디지털신호처리

강 의 노 트

주파수와 정현파 신호

1주차 3차시

학습내용

❖ 주파수의 이해

❖ 기저신호

❖ 정현파 신호

학습목표

❖ 다양한 신호에서의 주파수 개념을 설명할 수 있다.

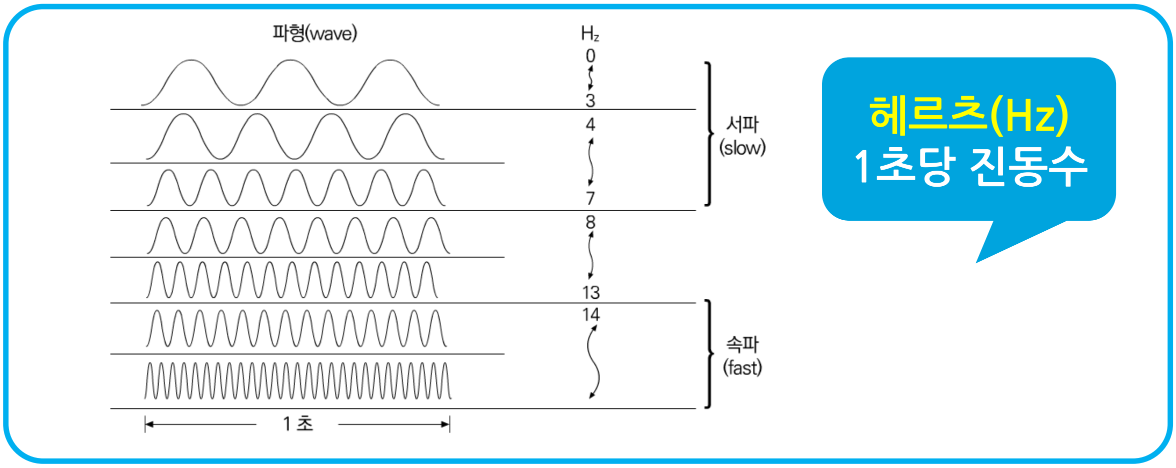
❖ 기저신호의 의미와 기저신호의 조건을 설명할 수 있다.

❖ 정현파 신호의 특징과 성질을 설명할 수 있다.

주파수의 이해

1. 주파수(Frequency)란?

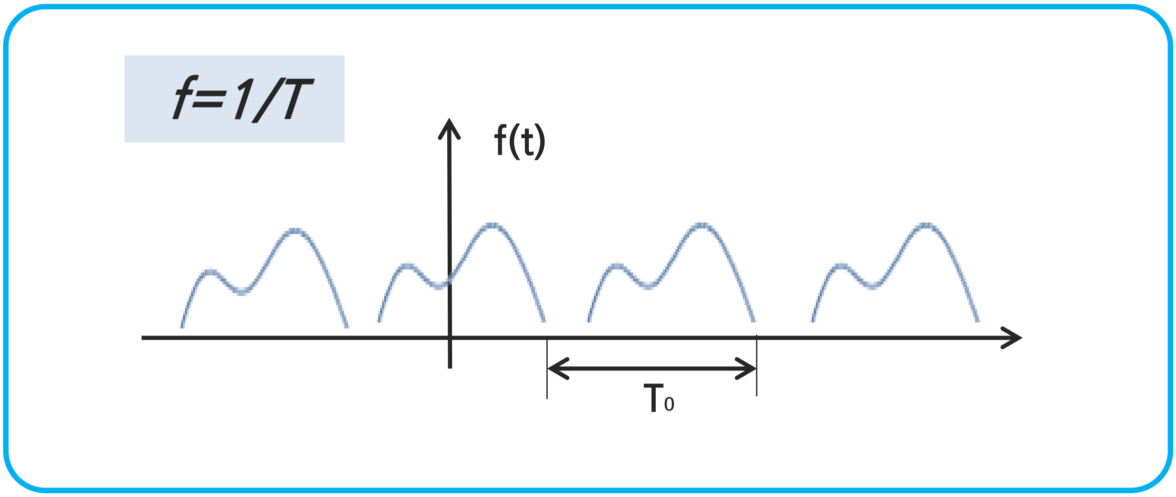
- 빛이나 전파의 진동수를 나타내는 측정단위
- 1초당 진동수가 적으면 저주파(Low Frequency), 많으면 고주파(High Frequency)



2. 주기와 주파수와의 관계

1) 정의

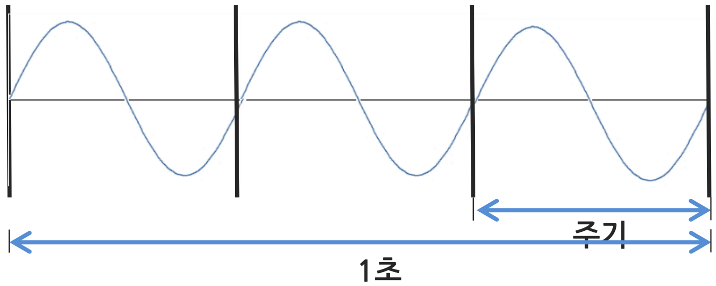
- 주기신호(Periodic Signal): 임의의 주기(T) 동안에 신호가 계속해서 반복되는 신호
- 주기신호에 대한 주파수와 주기는 반비례



주파수의 이해

2) 예시

[정현파(사인파) 신호]

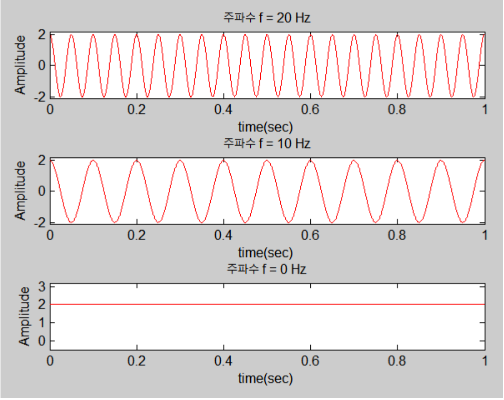


주파수=사이클/초
=3Hz

※ *주기: 1/3s, 주파수: 3Hz*

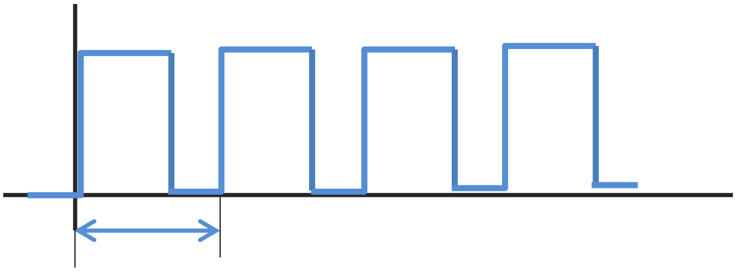
[다양한 주파수의 정현파 신호]

$$x(t) = 2\cos(2\pi f t)$$



[구형파(Square Wave) 주기신호]

$$\mathrm{T} = 1/f(\mathrm{sec})$$

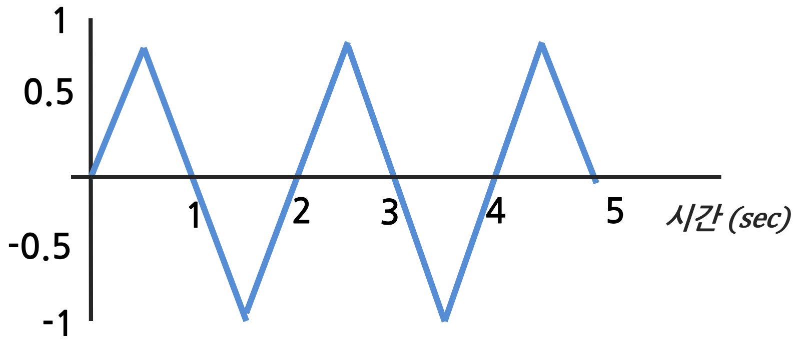


※ *주기: 0.5 s, 주파수: 2 Hz*

주파수의 이해

2) 예시

[삼각파(Triangular Wave) 주기신호]



※ 주기(T) : 2 sec, 주파수(f) : 0.5 Hz

기저신호

1. 기저신호의 개념

1) 기저신호(Base Signal)

- 신호의 표현을 바꾸는 데 바탕 역할을 하는 기본 신호
  [예] 빛이나 색의 삼원색, 선형 공간의 직교 단위 벡터와 같은 역할
- 기저신호들의 일차 결합으로 표현 가능

※ 푸리에 급수(Fourier Series)

$$x(t) = \sum_i c_i \varphi_i(t)$$

- $x(t)$: *임의의 주기신호*
- φ_i: *기저신호*
- c_i: *i 기저신호에 대한 가중치*

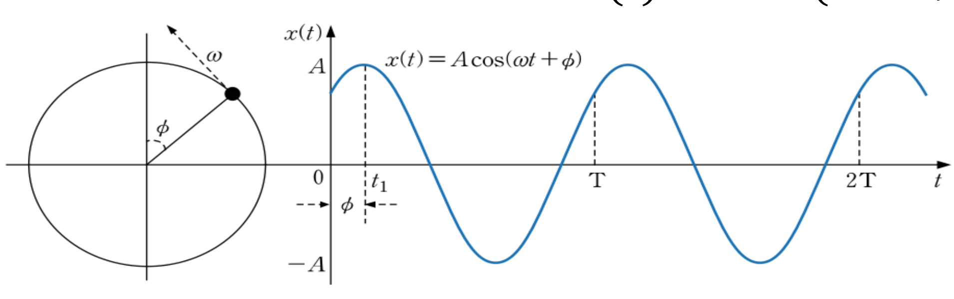
2. 기저신호의 조건

1) 기저신호의 요건

- 형태가 단순, 신호의 표현을 구하기 쉬워야 함
- 다양하고 폭넓은 신호들에 대해 표현이 가능해야 함
- 표현된 신호에 대한 시스템 응답이 편리하게 표기
- 한 주파수에 대해 하나의 기본 신호만 존재

정현파는 가장 바람직한 기저신호 중 하나

$$x(t) = A\cos(\omega t + \emptyset)$$



기저신호

2) 대표적인 기저신호

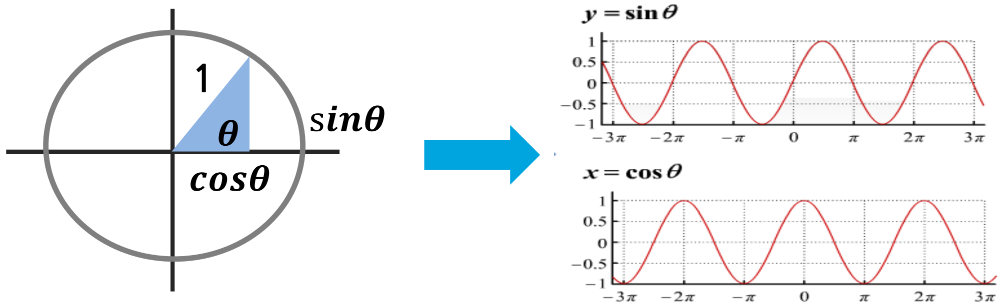
- 신호처리 분야에서 특별한 신호로, 하나의 정현파는 오직 하나의 주파수를 가짐
- 정현파는 신호의 표현을 다른 영역으로 변환하는 과정에서 기본이 되는 신호
- 모든 주기신호는 정현파 신호들의 일차 결합으로 표현 가능함
  → *퓨리에 급수*

정현파 신호

1. 정현파 신호(Sinusoidal Signal)

1) 정의

- 신호와 시스템에서 가장 근본적이고, 기본이 되는 신호(Base Signal)
- 정현파의 주기(T)는 2π
- 정현파인 사인함수와 코사인함수는 각도 θ에 따른 주기함수



2) 코사인 신호

$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \emptyset)$ ➔ $x(t)$는 코사인 함수의 각이 변수t의 함수로 표현

- $\emptyset$ → 위상변이(Phase Shift)
- ω_0 → 라디안 주파수(Radian Frequency)
- A → 진폭(Amplitude)

$\omega_0 = 2\pi f$ Radian/sec — 헤르츠 주파수식으로 표현

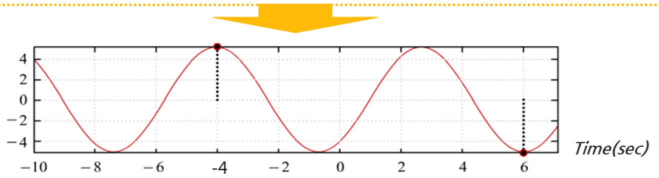
$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$ — 주파수와 주기와의 관계 반비례

$x(t) = 5\cos(0.3\pi t + 1.2\pi)$

➔ 진폭 A= 5 ➔ 라디안 주파수 $\omega_0 = 0.3\pi$ ➔ 주기= $T = 1/f$ ➔ 위상변이 $\emptyset = 1.2\pi$

$f = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{0.3\pi}{2\pi} = \frac{3}{20}$Hz $20/3sec$

➔ 피크위치 $0.3\pi t + 1.2\pi = 0$ $\therefore t = -4sec$



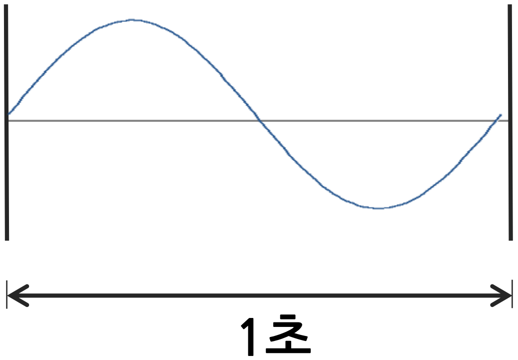
정현파 신호

2. 정현파 신호의 기본 특성

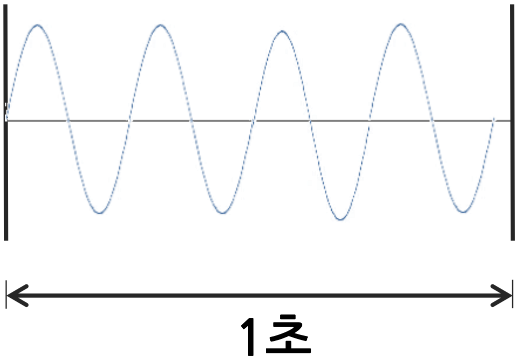
1) 주파수와 소리의 관계

- 주파수: 1초의 시간 동안에 진동·왕복한 횟수
  [예] 1초에 4번 진동: 4Hz
- 주파수가 높으면 고음, 주파수가 낮으면 저음

주파수: $1Hz$



주파수: $4Hz$



2) 주파수와 음정의 관계

- 주파수와 소리의 음정과 밀접한 관련 있음
  [예] 음정의 도는 주파수 264Hz 정현파 신호

음에 따른 주파수

음정	도 (C4)	레 (D4)	미 (E4)	파 (F4)	솔 (G4)	라 (A4)	시 (B4)	도 (C5)
주파수 (Hz)	264	297	330	352	396	440	495	528

정현파 신호

2. 정현파 신호의 기본 특성

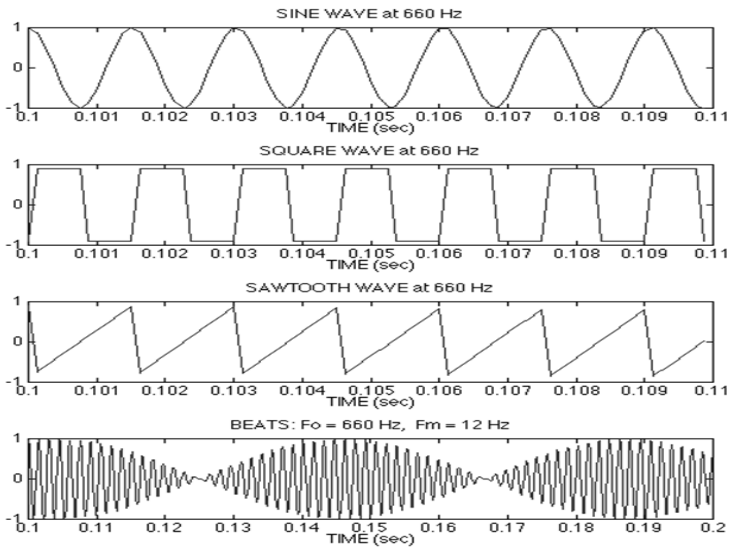
3) 주기함수와 소리의 관계

[정현파]

[구형파]

[톱니파]

[비트파]



4) 사인, 코사인 신호의 기본 특성

특성	식
동질성	$\sin\theta = \cos(\theta - \frac{\pi}{2})$
주기성	$\sin(\theta + 2\pi k) = \sin(\theta)$ $\cos(\theta + 2\pi k) = \cos(\theta)$, k는 정수
우함수	$\cos(-\theta) = \cos(\theta)$
기함수	$\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$
사인값이 0	$\sin(\pi k) = 0$, k는 정수
코사인값이 1	$\cos(2\pi k) = 1$, k는 정수
코사인값이 -1	$\cos\left(2\pi(k + \frac{1}{2})\right) = -1$, k는 정수

정현파 신호

3. 위상변이와 시간변이의 관계

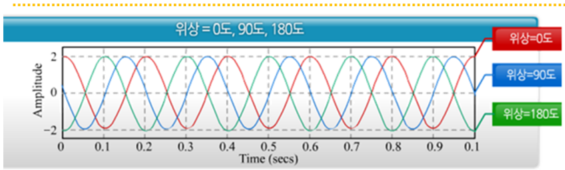
1) 위상변이 변수 ∅

- ∅는 코사인 함수에서 최대치와 최소치의 위치를 결정

$$x(t) = 2cos(2\pi(5)t + \emptyset)$$

➔ $\emptyset = 0$ 이면, 피크가 t=0에서 나타남

➔ $\emptyset \neq 0$ 이면, 위상변이는 최대치가 t=0에서 시간적으로 얼마나 변이 되는가를 결정함



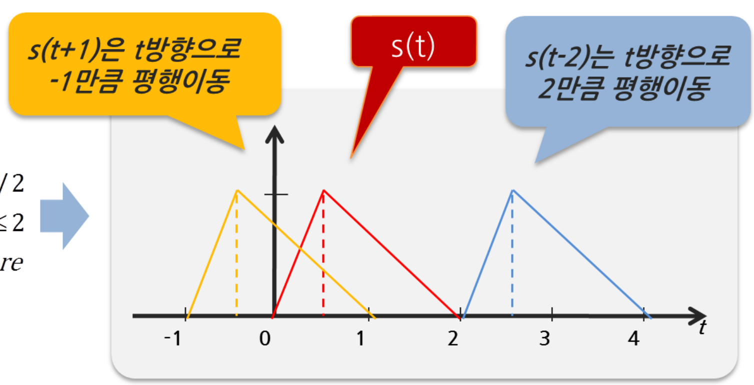
위상변이에 따른
코사인 함수의 피크변화

예제 03-01

다음과 같이 정의되는 s(t) 신호를 그려보자. 또한, 시간적(시간 축)으로 2초만큼 쉬프트된 s(t-2)와 시간적으로 -1초만큼 쉬프트된 s(t+1) 신호도 그려보자.

[예제풀이]

$$s(t) = \begin{cases} 2t, & 0 \le t \le 1/2 \\ (4-2t)/3, & 1/2 \le t \le 2 \\ 0, & elsewhere \end{cases}$$



- s(t-2)는 s(t)를 시간적으로 지연(Delay)되었다고 함
- s(t+1)는 s(t)를 시간적으로 선행(Advanced)한다고 함

정현파 신호

3. 위상변이와 시간변이의 관계

2) 위상변이와 시간변이

$x(t) = Acos(\omega_0 t)$	위상이 0인 코사인으로 가정
$x(t-t_1) = Acos\big(\omega_0(t-t_1)\big) = Acos(\omega_0 t + \emptyset)$	시간적으로 t_1만큼 지연시킴
$Acos(\omega_0 t - \omega_0 t_1) = Acos(\omega_0 t + \emptyset)$	지연된 시간 t_1은 위상변이 파이
$-\omega_0 t_1 = \emptyset$	모든 t에서 성립, 위상변이 파이
$t_1 = -\frac{\emptyset}{\omega_0} = -\frac{\emptyset}{2\pi f_0}$	위상변이 파이인 코사인 신호 시간지연 t_1

예제 03-02

$x(t)$신호는 $s(t)$ 신호를 어느 정도 시간 변이한 신호인가?
신호변이 $x(t) = s(t-t_1)$에서 시간변이 t_1을 구하여 보자.

[예제풀이]

- 아래의 식과 같이 $x(t)$라는 신호를 다시 표현할 수 있고, 시간변이 t_1은 1/200
- 즉, 신호 $x(t)$ 코사인 함수는 원래 신호 $s(t)$신호를 시간적으로 1/200초 만큼 지연

$$x(t) = 20\cos(2\pi(40)t - 0.4\pi)$$

$$= 20\cos\left(80\pi(t - \frac{1}{200})\right)$$

$$= s\left(t - \frac{1}{200}\right)$$

핵심정리

주파수의 이해

- 주파수: 빛이나 전파의 진동수를 나타내는 측정단위
- 헤르츠(Hz)에 따라 저주파(Low Frequency), 고주파(High Frequency)로 구분
- 주기신호에 대한 주파수(Frequency)와 주기는 반비례함 f=1/T

기저신호

- 신호의 표현을 바꾸는 데 바탕 역할(기본 역할)을 하는 신호
- 퓨리에 급수: 모든 신호는 기저신호들의 일차 결합으로 표현 가능

정현파 신호

- 가장 바람직한 기저신호
- 진폭(A), 주파수 및 위상변이로 표현
- $x(t) = Acos(\omega_0 t + \emptyset)$