

Выполнение расчетного задания по дисциплине

Тепломассообмен в среде Mathematica 14

Студент: Зарина Азимова

Группа: ТФ-11-22

Задача № 3

Задача 3.

Цилиндрическую заготовку диаметром $d=100$ мм и длиной $L=0,12$ м, с начальной температурой $t_0=800^\circ\text{C}$ поместили в охлаждающий бассейн с температурой жидкости $t_{\text{ж}}=25^\circ\text{C}$, в котором она начала охлаждаться при постоянном коэффициенте теплоотдачи $\alpha=70$ Вт/(м² К). Свойства материала заготовки: марка - Сталь 10Cr, плотность - 7785 кг/м³, удельная теплоёмкость - 460 Дж/(кг К), теплопроводность - 31 Вт/(м К).

Рассчитать температурное поле в цилиндре как функцию радиуса r (мм) и линейной координаты x (мм) в момент времени $\tau_1=1,2$ мин от начала охлаждения, результаты вычислений свести в таблицы, построить графики $t(x, 0, \tau_1)$, $t(x, r_0, \tau_1)$, $t(0, r, \tau_1)$, $t(L/2, r, \tau_1)$.

Рассчитать температуру в центре цилиндра и на глубине $0,2d$ от поверхности как функцию времени; для стадии регулярного режима охлаждения вычислить, имитируя эксперимент, темп охлаждения цилиндра и температуропроводность материала заготовки.

Вычислить количество теплоты, отданной цилиндром за время охлаждения от его начала, до момента τ_1 .

Введем исходные данные:

In[400]:=

```
d0 = UnitConvert[Quantity[100, "Millimeters"], "Meters"];
```

преобразовать размерная величина

```
r0 = d0 / 2;
```

```
L = Quantity[0.12, "Meters"];
```

размерная величина

```
t0 = Quantity[800, "DegreesCelsius"];
```

размерная величина

```
tLiquid = Quantity[25, "DegreesCelsius"];
```

размерная величина

```
 $\alpha$  = Quantity[70,  $\frac{\text{"Watts"}}{\text{"Meters"}^2 * \text{"Kelvins"}}$ ];
```

размерная величина

```
 $\rho$  = Quantity[7785,  $\frac{\text{"Kilograms"}}{\text{"Meters"}^3}$ ];
```

размерная величина

```
cp = Quantity[460,  $\frac{\text{"Joules"}}{\text{"Kilograms"} * \text{"Kelvins"}}$ ];
```

размерная величина

```
 $\lambda$  = Quantity[31,  $\frac{\text{"Watts"}}{\text{"Meters"} * \text{"Kelvins"}}$ ];
```

размерная величина

```
 $\tau_1$  = UnitConvert[Quantity[1.2, "Minutes"], "Seconds"];
```

преобразовать размерная величина

Найдем коэффициент температуропроводности а:

In[406]:=

```
a = UnitConvert[N[ $\frac{\lambda}{cp * \theta}$ ],  $\frac{\text{"Meters"}^2}{\text{"Seconds"}}$ ]
```

Out[406]=

$8.656558 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$

Числа Био по радиальному(BiRadial) и вертикальному(BiVertical) направлениям:

In[407]:=

```
BiRadial = N[ $\frac{\alpha * r\theta}{\lambda}$ ]
```

Out[407]=

0.11290323

In[408]:=

```
BiVertical = N[ $\frac{(\alpha * \frac{L}{2})}{\lambda}$ ]
```

Out[408]=

0.13548387

Числа Фурье по радиальному(FoRadial) и вертикальному(FoVertical) направлениям:

In[409]:=

```
FoRadial =  $\frac{a * \tau 1}{(r\theta)^2}$ 
```

Out[409]=

0.24930887

In[410]:=

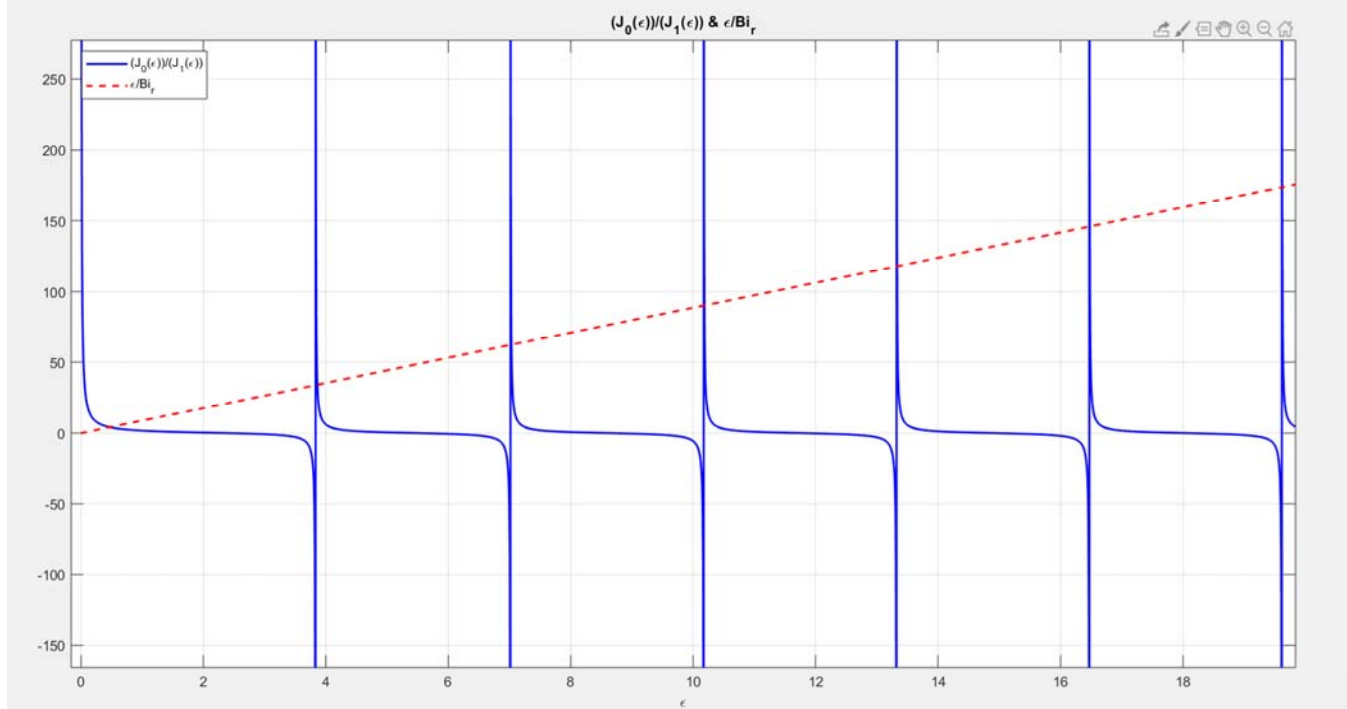
```
FoVertical =  $\frac{a * \tau 1}{(\frac{L}{2})^2}$ 
```

Out[410]=

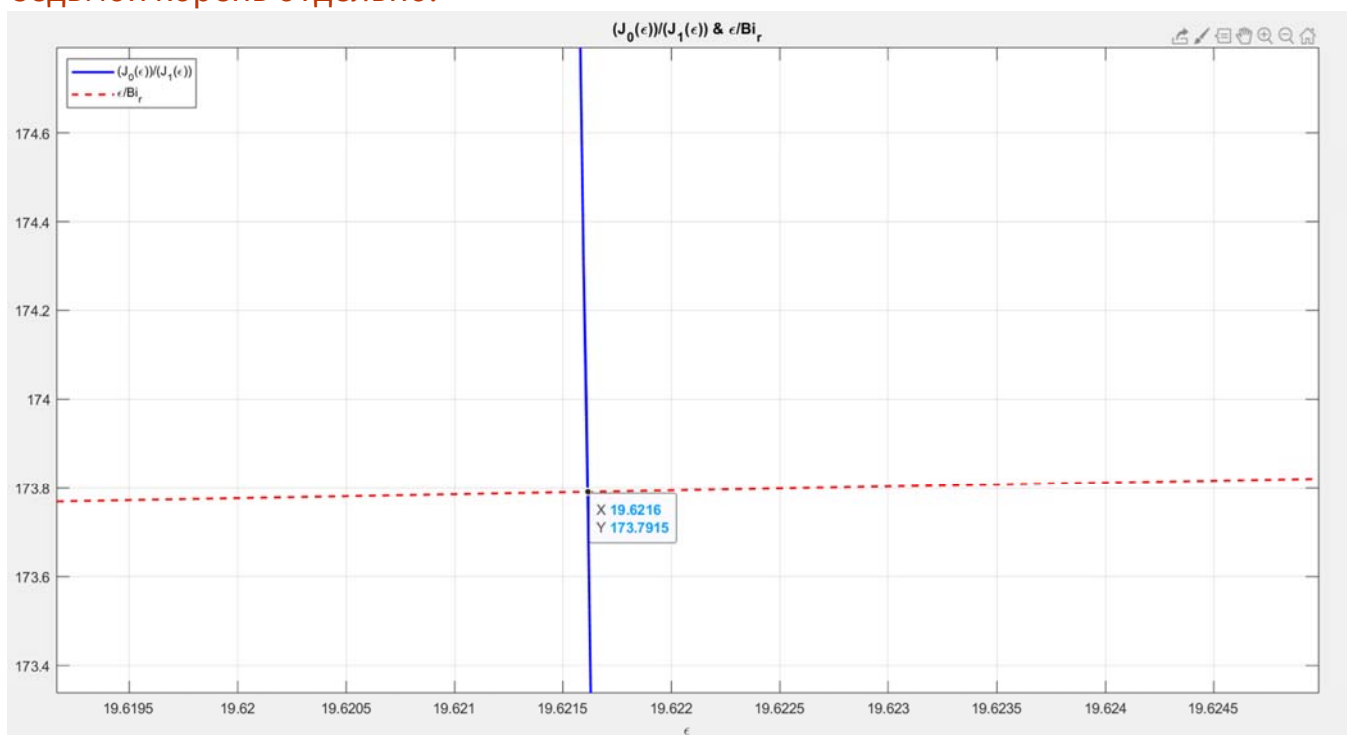
0.17313116

Приступим к поиску корней характеристического уравнения(MATLAB)

в радиальном направлении.В точках разрыва присваиваем NaN чтобы не цепляло лишних корней, либо без NaN но выкидываем лишние корни после численного расчета.В картинках ниже производила фильтрация корней. Скрипты прилагаются:



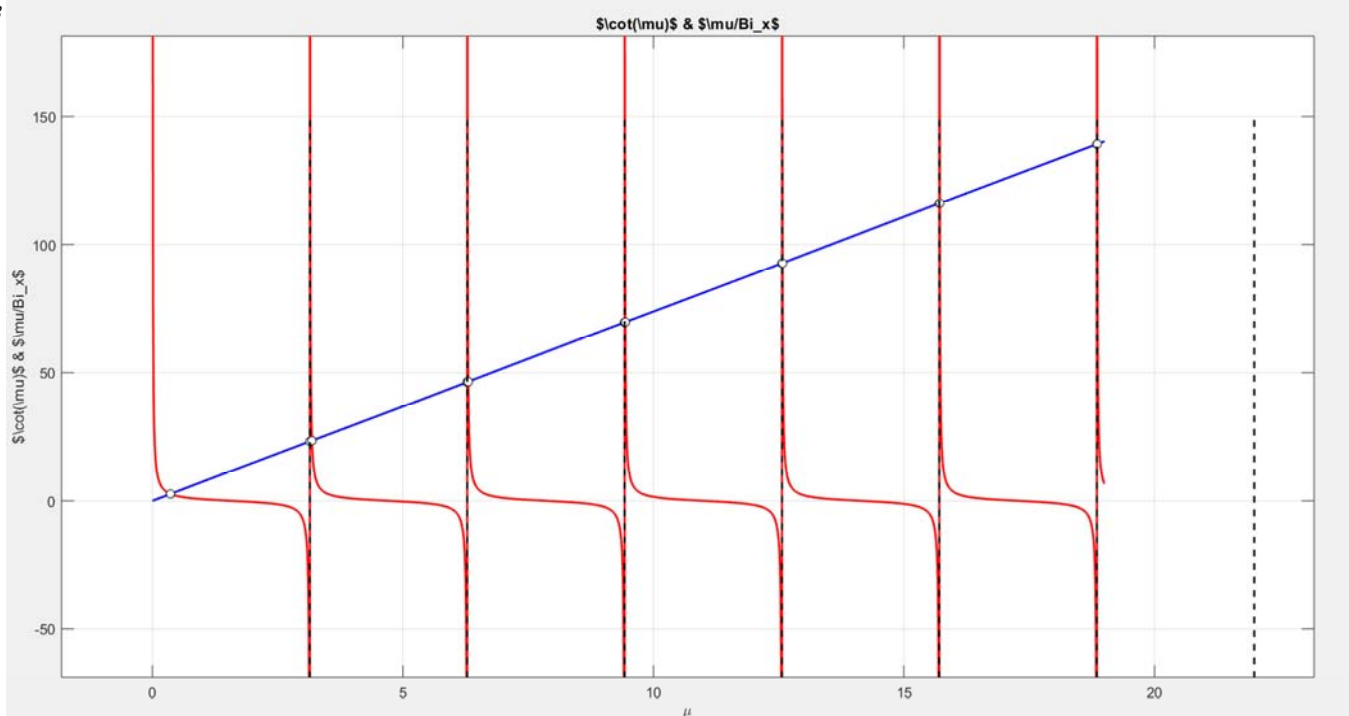
Седьмой корень отдельно:



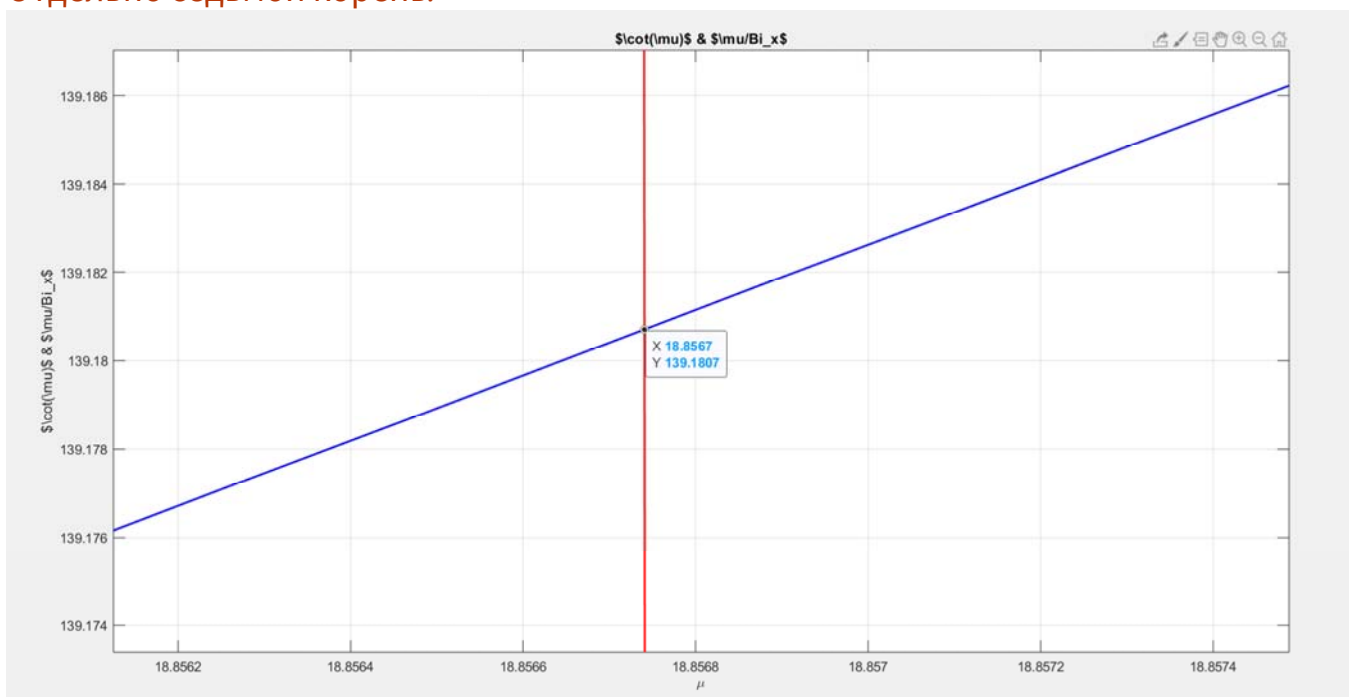
$\ln[411]:=$

$\epsilon = \{0.4686, 3.8611, 7.0317, 10.1846, 13.3322, 16.4775, 19.6216\};$

В вертикальном
направлении:



Отдельно седьмой корень:



In[412]:=

```
 $\mu = \{0.3600, 3.1841, 6.3047, 9.4391, 12.5771, 15.7166, 18.8567\};$ 
```

Найдем функцию распределения температуры в радиальном направлении:

In[413]:=

```
 $\Theta_{\text{Radial}}[r_, \tau_] := \text{Total} \left[ \frac{2 * \text{BesselJ}[1, \epsilon]}{\epsilon * (\text{BesselJ}[0, \epsilon] + \text{BesselJ}[1, \epsilon]^2)} * \right.$ 
 $\left. \frac{\text{BesselJ}[0, \epsilon * \frac{r}{\text{QuantityMagnitude}[r0]}}{\text{QuantityMagnitude}[r0]} \right] * \text{Exp} \left[ -\epsilon^2 * \text{QuantityMagnitude}[a] * \frac{\tau}{\text{QuantityMagnitude}[r0]^2} \right];$ 
```

In[414]:=

```
 $\Theta_{\text{Radial}}[0, 0]$ 
```

Out[414]=

```
0.9995784
```

In[415]:=

```
 $t_{\text{Radial}}[r_, \tau_] = t_{\text{Liquid}} + (t_0 - t_{\text{Liquid}}) * \Theta_{\text{Radial}}[r, \tau];$ 
```

Найдем температуру на оси цилиндра в момент времени $\tau = 0$. (оно тут иногда показывает

почему то 298.021K но в расчетах далее это нормальные 1072K, можете сами прокомпилировать << tLiquid+(t0-tLiquid)*ΘRadial[0,0] >>). Видимо просто баг какой-то.

```
In[416]:=
tRadial[0, 0]

Out[416]=
1072.8233 K
```

Нормальное *tRadial[0,0]*

```
In[417]:=
tRadial[0, 0] = tLiquid + (t0 - tLiquid) * ΘRadial[0, 0]

Out[417]=
1072.8233 K

In[418]:=
UnitConvert[tRadial[0, 0], "DegreesCelsius"]
[преобразовать единицы измерений]

Out[418]=
799.67326 °C
```

Найдем функцию распределения температуры в вертикальном направлении:

```
In[419]:=
ΘVertical[x_, τ_] :=
Total[
  [суммировать]
  2 * Sin[μ] * Cos[μ * x / QuantityMagnitude[L / 2]] * Exp[-μ² * QuantityMagnitude[a] * τ / QuantityMagnitude[(L / 2)²]]
  [косинус] [показательный]
]

In[420]:=
ΘVertical[0, 0]

Out[420]=
1.0003347

In[421]:=
tVertical[x_, τ_] := tLiquid + (t0 - tLiquid) * ΘVertical[x, τ];
```

Найдем температуру в центре цилиндра в момент времени $\tau = 0$

```
In[422]:=
tVertical[0, 0]

Out[422]=
1073.4094 K

In[423]:=
UnitConvert[tVertical[0, 0], "DegreesCelsius"]
[преобразовать единицы измерений]

Out[423]=
800.25942 °C
```

Найдем функцию распределения температурного поля в цилиндре t(x,r,τ)

```
In[424]:=
Θ3D[x_, r_, τ_] := ΘVertical[x, τ] * ΘRadial[r, τ];

In[425]:=
t[x_, r_, τ_] := tLiquid + (t0 - tLiquid) * Θ3D[x, r, τ];
```

Начнем расчет температурного поля Сначала для $r=0$:

In[426]:=

```
Table[{N[x], UnitConvert[t[QuantityMagnitude[x], QuantityMagnitude[0], QuantityMagnitude[τ1]],
таблиц... числ... преобразовать ... модуль размерной величины модуль размерной величины модуль размерной величины
"DegreesCelsius"]}, {x, {L / 2, 3 * L / 8, L / 4, L / 8, 0}}] // MatrixForm
```

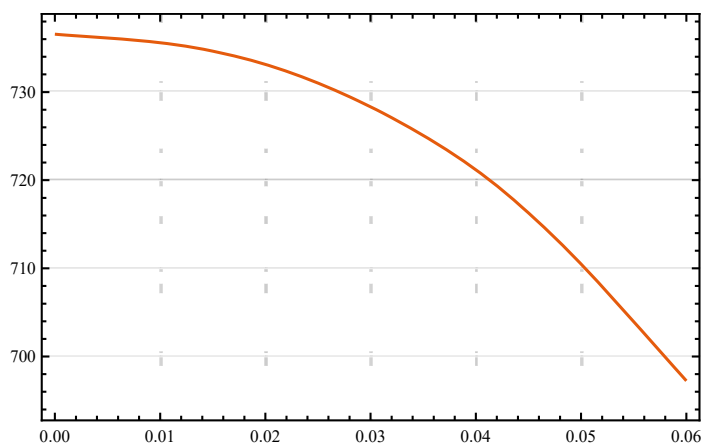
Out[426]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 0.06 \text{ m} & 697.2482 \text{ }^{\circ}\text{C} \\ 0.045 \text{ m} & 716.2882 \text{ }^{\circ}\text{C} \\ 0.03 \text{ m} & 728.32498 \text{ }^{\circ}\text{C} \\ 0.015 \text{ m} & 734.637 \text{ }^{\circ}\text{C} \\ 0. & 736.5561 \text{ }^{\circ}\text{C} \end{pmatrix}$$

In[427]:=

```
ListLinePlot[
линейный график данных
Table[{N[x], UnitConvert[t[QuantityMagnitude[x], QuantityMagnitude[0], QuantityMagnitude[τ1]],
таблиц... числ... преобразовать ... модуль размерной величины модуль размерной величины модуль размерной величины
"DegreesCelsius"]}, {x, {L / 2, 3 * L / 8, L / 4, L / 8, 0}}],
InterpolationOrder → 2, PlotTheme → "Scientific", GridLines → Automatic]
порядок интерполяции тематический стиль графика линии коорд... автоматический
```

Out[427]=



In[428]:=

Теперь для $r=r_0$

In[429]:=

```
Table[{N[x], UnitConvert[t[QuantityMagnitude[x], QuantityMagnitude[r0], QuantityMagnitude[τ1]],
таблиц... числ... преобразовать ... модуль размерной величины модуль размерной величины модуль размерной величины
"DegreesCelsius"]}, {x, {L / 2, 3 * L / 8, L / 4, L / 8, 0}}] // MatrixForm
```

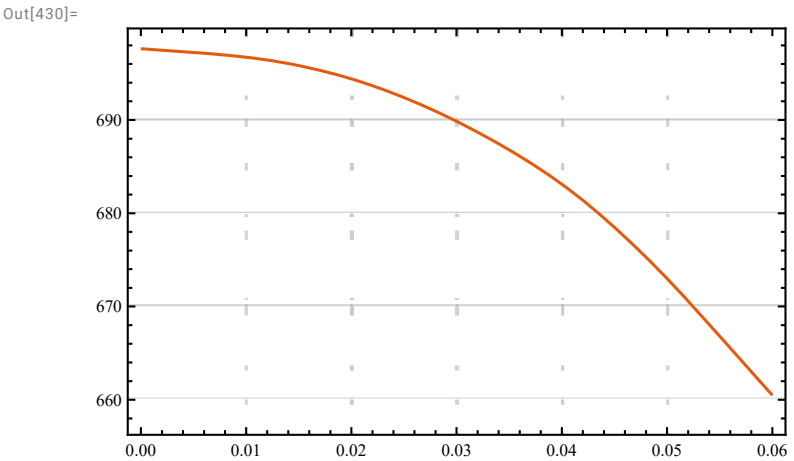
Out[429]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 0.06 \text{ m} & 660.48526 \text{ }^{\circ}\text{C} \\ 0.045 \text{ m} & 678.48461 \text{ }^{\circ}\text{C} \\ 0.03 \text{ m} & 689.86255 \text{ }^{\circ}\text{C} \\ 0.015 \text{ m} & 695.82939 \text{ }^{\circ}\text{C} \\ 0. & 697.64354 \text{ }^{\circ}\text{C} \end{pmatrix}$$

```

In[430]:=
ListLinePlot[
    линейный график данных
    Table[{ N[x], UnitConvert[t[QuantityMagnitude[x], QuantityMagnitude[r0], QuantityMagnitude[τ1]],
    таблиц... числ... преобразовать ... модуль размерной величины модуль размерной величины модуль размерной величины
        "DegreesCelsius"]}, {x, {L / 2, 3 * L / 8, L / 4, L / 8, 0}}],
    InterpolationOrder → 2, PlotTheme → "Scientific", GridLines → Automatic]
    порядок интерполяции тематический стиль графика линии коорд... автоматический

```

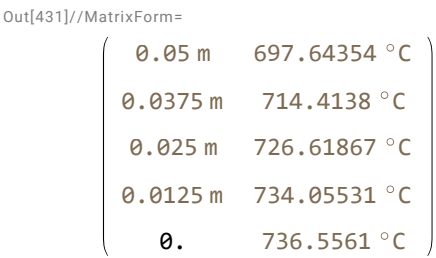


Теперь для $x=0$

```

In[431]:=
Table[{ N[r], UnitConvert[t[QuantityMagnitude[0], QuantityMagnitude[r], QuantityMagnitude[τ1]],
таблиц... числ... преобразовать ... модуль размерной величины модуль размерной величины модуль размерной величины
    "DegreesCelsius"]}, {r, Reverse[{0,  $\frac{r0}{4}$ ,  $\frac{r0}{2}$ , 3 * r0 / 4, r0}]}] // MatrixForm
    расположить в обратном порядке матричная форма

```

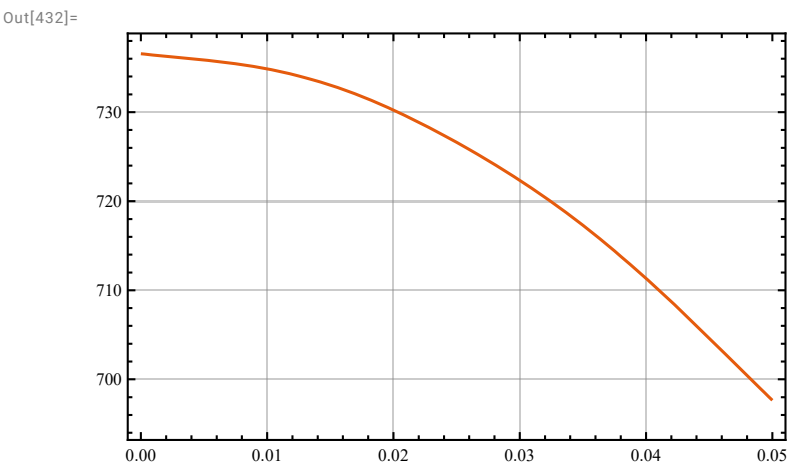


```

In[432]:=
ListLinePlot[Table[{ N[r],
    линейный гра... таблиц... численное приближение
        UnitConvert[t[QuantityMagnitude[0], QuantityMagnitude[r], QuantityMagnitude[τ1]], "DegreesCelsius"]},
    преобразовать ... модуль размерной величины модуль размерной величины модуль размерной величины
    {r, Reverse[{0,  $\frac{r0}{4}$ ,  $\frac{r0}{2}$ , 3 * r0 / 4, r0}]}], InterpolationOrder → 2,
    расположить в обратном порядке порядок интерполяции

    PlotTheme → "Scientific", GridLines → Automatic]
    тематический стиль графика линии коорд... автоматический

```



Теперь для $x=L/2$

In[433]:=

```
Table[{N[r], UnitConvert[t[QuantityMagnitude[L/2], QuantityMagnitude[r], QuantityMagnitude[τ1]],
  "DegreesCelsius"]}, {r, Reverse[{0, r0/4, r0/2, 3*r0/4, r0}]}] // MatrixForm
```

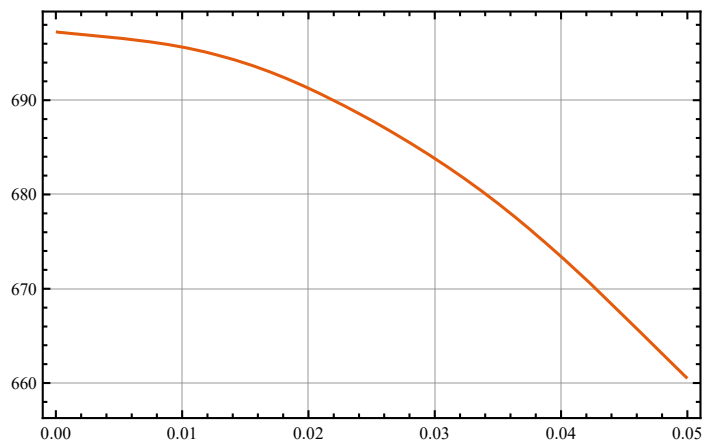
Out[433]//MatrixForm=

```
( 0.05 m    660.48526 °C
 0.0375 m   676.32909 °C
 0.025 m    687.85974 °C
 0.0125 m   694.88556 °C
 0.         697.2482 °C)
```

In[434]:=

```
ListLinePlot[Table[{N[r],
  UnitConvert[t[QuantityMagnitude[L/2], QuantityMagnitude[r], QuantityMagnitude[τ1]], "DegreesCelsius"]},
  {r, Reverse[{0, r0/4, r0/2, 3*r0/4, r0}]}], InterpolationOrder → 2,
  PlotTheme → "Scientific", GridLines → Automatic]
```

Out[434]=



Покажем распределение температуры в центре цилиндра и на расстоянии $0.2 d_0$ от поверхности как функцию времени

Сначала для центра:

In[435]:=

```
Table[{N[k*τ1], UnitConvert[t[QuantityMagnitude[0], QuantityMagnitude[0], QuantityMagnitude[k*τ1]],
  "DegreesCelsius"]}, {k, Range[3]}] // MatrixForm
```

Out[435]//MatrixForm=

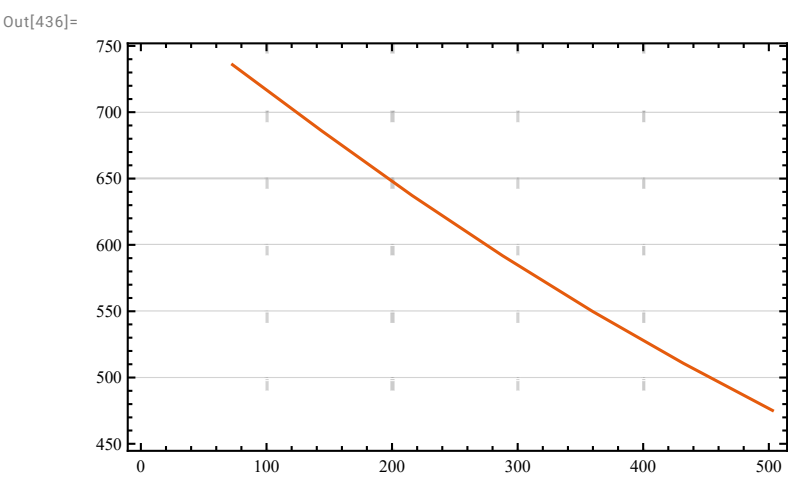
```
( 72. s    736.5561 °C
 144. s   685.92331 °C
 216. s   637.23057 °C)
```



```

In[436]:=
ListLinePlot[
  линейный график данных
  Table[{N[k *  $\tau_1$ ], UnitConvert[t[QuantityMagnitude[0], QuantityMagnitude[0], QuantityMagnitude[k *  $\tau_1$ ]],
    таблиц... численное... преобразовать ... модуль размерной величины модуль размерной величины модуль размерной величины
    "DegreesCelsius"]}, {k, Range[7]}], PlotTheme -> "Scientific", GridLines -> Automatic]
    диапазон тематический стиль графика линии коорд... автоматический

```



Теперь на расстоянии $0.2 d_0$ ($0.4 r_0$) от поверхности , следовательно $r = 0.6 r_0$)

```

In[437]:=
Table[
  таблица значений
  {N[k *  $\tau_1$ ], UnitConvert[t[QuantityMagnitude[0], QuantityMagnitude[0.6 *  $r_0$ ], QuantityMagnitude[k *  $\tau_1$ ]],
    численное... преобразовать ... модуль размерной величины модуль размерной величины модуль размерной величины
    "DegreesCelsius"]}, {k, Range[7]}] // MatrixForm
    диапазон матричная форма

```

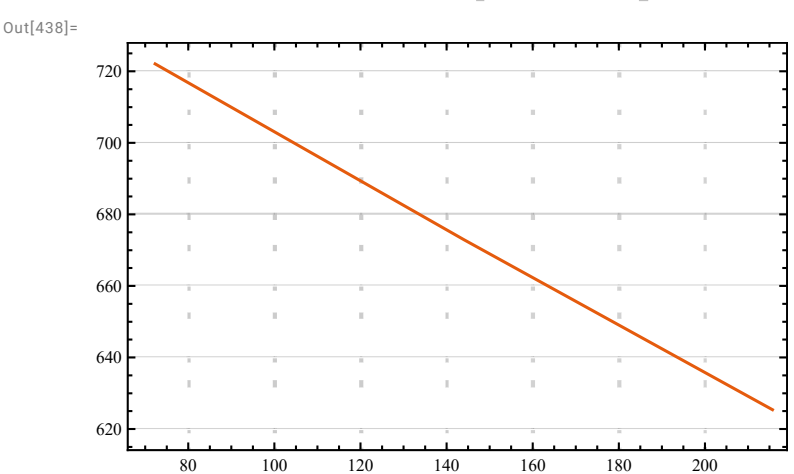
Out[437]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 72. \text{ s} & 722.29758 \text{ }^\circ\text{C} \\ 144. \text{ s} & 672.91971 \text{ }^\circ\text{C} \\ 216. \text{ s} & 625.19071 \text{ }^\circ\text{C} \\ 288. \text{ s} & 580.67423 \text{ }^\circ\text{C} \\ 360. \text{ s} & 539.40989 \text{ }^\circ\text{C} \\ 432. \text{ s} & 501.20172 \text{ }^\circ\text{C} \\ 504. \text{ s} & 465.83015 \text{ }^\circ\text{C} \end{pmatrix}$$

```

In[438]:=
ListLinePlot[Table[
  линейный гра... таблица значений
  {N[k *  $\tau_1$ ], UnitConvert[t[QuantityMagnitude[0], QuantityMagnitude[0.6 *  $r_0$ ], QuantityMagnitude[k *  $\tau_1$ ]],
    численное... преобразовать ... модуль размерной величины модуль размерной величины модуль размерной величины
    "DegreesCelsius"]}, {k, Range[3]}], PlotTheme -> "Scientific", GridLines -> Automatic]
    диапазон тематический стиль графика линии коорд... автоматический

```



Для определения темпа охлаждения и коэффициента температуропроводности заготовки построит несколько зависимостей $\ln(\theta)$ используя данные полученные выше(в центре и на

$$0.6r_0).$$

$$\theta = t - t_{\text{Liquid}}$$

In[439]:=

```
InForCenter =
Table[{N[k * τ1], Log[QuantityMagnitude[UnitConvert[t[QuantityMagnitude[0], QuantityMagnitude[0],
|таблица|...|численное|...|на|...|модуль размерной ве...|преобразовать|...|модуль размерной величины|модуль размерной величины
QuantityMagnitude[k * τ1]], "DegreesCelsius"] - tLiquid]}], {k, Range[7]}}
|модуль размерной величины| |диапазон|
```

Out[439]=

```
{{ 72. s , 6.5674543}, { 144. s , 6.4936378}, { 216. s , 6.417109},
{ 288. s , 6.3400434}, { 360. s , 6.2628816}, { 432. s , 6.1857028}, { 504. s , 6.1085209}}
```

In[440]:=

```
InForPoint6r0 =
Table[{N[k * τ1], Log[QuantityMagnitude[UnitConvert[t[QuantityMagnitude[0], QuantityMagnitude[0.6 * r0],
|таблица|...|численное|...|на|...|модуль размерной ве...|преобразовать|...|модуль размерной величины|модуль размерной величины
QuantityMagnitude[k * τ1]], "DegreesCelsius"] - tLiquid]}], {k, Range[7]}}
|модуль размерной величины| |диапазон|
```

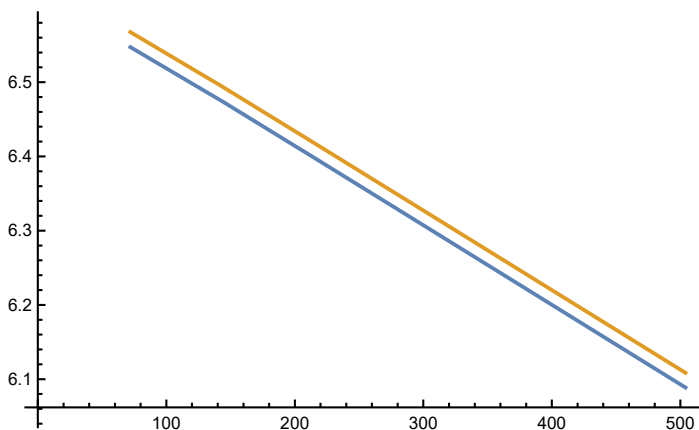
Out[440]=

```
{{ 72. s , 6.5472123}, { 144. s , 6.4737668}, { 216. s , 6.3972475},
{ 288. s , 6.3201822}, { 360. s , 6.2430204}, { 432. s , 6.1658415}, { 504. s , 6.0886597}}
```

In[441]:=

```
ListLinePlot[{InForPoint6r0, InForCenter}]
|линейный график данных|
```

Out[441]=



Нетрудно заметить, что стадии. регулярного режима гарантированно соответствует интервал [200, 500] s.

Найдем число Фурье в краевых точках интервала регулярного режима и удостоверимся что оно больше 0.3. Даже если оно не больше 0.3 то мы все равно можем посчитать все, хоть и с погрешностью.

In[442]:=

$$\text{FoRadialAt200} = \frac{a * \text{Quantity}[200, \text{"Seconds"}]}{r\theta^2}$$

Out[442]=

0.69252464

In[443]:=

$$\text{FoRadialAt500} = \frac{a * \text{Quantity}[500, \text{"Seconds"}]}{r\theta^2}$$

Out[443]=

1.7313116

In[444]:=

$$\text{FoVerticalAt200} = \frac{a * \text{Quantity}[200, \text{"Seconds"}]}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}$$

Out[444]=

0.48091989

```
In[445]:=
FoVerticalAt500 = 
$$\frac{a * \text{Quantity}[500, \text{"Seconds"}]}{\left(\frac{L}{2}\right)^2}$$

Out[445]=
1.2022997
```

Приступим к поиску темпа охлаждения m для наших двух точек

```
In[446]:=
mAtCenter = 
$$\frac{\text{Log}\left[\frac{\Theta3D[0,0,200]}{\Theta3D[0,0,500]}\right]}{\text{Quantity}[500 - 200, \text{"Seconds"}]}$$

Out[446]=
0.0010712841 per second

In[447]:=
mAtPoint6r0 = 
$$\frac{\text{Log}\left[\frac{\Theta3D[0,\text{QuantityMagnitude}[0.6*r0],200]}{\Theta3D[0,\text{QuantityMagnitude}[0.6*r0],500]}\right]}{\text{Quantity}[500 - 200, \text{"Seconds"}]}$$

Out[447]=
0.0010712822 per second
```

Берем среднее

```
In[448]:=
m = 
$$\frac{mAtCenter + mAtPoint6r0}{2}$$

Out[448]=
0.0010712831 per second
```

$Fo > 0.3$ поэтому ряд Фурье сходится быстро и первый член достаточно описывает все решение.

Найдем коэффициент формы K :

```
In[449]:=
K = 
$$\frac{1}{\left(\frac{\text{First}[\epsilon]}{r0}\right)^2 + \left(\frac{\text{First}[\mu]}{\frac{L}{2}}\right)^2}$$

Out[449]=
0.0080753016 m^2
```

Найдем коэффициент температуропроводности по второй теореме Кондратьева (допущение что наше $m = m_\infty$) и сравним с теоретическим:

```
In[450]:=
aExperimental = K * m
Out[450]=
8.6509344 * 10^-6 m^2/s

In[451]:=
a
Out[451]=
8.656558 * 10^-6 m^2/s

In[452]:=
delta a = 
$$\frac{\text{Abs}[a - aExperimental]}{a}$$

Out[452]=
0.00064964349
```

Найдем количество теплоты, отданное цилиндром за время τ_1 :

Для начала найдем сколько теплоты он отдаст до того момента как $\Theta=1$ т.е. $t=t_{\text{Liquid}}$

In[453]:=

$$Q = N \left[\pi * (r_0)^2 * L * \rho * c_p * (t_0 - t_{\text{Liquid}}) \right]$$

численное приближение

Out[453]=

$$2.6157081 \times 10^6 \text{ J}$$

In[454]:=

$$\Theta_{\text{RadialAverage}} = \text{Total} \left[\frac{4 * \text{BiRadial}^2}{\epsilon^2 * (\epsilon^2 + \text{BiRadial}^2)} * \text{Exp} \left[-\epsilon^2 * \text{FoRadial} \right] \right]$$

суммировать показательная функция

Out[454]=

$$0.94620288$$

In[455]:=

$$\Theta_{\text{VerticalAverage}} = \text{Total} \left[\frac{2 * \text{Sin}[\mu]^2}{\mu^2 + \mu * \text{Sin}[\mu] * \text{Cos}[\mu]} * \text{Exp} \left[-\mu^2 * \text{FoVertical} \right] \right]$$

суммировать показательная функция

Out[455]=

$$0.97749884$$

In[456]:=

$$\Theta_{\text{Average}} = \Theta_{\text{VerticalAverage}} * \Theta_{\text{RadialAverage}}$$

Out[456]=

$$0.92491221$$

In[457]:=

$$Q\tau_1 = Q (1 - \Theta_{\text{Average}})$$

Out[457]=

$$196407.74 \text{ J}$$

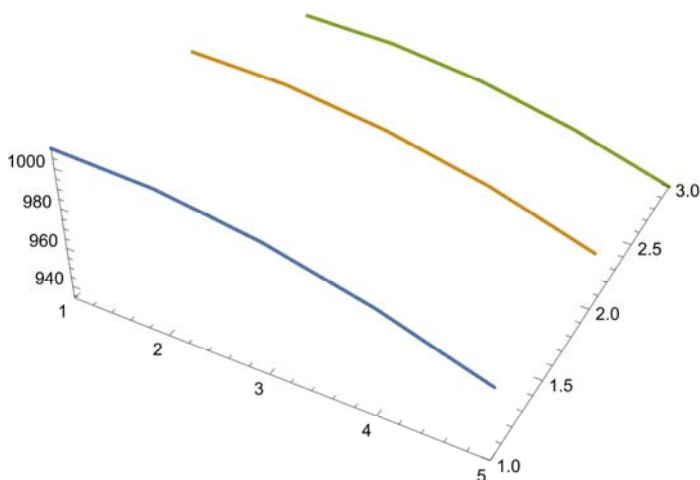
Подытожим полным температурным полем в момент времени τ_1

In[458]:=

$$\text{Show} \left[\text{ListLinePlot3D} \left[\text{Table} \left[\left\{ t[\text{QuantityMagnitude}[x], \text{QuantityMagnitude}[r], \text{QuantityMagnitude}[\tau_1] \right\}, \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left\{ x, \theta, \frac{L}{2}, L/4 \right\}, \left\{ r, \theta, r_0, \frac{r_0}{4} \right\} \right] \right], \text{Boxed} \rightarrow \text{False} \right]$$

показать линейный график таблица модуль размерной величины модуль размерной величины модуль размерной величины показатель ложь

Out[458]=



```
data = Flatten[Table[{x, r, t[QuantityMagnitude[x], QuantityMagnitude[r], QuantityMagnitude[ $\tau$ 1]]},
  {x, 0, L / 2, L / 4}, {r, 0, r0, r0 / 4}], 1];

ListPlot3D[data, Boxed → True, Mesh → None, PlotStyle → Directive[Opacity[0.7], Yellow],
  AxesLabel → {"x (m)", "r (m)", "t (°C)"}, LabelStyle → Directive[Medium, Black], InterpolationOrder → 4]
```

Out[460]=

