디지털신호처리

강 의 노 트

퓨리에 급수

학습내용

❖ 푸리에 급수(Fourier Series)
❖ 푸리에 분석(Fourier Analysis)
❖ 푸리에 합성(Fourier Synthesis)

학습목표

❖ 푸리에 급수(Fourier Series)에 대하여 이해하고, 그 활용방법을 설명할 수 있다.
❖ 푸리에 분석과 푸리에 합성에 대하여 설명할 수 있다.
❖ 임의의 주기신호에 대한 기본 주파수와 고조파를 이해하고, 스펙트럼을 그릴 수 있다.

퓨리에 급수

1. 기본 주파수와 고조파

1) 복잡한 신호생성

- 모든 복잡한 신호들을 기본신호인 정현파의 합으로 표현가능,
  → 정현파들의 합으로 모든 복잡한 신호들을 생성할 수 있음
- 정현파들로부터 새 신호를 만드는 방법 중 가장 일반적이고 효과적인 방법
  → 선형 중첩 결합: 상수와 서로 다른 주파수, 크기, 위상을 갖는 N개의 정현파들의 합으로 구성

2) 고조파(Harmonics)란?

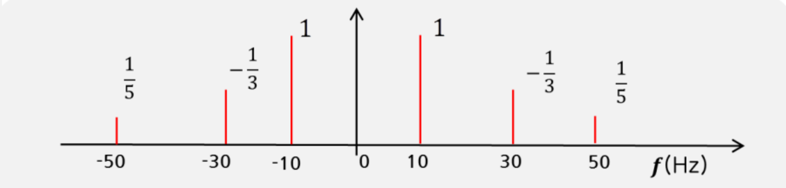
- 기본 주파수의 정수배의 정현파
- 모든 주기신호(T_0)는 두 개 이상의 고조파의 합으로 합성 가능함

$$x_{T_0}(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{N} A_k \cos(2\pi f_k t + \varphi_k) = \sum_{k=0}^{N} A_k \cos(2\pi k f_0 t + \varphi_k)$$

- 기본 주파수는 $f_0 = \frac{1}{T_0}$이고, $f_k = kf_0$를 만족하는 가장 큰 f_0임
- 고조파는 $f_k = kf_0$, f_0의 정수배 주파수의 정현파

예제 11-01

다음은 임의의 신호에 대한 스펙트럼이다. 이 신호의 기본 주파수는 얼마이고, 고조파(Harmonics)는 얼마인가?



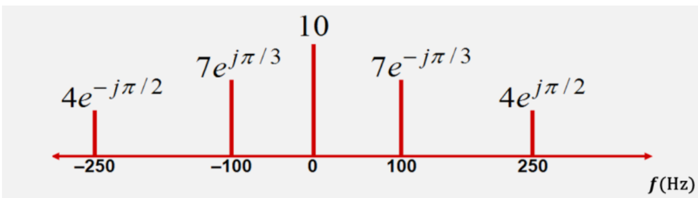
[예제풀이]

- 기본 주파수는 10Hz, 고조파는 30Hz와 50Hz
- 30Hz(3 x 10Hz): 기본 주파수의 3배인 고조파
- 50Hz(5 x 10Hz): 기본 주파수의 5배인 고조파

퓨리에 급수

2) 고조파(Harmonics)란?

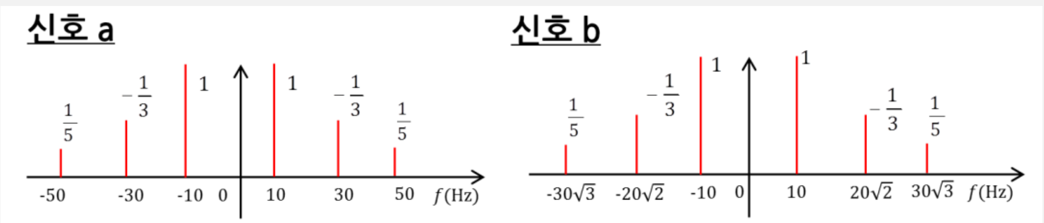
- 다음과 같은 스펙트럼에서 기본 주파수는? 100Hz? 또는 50Hz?



- 이 신호는 주기신호(Periodic Signal)가 아니므로 기본 주파수가 없음
  주기신호일 경우에만 기본 주파수가 존재

예제 11-02

두 스펙트럼 신호(a, b)에 대한 그래프를 그려보고 두 신호 중 주기신호가 어떤 신호인지 확인해 보자.

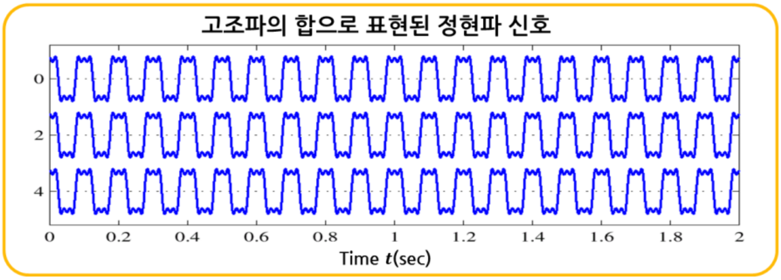


$x_a(t) = 2\cos(2\pi(10)t) - \frac{2}{3}\cos(2\pi(30)t) + \frac{2}{5}\cos(2\pi(50)t)$

$x_b(t) = 2\cos(2\pi(10)t) - \frac{2}{3}\cos(2\pi(20\sqrt{2})t) + \frac{2}{5}\cos(2\pi(30\sqrt{3})t)$

[예제풀이]

$$x_a(t) = 2\cos(2\pi(10)t) - \frac{2}{3}\cos(2\pi(30)t) + \frac{2}{5}\cos(2\pi(50)t)$$



$X_a(t) =$ 주기신호

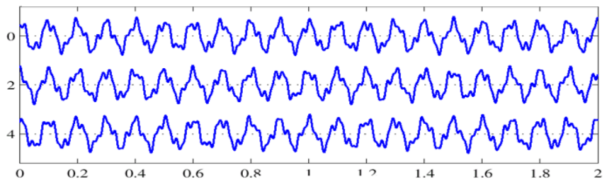
주기 $T_0 = 0.1sec$ 또는 $f_0 = 10\text{Hz}$

퓨리에 급수

[예제풀이-계속]

$$x_b(t) = 2\cos(2\pi(10)t) - \frac{2}{3}\cos(2\pi(20\sqrt{2})t) + \frac{2}{5}\cos(2\pi(30\sqrt{3})t)$$

고조파가 아닌 정현파들의 합으로 표현된 신호



$X_b(t)$ = 비주기신호

- 스펙트럼에서 기본 주파수의 배수가 아님, 따라서 비주기 신호임
- $X_a(t)$와 $X_b(t)$는 주파수 상에서의 약간의 차이가 시간 파형에는 큰 차이가 있음

2. 주기신호에 대한 스펙트럼

1) 스펙트럼 표현이란?

- 임의의 신호를 만들어 주는 각각의 정현파 요소를 그래프식으로 표현한 것

2) 정현파 신호에 대한 스펙트럼 표현

- 오일러 공식을 이용, 코사인신호를 복소지수 함수로 표현하여 각 주파수 성분을 표현 가능함

$$x(t) = 10 + 14\cos(2\pi(100)t - \pi/3) + 8\cos(2\pi(250)t + \pi/2)$$

3) 오일러 공식을 사용할 수 없는 일반적인 많은 다른 주기신호(예, 구형파, 톱니파)는 스펙트럼으로 표현 가능한가?

- 임의의 다른 주기신호에 대하여서도 스펙트럼으로 표현 가능
  → 퓨리에 급수(Fourier Series)로 가능

퓨리에 급수

3. 퓨리에 급수 개요

1) 퓨리에(Fourier,1768-1830)

- 1700년대의 수학자 전기전자분야 발전에 공헌
- 퓨리에 급수(Fourier Series) 이론 발표

2) 퓨리에 급수

- 어떠한 주기적 신호(**x**(**t**))도 고조파로 관계된 정현파의 합으로 합성될 수 있음

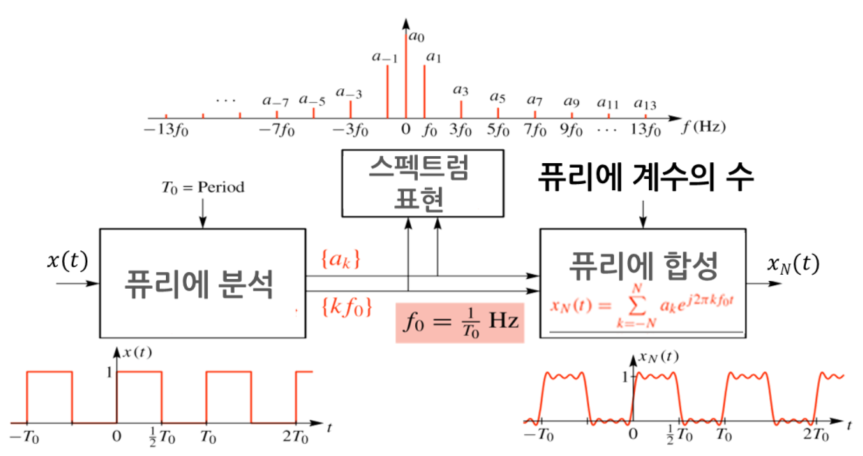
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{j(2\pi/T_o)kt} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{j\omega_o kt} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{j(2\pi f_o)kt}$$

$$where, \quad a_k = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t) e^{-j\omega_0 kt} dt$$

퓨리에 계수

T_0: 주기신호 x(t)의 주기 $\quad f_0 = \frac{1}{T_0}$: 기본 주파수

3) 퓨리에 분석(Fourier Analysis) & 퓨리에 합성(Fourier Synthesis)



푸리에 급수

4) 푸리에 분석(Fourier Analysis)

- 푸리에 급수식에서 각 복소지수 함수의 크기를 결정하는 진폭 a_k 를 계산하는 식

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} a_k e^{j2\pi k f_0 t}$$

4) 푸리에 계수 a_k

- 주기신호 **x(t)**에 복소지수 함수를 곱한 후 푸리에 급수 적분을 이용해서 한 주기 동안을 계산함

$$a_k = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)e^{-j\omega_0 k t}dt$$

퓨리에 분석

1. 복소지수 신호의 성질

1) 복소지수 신호의 적분 = 0

- 주기 구간 내에서의 복소지수 신호의 적분은 0

$$\int_0^{T_0} e^{-j(2\pi/T_0)kt}dt = \frac{T_0}{-j2\pi k} e^{-j(2\pi/T_0)kt}\Big|_0^{T_0} \qquad \boxed{k \neq 0}$$

$$= \frac{T_0}{-j2\pi k}(e^{-j2\pi k} - 1)$$

$$\int_0^{T_0} e^{-j(2\pi/T_0)kt}dt = 0 \qquad \boxed{k \neq 0} \qquad (\because e^{-j2\pi k} = 1)$$

$$\int_0^{T_0} e^{-j(2\pi/T_0)kt}dt = \underbrace{\int_0^{T_0} \cos((2\pi/T_0)kt)dt}_{0} + j\underbrace{\int_0^{T_0} \sin((2\pi/T_0)kt)dt}_{0} = 0$$

2) 직교(Orthogonality) 특성

- 켤레 관계가 있는 두 복소지수 신호를 곱해서 퓨리에 적분하여 두 복소지수 신호의 주파수가 같으면 1, 서로 주파수가 다르면 0

$$\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} e^{j(2\pi/T_0)\ell t} e^{-j(2\pi/T_0)kt}dt = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} e^{j(2\pi/T_0)(\ell-k)t}dt = \begin{cases} 0 & k \neq \ell \\ 1 & k = \ell \end{cases}$$

퓨리에 분석

2. 퓨리에 분석 유도

- 양변에 똑같은 복소지수 신호를 곱하고, 주기 T_0에 대하여 양변을 적분

$$\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)e^{-j(2\pi/T_0)\ell t}dt = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{j(2\pi/T_0)kt}\right)e^{-j(2\pi/T_0)\ell t}dt$$

- 무한 합과 적분의 순서를 바꾸어도 수식에는 변화가 없으며 두 복소지수의 직교성에 의하여 무한 합에서 ***k=l***인 경우만 적분 값이 존재하고, 그 외의 경우는 적분 값이 0임

$$\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)e^{-j(2\pi/T_0)\ell t}dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\left(\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} e^{j(2\pi/T_0)kt}e^{-j(2\pi/T_0)\ell t}dt\right) = a_\ell$$

$$\Rightarrow a_k = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)e^{-j(2\pi/T_0)kt}dt$$

3. 퓨리에 급수 스펙트럼

1) 퓨리에 합성식

- 임의의 주기신호 **x(t)**는 복소지수 함수들에 퓨리에 계수 a_k를 합성하여 표현 가능함을 의미
- 복소지수 함수는 오일러공식에 의하여 정현파(삼각함수)를 의미
- 임의의 주기함수는 정현파의 합으로 표현 가능

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{j(2\pi/T_0)kt}$$

푸리에 분석

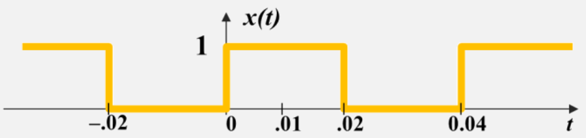
2) 푸리에 분석식

- 임의의 주기함수가 정현파의 합으로 표현 가능할 때 각각의 정현파 주파수별 계수 값을 계산하는 식

$$a_k = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)e^{-j(2\pi/T_0)kt}dt$$

예제 11-3

구형파 신호에 대한 스펙트럼 구하기



$$x(t \begin{cases} 1 & 0 \le t < \frac{1}{2}T_0 \quad for\ T_0 = 0.04sec. \\ 0 & \frac{1}{2}T_0 \le t < T_0 \end{cases}$$

[예제풀이]

- 임의의 주기신호에 대한 스펙트럼을 구하기 위해서 푸리에 분석 수행
- 푸리에 분석 = 푸리에 급수식의 진폭값 a_k구하기
- $k \neq 0$

$$a_k = \frac{1}{.04}\int_0^{.02} 1e^{-j(2\pi/T_0)kt}dt = \frac{1}{.04(-j(2\pi/.04)\mathrm{k})}e^{-j(2\pi/.04)kt}\Big|_0^{.02}$$

$$= \frac{1}{(-j2\pi k)}(e^{-j(\pi)k} - 1) \qquad \Rightarrow a_k = \frac{1}{(-j2\pi k)}(e^{-j(\pi)k} - 1) = \frac{1-(-1)^k}{j2\pi k}$$

$e^{-j\pi} = e^{-j3\pi} = e^{-j5\pi} = \cdots = -1$ (k = 홀수)

$e^{-j2\pi} = e^{-j4\pi} = e^{-j6\pi} = \cdots = 1$ (k = 짝수)

스펙트럼 표현

2) 퓨리에 분석식

[예제풀이-계속]

- $k = 0$

$$a_k = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)e^{-j(2\pi/T_0)kt}dt \qquad (k=0)$$

$$a_k = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)dt = \frac{1}{T_0}(Area)$$

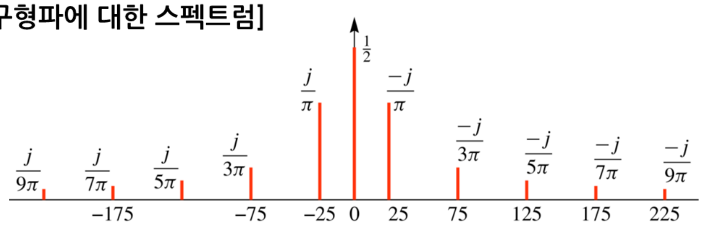
$$a_0 = \frac{1}{.04}\int_0^{.02} 1\,dt = \frac{1}{.04}(.02-0) = \frac{1}{2}$$

$$a_k = \begin{cases} \frac{-j}{\pi k} & k = \pm 1, \pm 3, \dots \\ 0 & k = \pm 2, \pm 4, \dots \\ \frac{1}{2} & k = 0 \end{cases}$$

$\omega_0 = 2\pi / T_0 = 2\pi/(0.04) = 2\pi(25) = 50\pi$

$\therefore$ 기본 주파수 $f_0 = 25\ Hz$

[구형파에 대한 스펙트럼]



$a_{-k} = a_k^*$

[참고] 신호가 실신호(Real Signal)일 경우 퓨리에 계수는 켤레 복소진폭을 가짐

퓨리에 합성

1. 퓨리에 합성식

1) 퓨리에 급수식 = 합성식

- 임의의 주기신호 $\boldsymbol{x(t)}$는 복소지수신호 또는 정현파 신호들의 합으로 표현할 수 있다는 의미
- 퓨리에 합성식

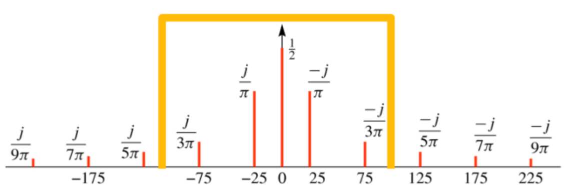
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{j(2\pi/T_0)kt}$$

- 무한대의 정현파들의 합을 구한다는 것 = 불가능
- 임의의 N개의 정현파들의 합으로 근사화할 수 있음
- 신호 $\boldsymbol{x(t)}$가 실제신호(Real Signal)이면 퓨리에 계수 $\boldsymbol{a_k}$는 켤레 복소진폭의 성질을 가짐

$$x(t) \cong \sum_{k=-N}^{N} a_k e^{j(2\pi/T_0)kt} \qquad a_{-k} = a_k^* \quad \text{when } x(t) \text{ is real}$$

2. 구형파의 신호 합성

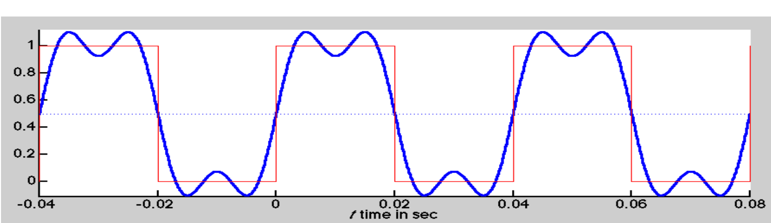
1) 구형파의 스펙트럼



시간영역 표현

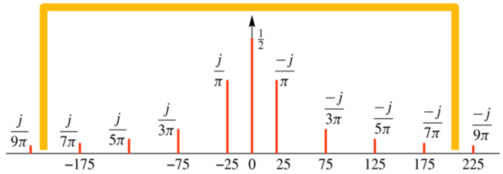
$$x(t) \cong \sum_{k=-3}^{3} a_k e^{j(2\pi/T_0)kt} = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\cos(2\pi(25)t - \tfrac{\pi}{2}) + \frac{2}{3\pi}\cos(2\pi(75)t - \tfrac{\pi}{2})$$

- 3개의 고조파까지 합한 신호는 원래 구형파와 많은 차이가 있지만, 어느 정도 구형파와 유사함을 눈으로 확인 가능함



퓨리에 합성

1) 구형파의 스펙트럼



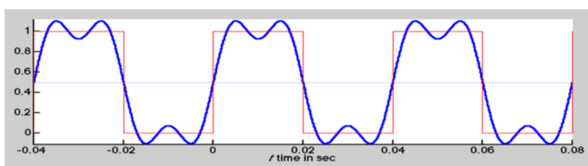
시간영역 표현

$$x(t) \cong \sum_{k=-7}^{7} a_k e^{j(2\pi/T_0)kt}$$

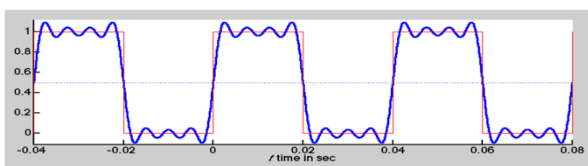
$$x(t) \cong \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\cos(50\pi t - \tfrac{\pi}{2}) + \frac{2}{3\pi}\sin(150\pi t) + \frac{2}{5\pi}\sin(250\pi t) + \frac{2}{7\pi}\sin(350\pi t)$$

- 7번째 고조파까지 합한 신호는 3번째 고조파까지 합한 경우보다 원래 구형파와 더 가까움을 확인 가능

$$x(t) \cong \sum_{k=-3}^{3} a_k e^{j(2\pi/T_0)kt}$$



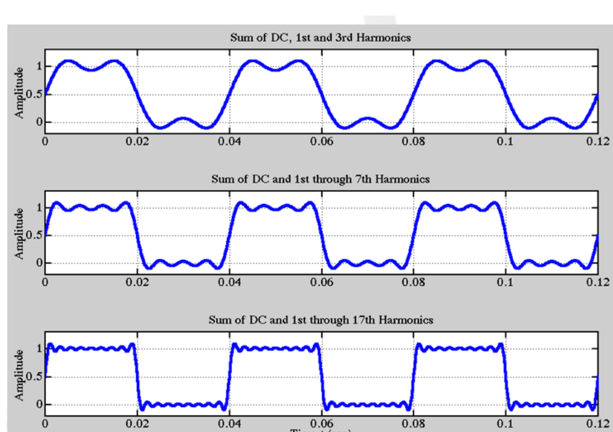
$$x(t) \cong \sum_{k=-7}^{7} a_k e^{j(2\pi/T_0)kt}$$



2) 신호 합성

- N이 무한대로 커지면 커질수록, 즉 고조파 성분을 많이 포함 할수록 원신호 구형파를 정확하게 합성할 수 있음

$$x(t) \cong \sum_{k=-N}^{N} a_k e^{j(2\pi/T_0)kt}$$



핵심정리

퓨리에 급수

- 임의의 주기 신호를 스펙트럼으로 표현하기 위한 방법
- 임의의 주기 신호가 어떠한 주파수성분을 얼마만큼의 크기로 가지고 있는지를 해석
- 퓨리에 급수식은 퓨리에 합성(Synthesis)식, 퓨리에 분석(Analysis)식으로 표현

퓨리에 분석

- 임의의 주기 신호 x(t)에서 각 정현파의 주파수 성분에 대한 계수를 계산하는 식

$$a_k = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)e^{-j(2\pi/T_0)kt}dt$$

퓨리에 합성

- 임의의 주기 신호 x(t)는 복소지수 함수(또는 정현파)로 표현 가능하다는 것을 의미
- 즉, 임의의 주기 신호는 기본주파수의 정현파와 고조파들의 합으로 합성할 수 있다는 것을 의미

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{j(2\pi/T_0)kt}$$