Задача 4

Дано: $r_1 = 0,30$ м $\mu = 0,3$

$r_2 = 1,1$ м

$\sigma_{доп} = 240 \cdot 10^6$ Па

$h = 0,10$ м

$E = 200 \cdot 10^9$ Па
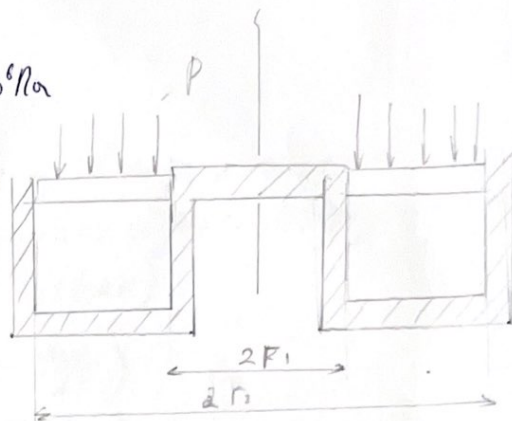
Решение:

1) Для кольцевой пластины решение будем искать в виде: $W(r) = C_1 + C_2 r^2 + C_3 \ln r + C_4 r^2 \ln r = \dfrac{P r^4}{64 D}$

Вычислим цилиндрическую жёсткость: т.к. присутствует постоянная внешняя нагрузка

$D = \dfrac{E h^3}{12(1 - \mu^2)} = 18315018,3115018322$

Первая производная от прогиба:

$W'(r) = \dfrac{dw}{dr} = 2 r C_2 + r C_4 + \dfrac{C_3}{r} - \dfrac{D}{16} P r^3 + 2 r \ln r C_4$

Вторая производная от прогиба:

$W''(r) = \dfrac{d^2 w}{dr^2} = 2 \ln r C_4 - \dfrac{C_3}{r^2} + 2 C_2 + 3 C_4 - \dfrac{3D}{16} P r^2$

Граничные условия (т.к. на внутреннем r_1 и внешнем r_2 – жёсткая заделка => прогиб и угол поворота равны нулю):

система ур-й

$W(r_1) = 0$ $\begin{cases} C_1 + C_2 r_1^2 + C_3 \ln r_1 + C_4 r_1^2 \ln r_1 - \dfrac{P r_1^4}{64 D} \quad (1) \\ 2 C_2 r_1 + C_4 r_1 + \dfrac{C_3}{r_1} - \gamma_1 P r_1^3 + 2 r_1 \ln r_1 C_4 \quad (2) \\ C_1 + C_2 r_2^2 + C_3 \ln r_2 + C_4 r_2^2 \ln r_1 - \dfrac{P r_2^4}{64 D} \quad (3) \\ 2 C_2 r_2 + C_4 r_2 + \dfrac{C_3}{r_2} - \gamma_1 P r_2^3 + 2 r_2 \ln r_2 C_4 \quad (4) \end{cases}$

$\varphi = \dfrac{dw}{dr_1}(r_1) = 0$

$W(r_2) = 0$

$\varphi \dfrac{dw}{dr_2}(r_2) = 0$

Ур-я 1-4 образуют систему относительно констант C_1, C_2, C_3, C_4 (найдены с помощью пакета Python)