Пусть $Y = f(X_1, X_2)$

Параметры X_1 и X_2 оценены в результате многократных прямых измерений. В итоге получены:

$\overline{X_1}, D[X_1], D[\overline{X_1}], \Theta[X_1], \Theta[\overline{X_1}]$.

$\overline{X_2}, D[X_2], D[\overline{X_2}], \Theta[X_2], \Theta[\overline{X_2}]$.

где $\overline{X_1}, \overline{X_2}$ – средние значения $\overline{X_i} = \sum\limits_{i=1}^{N} \frac{X_i}{N}$

$D[X_1], D[X_2]$ – дисперсии ОТДЕЛЬНОГО измерения X_i

$$D[X_i] = \sum_{i=1}^{N} \frac{(X_i - \overline{X_i})}{N-1}$$

X_i, $i=1,2$ имеют нормальное распределение,

$D[X_i]$ – „шум“, „помехи“.

$D[\overline{X_1}], D[\overline{X_2}]$ – дисперсии СРЕДНИХ значений $\overline{X_i}$

$$D[\overline{X_i}] = \sum_{i=1}^{N} \frac{(X_i - \overline{X_i})}{N(N-1)}$$

$\overline{X_i}$ распределены по закону распределения Стьюдента

$$D[\overline{X_i}] \xrightarrow[N \to \infty]{} 0$$

По ГОСТу $D[\overline{X_i}] = S_{\overline{X}}^2$, СКО среднего значения $S_{\overline{X}}$

$D[\overline{X_i}]$ характеризуют СЛУЧАЙНУЮ погрешность измерения X_i.

По свойству систематической погрешности:

$$\Theta[X_1] = \Theta[\overline{X_1}] \quad , \quad \Theta[X_2] = \Theta[\overline{X_2}]$$

систематическая погрешность не зависит от числа экспериментов, системат. погрешность отдельного измерения равна системат. погрешности среднего значения.

Найдем дисперсию оценки Y:

$$\overline{Y} = f(\overline{X_1}, \overline{X_2})$$

$$D[\overline{Y}] = M[(\overline{Y} - Y^\circ)^2] = M[(Y^\circ + \left(\frac{\partial Y^\circ}{\partial X_1}\right)(\overline{X_1} - X_1^\circ) + \left(\frac{\partial Y}{\partial X_2}\right)(X_2 - X_2^\circ) - Y^\circ)^2],$$

где Y° — истинное значение, полученное как

$$Y^\circ = f(X_1^\circ, X_2^\circ)$$

$$D[\overline{Y}] = M\Big[\Big(\underbrace{\left(\frac{\partial Y^\circ}{\partial X_1}\right)(\overline{X_1} - X_1^\circ)}_{a} + \underbrace{\left(\frac{\partial Y^\circ}{\partial X_2}\right)(\overline{X_2} - X_2^\circ)}_{b}\Big)^2\Big] = M[(a+b)^2]$$

$\left(\frac{\partial Y^\circ}{\partial X_1}\right)_{X_2}$ и $\left(\frac{\partial Y^\circ}{\partial X_2}\right)_{X_1}$ — коэффициенты влияния; частные производные, взятые в точке $Y^\circ(X_1^\circ, X_2^\circ)$.

$\left(\frac{\partial Y^\circ}{\partial X_1}\right)$, $\left(\frac{\partial Y^\circ}{\partial X_2}\right)$ — числа.

$$D[\overline{Y}] = M[(a+b)^2] = M[a^2 + b^2 + 2ab];$$

$$M[a^2] = M\left[\left(\frac{\partial Y}{\partial X_1}\right)^2 (\overline{X_1} - X_1^\circ)^2\right] = \left(\frac{\partial Y^\circ}{\partial X_1}\right)^2 M[(\overline{X_1} - X_1^\circ)^2]$$

$$M[b^2] = M\left[\left(\frac{\partial Y}{\partial X_2}\right)^2 (\overline{X_2} - X_2^\circ)^2\right] = \left(\frac{\partial Y}{\partial X_2}\right)^2 M[(\overline{X_2} - X_2^\circ)^2]$$

$$M[2ab] = 2\left(\frac{\partial Y}{\partial X_1}\right)\left(\frac{\partial Y}{\partial X_2}\right) M[(\overline{X_1} - X_1^\circ)(\overline{X_2} - X_2^\circ)]$$

1) Пусть $\overline{X_1}$ и $\overline{X_2}$ содержат только случайную составляющую ($\Theta[\overline{X_1}] = \Theta[\overline{X_2}] = \varnothing$), тогда:

$M[a^2] = \left(\frac{\partial Y}{\partial X_1}\right)^2 D[\overline{X_1}]$, где $D[\overline{X_1}]$ — дисперсия случайной погрешности оценки $\overline{X_1}$

$M[b^2] = \left(\frac{\partial Y}{\partial X_2}\right)^2 D[\overline{X_2}]$, где $D[\overline{X_2}]$ — дисперсия случайной погрешности оценки $\overline{X_2}$

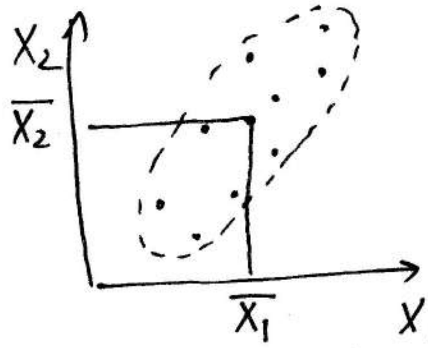
$$M[2ab] = 2\left(\frac{\partial Y^0}{\partial X_1}\right)\left(\frac{\partial Y^0}{\partial X_2}\right)\rho_\Delta(\bar{X}_1, \bar{X}_2)\sqrt{D[\bar{X}_1]D[\bar{X}_2]}$$

где $\rho_\Delta(\bar{X}_1, \bar{X}_2)$ – коэффициент корреляции между оценками $\bar{X}_1$ и $\bar{X}_2$.

$\rho_\Delta(\bar{X}_1, \bar{X}_2)$ будет отличен от $\varnothing$, если случайные изменения X_1 и X_2 связаны между собой общей причиной.

$\rho_\Delta(\bar{X}_1, \bar{X}_2)$ можно рассчитать, если есть ТАБЛИЦА значений X_1 и X_2:

X_1	$X_1^{(1)}$	$X_1^{(2)}$	...	$X_1^{(N)}$
X_2	$X_2^{(1)}$	$X_2^{(2)}$	...	X_2^{N}



$$\rho_\Delta(X_1, X_2) = \frac{\sum_{i=1}^{N}(X_{1i}-\bar{X}_1)(X_{2i}-\bar{X}_2)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{N}(X_{1i}-\bar{X}_1)^2\sum_{i=1}^{N}(X_{2i}-\bar{X}_2)^2}}$$

Пример, когда $\rho_\Delta(X_1, X_2) \approx 1$

т.к. по определению:

$$\rho_\Delta(X_1, X_2) = \frac{M[(X_1-X_1^0)_\Delta(X_2-X_2^0)_\Delta]}{\sqrt{D[X_1]D[X_2]}}$$

Можно принять, что

$$\rho_\Delta(X_1, X_2) \equiv \rho_\Delta(\bar{X}_1, \bar{X}_2)$$

ИТОГ:

$$D[\bar{Y}] = \left(\frac{\partial Y^0}{\partial X_1}\right)^2 D[\bar{X}_1] + \left(\frac{\partial Y^0}{\partial X_2}\right)^2 D[\bar{X}_2] + 2\left(\frac{\partial Y^0}{\partial X_1}\right)\left(\frac{\partial Y^0}{\partial X_2}\right)\rho_\Delta(\bar{X}_1, \bar{X}_2) * \sqrt{D[\bar{X}_1]D[\bar{X}_2]}$$

Через S:

$$S_{\bar{Y}}^2 = \left(\frac{\partial Y^0}{\partial X_1}\right)^2 S_{\bar{X}_1}^2 + \left(\frac{\partial Y^0}{\partial X_2}\right)^2 S_{\bar{X}_2}^2 + 2\left(\frac{\partial Y^0}{\partial X_1}\right)\left(\frac{\partial Y^0}{\partial X_2}\right)\rho_\Delta(\bar{X}_1, \bar{X}_2) S_{\bar{X}_1} S_{\bar{X}_2}$$

$S_{\bar{Y}}$ – СКО оценки $\bar{Y}$, случайная погрешность определения $\bar{Y}$

Лист 4

(2) Пусть $\overline{X}_1$ и $\overline{X}_2$ содержат только систематическую составляющую ($D[\overline{X}_1] = D[\overline{X}_2] = \varnothing$)

$$M[a^2] = \left(\frac{\partial Y^0}{\partial X_1}\right)^2 M[(\overline{X}_1 - X_1^0)^2] = \left(\frac{\partial Y^0}{\partial X_1}\right)^2 \frac{\Theta^2[\overline{X}_1]}{3}$$

$$M[b^2] = \left(\frac{\partial Y^0}{\partial X_2}\right)^2 M[(\overline{X}_2 - X_2^0)^2] = \left(\frac{\partial Y^0}{\partial X_2}\right)^2 \frac{\Theta^2[\overline{X}_2]}{3}$$

$$M[2ab] = 2\left(\frac{\partial Y^0}{\partial X_1}\right)\left(\frac{\partial Y^0}{\partial X_2}\right) \rho_S(\overline{X}_1, \overline{X}_2) \frac{\Theta[\overline{X}_1]\Theta[\overline{X}_2]}{3}$$, где

$\rho_S(\overline{X}_1, \overline{X}_2)$ – коэффициент корреляции в систематических отклонениях X_1 и X_2 от истинных значений.

По определению:

$$\rho_S(\overline{X}_1, \overline{X}_2) = \frac{M[(\overline{X}_1 - X_1^0)_S (\overline{X}_2 - X_2^0)_S]}{\sqrt{\frac{\Theta^2[\overline{X}_1]}{3} \cdot \frac{\Theta^2[\overline{X}_2]}{3}}}$$

$\rho_S(\overline{X}_1, \overline{X}_2)$ НЕЛЬЗЯ рассчитать, его можно только оценить, проведя анализ всех обстоятельств эксперимента.

ИТОГ:

$$D[\overline{Y}] = \frac{\Theta^2[\overline{Y}]}{3} = \left(\frac{\partial Y^0}{\partial X_1}\right)^2 \frac{\Theta^2[X_1]}{3} + \left(\frac{\partial Y^0}{\partial X_2}\right)^2 \frac{\Theta^2[X_2]}{3} + 2\left(\frac{\partial Y}{\partial X_1}\right)\left(\frac{\partial Y}{\partial X_2}\right) \rho_S(X_1, X_2) \times \frac{\Theta[X_1]\Theta[X_2]}{3}$$

$\Theta[\overline{Y}]$ – граница систематической погрешности $\overline{Y}$.

③ Пусть $\overline{X}_1$ и $\overline{X}_2$ содержат как систематическую, так и случайную составляющую погрешности:

$$\overline{X}_1 = X_1^0 \pm \overline{\Delta}_1 \pm \xi_1 \qquad \overline{\Delta}_i \text{ – случайная погрешность}$$

$$\overline{X}_2 = X_2^0 \pm \overline{\Delta}_2 \pm \xi_2 \qquad \xi_i \text{ – системат. погрешность}$$

$$M[a^2] = \left(\frac{\partial Y^0}{\partial X_1}\right)^2 M\left[(\overline{X}_1 - X_1^0)^2\right] = \left(\frac{\partial Y^0}{\partial X_1}\right)^2 M\left[(\pm\overline{\Delta}_1 \pm \xi_1)^2\right] =$$

$$= \left(\frac{\partial Y^0}{\partial X_1}\right)^2 M\left[(\pm\overline{\Delta}_1)^2\right] + \left(\frac{\partial Y^0}{\partial X_1}\right)^2 M\left[(\pm\xi_1)^2\right] + \left(\frac{\partial Y^0}{\partial X_1}\right)^2 \underbrace{M\left[2(\pm\overline{\Delta}_1)(\pm\xi_1)\right]}_{\varnothing \text{, т.к. } \overline{\Delta}_i \text{ и } \xi_i \text{ – независимые!!!}}$$

$$M[a^2] = \underbrace{\left(\frac{\partial Y^0}{\partial X_1}\right)^2 D[\overline{X}_1]}_{\text{вклад случ. погрешности}} + \underbrace{\left(\frac{\partial Y^0}{\partial X_1}\right)^2 \frac{\Theta^2[\overline{X}_1]}{3}}_{\text{вклад системат. погрешности}}$$

$$M[b^2] = \underbrace{\left(\frac{\partial Y^0}{\partial X_2}\right)^2 D[\overline{X}_2]}_{\text{вклад случайной погр.}} + \underbrace{\left(\frac{\partial Y^0}{\partial X_2}\right)^2 \frac{\Theta^2[\overline{X}_2]}{3}}_{\text{вклад системат. погрешн.}}$$

$$M[2ab] = 2\left(\frac{\partial Y^0}{\partial X_1}\right)\left(\frac{\partial Y^0}{\partial X_2}\right) M\left[(\overline{X}_1 - X_1^0)(\overline{X}_2 - X_2^0)\right] =$$

$$= 2\left(\frac{\partial Y^0}{\partial X_1}\right)\left(\frac{\partial Y^0}{\partial X_2}\right) M\left[(\pm\overline{\Delta}_1 \pm \xi_1)(\pm\overline{\Delta}_2 \pm \xi_2)\right]. \quad (*)$$

Расписывая (*) получим: | т.к. $\pm\Delta_i$ и $\pm\xi_i$ независимые

$$M[2ab] = 2\left(\frac{\partial Y^0}{\partial X_1}\right)\left(\frac{\partial Y^0}{\partial X_2}\right)\left\{M\left[(\pm\overline{\Delta}_1)(\pm\overline{\Delta}_2)\right] + M\left[(\pm\xi_1)(\pm\xi_2)\right] + \varnothing + \varnothing\right\}$$

$$M[2ab] = 2\left(\frac{\partial Y^0}{\partial X_1}\right)\left(\frac{\partial Y^0}{\partial X_2}\right)\left\{\underbrace{\rho_\Delta(\overline{X}_1, \overline{X}_2)\sqrt{D[\overline{X}_1]D[\overline{X}_2]}}_{\text{корреляция в случайной составляющей}} + \underbrace{\rho_\xi(X_1, X_2)\frac{\Theta[X_1]\Theta[X_2]}{3}}_{\text{корреляция в систематич. составляющей}}\right\}$$

Итог (общий случай):

$$D[\bar{Y}] = \left(\frac{\partial Y^\circ}{\partial X_1}\right)^2 D[\bar{X}_1] + \left(\frac{\partial Y^\circ}{\partial X_1}\right)^2 \frac{\Theta^2[X_1]}{3} + \left(\frac{\partial Y^\circ}{\partial X_2}\right)^2 D[\bar{X}_2] + \left(\frac{\partial Y^\circ}{\partial X_2}\right)^2 \frac{\Theta^2[\bar{X}_2]}{3}$$

$$+ 2\left(\frac{\partial Y^\circ}{\partial X_1}\right)\left(\frac{\partial Y^\circ}{\partial X_2}\right)\rho_\Delta(X_1, X_2)\sqrt{D[\bar{X}_1]D[\bar{X}_2]} +$$

$$+ 2\left(\frac{\partial Y^\circ}{\partial X_1}\right)\left(\frac{\partial Y^\circ}{\partial X_2}\right)\rho_S(X_1, X_2)\frac{\Theta[X_1]\,\Theta[X_2]}{3}$$

$$D[\bar{Y}] = S_{\bar{Y}}^2 + \frac{\Theta^2[\bar{Y}]}{3}$$

$S_{\bar{Y}}$ – СКО случайной погрешности оценки $\bar{Y}$

$\Theta[\bar{Y}]$ – граница системат. погрешности $\bar{Y}$