디지털신호처리

강 의 노 트

연속 선형 시불변 시스템의 주파수 해석

8주차 1차시

학습내용

❖ 시간 영역과 주파수 영역

❖ 시간·주파수 영역 해석

학습목표

❖ 시간 영역과 주파수 영역에 대한 개념을 이해하고 설명할 수 있다.

❖ 시간 이동과 주파수 이동 성질을 설명할 수 있다.

❖ 연속 선형 시불변 시스템의 주파수 응답이 무엇인지 이해하고 주파수 영역에서 시스템을 해석할 수 있다.

시간 영역과 주파수 영역

1. 주요 연속 시간 신호의 퓨리에 변환

1) 연속 시간 신호의 퓨리에 변환과 역변환

퓨리에 변환

$$X(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$$

퓨리에 역변환

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

※ *참고*

$$X(f)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt \Longleftrightarrow x(t)=\int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi ft}df$$

2) 퓨리에 변환과 역변환

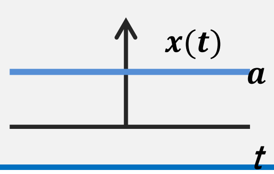
시간 영역		주파수 영역
$x(t)$	퓨리에 변환 → ← 퓨리에 역변환	$X(f)$

3) 시간 영역과 주파수 영역

시간 영역

$x(t)=1$

$x(t)=a$



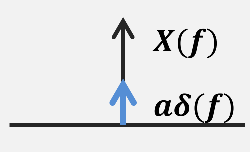
퓨리에 변환 →

← 퓨리에 역변환

주파수 영역

$X(f) = \delta(f)$

$X(f) = a\delta(f)$



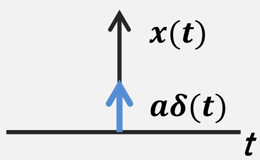
시간 영역과 주파수 영역

3) 시간 영역과 주파수 영역(계속)

시간 영역

$x(t) = \delta(t)$

$X(t) = a\delta(t)$



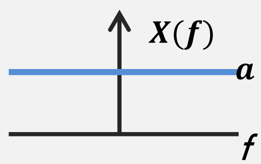
푸리에 변환 →

← 푸리에 역변환

주파수 영역

$X(f) = 1$

$X(f) = a$



시간 영역

$X(t) = e^{j2\pi at}$

$X(t) = Ae^{j2\pi at}$

↔

주파수 영역

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi at}\, e^{-j2\pi ft}\, dt$$

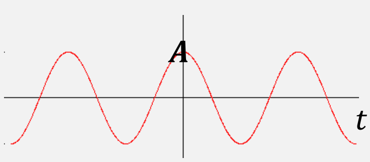
$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi(f-a)t}\, dt$$

$$= \delta(f-a)$$

$$X(f) = A\delta(f-a)$$

시간 영역

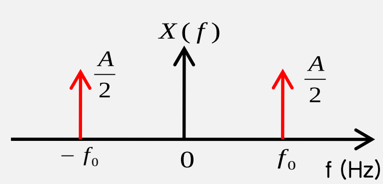
$x(t) = A\cos(2\pi f_0 t)$



↔

주파수 영역

$$X(f) = \frac{A}{2}\delta(f-f_0) + \frac{A}{2}\delta(f+f_0)$$



시간 영역과 주파수 영역

2. 시간 이동 성질

시간 영역		주파수 영역
$x(t)$	$\Leftrightarrow$	$x(f)$
$x(t-a)$		$X(f)e^{-j2\pi fa}$
$x(t+a)$		$X(f)e^{j2\pi fa}$
$\delta(t)$		1
$\delta(t-\tau)$		$e^{-j2\pi f\tau}$

예제 19-01

퓨리에 변환의 시간 이동 성질을 이용하여 다음 신호에 대한 퓨리에 변환을 구해보자.

시간 영역		주파수 영역
$x(t-a)$	$\Leftrightarrow$	$X(f)e^{-j2\pi fa}$

$$x(t)=\delta(t+1)+2\delta(t)+\delta(t-1)$$

[예제풀이]

$$x(t)=\delta(t) \Leftrightarrow X(f)=1$$

$$x(t-a) \Leftrightarrow X(f)e^{-j2\pi fa}$$

$$X(f)=FT\{\delta(t+1)\}+FT\{2\delta(t)\}+FT\{\delta(t-1)\}$$

$$=e^{j2\pi f}+2+e^{-j2\pi f} \quad =2+2\cos(2\pi f)$$

시간 영역과 주파수 영역

3. 주파수 이동 성질

1) 시간 영역과 주파수 영역

시간 영역		주파수 영역
$x(t)$	⟷	$x(f)$
$x(t)e^{j2\pi at}$	⟷	$X(f-a)$
$x(t)e^{-j2\pi at}$	⟷	$X(f+a)$
1	⟷	$\delta(f)$
$e^{-j2\pi at}$	⟷	$\delta(f-a)$

예제 19-02

다음과 같은 퓨리에 변환의 주파수 이동 성질을 증명해 보자.

시간 영역		주파수 영역
$x(t)e^{j2\pi at}$	⟷	$X(f-a)$

[예제풀이]

- 퓨리에 변환 공식을 이용하여 복소지수 함수가 곱해진 $\boldsymbol{y(t) = x(t)e^{j2\pi at}}$ 신호의 퓨리에 변환

$$y(t) = x(t)e^{j2\pi at}$$

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{\infty}(x(t)e^{j2\pi at})e^{-j2\pi ft}dt = \int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j2\pi(f-a)t}dt = X(f-a)$$

$$\because X(f) = \int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j2\pi ft}dt$$

$$\therefore x(t)e^{j2\pi at} \longleftrightarrow X(f-a)$$

시간 영역과 주파수 영역

3. 주파수 이동 성질

예제 19-03

다음과 같이 신호 $x(t)$에 대한 퓨리에 변환이 $X(f)$라고 할 때 코사인 신호가 곱해진 신호 $y(t)$에 대한 주파수 영역 표현을 구해보자.

시간 영역	⟷	주파수 영역
$y(t) = x(t)\cdot\cos(\omega_0 t)$		$Y(f) = ?$

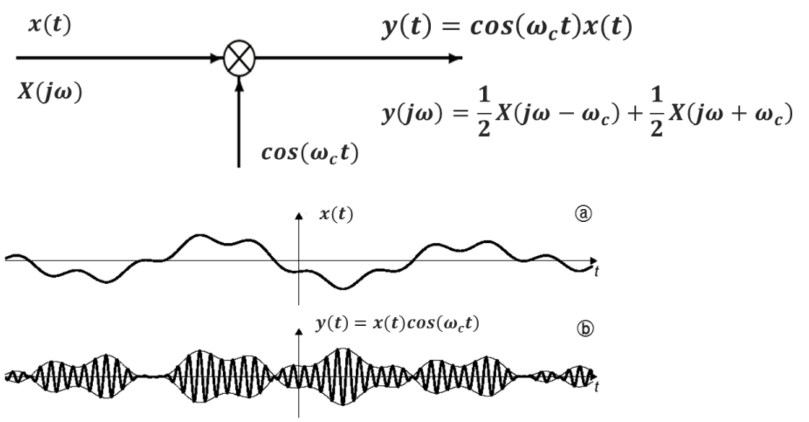
[예제풀이]

$$y(t) = x(t)\cdot\cos(\omega_0 t) = x(t)\left(\frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2}\right) = \boxed{\frac{1}{2}x(t)e^{j\omega_0 t}} + \boxed{\frac{1}{2}x(t)e^{-j\omega_0 t}}$$

$$\boxed{\frac{1}{2}X(f-f_0)} \quad \boxed{\frac{1}{2}X(f+f_0)}$$

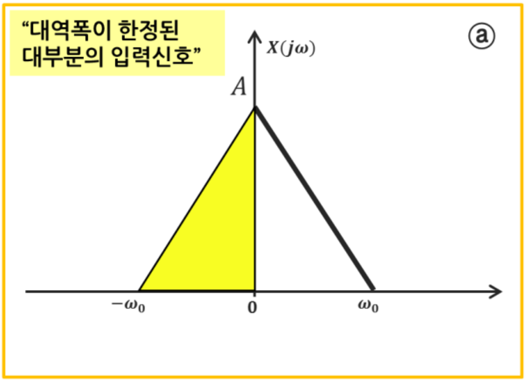
$$\therefore\ y(t) = x(t)\cdot\cos(2\pi f_0 t) \Longleftrightarrow Y(f) = \frac{1}{2}X(f-f_0) + \frac{1}{2}X(f+f_0)$$

2) [적용 사례] AM 방송 - 변조기(Modulator)

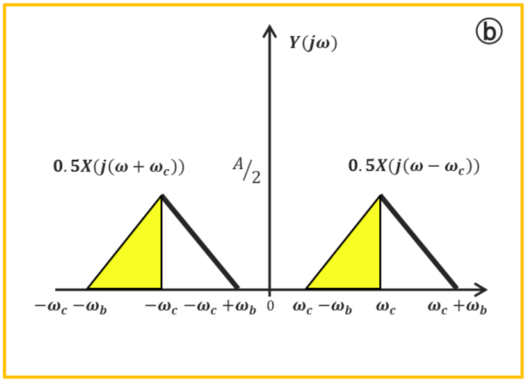


시간 영역과 주파수 영역

2) [적용 사례] AM 방송 - 변조기(Modulator) (계속)

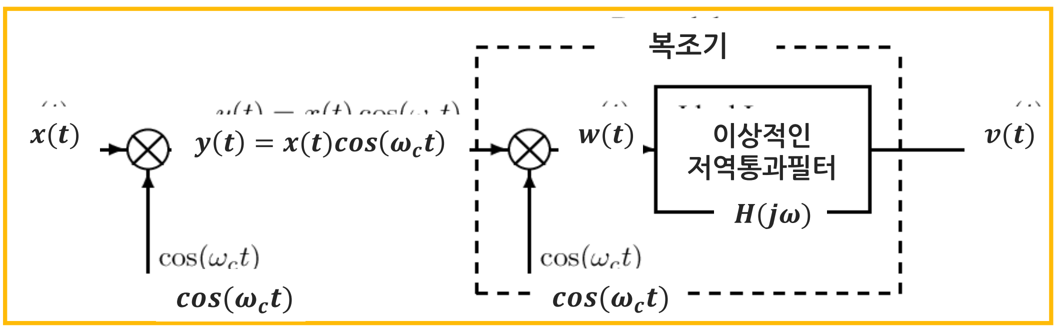


[입력신호에 대한 주파수 변환]



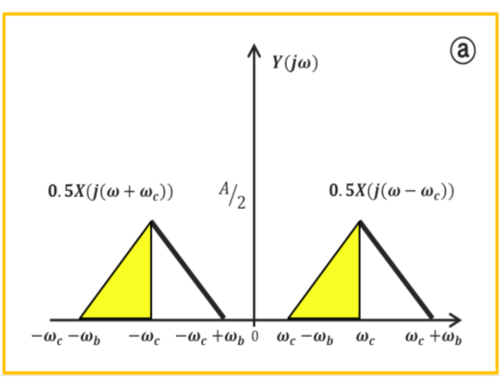
[AM 변조된 신호에 대한 주파수 변환]

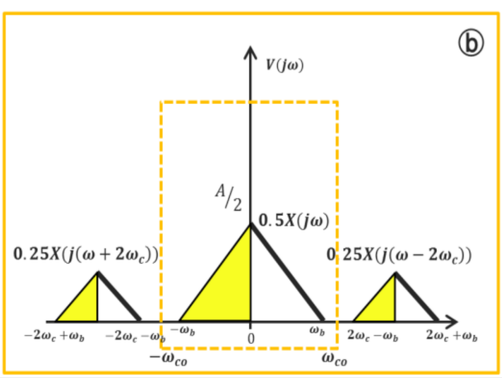
3) [적용 사례] AM 방송 - 복조기(Demodulator)



$$w(t) = x(t)\cdot[\cos(\omega_c t)]^2 = \frac{1}{2}x(t) + \frac{1}{2}x(t)\cos(2\omega_c t)$$

$$W(j\omega) = \frac{1}{2}X(j\omega) + \frac{1}{4}X(j(\omega - 2\omega_c)) + \frac{1}{4}X(j(\omega + 2\omega_c))$$

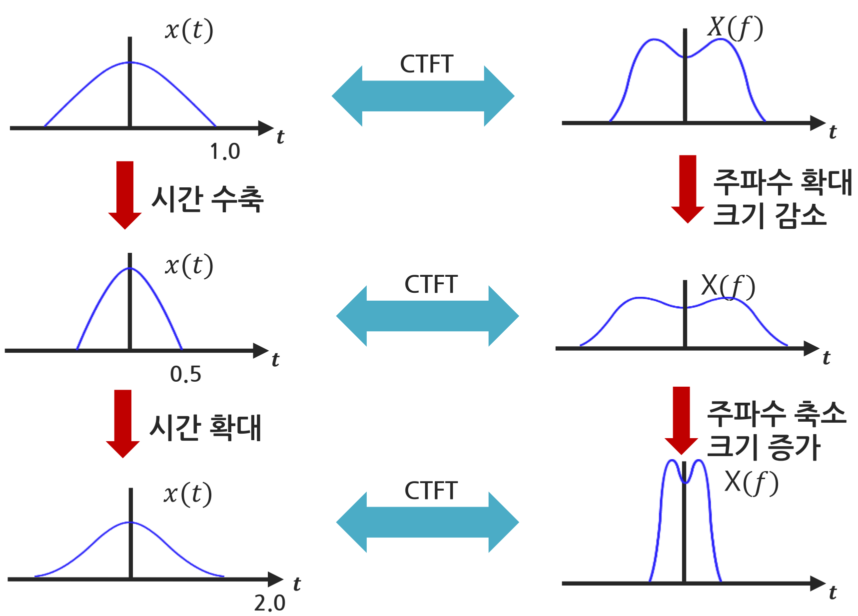




시간·주파수영역 해석

1. 시간·주파수 척도 조절 성질

1) 연속 시간 퓨리에 변환의 시간·주파수 척도 조절



2. 컨볼루션 연산과 곱 연산

1) 컨볼루션 연산과 곱 연산의 관계

- 시간 영역에서 두 신호의 곱에 대한 퓨리에 변환은 각각의 퓨리에 변환을 주파수 영역에서 컨볼루션한 결과와 같음

$$F\{x(t)\cdot y(t)\} = F\{x(t)\} * F\{y(t)\}$$

- 반대로, 시간 영역에서의 두 신호의 컨볼루션 결과에 대한 퓨리에 변환은 각각의 신호를 퓨리에 변환한 후 곱한 결과와 같음

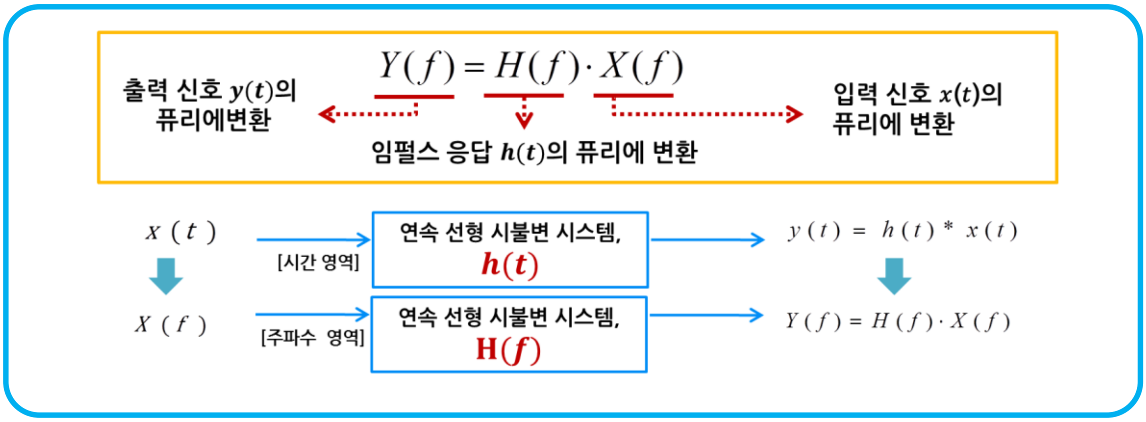
$$F\{x(t) * y(t)\} = F\{x(t)\}\cdot F\{y(t)\}$$

※ 참고: $F\{\cdot\}$는 퓨리에 변환

시간·주파수영역 해석

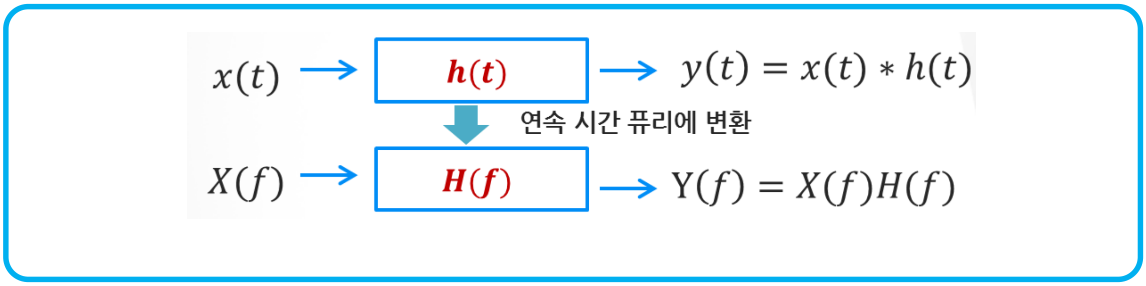
2. 컨볼루션 연산과 곱 연산

- 컨볼루션 연산과 곱 연산 관계는 연속 선형 시불변 시스템 해석을 위해 매우 중요
- 시간 영역에서의 연속 선형 시불변 시스템을 주파수 영역으로 변환



3. 연속 선형 시불변 시스템의 주파수 응답

- 출력 신호의 f = f1에서의 성분은 입력 신호의 f1 성분과 H(f1)의 곱이 됨
- 입력 신호가 시스템을 통과하면서 각 주파수 별로 $H(f)$만큼의 이득이 곱하여짐
- $H(f)$는 주파수 별 시스템의 동작을 정의
- $H(f)$ = 임펄스 응답의 퓨리에 변환 = 시스템의 주파수 응답



시간·주파수영역 해석

3. 연속 선형 시불변 시스템의 주파수 응답

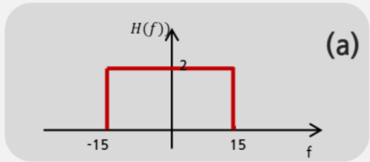
예제 19-04

시스템의 주파수 응답이 그림 (a)로 주어지고, 이 시스템에 입력 신호 $x(t)=2cos(2\pi 10t)+4sin(2\pi 20t)$가 입력될 때의 출력신호 $y(t)$를 계산해 보자.

$x(t) \rightarrow$ [연속 선형 시불변 시스템 $h(t)$] $\rightarrow y(t)$

$$y(t) = h(t) * x(t)$$

[시간 영역에서의 시간 영역 해석(시간응답)]

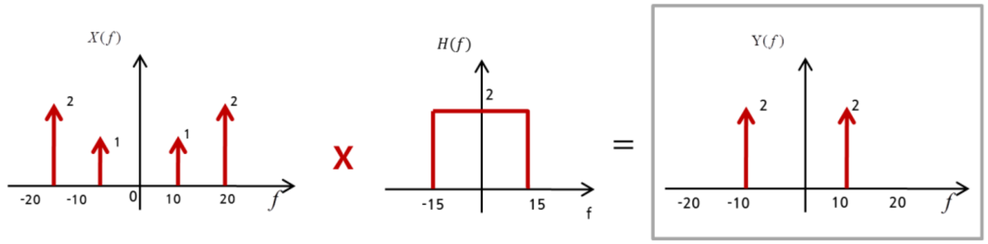


[연속 선형 시불변 시스템의 주파수응답]
(저역 통과 필터(Low-Pass Filter))

[예제풀이]

$x(t) = 2cos(2\pi 10t) + 4sin(2\pi 20t)$ * $h(t)$ = $y(t) = 4cos(2\pi 10t)$

$$Y(f) = X(f) \cdot H(f)$$



시간·주파수영역 해석

[한걸음 더] 연속 선형 시불변 시스템의 주파수 응답 예제

한걸음 더

두 신호 $x(t)$와 $y(t)$가 다음과 같을 때 $z(t)=x(t)*y(t)$를 구해보자.

$$x(t) = \cos(2\pi 5t)$$

$$y(t) = \cos(2\pi 10t)$$

전문가의 동영상 강의를 참고하여 직접 실습과제를 해결해보세요.

[과제해설]

- 컨볼루션 적분 공식을 이용해서 $z(t)$는 계산하는 것은 매우 어려움
- 시각영역에서의 두 신호의 컨볼루션 = 주파수 영역에서 두 신호의 퓨리에 변환의 곱 성질을 이용함

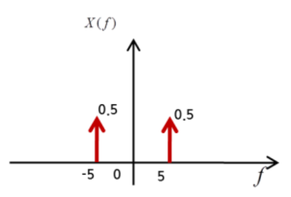
$$F\{z(t)\} = F\{x(t) * y(t)\} = X(f)Y(f)$$

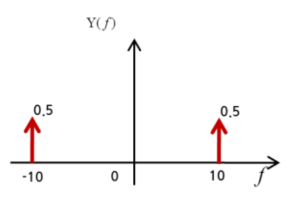
$$x(t) = \cos(2\pi 5t)$$

$$y(t) = \cos(2\pi 10t)$$

$$Z(f) = X(f)Y(f) = 0$$

$$\boxed{\therefore z(t) = 0}$$





핵심정리

시간 영역과 주파수 영역

- 주요 연속시간 신호의 퓨리에 변환

시간 영역	주파수 영역
$x(t)=1$	$X(f)=\delta(f)$
$x(t)=\delta(t)$	$X(f)=1$
$x(t)=e^{j2\pi at}$	$X(f)=\delta(f-a)$
$x(t)=A\cos(2\pi f_0 t)$	$X(f)=\frac{A}{2}\delta(f-f_0)+\frac{A}{2}\delta(f+f_0)$

- 시간 이동 성질

시간 영역	주파수 영역
$x(t)$	$X(f)$
$x(t-a)$	$X(f)e^{-j2\pi fa}$
$x(t+a)$	$X(f)e^{j2\pi fa}$
$\delta(t-\tau)$	$e^{-j2\pi f\tau}$

- 주파수 이동 성질

시간 영역	주파수 영역
$x(t)$	$X(f)$
$x(t)e^{j2\pi at}$	$X(f-a)$
$x(t)e^{-j2\pi at}$	$X(f+a)$
1	$\delta(f)$
$e^{-j2\pi at}$	$\delta(f-a)$

핵심정리

시간 · 주파수 영역 해석

- 컨볼루션 연산과 곱 연산

- 시간 영역에서의 두 신호의 곱에 대한 퓨리에 변환은 각각의 퓨리에 변환을 주파수 영역에서 컨볼루션한 것과 같음

$$F\{x(t)\cdot y(t)\}=F\{x(t)\}*F\{y(t)\}$$

- 반대로 시간영역에서의 두 신호의 컨볼루션한 결과에 대한 퓨리에 변환은 각각의 신호를 퓨리에 변환한 후 두 퓨리에 변환의 곱과 같음

$$F\{x(t)*y(t)\}=F\{x(t)\}\cdot F\{y(t)\}$$

- 연속 선형 시불변 시스템의 주파수 응답

$$x(t) \rightarrow \boxed{h(t)} \rightarrow y(t)=x(t)*h(t)$$

연속 시간 퓨리에 변환

$$X(f) \rightarrow \boxed{H(f)} \rightarrow Y(f)=X(f)H(f)$$