디지털신호처리

강 의 노 트

퓨리에 변환의 특징

학습내용

- ❖ 연속 시간 신호에 대한 퓨리에 변환
- ❖ 주기 신호에 대한 퓨리에 변환

학습목표

- ❖ 연속 시간 신호에 대하여 퓨리에 변환을 수행할 수 있다.
- ❖ 주기 신호에 대한 퓨리에 변환을 수행할 수 있다.

연속 시간 신호에 대한 푸리에 변환

1. 다양한 신호에 대한 푸리에 변환과 역변환

예제 14-01

지수 신호 $x(t)$에 대한 푸리에 변환 $X(jw)$를 구해보자.

$$x(t)=e^{-at}u(t),\quad a>0 \qquad X(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt$$

[예제풀이]

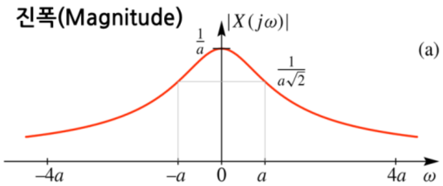
$$X(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{0}^{\infty}e^{-at}\,e^{-j\omega t}dt=\int_{0}^{\infty}e^{-(a+j\omega)t}dt=\frac{e^{-(a+j\omega)t}}{-(a+j\omega)}\Big|_0^{\infty}$$
$$=\frac{1}{a+j\omega}$$

$$x(t)=e^{-at}u(t) \quad\Longleftrightarrow\quad X(j\omega)=\frac{1}{a+j\omega}$$

[시간 영역] [주파수 영역]

$$X(j\omega)=\frac{1}{a+j\omega}$$

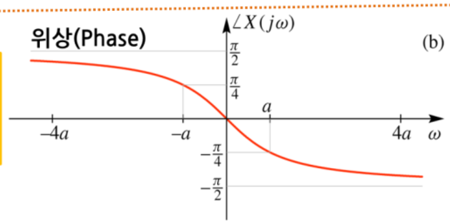
진폭(Magnitude)



$$\left|\frac{1}{a+j\omega}\right|=\left|\frac{1}{\sqrt{a^2+\omega^2}}\right|$$

$$X(-j\omega)=X^*(j\omega)$$

위상(Phase)



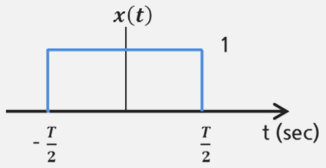
$$\angle X(j\omega)=-\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

연속 시간 신호에 대한 푸리에 변환

1. 다양한 신호에 대한 푸리에 변환과 역변환

예제 14-02

다음 구형파 신호에 대한 푸리에 변환을 구해보고, 실제 스펙트럼을 그려보자.

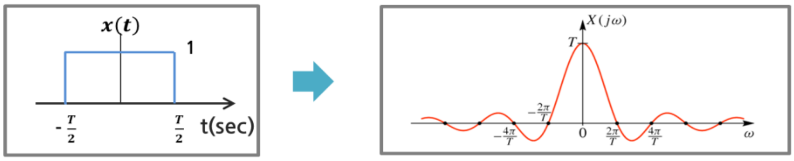


$$x(t) = \begin{cases} 1 & |t| < T/2 \\ 0 & |t| > T/2 \end{cases}$$

[예제풀이]

$$X(j\omega) = \int_{-T/2}^{T/2} (1) e^{-j\omega t} dt = \int_{-T/2}^{T/2} e^{-j\omega t} dt = \left. \frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega} \right|_{-T/2}^{T/2} = \frac{e^{-j\omega T/2} - e^{j\omega T/2}}{-j\omega}$$

$$x(t) = \begin{cases} 1 & |t| < T/2 \\ 0 & |t| > T/2 \end{cases} \Leftrightarrow X(j\omega) = T \frac{\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)}{\frac{\omega T}{2}}$$

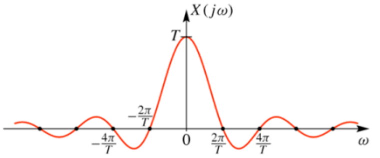


$X(j\omega) = T \sin c(\omega T / 2)$

- 참고: 싱크(sinc) 함수

- 신호와 시스템에서 많이 사용되는 함수, 진폭이 감소하는 사인신호

$$X(j\omega) = T \cdot \frac{\sin(\omega T / 2)}{\omega T / 2} = T \cdot \sin c(\omega T / 2)$$



- **ω=0** 에서의 값은 구형파의 면적
- sinc 함수 = 0이 되는 값은 sin 함수 = 0 되는 주파수

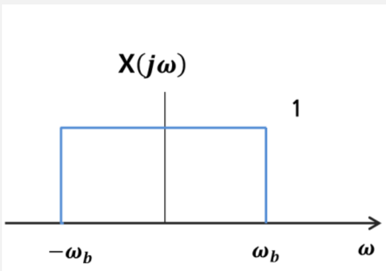
$$\sin(\omega T / 2) = 0 \quad 즉, \omega T / 2 = \pm\pi, \pm 2\pi, \cdots, \omega = \pm\frac{2\pi}{T}, \pm\frac{4\pi}{T}, \cdots$$

연속 시간 신호에 대한 푸리에 변환

1. 다양한 신호에 대한 푸리에 변환과 역변환

예제 14-03

푸리에 변환이 X($j\omega$)인 경우 시간 영역의 $x(t)$를 계산하기

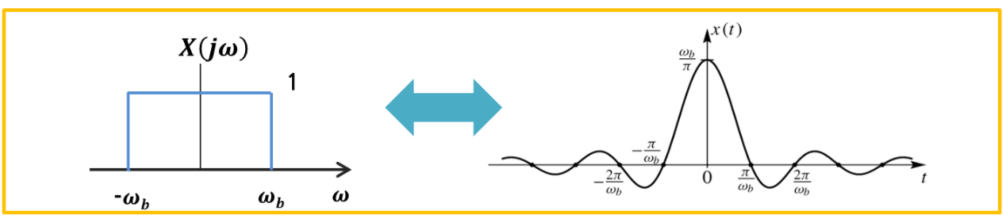


$$X(j\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < \omega_b \\ 0 & |\omega| > \omega_b \end{cases}$$

[예제풀이]

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_b}^{\omega_b} 1e^{j\omega t}d\omega = \frac{1}{2\pi}\frac{e^{j\omega t}}{jt}\bigg|_{-\omega_b}^{\omega_b} = \frac{1}{2\pi}\frac{e^{j\omega_b t} - e^{-j\omega_b t}}{jt}$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\frac{e^{j\omega_b t} - e^{-j\omega_b t}}{jt} \quad x(t) = \frac{\sin(\omega_b t)}{\pi t}$$



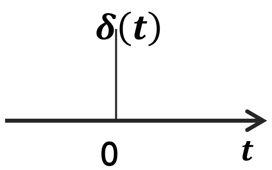
$$x(t) = \frac{\sin(\omega_b t)}{\pi t} = \frac{\omega_b}{\pi}\mathrm{sinc}(\omega_b t) \Leftrightarrow X(j\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < \omega_b \\ 0 & |\omega| > \omega_b \end{cases}$$

- 주파수 영역의 대역폭 ω_b가 커지면 커질수록 시간 영역에서 처음으로 0이 되는 위치는 t=0에 더 가깝게 이동, 시간폭은 더 작아짐

연속 시간 신호에 대한 푸리에 변환

2. 임펄스 신호에 대한 푸리에 변환과 역변환

- 임펄스 함수 임의의 한 순간에만 신호가 집중되고, 임펄스 신호를 적분하면 단위면적 1을 가지며,
  샘플링 성질을 가지고 있는 신호



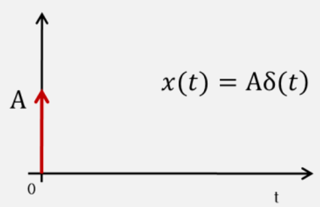
[단위 임펄스 함수]

$$\delta(t) = 0, \quad t \neq 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau)\, d\tau = 1$$

예제 14-04

다음 임펄스 신호에 대한 푸리에 변환(스펙트럼 표현)을 구해 보자.



[예제풀이]

- 푸리에 변환식에 의하여 $X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} A\delta(t) e^{-j\omega t} dt = A$

[시간 영역] [주파수 영역]

주기 신호에 대한 퓨리에 변환

1. 정현파 신호에 대한 퓨리에 변환

- 주파수 ω_0의 복소지수 신호는 주파수 ω_0 에서만 0이 아닌 퓨리에 변환을 가짐

$$e^{j\omega_0 t} \quad \xleftrightarrow{\text{퓨리에 변환}} \quad 2\pi\delta(\omega-\omega_0)$$

[시간 영역] [주파수 영역]

예제 14-05

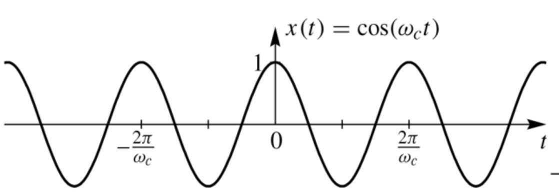
다음 정현파 신호에 대한 퓨리에 변환은?

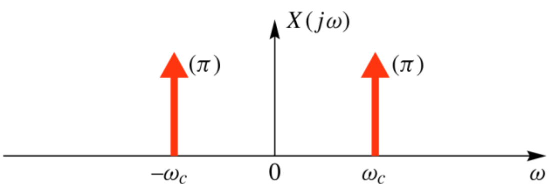
$$x(t)=\cos(\omega_c t)$$

[예제풀이]

$$x(t)=\cos(\omega_c t)=\frac{e^{j\omega_c t}+e^{-j\omega_c t}}{2}=\frac{1}{2}e^{j\omega_c t}+\frac{1}{2}e^{-j\omega_c t}$$

$$\therefore X(j\omega)=\pi\delta(\omega-\omega_c)+\pi\delta(\omega+\omega_c)$$





$$x(t)=A\cos(\omega_c t+\varphi) \quad \Leftrightarrow \quad X(j\omega)=\pi A e^{j\varphi}\delta(\omega-\omega_c)+\pi A e^{-j\varphi}\delta(\omega+\omega_c)$$

주기 신호에 대한 퓨리에 변환

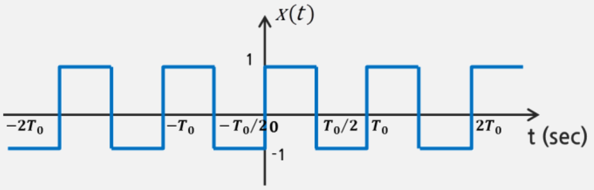
2. 일반적인 주기 신호에 대한 퓨리에 변환

- 주기가 T_0 인 신호 $x(t)$는 퓨리에 급수

$$X(j\omega)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}2\pi a_k\delta(\omega-k\omega_0)$$

예제 14-06

다음 구형파 신호에 대한 퓨리에 변환은?

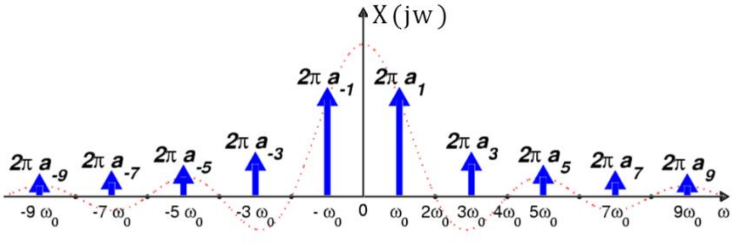


[예제풀이]

$$a_k=\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0/2}(1)e^{-j\omega_0kt}dt+\frac{1}{T_0}\int_{T_0/2}^{T_0}(-1)e^{-j\omega_0kt}dt=\left.\frac{e^{-j\omega_0kt}}{-j\omega_0kT_0}\right|_0^{T_0/2}-\left.\frac{e^{-j\omega_0kt}}{-j\omega_0kT_0}\right|_{T_0/2}^{T_0}$$

$$=\frac{1-e^{-j\pi k}}{j\pi k}$$

$$X(j\omega)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}2\pi a_k\delta(\omega-k\omega_0)$$



핵심정리

연속 시간 신호에 대한 퓨리에 변환

- 다양한 신호에 대한 퓨리에 변환식

$$x(t) = e^{-t}u(t) \quad \Leftrightarrow \quad X(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega}$$

$$x(t) = \begin{cases} 1 & |t| < T/2 \\ 0 & |t| > T/2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad X(j\omega) = \frac{\sin(\omega T/2)}{\omega/2}$$

$$x(t) = A\delta(t) \quad \Leftrightarrow \quad X(j\omega) = A$$

주기 신호에 대한 퓨리에 변환

- 정현파 신호

$$x(t) = \cos(\omega_c t) \quad \Leftrightarrow \quad X(j\omega) = \pi\delta(\omega-\omega_c) + \pi\delta(\omega+\omega_c)$$

- 일반적인 주기 신호

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \quad \Leftrightarrow \quad X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - k\omega_0)$$