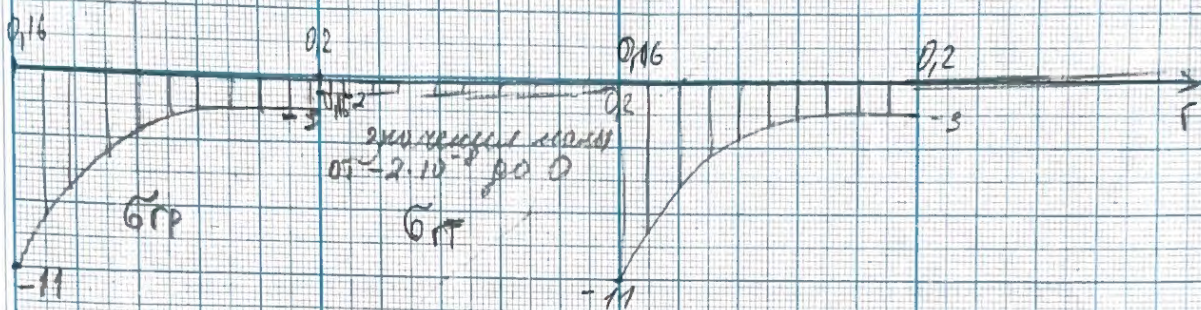


График окружных напряжений σ_θ

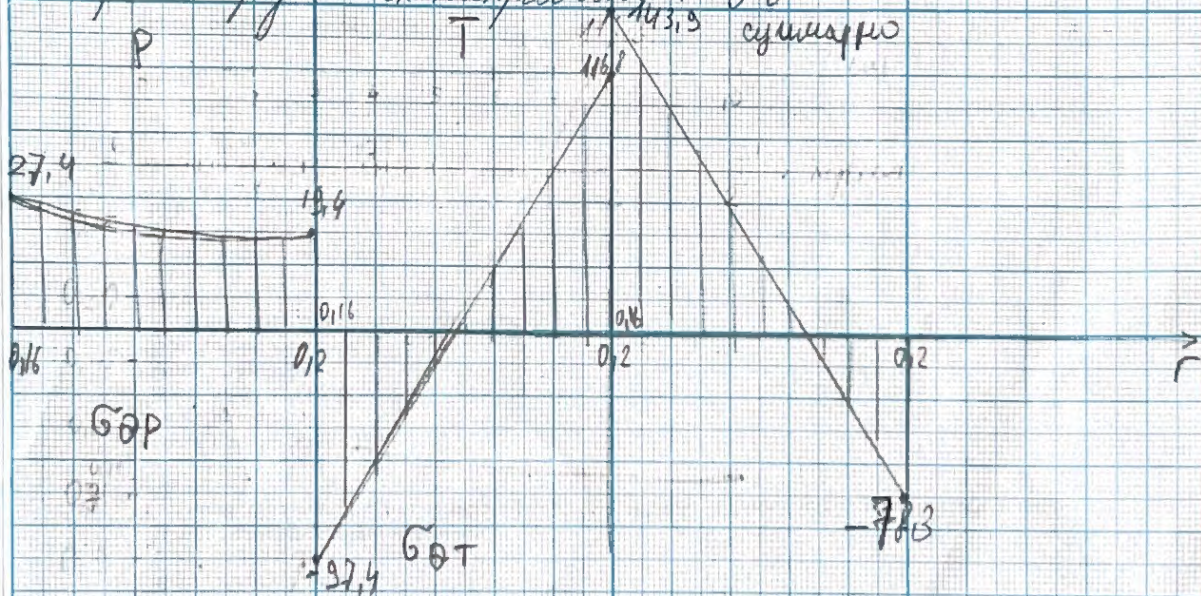
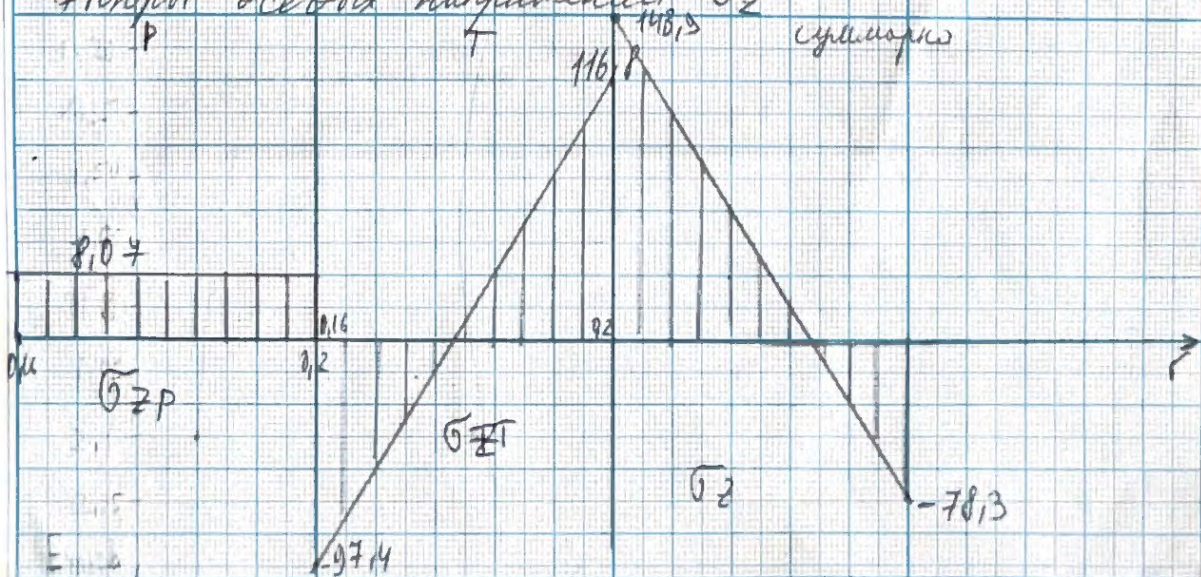


График осевых напряжений σ_z




```

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
r1=16*10**(-2)
r2=21*10**(-2)
p1=11*10**6
p2=3*10**6
T1=180
T2=120
α=1.25*10**(-5)
E=200*10**9
σ=240*10**6
μ=0.3

def σrp(r):
    return ((p1*r1**2-p2*r2**2)/(r2**2-r1**2))-1/r**2*(((r1**2)*(r2**2)*(p1-p2))/(r2**2-r1**2))
print('Радиальные напряжения:')
result_r1rp=σrp(r1)
print('σrp(r1)=',result_r1rp)
result_r2rp=σrp(r2)
print('σrp(r2)=',result_r2rp)

def σθp(r):
    return ((p1*r1**2-p2*r2**2)/(r2**2-r1**2))+1/r**2*(((r1**2)*(r2**2)*(p1-p2))/(r2**2-r1**2))
print('Окружные напряжения:')
result_r1rp=σθp(r1)
print('σθp(r1)=',result_r1rp)
result_r2rp=σθp(r2)
print('σθp(r2)=',result_r2rp)

def σzp(r):
    return ((p1*r1**2-p2*r2**2)/(r2**2-r1**2))
print('Осевые напряжения:')
result_r1rp=σzp(r1)
print('σzp(r1)=',result_r1rp)
result_r2rp=σzp(r2)
print('σzp(r2)=',result_r2rp)

def σzt(r):
    return (((-E*α*60)/(2*(1-μ)*np.log(r2/r1)))*(1-2*np.log(r2/r)-(((2*r1**2)/(r2**2-r1**2))*np.log(r2/r1))))
print('Температурные осевые напряжения:')
result_r1rp=σzt(r1)
print('σzt(r1)=',result_r1rp)
result_r2rp=σzt(r2)
print('σzt(r2)=',result_r2rp)

def σrt(r):
    return (((-E*α*60)/(2*(1-μ)*np.log(r2/r1)))*(np.log(r2/r)+(((r1**2)/(r2**2-r1**2))*(1-(r2**2/r**2))*np.log(r2/r1))))
print('Температурные радиальные напряжения:')
result_r1rp=σrt(r1)
print('σrt(r1)=',result_r1rp)
result_r2rp=σrt(r2)

```

```

result_r2rp=ort(r2)
print('ort(r2)=',result_r2rp)

def o0t(r):
    return (((-E*a*60)/(2*(1-μ)*np.log(r2/r1)))*(1-np.log(r2/r)-(((r1**2)/(r2**2-r1**2))*(1+(r2**2/r**2))*np.
print('Температурные окружные напряжения:')
result_r1rp=o0t(r1)
print('o0t(r1)=',result_r1rp)
result_r2rp=o0t(r2)
print('o0t(r2)=',result_r2rp)

def or(orp, ort):
    return (orp+ort)
print('Суммарные радиальные напряжения:')
result_r1rp=orp(r1)+ort(r1)
print('or(orp, ort)=',result_r1rp)
result_r2rp=orp(r2)+ort(r2)
print('or(orp, ort)=',result_r2rp)

def o0(o0p, o0t):
    return (o0p+o0t)
print('Суммарные окружные напряжения:')
result_r1rp=o0p(r1)+o0t(r1)
print('o0(o0p, o0t)=',result_r1rp)
result_r2rp=o0p(r2)+o0t(r2)
print('o0(o0p, o0t)=',result_r2rp)

def oz(ozp, ozt):
    return (ozp+ozt)
print('Суммарные осевые напряжения:')
result_r1rp=ozp(r1)+ozt(r1)
print('oz(ozp, ozt)=',result_r1rp)
result_r2rp=ozp(r2)+ozt(r2)
print('oz(ozp, ozt)=',result_r2rp)

```

```

Радиальные напряжения:
orp(r1)= -11000000.000000002
orp(r2)= -3000000.0
Окружные напряжения:
o0p(r1)= 27140540.540540554
o0p(r2)= 19140540.54054055
Осевые напряжения:
ozp(r1)= 8070270.270270275
ozp(r2)= 8070270.270270275
Температурные осевые напряжения:
ozt(r1)= 116807231.84194146
ozt(r2)= -97478482.44377285
Температурные радиальные напряжения:
ort(r1)= -2.1871592257797754e-08
ort(r2)= -0.0
Температурные окружные напряжения:
o0t(r1)= 116807231.84194146

```


Температурные окружные напряжения:

$\sigma_{\theta t}(r_1) = 116807231.84194146$

$\sigma_{\theta t}(r_2) = -97478482.44377285$

Суммарные радиальные напряжения:

$\sigma_r(\sigma_r, \sigma_{rt}) = -11000000.000000024$

$\sigma_r(\sigma_r, \sigma_{rt}) = -3000000.0$

Суммарные окружные напряжения:

$\sigma_{\theta}(\sigma_{\theta r}, \sigma_{\theta t}) = 143947772.38248202$

$\sigma_{\theta}(\sigma_{\theta r}, \sigma_{\theta t}) = -78337941.9032323$

Суммарные осевые напряжения:

$\sigma_z(\sigma_{zr}, \sigma_{zt}) = 124877502.11221173$

$\sigma_z(\sigma_{zr}, \sigma_{zt}) = -89408212.17350258$

Задача 4

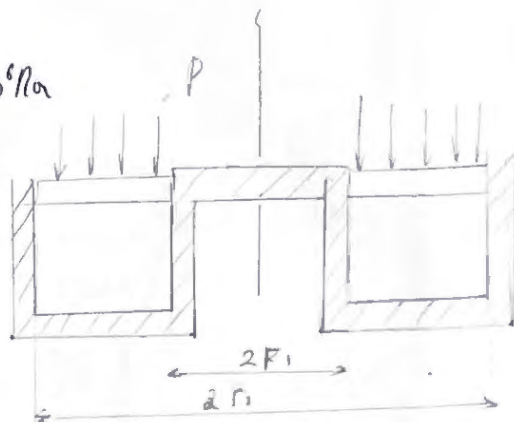
Дано: $r_1 = 0,30 \text{ м}$ $\mu = 0,3$

$r_2 = 1,1 \text{ м}$

$G_{дон} = 240 \cdot 10^6 \text{ Па}$

$h = 0,10 \text{ м}$

$E = 200 \cdot 10^9 \text{ Па}$



Решение:

1) Для кольцевой пластины решение будем искать в виде: $w(r) = c_1 + c_2 r^2 + c_3 \ln r + c_4 r^2 \ln r = \frac{p r^4}{64 D}$

Вычислим цилиндрическую жесткость: $D = \frac{E h^3}{12(1-\mu^2)} = 18315018,5115018322$ т.к. прилагается постоянная величина нагрузки

Первая производная от прогиба:

$$w'(r) = \frac{dw}{dr} = 2r c_2 + c_4 + \frac{c_3}{r} - \frac{D}{16} p r^3 + 2r \ln r c_4$$

Вторая производная от прогиба:

$$w''(r) = \frac{d^2 w}{dr^2} = 2 \ln r c_4 - \frac{c_3}{r^2} + 2c_2 + 3c_4 - \frac{3D}{16} p r^2$$

Граничные условия (т.к. на внутреннем r_1 и внешнем r_2 - жесткая заделка \Rightarrow прогибы углы поворота равны нулю):

$$\begin{cases} w(r_1) = 0 \\ \varphi = \frac{dw}{dr}(r_1) = 0 \\ w(r_2) = 0 \\ \varphi = \frac{dw}{dr}(r_2) = 0 \end{cases} \begin{cases} c_1 + c_2 r_1^2 + c_3 \ln r_1 + c_4 r_1^2 \ln r_1 - \frac{p r_1^4}{64 D} = 0 & (1) \\ 2c_2 r_1 + c_4 + \frac{c_3}{r_1} - \frac{D}{16} p r_1^3 + 2r_1 \ln r_1 c_4 = 0 & (2) \\ c_1 + c_2 r_2^2 + c_3 \ln r_2 + c_4 r_2^2 \ln r_2 - \frac{p r_2^4}{64 D} = 0 & (3) \\ 2c_2 r_2 + c_4 + \frac{c_3}{r_2} - \frac{D}{16} p r_2^3 + 2r_2 \ln r_2 c_4 = 0 & (4) \end{cases}$$

Ур-я 1-4 образуют систему относительно коэффициентов c_1, c_2, c_3, c_4 (найдем с помощью пакета Python)

$$C = \begin{pmatrix} -2,28 \cdot 10^{-9} \\ 2,059 \cdot 10^{-9} \\ -9,48 \cdot 10^{-10} \\ -2,17 \cdot 10^{-9} \end{pmatrix}$$

Изгибающие моменты в радиальном и окружном направлениях (этих отрезков представлено в виде скорости на Python):

$$M_r(r) = D \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\mu}{r} \frac{dw}{dr} \right)$$

$$M_\theta(r) = D \left(\mu \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right)$$

Напряжения в радиальном и окружном направлениях и эквивалентное напряжение по критерию Мизеса:

$$\sigma_r(r) = \frac{\sigma M_r}{k^2} \quad \sigma_\theta(r) = \frac{\sigma M_\theta}{k^2} \quad \sigma_{\text{экв}} = \sqrt{\sigma_r^2 + \sigma_\theta^2 - \sigma_r \cdot \sigma_\theta}$$

Результаты программы:

$$\max \sigma_{\text{экв}} = 76,7 \text{ р}$$

$$\text{Допущенное значение нагрузки } p = 3,13 \cdot 10^6$$


```

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.optimize import fsolve

r1=0.3
r2=1.1
h=0.1
E=200*10**9
m=0.3
sigma=240*10**6

D=(E*h**3)/(12*(1-m**2))
print("Цилиндрическая жесткость пластины:", D)

def w(r, C, D):
    return (C[0] + C[1]*r**2 + C[2]*np.log(r) + C[3]*np.log(r)*r**2)

def w1(r, C, D):
    return (C[1]*2*r + (C[2])/r + C[3]*r + C[3]*2*r*np.log(r))

def w2(r, C, D):
    return (C[1]*2 + (-C[2])/r**2 + C[3]*3 + C[3]*np.log(r)*2)

def w3(r, C, D):
    return (((C[2]*2)/r**3) + ((C[3]*2)/r))

def w4(r, C, D):
    return (D * (w3(r, C, D) + (1/r)*w2(r, C, D)) + (1/(2*np.pi*r)))

def equations_to_solve(coefficients, r1, r2, D):
    C = coefficients

```

```

eq1 = w4(r1, C, D)
eq2 = w1(r1, C, D)
eq3 = w(r2, C, D)
eq4 = w1(r2, C, D)

return [eq1, eq2, eq3, eq4]

initial_guess = [1, 1, 1, 1]
solution = fsolve(equations_to_solve, initial_guess, args=(r1, r2, D))
print("Решение системы:")
print("C1 =", solution[0])
print("C2 =", solution[1])
print("C3 =", solution[2])
print("C4 =", solution[3])

def Mr(r, C, D, m):
    return D * (w2(r, C, D) + (m/r) * w1(r, C, D))

r_values = np.linspace(r1, r2, 100)
Mr_values = [Mr(r, solution, D, m) for r in r_values]

plt.plot(r_values, Mr_values, color='blue', label='Mr(r)')
plt.fill_between(r_values, Mr_values, color='gray', alpha=0.5, hatch='|', edgecolor='black')
plt.xlabel('r')
plt.ylabel('Mr(r)')
plt.title('Изгибающий момент в радиальном направлении')
plt.grid(True)
plt.legend()
plt.show()

```

```
def M0(r, C, D, m):
```

```
    return D * (m*w2(r, C, D) + {1/r} * w1(r, C, D))
```

```
r_values = np.linspace(r1, r2, 100)
```

```
M0_values = [M0(r, solution, D, m) for r in r_values]
```

```
plt.plot(r_values, M0_values, color='blue', label='Mr(r)')
```

```
plt.fill_between(r_values, M0_values, color='gray', alpha=0.5, hatch='|', edgecolor='black')
```

```
plt.xlabel('r')
```

```
plt.ylabel('M0(r)')
```

```
plt.title('Изгибающий момент в окружном направлении')
```

```
plt.grid(True)
```

```
plt.legend()
```

```
plt.show()
```

```
def  $\sigma_r$ (Mr_values, h):
```

```
    return  $6 * np.array(Mr\_values) / h^{**2}$ 
```

```
def  $\sigma_0$ (M0_values, h):
```

```
    return  $6 * np.array(M0\_values) / h^{**2}$ 
```

```
def  $\sigma_{eqv}(\sigma_r, \sigma_0)$ :
```

```
    return np.sqrt( $\sigma_r^{**2} + \sigma_0^{**2} - \sigma_r * \sigma_0$ )
```

```
plt.plot(r_values,  $\sigma_{eqv}(\sigma_r(Mr\_values, h), \sigma_0(M0\_values, h))$ )
```

```
plt.fill_between(r_values,  $\sigma_{eqv}(\sigma_r(Mr\_values, h), \sigma_0(M0\_values, h))$ , color='gray', alpha=0.5,  
hatch='|', edgecolor='black')
```

```
plt.xlabel('Радиус r, м')
```

```
plt.ylabel('$\sigma_{(экв)}$')
```

```
plt.title('Эквивалентное напряжение')
```

```
plt.show()
```



```

 $\sigma_{eqv\_1} = \sigma_{eqv}(\sigma_r(Mr(r1, solution, D, m), h), \sigma_0(M0(r1, solution, D, m), h))$ 
 $\sigma_{eqv\_2} = \sigma_{eqv}(\sigma_r(Mr(r2, solution, D, m), h), \sigma_0(M0(r2, solution, D, m), h))$ 
print("Эквивалентное напряжение при r1:",  $\sigma_{eqv\_1}$ )
print("Эквивалентное напряжение при r2:",  $\sigma_{eqv\_2}$ )

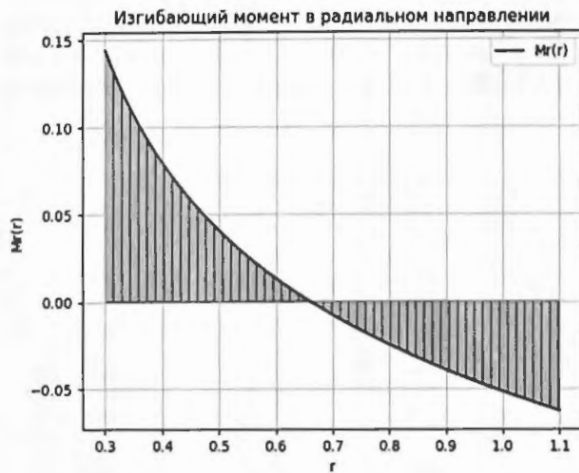
max_ $\sigma_{eqv}$  = max( $\sigma_{eqv\_1}$ ,  $\sigma_{eqv\_2}$ )
print("Максимальное напряжение:", max_ $\sigma_{eqv}$ )

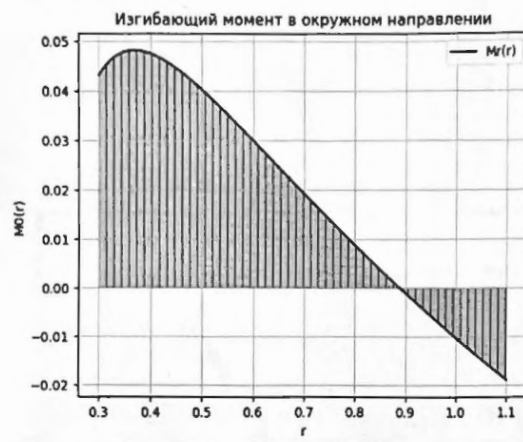
p =  $\sigma$  / max_ $\sigma_{eqv}$ 
print("Допускаемое значение нагрузки:", p)

def w_p(r, C, D, p):
    return ((C[0] + C[1]*r**2 + C[2]*np.log(r) + C[3]*np.log(r)*r**2)*p)

C = np.array([solution[0], solution[1], solution[2], solution[3]])
r_values = np.linspace(r1, r2, 50)
plt.plot(r_values, w_p(r_values, C, D, p))
plt.fill_between(r_values, w_p(r_values, C, D, p), color='gray', alpha=0.5, hatch='|', edgecolor='black')
plt.xlabel('Радиус r, м')
plt.ylabel('$W$')
plt.title('Эпюра прогиба при нагрузке равной допускаемому значению')
plt.show()

```





Эквивалентное напряжение при r_1 : 76.7015671029726
 Эквивалентное напряжение при r_2 : 33.57638143561869
 Максимальное напряжение: 76.7015671029726
 Допускаемое значение нагрузки: 3129010.3848569044

X

не пропущено

Цилиндрическая оболочка из стали 18315018, 3115018322

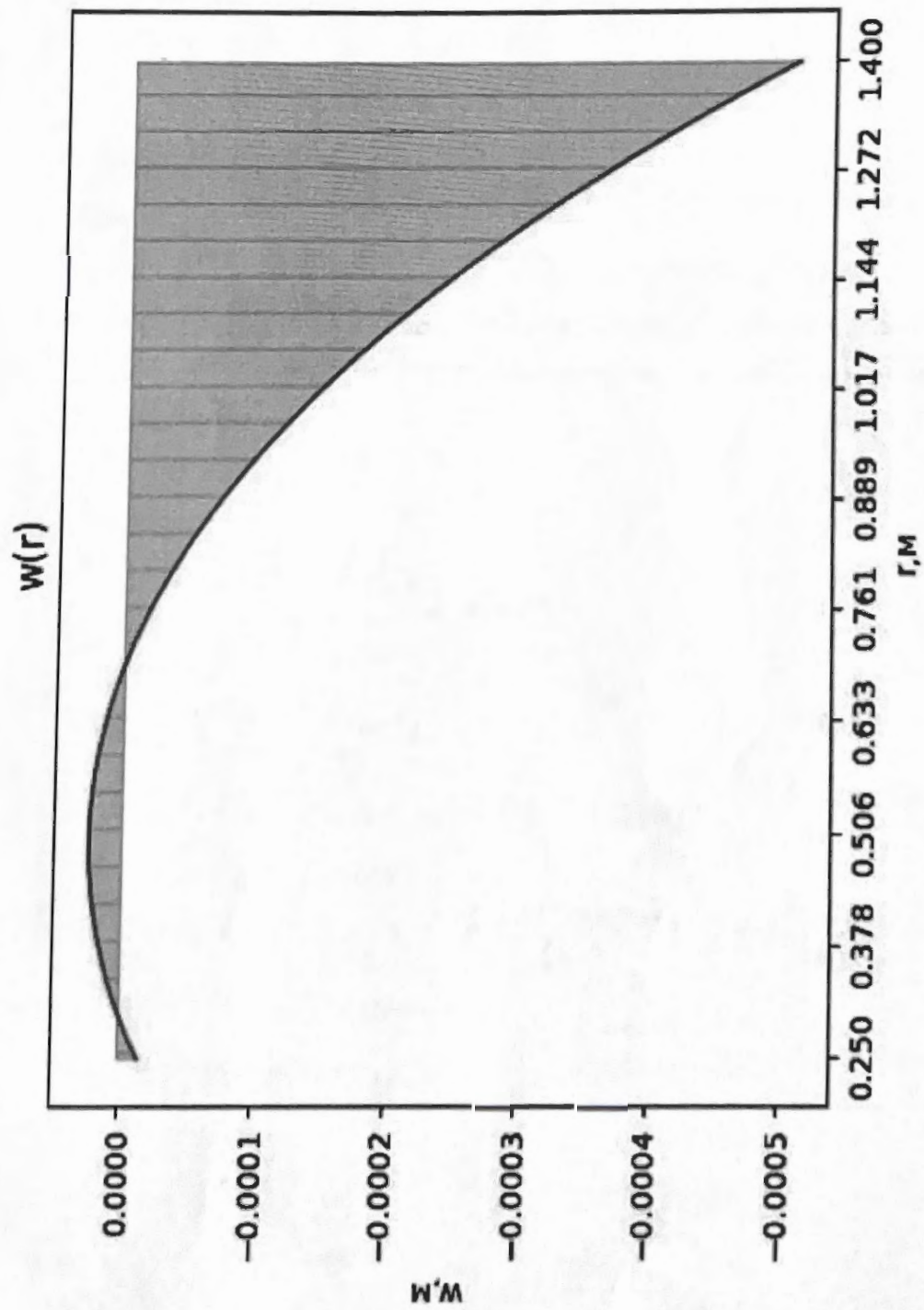
Решение системы

$$C_1 = -2,28409245832702 \cdot 10^{-9}$$

$$C_2 = 2,0591851834538345 \cdot 10^{-9}$$

$$C_3 = -0,483207094781156 \cdot 10^{-10}$$

$$C_4 = -2,1724640732043713 \cdot 10^{-9}$$



Задача №5



Имеется цилиндрическая оболочка радиусом R , нагруженная равномерно распределенной нагрузкой

$$a = 0,06 \text{ м}; R = 1,00 \text{ м}; D \cdot 10^5 = 2 \text{ МПа}$$

$$P_0 = 0,6 \text{ МПа}; q \cdot 10^{-6} = 0,2 \text{ Н/м}^2$$

Формулы прогиба:

$$W(x) = C_1 e^{-kx} \sin(kx) + C_2 e^{-kx} \cos(kx) + \frac{P_0 R^2}{Eh}$$

$$x = 0$$

$$\varphi(0) = \frac{dw}{dx} \Big|_0 = 0$$

$$Q = D \frac{d^2 w}{dx^2} \Big|_0 = -\frac{q}{2}$$

Выписываем формулы для углов поворота сечения и поперечной силы

$$\varphi(x) = e^{-kx} k (C_1 \cos(kx) - C_2 \sin(kx) + \sin(kx) C_1 + \cos(kx) C_2)$$

$$Q(x) = 2 D e^{-kx} k^3 (\cos(kx) C_1 + \cos(kx) C_2 - \sin(kx) C_1 + \sin(kx) C_2)$$

Если подставить в граничные условия получим:

$$-k(C_1 - C_2) = 0$$

$$2 D k^3 (C_1 + C_2) = -\frac{q}{2}$$

Решение:

$$C_1 = -\frac{1}{8} \frac{q}{Dk^3}; C_2 = -\frac{1}{8} \frac{q}{Dk^3}$$

С учетом полученного результата:

$$W(x) = -\frac{1}{8} \frac{q}{Dk^3} e^{-kx} \cos(kx) - \frac{1}{8} \frac{q}{Dk^3} e^{-kx} \sin(kx)$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{4} \frac{q}{k^2 D} e^{-kx} \sin(kx)$$

$$M_x = D(2C_1 k^2 e^{-kx} \sin(kx) - 2C_2 k e^{-kx} \cos(kx)) = -\frac{1}{4} \frac{q e^{-kx} \sin(kx)}{k}$$

$$Q(x) = -\frac{1}{2} q e^{-kx} \cos(kx)$$

$$M_y(x) = \mu N v + \frac{E h w}{R} = E h \left(-\frac{1}{8} \frac{q e^{-kx} \cos(kx)}{Dk^3} - \frac{1}{8} \frac{q e^{-kx} \sin(kx)}{Dk^3} \right)$$

Цилиндрическая оболочка:

$$h = 0,002500 \text{ м}$$

$$D = \frac{E h^3}{12(1-\mu^2)} = 61813,186813 \text{ Н/м}$$

$$k^* = 0,015000 \text{ м}^{-1}$$

Волновое число:

$$k = \sqrt{\frac{E h}{4 D R^2}} = \sqrt{\frac{E h 12(1-\mu^2)}{4 E h^3 R^2}} = \sqrt{\frac{3(1-\mu^2)}{h^2 R^2}} = 10,495304 \text{ м}^{-1}$$

Длина краевого эффекта:

$$\lambda = \frac{1}{k} = 0,295333 \text{ м}$$

```

% var.10
a = 0.06;
R = 1;

p0 = 0.6 * 10^6;
q = 0.2 * 10^6;

E = 200 * 10^9;
sigma = 240 * 10^6;
Nx = 0;
mu = 0.3;

h = p0 * R / sigma;
fprintf('\nЗначение h = %f м\n', h);
h = 6 * h; % Подобранный значение толщины чтобы выполнялся критерий
прочности
fprintf('Подогнанное значение h = %f м\n', h);

D = E * h^3 / (12 * (1 - mu^2));
fprintf('\nЦилиндрическая жесткость D = %f\n', D);

k = (E * h / (4 * D * R^2))^(1 / 4);
fprintf('\nВолновое число k = %f м^-1\n', k);

lambda = pi / k;
fprintf('\nДлина краевого эффекта λ = %f м\n', lambda);

C = [-1, 1; % Первое условие - угол поворота в точке разреза (x==0) равен
        нулю. Второе условие на поперечную силу в точке разреза равную q/2
        1, 1];
b = [0; -0.5 * q / (2 * D * k^3)];

consts = C \ b;
C1 = consts(1);
C2 = consts(2);
fprintf('\nКоэффициенты C равны:\nC1 = %f\nC2 = %f\n', C1, C2);

W = @(x) C1 .* exp(-k .* abs(x)) .* cos(k .* abs(x)) + C2 .* exp(-k .*
abs(x)) .* sin(k .* abs(x)) + p0 * R^2 / (E * h);
phi = @(x) -k .* exp(-k .* abs(x)) .* ((C1 - C2) .* cos(k .* abs(x)) + (C1 +
C2) .* sin(k .* abs(x)));
Mx = @(x) 2 * k^2 .* exp(-k .* abs(x)) .* D .* (C1 .* sin(k .* abs(x)) - C2
.* cos(k .* abs(x)));
My = @(x) mu .* Mx(x);
Ny = @(x) mu * Nx + E * h / R .* W(x);
Q = @(x) 2 * k^3 .* D .* exp(-k .* abs(x)) .* ((C1 + C2) .* cos(k .* abs(x))
- (C1 - C2) .* sin(k .* abs(x)));

sigma_x_inner = @(x) Nx / h + 6 * Mx(x) / h^2;
sigma_x_outer = @(x) Nx / h - 6 * Mx(x) / h^2;
sigma_y_inner = @(x) Ny(x) / h + 6 * My(x) / h^2;
sigma_y_outer = @(x) Ny(x) / h - 6 * My(x) / h^2;
sigma_eqv_inner = @(x) sqrt(sigma_x_inner(x).^2 + sigma_y_inner(x).^2 -
sigma_x_inner(x) .* sigma_y_inner(x));
sigma_eqv_outer = @(x) sqrt(sigma_x_outer(x).^2 + sigma_y_outer(x).^2 -
sigma_x_outer(x) .* sigma_y_outer(x));

```

```

x_positive = linspace(0, 2 * lambda, 100);
x_negative = linspace(-2 * lambda, 0, 100);
x = [x_negative, x_positive];

figure('Position', [100, 100, 1600, 1200]);

subplot(2, 2, 1);
plot(x, Mx(x) / 10^3, 'k');
hold on;
xlabel('x, м', 'FontSize', 12);
ylabel('$M_x(x)$, кН/м', 'FontSize', 12, 'Interpreter', 'latex');
title('Эпюра момента Mx');
grid on;
xticks(-2 * lambda:0.05:2 * lambda);

subplot(2, 2, 2);
plot(x, My(x) / 10^3, 'k');
hold on;
xlabel('x, м', 'FontSize', 12);
ylabel('$M_y(x)$, кН/м', 'FontSize', 12, 'Interpreter', 'latex');
title('Эпюра момента My');
grid on;
xticks(-2 * lambda:0.05:2 * lambda);

subplot(2, 2, 3);
plot(x, Ny(x) / 10^6, 'k');
hold on;
xlabel('x, м', 'FontSize', 12);
ylabel('$N_y(x)$, МН/м', 'FontSize', 12, 'Interpreter', 'latex');
title('Эпюра окружного усиления');
grid on;
xticks(-2 * lambda:0.05:2 * lambda);

subplot(2, 2, 4);
plot(x, Q(x) / 10^3, 'k');
hold on;
xlabel('x, м', 'FontSize', 12);
ylabel('Q(x), кН', 'FontSize', 12, 'Interpreter', 'latex');
title('Эпюра поперечной силы Q');
grid on;
xticks(-2 * lambda:0.05:2 * lambda);

figure('Position', [100, 100, 1600, 1200]);

subplot(2, 2, 1);
plot(x, sigma_eqv_outer(x) / 10^6, 'k');
hold on;
xlabel('x, м', 'FontSize', 12);
ylabel('$\sigma_{eqv}$, МПа', 'FontSize', 12, 'Interpreter', 'latex');
title('Эпюра эквивалентных напряжений для внешней поверхности оболочки');
grid on;
xticks(-2 * lambda:0.05:2 * lambda);

subplot(2, 2, 2);
plot(x, sigma_eqv_inner(x) / 10^6, 'k');

```

```

hold on;
xlabel('x, м', 'FontSize', 12);
ylabel('$\sigma_{eqv}$, МПа', 'FontSize', 12, 'Interpreter', 'latex');
title('Энюра эквивалентных напряжений для внутренней поверхности оболочки');
grid on;
xticks(-2 * lambda:0.05:2 * lambda);

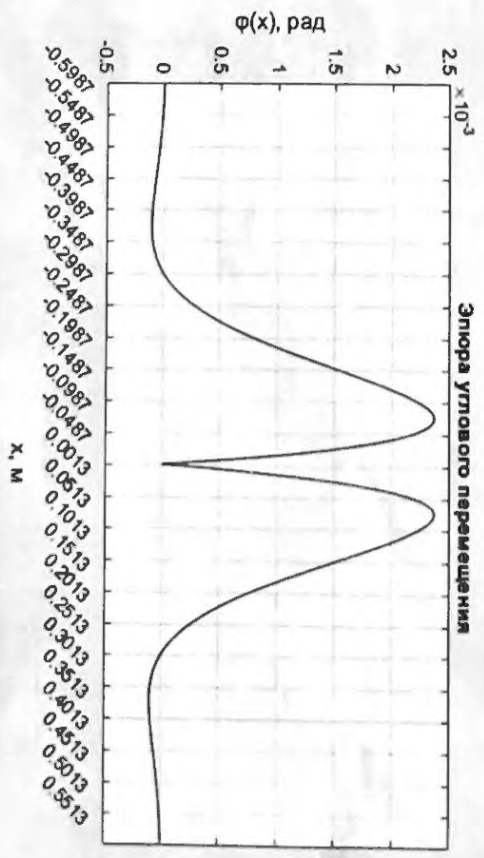
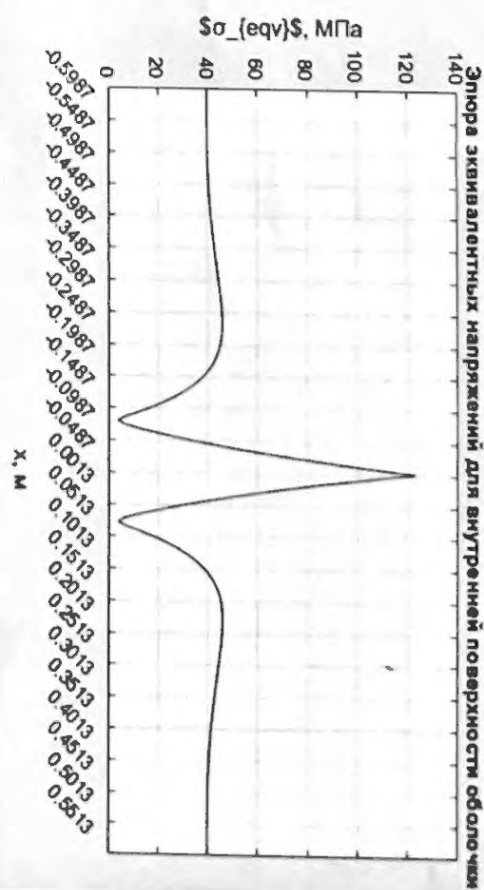
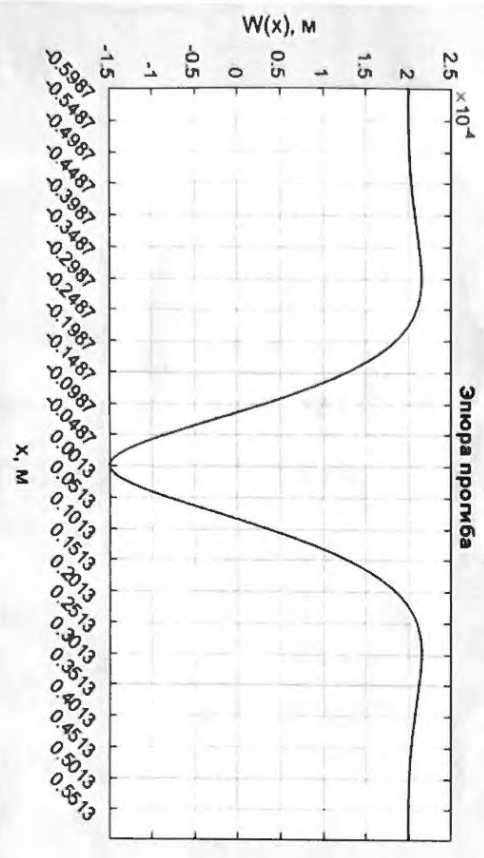
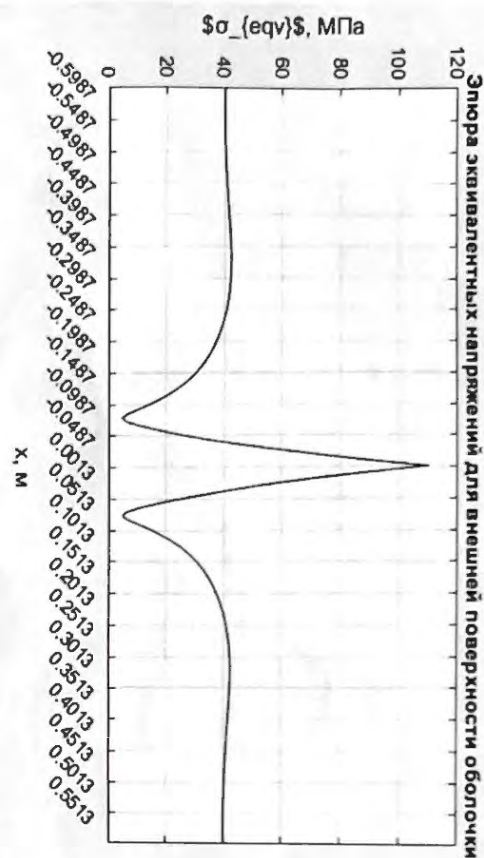
subplot(2, 2, 3);
plot(x, W(x), 'k');
hold on;
xlabel('x, м', 'FontSize', 12);
ylabel('W(x), м', 'FontSize', 12, 'Interpreter', 'latex');
title('Энюра прогиба');
grid on;
xticks(-2 * lambda:0.05:2 * lambda);

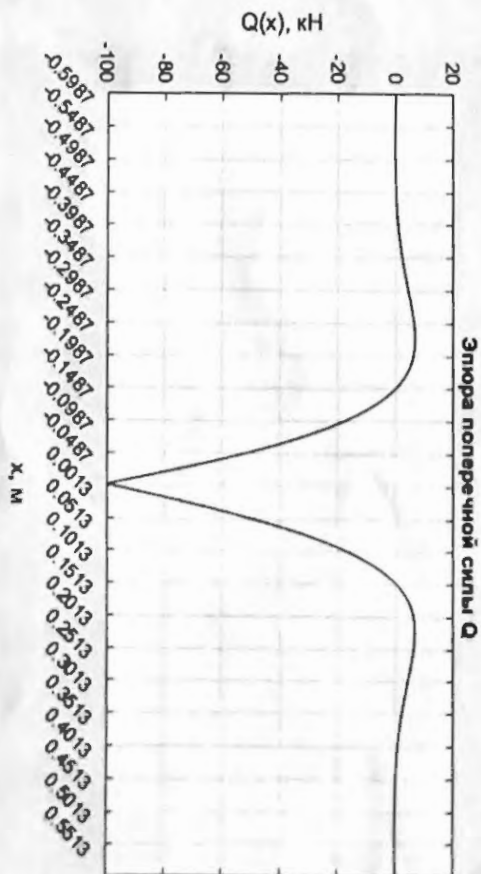
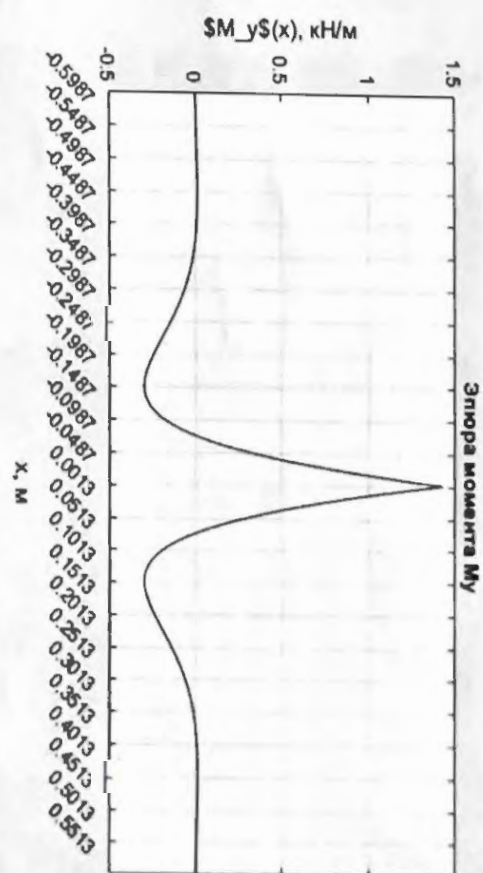
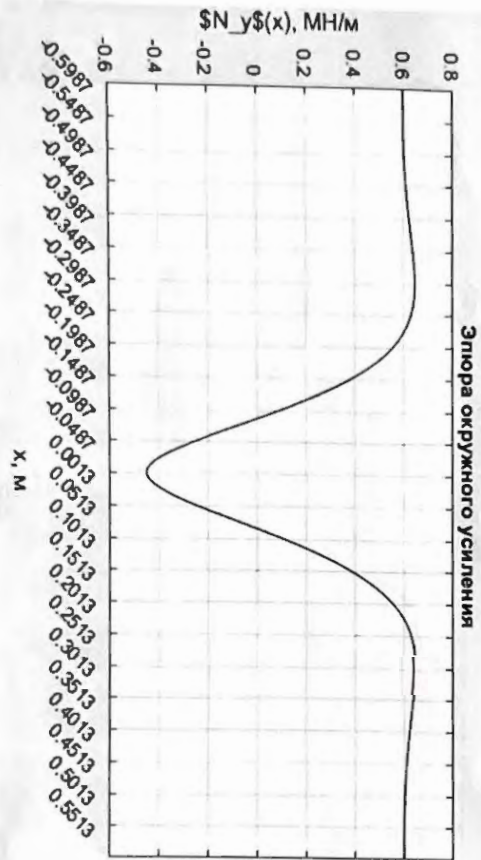
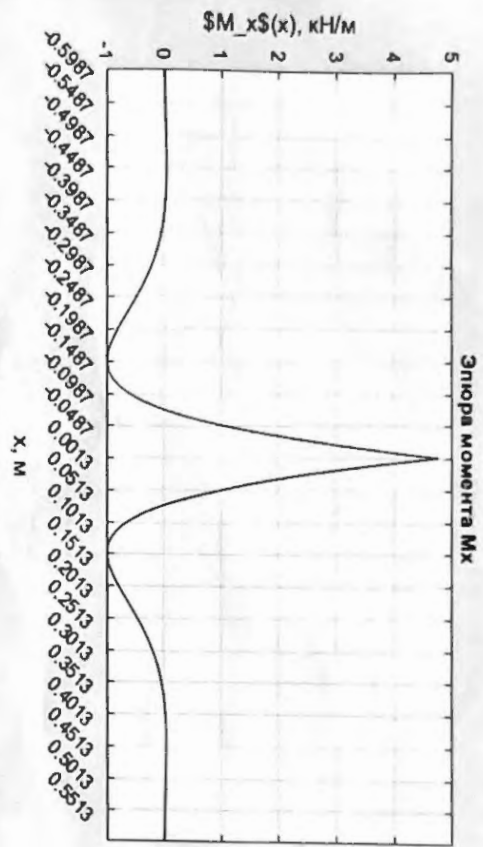
subplot(2, 2, 4);
plot(x, phi(x), 'k');
hold on;
xlabel('x, м', 'FontSize', 12);
ylabel('$\phi(x)$, рад', 'FontSize', 12, 'Interpreter', 'latex');
title('Энюра углового перемещения');
grid on;
xticks(-2 * lambda:0.05:2 * lambda);

sigma_eqv_inner_max = max(abs(sigma_eqv_inner(x)));
sigma_eqv_outer_max = max(abs(sigma_eqv_outer(x)));
fprintf('Maximum equivalent stress for inner surface  $\sigma_{eqv\_inner\_max}$  = %f\n', sigma_eqv_inner_max / 1e6);
fprintf('Maximum equivalent stress for outer surface  $\sigma_{eqv\_outer\_max}$  = %f\n', sigma_eqv_outer_max / 1e6);

if sigma_eqv_inner_max > sigma_eqv_outer_max
    n = sigma / sigma_eqv_inner_max;
else
    n = sigma / sigma_eqv_outer_max;
end
fprintf('Safety factor n = %f\n', n);

```



Задача 6

У3 № 2

$N = 12,5 \text{ кВт}$

$n_0 = 200 \frac{\text{об}}{\text{мин}}$

$D_1 = 0,35 \text{ м}$

$D_2 = 0,4 \text{ м}$

$l_1 = 0,55 \text{ м}$

$l_2 = 0,45 \text{ м}$

$a_1 = 0,3 \text{ м}$

$a_2 = 0,34 \text{ м}$

Дано: $h_1 = 20 \text{ мм}$

$h_2 = 30 \text{ мм}$

$E_1 = 2,5 \text{ МПа}$

$E_2 = 3 \text{ МПа}$

Ст. 35 $\sigma_B = 520$

$\sigma_T = 280$

$\sigma_{-1} = 220 \text{ МПа}$

$d = 60 \text{ мм}$ (из рис. 2)

1) Массы роторов:

$m_1 = \rho V_1 = \rho \pi \left(\frac{D_1}{2}\right)^2 h_1 = 7850 \cdot \pi \left(\frac{0,35}{2}\right)^2 \cdot 20 \cdot 10^{-3} = 15,2 \text{ кг}$

$m_2 = \rho V_2 = 7850 \pi \left(\frac{0,4}{2}\right)^2 \cdot 30 \cdot 10^{-3} = 29,6 \text{ кг}$

2) Найдем силы

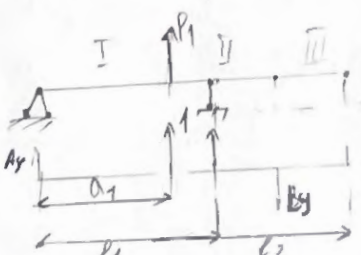
$P_1 = m_1 E_1 \theta^2 = 15,2 \cdot 2,5 \cdot 10^{-5} \theta^2 = 0,038 \theta^2$

$P_2 = m_2 E_2 \theta^2 = 29,6 \cdot 3 \cdot 10^{-5} \theta^2 = 0,0888 \theta^2$

3) Найдем моменты от горизонтальных сил (M_y) $P_1 = 1, P_2 = 0$ и $M_y | P_2 = 1, P_1 = 0$

$M_y | P_1 = 1, P_2 = 0:$

1 Δy



Опорные реакции: $\sum \text{мом } A = 1 \cdot a_1 - B_y l_1 = 0 \Rightarrow B_y = \frac{a_1}{l_1} = 0,54(\text{н})$

$\sum F_y = 1 + A_y - B_y = 0 \Rightarrow A_y = B_y - 1 = -0,46$

I: $0 < z < a_1$

944 Δy

$M_y = -0,46 z$

$M(0) = 0$

$M_y(a_1) = -0,138$

II: $a_1 < z < l_1$

944 Δy

$\sum \text{мом } P_i = -0,46 - M_y + 1(l_1 - a_1) = 0 \Rightarrow M_y =$

$= 0,542 - 0,3$

$M_y(0,1) = -0,138$

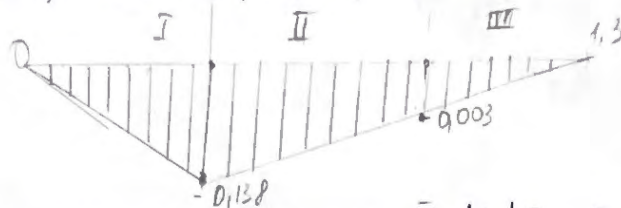
$M_y(l_1) = -0,003$

III: $l_1 < z < l_1 + l_2$

без разрезов, т.к.

$M_y(l_1 + l_2) = 0$

Эпюра $M_1 = M_y | P_1 = 1, P_2 = 0$



Построим эпюру для $\bar{M}_2 = M_y | P_1 = 0, P_2 = 1$

Найдём опорные реакции:

$$\sum M_{опор} = -1(a_2 + l_1) - B_y \cdot l_1 = 0$$

$$B_y = -\frac{1(a_2 + l_1)}{l_1} = \frac{0.3 + 0.55}{0.55}$$

$$= -1.54$$

$$\sum F_y = A_y - 1 - B_y = 0 \Rightarrow A_y = 1 + B_y =$$

$$= -0.54$$

$$I: 0 < z < l_1 \quad \begin{array}{c} \uparrow M_y \\ -0.54 \end{array} \Rightarrow M_y = -0.54z \quad M(0) = 0 \\ M(l_1) = -0.297$$

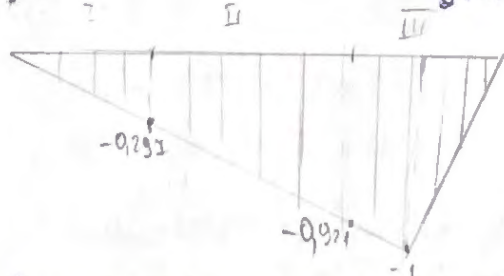
$$II: l_1 < z < l_1 + a_2 \quad \begin{array}{c} \uparrow M_y \\ -1.54 \end{array} \Rightarrow M_y = -0.54z - 1.54(z - l_1) = -0.54z - 1.54z + 1.54l_1 =$$

$$M_y(l_1) = -0.00 \cdot 0.55 - 0.847 = -0.297$$

$$M_y(l_1 + a_2) = -0.00(0.55 + 0.3) + 0.847 = -0.021$$

$$III: (0 < z < l_2) \quad \begin{array}{c} \uparrow M_y \\ 1 \end{array} \Rightarrow M_y = 1$$

Эпюра $\bar{M}_2 = M_y | P_1 = 0, P_2 = 1$



Вспомогательная интегральная Максвелла-Мора для поиска

$$\delta_{ij} = \int_0^L \frac{M_i M_j}{EI} dz \quad I = \frac{\pi d^4}{64} \Rightarrow EI = 200 \cdot 10^9 \cdot \frac{(\pi \cdot (60 \cdot 10^{-3})^4)}{64} =$$

$$= 89866.7 \quad 127234.5$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \left[\int_0^{0.3} (-0.46z)^2 dz + \int_{0.3}^{1.3} (0.54z - 0.3)^2 dz \right]$$

Вычисление через пакет Wolfram Alpha

$$\delta_{11} = 3.42898 \cdot 10^{-7}$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EI} \int_{l_1}^{l_1+l_2} \bar{M}_2 \bar{M} dz = \frac{1}{EI} \left[\int_0^{0.55} (-0.54z)^2 dz + \int_{0.55}^{1.3} (-0.54z + 1.54 - 2.08z + 0.847)^2 dz \right] = 0.000465841$$

$$\delta_{21} = \frac{1}{EI} \int_{l_1}^{l_1+l_2} \bar{M}_1 \bar{M}_2 dz = \frac{1}{EI} \left[\int_0^{0.55} (-0.46z)^2 dz + \int_{0.55}^{1.3} (0.54z - 0.3)^2 + (0.54z)(-2.08z + 0.847) dz \right] = -3.52261 \cdot 10^{-6}$$

Найдем $\Delta p_1, \Delta p_2$

$$\Delta p_1 = p_1 \delta_{11} + p_2 \delta_{12} = \theta^2 (0.038 \cdot 3.4288 \cdot 10^{-7} + 0.0888 \cdot (-3.52261 \cdot 10^{-5})) = -2.99778 \cdot 10^{-7} \theta^2$$

$$\Delta p_2 = p_1 \delta_{21} + p_2 \delta_{22} = \theta^2 (0.038 \cdot (-3.52261 \cdot 10^{-5}) + 0.0888 \cdot 0.000465841) = 4.00281 \cdot 10^{-6} \theta^2$$

Запишем ур-е движения:

$$\sum_{k=1}^n U_k'' m_k + \delta_{jk} U_j = \Delta p_j \cos(\theta t) \quad \forall j = \overline{1, n}$$

Решение ищем в виде: $U_1(t) = D_1 \cos(\theta t)$

$U_2(t) = D_2 \cos(\theta t)$

$U_j'' = -\theta^2 D_j \cos(\theta t)$

$| U_1'' m_1 \delta_{11} + m_2 U_2'' \delta_{12} + U_1 = \Delta p_1 \cos(\theta t)$

$| U_1'' m_1 \delta_{21} + m_2 U_2'' \delta_{22} + U_2 = \Delta p_2 \cos(\theta t)$

$| -\theta^2 \delta_{11} m_1 D_1 \cos(\theta t) - \theta^2 \delta_{12} m_2 D_2 \cos(\theta t) + D_1 \cos(\theta t) = \Delta p_1 \cos(\theta t)$

$| -\theta^2 \delta_{21} m_1 D_1 \cos(\theta t) - \theta^2 \delta_{22} m_2 D_2 \cos(\theta t) + D_2 \cos(\theta t) = \Delta p_2 \cos(\theta t)$

$| D_1 (1 - \theta^2 \delta_{11} m_1) - D_2 (\theta^2 \delta_{12} m_2) = \Delta p_1$

$| D_2 (-\theta^2 \delta_{21} m_1) + D_2 (1 - \theta^2 \delta_{22} m_2) = \Delta p_2$

или относительно

$$\bar{D} = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \end{pmatrix}$$

$$A \bar{D} = \bar{B}$$

Подставим $\delta_{ij}, m_j, \Delta p_j$

$\theta^2 (1 - 0.34288 \cdot 10^{-7}) - D_2 (1 - 0.34288 \cdot 10^{-7}) = -2.99778 \cdot 10^{-7} \theta^2$

$| D_1 (1 - 0.34288 \cdot 10^{-7}) + D_2 (1 - 0.34288 \cdot 10^{-7}) = -2.99778 \cdot 10^{-7} \theta^2$

$| D_1 (0.253543672 \cdot 10^{-5}) + D_2 (1 - 0.34288 \cdot 10^{-7}) = 4.00281 \cdot 10^{-6} \theta^2$

Нам не нужно: $D_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, D_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$

$$\Delta = \det(C) - \text{скалярный СЛАУ}$$

$$\Delta_1 =$$

$$D_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{3 \cdot 10^{-1} \theta^2 - 1,4 \cdot 10^{-1} \theta^4}{-1 + 0,0013852 \theta^2 - 1,826 \cdot 10^{-9} \theta^4}$$

$$D_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-4 \cdot 10^{-6} \theta^2 + 4,75 \cdot 10^{-12} \theta^4}{-1 + 0,0013852 \theta^2 - 1,826 \cdot 10^{-9} \theta^4}$$

$$W_1 = \frac{1}{\sqrt{\frac{m_1 \delta_{11} + m_2 \delta_{22}}{2} + \sqrt{\left(\frac{m_1 \delta_{11} - m_2 \delta_{22}}{2}\right)^2 + m_1 m_2 \delta_{12} \delta_{21}}} = \begin{vmatrix} m_1 = 15,2 \\ m_2 = 29,6 \\ \delta_{11} \dots \\ \delta_{22} \dots \\ \delta_{12} \dots \end{vmatrix} =$$

$$= 127,489 \text{ рад/с}$$

$$W_2 = \frac{1}{\sqrt{\frac{m_1 \delta_{11} + m_2 \delta_{22}}{2} - \sqrt{\left(\frac{m_1 \delta_{11} - m_2 \delta_{22}}{2}\right)^2 + m_1 m_2 \delta_{12} \delta_{21}}} = 1127,826 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$$

$$n_1 = \frac{60 W_1}{2\pi} = 1213 \frac{\text{об}}{\text{мин}}; n_2 = \frac{60 W_2}{2\pi} = 10772 \frac{\text{об}}{\text{мин}}$$

Первая форма колебаний:

$$\theta = W_1 = 127,489 \text{ рад/с}$$

$$D_I = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \end{pmatrix} \bigg|_{W_1} = \begin{pmatrix} 0,0184 \\ -0,0022 \end{pmatrix}$$

Вторая форма колебаний:

$$\theta = W_2 = 1127,826 \text{ рад/с}$$

$$D_{II} = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \end{pmatrix} \bigg|_{W_2} = \begin{pmatrix} 0,00573 \\ -0,00303 \end{pmatrix}$$

Проверка на ортогональность:

$$(A \cdot D_I)^T \cdot D_{II} = 0; A = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} (A \cdot D_I)^T = (0,284; -0,064)$$

$$(A \cdot D_I)^T \cdot D_{II} = (0,284; -0,064) \begin{pmatrix} 0,00573 \\ -0,00303 \end{pmatrix} = 0,0018$$

$$\delta = \frac{0,0018}{0,284} \cdot 100\% = 0,6\% < 3\%$$

Расчет центробежной силы: $P_1 = m_1 \theta^2 \epsilon_1$ $P_2 = m_2 \theta^2 \epsilon_2$

$$n_0 = 200 \frac{\text{об}}{\text{мин}} \Rightarrow \theta = \frac{2\pi n_0}{60} = 20,93 \text{ рад/с}$$

$$D_1 | \theta = 20,93 = (-0,0032) \quad D_2 | \theta = 20,93 = 0,0045$$

$$P_1 = 15,2 \cdot 20,93^2 \cdot 2,5 \cdot 10^{-3} = 16,65 \text{ Н}$$

$$P_2 = 29,6 \cdot 20,93^2 \cdot 3 \cdot 10^{-3} = 39,91 \text{ Н}$$

Для крутящих моментов M_p : $M_p = P_1 \bar{M}_1 + P_2 \bar{M}_2$

$M_{p1} = 0$ (эпоха изгиба)

$$M_{p2} = P_2 \cdot M_2 + P_1 \cdot M_1 = 39,91 \cdot (-0,207) + 16,65 \cdot (-0,138) = -13,85$$

$$M_{p3} = 39,91 \cdot (-0,021) + 16,65 \cdot (-0,003) = -35,89$$

$$M_{p4} = 0$$

Опасное сечение: $M_{p3} \Rightarrow M_{pmax} = M_{p3}$

Динамическое напряжение: σ

$$\sigma = \frac{M_{pmax}}{W_x} \quad \text{где } W_x = \frac{\pi d^3}{32} \Rightarrow \sigma = \frac{35,89}{\frac{\pi (60 \cdot 10^{-3})^3}{32}} = 1,69 \cdot 10^6 \text{ Па}$$

```
in[ ] = A =  $\begin{pmatrix} 1 - \theta^2 * 5.2 * 10^{-6} & \theta^2 * 10^{-4} \\ \theta^2 * 5.35 * 10^{-5} & 1 - \theta^2 * 1.38 * 10^{-3} \end{pmatrix}$ ; b =  $\begin{pmatrix} -\theta^2 * 3 * 10^{-7} \\ \theta^2 * 4 * 10^{-6} \end{pmatrix}$ ;
LinearSolve[A, b]
```

```
Out[ ] = 
$$\left\{ \frac{1. (3. \times 10^{-7} \theta^2 - 1.4 \times 10^{-11} \theta^4)}{-1. + 0.0013852 \theta^2 - 1.826 \times 10^{-9} \theta^4}, \frac{1. (-4. \times 10^{-6} \theta^2 + 4.75 \times 10^{-12} \theta^4)}{-1. + 0.0013852 \theta^2 - 1.826 \times 10^{-9} \theta^4} \right\}$$

```

```
in[23] = m1 = 15.2
m2 = 29.6
d11 = 3.43 * 10^{-7}
d22 = 0.0000466
d12 = -3.52 * 10^{-6}
```

$$w1 = \frac{1}{\sqrt{\frac{m1 \cdot d11 + m2 \cdot d22}{2}} - \sqrt{\left(\frac{m1 \cdot d11 - m2 \cdot d22}{2}\right)^2 + m1 \cdot m2 \cdot d12 \cdot d22}}$$

$$w2 = \frac{1}{\sqrt{\frac{m1 \cdot d11 + m2 \cdot d22}{2}} + \sqrt{\left(\frac{m1 \cdot d11 - m2 \cdot d22}{2}\right)^2 + m1 \cdot m2 \cdot d12 \cdot d22}}$$

```
w2 = 1128
```

```
w1 = 127.489
```

```
in[36] = n2 = 60 * 1128 / (2 * 3.1415)
n1 = 60 * 127 / (2 * 3.1415)
```

```
Out[36] = 10771.9
```

```
Out[37] = 1212.8
```

```
10771.924240012731`
```


2 | num6.nb

```
In[ ] := A =  $\begin{pmatrix} 1 - \theta^2 * 5.2 * 10^{-6} & \theta^2 * 10^{-4} \\ \theta^2 * 5.35 * 10^{-5} & 1 - \theta^2 * 1.38 * 10^{-3} \end{pmatrix}$ ; b =  $\begin{pmatrix} -\theta^2 * 3 * 10^{-7} \\ \theta^2 * 4 * 10^{-6} \end{pmatrix}$ ;
```

$\theta = 127.826$

LinearSolve[A, b]

Out[] =

127.826

Out[] =

{0.0186603, -0.00217637}

```
In[ ] := D1 = {0.01866, -0.002176}
```

$A = \begin{pmatrix} m1 & 0 \\ 0 & m2 \end{pmatrix}$

$A * D1$

Out[] =

{0.01866, -0.002176}

Out[] =

{{15.2, 0}, {0, 29.6}}

Out[] =

{{0.283632, 0.}, {0., -0.0644096}}

```
In[ ] :=
```

$n0 = 200$

$\theta = 2 * 3.14 * n0 / 60$

Out[] =

200

Out[] =

20.9333

```
In[ ] := A =  $\begin{pmatrix} 1 - \theta^2 * 5.2 * 10^{-6} & \theta^2 * 10^{-4} \\ \theta^2 * 5.35 * 10^{-5} & 1 - \theta^2 * 1.38 * 10^{-3} \end{pmatrix}$ ; b =  $\begin{pmatrix} -\theta^2 * 3 * 10^{-7} \\ \theta^2 * 4 * 10^{-6} \end{pmatrix}$ ;
```

$\theta = 20.933$

LinearSolve[A, b]

Out[] =

20.933

```
In[ ] := {-0.00032737527022161025`, 0.00445381057656699`}
```

m1

Out[] =

{-0.000327375, 0.00445381}

Out[] =

15.2

```

In[ ] := e1 = 2.5 * 10^-3
          e2 = 3 * 10^-3
          P1 = m1 * e^2 * e1
Out[ ] = 0.0025

Out[ ] = 
$$\frac{3}{1000}$$


Out[ ] = 16.6512

In[ ] :=  $\theta$ 
In[ ] := 20.933`
          P1
Out[ ] = 20.933

Out[ ] = 16.6512

In[ ] := P2 = m2 * e^2 * e2
Out[ ] = 38.9113

In[ ] := P1 * (-0.003) + P2 * (-0.921)
Out[ ] = -35.8873

In[ ] :=  $\sigma = 35.9 * 32 / 3.14 / (60 * 10^-3)^3$ 
Out[ ] =  $1.6938 \times 10^6$ 

```