

# Дискретизация уравнения Навье–Стокса по оси $x$

Рассмотрим уравнение Навье–Стокса по оси  $x$  для несжимаемой среды с переменной плотностью и вязкостью. Это уравнение имеет вид:

$$\rho \left( u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu \left( \frac{4}{3} \frac{\partial u_x}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \right] - \rho g$$

Здесь:

- $\rho$  — плотность;
- $\mu$  — динамическая вязкость;
- $g$  — ускорение свободного падения;
- $P$  — давление;
- $u_x, u_y$  — компоненты скорости по  $x$  и  $y$ .

## 1. Свойства среды

Плотность и вязкость рассчитываются как линейная смесь по фазовой переменной  $\phi$ :

$$\rho = \rho_{\text{liquid}}(1 - \phi) + \rho_{\text{vapor}}\phi, \quad \mu = \mu_{\text{liquid}}(1 - \phi) + \mu_{\text{vapor}}\phi$$

## 2. Конвективные члены и гравитация

$$\text{conv} = \rho \left( u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + g \right)$$

В коде:

```
conv = rho .* (u_x .* dux_dx + u_y .* dux_dy + g);
```

## 3. Градиент давления

$$\frac{\partial P}{\partial x}$$

В коде:

```
dp_dx = getScalarDerivativeFull(p, dx, dy, 'x');
```

## 4. Вязкие слагаемые

Вязкий член по  $x$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu \left( \frac{4}{3} \frac{\partial u_x}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) \right]$$

В коде:

```
term_x = (4/3) * dux_dx - (2/3) * duy_dy;  
dvisc_x_dx = getScalarDerivativeFull(mu .* term_x, dx, dy, 'x');
```

**Вязкий член по  $y$**

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \right]$$

В коде:

```
term_y = dux_dy + duy_dx;  
dvisc_y_dy = getScalarDerivativeFull(mu .* term_y, dx, dy, 'y');
```

## 5. Полное уравнение

Полная дискретная форма уравнения в направлении  $x$ :

$$R = \rho \left( u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + g \right) + \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu \left( \frac{4}{3} \frac{\partial u_x}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \right]$$

Соответствующая строка кода:

```
R = conv + dp_dx - dvisc_x_dx - dvisc_y_dy;
```

Таким образом, функция `computeNSResidualX_full` реализует численный расчёт остаточного члена уравнения Навье–Стокса по  $x$ -направлению, включая вклад давления, вязкости, конвекции и гравитации.