

**ТЕОРИЯ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО,
ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ, ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И
ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ
ИТАЭ, ТФ – (9÷ 15), 3 семестр, 2023/24 уч. год**

1. Экзаменационная программа по ТФКП, ОИ, рядам Фурье

1. Производная функции комплексного переменного. Понятие аналитической функции. Условия Коши-Римана (Эйлера-Даламбера) (доказательство необходимости).
2. Определение и свойства интеграла от функции комплексного переменного. Способы вычисления.
3. Вычисление контурных интегралов в комплексной плоскости. Теорема Коши (доказательство). Формула Ньютона-Лейбница.
4. Интегральная формула Коши (доказательство). Интегральная формула Коши для n -ой производной.
5. Понятие изолированной особой точки. Классификация особых точек. Ряд Лорана в окрестности конечной особой точки.
6. Вычеты. Способы вычисления вычетов.
7. Ряд Лорана в окрестности бесконечной особой точки. Основная теорема теории вычетов и следствие.
8. Преобразование Лапласа. Требования к функции оригиналу. Необходимое условие существования изображения. Свойства линейности и подобия.
9. Свойства сдвига и запаздывания преобразования Лапласа (одно свойство с доказательством). Запись дискретных функций с использованием обобщенной функции Хевисайда.
10. Свойства дифференцирования оригинала и изображения преобразования Лапласа (одно с доказательством). Операционный метод решения линейных дифференциальных уравнений.
11. Свертка оригиналов. Интеграл Дюамеля. Метод Дюамеля решения дифференциальных уравнений.
12. Ортогональные системы функций. Ряды Фурье. Условие разложимости функции в ряд Фурье. Тригонометрический ряд Фурье. Сумма ряда Фурье.
13. Тригонометрические ряды Фурье для четных и нечетных функций. Ряды Фурье на произвольном отрезке.
14. Тригонометрические ряды Фурье в комплексной форме. Интегральная формула Фурье в комплексной форме. Спектральная функция. Интегральная формула Фурье в действительной форме.
15. Преобразование Фурье и его основные свойства. Косинус и синус-преобразование Фурье.

2. Экзаменационная программа по теории вероятностей и элементам математической статистики

1. События в теории вероятностей: случайные, достоверные, невозможные, совместные (несовместные). Пространство элементарных событий. Аксиомы Колмогорова А.Н. и следствия из них. Вычисление вероятности события классическим способом.
2. Урновые схемы: выборка с возвращением и без возвращения. Вычисление количества исходов эксперимента с использованием элементов комбинаторики. Гипергеометрическое распределение.
3. Понятие о сумме и произведении событий. Изображение событий на диаграмме Эйлера-Венна. Условные события. Вероятность суммы и произведения событий.
4. Формула полной вероятности. Формула Байеса (доказательство).
5. Независимые одинаковые испытания и формула Бернулли. Формула Пуассона. Простейший поток событий.
6. Дискретные и абсолютно непрерывные случайные величины. Ряд распределения, функция распределения, плотность вероятности. Свойства.
7. Числовые характеристики случайных величин: математическое ожидание, дисперсия, среднее квадратическое отклонение, медиана, мода.
8. Система случайных величин. Законы распределения системы случайных величин. Ковариация, коэффициент корреляции.
9. Неравенство Чебышева. Закон больших чисел в форме Чебышева и усиленный закон больших чисел Колмогорова.
10. Центральная предельная теорема для одинаково распределенных случайных величин. Локальная и интегральная формула Муавра-Лапласа.
11. Модель эксперимента в статистике. Статистическая структура. Основные допущения. Генеральная совокупность. Генеральное распределение. Выборка из генеральной совокупности. Выборочный вектор. Точечные оценки (средняя, выборочная дисперсия, статистическая медиана и мода, несмещенная дисперсия).
12. Требования, предъявляемые к точечным оценкам (несмещенность, эффективность, состоятельность).
13. Понятие эффективной оценки для регулярных распределений. Неравенство Рао-Крамера. Критерий эффективности оценки для параметрической функции.
14. Метод максимального правдоподобия и метод моментов для получения точечных оценок неизвестных параметрических функций.
15. Понятие доверительного интервала. Доверительная вероятность и уровень значимости. Доверительные интервалы для оценки математического

ожидания в случае выборки из нормальной генеральной совокупности для известной и неизвестной генеральной дисперсии.

16. Нахождение доверительных интервалов для неизвестных параметров с помощью центральной статистики.
17. Параметрические гипотезы. Критическая область. Критерий Неймана-Пирсона. Ошибки 1-го и 2-го рода.
18. Критерий согласия хи-квадрат для распределений неизвестных случайных величин. Последовательность применения.

Типовые задачи экзамена по ТФКП, ОИ, рядам Фурье

(ИТАЭ, ТФ – (9÷ 15), 3 семестр, 2023/24 уч. год)

1. Разложить функцию $f(z) = \frac{1}{(z-3)(z-5)}$ в ряд Лорана в указанном

кольце:

- 1.1. $2 < |z-3| < \infty$; 1.2. $0 < |z-3| < 2$; 1.3. $2 < |z-1| < 4$;
- 1.4. $3 < |z| < 5$; 1.5. $5 < |z| < \infty$.

2. Найти интегралы:

- 2.1. $\oint_{|z|=1} \frac{\sin(3z) - \sin(2z)}{z^6} dz$; 2.2. $\oint_{|z|=1} \frac{e^{3z} - e^{2z}}{z^5} dz$; 2.3. $\oint_{|z|=1} \frac{\cos(2z) - 1}{z^5} dz$;
- 2.4. $\oint_{|z+1,5|=0,6} \frac{z^2 dz}{(z+1)(z+2)}$; 2.5. $\oint_{|z-2|=0,5} \frac{\sin(z) dz}{(z-1)(z-2)^2}$; 2.6. $\oint_{|z|=3} \frac{\operatorname{sh}(6z) dz}{(z-1)(z-2)}$;
- 2.7. $\oint_{|z-1|=1,5} \frac{\operatorname{ch}(z) dz}{(z-1)(z-2)(z-3)}$; 2.8. $\oint_{|z-2|=2,5} \frac{\operatorname{ch}(z) dz}{\sin(z)}$.

3. Найти интегралы, используя вычеты

- 3.1. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 8x + 25}$; 3.2. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x) dx}{x^2 + 4x + 8}$; 3.3. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x) dx}{x^2 + 6x + 10}$.

4. Найти интегралы, используя изображения синуса или косинуса, а также свойства преобразования Лапласа

- 4.1. $\int_0^{\infty} x \sin(4x) e^{-3x} dx$; 4.2. $\int_0^{\infty} x \cos(3x) e^{-5x} dx$; 4.3. $\int_0^{\infty} x^2 \cos(x) e^{-2x} dx$.

5. Решить задачу Коши для дифференциального уравнения операционным методом:

- 5.1. $y'' + 3y' + 2y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$;
 5.2. $y'' + 3y' + 2y = e^{-x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$;
 5.3. $y'' + 3y' + 3y = 3$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$;
 5.4. $y'' + 4y = \sin(x)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

Примечание: Неизвестная функция $y = y(x)$.

6. Решите задачу Коши для дифференциального уравнения методом Дюамеля:

6.1. $y' + y = \frac{1}{sh(t) + 1}$; $y(0) = 0$;

6.2. $y' - y = \frac{1}{ch(t)}$, $y(0) = 0$;

6.3. $y' - y = \cos(t)$, $y(0) = 0$;

6.4. $y' + y = t^2$, $y(0) = 0$.

Примечание: Неизвестная функция $y = y(t)$.

7. Разложение функций в ряд Фурье.

7.1. Разложите функцию $f(x) = 5\eta(x) - 5\eta(x-5) + 10\eta(x-5) - 10\eta(x-10)$ в ряд Фурье по синусам на интервале $x \in (0, 10)$.

7.2. Разложите функцию $f(x) = 5\eta(x) - 5\eta(x-5) + 10\eta(x-5) - 10\eta(x-10)$ в ряд Фурье по косинусам на интервале $x \in [0, 10)$.

7.3. Разложите функцию $f(x) = 5\eta(x) - 5\eta(x-10) + 3\eta(x-10) - 3\eta(x-20)$ в ряд Фурье по синусам на интервале $x \in (0, 20)$.

7.4. Разложите функцию $f(x) = 5\eta(x) - 5\eta(x-10) + 3\eta(x-10) - 3\eta(x-20)$ в ряд Фурье по косинусам на интервале $x \in [0, 20)$.

ТИПОВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ЭКЗАМЕНУ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ, ЭЛЕМЕНТАМ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ (Группы ТФ-09-22-ТФ-15-22)

Задача 1. Найти вероятность безотказной работы электрической схемы см. рис 1. на промежутке времени τ , если вероятности отказа ее элементов на том же промежутке времени равны:

$$p_1 = 0,2, \quad p_2 = 0,2, \quad p_3 = 0,3, \quad p_4 = 0,1, \quad p_5 = 0,1.$$

Указание: Отказы элементов считать независимыми событиями.

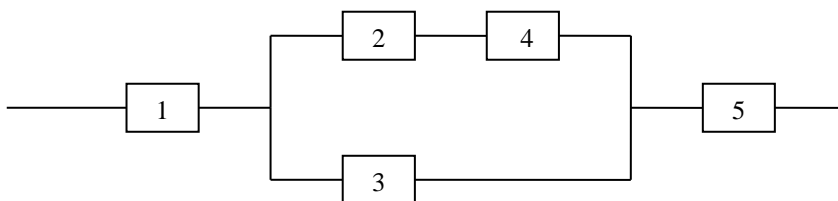


Рис.1.

Задача 2. В коробке имеется **10** транзисторов, из которых два неисправных. Из коробки случайным образом извлекают **3** транзистора. Какова вероятность, что неисправные транзисторы не попадут в выборку.

Задача 3. В коробке имеется **15** транзисторов, из которых **5** неисправных. Из коробки случайным образом извлекают **3** транзистора. Какова вероятность, что в выборку попадет хотя бы один неисправный транзистор.

Задача 4. На складе магазина находится **100** телевизоров некоторой марки. Любой телевизор с вероятностью **0,05** может быть с незначительными дефектами. Какова вероятность, что среди данных телевизоров окажется **ровно пять** с незначительными дефектами.

Задача 5. В партии из 15 денежных купюр 4 фальшивых. Некоторый детектор валют может правильно распознать нефальшивую купюру с вероятностью 0,9 и правильно распознать фальшивую купюру с вероятностью 0,8. Определить вероятность того, что первую наугад взятую купюру данный детектор валют распознает как фальшивую.

Задача 6. В коробке находится **7** транзисторов, из которых **три** неисправных. Последовательно и безошибочно проводят тестирование данных транзисторов, пока не обнаружат **ровно 2** неисправных. Найти **математическое ожидание числа** транзисторов, которые проверят, прежде чем обнаружат **второй по счету** неисправный (неисправный учитывать).

Задача 7. Некоторое техническое устройство имеет по паспорту средний срок работы до момента отказа 5000 часов. Найти вероятность того, что данное устройство проработает более 7000 часов, полагая, что распределение времени работы данного устройства показательное.

Задача 8. На некотором предприятии производят электромоторы с математическим ожиданием веса $m_x = 25$ кг и средним квадратическим отклонением веса $\sigma_x = 50$ г. Найти вероятность того, что некоторые электромоторы данного предприятия будут иметь вес более 25,1 кг, полагая распределение веса нормальным.

Задача 9. На складе завода по производству электронных изделий находится **300** однотипных микросхем. Любая микросхема данного типа может иметь незначительные дефекты с вероятностью **0,4**. Какова вероятность того, что на складе окажется более **115**, но менее **130** микросхем с незначительными дефектами.

Задача 10. В помещениях некоторой организации имеется 1300 электрических ламп. Вероятность безотказной работы (на интервале времени T) одной лампы равна 0,7. Найти вероятность того, что на интервале времени T в помещениях данной организации будет не менее 900 исправных лампочек. Отказы ламп считать событиями независимыми.

Задача 11. Определить неизвестный параметр k функции плотности вероятности случайной величины, заданной следующим выражением:

$$\begin{cases} f(x) = 0, & \text{для } x < 2, \\ f(x) = \frac{k}{x^2}, & \text{для } 2 \leq x \leq 10, \\ f(x) = 0, & \text{для } x > 10. \end{cases}$$

Найти медиану распределения- M_e , а также m_x и σ_x .

Задача 12. Известно, что случайная величина X имеет нормальное распределение с математическим ожиданием $m_x = 1000$ и на интервале $1000 \leq X \leq 1500$ распределяется 40 % значений данной случайной величины. Определить σ_x .

Задача 13. Дана выборка объема $n=15$ из нормальной генеральной совокупности см. таблицу 1. Найти доверительный интервал для генерального математического ожидания. Указание: генеральная дисперсия - $D_x = 1$; а) доверительная вероятность - $p = 0,95$; б) доверительная вероятность - $p = 0,98$.

Таблица 1.

8,77	7,67	10,62	9,54	9,62	10,24	9,32	8,18
8,05	9,44	8,61	9,61	8,51	8,74	8,66	

Задача 14. Дана выборка объема $n=15$ из нормальной генеральной совокупности см. таблицу 1. Найти доверительный интервал для генерального математического ожидания. Указание: генеральная дисперсия неизвестна; а) доверительная вероятность - $p = 0,95$; б) доверительная вероятность - $p = 0,98$.

Задача 15. Группированный ряд относительных частот некоторого признака Z представлен в таблице:

Δz_i	(0; 0,2)	(0,2; 0,4)	(0,4; 0,6)	(0,6; 0,8)	(0,8; 1)
p_i^*	25/90	14/90	16/90	16/90	19/90

На уровне значимости $\alpha = 0,05$ с использованием критерия хи-квадрат проверить гипотезу о согласии данного эмпирического распределения с равномерным распределением на отрезке $Z \in [0,1]$. Объем выборки $n = 90$.

Задача 16. Группированный ряд относительных частот некоторого признака Z представлен в таблице:

Δz_i	$(-3; -2)$	$(-2; -1)$	$(-1; 0)$	$(0; 1)$	$(1; 2)$	$(2; 3)$
p_i^*	2/90	14/90	24/90	31/90	16/90	3/90

На уровне значимости $\alpha = 0,05$ с использованием критерия хи-квадрат проверить гипотезу о согласии данного эмпирического распределения с табличным нормальным распределением: $Z \in N\{0,1\}$. Объем выборки $n = 90$.

Задача 17. Группированный ряд относительных частот некоторого признака Z представлен в таблице:

Δz_i	$(0; 500)$	$(500; 1000)$	$(1000; 1500)$	$(1500; 2000)$	$(2000; 2500)$
p_i^*	36/100	25/100	19/100	15/100	5/100

На уровне значимости $\alpha = 0,05$ с использованием критерия хи-квадрат проверить гипотезу о согласии данного эмпирического распределения с показательным распределением - $f(z) = 0,001e^{-0,001z}$. Объем выборки $n = 100$.