Выполнение расчетного задания по дисциплине Тепломассообмен в среде Mathematica 14

Студент: Жаркова А.Э.

Группа: ТФ-13-22

Задача № 3

**Задача 3.**

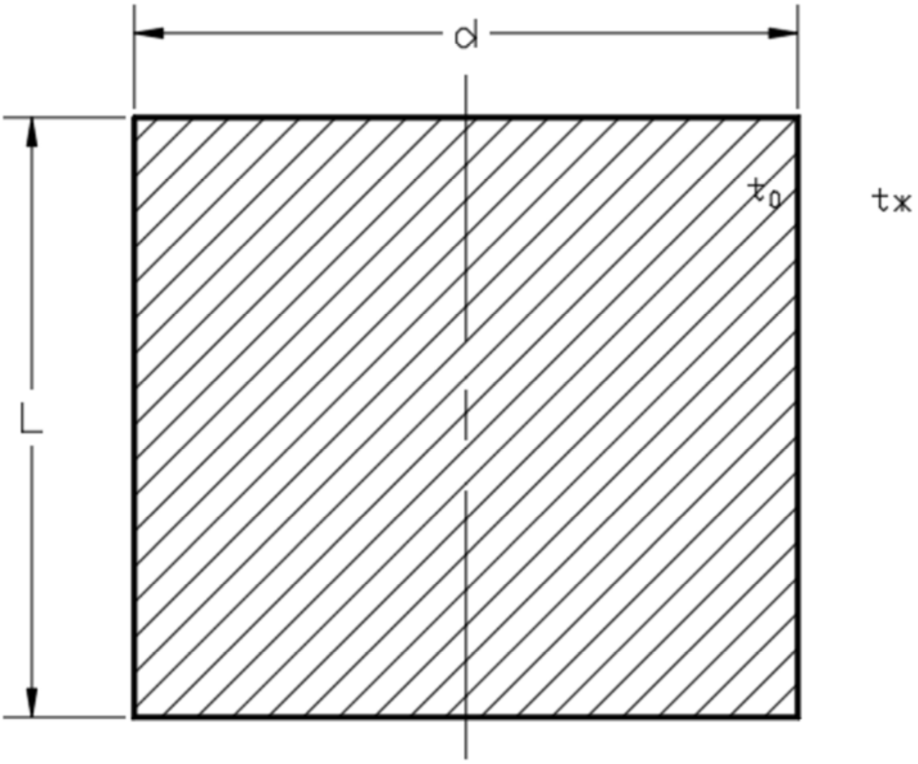
Цилиндрическую заготовку диаметром d=120 мм и длиной $L$=14 см, с начальной температурой $t_0$=600°С поместили в охладительный бассейн с температурой жидкости $t_ж$=20°С, в котором она начала охлаждаться при постоянном коэффициенте теплоотдачи α=130 Вт/(м$^2$ К). Свойства материала заготовки: марка - Бронза, плотность - 8,666 г/см$^3$, удельная теплоёмкость - 343 Дж/(кг К), теплопроводность - 26 Вт/(м К).

Рассчитать температурное поле в цилиндре как функцию радиуса $r$ (мм) и линейной координаты $x$ (мм) в момент времени $\tau_1$=1,8 мин от начала охлаждения, результаты вычислений свести в таблицы, построить графики $t(x, 0, \tau_1)$, $t(x, r_0, \tau_1)$, $t(0, r, \tau_1)$, $t(L/2, r, \tau_1)$.

**Рассчитать температуру в центре цилиндра и на глубине 0,2d от поверхности как функцию времени; для стадии регулярного режима охлаждения вычислить, имитируя эксперимент, темп охлаждения цилиндра и температуропроводность материала заготовки.**

**Вычислить количество теплоты, отданной цилиндром за время охлаждения от его начала, до момента τ₁.**

Рисунок: цилиндр диаметром d=120mm и высотой L=14 cm




Введем исходные данные:

```
In[1]:= d0 = UnitConvert[Quantity[120, "Millimeters"], "Meters"];
          преобразоват·· размерная величина

        r0 = d0 / 2;
        L = UnitConvert[Quantity[14, "Centimeters"], "Meters"];
          преобразоват·· размерная величина
        t0 = Quantity[600, "DegreesCelsius"];
          размерная величина
        tLiquid = Quantity[20, "DegreesCelsius"];
          размерная величина
        α = Quantity[130, "Watts" / ("Meters"^2 * "Kelvins")];
          размерная величина
        ρ = Quantity[8666, "Kilograms" / "Meters"^3];
          размерная величина
        cp = Quantity[343, "Joules" / ("Kilograms" * "Kelvins")];
          размерная величина
        λ = Quantity[26, "Watts" / ("Meters" * "Kelvins")];
          размерная величина
        τ1 = UnitConvert[Quantity[1.8, "Minutes"], "Seconds"];
          преобразоват·· размерная величина
```

## Найдем коэффициент температуропроводности a:

```
In[7]:= a = UnitConvert[N[λ / (cp * ρ)], "Meters"^2 / "Seconds"]
          преобразоват·· численное приближение

Out[7]= 8.7470285 × 10^-6 m^2/s
```

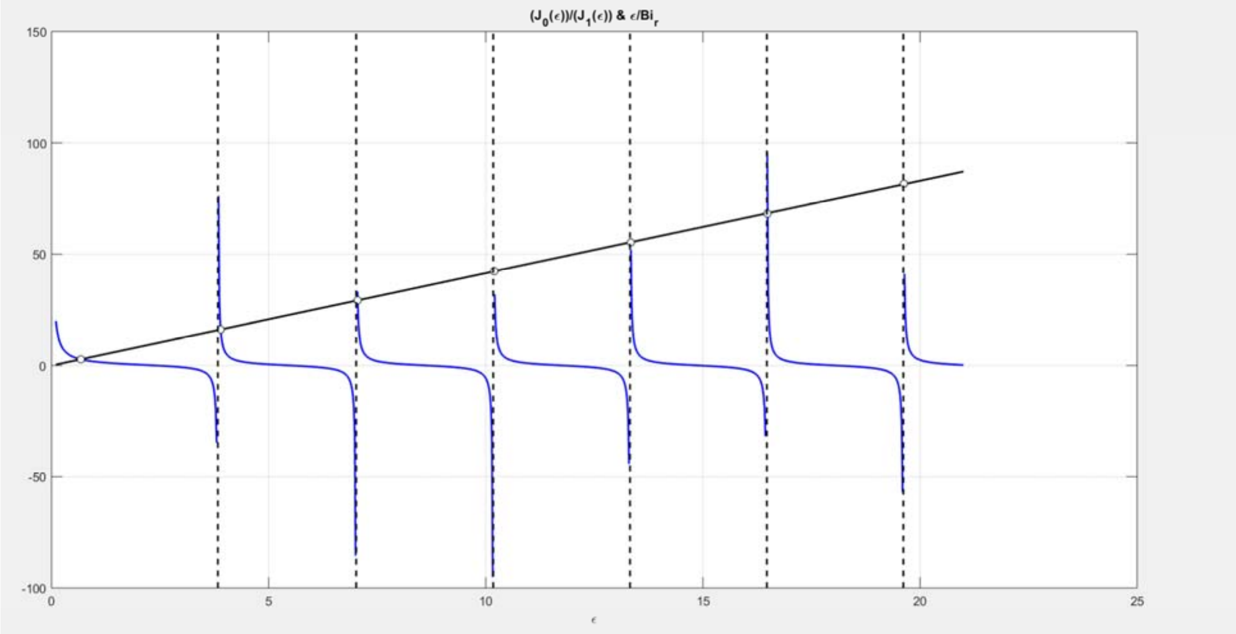
## Числа Био по радиальному( BiRadial) и вертикальному( BiVertical) направлениям:

```
In[8]:= BiRadial = N[α * r0 / λ]
          численное п

Out[8]= 0.3

In[9]:= BiVertical = N[(α * L/2) / λ]
          численное при

Out[9]= 0.35
```

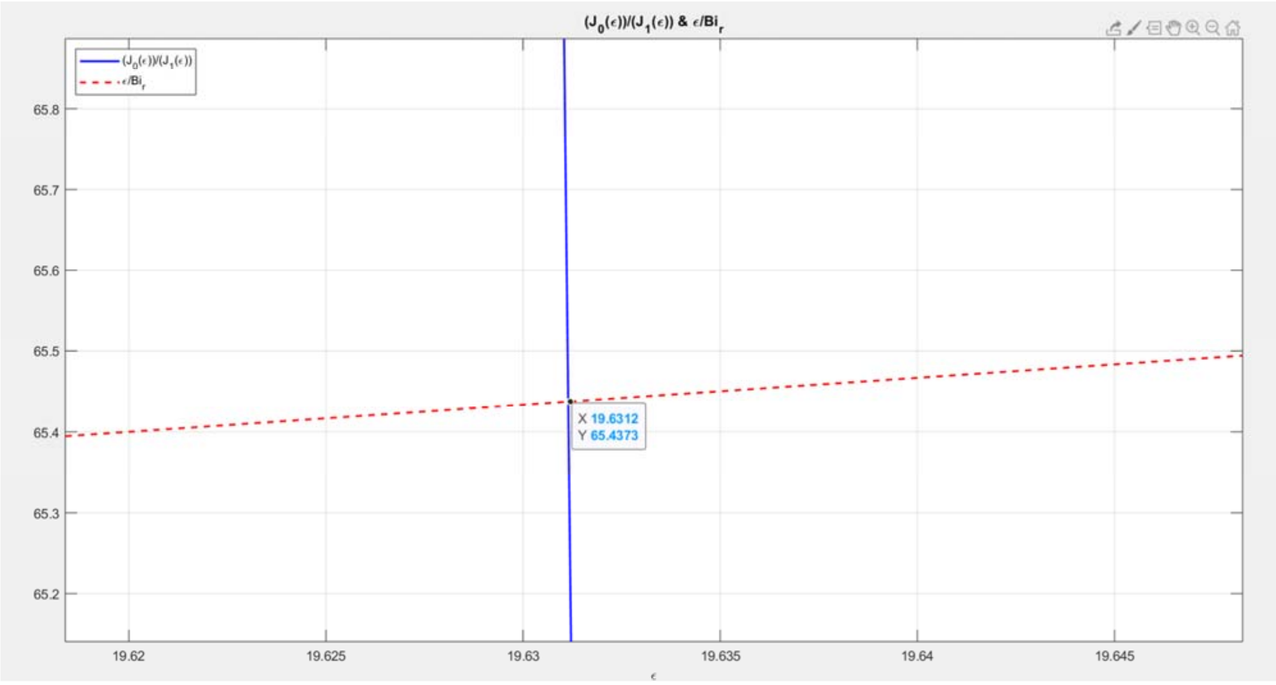
## Числа Фурье по радиальному( FoRadial) и вертикальному( FoVertical) направлениям:

```
In[10]:= FoRadial = a * τ1 / (r0)^2

Out[10]=
0.26241086

In[11]:= FoVertical = a * τ1 / (L/2)^2

Out[11]=
0.19279165
```

## Приступим к поиску корней характеристического уравнения(MATLAB) в радиальном направлении:

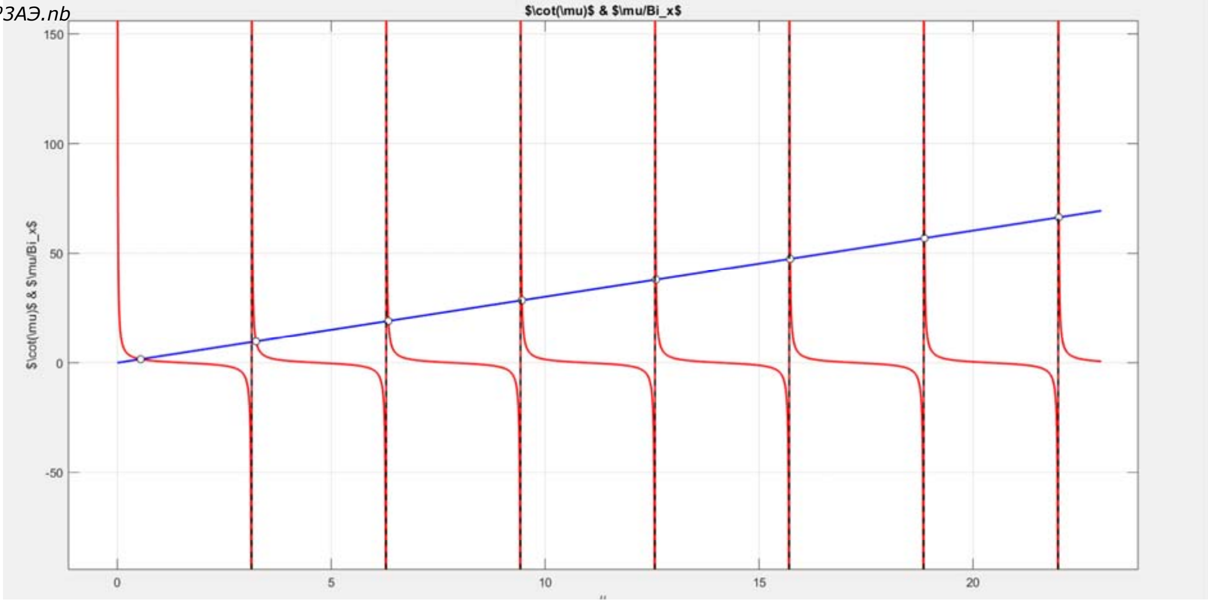



Отдельно рассмотрим седьмой корень(определим его визуально с точностью е-4)

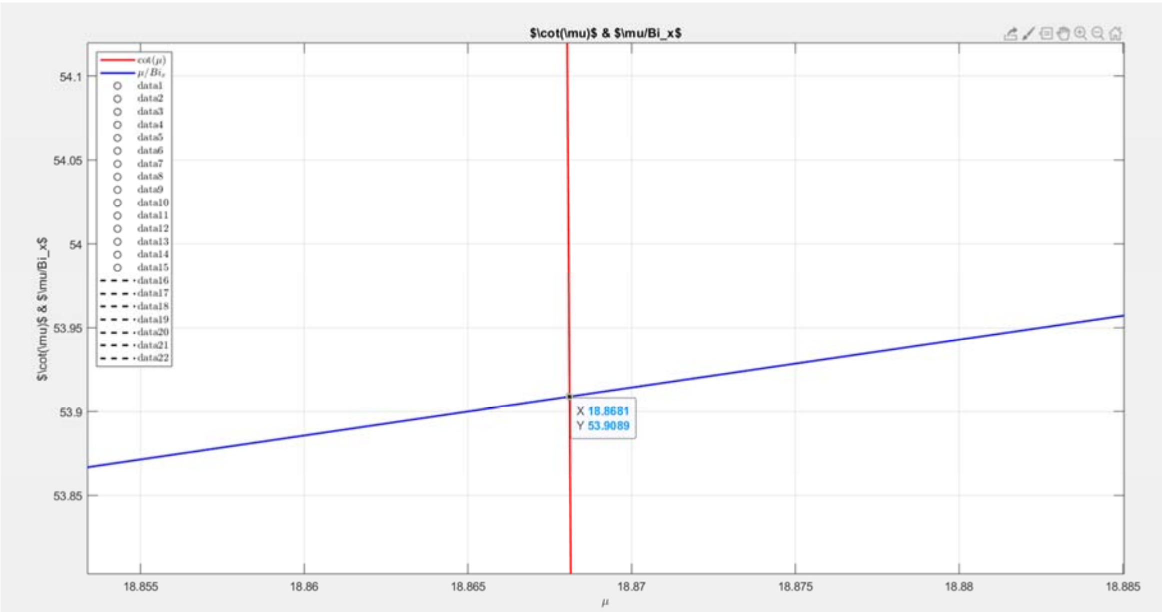



In[12]:= 
```
ϵ = {0.7465 ,  3.9091 ,  7.0582 , 10.2029  , 13.3462,  16.4888 , 19.6311};
```

В вертикальном
направлении:




## 7 корень:




```
In[13]:= μ = {0.5592  , 3.2489 ,  6.3383  , 9.4618  , 12.5942 ,  15.7302  , 18.8681  };
```

## Найдем функцию распределения температуры в радиальном направлении:

```
In[14]:= ΘRadial[r_, τ_] := Total[ 2 * BesselJ[1, ϵ] / (ϵ * (BesselJ[0, ϵ] + BesselJ[1, ϵ]^2)) *
           BesselJ[0, ϵ * r / QuantityMagnitude[r0]] * Exp[-ϵ^2 * QuantityMagnitude[a] * τ / QuantityMagnitude[r0]^2]];
         суммировать, функция Бесселя J, показате…, модуль размерной величины

In[15]:= ΘRadial[0, 0]

Out[15]=
         1.0090374

In[16]:= tRadial[r_, τ_] = tLiquid + (t0 - tLiquid) * ΘRadial[r, τ];
```

## Найдем температуру на оси цилиндра в момент времени $\tau = 0$

```
In[17]:= tRadial[0, 0]

Out[17]=
          878.39168 K

In[18]:= UnitConvert[tRadial[0, 0], "DegreesCelsius"]
         преобразовать единицы измерений

Out[18]=
          605.24168 °C
```

## Найдем функцию распределения температуры в вертикальном направлении:

In[19]:=
```
ΘVertical[x_, τ_] :=
  Total[(2 * Sin[μ])/(μ + Sin[μ] * Cos[μ]) * Cos[μ * x/QuantityMagnitude[L / 2]] * Exp[-μ^2 * (QuantityMagnitude[a] * τ)/QuantityMagnitude[(L/2)^2]]]
```
суммировать | косинус | показательная функция

In[20]:=
```
ΘVertical[0, 0]
```
Out[20]=
```
1.000806
```

In[21]:=
```
tVertical[x_, τ_] := tLiquid + (t0 - tLiquid) * ΘVertical[x, τ];
```

## Найдем температуру в центре цилиндра в момент времени $\tau = 0$

In[22]:=
```
tVertical[0, 0]
```
Out[22]=
```
873.61746 K
```

In[23]:=
```
UnitConvert[tVertical[0, 0], "DegreesCelsius"]
```
преобразовать единицы измерений

Out[23]=
```
600.46746 °C
```

## Найдем функцию распределения температурного поля в цилиндре t(x,r,τ)

In[24]:=
```
Θ3D[x_, r_, τ_] := ΘVertical[x, τ] * ΘRadial[r, τ];
```

In[25]:=
```
t[x_, r_, τ_] := tLiquid + (t0 - tLiquid) * Θ3D[x, r, τ];
```

## Начнем расчет температурного поля
## Сначала для r=0:

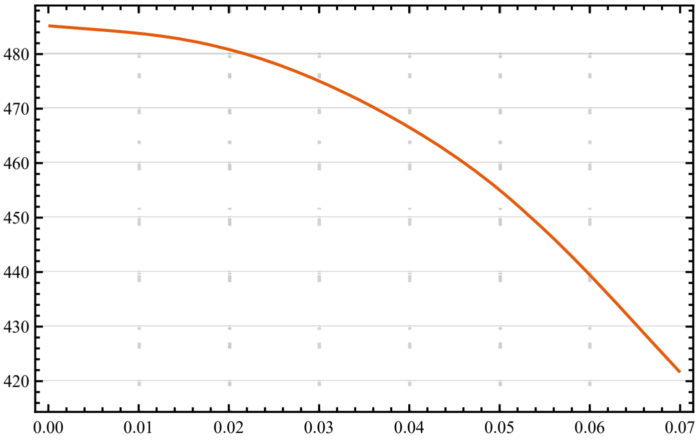
In[26]:=
```
Table[{N[x], UnitConvert[t[QuantityMagnitude[x], QuantityMagnitude[0], QuantityMagnitude[τ1]],
    "DegreesCelsius"]}, {x, {L / 2, 3 * L / 8, L / 4, L / 8, 0}}] // MatrixForm
```
таблиц··· | числ··· | преобразовать ··· | модуль размерной величины | модуль размерной величины | модуль размерной величины | матричная форма

Out[26]//MatrixForm=

| | |
|---|---|
| 0.07 m | 421.61236 °C |
| 0.0525 m | 451.49023 °C |
| 0.035 m | 471.12781 °C |
| 0.0175 m | 481.84179 °C |
| 0. | 485.18859 °C |

In[27]:=
```
ListLinePlot[
линейный график данных
 Table[{N[x], UnitConvert[t[QuantityMagnitude[x], QuantityMagnitude[0], QuantityMagnitude[τ1]],
 таблиц··· числ··· преобразовать ··· модуль размерной величины модуль размерной величины модуль размерной величины
    "DegreesCelsius"]}, {x, {L / 2, 3 * L / 8, L / 4, L / 8, 0}}],
 InterpolationOrder → 2, PlotTheme → "Scientific", GridLines → Automatic]
 порядок интерполяции      тематический стиль графика      линии коорд··· автоматический
```

Out[27]=




In[28]:=

## Теперь для r=r0

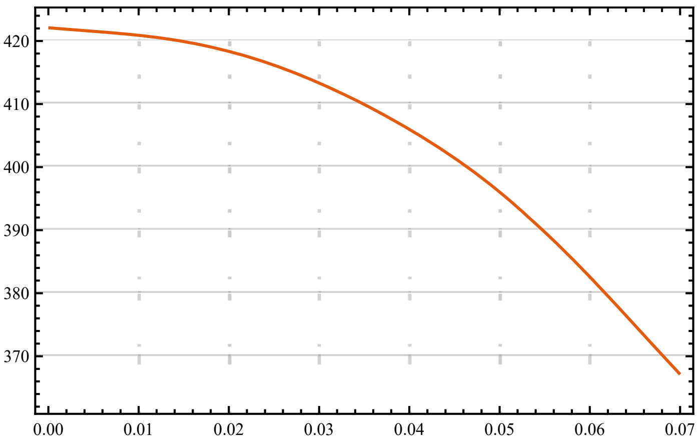
In[29]:=
```
Table[{N[x], UnitConvert[t[QuantityMagnitude[x], QuantityMagnitude[r0], QuantityMagnitude[τ1]],
таблиц··· числ··· преобразовать ··· модуль размерной величины модуль размерной величины модуль размерной величины
    "DegreesCelsius"]}, {x, {L / 2, 3 * L / 8, L / 4, L / 8, 0}}] // MatrixForm
                                                                   матричная форма
```

Out[29]//MatrixForm=

| | |
|---|---|
| 0.07 m | 367.13552 °C |
| 0.0525 m | 392.96059 °C |
| 0.035 m | 409.93442 °C |
| 0.0175 m | 419.1951 °C |
| 0. | 422.08792 °C |

In[30]:=
```
ListLinePlot[
линейный график данных
 Table[{N[x], UnitConvert[t[QuantityMagnitude[x], QuantityMagnitude[r0], QuantityMagnitude[τ1]],
 таблиц··· числ··· преобразовать ··· модуль размерной величины модуль размерной величины модуль размерной величины
    "DegreesCelsius"]}, {x, {L / 2, 3 * L / 8, L / 4, L / 8, 0}}],
 InterpolationOrder → 2, PlotTheme → "Scientific", GridLines → Automatic]
 порядок интерполяции      тематический стиль графика      линии коорд··· автоматический
```

Out[30]=



## Теперь для x=0

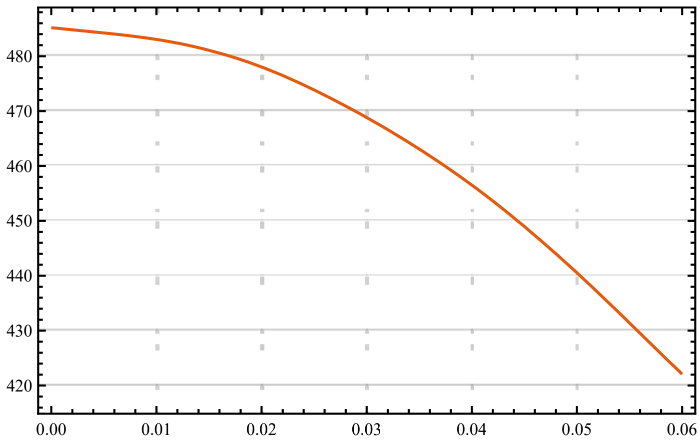
In[31]:=
```
Table[{N[r], UnitConvert[t[QuantityMagnitude[0], QuantityMagnitude[r], QuantityMagnitude[τ1]],
таблиц··· числ··· преобразовать ··· модуль размерной величины модуль размерной величины модуль размерной величины
    "DegreesCelsius"]}, {r, Reverse[{0, r0/4, r0/2, 3*r0/4, r0}]}] // MatrixForm
                             расположить в обратном порядке                 матричная форма
```

Out[31]//MatrixForm=

| | |
|---|---|
| 0.06 m | 422.08792 °C |
| 0.045 m | 448.9707 °C |
| 0.03 m | 468.83623 °C |
| 0.015 m | 481.05898 °C |
| 0. | 485.18859 °C |

In[32]:=
```
ListLinePlot[Table[{N[r],
линейный гра··· таблиц··· численное приближение
   UnitConvert[t[QuantityMagnitude[0], QuantityMagnitude[r], QuantityMagnitude[τ1]], "DegreesCelsius"]},
   преобразовать ··· модуль размерной величины модуль размерной величины модуль размерной величины
   {r, Reverse[{0, r0/4, r0/2, 3*r0/4, r0}]}], InterpolationOrder → 2,
       расположить в обратном порядке          порядок интерполяции
  PlotTheme → "Scientific", GridLines → Automatic]
  тематический стиль графика  линии коорд···  автоматический
```

Out[32]=




## Теперь для x=L/2

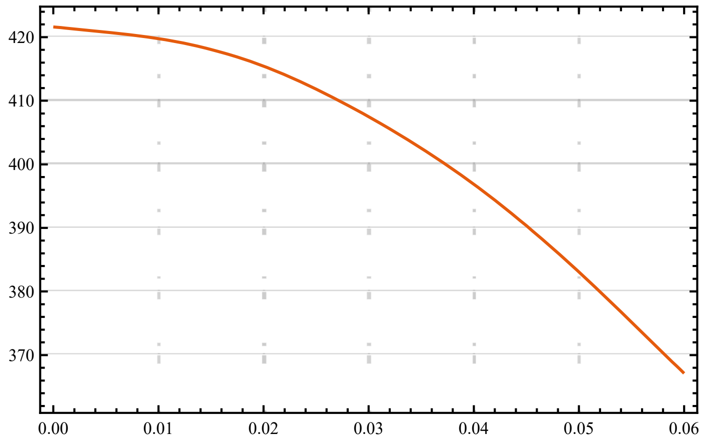
In[33]:=
```
Table[{N[r], UnitConvert[t[QuantityMagnitude[L/2], QuantityMagnitude[r], QuantityMagnitude[τ1]],
таблиц··· числ··· преобразовать ··· модуль размерной величины модуль размерной величины модуль размерной величины
    "DegreesCelsius"]}, {r, Reverse[{0, r0/4, r0/2, 3*r0/4, r0}]}] // MatrixForm
                             расположить в обратном порядке                 матричная форма
```

Out[33]//MatrixForm=

| | |
|---|---|
| 0.06 m | 367.13552 °C |
| 0.045 m | 390.34429 °C |
| 0.03 m | 407.49485 °C |
| 0.015 m | 418.04713 °C |
| 0. | 421.61236 °C |

In[34]:=
```
ListLinePlot[Table[{N[r],
линейный гра… таблиц… численное приближение
    UnitConvert[t[QuantityMagnitude[L/2], QuantityMagnitude[r], QuantityMagnitude[τ1]], "DegreesCelsius"]},
    преобразовать … модуль размерной величины модуль размерной величины модуль размерной величины
   {r, Reverse[{0, r0/4, r0/2, 3 * r0 / 4, r0}]}], InterpolationOrder → 2,
       расположить в обратном порядке                 порядок интерполяции
  PlotTheme → "Scientific", GridLines → Automatic]
  тематический стиль графика   линии коорд… автоматический
```

Out[34]=




Покажем распределение температуры в центре цилиндра и на расстоянии *0.2* $d_0$ от поверхности как функцию времени

Сначала для центра*:*

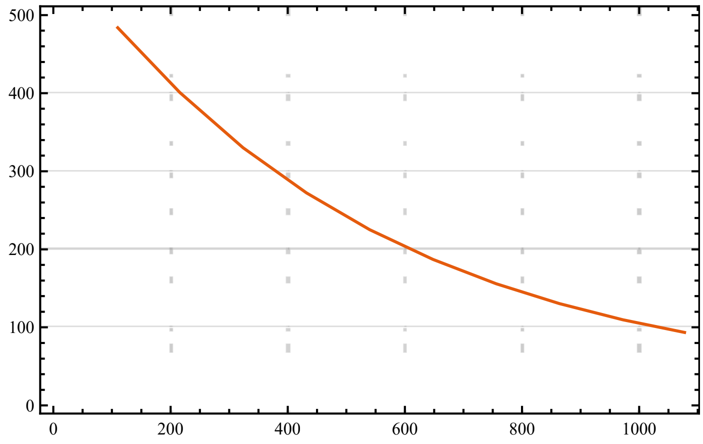
In[35]:=
```
Table[{N[k * τ1], UnitConvert[t[QuantityMagnitude[0], QuantityMagnitude[0], QuantityMagnitude[k * τ1]],
таблиц… численное… преобразовать … модуль размерной величины модуль размерной величины модуль размерной величины
    "DegreesCelsius"]}, {k, Range[10]}] // MatrixForm
                             диапазон     матричная форма
```

Out[35]//MatrixForm=

| | |
|---|---|
| 108. s | 485.18859 °C |
| 216. s | 400.82955 °C |
| 324. s | 330.07781 °C |
| 432. s | 272.25594 °C |
| 540. s | 225.19179 °C |
| 648. s | 186.90575 °C |
| 756. s | 155.76306 °C |
| 864. s | 130.4312 °C |
| 972. s | 109.82598 °C |
| 1080. s | 93.065455 °C |

In[36]:=
```
ListLinePlot[
 Table[{N[k * τ1], UnitConvert[t[QuantityMagnitude[0], QuantityMagnitude[0], QuantityMagnitude[k * τ1]],
    "DegreesCelsius"]}, {k, Range[10]}], PlotTheme → "Scientific", GridLines → Automatic]
```
линейный график данных; таблиц···; численное··; преобразовать ···; модуль размерной величины; модуль размерной величины; модуль размерной величины; диапазон; тематический стиль графика; линии коорд···; автоматический

Out[36]=




## Теперь на расстоянии 0.2 $d_0$ (0.4 $r_0$)от поверхности , следовательно $r = 0.6\,r_0$)

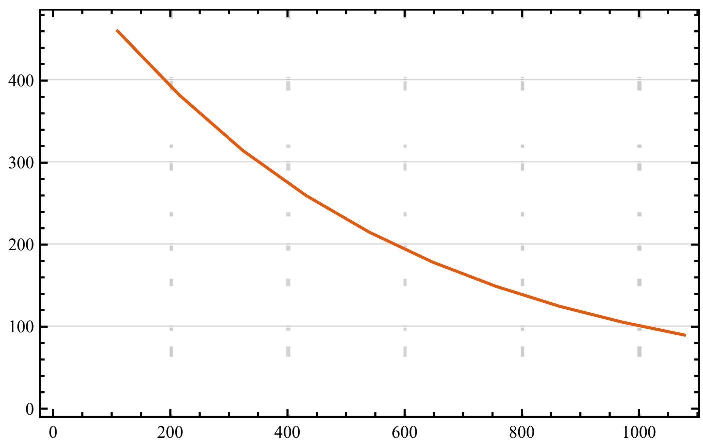
In[37]:=
```
Table[
 {N[k * τ1], UnitConvert[t[QuantityMagnitude[0], QuantityMagnitude[0.6 * r0], QuantityMagnitude[k * τ1]],
   "DegreesCelsius"]}, {k, Range[10]}] // MatrixForm
```
таблица значений; численное··; преобразовать ···; модуль размерной величины; модуль размерной величины; модуль размерной величины; диапазон; матричная форма

Out[37]//MatrixForm=

| | |
|---|---|
| 108. s | 461.77479 °C |
| 216. s | 381.9613 °C |
| 324. s | 314.72009 °C |
| 432. s | 259.76214 °C |
| 540. s | 215.029 °C |
| 648. s | 178.6392 °C |
| 756. s | 149.03895 °C |
| 864. s | 124.96173 °C |
| 972. s | 105.37705 °C |
| 1080. s | 89.446651 °C |

In[38]:=
```
ListLinePlot[Table[
  {N[k * τ1], UnitConvert[t[QuantityMagnitude[0], QuantityMagnitude[0.6 * r0], QuantityMagnitude[k * τ1]],
    "DegreesCelsius"]}, {k, Range[10]}], PlotTheme → "Scientific", GridLines → Automatic]
```
линейный гра···; таблица значений; численное··; преобразовать ···; модуль размерной величины; модуль размерной величины; модуль размерной величины; диапазон; тематический стиль графика; линии коорд···; автоматический

Out[38]=




## Для определения темпа охлаждения и коэффициента температуропроводности заготовки

построит несколько зависимостей *ln(θ)* используя данные полученные выше( в центре и на *0.6r₀*).

*θ = t-tLiquid*

In[39]:=
```
lnForCenter =
 Table[{N[k * τ1], Log[QuantityMagnitude[UnitConvert[t[QuantityMagnitude[0], QuantityMagnitude[0],
 |таблиц⋯ |численное⋯ |на⋯ |модуль размерной ве⋯ |преобразовать ⋯ |модуль размерной величины |модуль размерной величины
        QuantityMagnitude[k * τ1]], "DegreesCelsius"] - tLiquid]]}, {k, Range[10]}]
        |модуль размерной величины                                  |диапазон
```

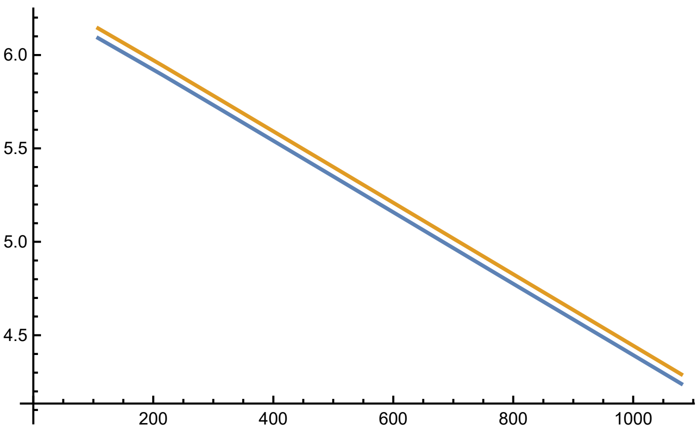
Out[39]=
```
{{108. s, 6.1424429}, {216. s, 5.9423519}, {324. s, 5.7368233}, {432. s, 5.5304442}, {540. s, 5.3239451},
 {648. s, 5.1174293}, {756. s, 4.9109111}, {864. s, 4.7043927}, {972. s, 4.4978742}, {1080. s, 4.2913557}}
```

In[40]:=
```
lnForPoint6r0 =
 Table[{N[k * τ1], Log[QuantityMagnitude[UnitConvert[t[QuantityMagnitude[0], QuantityMagnitude[0.6 * r0],
 |таблиц⋯ |численное⋯ |на⋯ |модуль размерной ве⋯ |преобразовать ⋯ |модуль размерной величины |модуль размерной величины
        QuantityMagnitude[k * τ1]], "DegreesCelsius"] - tLiquid]]}, {k, Range[10]}]
        |модуль размерной величины                                  |диапазон
```

Out[40]=
```
{{108. s, 6.0908002}, {216. s, 5.8915373}, {324. s, 5.6860261}, {432. s, 5.4796474}, {540. s, 5.2731483},
 {648. s, 5.0666324}, {756. s, 4.8601143}, {864. s, 4.6535959}, {972. s, 4.4470774}, {1080. s, 4.2405588}}
```

In[41]:=
```
ListLinePlot[{lnForPoint6r0, lnForCenter}]
|линейный график данных
```

Out[41]=




Нетрудно заметить,что стадии регулярного режима гарантированно соответствует интервал [400,800] s.

Найдем число Фурье в краевых точках интервала регулярного режима и удостоверимся что оно больше 0.3

In[62]:= $\texttt{FoRadialAt400} = \dfrac{\texttt{a * Quantity[400, "Seconds"]}}{\texttt{r0}^2}$

Out[62]= 0.97189206

In[63]:= $\texttt{FoRadialAt800} = \dfrac{\texttt{a * Quantity[800, "Seconds"]}}{\texttt{r0}^2}$

Out[63]= 1.9437841

In[64]:= $\texttt{FoVerticalAt400} = \dfrac{\texttt{a * Quantity[400, "Seconds"]}}{\left(\frac{L}{2}\right)^2}$

Out[64]= 0.71404315

In[65]:= $\texttt{FoVerticalAt800} = \dfrac{\texttt{a * Quantity[800, "Seconds"]}}{\left(\frac{L}{2}\right)^2}$

Out[65]= 1.4280863

## Приступим к поиску темпа охлаждения m для наших двух точек

In[66]:= $mAtCenter = \dfrac{Log\left[\frac{\Theta 3D[0,0,400]}{\Theta 3D[0,0,800]}\right]}{Quantity[800 - 400, "Seconds"]}$

Out[66]=

0.0019121074 per second

In[67]:= $mAtPoint6r0 = \dfrac{Log\left[\frac{\Theta 3D[0,QuantityMagnitude[0.6*r0],400]}{\Theta 3D[0,QuantityMagnitude[0.6*r0],800]}\right]}{Quantity[800 - 400, "Seconds"]}$

Out[67]=

0.0019121073 per second

## Берем среднее

In[68]:= $m = \dfrac{mAtCenter + mAtPoint6r0}{2}$

Out[68]=

0.0019121074 per second

## Fo > 0.3 поэтому ряд Фурье сходится быстро и первый член достаточно описывает все решение.
## Найдем коэффициент формы K:

In[69]:= $K = \dfrac{1}{\left(\frac{First[\epsilon]}{r0}\right)^2 + \left(\frac{First[\mu]}{\frac{L}{2}}\right)^2}$

Out[69]=

0.0045743071 $m^2$

## Найдем коэффициент температуропроводности по второй теореме Кондратьева(допущение что наше $m = m_\infty$) и сравним с теоретическим:

In[50]:= aExperimental = K * m

Out[50]=

$4.5192685 \times 10^{-6}$ $m^2/s$

In[51]:= a

Out[51]=

$8.7470285 \times 10^{-6}$ $m^2/s$

In[52]:= $\delta a = \dfrac{Abs[a - aExperimental]}{a}$

Out[52]=

0.48333671

## Найдем количество теплоты, отданное цилиндром за время $\tau_1$:
## Для начала найдем сколько теплоты он отдаст до того момента как Θ==0 т.е. t=tLiquid

In[53]:= $Q = N[\pi * (r0)^2 * L * \rho * cp * (t0 - tLiquid)]$

численное приближение

Out[53]=

$2.7297395 \times 10^{6}$ J

In[54]:=
```
ΘRadialAverage = Total[(4 * BiRadial^2)/(ϵ^2 * (ϵ^2 + BiRadial^2)) * Exp[-ϵ^2 * FoRadial]]
```
суммировать · показательная функция

Out[54]= 0.86232106

In[55]:=
```
ΘVerticalAverage = Total[(2 * Sin[μ]^2)/(μ^2 + μ * Sin[μ] * Cos[μ]) * Exp[-μ^2 * FoVertical]]
```
суммировать · показательная функция

Out[55]= 0.93960085

In[56]:=
```
ΘAverage = ΘVerticalAverage * ΘRadialAverage
```

Out[56]= 0.8102376

In[57]:=
```
Qτ1 = Q (1 - ΘAverage)
```

Out[57]= 518 001.93 J

## Подытожим полным температурным полем в момент времени $\tau_1$

In[58]:=
```
data = Flatten[Table[{x, r, t[QuantityMagnitude[x], QuantityMagnitude[r], QuantityMagnitude[τ1]]},
    {x, 0, L / 2, L / 4}, {r, 0, r0, r0 / 4}], 1];

ListPlot3D[data, Boxed → True, Mesh → None, PlotStyle → Directive[Opacity[0.7], Yellow],
 AxesLabel → {"x (m)", "r (m)", "t (°C)"}, LabelStyle → Directive[Medium, Black], InterpolationOrder → 4]
```
уплотнить · таблица значений · модуль размерной величины · модуль размерной величины · модуль размерной величины

3-мерная диаграмм··· · показат··· · ист··· · сетка · ни о··· · стиль графика · директива · прозрачность · жёлтый

обозначения на осях · стиль отметки · директива · средний · чёрный · порядок интерполяции

Out[59]=