Выполнение расчетного задания по дисциплине Тепломассообмен в среде Mathematica 14

Студент: Глаголев Я.О.

Группа: ТФ-13-22

Задача № 3

Задача 3.

Цилиндрическую заготовку радиусом r=40 см и длиной L=0,6 м, с начальной температурой t_0=650°С поместили в охладительный бассейн с температурой жидкости $t_ж$=20°С, в котором она начала охлаждаться при постоянном коэффициенте теплоотдачи α=80 Вт/(м^2 К). Свойства материала заготовки: марка - Дюралюминий, плотность - 2787 кг/м^3, удельная теплоёмкость - 833 Дж/(кг К), теплопроводность - 164 Вт/(м К).

Рассчитать температурное поле в цилиндре как функцию радиуса r (мм) и линейной координаты x (мм) в момент времени τ_1=5 мин от начала охлаждения, результаты вычислений свести в таблицы, построить графики $t(x, 0, \tau_1)$, $t(x, r_0, \tau_1)$, $t(0, r, \tau_1)$, $t(L/2, r, \tau_1)$.

Рассчитать температуру в центре цилиндра и на глубине 0,2d от поверхности как функцию времени; для стадии регулярного режима охлаждения вычислить, имитируя эксперимент, темп охлаждения цилиндра и температуропроводность материала заготовки.

Вычислить количество теплоты, отданной цилиндром за время охлаждения от его начала, до момента τ_1.

Введем исходные данные:

In[146]:=

```
d0 = UnitConvert[Quantity[400, "Millimeters"], "Meters"];

r0 = d0 / 2;
L = Quantity[0.6, "Meters"];
t0 = Quantity[650, "DegreesCelsius"];
tLiquid = Quantity[20, "DegreesCelsius"];
α = Quantity[80, "Watts"/("Meters"^2 * "Kelvins")];
ρ = Quantity[2787, "Kilograms"/"Meters"^3];
cp = Quantity[833, "Joules"/("Kilograms" * "Kelvins")];
λ = Quantity[164, "Watts"/("Meters" * "Kelvins")];
τ1 = UnitConvert[Quantity[5, "Minutes"], "Seconds"];
```

Найдем коэффициент температуропроводности a:

In[152]:=

```
a = UnitConvert[N[λ/(cp * ρ)], "Meters"^2/"Seconds"]
```

Out[152]=

$0.00007064182\ m^2/s$

Числа Био по радиальному(BiRadial) и вертикальному(BiVertical) направлениям:

In[153]:=

$$\text{BiRadial} = N\left[\frac{\alpha * r0}{\lambda}\right]$$

Out[153]=

0.097560976

In[154]:=

$$\text{BiVertical} = N\left[\frac{\left(\alpha * \frac{L}{2}\right)}{\lambda}\right]$$

Out[154]=

0.14634146

Числа Фурье по радиальному(FoRadial) и вертикальному(FoVertical) направлениям:

In[155]:=

$$\text{FoRadial} = \frac{a * \tau 1}{(r0)^2}$$

Out[155]=

0.52981365

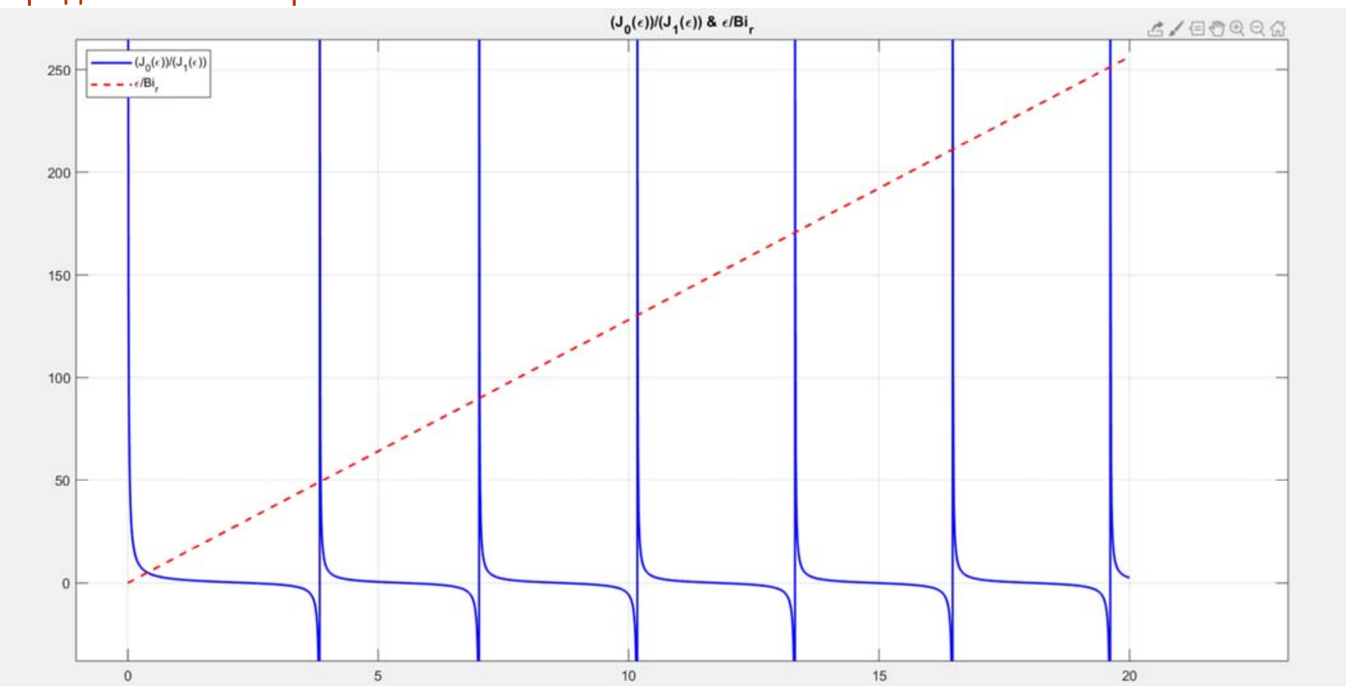
In[156]:=

$$\text{FoVertical} = \frac{a * \tau 1}{\left(\frac{L}{2}\right)^2}$$

Out[156]=

0.23547273

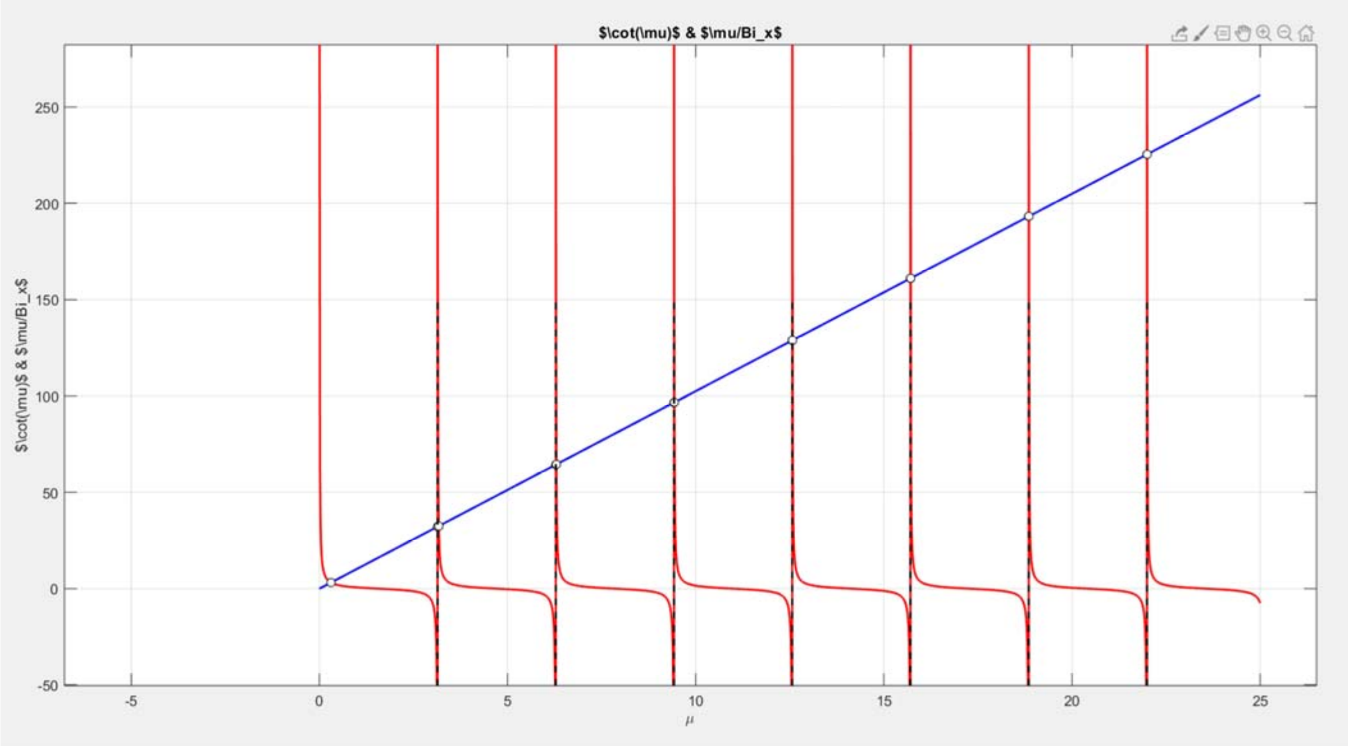
Приступим к поиску корней характеристического уравнения(MATLAB) в радиальном направлении:



In[157]:=

```
ϵ = {0.4364 , 3.8571 , 7.0295 , 10.1831 , 13.3310 , 16.4766 , 19.6208};
```

В вертикальном направлении:



In[158]:=

```
μ = {0.3735  , 3.1875 ,  6.3064  , 9.4403,  12.5780,  15.7173  , 18.8573};
```

Найдем функцию распределения температуры в радиальном направлении:

In[159]:=

```
ΘRadial[r_, τ_] := Total[(2 * BesselJ[1, ϵ]) / (ϵ * (BesselJ[0, ϵ] + BesselJ[1, ϵ]^2)) *
    BesselJ[0, ϵ * r / QuantityMagnitude[r0]] * Exp[-ϵ^2 * QuantityMagnitude[a] * τ / QuantityMagnitude[r0]^2]];
```

In[160]:=

```
ΘRadial[0, 0]
```

Out[160]=

```
0.99930486
```

In[161]:=

```
tRadial[r_, τ_] = tLiquid + (t0 - tLiquid) * ΘRadial[r, τ];
```

Найдем температуру на оси цилиндра в момент времени $\tau = 0$

In[162]:=

```
tRadial[0, 0]
```

Out[162]=

```
922.71206 K
```

In[163]:=

```
UnitConvert[tRadial[0, 0], "DegreesCelsius"]
```

преобразовать единицы измерений

Out[163]=

```
649.56206 °C
```

Найдем функцию распределения температуры в вертикальном направлении:

In[164]:=

```
ΘVertical[x_, τ_] :=
  Total[(2 * Sin[μ]) / (μ + Sin[μ] * Cos[μ]) * Cos[μ * x / QuantityMagnitude[L / 2]] * Exp[-μ^2 * (QuantityMagnitude[a] * τ) / QuantityMagnitude[(L/2)^2]]]
```

In[165]:=

```
ΘVertical[0, 0]
```

Out[165]=

1.0003264

In[166]:=

```
tVertical[x_, τ_] := tLiquid + (t0 - tLiquid) * ΘVertical[x, τ];
```

Найдем температуру в центре цилиндра в момент времени $\tau = 0$

In[167]:=

```
tVertical[0, 0]
```

Out[167]=

923.35564 K

In[168]:=

```
UnitConvert[tVertical[0, 0], "DegreesCelsius"]
преобразовать единицы измерений
```

Out[168]=

650.20564 °C

Найдем функцию распределения температурного поля в цилиндре t(x,r,τ)

In[169]:=

```
Θ3D[x_, r_, τ_] := ΘVertical[x, τ] * ΘRadial[r, τ];
```

In[170]:=

```
t[x_, r_, τ_] := tLiquid + (t0 - tLiquid) * Θ3D[x, r, τ];
```

Начнем расчет температурного поля
Сначала для r=0:

In[171]:=

```
Table[{ N[x], UnitConvert[t[QuantityMagnitude[x], QuantityMagnitude[0], QuantityMagnitude[τ1]],
таблиц… числ… преобразовать … модуль размерной величины модуль размерной величины модуль размерной величины
    "DegreesCelsius"]}, {x, {L / 2, 3 * L / 8, L / 4, L / 8, 0}}] // MatrixForm
                                                               матричная форма
```

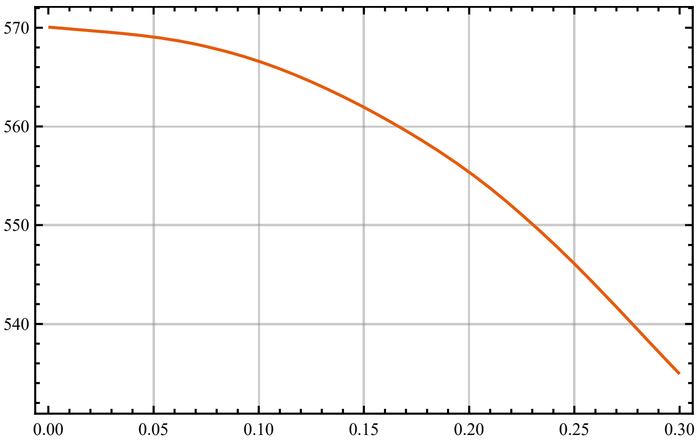
Out[171]//MatrixForm=

0.3 m	534.926 °C
0.225 m	551.06423 °C
0.15 m	561.94858 °C
0.075 m	568.09219 °C
0.	570.05995 °C

In[172]:=

```
ListLinePlot[
линейный график данных
 Table[{ N[x], UnitConvert[t[QuantityMagnitude[x], QuantityMagnitude[0], QuantityMagnitude[τ1]],
 таблиц… числ… преобразовать … модуль размерной величины модуль размерной величины модуль размерной величины
    "DegreesCelsius"]}, {x, {L / 2, 3 * L / 8, L / 4, L / 8, 0}}],
 InterpolationOrder → 2, PlotTheme → "Scientific", GridLines → Automatic]
 порядок интерполяции      тематический стиль графика    линии коорд… автоматический
```

Out[172]=



In[173]:=

Теперь для r=r0

In[174]:=

```
Table[{N[x], UnitConvert[t[QuantityMagnitude[x], QuantityMagnitude[r0], QuantityMagnitude[τ1]],
  "DegreesCelsius"]}, {x, {L/2, 3*L/8, L/4, L/8, 0}}] // MatrixForm
```

таблиц··· числ··· преобразовать ··· модуль размерной величины модуль размерной величины модуль размерной величины матричная форма

Out[174]//MatrixForm=

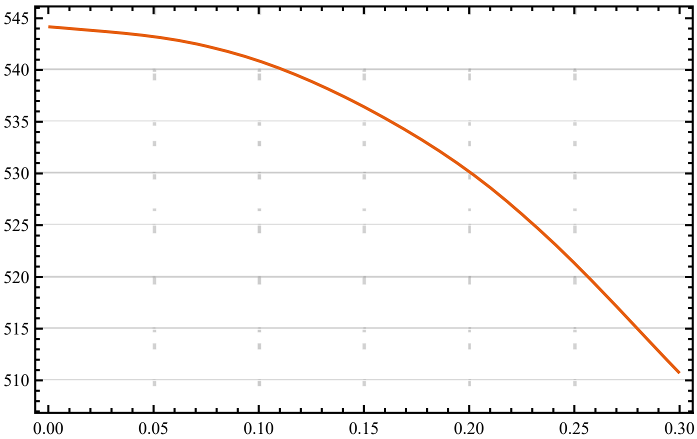
0.3 m	510.69609 °C
0.225 m	526.07494 °C
0.15 m	536.44712 °C
0.075 m	542.30165 °C
0.	544.17681 °C

In[175]:=

```
ListLinePlot[
 Table[{N[x], UnitConvert[t[QuantityMagnitude[x], QuantityMagnitude[r0], QuantityMagnitude[τ1]],
   "DegreesCelsius"]}, {x, {L/2, 3*L/8, L/4, L/8, 0}}],
 InterpolationOrder → 2, PlotTheme → "Scientific", GridLines → Automatic]
```

линейный график данных таблиц··· числ··· преобразовать ··· модуль размерной величины модуль размерной величины модуль размерной величины порядок интерполяции тематический стиль графика линии коорд··· автоматический

Out[175]=



Теперь для x=0

In[176]:=

```
Table[{N[r], UnitConvert[t[QuantityMagnitude[0], QuantityMagnitude[r], QuantityMagnitude[τ1]],
  "DegreesCelsius"]}, {r, Reverse[{0, r0/4, r0/2, 3*r0/4, r0}]}] // MatrixForm
```

таблиц··· числ··· преобразовать ··· модуль размерной величины модуль размерной величины модуль размерной величины расположить в обратном порядке матричная форма

Out[176]//MatrixForm=

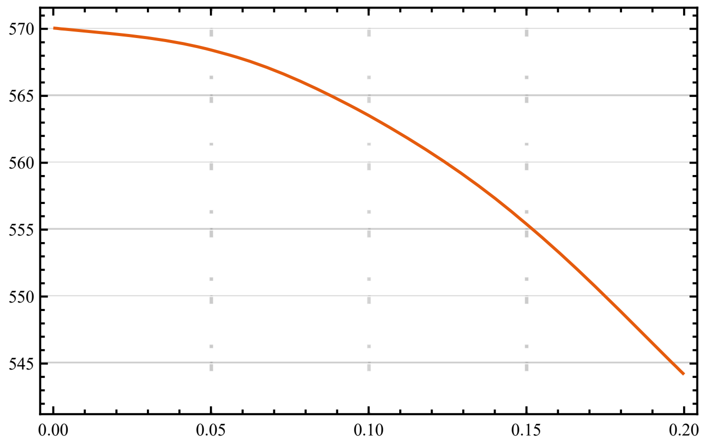
0.2 m	544.17681 °C
0.15 m	555.42327 °C
0.1 m	563.52991 °C
0.05 m	568.42368 °C
0.	570.05995 °C

In[177]:=

```
ListLinePlot[Table[{N[r],
    UnitConvert[t[QuantityMagnitude[0], QuantityMagnitude[r], QuantityMagnitude[τ1]], "DegreesCelsius"]},
    {r, Reverse[{0, r0/4, r0/2, 3*r0/4, r0}]}], InterpolationOrder → 2,
  PlotTheme → "Scientific", GridLines → Automatic]
```

линейный гра… таблиц… численное приближение
преобразовать … модуль размерной величины модуль размерной величины модуль размерной величины
расположить в обратном порядке порядок интерполяции
тематический стиль графика линии коорд… автоматический

Out[177]=



Теперь для x=L/2

In[178]:=

```
Table[{N[r], UnitConvert[t[QuantityMagnitude[L/2], QuantityMagnitude[r], QuantityMagnitude[τ1]],
     "DegreesCelsius"]}, {r, Reverse[{0, r0/4, r0/2, 3*r0/4, r0}]}] // MatrixForm
```

таблиц… числ… преобразовать … модуль размерной величины модуль размерной величины модуль размерной величины
расположить в обратном порядке матричная форма

Out[178]//MatrixForm=

0.2 m	510.69609 °C
0.15 m	521.2242 °C
0.1 m	528.81306 °C
0.05 m	533.39424 °C
0.	534.926 °C

In[179]:=

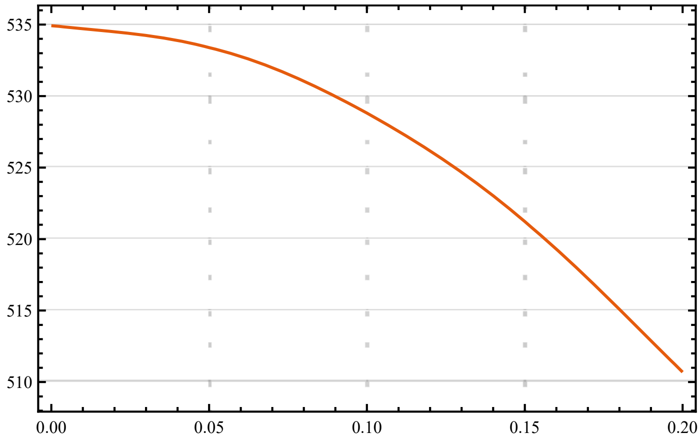
```
ListLinePlot[Table[{N[r],
линейный гра··· таблиц··· численное приближение

  UnitConvert[t[QuantityMagnitude[L/2], QuantityMagnitude[r], QuantityMagnitude[τ1]], "DegreesCelsius"]},
  преобразовать ··· модуль размерной величины модуль размерной величины модуль размерной величины

  {r, Reverse[{0, r0/4, r0/2, 3*r0/4, r0}]}], InterpolationOrder → 2,
      расположить в обратном порядке          порядок интерполяции

 PlotTheme → "Scientific", GridLines → Automatic]
 тематический стиль графика  линии коорд··· автоматический
```

Out[179]=



Покажем распределение температуры в центре цилиндра и на расстоянии *0.2* d_0 от поверхности как функцию времени
Сначала для центра*:*

In[180]:=

```
Table[{N[k*τ1], UnitConvert[t[QuantityMagnitude[0], QuantityMagnitude[0], QuantityMagnitude[k*τ1]],
таблиц··· численное·· преобразовать ··· модуль размерной величины модуль размерной величины модуль размерной величины
    "DegreesCelsius"]}, {k, Range[3]}] // MatrixForm
                            диапазон      матричная форма
```

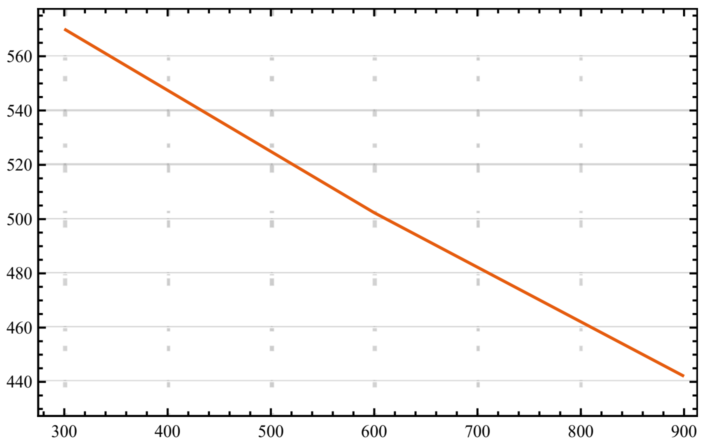
Out[180]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 300.\ \mathrm{s} & 570.05995\ ^\circ\mathrm{C} \\ 600.\ \mathrm{s} & 502.33947\ ^\circ\mathrm{C} \\ 900.\ \mathrm{s} & 442.04968\ ^\circ\mathrm{C} \end{pmatrix}$$

In[181]:=

```
ListLinePlot[
линейный график данных
 Table[{N[k*τ1], UnitConvert[t[QuantityMagnitude[0], QuantityMagnitude[0], QuantityMagnitude[k*τ1]],
 таблиц··· численное·· преобразовать ··· модуль размерной величины модуль размерной величины модуль размерной величины
    "DegreesCelsius"]}, {k, Range[3]}], PlotTheme → "Scientific", GridLines → Automatic]
                            диапазон     тематический стиль графика  линии коорд··· автоматический
```

Out[181]=



Теперь на расстоянии 0.2 d_0 (0.4 r_0)от поверхности , следовательно $r = 0.6\, r_0$)

In[182]:=

```
Table[
таблица значений
  {N[k * τ1], UnitConvert[t[QuantityMagnitude[0], QuantityMagnitude[0.6 * r0], QuantityMagnitude[k * τ1]],
   численное·· преобразовать ···  модуль размерной величины модуль размерной величины   модуль размерной величины
   "DegreesCelsius"]}, {k, Range[3]}] // MatrixForm
                          диапазон       матричная форма
```

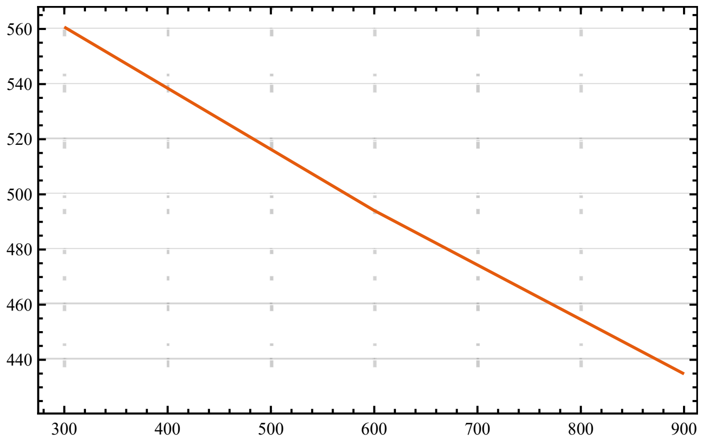
Out[182]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 300.\ \text{s} & 560.66933\ {}^\circ\text{C} \\ 600.\ \text{s} & 494.10751\ {}^\circ\text{C} \\ 900.\ \text{s} & 434.84667\ {}^\circ\text{C} \end{pmatrix}$$

In[183]:=

```
ListLinePlot[Table[
линейный гра···  таблица значений
  {N[k * τ1], UnitConvert[t[QuantityMagnitude[0], QuantityMagnitude[0.6 * r0], QuantityMagnitude[k * τ1]],
   численное·· преобразовать ···  модуль размерной величины модуль размерной величины   модуль размерной величины
   "DegreesCelsius"]}, {k, Range[3]}], PlotTheme → "Scientific", GridLines → Automatic]
                          диапазон       тематический стиль графика    линии коорд··· автоматический
```

Out[183]=



Для определения темпа охлаждения и коэффициента температуропроводности заготовки построит несколько зависимостей *ln(θ)* используя данные полученные выше*(* в центре и на *0.6*r_0*).*

θ = t-tLiquid

In[184]:=

```
lnForCenter =
 Table[{N[k * τ1], Log[QuantityMagnitude[UnitConvert[t[QuantityMagnitude[0], QuantityMagnitude[0],
 таблиц··· численное·· на··· модуль размерной ве··· преобразовать ···  модуль размерной величины модуль размерной величины
        QuantityMagnitude[k * τ1]], "DegreesCelsius"] - tLiquid]]}, {k, Range[3]}]
        модуль размерной величины                                        диапазон
```

Out[184]=

{{300. s, 6.3100273}, {600. s, 6.1786482}, {900. s, 6.045123}}

In[185]:=

```
lnForPoint6r0 =
 Table[{N[k * τ1], Log[QuantityMagnitude[UnitConvert[t[QuantityMagnitude[0], QuantityMagnitude[0.6 * r0],
 таблиц··· численное·· на··· модуль размерной ве··· преобразовать ···  модуль размерной величины модуль размерной величины
        QuantityMagnitude[k * τ1]], "DegreesCelsius"] - tLiquid]]}, {k, Range[3]}]
        модуль размерной величины                                        диапазон
```

Out[185]=

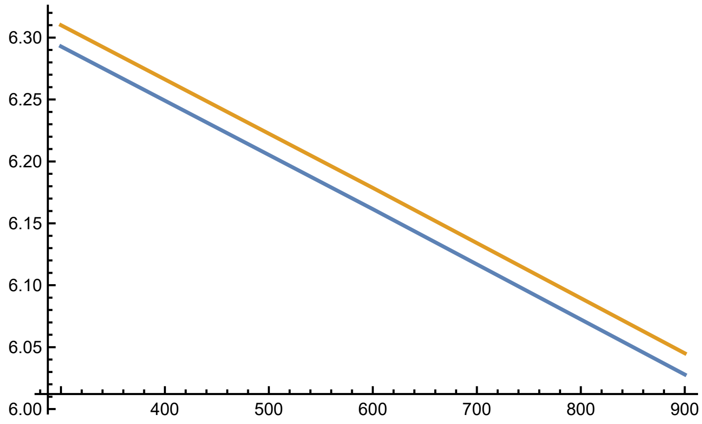
{{300. s, 6.2928079}, {600. s, 6.1614341}, {900. s, 6.027909}}

In[186]:=

```
ListLinePlot[{lnForPoint6r0, lnForCenter}]
```

линейный график данных

Out[186]=



Нетрудно заметить,что стадии. регулярного режима гарантированно соответствует интервал [400,900] s.
Найдем число Фурье в краевых точках интервала регулярного режима и удостоверимся что оно больше 0.3

In[187]:=

$$\text{FoRadialAt400} = \frac{a * \text{Quantity}[400, \text{"Seconds"}]}{r0^2}$$

Out[187]=

0.7064182

In[188]:=

$$\text{FoRadialAt900} = \frac{a * \text{Quantity}[900, \text{"Seconds"}]}{r0^2}$$

Out[188]=

1.5894409

In[189]:=

$$\text{FoVerticalAt400} = \frac{a * \text{Quantity}[400, \text{"Seconds"}]}{\left(\frac{L}{2}\right)^2}$$

Out[189]=

0.31396364

In[190]:=

$$\text{FoVerticalAt900} = \frac{a * \text{Quantity}[900, \text{"Seconds"}]}{\left(\frac{L}{2}\right)^2}$$

Out[190]=

0.7064182

Приступим к поиску темпа охлаждения m для наших двух точек

In[191]:=

$$\text{mAtCenter} = \frac{\text{Log}\left[\frac{\Theta3D[0,0,400]}{\Theta3D[0,0,900]}\right]}{\text{Quantity}[900 - 400, \text{"Seconds"}]}$$

Out[191]=

0.00044349034 per second

In[192]:=

$$\text{mAtPoint6r0} = \frac{\text{Log}\left[\frac{\Theta3D[0,\text{QuantityMagnitude}[0.6*r0],400]}{\Theta3D[0,\text{QuantityMagnitude}[0.6*r0],900]}\right]}{\text{Quantity}[900 - 400, \text{"Seconds"}]}$$

Out[192]=

0.00044348954 per second

Берем среднее

In[193]:=

$$m = \frac{mAtCenter + mAtPoint6r0}{2}$$

Out[193]=

0.00044348994 per second

Fo > 0.3 поэтому ряд Фурье сходится быстро и первый член достаточно описывает все решение.

Найдем коэффициент формы K:

In[194]:=

$$K = \frac{1}{\left(\frac{First[\epsilon]}{r0}\right)^2 + \left(\frac{First[\mu]}{\frac{L}{2}}\right)^2}$$

Out[194]=

$0.15844975\ m^2$

Найдем коэффициент температуропроводности по второй теореме Кондратьева(допущение что наше $m = m_\infty$) и сравним с теоретическим:

In[195]:=

aExperimental = K * m

Out[195]=

$0.000070270871\ m^2/s$

In[196]:=

a

Out[196]=

$0.00007064182\ m^2/s$

In[197]:=

$$\delta a = \frac{Abs[a - aExperimental]}{a}$$

Out[197]=

0.0052511195

Найдем количество теплоты, отданное цилиндром за время τ_1:

Для начала найдем сколько теплоты он отдаст до того момента как Θ==1 т.е. t=tLiquid

In[198]:=

$Q = N[\pi * (r0)^2 * L * \rho * cp * (t0 - tLiquid)]$

численное приближение

Out[198]=

1.1027667×10^8 J

In[199]:=

$$\Theta RadialAverage = Total\left[\frac{4 * BiRadial^2}{\epsilon^2 * (\epsilon^2 + BiRadial^2)} * Exp[-\epsilon^2 * FoRadial]\right]$$

суммировать; показательная функция

Out[199]=

0.90380029

In[200]:=

$$\Theta VerticalAverage = Total\left[\frac{2 * Sin[\mu]^2}{\mu^2 + \mu * Sin[\mu] * Cos[\mu]} * Exp[-\mu^2 * FoVertical]\right]$$

суммировать; показательная функция

Out[200]=

0.9672924

In[201]:=

```
ΘAverage = ΘVerticalAverage * ΘRadialAverage
```

Out[201]=

0.87423915

In[202]:=

```
Qτ1 = Q (1 - ΘAverage)
```

Out[202]=

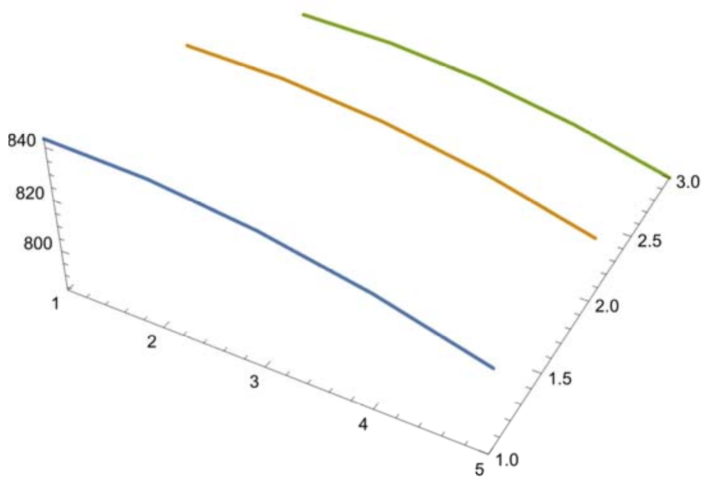
1.3868487×10^7 J

Подытожим полным температурным полем в момент времени τ_1

In[203]:=

```
Show[ListLinePlot3D[Table[t[QuantityMagnitude[x], QuantityMagnitude[r], QuantityMagnitude[τ1]],
 пок⋯  линейный график⋯  таблица⋯  модуль размерной величины  модуль размерной величины  модуль размерной величины
   {x, 0, L/2, L/4}, {r, 0, r0, r0/4}]], Boxed → False]
                                         показат⋯  ложь
```

Out[203]=



In[204]:=

```
data = Flatten[Table[{x, r, t[QuantityMagnitude[x], QuantityMagnitude[r], QuantityMagnitude[τ1]]},
        уплостить  таблица значений  модуль размерной величины  модуль размерной величины  модуль размерной величины
    {x, 0, L/2, L/4}, {r, 0, r0, r0/4}], 1];

ListPlot3D[data, Boxed → True, Mesh → None, PlotStyle → Directive[Opacity[0.7], Yellow],
 3-мерная диаграмм⋯  показат⋯  ист⋯  сетка  ни о⋯  стиль графика  директива  прозрачность  жёлтый
 AxesLabel → {"x (m)", "r (m)", "t (°C)"}, LabelStyle → Directive[Medium, Black], InterpolationOrder → 4]
 обозначения на осях                       стиль отметки  директива  средний  чёрный  порядок интерполяции
```

Out[205]=