Вывод общего выражения для дисперсии оценки функции $Y(X_1, X_2, .., X_k)$

Пусть $Y(X_1, X_2, X_3)$ задана в виде:

$v = \frac{L}{t_2 - t_1}$, где v – скорость, м/с

L – расстояние от точки 1 до точки 2; м

t_1 и t_2 – время, отсчитанное по часам; с.

Пусть L, t_2, t_1 определяются по результатам многократных прямых измерений. В итоге получены:

$\overline{L}$, $D[\overline{L}]$ – дисперсия среднего значения L

$\overline{t_1}$, $D[\overline{t_1}]$ – дисперсия среднего значения t_1

$\overline{t_2}$, $D[\overline{t_2}]$ – дисперсия среднего значения t_2

$$D[\overline{L}] = \sum_{i=1}^{N_L} \frac{(L_i - \overline{L})^2}{N_L(N_L - 1)}, \quad D[\overline{t_1}] = \cdots, \quad D[\overline{t_2}] = \cdots$$

Границы систематической погрешности заданы как:

$\Theta(\overline{L})$, $\Theta(\overline{t_1})$, $\Theta(\overline{t_2})$ – приборные погрешности линейки и часов.

Измерения t_1 и t_2 заданы в виде таблицы:

t_1	$t_1^{(1)}$	$t_1^{(2)}$	$\ldots$	$t_1^{(m)}$
t_2	$t_2^{(1)}$	$t_2^{(2)}$	$\ldots$	$t_2^{(m)}$

Табличные значения t_1 и t_2 позволяют оценить коэффициент корреляции между t_1 и t_2:

$$\rho_\Delta(t_1, t_2) = \frac{\sum_{i=1}^{m} (t_{1i} - \overline{t_1})(t_{2i} - \overline{t_2})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{m} (t_{1i} - \overline{t_1})^2 \sum_{i=1}^{m} (t_{2i} - \overline{t_2})^2}}$$

Коэффициент корреляции $\rho_\Delta(t_1, t_2)$ позволяет оценить возможную связь t_1 и t_2.

Так как для оценки мы используем массивы случайных чисел, $\rho_\Delta(t_1, t_2)$ – коэф. корреляции в случайной составляющей.

Пусть известно, что t_1 и t_2 измеряются одним прибором. Тогда систематическая погрешность прибора вносится с одинаковым знаком как в измерении t_1 так и в измерения t_2.

Анализ эксперимента позволяет принять коэффициент корреляции между t_1 и t_2, причина существования которого связана с систематической погрешностью, равным 1.

$$\rho_\Sigma(t_1, t_2) = 1$$

Общее расчетное соотношение:

$$D[\bar{\upsilon}] = M[(\bar{\upsilon} - \upsilon^\circ)^2] = M\left[\left\{\left(\frac{\partial \upsilon}{\partial L}\right)(\bar{L} - L^\circ) + \left(\frac{\partial \upsilon}{\partial t_1}\right)(\bar{t}_1 - t_1^\circ) + \left(\frac{\partial \upsilon}{\partial t_2}\right)(\bar{t}_2 - t_2^\circ)\right\}^2\right] =$$

$$= \left(\frac{\partial \upsilon}{\partial L}\right)^2 M[(\bar{L} - L^\circ)^2] + \left(\frac{\partial \upsilon}{\partial t_1}\right)^2 M[(\bar{t}_1 - t_1^\circ)^2] + \left(\frac{\partial \upsilon}{\partial t_2}\right)^2 M[(\bar{t}_2 - t_2^\circ)^2] +$$

$$+ 2\left(\frac{\partial \upsilon}{\partial L}\right)\left(\frac{\partial \upsilon}{\partial t_1}\right) M[(\bar{L} - L^\circ)(\bar{t}_1 - t_1^\circ)] + 2\left(\frac{\partial \upsilon}{\partial L}\right)\left(\frac{\partial \upsilon}{\partial t_2}\right) M[(\bar{L} - L^\circ)(\bar{t}_2 - t_2^\circ)] +$$

$$+ 2\left(\frac{\partial \upsilon}{\partial t_1}\right)\left(\frac{\partial \upsilon}{\partial t_2}\right) M[(\bar{t}_1 - t_1^\circ)(\bar{t}_2 - t_2^\circ)].$$

где:

$$M[(\bar{L} - L^\circ)^2] = D[\bar{L}] + \frac{\Theta^2[\bar{L}]}{3}$$

$$M[(\bar{t}_1 - t_1^\circ)^2] = D[\bar{t}_1] + \frac{\Theta^2[\bar{t}_1]}{3}$$

$$M[(\bar{t}_2 - t_2^\circ)^2] = D[\bar{t}_2] + \frac{\Theta^2[\bar{t}_2]}{3}$$

$$M[(\bar{L}-L^\circ)(\bar{t}_1-t_1^\circ)] = \varnothing$$

$$M[(\bar{L}-L^\circ)(\bar{t}_2-t_2^\circ)] = \varnothing$$

$$M[(\bar{t}_1-t_1^\circ)(\bar{t}_2-t_2^\circ)] = \rho_\Delta(\bar{t}_1,\bar{t}_2)\sqrt{D[\bar{X}_1]D[\bar{X}_2]} + \rho_S(\bar{t}_1,\bar{t}_2)\frac{\Theta[\bar{X}_1]\Theta[\bar{X}_2]}{3}$$

Т.к. $D[\bar{v}] = S^2(\bar{v}) + \dfrac{\Theta^2[\bar{v}]}{3}$, то

случайная погрешность оценки $\bar{v}$ равна:

$$S^2(\bar{v}) = \left(\frac{\partial v}{\partial L}\right)^2 D[\bar{L}] + \left(\frac{\partial v}{\partial t_1}\right)^2 D[\bar{t}_1] + \left(\frac{\partial v}{\partial t_2}\right)^2 D[\bar{t}_2] + 2\left(\frac{\partial v}{\partial t_1}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial t_2}\right)\rho_\Delta(\bar{t}_1,\bar{t}_2)\sqrt{D[\bar{t}_1]D[\bar{t}_2]}$$

граница систематической погрешности $\bar{v}$:

$$\Theta^2[\bar{v}] = \left(\frac{\partial v}{\partial L}\right)^2 \Theta^2[\bar{L}] + \left(\frac{\partial v}{\partial t_1}\right)^2 \Theta^2[\bar{t}_1] + \left(\frac{\partial v}{\partial t_2}\right)^2 \Theta^2[\bar{t}_2] + 2\left(\frac{\partial v}{\partial t_1}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial t_2}\right)\rho_S(X_1,X_2)\,\Theta[\bar{t}_1]\,\Theta[\bar{t}_2]$$