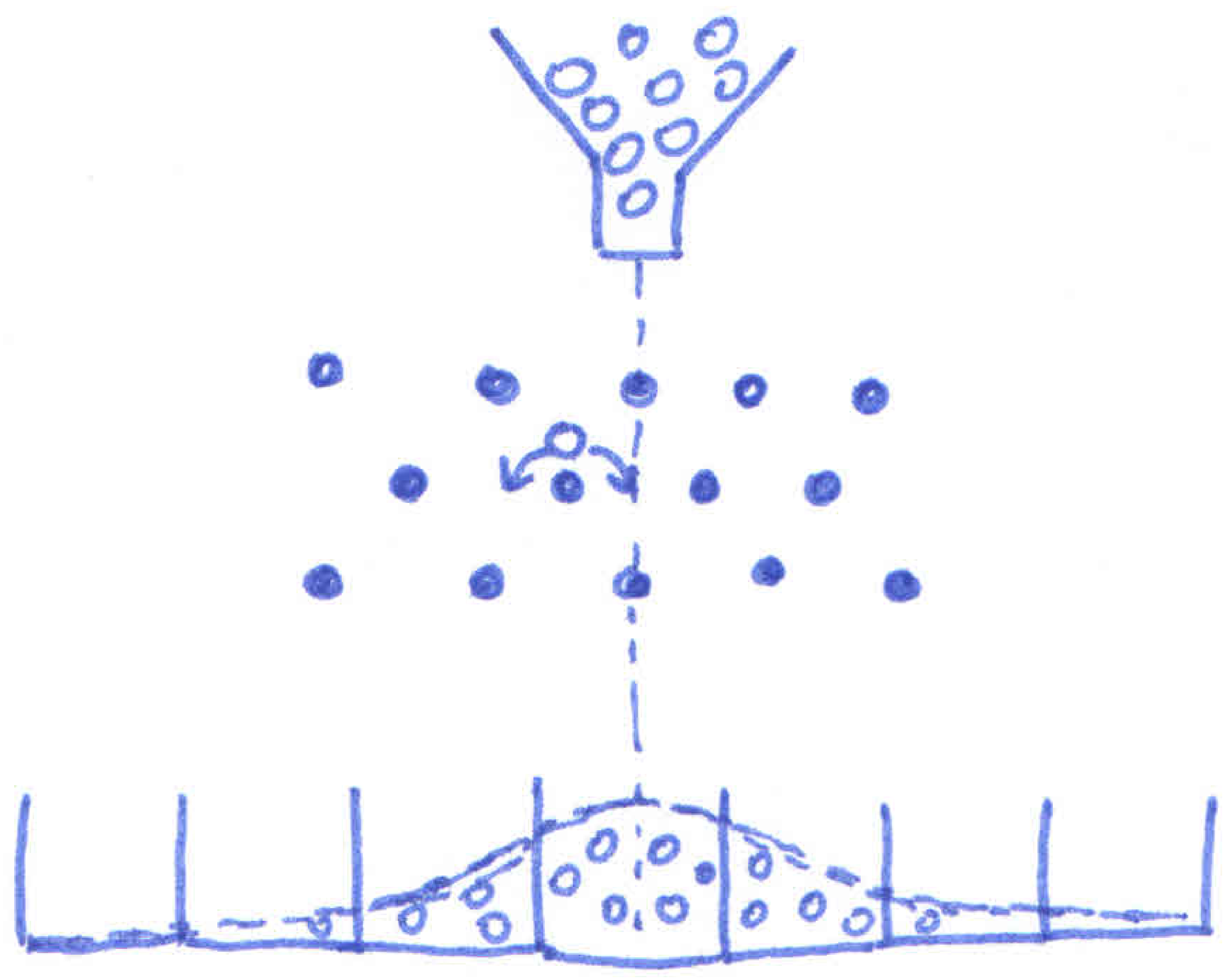
Нормальное распределение.
(распределение Гаусса)

Эксперимент: доска Гальтона



на падающую дробинку действует
множество случайных (!)
независимых (!)
событий

распределение симметричное,
есть выраженный максимум

Математическая запись: распределение Гаусса

Случайное число $x \in (-\infty; +\infty)$

Необходимо задать два (ДВА) параметра:

$\bar{x}$ – математическое ожидание, среднее значение

$D(x)$ – дисперсия, математическое ожидание квадрата отклонений от среднего.

$$\begin{cases} D(x) = M[(x-\bar{x})^2] = \sigma_x^2 \\ \sigma_x = \sqrt{D(x)} \end{cases}$$ – средние квадратичное отклонение

Плотность распределения вероятности распределения Гаусса

$$f(x) = const\, \exp\left(-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma_x^2}\right)$$

примем $\sigma_x \equiv \sigma$ чтобы не загромождать запись

Константу найдем из условия нормировки

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$$

Лист 1 Продолжение Лист 2

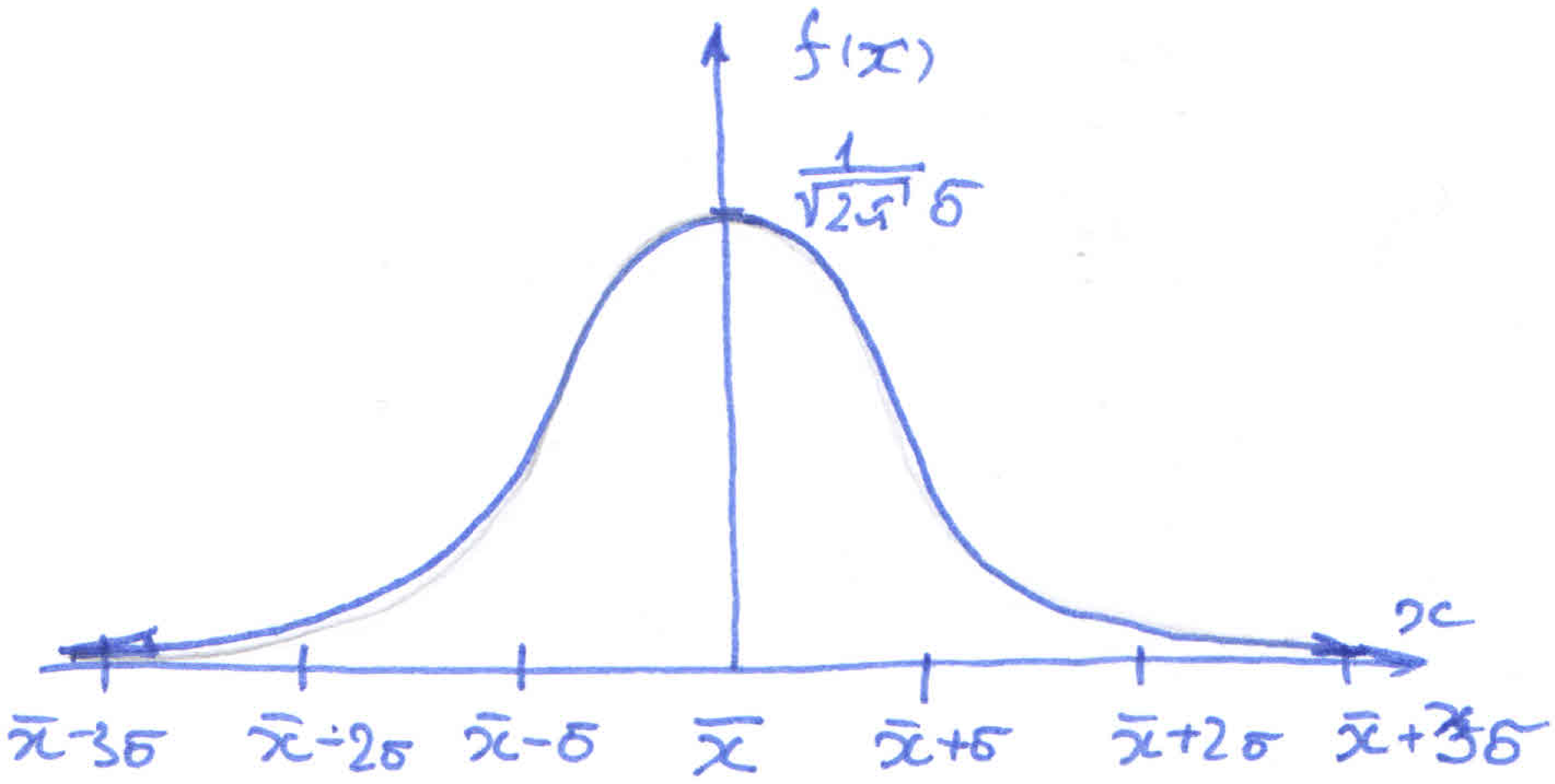
Из курса матанализа:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2)\,dx = \sqrt{\pi} \qquad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\alpha x^2)\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

Тогда: $const = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}\right)$$

График функции $f(x)$ распределения Гаусса:



<u>Задача</u> Найдем вероятность того, что случайное число x попадет в интервал $\{\bar{x}-\sigma;\ \bar{x}+\sigma\}$

$$\int\limits_{\bar{x}-\sigma}^{\bar{x}+\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}\right) dx \longrightarrow$$ данный интеграл можно вычислить только численно

Покажем, что любые задачи, связанные с поиском вероятности или интервалов, для нормального распределения можно решить, если известны Функция Лапласа и её таблицы.

Рассмотрим переменную $z = \frac{x-\bar{x}}{\sigma}$, где x – величина, распределенная нормально

$z \in (-\infty, +\infty)$ и распределена нормально, как и x.

Продолжение Лист 3

$z = \dfrac{x - \bar{x}}{\sigma}$ — безразмерная (!) величина, распределенная нормально (!)

$x = \bar{x}$ $z = 0$

$x = \bar{x} - \sigma$ $z = -1$

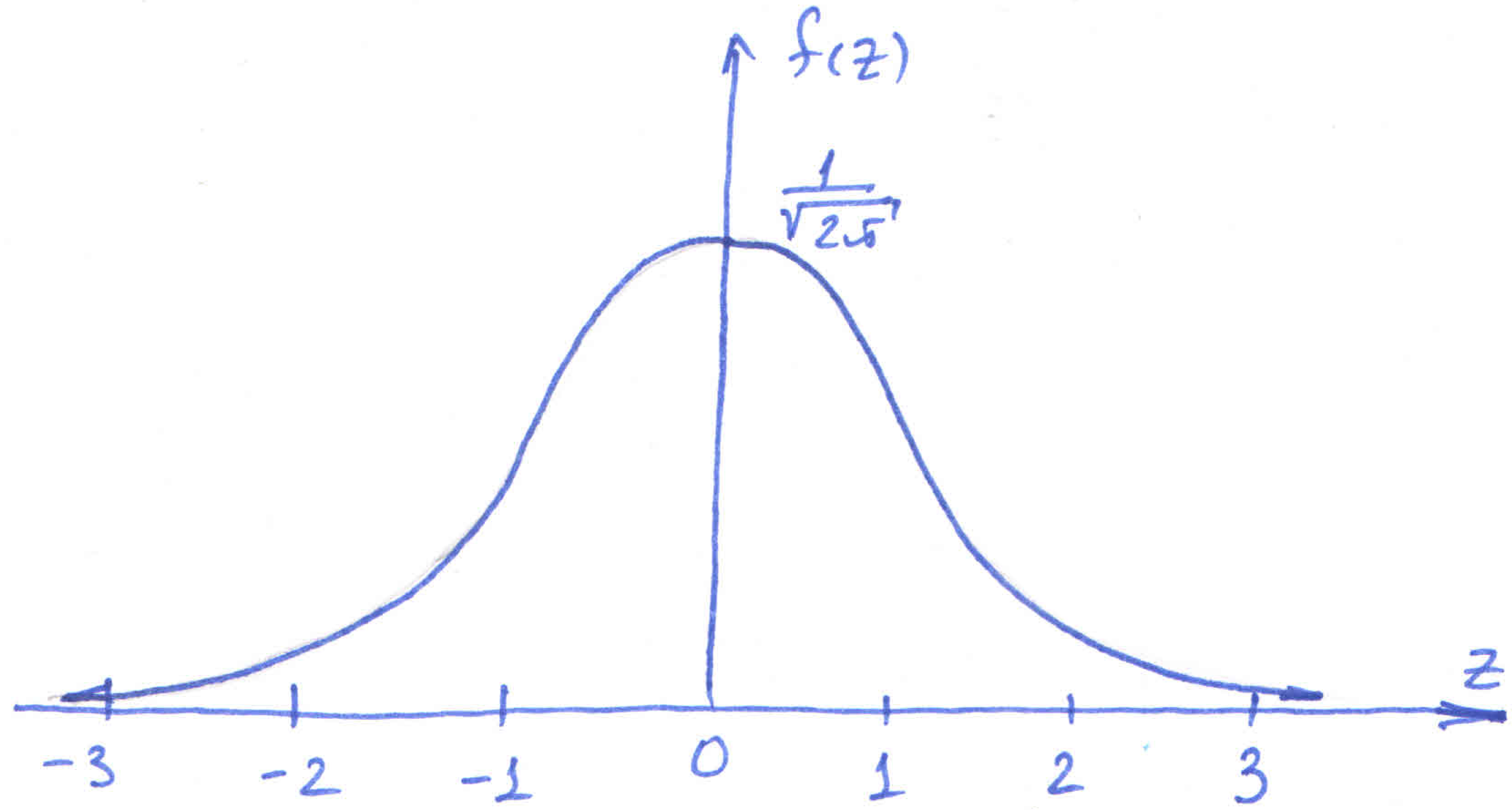
$x = \bar{x} + \sigma$ $z = +1$

....

$f(z)$ — плотность вероятности распределения величины z

$$f(z) = const_z \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(z)\,dz = 1 \Rightarrow const_z = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$



Найдем

$$\int_{\bar{x}-\sigma}^{\bar{x}+\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}\right) dx$$

где $\{\bar{x}, \sigma\}$ — бесконечное множество возможных значений $\bar{x}$ и σ

$$\int_{\bar{x}-\sigma}^{\bar{x}+\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}\right) dx = \int_{\bar{x}-\sigma}^{\bar{x}+\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\bar{x}}{\sigma}\right)^2\right) d\left(\frac{x-\bar{x}}{\sigma}\right)$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} z = \dfrac{x-\bar{x}}{\sigma} \\ z_a = \dfrac{\bar{x}-\sigma-\bar{x}}{\sigma} = -1 \\ z_b = \dfrac{\bar{x}+\sigma-\bar{x}}{\sigma} = 1 \end{array} \right\} = \int_{-1}^{+1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz$$

для любых (!) $\bar{x}$ и σ

Продолжение Лист 4

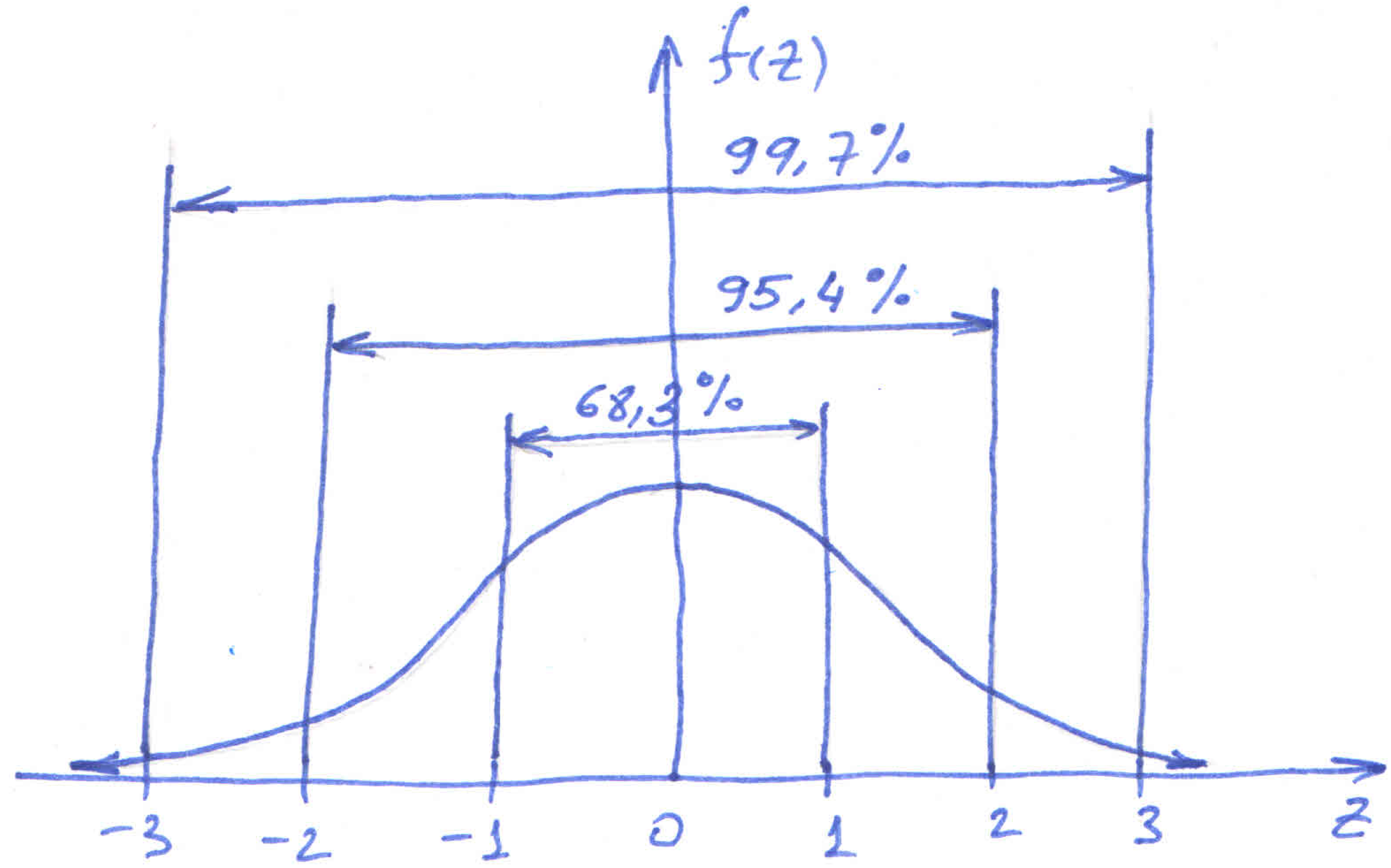
$$\int_{-1}^{+1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz = \int_{\bar{x}-\sigma}^{\bar{x}+\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}\right) dx = 0{,}6826$$

$$\int_{-2}^{+2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz = \int_{\bar{x}-2\sigma}^{\bar{x}+2\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}\right) dx = 0{,}9544$$

$$\int_{-3}^{+3} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz = \int_{\bar{x}-3\sigma}^{\bar{x}+3\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}\right) dx = 0{,}9973$$

для любых $\bar{x}$ и σ (!!!)

Интегралы вида $\int_{z_a}^{z_b} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz$ рассчитаны численно.



Вероятность попадания случайной величины x в интервал $(\bar{x}-\sigma, \bar{x}+\sigma)$ равна 68,3%:

$$P(\bar{x}-\sigma < x < \bar{x}+\sigma) = 68{,}3\%$$

$$P(\bar{x}-2\sigma < x < \bar{x}+2\sigma) = 95{,}4\%$$

$$P(\bar{x}-3\sigma < x < \bar{x}+3\sigma) = 99{,}7\%$$

Продолжение Лист 5

Рассмотрим способ вычисления произвольного интеграла вида $\int\limits_{z_a}^{z_b} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz$.

Распределение случайной величины z можно описать функцией распределения $F(z)$ такой, что:

$$F(z) = \int\limits_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right) d\xi$$

Функция $F(z)$ имеет смысл "набранной вероятности".

$$F(-\infty) = \int\limits_{-\infty}^{-\infty} f(\xi) d\xi = \varnothing \qquad F(+\infty) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) d\xi = 1$$

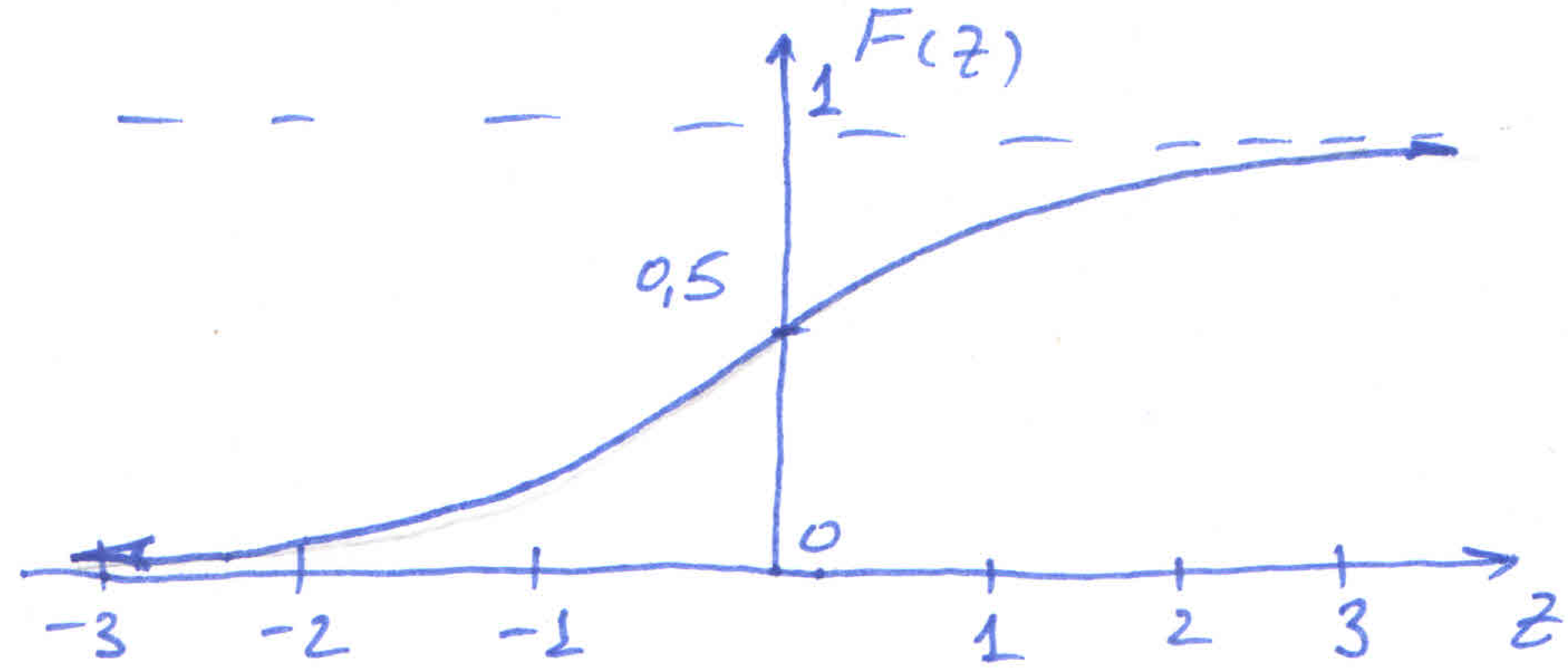
$$F(-3) = \int\limits_{-\infty}^{-3} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right) d\xi = 0{,}00135 \qquad \frac{1-0{,}9973}{2}$$ (см. рисунок лист 5)

$$F(-2) = \int\limits_{-\infty}^{-2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right) d\xi = 0{,}0228 \qquad \frac{1-0{,}9544}{2}$$

$$F(-1) = \int\limits_{-\infty}^{-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right) d\xi = 0{,}1587 \qquad \frac{1-0{,}6826}{2}$$

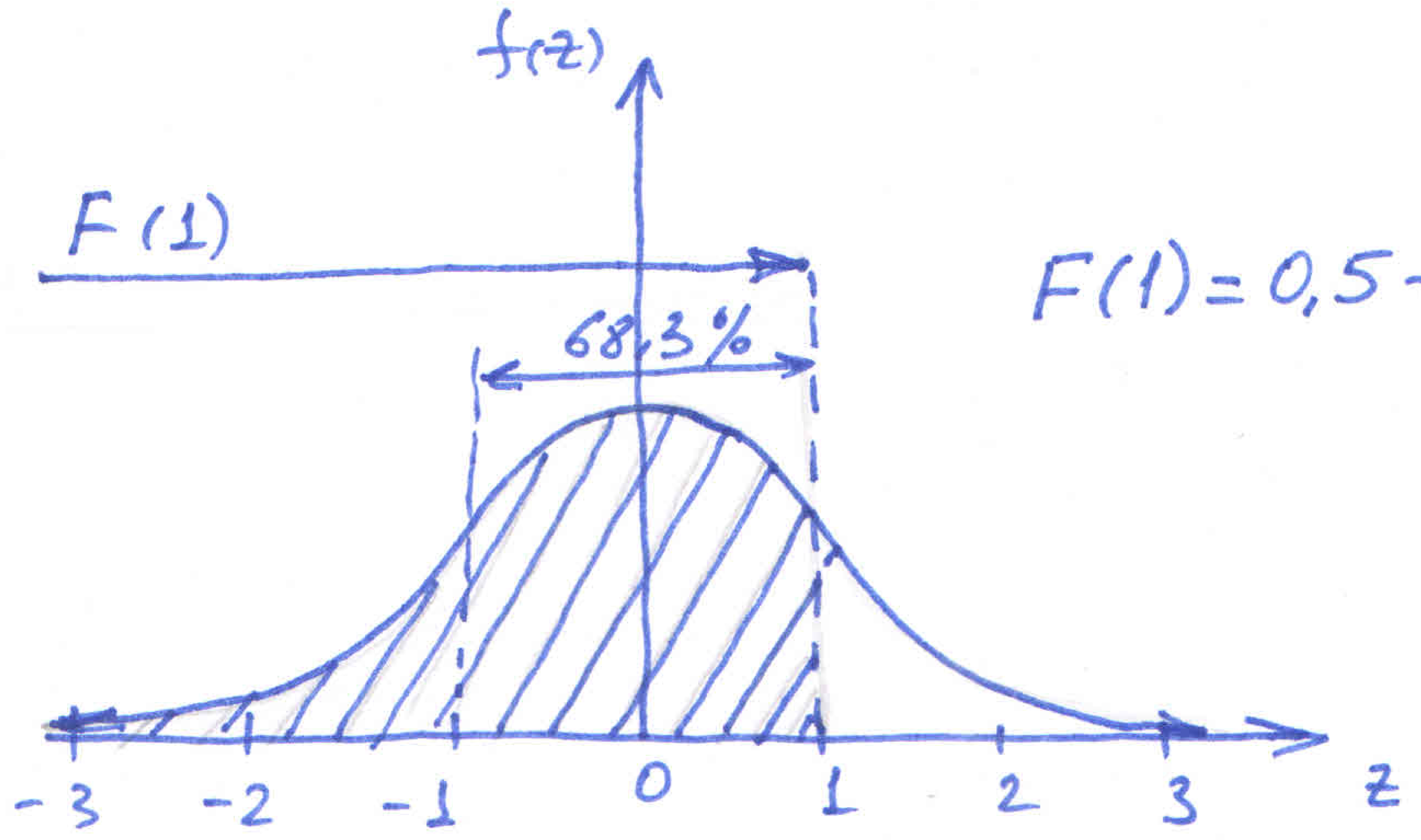
$$F(0) = \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right) d\xi = 0.5$$

$F(1) = 0{,}8413 \qquad F(2) = 0{,}9772 \qquad F(3) = 0{,}99865$



Продолжение лист 6

$$F(z)=\int\limits_{-\infty}^{z}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right)d\xi$$



$$F(1)=0{,}5+\frac{0{,}6826}{2}=0{,}8413$$

Построим подробные таблицы функции $F(z)$ вида:

$$z \to F(z)\ ,\quad z(-\infty,+\infty)$$

$$\{\text{обычно } z(-4;4)\}$$

Тогда:

$$\int\limits_{z_a}^{z_b}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)dz=\int\limits_{z_a}^{-\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)dz+\int\limits_{-\infty}^{z_b}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)dz=$$

$=F(z_b)-F(z_a)\ \to$ мы можем рассчитывать любые произвольные интегралы от функции $f(z)$ в интервале от z_a до z_b

Учтем, что нормальное распределение — симметрично. Тогда задачу расчета таблиц можно упростить.

Для этого рассмотрим функцию вида:

$$\Phi(z)=\int\limits_{0}^{z}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right)d\xi$$

$\Phi(z)$ — функция Лапласа

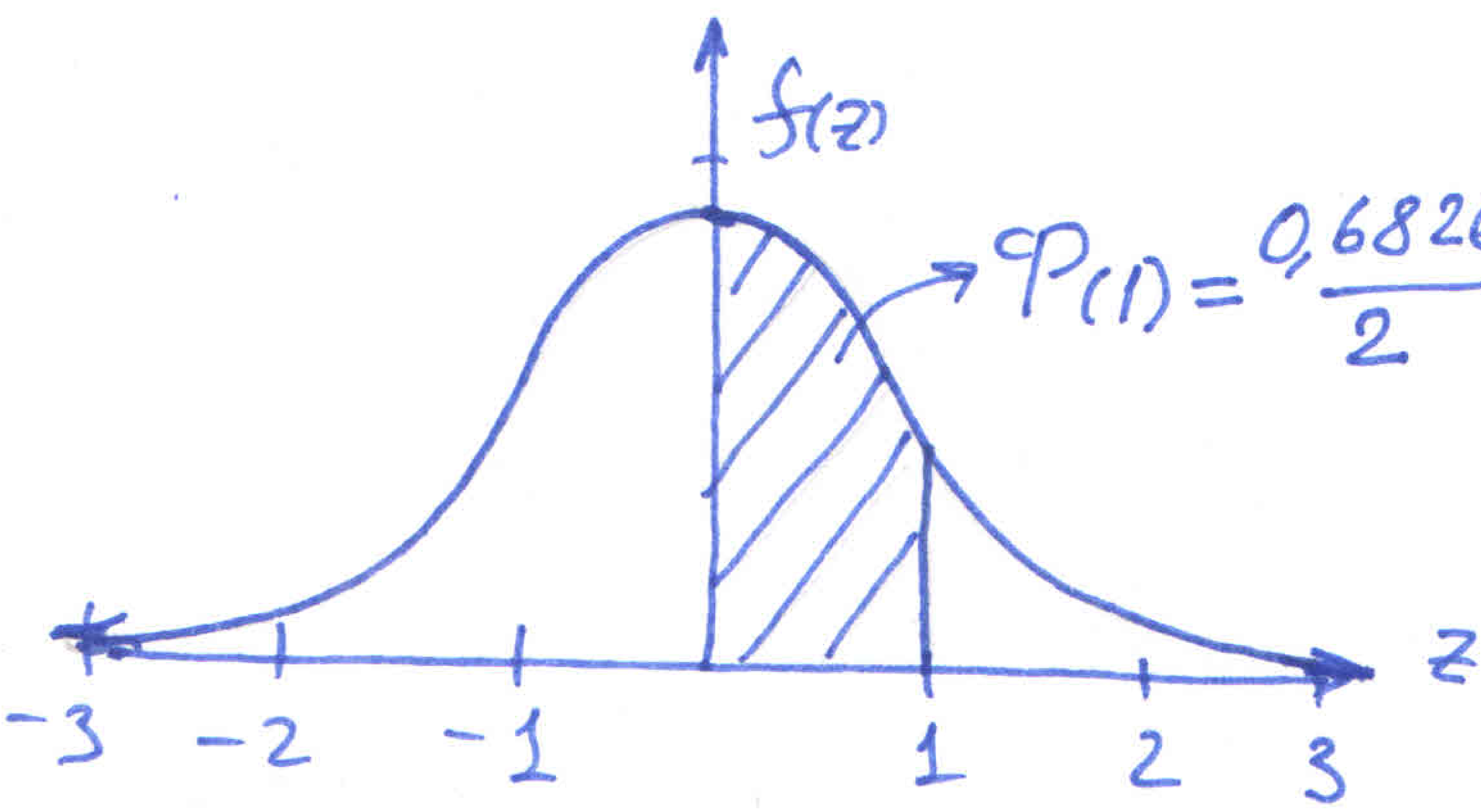
Продолжение Лист 7

$\Phi(0) = 0 \qquad \Phi(+\infty) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right) d\xi = 0.5$

$\Phi(1) = 0,3413$

$\Phi(2) = 0,4772$

$\Phi(3) = 0,49865$



Функция $\Phi(z)$ – нечетная!!! $\boxed{\Phi(-z) = -\Phi(z)}$

Решение вероятностных задач с помощью таблиц функции Лаппаса $\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^{z} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right) d\xi$

$$\int\limits_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}\right) dx = \int\limits_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\bar{x}}{\sigma}\right)^2\right) d\left(\frac{x-\bar{x}}{\sigma}\right) =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} z = \dfrac{x-\bar{x}}{\sigma} \\ z_a = \dfrac{a-\bar{x}}{\sigma} \\ z_b = \dfrac{b-\bar{x}}{\sigma} \end{array} \right\} = \int\limits_{z_a}^{z_b} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz = \int\limits_{z_a}^{0} f(z)dz + \int\limits_0^{z_b} f(z) dz =$$

$$= \int\limits_0^{z_b} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz - \int\limits_0^{z_a} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz = \underline{\Phi(z_b) - \Phi(z_a)} \quad \blacksquare$$

Не забывать, что $\Phi(-z) = -\Phi(z)$