

## Дискретизация уравнения энергии

Рассмотрим уравнение энергии в нестационарном случае без источников, но с учётом переменных физических свойств и вязкого нагрева (диссипации). Стационарная форма уравнения:

$$\rho C_p \left( u_x \frac{\partial T}{\partial x} + u_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \Phi$$

где:

- $T$  — температура;
- $\rho, C_p, \lambda, \mu$  — плотность, теплоёмкость, теплопроводность и динамическая вязкость соответственно;
- $\Phi$  — член вязкой диссипации.

### 1. Свойства среды

Все физические свойства вычисляются по фазовой переменной  $\phi$ :

$$\rho = \rho_{\text{liq}}(1 - \phi) + \rho_{\text{vap}}\phi \quad C_p = C_{p,\text{liq}}(1 - \phi) + C_{p,\text{vap}}\phi \quad \lambda = \lambda_{\text{liq}}(1 - \phi) + \lambda_{\text{vap}}\phi \quad \mu = \mu_{\text{liq}}(1 - \phi) + \mu_{\text{vap}}\phi$$

### 2. Конвективные члены

Конвекция записывается как:

$$\text{Conv} = \rho C_p \left( u_x \frac{\partial T}{\partial x} + u_y \frac{\partial T}{\partial y} \right)$$

В коде:

```
conv = rho .* Cp .* (u_x .* dT_dx + u_y .* dT_dy);
```

где производные  $dT/dx$  и  $dT/dy$  получаются через `getScalarDerivativeFull`.

### 3. Диффузионные члены (теплопроводность)

Члены вида:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right)$$

В коде реализованы как:

```
term_x = lambda .* dT_dx;  
diff_x = getScalarDerivativeFull(term_x, dx, dy, "x");  
  
term_y = lambda .* dT_dy;  
diff_y = getScalarDerivativeFull(term_y, dx, dy, "y");
```

#### 4. Вязкая диссипация энергии

Третий правый член — вязкое нагревание, записывается в виде:

$$\Phi = \mu \left[ \left( \frac{4}{3} (\nabla \cdot \vec{u}) \right)^2 + \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right)^2 - \frac{16}{3} \frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{\partial u_y}{\partial y} \right]$$

В коде:

```
shear_1 = dux_dx + duy_dy;  
shear_2 = dux_dy + duy_dx;  
visc_term = mu .* ( (4/3) * shear_1.^2 + shear_2.^2 - (16/3) * dux_dx .* duy_dy );
```

#### 5. Полная невязка уравнения энергии

Окончательная форма невязки уравнения энергии:

$$R = \rho C_p (u_x \partial_x T + u_y \partial_y T) - \partial_x (\lambda \partial_x T) - \partial_y (\lambda \partial_y T) - \Phi$$

В коде:

```
R = conv - diff_x - diff_y - visc_term;
```

Таким образом, функция `computeEnergyResidual` реализует векторизованную дискретизацию уравнения энергии с учётом конвективных, теплопроводных и вязких эффектов.