디지털신호처리

강의노트

복소지수 신호의 특징

학습내용

❖ 복소진폭(페이저)
❖ 복소지수 신호의 특징
❖ 페이저 합 규칙

학습목표

❖ 복소진폭의 의미를 이해하고, 그 의미를 설명할 수 있다.
❖ 복소지수 신호의 특징을 이해하고, 활용할 수 있다.
❖ 페이저 합 규칙을 이해하고, 응용할 수 있다.

복소진폭(페이저)

1. 복소수의 곱

1) '두 개의 복소수의 곱셈에 대해 두 수를 극좌표 형식으로 표현하면?

- 두 복소수의 곱셈은 크기끼리는 곱하고, 지수함수의 특징에 의하여 위상은 더하면 된다는 것을 알 수 있음

$$z_1 = r_1 e^{j\theta_1}, \quad z_2 = r_2 e^{j\theta_2}$$

$$z_3 = z_1 \cdot z_2 = r_3 e^{j\theta_3} = r_1 e^{j\theta_1} \cdot r_2 e^{j\theta_2} = r_1 r_2 e^{j(\theta_1 + \theta_2)}$$

$$r_3 = r_1 r_2 \qquad \theta_3 = \theta_1 + \theta_2$$

예제 08-01

두 복소수에 대한 곱셈을 극좌표 형식으로 변환한 후, 곱셈을 수행하고 그 결과를 직각좌표계로 나타내어라. 그리고 두 복소수의 곱셈을 직각좌표계로 계산한 결과와 일치하는지를 확인해 보자.

$$z_1 = 1 + j2 = \sqrt{5} e^{j1.1071} \qquad z_2 = 2 + j = \sqrt{5} e^{j0.4636}$$

$$z_3 = z_1 \cdot z_2 = r_3 e^{j\theta_3} = ?$$

[예제풀이]

- 곱셈을 극좌표 형식으로 변환한 후, 곱셈을 수행하고 그 결과를 직각좌표계로 나타내기

$$z_1 = 1 + j2 = \sqrt{5} e^{j1.1071} \qquad z_2 = 2 + j = \sqrt{5} e^{j0.4636}$$

$$z_3 = z_1 \cdot z_2 = r_3 e^{j\theta_3} = \sqrt{5} e^{j1.1071} \times \sqrt{5} e^{j0.4636} = 5 e^{j1.5708} = j5$$

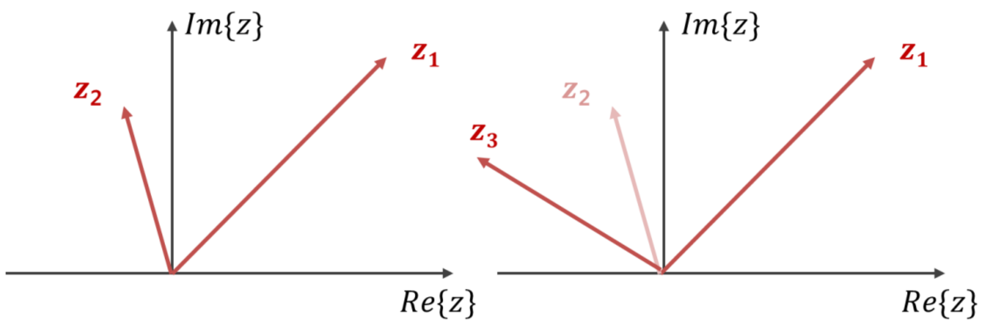
- 직교좌표형식으로의 복소수 곱셈

$$z_3 = z_1 \cdot z_2 = (1 + j2) \cdot (2 + j) = j5$$

복소진폭(페이저)

2) 두 복소수의 곱셈 과정을 복소평면의 벡터로 설명하기

- 첫 벡터의 길이에 두 번째 벡터의 길이를 곱하고, 첫 벡터를 두 번째 벡터의 각도만큼 더 회전시키면?
→ 최종적인 두 복소수의 곱 벡터가 됨



$$z_1 = r_1 e^{j\theta_1}, \quad z_2 = r_2 e^{j\theta_2}$$

$$z_3 = z_1 \cdot z_2 = r_3 e^{j\theta_3} = r_1 e^{j\theta_1} \cdot r_2 e^{j\theta_2} = r_1 r_2 e^{j(\theta_1 + \theta_2)}$$

$$z_3 = r_3 e^{j\theta_3} = r_1 r_2 e^{j(\theta_1 + \theta_2)}$$

$$r_3 = r_1 r_2 \qquad \theta_3 = \theta_1 + \theta_2$$

복소진폭(페이저)

2. 복소진폭이란?

1) 복소진폭(페이저, Phasor)

- 두 복소수의 곱셈을 기하학적 관점에서 다시 살펴보면, 복소지수 함수를 시간에 따라 회전하는 복소수 벡터로 설명할 수 있음
- 복소수 X = $Ae^{j\phi}$를 복소지수 함수 $z(t)$에 적용하여 표현하면?

$$z(t) = Ae^{j(\omega_0 t+\varphi)} = Xe^{j\omega_0 t}$$

→ $z(t)$는 복소수 X와 복소수 함수 $e^{j\omega_0 t}$의 곱으로 표현됨

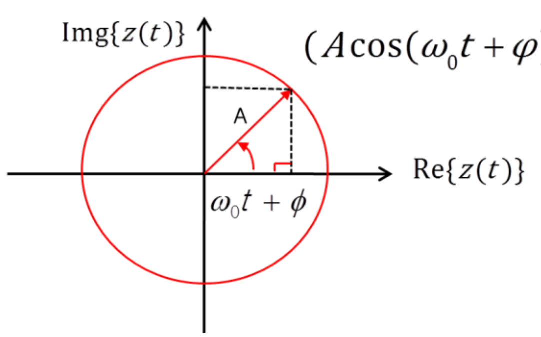
2) 복소수 진폭(Complex Amplitude)

- X = $Ae^{j\phi}$ 는 복소지수 신호의 실수 진폭과 신호의 위상변위로 구성됨
- 복소지수 신호의 복소수 진폭을 다른 표현으로 페이저(Phasor)라고 함

3. 양의 주파수와 음의 주파수

1) 복소평면에서 복소지수 신호의 개념

- 복소평면에서 시간 t에 대한 복소수 함수로 크기 A인 길이의 벡터가 초기각도 ϕ의 위치에서 ω_0의 각속도를 가지고 반시계 방향으로 회전하는 경우에 대한 신호를 의미



$$(A\cos(\omega_0 t + \varphi), A\sin(\omega_0 t + \varphi))$$

$$z(t) = Ae^{j(\omega_0 t+\varphi)} = Ae^{j\theta(t)}$$

$$\theta(t) = \omega_0 t + \varphi$$

복소진폭(페이저)

2) 회전 페이저(Rotating Phasor)

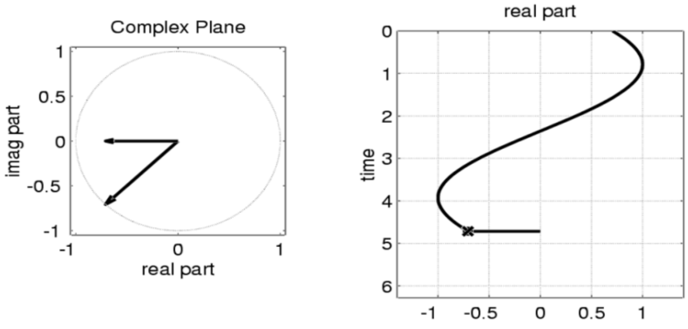
- 복소지수 신호 $z(t)$는 복소평면에서 페이저 $\mathbf{X}$에 $e^{j\omega_0 t}$를 곱하면
  → 고정되었던 페이저 $\boldsymbol{X}$가 회전하게 되어, 복소지수 신호를 회전 페이저라고 할 수 있음
- 주파수 ω_0가 양수이면 반시계 방향으로 회전하고, 음수이면 시계 방향으로 회전
- 양의 주파수(ω_0): 페이저가 반시계 방향으로 회전하는 신호
- 음의 주파수(-ω_0): 페이저가 시계 방향으로 회전하는 신호
- 회전 페이저(복소지수 신호)인 $\theta(t)$의 주기 = 2π 라디안

복소지수 신호의 특징

1. 복소수의 합

- 회전 페이저와 코사인 파형과의 관계를 보여줌
- 시간 **t**가 증가함에 따라, 회전 페이저 $z(t)$는 반시계방향으로 회전
- 실수부 $x(t)$ 는 실수축을 따라 왼쪽, 오른쪽으로 진동하는 코사인 신호가 됨

$$e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j\sin(\omega t)$$



예제 08-02

다음 신호를 복소지수 신호로 표현하고, 페이저(또는 복소진폭)를 계산해 보자.

$$x(t) = 3\cos(20\pi t - \pi/4)$$

[예제풀이]

$$x(t) = 3\cos(20\pi t - \pi/4)$$

$$x(t) = \mathrm{Re}\{z(t)\} = \mathrm{Re}\{Xe^{j\omega_0 t}\} = 3\cos(20\pi t - \pi/4)$$

$$X = Ae^{j\phi} \quad A = 3, \quad \phi = -\pi/4, \quad \omega_0 = 20\pi$$

$$\therefore z(t) = Xe^{j\omega_0 t} = 3e^{j(-\pi/4)}e^{j20\pi t}$$

페이저(또는 복소진폭) : $X = 3e^{j(-\pi/4)} = 3(\cos(-\pi/4) + j\sin(-\pi/4))$

$$= 3(1/\sqrt{2} + j(-1/\sqrt{2})) = 2.1213 - j2.1213$$

복소지수 신호의 특징

2. 복소지수 신호를 이용한 정현파 표현

1) 역오일러 공식의 의미

- 역오일러 공식은 정현파 신호는 양과 음의 주파수를 가진 복소지수 신호로 표현할 수 있다는 것을 나타냄

$$\cos(\theta)=\frac{e^{j\theta}+e^{-j\theta}}{2} \Rightarrow \cos(\omega t+\varphi)=\frac{e^{j(\omega t+\varphi)}+e^{-j(\omega t+\varphi)}}{2}$$

$$A\cos(\omega t+\varphi)=\frac{Ae^{j(\omega t+\varphi)}+Ae^{-j(\omega t+\varphi)}}{2}=\frac{1}{2}Xe^{j\omega t}+\frac{1}{2}X^*e^{-j\omega t}=\frac{1}{2}z(t)+\frac{1}{2}z^*(t)=\mathrm{Re}\{z(t)\}$$

※ 여기서 $X=Ae^{j\phi}$ 이고, $*$ 는 공액 복소수를 의미한다.

- 주파수가 ω인 코사인 신호는 두 개의 복소지수 신호로 이루어짐
  → 하나는 양의 주파수(ω)를 가지고, 또 하나는 음의 주파수($-\omega$)를 가짐
- 양의 주파수를 가지는 복소지수 함수의 복소수 진폭은 $\frac{1}{2}X=\frac{1}{2}Ae^{j\phi}$ 이고,
- 음의 주파수를 가지는 복소지수 함수의 복소수 진폭은 $\frac{1}{2}X^*=\frac{1}{2}Ae^{-j\phi}$ 임
  → 결론적으로 실수 코사인 신호는 서로 공액 관계를 가지는 두 개의 복소 회전 페이저의 합으로 표현됨

예제 08-03

실수 사인(sine) 신호도 다음과 같이 복소지수 신호로 표현할 수 있다. 그 과정을 유도해 보자.

$$\sin(\omega t+\varphi)=\frac{1}{2}Xe^{-j\pi/2}e^{j\omega t}+\frac{1}{2}X^*e^{j\pi/2}e^{-j\omega t}$$

※ $X=Ae^{j\varphi}$, $X^*=Ae^{-j\varphi}$

이 경우, 사인 신호도 양과 음의 주파수를 가진 두 복소지수 신호의 합으로 표현될 수 있음

[예제풀이]

$$\sin(\omega t+\varphi)=\frac{1}{2}Xe^{-j\pi/2}e^{j\omega t}+\frac{1}{2}X^*e^{j\pi/2}e^{-j\omega t}$$

$$\sin(\theta)=\frac{e^{j\theta}-e^{-j\theta}}{2j} \Rightarrow A\sin(\omega t+\varphi)=\frac{Ae^{j(\omega t+\varphi)}-Ae^{-j(\omega t+\varphi)}}{2j}$$

$$A\sin(\omega t+\varphi)=\frac{Ae^{j(\omega t+\varphi)}-Ae^{-j(\omega t+\varphi)}}{2j}=\frac{1}{2}Ae^{j\varphi}e^{-j\pi/2}e^{j\omega t}+\frac{1}{2}Ae^{-j\varphi}e^{j\pi/2}e^{-j\omega t}$$

$$=\frac{1}{2}Xe^{-j\pi/2}e^{j\omega t}+\frac{1}{2}X^*e^{j\pi/2}e^{-j\omega t}$$

$$X=Ae^{j\varphi} \qquad X^*=Ae^{-j\varphi}$$

복소지수 신호의 특징

3. 복소지수 신호를 사용하는 이유

- 복소지수 신호 = 정현파 신호 표현을 위한 또 다른 방법
- 복소지수 신호를 이용해 많은 계산을 간편하게 할 수 있음
  → 모든 삼각함수 계산이 복소지수의 산술적인 연산으로 가능함
- 정현파 신호를 간단하게 분석하고 취급할 수 있음

페이저 합 규칙

1. 복소지수 신호의 장점

1) 많은 계산을 간편하게 할 수 있음

- 정현파 신호(실수 코사인 신호 또는 사인신호)를 표현하는 또 하나의 방법으로 복소지수의 특징을 이용하면 많은 계산이 간편해짐
- 두 개의 복소수의 곱셈을 위해 두 수를 극좌표형식으로 표현하고, 복소지수를 결합하는 지수법칙을 이용하면, 복소수의 곱셈을 쉽게 계산할 수 있음

$$z_1 = r_1 e^{j\theta_1}, \quad z_2 = r_2 e^{j\theta_2}$$

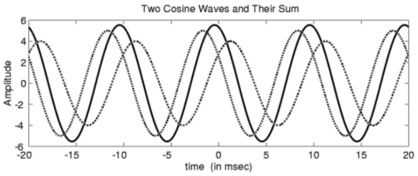
$$z_3 = z_1 z_2 = r_1 e^{j\theta_1} \times r_2 e^{j\theta_2} = r_1 r_2 e^{j(\theta_1+\theta_2)}$$

2) 주파수가 같은 두 코사인 신호의 합

- 복소지수 신호를 이용하면 쉽게 하나의 주파수로 표현되는 진폭 A와 위상 ∅를 계산할 수 있음

$$x_1(t) = \cos(77\pi t), \quad x_2(t) = \sqrt{3}\cos(77\pi t + 0.5\pi)$$

$$x_3(t) = x_1(t) + x_2(t) = A\cos(77\pi t + \phi)$$



- 주파수가 같은 두 코사인 신호의 합은 다음과 같이 하나의 같은 주파수의 코사인 신호로 표현할 수 있고, 그 결과는 다음과 같음

$$x_1(t) = 1.7\cos(4\pi t + 70\pi/180), \quad x_2(t) = 1.9\cos(4\pi t + 200\pi/180)$$

$$x_3(t) = x_1(t) + x_2(t) = A\cos(4\pi t + \varphi)$$

$$\Rightarrow x_3(t) = A\cos(4\pi t + \varphi) = 1.532\cos(4\pi t + 141.79/180)$$

- A와 ∅위상을 계산하는 방법?
  → 복소지수 신호의 **페이저 합 규칙 이용**

페이저 합 규칙

2. 주파수가 같은 정현파들의 합

1) 주파수가 같은 여러 정현파의 합을 구하는 경우

- [예] 전기 회로에 같은 주파수의 소스 전원을 부하에 인가할 경우 여러 소스 전원의 정현파 합을 구할 필요가 있음
- 진폭과 위상변이는 다르지만 주파수가 같은 N개의 정현파(코사인) 신호를 합하면, 같은 주파수를 가지는 하나의 코사인 신호가 됨

$$\sum_{k=1}^{N} A_k \cos(\omega_0 t + \varphi_k) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

- 같은 주파수를 가진 정현파의 합은 페이저 합 규칙을 이용하여 간단하게 계산할 수 있음

$$\sum_{k=1}^{N} A_k \cos(\omega_0 t + \phi_k) = \sum_{k=1}^{N} \Re e\left\{A_k e^{j(\omega_0 t + \phi_k)}\right\}$$

어떤 정현파도
복소지수함수의 실수부를
취하는 연산으로 표현

$$= \Re e\left\{\sum_{k=1}^{N} A_k e^{j\phi_k} e^{j\omega_0 t}\right\}$$

실수부를 취하는 연산과
합을 하는 연산의 순서를
바꾸어도 등식에 영향 없다.

$$= \Re e\left\{\left(\sum_{k=1}^{N} A_k e^{j\phi_k}\right) e^{j\omega_0 t}\right\}$$

합연산 K의 함수가
아니므로 합연산 밖으로
처리 가능

$$= \Re e\left\{\left(A e^{j\phi}\right) e^{j\omega_0 t}\right\} = A\cos(\omega_0 t + \phi)$$

$$\sum_{k=1}^{N} A_k e^{j\phi_k} = A e^{j\phi}$$

2) 임의의 코사인 신호 x(t)의 복소지수 신호 z(t)로 표현하면?

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi) = \mathrm{Re}\{Ae^{j\varphi}e^{j\omega t}\} = \mathrm{Re}\{Xe^{j\omega t}\} = \mathrm{Re}\{z(t)\}$$

- 복소지수 신호로 변환된 코사인 신호에서 복소진폭,즉 페이저 ***X***는 다음과 같이 계산할 수 있음

$$X = Ae^{j\varphi}$$

- 복소진폭, 즉 페이저는 정현파의 진폭 A와 위상각 ∅에 의해 결정됨

페이저 합 규칙

2. 주파수가 같은 정현파들의 합

예제 08-04

다음 코사인 신호를 먼저 복소지수 신호로 표현하고, 복소진폭(페이저)를 계산해 보자.

$$x(t) = \sqrt{3}\cos(77\pi t + 0.5\pi)$$

[예제풀이]

- 다음 코사인 신호에 대한 복소지수 신호는?

$$x(t) = \sqrt{3}\cos(77\pi t + 0.5\pi) = \mathrm{Re}\{\sqrt{3}e^{j(77\pi t + 0.5\pi)}\} = \mathrm{Re}\{\sqrt{3}e^{0.5\pi}e^{j77\pi t}\}$$

- 복소진폭(페이저) X는? $X = Ae^{j\varphi} = \sqrt{3}e^{j0.5\pi}$

예제 08-05

다음 두 코사인 신호의 합을 페이저 합 규칙을 이용하여 계산해 보자.

$$x_1(t) = \cos(77\pi t)$$
$$x_2(t) = \sqrt{3}\cos(77\pi t + 0.5\pi)$$
$$x_3(t) = x_1(t) + x_2(t) = A\cos(77\pi t + \varphi)$$

[예제풀이]

$$x_1(t) = \cos(77\pi t), \quad x_2(t) = \sqrt{3}\cos(77\pi t + 0.5\pi)$$

$$x_3(t) = x_1(t) + x_2(t) = A\cos(77\pi t + \phi) \qquad \sum_{k=1}^{N} A_k e^{j\phi_k} = Ae^{j\phi}$$

$$x_1(t) = \mathrm{Re}\{A_1 e^{j\phi_1} e^{j\omega_0 t}\} = \mathrm{Re}\{1e^{j0}e^{j77\pi}\}$$ ➡ $x_1(t)$의 페이저 $X_1 = 1e^{j0}$

$$x_2(t) = \mathrm{Re}\{A_2 e^{j\phi_2} e^{j\omega_0 t}\} = \mathrm{Re}\{\sqrt{3}e^{j0.5\pi}e^{j77\pi}\}$$ ➡ $x_2(t)$의 페이저 $X_2 = \sqrt{3}e^{j0.5\pi}$

$$\sum_{k=1}^{k=2} A_k e^{j\varphi_k} = 1e^{j0} + \sqrt{3}e^{j0.5\pi}$$
$$= 1 + j\sqrt{3} = 2e^{j\pi/3} = Ae^{j\varphi}$$ ➡ $A = 2,\ \phi = \frac{\pi}{3}$

$$\therefore x_3(t) = x_1(t) + x_2(t) = A\cos(77\pi t + \phi) = 2\cos(77\pi t + \frac{\pi}{3})$$

페이저 합 규칙

3. 페이저 합 규칙

- 1단계) 각 정현파 신호의 페이저 $X_k = A_k e^{j\Phi_k}$ 를 계산한다.
- 2단계) 각 신호의 페이저를 합하여 $X = X_1 + X_2 + ... = Ae^{j\Phi}$ 를 얻는다.
- 3단계) 그 결과 X에 $e^{j\omega_o t}$ 를 곱하여 $z(t) = Ae^{j\Phi}e^{j\omega_o t}$ 를 얻는다.
- 4단계) 최종적으로 복소지수 신호 z(t)의 실수부만 취한다.

$$x(t) = \mathrm{Re}\{Ae^{j\Phi}e^{j\omega_o t}\} = A\cos(\omega_o t + \Phi) = x_1(t) + x_2(t) + ...$$

페이저 합 규칙

[한걸음 더] 페이저 합 규칙 예제 풀이

한걸음 더

다음 두 코사인 신호의 합을 계산하세요. $x_3(t) = x_1(t) + x_2(t) = ?$

$$x_1(t) = 1.7\cos(20\pi t + 70\pi/180)$$
$$x_2(t) = 1.9\cos(20\pi t + 200\pi/180)$$

전문가 해설을 통해 풀이를 확인해보세요.

[과제해설]

- 1단계

$X_1 = 1.7e^{j(70\pi/180)}$ $\quad X_2 = 1.9e^{j(200\pi/180)}$

- 2단계

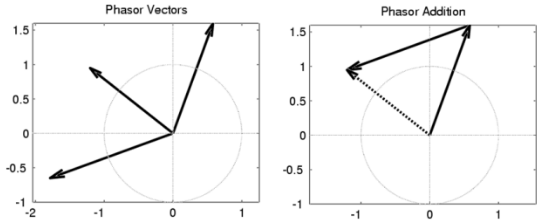
$X_1 = 1.7e^{j(70\pi/180)} = 0.5814 + j1.597$ $\quad X_2 = 1.9e^{j(200\pi/180)} = -1.785 - j0.6498$

- 3단계

$$X_3 = X_1 + X_2 = (0.5814 + (-1.785)) + j(1.597 + (-0.6498)) = -1.204 + j0.9476$$
$$= 1.532e^{j141.79\pi/180}$$

- 4단계

$X_3 = -1.204 + j0.9476 = 1.532e^{j141.79\pi/180}$



$$\therefore x_3(t) = x_1(t) + x_2(t) = 1.532\cos(20\pi t + 141.79\pi/180)$$

핵심정리

복소진폭(페이저)의 개념

- 복소진폭(X)는 복소지수 신호(z(t)의 실수 진폭과 신호의 위상변위(Φ)로 구성됨

$$z(t) = Ae^{j(\omega_0 t+\varphi)} = Xe^{j\omega_0 t} \qquad X = Ae^{j\varphi}$$

복소지수 신호의 특징

- 정현파는 복소지수 함수를 이용하여 표현할 수 있는데 다음과 같이 복소지수 함수의 실수부를 취함으로써 복소지수 함수로 표현이 가능함

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi) = \mathrm{Re}\{Ae^{j(\omega_0 t+\phi)}\} = \mathrm{Re}\{Ae^{j\phi}e^{j\omega_0 t}\}$$

페이저 합 규칙

- 진폭과 위상변이는 다르지만 주파수가 같은 N개의 정현파 신호를 합하면, 같은 주파수를 가지는 하나의 코사인 신호가 됨

$$\sum_{k=1}^{N} A_k \cos(\omega_0 t + \varphi_k) = A\cos(\omega_0 t + \varphi) \qquad \sum_{k=1}^{N} A_k e^{j\varphi_k} = Ae^{j\varphi}$$

- 같은 주파수를 가진 정현파의 합은 페이저 합 규칙을 이용하여 간단하게 계산할 수 있음