Численное вычисление производных

Для аппроксимации первых и вторых производных по пространственным координатам на равномерной прямоугольной сетке используются векторизованные функции без циклов. Эти функции реализуют центральные и односторонние разности для внутренних и граничных точек соответственно.

1. Первая производная: getScalarDerivativeFull

Функция `getScalarDerivativeFull(F, dx, dy, direction)` вычисляет первую частную производную от скалярного поля $F(x, y)$ по направлению x или y на всей сетке. Используется **центральная разность** во внутренних точках и **односторонняя разность** на границах.

- При `direction = 'x'`:

$$\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{i,j} \approx \begin{cases} \frac{F_{i,j+1}-F_{i,j-1}}{2\Delta x}, & 2 \le j \le N-1 \\ \frac{F_{i,2}-F_{i,1}}{\Delta x}, & j=1 \\ \frac{F_{i,N}-F_{i,N-1}}{\Delta x}, & j=N \end{cases}$$

- При `direction = 'y'`:

$$\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{i,j} \approx \begin{cases} \frac{F_{i+1,j}-F_{i-1,j}}{2\Delta y}, & 2 \le i \le M-1 \\ \frac{F_{2,j}-F_{1,j}}{\Delta y}, & i=1 \\ \frac{F_{M,j}-F_{M-1,j}}{\Delta y}, & i=M \end{cases}$$

2. Вторая производная: getSecondScalarDerivativeFull

Функция `getSecondScalarDerivativeFull(F, dx, dy, direction)` вычисляет **вторую производную** скалярного поля по направлению x или y с помощью центральной схемы:

- При `direction = 'x'`:

$$\left.\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right|_{i,j} \approx \begin{cases} \frac{F_{i,j+1}-2F_{i,j}+F_{i,j-1}}{\Delta x^2}, & 2 \le j \le N-1 \\ \text{вперед: } \frac{F_{i,3}-2F_{i,2}+F_{i,1}}{\Delta x^2}, & j=1 \\ \text{назад: } \frac{F_{i,N}-2F_{i,N-1}+F_{i,N-2}}{\Delta x^2}, & j=N \end{cases}$$

- При `direction = 'y'`:

$$\left.\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right|_{i,j} \approx \begin{cases} \frac{F_{i+1,j}-2F_{i,j}+F_{i-1,j}}{\Delta y^2}, & 2 \le i \le M-1 \\ \text{вперед: } \frac{F_{3,j}-2F_{2,j}+F_{1,j}}{\Delta y^2}, & i=1 \\ \text{назад: } \frac{F_{M,j}-2F_{M-1,j}+F_{M-2,j}}{\Delta y^2}, & i=M \end{cases}$$

3. Производная от произведения: getProductDerivative

Функция `getProductDerivative(mu, f, dx, dy, direction)` вычисляет производную от произведения двух скалярных полей $f(x, y)$ и $\mu(x, y)$:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\mu f) \quad \text{или} \quad \frac{\partial}{\partial y}(\mu f)$$

Она вызывает `getScalarDerivativeFull` для предварительно перемноженных массивов:

```
prod = mu .* f;
D = getScalarDerivativeFull(prod, dx, dy, direction);
```

Эта функция используется, например, для расчёта вязких членов вида $\partial_x(\mu \partial_y u_x)$ и аналогичных, где μ и производные скоростей переменные по пространству.

Вывод

Эти три функции позволяют быстро и эффективно вычислять производные от скалярных и произведённых полей на сетке без явных циклов, обеспечивая корректную аппроксимацию внутренних и граничных точек с учётом физических свойств среды.