

Лабораторная работа № 2

Количество экспериментальных серий при различных температурных режимах термостата

$N := 4$ $i := 1 \dots 20$

(серии объединены в массивы первичных данных $U_t, U_k, E, T_{\text{цифр}}, T_{\text{ртут}}$)

Платиновый термометр сопротивления: напряжения на термометре U_t и катушке U_k , мВ		Термо-ЭДС термопары E , мВ		Ртутный термометр $T_{\text{ртут}}, ^\circ\text{C}$	Цифровой термометр $T_{\text{цифр}}, ^\circ\text{C}$
$U_t :=$	$U_k :=$	$E :=$	$T_{\text{ртут}} :=$	$T_{\text{цифр}} :=$	
	(10.9087)	(9.5381)	(1.3382)	(33.7)	(33.9)
	(10.9089)	(9.5384)	(1.3380)	(33.7)	(33.9)
	(10.9086)	(9.5390)	(1.3378)	(33.7)	(33.9)
	(10.9077)	(9.5391)	(1.3381)	(33.7)	(33.9)
	(10.9073)	(9.5383)	(1.3380)	(33.7)	(33.9)
	(11.0753)	(9.5608)	(1.4951)	(37.6)	(37.6)
	(11.0752)	(9.5609)	(1.4959)	(37.6)	(37.6)
	(11.0764)	(9.5607)	(1.4953)	(37.6)	(37.6)
	(11.0764)	(9.5610)	(1.4956)	(37.6)	(37.6)
	(11.0773)	(9.5613)	(1.4954)	(37.6)	(37.6)
	(11.2068)	(9.5717)	(1.6200)	(40.6)	(40.7)
	(11.2067)	(9.5718)	(1.6201)	(40.6)	(40.7)
	(11.2070)	(9.5719)	(1.6199)	(40.6)	(40.7)
	(11.2072)	(9.5724)	(1.6198)	(40.6)	(40.7)
	(11.2075)	(9.5723)	(1.6197)	(40.6)	(40.7)
	(11.3056)	(9.5876)	(1.7010)	(42.6)	(42.9)
	(11.3057)	(9.5878)	(1.7012)	(42.6)	(42.9)
	(11.3060)	(9.5870)	(1.7013)	(42.6)	(42.9)
	(11.3058)	(9.5880)	(1.7011)	(42.6)	(42.9)
	(11.3062)	(9.5882)	(1.7009)	(42.6)	(42.9)

Обработка результатов измерений

Средство измерения температуры: терморезистор - платиновый
термометр сопротивления

1) Нахождение сопротивления термометра R_t , Ом

Задание встроенной переменной, определяющей
номер первого элемента массива

ORIGIN \equiv 1

Сопротивление образцовой катушки, Ом

$$R_k := 10.000$$

$$R_{t_i} := \frac{U_{t_i} \cdot R_k}{U_{k_i}}$$

2) Вычисление платиновой температуры t_i

(вспомогательный параметр градуировочной зависимости
терморезистора)

Задача: решить квадратное уравнение относительно t_i

константы $\alpha := 3.9141 \cdot 10^{-3}$ $\delta := 1.49187$ $R_o := 10.0923$

параметр $W_i := \frac{R_{t_i}}{R_o}$

Решение квадратного уравнения осуществляем с помощью
стандартной встроенной функции Mathcad root(F(x),x):

Задаем начальное приближение по температуре, °C

$$t_t := 50$$

$$t_i := \text{root} \left[\frac{1}{\alpha} \cdot (W_i - 1) + \delta \cdot \frac{t_t}{100} \cdot \left(\frac{t_t}{100} - 1 \right) - t_t, t_t \right]$$

11.437
11.437
11.436
11.435
11.435
11.584
11.584
11.585
11.585
11.586
Rt = 11.708
11.708
11.708
11.708
11.708
11.708
11.792
11.792
11.793
11.792
11.792

3) Вычисление температуры T_i терморезистора по расчетному уравнению $T(R)$

$$T_i := t_i + 0.015 \cdot \left[\frac{t_i}{100} \cdot \left(\frac{t_i}{100} - 1 \right) \right] \cdot \left[\left(\frac{t_i}{419.58} - 1 \right) \cdot \left(\frac{t_i}{630.74} - 1 \right) \right]$$

4) Оценка погрешности измерений температуры ПТС.

Средние значения, T_{sr} и случайные погрешности

$j := 1 \dots 5$ m - число элементов

$$T_{sr} := \frac{\sum_j T_j}{m}$$

$$T_{s1} := T_{sr}$$

СКО индивидуального измерения

$$\Delta T := \sqrt{\frac{\sum_j (T_j - T_{sr})^2}{m - 1}} \quad \text{СКО среднего результата}$$

$$\Delta T_{sr} := \frac{\Delta T}{\sqrt{m}}$$

$T =$

$$T_{sr} = 33.6775 \quad \Delta T = 0.025 \quad \Delta T_{sr} = 0.011 \text{ } ^\circ\text{C}$$

$j := 6 \dots 10$ $m := 5$

$$T_{sr} := \frac{\sum_j T_j}{m} \quad \Delta T := \sqrt{\frac{\sum_j (T_j - T_{sr})^2}{m - 1}} \quad \Delta T_{sr} := \frac{\Delta T}{\sqrt{m}}$$

$$T_{sr} = 37.429 \quad \Delta T = 0.019 \quad \Delta T_{sr} = 0.011 \text{ } ^\circ\text{C}$$

$$T_{s2} := T_{sr}$$

$t =$	33.707053
	33.703274
	33.677228
	33.650439
	33.664035
	37.414881
	37.409188
	37.446954
	37.437786
	37.452359
	40.548513
	40.542788
	40.547612
	40.537448
	40.548447
	42.660389
	42.65681
	42.68957
	42.653232
	42.657557

33.704
33.7
33.674
33.648
33.661
37.412
37.406
37.444
37.435
37.449
40.545
40.54
40.545
40.534
40.545
42.657
42.654
42.686
42.65
42.654

$$\begin{aligned} j &:= 11..15 \\ m &:= 5 \end{aligned}$$

$$T_{sr} := \frac{\sum_j T_j}{m} \quad \Delta T := \sqrt{\frac{\sum_j (T_j - T_{sr})^2}{(m-1)}} \quad \Delta T_{sr} := \frac{\Delta T}{\sqrt{m}}$$

$$T_{sr} = 40.542 \quad \Delta T = 4.821 \times 10^{-3} \quad \Delta T_{sr} = 8.616 \times 10^{-3} \text{ } ^\circ\text{C}$$

$$Ts_3 := T_{sr}$$

$$\begin{aligned} j &:= 16..20 \\ m &:= 5 \end{aligned}$$

$$T_{sr} := \frac{\sum_j T_j}{m} \quad \Delta T := \sqrt{\frac{\sum_j (T_j - T_{sr})^2}{(m-1)}} \quad \Delta T_{sr} := \frac{\Delta T}{\sqrt{m}}$$

$$T_{sr} = 42.66 \quad \Delta T = 0.015 \quad \Delta T_{sr} = 6.614 \times 10^{-3} \text{ } ^\circ\text{C}$$

$$Ts_4 := T_{sr}$$

Средние значения температуры ПТС

$$i := 1..4 \quad Ts = \begin{pmatrix} 33.677 \\ 37.429 \\ 40.542 \\ 42.66 \end{pmatrix} \text{ } ^\circ\text{C}$$

Анализ значений ΔT_{sr} показывает, что все экспериментальные серии являются подобными. Случайная погрешность серии $\Delta T_{sr} \sim 0.05$ °C.

$$\Delta T_{sr} := 0.05 \quad \Delta T := \Delta T_{sr}$$

Оценка систематической погрешности измерения температуры ПТС
(на примере измерений в первом температурном режиме без учета корреляции U_t и U_k)

Относительная погрешность:

$$\delta T_{sis} := \delta t_{sis} \quad \delta t_{sis} \sim \delta W / (1 - 1/W) \quad \delta W := \delta R_t \quad \delta R_t := \sqrt{\delta U_t^2 + \delta R_k^2 + \delta U_k^2}$$

Относительные приборные погрешности измерения δU_t , δU_k и δR_k

$$\delta U = \pm (0.02 + 0.02 \cdot (U_{max}/U - 1)), \%$$

$$U_t := 10.8640 \text{ мВ} \quad U_k := 9.1923 \text{ мВ} \quad U_{max} := 10.000 \text{ мВ}$$

$$\delta U_t := \left[0.02 + 0.02 \cdot \left(\frac{U_{max}}{U_t} - 1 \right) \right] \quad \delta U_t = 0.018 \%$$

$$\delta U_k := \left[0.02 + 0.02 \cdot \left(\frac{U_{max}}{U_k} - 1 \right) \right] \quad \delta U_k = 0.022 \%$$

$$\delta R_k := \frac{5 \cdot 10^{-4} \cdot 100}{10.000} \quad \delta R_k = 5 \times 10^{-3} \%$$

$$\delta R_t := \sqrt{(\delta U_t^2 + \delta R_k^2 + \delta U_k^2)} \quad \delta R_t = 0.029 \%$$

Приблизительная оценка косвенной погрешности $T(R_t)$, резистор

$$t_c := \left[\frac{1}{\alpha} \cdot (W_t - 1) \right] \quad t_c := \left[\frac{1}{\alpha} \cdot (W_t - 1) + \delta \cdot \frac{t_c}{100} \cdot \left(\frac{t_c}{100} - 1 \right) \right]$$

$$\delta T_{sis} := \frac{\delta R_t}{1 - \frac{R_o}{R_{t1}}} \quad \delta T_{sis} = 0.246 \%$$

Рассчитаем систематическую погрешность оценки R_T в предположении коррелированности погрешностей измерения U_T и U_K . Принять коэффициент корреляции между ΔU_T и ΔU_K как положительный и равный 1.

$$\delta R_T = \sqrt{(\delta U_T)^2 - 2\delta U_T \delta U_K + (\delta U_K)^2 + (\delta R_K)^2},$$

В этом случае случайная погрешность косвенного результата записывается в виде

$$\delta R_t := \sqrt{(\delta U_t - \delta U_k)^2 + \delta R_k^2}$$

$$\delta R_t = 6.017 \times 10^{-3} \text{ \%}$$

Относительная систематическая

погрешность T (Rt), резистор, режим 1

$$T_1 = 33.704 \quad R_{t1} = 11.437 \quad R_o = 10.092$$

$$\delta T_{\text{sis}} := \frac{\delta R_t}{1 - \frac{R_o}{R_{t1}}} \quad \delta T_{\text{sis}} = 0.051 \text{ \%}$$

Абсолютная систематическая погрешность

$$\Delta T_{\text{sis}} := \frac{\delta T_{\text{sis}}}{100} \cdot T_1 \quad \Delta T_{\text{sis}} = 0.0172 \text{ }^\circ\text{C}$$

Полная систематическая погрешность с учетом погрешности градуировочной зависимости ΔT_{apr}

$$\Delta T_{\text{apr}} := 0.005 \text{ }^\circ\text{C}$$

$$\Delta T_{\text{SIS}} := \sqrt{\Delta T_{\text{sis}}^2 + \Delta T_{\text{apr}}^2} \quad \Delta T_{\text{SIS}} = 0.018 \text{ }^\circ\text{C}$$

Допустимая погрешность $\Delta T_{\text{птс}}$ определения температуры ПТС

$$\Delta T_{\text{птс}} := \sqrt{\Delta T_{\text{sr}}^2 + \Delta T_{\text{SIS}}^2} \quad \Delta T_{\text{птс}} = 0.053 \text{ }^\circ\text{C} \quad \Delta T_{\text{sr}} = 0.05 \text{ }^\circ\text{C}$$

Доверительный интервал для допустимой погрешности $\Delta T_{\text{птс}}$ при коэффициенте доверия $\alpha=0.95$ при 5 измерениях (коэффициент Стьюдента принят $\gamma := 2.57$)

$$\Delta(\Delta T_{\text{sr}}) := \gamma \cdot \Delta T_{\text{sr}} \quad \Delta(\Delta T_{\text{sr}}) = 0.129 \text{ }^\circ\text{C}$$

Датчик: **хромель-алюмелевая(ХА) термопара**

j := 2 .. 21

Выполнение градуировки и поиск градуировочной

зависимости T(E)

Добавляем в исходный массив точку (0,0.)

Температура ПТС	Термо-ЭДС	Ttp1 := 0.0	Etp1 := 0.0
0	0	Ttpj := Tj-1	Etpj := Ej-1
33.704	1.3382		
33.7	1.338		
33.674	1.3378		
33.648	1.3381		
33.661	1.338		
37.412	1.4951		
37.406	1.4959		
37.444	1.4953		
37.435	1.4956		
Ttp = 37.449	Etp = 1.4954		
40.545	1.62		
40.54	1.6201		
40.545	1.6199		
40.534	1.6198		
40.545	1.6197		
42.657	1.701		
42.654	1.7012		
42.686	1.7013		
42.65	1.7011		
42.654	1.7009		

Построение градуировочной зависимости $T(E)$
методом наименьших квадратов

степень полинома $n=2$: форма: $T=a_1 \cdot E + a_2 \cdot E^2$

число эксп. точек
 $n := 21$

Задача: найти (a_i) путем минимизации функционала S

$$S(a) := \sum_j \left[a_1 \cdot E_{tpj} + a_2 \cdot (E_{tpj})^2 - T_{tpj} \right]^2$$

Построим матрицу частных производных функционала S по параметрам (a_i)

$$\frac{d}{da_1} \frac{S}{2} := a_1 \cdot \left[\sum_j (E_{tpj})^2 \right] + a_2 \cdot \sum_j (E_{tpj})^3 - \sum_j (T_{tpj} \cdot E_{tpj})$$

$$\frac{d}{da_2} \frac{S}{2} := a_1 \cdot \left[\sum_j (E_{tpj})^3 \right] + a_2 \cdot \sum_j (E_{tpj})^4 - \sum_j \left[T_{tpj} \cdot (E_{tpj})^2 \right]$$

Система нормальных уравнений

A - конструкционная матрица, B - столбец (правая часть системы)

a - искомые коэффициенты

$$A \cdot a := B$$

$$A_{1,1} := \sum_j (E_{tpj})^2 \quad A_{1,2} := \sum_j (E_{tpj})^3 \quad B_1 := \sum_j (T_{tpj} \cdot E_{tpj})$$

$$A_{2,1} := A_{1,2} \quad A_{2,2} := \sum_j (E_{tpj})^4 \quad B_2 := \sum_j \left[T_{tpj} \cdot (E_{tpj})^2 \right]$$

Решение системы уравнений:

$$a := A^{-1} \cdot B$$

Искомые коэффициенты

$$a = \begin{pmatrix} 25.421 \\ -0.225 \end{pmatrix}$$

Оценка среднеквадратически отклонения СКО

СКО индивидуального измерения (не смещенное)

$$СКО := \sqrt{\frac{\sum_j \left[a_1 \cdot E_{tpj} + a_2 \cdot (E_{tpj})^2 - T_{tpj} \right]^2}{(n-1)}} \quad СКО = 0.069 \text{ } ^\circ\text{C}$$

СКО среднего результата (без учета объема выборки)

$$СКО_{\text{сред}} := \sqrt{\frac{\sum_j \left[a_1 \cdot E_{tpj} + a_2 \cdot (E_{tpj})^2 - T_{tpj} \right]^2}{n \cdot (n-1)}} \quad СКО_{\text{сред}} = 0.015 \text{ } ^\circ\text{C}$$

Расчет СКО, ΔT_{av} , для среднего результата (учет объема выборки) с включением коэффициента Стьюдента t_{pst} при доверительной вероятности $P=0.68$ и $n=21$

$$tpst := 2.09 \quad \Delta T_{av} := tpst \cdot СКО_{\text{сред}} \quad \Delta T_{av} = 0.03167 \text{ } ^\circ\text{C}$$

Построение градуировочной зависимости $T_{\text{ТП}}(E_{\text{ТП}})$ $T_{\text{ТП}}(E_{\text{ТП}}) := a_1 \cdot E_{\text{ТП}} + a_2 \cdot E_{\text{ТП}}^2$

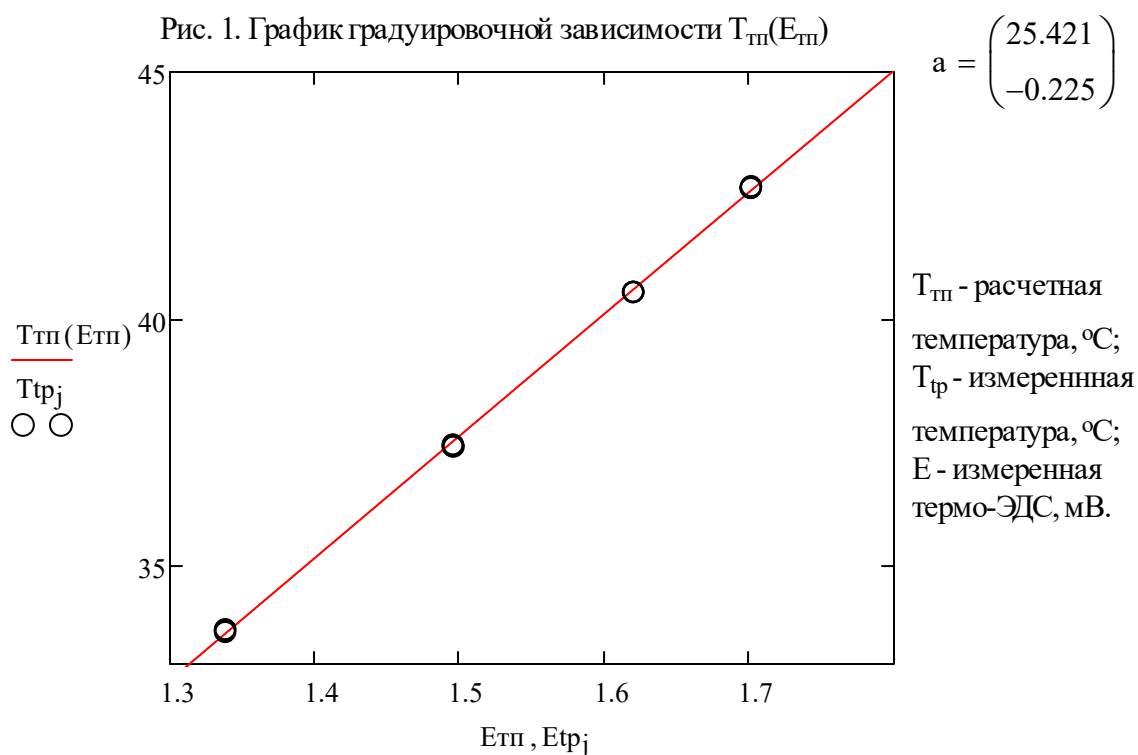
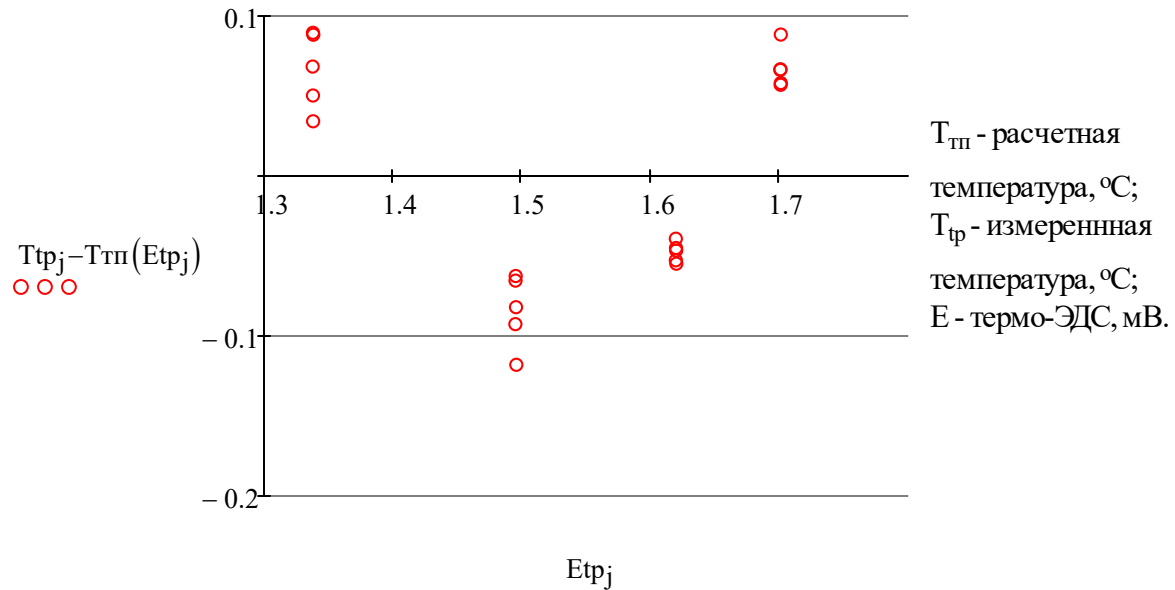


Рис. 2. График отклонений экспериментальных точек T_{tpj} от аппроксимирующей зависимости $T_{tp}(E_{tp})$, °C



Построение функции преобразования $E(T)$

$E_{\text{станд}}$ - значения Термо-ЭДС для стандартной хромель-алюмелевой термопары

$i := 0..4$

$$\begin{array}{ccc}
 E_{\text{средн}} & T_{\text{станд}} & E_{\text{станд}} \\
 x := \begin{pmatrix} 0 \\ 0.878 \\ 1.8278 \\ 2.51427 \\ 2.92963 \end{pmatrix} \text{ мВ} & T_{\text{ст}} := \begin{pmatrix} 0 \\ 21.00 \\ 45.0 \\ 62.0 \\ 72.0 \end{pmatrix} \text{ °C} & E_{\text{с}} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0.838 \\ 1.817 \\ 2.519 \\ 2.934 \end{pmatrix} \text{ мВ}
 \end{array}$$

Температура индивидуальной хромель-алюмелевой термопары

$$T_{tp}(E_s) = \begin{pmatrix} 0 \\ 21.145 \\ 45.448 \\ 62.609 \\ 72.65 \end{pmatrix} \text{ °C}$$

Поправка C , °C, есть абсолютное отклонение $T_{ст}$ (температура стандартной термопары) от $T(E)_{ст}$ (температура индивидуальной термопары)

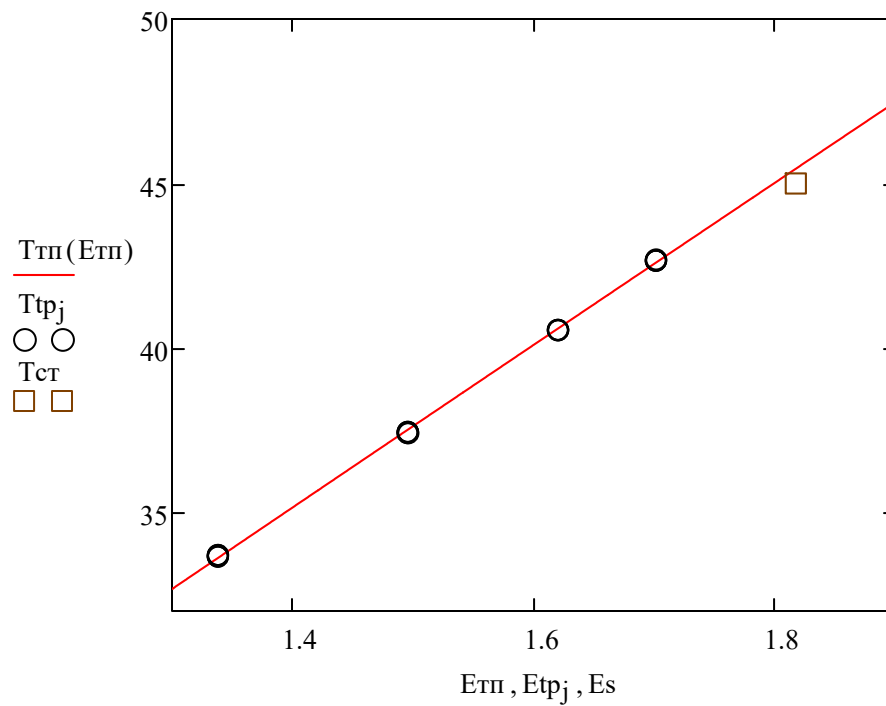
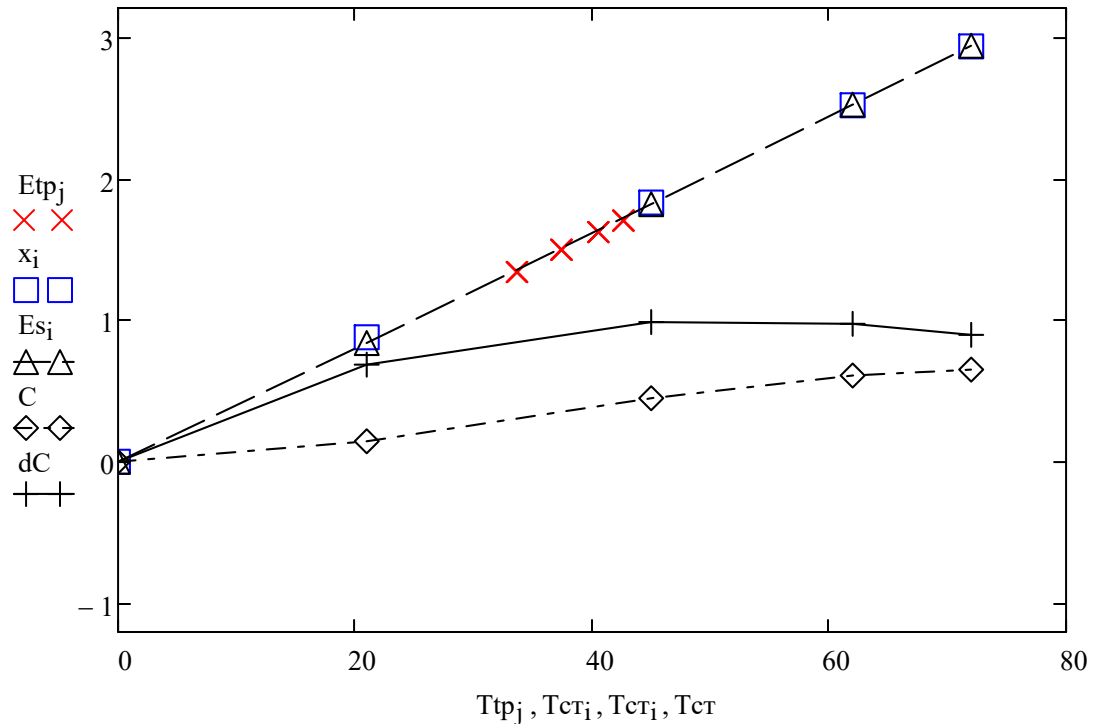
$i := 1..5$

$$C := T_{ст}(E_s) - T_{ст} \text{ } ^\circ\text{C} \quad C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.1449 \\ 0.4478 \\ 0.609 \\ 0.6499 \end{pmatrix}$$

Относительное значение поправки $dC(T)$

$$dC := \left(C \cdot \frac{100}{T_{ст}(E_s) + 0.00001} \right) \% \quad dC = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.685 \\ 0.985 \\ 0.973 \\ 0.895 \end{pmatrix} \%$$

Рис. 3. Графики функции преобразования $E(T)$; стандартной зависимости $E_s(T)$; поправки $C, ^\circ\text{C}$; относительного отклонения $dC, \%$



Оценка погрешности термодатчиков (цифровой и ртутный термометры)

$$T_s = \begin{pmatrix} 33.677 \\ 37.429 \\ 40.542 \\ 42.66 \end{pmatrix} \text{ }^{\circ}\text{C} \quad T_{\text{цифр}} := \begin{pmatrix} 35.4 \\ 40.3 \\ 45.5 \\ 50.3 \end{pmatrix} \quad T_{\text{ртут}} := \begin{pmatrix} 35.3 \\ 40.3 \\ 45.2 \\ 50.2 \end{pmatrix} \text{ }^{\circ}\text{C}$$

СКО индивидуального измерения (смещенное) $\Delta T_{\text{цифр}}$

$$\Delta T_{\text{цифр}} := \sqrt{\sum_{i=1}^4 \frac{(T_{\text{цифр}i} - T_{s_i})^2}{4}} \quad \Delta T_{\text{цифр}} = 4.85 \text{ }^{\circ}\text{C}$$

СКО индивидуального измерения (смещенное) $\Delta T_{\text{ртут}}$

$$\Delta T_{\text{ртут}} := \sqrt{\sum_{i=1}^4 \frac{(T_{\text{ртут}i} - T_{s_i})^2}{4}} \quad \Delta T_{\text{ртут}} = 4.728 \text{ }^{\circ}\text{C}$$