**Программа экзамена**
**по дисциплине «Математика»**
**4 семестр, 2023/24 уч. год**
**гр. ТФ-09÷15 (ИТАЭ)**

1. Классификация ЛУЧП 2-го порядка. Приведение к каноническому виду.
2. Канонический вид уравнения гиперболического типа.
3. Канонический вид уравнения параболического типа.
4. Канонический вид уравнения эллиптического типа.
5. Одномерное волновое уравнение. Задача Коши. Формула Коши-Даламбера.
6. Смешанная задача для волнового уравнения на полупрямой с граничным условием $u(0,t)=0$ ..
7. Смешанная задача для волнового уравнения на полупрямой с граничным условием $\partial u/\partial x(0,t)=0$ ..
8. Смешанная задача для волнового уравнения на полупрямой с граничным условием $u(0,t)=h(t)$ ..
9. Смешанная задача для волнового уравнения на отрезке. Метод Фурье разделения переменных. Собственные функции и их свойства.
10. Одномерное уравнение теплопроводности. Смешанная задача для уравнения теплопроводности на отрезке.
11. Принцип максимума для решения смешанной задачи для уравнения теплопроводности на отрезке.
12. Теорема единственности решения смешанной задачи для уравнения теплопроводности на отрезке.
13. Уравнение Лапласа. Постановка краевых задач. Три формулы Кирхгофа.
14. Фундаментальное решение уравнения Лапласа.
15. Решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круге.
16. Гармонические функции и их свойства.
17. Задача Неймана для уравнения Лапласа. Условие разрешимости.
18. Решение задачи Дирихле для полупространства.
19. Формула Пуассона для решения задачи Дирихле в круге.
20. Понятие функции Грина для задачи Дирихле для уравнения Лапласа.
21. Уравнение Бесселя и его фундаментальная система решений. Ортогональность функций Бесселя.
22. Решение смешанной задачи для уравнения теплопроводности в круге.

## Задачи к экзамену

1. Определить область эллиптичности, гиперболичности, параболичности уравнения Трикоми $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

2. Найти общее решение:

а) $x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2y\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$;

б) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{1}{4}u$.

3. Решить задачу Коши для бесконечной струны:

а) $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(0,x) = \varphi(x), \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(0,x) = 0; \end{cases}$ б)) $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(0,x) = 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(0,x) = \psi(x); \end{cases}$

в) $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 6\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 5\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \\ u(x-y=0) = \varphi(x),\ u(5x-y=0) = \psi(x). \end{cases}$

4. Решить смешанные задачи методом разделения переменных:

а) $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(0,x) = x - x^2, \\ u(t,0) = 0,\ u(t,1) = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x\cos(t), \\ u(0,x) = \sin \pi x, \\ u(t,0) = 1,\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(t,1) + hu(t,1) = 1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(0,x) = x, \\ u(t,0) = 0,\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,1) = 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(0,x) = x, \\ u(t,0) = 0,\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,1) + u(t,1) = 0. \end{cases}$

5. Решить краевые задачи для уравнения Лапласа на плоскости:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \\ u(0,y) = \varphi_0(y),\ u(\pi,y) = \varphi_1(y), \\ u(x,0) = \psi_0(x),\ u(x,\pi) = \psi_1(x). \end{cases}$$

Решить для частного случая

$$\varphi_0(y) = y(\pi - y),\ \psi_0(x) = \sin\pi,\ \varphi_1(y) = \psi_1(x) = 0.$$