# =Постановка задачи

Для решения двухфазной системы представляющей собой пленочной кипения недогретой жидкости на вертикальной пластине, в котором ось (x) направленна против направления силы тяжести, а ось (y) по нормали к поверхности пластины, необходимо решить достаточно большую систему дифференциальных уравнений. Основная цель такого моделирования заключается в определении характерных параметров получаемых полей скорости, температуры и давления для дальнейшего реалистичного построение модели теплообмена пленочного режима кипения. Основной способ решения системы дифференциальных уравнений сведем к решению задачи оптимизации. Для этого представим функцию ошибок, которую необходимо оптимизировать или нахождение минимального значения, следующим виде

(1)

В этом выражение под Qk представляет собой записи дифференциальных уравнений, которые нам необходимо решать, а Qk\* представляет собой ожидаемое значение при постановки дифференциальное выражения правильных параметров системы или другими словами это значение равняется нулю. Соответственно для определения точки минимума, необходимо взять частную производную по параметрам системы и приравнять получаемое значение к нулю. Записывается это следующим образом

(2)

где q – параметр системы такой как скорость, давления, температура. Как известно основная проблема в решение задачи оптимизации — это наличия множества возможных решений из-за множества точек минимума. По решению (2) в общем виде можно определить все возможные такие конфигурации системы, которые принимают минимальное значение и среди этих значений выбрать самое минимальное. Обычно в общем виде (2) не представляет возможности нахождение решения из-за чрезвычайно получаемого сложного выражения, что является основной проблемой в задачи оптимизации. В текущей постановки задачи такой проблемы не должно возникать так как для нахождения однозначного решения дифференциального уравнения необходимо рассматривать однозначные граничные и начальные условия, что в свою очередь мы определенным образом будет задано при решении. По этой причине решение дифференциальных уравнений в постановки задачи оптимизации является оправданным вариантом даже в случае нахождение только локального минимума, так как этот локальным минимум будет одновременно считаться глобальным минимум функции ошибок.

Теперь перейдем к самим дифференциальным уравнением, которые необходимо решать. Так как мы рассматриваем двухфазный поток со строгим разделам фаз, то получаемая система уравнения пишется одновременно для паровой и жидкой фазы. Сами получаемый вид дифференциального уравнения не зависит от размариваемой фазы. Из-за этого индексация по какой фазе будет рассматриваться дифференциальное выражение будет опускаться. Среди таких дифференциальных уравнений которые справедливы для паровой и жидкой фазы является уравнение неразрывности, Навье-Стокса и энергии.

Уравнение неразрывности записывается следующим образом

(3)

В этом выражение необходимо суммировать все это выражение по индексу (k), аналогично также будет происходить и последующих выражениях. Уравнение Навье-Стокса для проекции (i) записывается следующим образом

(4)

где δ – является дельта Кронекера или единичная матрица (тензор). Уравнение сохранение энергии записывается как

(5)

Это является тремя основными уравнениями, в котором используется в основном случае в данной задачи. Также необходимо рассмотреть условия совместности, которые возникают при контакте паровой и жидкой фазы. Такие условия записывается в положение нормали и касательной к межфазной границе. Первое такое условия вытекает из уравнения неразрывности

(6)

Второе и третье уравнение получается из уравнения Навье-Стокса относительно нормали и касательного направления

(7)

(8)

где H – кривизна поверхности; τ – тензор вязких напряжений. Касательных направлений может быть двух направлений в случае трехмерной постановки задачи. Последнее уравнение совместности получается из уравнения энергии

(9)

где q – тепловой поток; Δh – теплота парообразования. По индексу (k) необходимо выполнить суммирования по всем направлением рассматриваемой системой. C (3) по (9) представляют собой системой дифференциальных уравнений, в которой не хватает граничных и начальных условий для однозначного решения. В качестве начальных условия мы не будем их рассматривать, так как мы будем рассматривать стационарный вариант задачи, а значит все производные d/dt должны равняться нулю. Также в качестве упрощения будем рассматривать только двухмерную постановку задачи. В качестве граничных условий будем рассматривать следующие выражения, которые является однозначными

Теперь рассмотрим граничные условия которые является не совестим однозначными и справедливыми

Если условия на бесконечности можно как-то еще оправдать в такой постановки задачи, то условия в нуле является крайне сомнительными. Ладно, эти условия легко можно заменить подберём что-то более адекватное потом.

Теперь перейдем с структуре решение дифференциальных уравнений. Для этого используем метод конечных разностей для замены дифференцирования на конечные разносности. Для уравнений (3) по (5) будем использовать центральную разностную схему для описание первых и вторых производных. В общем виде они записывается как

(10)

Данные выражения являются правильными, но нам необходимо рассмотреть более сложный вариант такой записи, который будет справедлив для неструктурированной сетки. Такая необходимость возникает из-за непредсказуемой межфазной границы, которые также в ходе решения задачи необходимо определить. В действительности можно в такой постановки использовать структурированную сетку, но в этом случае придется сделать крайне мелку сетку, в котором можно прослеживать изменение сетки и соответственно изменение полей. В каком-то смысле в этом случае шаг по координате должен быть меньше 1 нм, когда масштаб который мы будем рассматривать около 5 см на 5 см, что означает, что количества разбиений нам потребуется порядка 1014 и более для достаточно реалистичного моделирования. Такое количества ячеек является перебором, хоть нам и требуется высокая точность, но нет такой необходимости настолько сильно мельчить сетку, когда можно использовать неструктурированную координатную сетку. В неструктурированной координатной сетки в отличии от обычной могут использовать не только прямоугольники размеры которых строга зафиксированы координатной сеткой, а вообще все что угодно, но в этом случае необходимо правильно задать связь между ячейками. В нашем случае в основном будут использовать прямоугольники размеры которого по координате (y) изменяются в зависимости от положения межфазной границы. Это позволяет нам зафиксировать определенное количества ячеек по координате (y), так чтобы в них находился только паровая или жидкая фаза. В случае по координате (х) используется практически постоянный шаг в зависимости от количества разбиений. В общем случае будем считать, что количества ячеек для паровой и жидкой фазы равняется (N) на (M). Где N – количества разбиение по координате (х); M – количества разбиение по координате по (y).

Будем считать, что толщина межфазной границы по координате (y) постоянная и равняется (ε) – некоторая бесконечно малая величина порядка 10-9 и меньше. Аналогично нам также требуется сделать шаги на величину (ε) от граничных условий, чтобы минимизировать искажение от граничных условий из-за возможного больших шагов по координате (х) или (у).

Теперь когда мы разобралась с основной постановки задачи вернемся к записи (10), которая справедлива для структурированной координатной сетки. В нашем случае центральные разностные схемы первой и второй производной записывается следующим образом для производной по (х) и (у) для уравнении с (3) по (5). Для начала рассмотрим одинарные производные

(11)

где w – коэффициенты контакта поверхности. Графически коэффициент контакта можно объяснить следующим образом

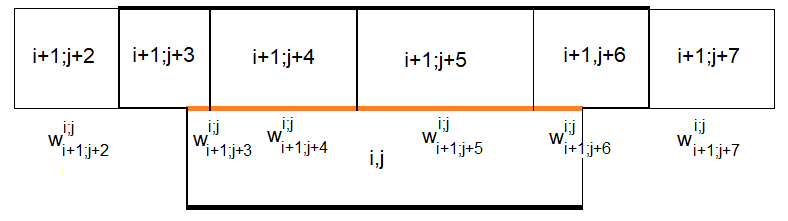


Рисунок 1 Демонстрация неструктурированной сетки с коэффициентом контакта для ячейки (i;j)

На представленном примере (Рисунок 1) получилось следующее, что ненулевые коэффициенты контакта является от (j+3) до (j+6), так как эти контрольные ячейки контактируют с контрольной ячейкой (i;j), это показано в виде оранжевой линии, где происходит такой контакт. Соответственно сумма коэффициентов поверхности является нормированной величиной и равняется единицы

(12)

Теперь перейдем чему равняется коэффициент поверхности. Как уже было сказано коэффициент поверхности является не нулевым, если существует пересечение ячеек как это показано на рисунке. В случае такого пересечение коэффициент поверхности можно определить следующим образом

(13)

По рисунку можем убедиться, что представленная формула является рабочей. В случае если пересечения такого нет, то получаемый результат по этой формуле является отрицательным, что позволяет использовать это как критерий, что пересечения нет и заменить получаемый отрицательный результат на ноль.

Теперь когда мы познакомились что такое коэффициент поверхности и как он определяется вернемся к определению частных производных, которые необходимо определить для использования метода конечных разностей. В случае второй частной производной по оси (y) никакой особой сложности не возникает она определяется стандартным образом, так как по этой оси сетка является структурированной

(14)

В случае второй частной производной по оси (х) все крайне не просто на самом деле. Конечно, хочется записать по аналогии как (14) виде

Но эта запись при использовании коэффициентов поверхности является не правильным. Определим двойную частную производную подробно чтобы показать в чем возникает проблема

Этот шаг является достаточно понятным и не требует никаких пояснений. Тогда сделаем второй шаг

(15)

Тут как можно видеть и заключается основная проблема. В данном случае у нас возникает двойное суммирование, которая не может быть всегда равной

(16)

Такое равенство выполняется только в случае структурированной сетки или когда коэффициенты поверхности равняется

Теперь рассмотрим смешенные производные такого вида

(17)

Как видите получаемые производные уже получается крайне громоздкими с достаточно сложной индексацией.

Получаемые формулы с (3) по (5), можно упростить так как используется условия стационарности решения. В этом случае уравнения (3) запишется как

(18)

Достаточно похожее выражения встречается в (4) и (5) уравнениях и если ее упростить, то окажется

(19)

Данное упрощение является незначительным, но это немного уменьшает получаемую запись при дальнейшем рассмотрении этих дифференциальных уравнений. Далее, подробно рассмотрим как записывается каждое дифференциальное запись с уравнения с (3) по (5) по методу конечных элементов

# Уравнение неразрывности

Получаемая дифференциальная запись выглядит следующим образом в случае двухмерной постановки для стационарного случая

Используем конечно разностные схемы, которые записаны (11)

(20)

Необходимо понимать, что получаемая запись справедлива только для ячеек по (i) от 2 до N-1 и (j) от 2 до M-1. В противном случае будет выход за границу выбранного участка расчета. Для решения задачи оптимизации принимается, что за выходом за выбранной диапазон (14) тождественно равняется нулю. Из получаемого выражение нам интересно определить частные производные из уравнения (2) для решения задачи оптимизации и в лучшем случае она должна равняться нулю

Соответственно, нам необходимо определить такие частные производные по всем параметрам системы. В нашем случае эти параметры системы представляют собой поля скорости, что означает, что нам необходимо определить частную производную по каждому элементу полю скорости. Чтобы не записывать бесконечно множества таких производных запишем только частный случай некоторой значения скорости с координатами (i1;j1). Как можем убедиться по записи (14), существует только два элемента суммы, которые контактируют с элементом ячейкой (i1;j1). Соответственно, это записывается следующим образом для производной по проекции скорости по оси (у)

(21)

Намного сложнее запись получается в случае производной проекции скорости по оси (х) из-за наличия коэффициентов поверхности (w)

(22)

Следующее записи будут многократно усложняться и становиться крайне гигантскими к этому приходиться морально подготовиться.

# Уравнение Навье-Стокса

Перейдем теперь ко второму уравнению (4). Это уравнения записывается двух проекция по оси (х) и (у). Для начала запишем получаемое выражение на проекции (х)

(23)

Аналогично также запишем это выражение для проекции по оси (y)

(24)

Распишем теперь как выглядит записи (23) и (24) в случае замены производных на конечно разностные схемы. Начнем с уравнения (23)

(25)

Аналогично запишем выражение (24)

(26)

Теперь перейдем к определению частных производных по значению поля. Начнем с определение производных по давлению, так как по этим производные является самые простые с по сравнению с остальными производными, которые необходимо определить

(27)

Теперь перейдем к сложной части определение частных производных по проекции скоростей. Из-за своей гигантской записи будем писать их раздельно, так как ошибиться в этом случае достаточно элементарно

(28)

Теперь тоже самое, но производная по проекции скорости по оси (y)

(29)

Перейдем теперь ко второму уравнению и определим ее частные производные

(30)

Теперь тоже самое, но производная по проекции скорости по оси (y)

Ниже опечатка, вместо Qx должно быть Qy

(31)

# Уравнение энергии

Перейдем теперь к последнему сложному дифференциальному уравнению (5), которую необходимо достаточно сложно заменять дифференцирования и потом дальнейшее брать производные по значениям полей. Уравнение которое необходимо решать записывается следующим образом

Если это упростить, то получается следующая запись

(32)

Заметим, что (32) отличается от (5), а именно было сделано замена энтальпии на температуру. Это сделано для упрощение и если даже теплоемкость значительно изменяется от температуры, то мы просто сделаем большее разбиений, чтобы аннулировать эффект изменение свойства. В действительности такое упрощения для решения двухфазных систем является крайне нежелательным, так как на самом деле по энтальпии в разы удобнее определять границу раздела жидкость/пар. При такой варианте необходимо использовать когда мы ожидаем, что произвольно может отрываться паровые пузыри от межфазной границы, что в свою очередь значительно повышает качества симуляции. Но в этом случае мы полностью потеряем все преимущества выбора неструктурированной сетки, а именно необходимости малого количества разбиение координатной сетки для рассмотрение получаемых полей. Это конечно является достаточно серьезной проблемой, мы можем сделать более качественную симуляцию и получать более достоверные результаты, но для этого потребуется безумно намельчить сетку из-за чего время расчета стремиться к бесконечности или сделать менее качественную симуляцию с временем расчета несколько минут. Как по мне выбор тут является достаточно очевидным лучше сделать грубее и изучить получаемые результаты в течение несколько дней, чем ожидать хоть какой-то результат в течение нескольких лет. Конечно, такой научный подход является нежелательным, но если рассматривать из этих двух выборов, то лучше рассмотреть, тот который можно изучить и получить какие-то результаты, чем не получить абсолютно ничего.

Понятно, что для качественной симуляции с возможностью отрыва паровых пузырей нужно рассматривать именно неструктурированную стеку на подобие которая тут рассматривается, но ее нужно переделать так чтобы она могла динамически вида изменяется, а не как в текущем варианте, что она является статичной. Так как в этом случае количества контрольных объем на множества порядков уменьшается по сравнению использования структурированной сеткой. Но при таком варианте, необходимо уже рассматривать неструктурированную стеку по координатам, что значительно усложнит весь математический аппарат, если мы говорим про двухмерную симуляцию. В случае трехмерной постановки, то там скорее всего одна формула на всю получаемую страницу будет получаться. К сожалению, сам автор является достаточно глупым и ленивым для создания такой интересной конфигурации сетки.

Теперь перейдем в тот самый момент, когда нужно делать замену дифференцирования на конечно разности

(33)

Перейдем на этап, в котором необходимо определить производные по полю. Начнем с поля температуры

(34)

Определим частную производную проекции скорости по оси (х)

(35)

Конечно, учитывать в градиенте вязкую диссипацию это конечно вышей пик издевательства, но как говориться а вдруг, что-то значительно измениться. Да, при написание таких формул крыша едет знатно.

Определим частную производную проекции скорости по оси (y)

Поздравляем, мы закончили самую муторную часть всего этого

# Уравнение совместности

Перейдем теперь ко второй части, которая из себя представляет рассмотрение межфазной границы. Принципе это часть является многократно проще по своей структуре, чем прошлая в котором решается основные уравнения, но она в действительности также включается себе множества особенностей которые необходимо учитывать.

По постановки задачи говорилось, о том, что на межфазной границы будет использовать отличная неструктурированная координатная сетка, а именно прямоугольные трапеции. Конечно, может показаться, что это излишняя усложнение, но в действительности нам все равно в самом расчете придется предполагать такую структуру, для определения кривизны поверхности. Также несмотря на это такой подход имеет также множества положительных элементов. Первый такой элемент, что в этом случае не будет возникать проблемы с коэффициентом поверхности (w), который будет контактировать с другой фазой, он при такой структуре принципе даже не понабиться. Второй положительный элемент, что количества необходимых решать уравнений совместности сведется к минимуму, так как контакт с межфазной границей для контрольного объема будет происходить только через одну криволинейную поверхности. Конечно, не может что такой вариант имеет только положительные особенности. Естественно, за такой вариант мы платим увеличением сложности записи самих уравнений условности.

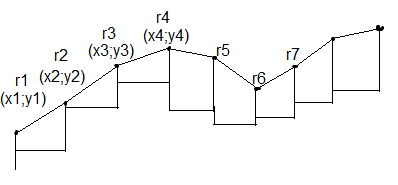


Рисунок 2 Пример, координатной сетки на межфазной границы

Для большей понимания, что будет происходить рекомендуется рассмотреть (Рисунок 2), так как на нем изображена каким образом будет представляется межфазная граница, и как при этом будет выглядеть координатная сетка. Как можно заметить, сама криволинейная поверхность описывается только прямыми линиями, а это значит вектор касательного направления в нашей координатной системы отчета определяется элементарным образом

(36)

Теперь, когда мы знаем вектор касательного направления мы можем достаточно просто, определить нормаль этой поверхности. Для этого достаточно умножить получаемый вектор костальной на матрицу поворота на 90°.

(37)

Теперь нам необходимо договориться, что под положительным направлением нормали является переход из жидкости в пар, так как это имеет значения, когда нужно будет определять кривизну поверхности. В случае если направления нормали получилось направлена в жидкость, то при таком вариант изменяется знак коэффициентов касательного направления и нормали. Для дальнейшего упрощения будем считать, что вектор нормали записывается через коэффициенты n=(α;β), таким образом

(38)

Теперь перейдем к определению кривизны поверхности, которая используется в (7)

(39)

где R – радиус кривизны или радиус окружности. Из-за использование двухмерной постановки задачи, считается что нет никаких изменений относительно третей оси (z). Из-за чего один радиус кривизны равняется бесконечности. Так как радиус кривизны представляет собой радиус окружности, то можно записать уравнения окружности из этого уравнения определить радиус кривизны. Радиус окружности, у которого с центром окружности, в точки r0 записывается как

(40)

Получается, что для нахождения радиус кривизны поверхности нужно как минимум 3 точки межфазной границы. Это означает, что на границах расчётное области у нас будет не хватать по одной точки. В этом случае приходиться использовать допущение, что кривизна на краю равняется кривизне для соседней ячейки. Перейдем теперь к решению для точек ri- 1; ri; ri+1. К сожалению, для такого решения нет компактной записи

(41)

Как было уже сказано нам также нужно определить получаемый знак радиуса кривизны. Знак мы будем определять по направлении нормали к центру окружности. В этом случае нам необходимо определить координаты центра окружности при условии, конечно, что обратный радиус кривизны не равняется нулю. Координаты центра по 3 трем точкам определяется как

(42)

Соответственно когда нам известны координаты центра, нам необходимо определить вектор от поверхности окружности к центру и разложить данное направления по нормальной составляющей и касательной, математически это записывается как

При решение такой системы уравнений получаем, что

(43)

Заметим, что в этом уравнение знаменатель тождественно равняется единицы, если конечно (n) и (τ) является единичными векторами. Далее знак радиуса кривизны будем определять по получаемому знаку коэффициента (i). Если (i) положительный значит получаемый радиус кривизны также положительный.

Теперь перейдем к записи уравнений совместности в нашей постановки задачи (6) - (9). Первое на, что требует обратить внимания, что в уравнения совместности используется как векторные слагаемые, как и скалярные элементы. В записи уравнений (6) и (9) имеют векторную запись, что позволяет расписать эти уравнения на отдельные векторные направления. В случае скалярных уравнений (7) и (8) необходимо особое внимания уделить, что в нем имеется векторные произведения. Рассмотрим запись (6) более внимательно

Получаемое уравнения можно расписать на два уравнения следующим образом

(44)

Заметим, что в этой записи нельзя сокращать коэффициенты (α) или (β), так как если один из этих коэффициентов равняется нулю, то это является решением этого уравнения. Аналогичную запись также имеет уравнения (9)

(45)

Как можно заметить в уравнение энергии особенная ситуация, в случае если один из коэффициентов (α) или (β), равняется нулю то не вся уравнения сразу сокращается. Также отдельно рассмотрим скалярные произведения из уравнения (7) и (8)

(46)

Последнее, что осталось это определение касательных напряжений, которая является скалярной величиной, в нашем случае это записывается как

(47)

Напомним, что костальные напряжение записывается как

Если подставить получаемые костальные напряжение и упростить, то получается

(48)

Теперь у нас хватает все, чтобы начать снова эту геморройную часть моделирования, а именно заменять дифференцирования на конечно разностные элементы. Также напомним, что из-за особенности структуры сетки межфазная граница всегда имеется при значения (j = {M; M+1}) этим мы будем пользоваться. Таким образом основным коэффициентов для определение межфазной границей будет индекс (i). Начнем с уравнения (44)

(49)

Такие образом для определения градиента по скорости запишется как

(50)

Жаль, что простая часть закончилась переходим уже более сложным уравнениям. В частности уравнения (7) записывается как

(51)

где γ – это знак кривизны поверхности, которая определяется (43)

Из-за того что условия на межфазной границы является уникальными, то приходиться расписывать для каждого элемента производной по отдельности

Это мы получили основную производную, теперь также нужно отдельно добавить производные в точках, которые не могут войти в основное уравнения, как это было раньше

(52)

Аналогично также делаем для второй проекции скорости

(53)

Теперь самое простое производные по давлению

(54)

Теперь перейдем как расписывается условия совместности проекции скорости по касательной (8)

(55)

Определим частные производные этого выражения как обычно

(56)

Тоже самое, но для другой проекции скорости

(57)

Надеемся, что ошибок никаких ошибок не сделано. Переходим к последнему записи уравнения совместности (9)