디지털신호처리

강 의 노 트

퓨리에 변환

5주차 1차시

학습내용

- ❖ 비주기 신호에 대한 주파수 표현
- ❖ 퓨리에 변환
- ❖ 임펄스 신호

학습목표

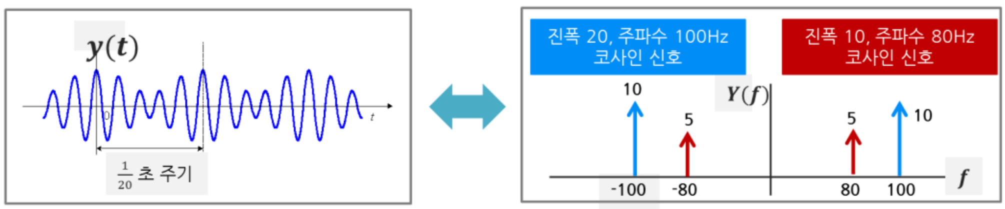
- ❖ 비주기 신호에 대한 스펙트럼을 표현할 수 있다.
- ❖ 퓨리에 변환의 정의와 퓨리에 급수와의 차이점을 설명할 수 있다.
- ❖ 임펄스 신호의 정의를 이해하고, 임펄스 신호에 대한 성질을 설명할 수 있다.

비주기 신호에 대한 주파수 표현

1. 비주기 신호의 주파수 분석

1) 임의의 신호에 대한 시간 축 표현

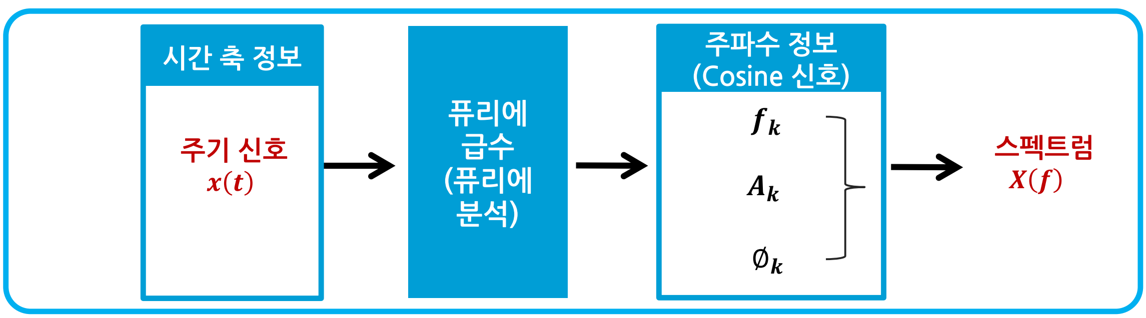
- 임의의 신호에 대한 시간 축인 $y(t)$신호의 의미 파악이 어려움
  → 주파수 영역 표현(스펙트럼 표현)
- 두 개의 주파수의 합으로 주파수 축을 표현(주파수 스펙트럼)하면 효율적인 정보전달 가능



[시간 축에서의 주기 신호 y(t)] [주파수 축에서의 스펙트럼 표현 Y(f)]

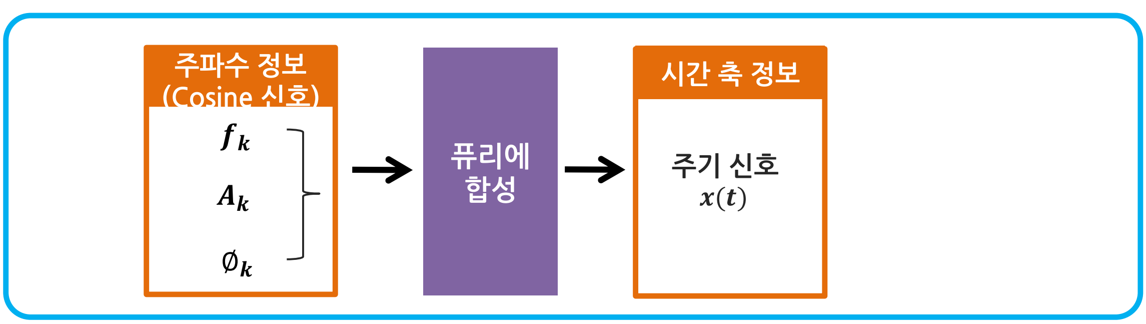
2) 퓨리에 급수(Fourier Series)

- 연속적인 주기 신호 $x(t)$을 퓨리에 분석하면 $x(t)$신호에 대한 스펙트럼 표현 가능



3) 퓨리에 합성

- 주파수 정보를 이용, 퓨리에 합성하면 시간 영역의 주기 신호를 합성 가능함

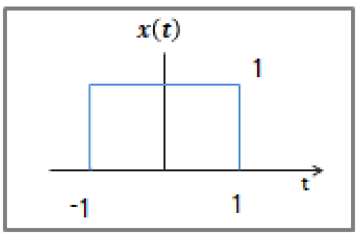


비주기 신호에 대한 주파수 표현

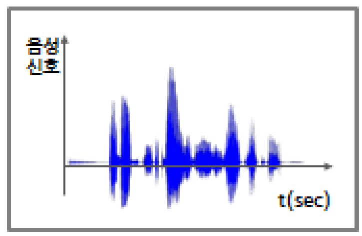
1. 비주기 신호의 주파수 분석

- 다음과 같은 비주기 신호와 비주기 음성신호에 대한 스펙트럼은 어떻게 해석할 수 있을까요?

[비주기 신호]



[비주기 음성 신호]



비주기 신호에 대한 주파수 표현

2. 퓨리에 급수의 시간이동 성질

1) 시간 축 이동과 퓨리에 급수 계수

- 주파수: 시간에 따른 신호의 변화율과 관계 있음
- 시간축 이동: 진폭 및 주파수 성질은 변하지 않으며 기준 시간에 대한 신호의 위치 정보인 위상정보 변화를 의미함

$$x(t) \xrightarrow{\text{퓨리에 분석}} X_k = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)e^{-j2\pi f_0 kt}dt$$

$$x(t-\tau) \xrightarrow{\text{퓨리에 분석}} X_k e^{-j2\pi k f_0 \tau}$$

(시간축 이동)

2) 증명

- $x(t-\tau)$에 대한 퓨리에 계수를 Y_k 라 하면, $Y_k = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t-\tau)e^{-j2\pi f_0 kt}dt$
- $t-\tau = t'$ 로 정의하면,

$$Y_k = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t')e^{-j2\pi f_0 k(t'+\tau)}dt' = (\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t')e^{-j2\pi f_0 kt'}dt')e^{-j2\pi f_0 k\tau} = X_k e^{-j2\pi k f_0 \tau}$$

3) 시간 축 이동과 연속 시간 퓨리에 급수 계수의 위상 변화 관계

우로 $t=\tau$ 이동

$x(t)$ 의 연속 시간 퓨리에 급수 계수 = X_k

$x(t-\tau)$ 의 연속 시간 퓨리에 급수 계수 = $X_k e^{-j2\pi k f_0 \tau}$

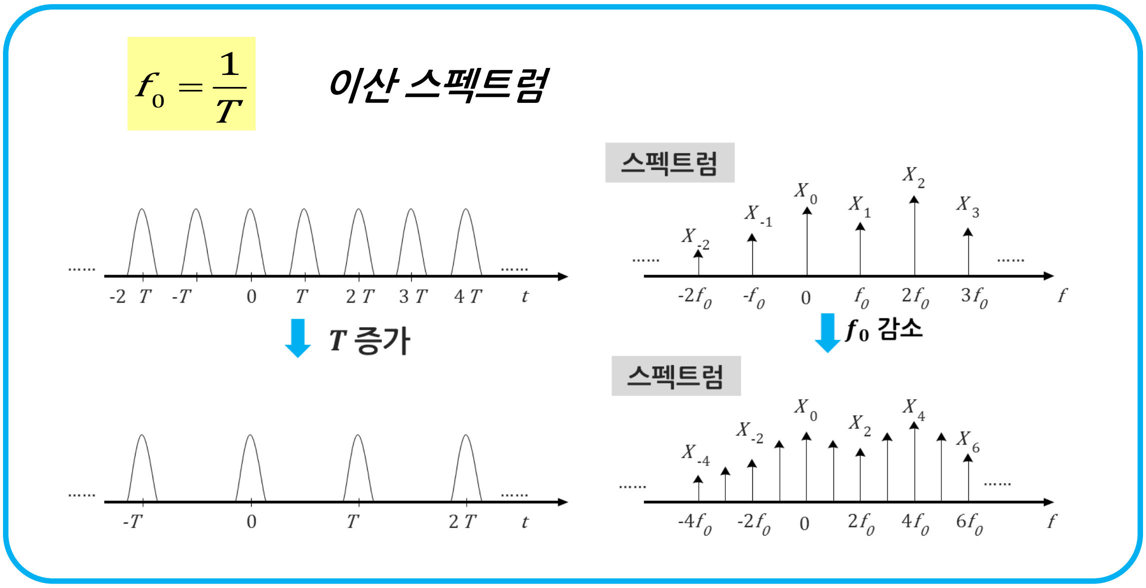
$x(t+\tau)$ 의 연속 시간 퓨리에 급수 계수 = $X_k e^{j2\pi k f_0 \tau}$

좌로 $t=\tau$ 이동

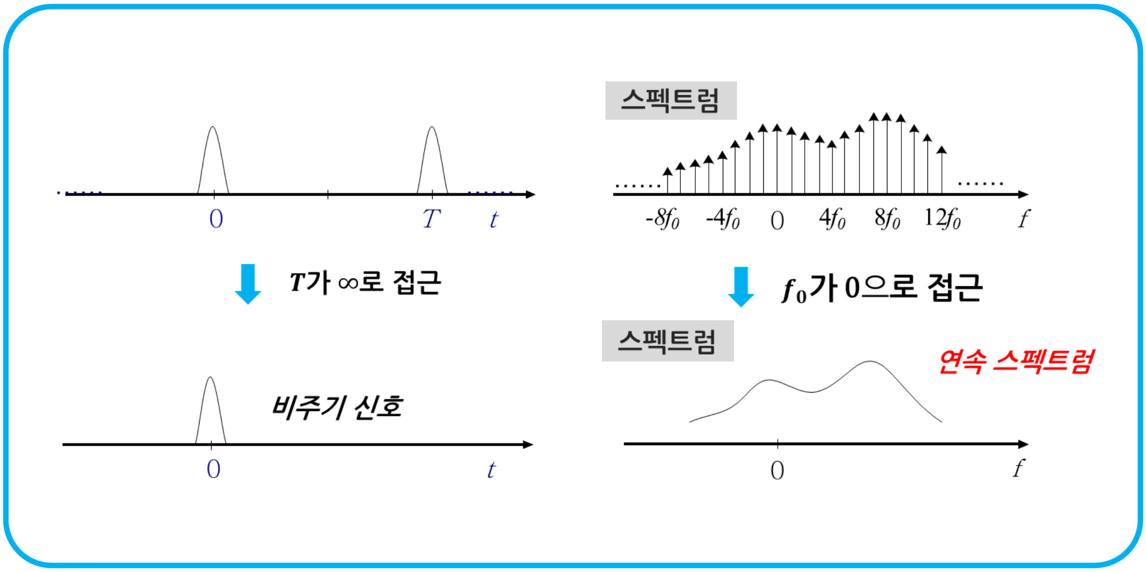
비주기 신호에 대한 주파수 표현

3. 주기와 스펙트럼의 관계

- 주기 T증가 ⇨ 기본주파수 f_0감소 ⇨ 스펙트럼의 간격 감소



- 주기를 증가시키는 과정을 통하여 연속 시간 푸리에 급수로부터 연속 시간 푸리에 변환을 유도하는 과정

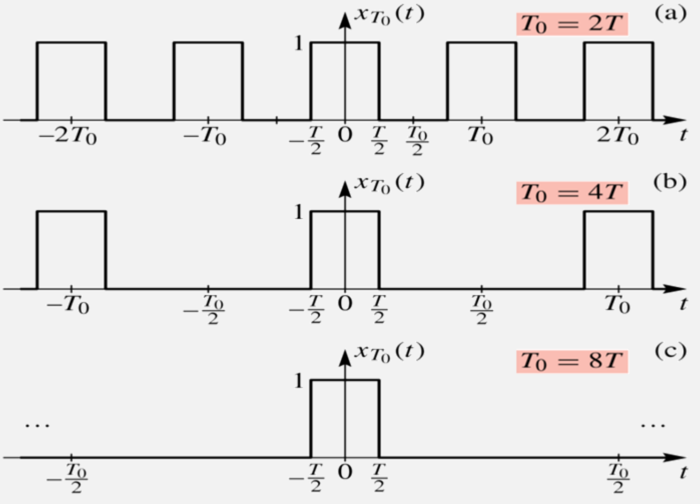


비주기 신호에 대한 주파수 표현

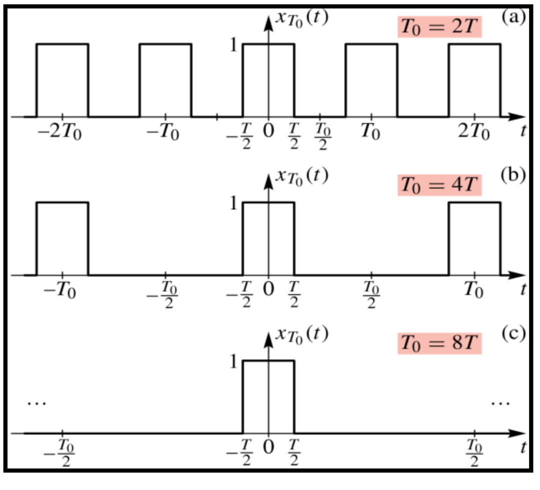
3. 주기와 스펙트럼의 관계

예제 13-01

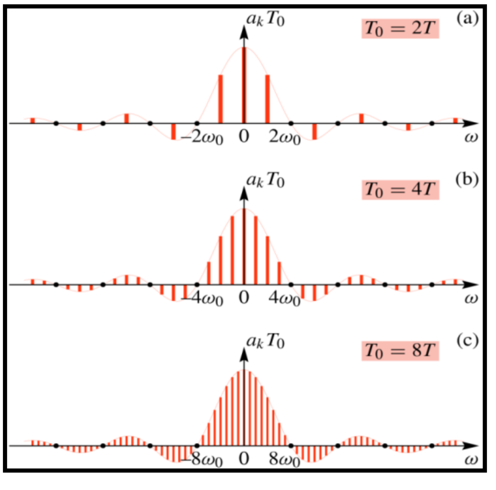
다음 그림과 같이 구형파의 주기가 증가할 때 실제 스펙트럼은 어떻게 변화하는지 확인해 보자.



[예제풀이]



[실제 주기 신호의 주기를 증가시키는 경우의 시간축 신호파형]



[주기에 대한 주파수 스펙트럼의 변화]

퓨리에 변환

1. 연속 시간 퓨리에 변환

1) 주기 신호

- 주기 T_0인 주기 신호는 퓨리에 급수에 의하여 복소지수 신호의 합(정현파 신호)으로 표현가능

$$x_{T_0}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (a_k) e^{j\omega_0 kt} \qquad a_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x_{T_0}(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

2) 비주기 신호

- 주기 신호의 주기를 무한대로 하면 비주기 신호
- 비주기 신호의 스펙트럼은 연속된 형태의 스펙트럼

$$\lim_{T_0 \to \infty} x_{T_0}(t) = x(t), \quad for \quad -\infty < t < \infty$$

2. 퓨리에 변환 정의

1) 연속 시간 퓨리에 변환

- 비주기 연속신호 $x(t)$로 부터 $X(j\omega)$ 를 구하는 것

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

2) 연속 시간 퓨리에 역변환

- 주파수영역의 퓨리에 변환 $X(j\omega)$ 로 부터 "시간영역" $x(t)$를 구하는 것

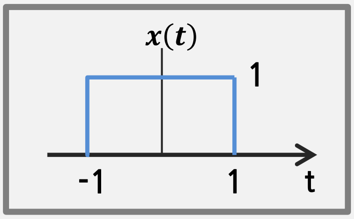
$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

퓨리에 변환

3. 퓨리에 변환 예제

예제 13-02

다음 그림과 같은 연속 비주기 신호 $x(t)$의 스펙트럼(퓨리에 변환)을 구해 보자.



[비주기 구형파 신호]

[예제풀이]

- (t)는 비주기 신호, 연속 시간 퓨리에 변환을 이용하여 스펙트럼 표현

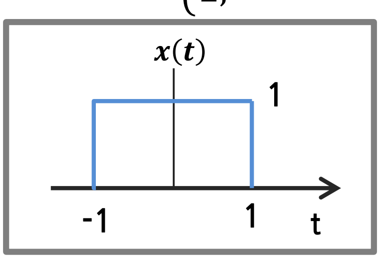
$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt = \int_{-1}^{1} 1e^{-j2\pi ft}dt = \frac{1}{-j2\pi f}e^{-j2\pi ft}\Big|_{-1}^{1}, \quad f \neq 0$$

$$= \frac{e^{j2\pi f} - e^{-j2\pi f}}{j2\pi f} = \frac{\sin(2\pi f)}{\pi f}, \quad f \neq 0$$

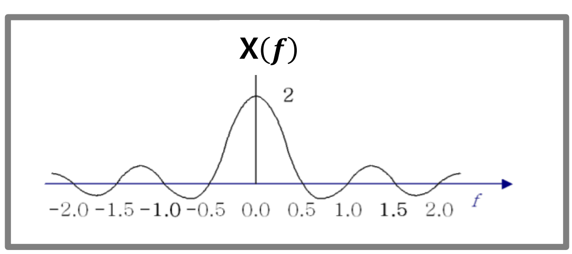
$$= 2\frac{\sin(2\pi f)}{2\pi f} = 2\sin c(2\pi f), \quad f \neq 0$$

$$X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi 0t}dt = \int_{-1}^{1} 1dt = 2, \quad f = 0$$

$$X(f) = \begin{cases} 2sinc(2\pi f), & f \neq 0 \\ 2, & f = 0 \end{cases}$$



[비주기 구형파 신호]



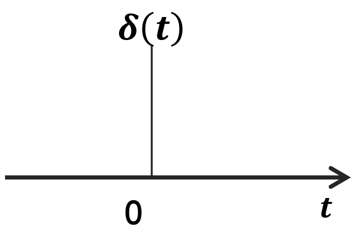
[비주기 구형파 신호의 스펙트럼]

임펄스 신호

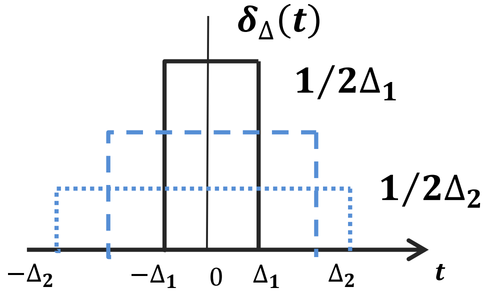
1. 임펄스 신호란?

1) 임펄스 함수(Unit Impulse Function)

$$\delta(t) = 0, t \neq 0 \qquad \lim_{\Delta \to 0} \delta_{\Delta}(t) = \delta(t)$$



[단위 임펄스 함수]



[구형파 함수의 극한]

2) 임펄스 신호의 정의

- ***t*=0** 인 경우만 신호가 존재, 신호가 집중되어 있음
- ***t*≠0** 구간에서는 모두 0인 신호

$$\delta(t) = 0, t \neq 0$$

- 임펄스 신호의 적분 **=1**

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau)\mathrm{d}\tau = 1$$

임펄스 신호

2. 샘플링 성질

- 임의의 신호 $\boldsymbol{x(t)}$에 임펄스 신호를 곱하고, 적분하면 임펄스가 존재하는 순간 값을 ($\boldsymbol{t=0}$ 인 순간) 샘플링하는 성질

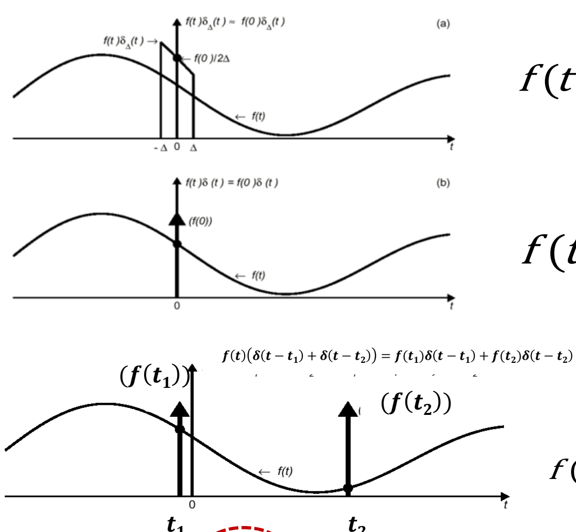
$$\int_{t_1}^{t_2} x(t)\delta(t)dt = x(0) \quad (t_1 < 0 < t_2)$$

- 만약 $\boldsymbol{t_0}$ 가 $\boldsymbol{t_1}$과 $\boldsymbol{t_2}$사이의 시간이라고 하면 샘플링 성질에 의하여

$$\int_{t_1}^{t_2} x(t)\delta(t-t_0)dt = x(t_0) \qquad (t_1 < t_0 < t_2)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} x(t)\delta(t-t_0)dt = 0 \qquad (t_0 < t_1 \; or \; t_2 < t_0)$$

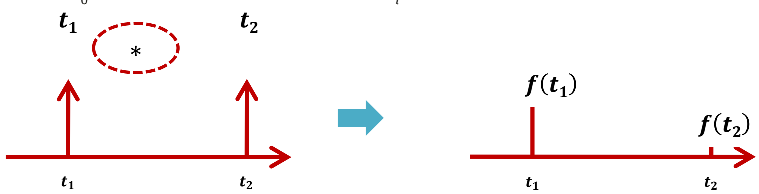
- 임의의 $\boldsymbol{f(t)}$ 연속 신호에 임펄스 함수를 곱한 것을 샘플링 성질이라고 함
- 일정한 주기의 임펄스 신호를 곱해주면 이산 신호를 얻을 수 있음



$$f(t)\delta_{\Delta}(t) \approx f(0)\delta_{\Delta}(t)$$

$$f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t)$$

$$f(t)\delta(t-t_0) = f(t_0)\delta(t-t_0)$$



임펄스 신호

2. 샘플링 성질

예제 13-03

다음 연속신호 $y(t)$신호를 t=1/80에서 샘플링 할 경우 임펄스 신호로 샘플링 과정을 표현해 보자.

$$y(t) = \sin(20\pi t)$$

[예제풀이]

$$y(t)|_{t=\frac{1}{80}} = \sin(20\pi t)\delta(t-\frac{1}{80}) = \sin(20\pi(\frac{1}{80}))\delta(t-\frac{1}{80})$$
$$= \sin(0.25\pi)\delta(t-\frac{1}{80}) = 0.707\delta(t-\frac{1}{80})$$

- 임펄스 신호의 성질 정리

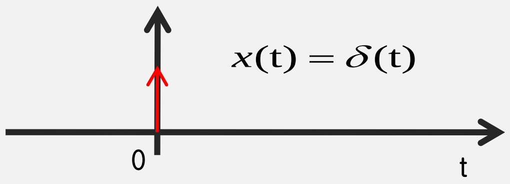
$\delta(t-t_0)=0, \quad t \neq t_0$	$t = t_0$ 순간에만 신호값 존재
$f(t)\delta(t-t_0)=f(t_0)\delta(t-t_0)$	신호의 적분값은 1
$\delta(t-t_0)=0, \quad t \neq t_0$	임의의 신호와 곱하면 그 신호를 샘플링
$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)dt = 1$	임의의 함수 $f(t)$에서 하나의 값을 추출

임펄스 신호

3. 임펄스 신호의 푸리에 변환

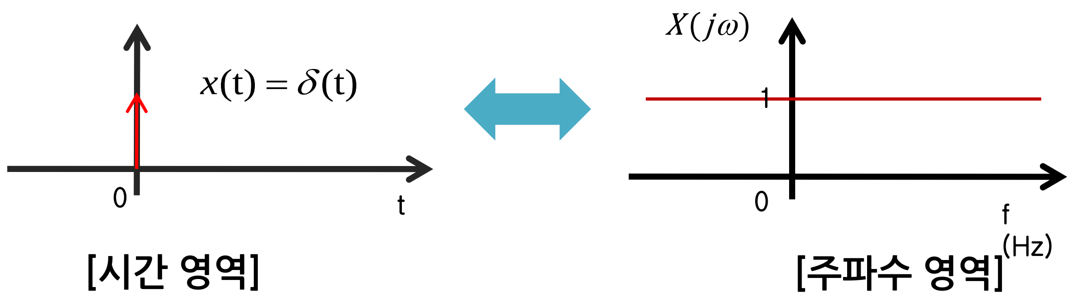
예제 13-04

다음 임펄스 신호(Impulse Signal)에 대한 푸리에 변환(스펙트럼 표현)을 구해 보자.



[예제풀이]

- 푸리에 변환식에 의해, $X(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)e^{-j\omega t}dt=1$

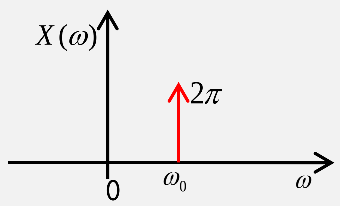


임펄스 신호

[한걸음 더] 임펄스 신호의 푸리에 변환 예제 풀이

한걸음 더

푸리에 변환 $X(\omega)$가 다음과 같을 때 원신호 $x(t)$는 어떻게 되는가?



$$X(\omega) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$$

전문가 해설을 통해 풀이를 확인해보세요.

[과제해설]

- 푸리에 역변환식은 Radian 주파수 ω에 의하여 다음과 같이 표현됨
- 차이점은 Radian 주파수와 Hz주파수의 상수 2π에 의하여 다음과 같이 표현됨

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t}\,d\omega$$

$$\therefore x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t}\,d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega-\omega_0)e^{j\omega t}\,d\omega = e^{j\omega_0 t}$$

시간 영역	푸리에 변환	주파수 영역
$e^{j\omega_0 t}$	⟷	$2\pi\delta(\omega - \omega_0)$

핵심정리

비주기 신호에 대한 스펙트럼 표현

- 주기 신호에 대한 스펙트럼 표현에서 신호를 단순히 시간 축에서 이동시키면 진폭 및 주파수 성질은 변하지 않고, 시간 축 이동에 따라 위상정보는 변화함
- 주기 T가 증가할 수록 기본주파수 f_0 는 감소, 스펙트럼 간격은 좁아짐
  ⇨ 주기 T가 무한대로 가는 비주기 신호의 경우 스펙트럼은 연속적이 됨
- 비주기 신호에 대한 스펙트럼 표현은 푸리에 변환으로 가능함

푸리에 변환

- 비주기 신호의 스펙트럼은 연속된 형태의 스펙트럼, 푸리에 변환으로 가능

푸리에 변환식	푸리에 역변환식
$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt$	$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df$

임펄스 신호

- 임의의 한 순간에만 신호가 집중되고, 임펄스 신호를 적분하면 단위면적 1을 가지며, 샘플링 성질을 가지고 있는 신호