디지털신호처리

강 의 노 트

이산 퓨리에 변환(DFT)과 역이산 퓨리에 변환(IDFT)

13주차 1차시

학습내용

- ❖ 이산 신호 퓨리에 변환(DTFT)의 한계
- ❖ 이산 퓨리에 변환(DFT)과 역이산 퓨리에 변환(IDFT)

학습목표

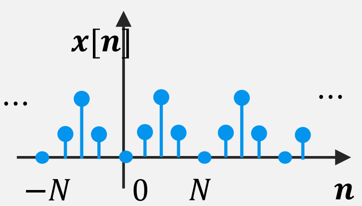
- ❖ 이산 신호 퓨리에 변환(DTFT)의 한계에 대해 설명할 수 있다.
- ❖ 이산 퓨리에 변환(DFT)과 역이산 퓨리에 변환(IDFT)을 정의할 수 있다.

이산 신호 퓨리에 변환(DTFT)의 한계

1. 이산 퓨리에 급수와 비주기 이산 신호 퓨리에 변환 요약

1) 이산 시간 신호

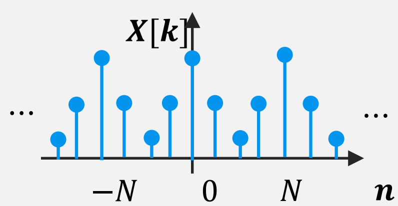
시간 영역



$$X[k] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$$

이산 및 주기적 특징

주파수 영역

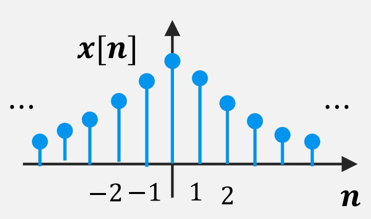


$$x[n] = \sum_{n=0}^{N-1} X[k]e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$$

이산 및 주기적 특징

2) 이산 및 비주기적 특징

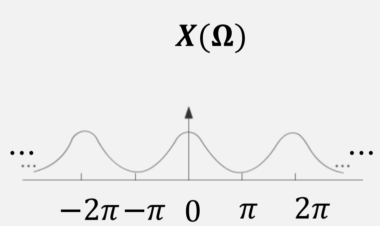
시간 영역



$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n}$$

이산 및 비주기적 특징

주파수 영역



$$x[n] = \sum_{n=0}^{N-1} X[k]e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$$

연속 및 주기적 특징

이산 신호 퓨리에 변환(DTFT)의 한계

2. 이산 신호 퓨리에 변환(DTFT)의 한계

- DTFT는 신호 $\boldsymbol{x[n]}$을 $-\infty \le \boldsymbol{n} \le \propto$ 에 대하여 알고 있다고 가정

  ⇨ 실제 대부분의 데이터는 **유한 개이며, 그 수는 작음**
- 신호 $\boldsymbol{x[n]}$ 은 이산이지만 스펙트럼 $\boldsymbol{X(\Omega)}$는 주파수 $\boldsymbol{\Omega}$ 에 대한 연속 함수

  → 디지털 컴퓨터를 사용한 수치적 계산 불가

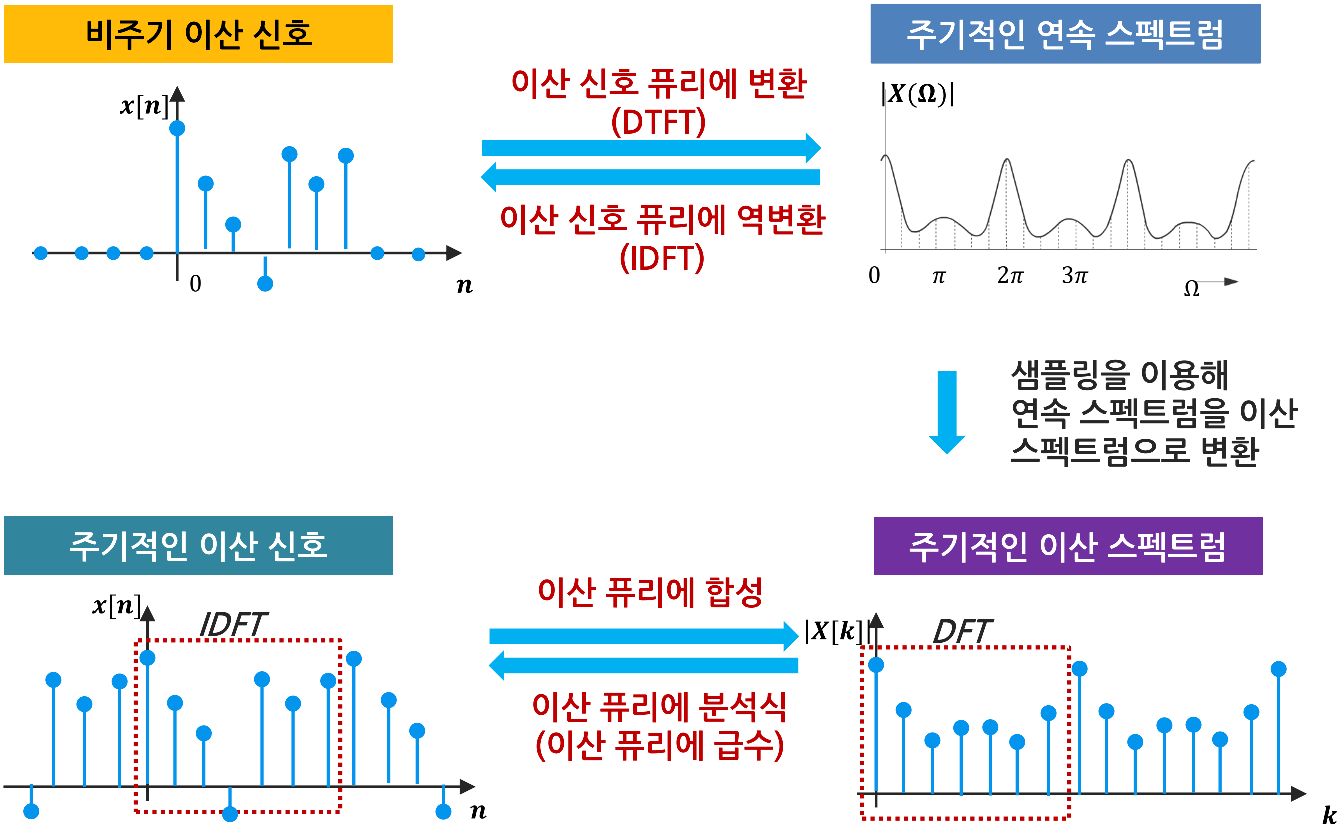
  ⇨ 유한 개 데이터로 부터 계산 가능 & 유한 개 이산 주파수 스펙트럼을 만드는 퓨리에 변환의 근사화 필요

  이산 퓨리에 변환(DFT: Discrete Fourier Transform)
- 디지털시스템을 이용한 신호 처리를 위한 전제 조건: 신호와 스펙트럼 **모두 이산**이어야 함

  ⇨ 이 전제가 충족되지 않을 경우 **샘플링(시간 영역, 주파수 영역)으로 해결**

이산 퓨리에 변환(DFT)과 역이산 퓨리에 변환(IDFT)

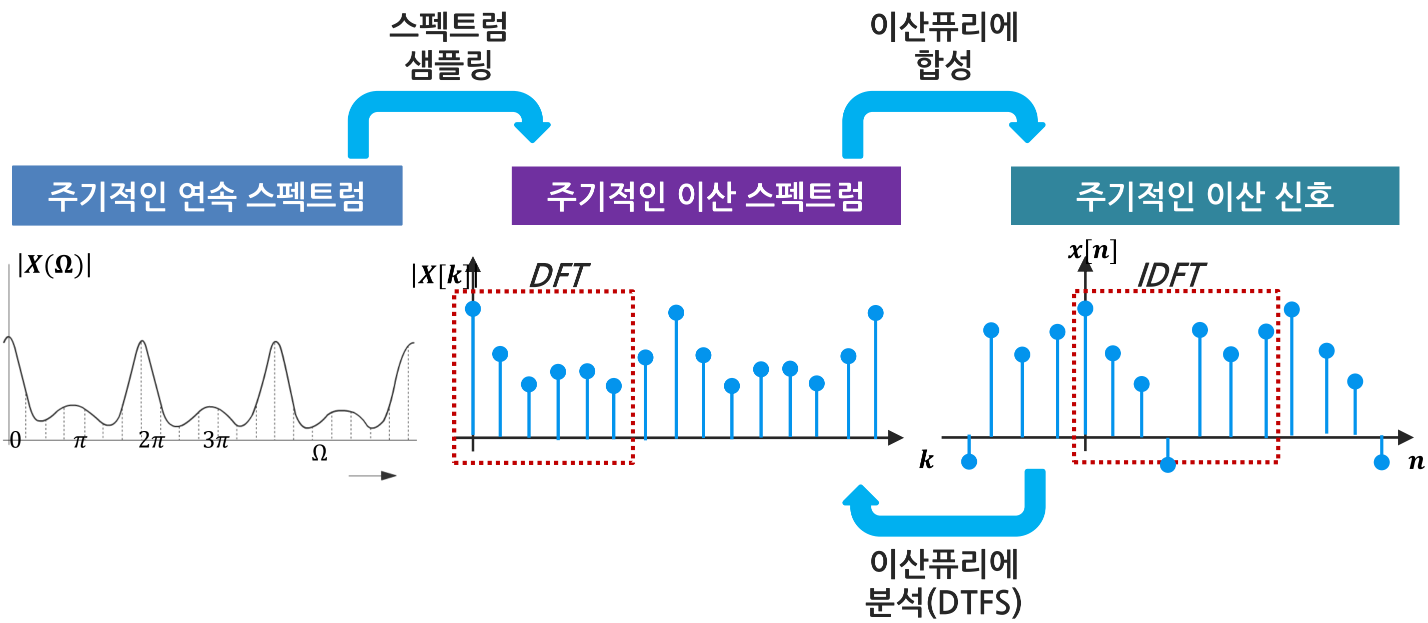
1. 이산 퓨리에 급수(DTFS)와 이산 신호 퓨리에 변환(DTFT)의 관계



- 비주기 이산 신호 $x[n]$은 이산 퓨리에 변환(DTFT)에 의하여 주기적인 연속 스펙트럼을 얻음 (주기는 2π)
- 주기적인 스펙트럼을 얻는 이유: 연속 신호를 이산 신호로 샘플링하면서 발생되는 현상
- 이 경우 이산 신호가 실신호(Real Signal)이면 0부터 π 사이의 스펙트럼 $|X(\Omega)|$는 π~2π 사이의 스펙트럼과 대칭임

이산 퓨리에 변환(DFT)과 역이산 퓨리에 변환(IDFT)

1. 이산 퓨리에 급수(DTFS)와 이산 신호 퓨리에 변환(DTFT)의 관계



N-주파수 샘플링

$$X(\Omega) = F\{x[n]\} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\Omega n} \xrightarrow[\Delta\Omega = \frac{2\pi}{N}]{} X_N(\Omega) = X(k\Delta\Omega) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}, k = 0, 1, \ldots, N-1$$

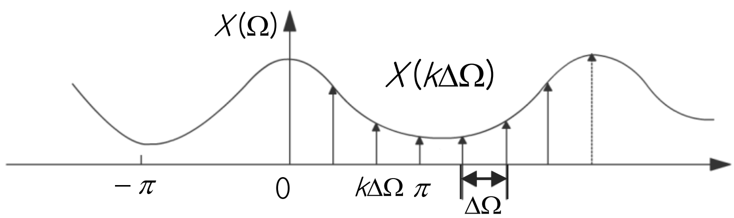
- 주기적인 연속 스펙트럼 $|X(\Omega)|$ 에 대해 M개 샘플링하면, 주기적인 이산 스펙트럼 $X_N(\Omega) = X(k\Delta\Omega)$ 이 됨
- 이산 주기 스펙트럼을 역변환(시간 신호로 변환)하면 $x[n]$을 주기 N으로 반복한 주기신호 $x_N[n]$이 됨
- 역으로 주기적인 이산 신호는 이산 퓨리에 급수를 통하여 주기적인 이산 스펙트럼 즉, 이산 퓨리에 계수 $X[k]$을 얻을 수 있음

이산 퓨리에 변환(DFT)과 역이산 퓨리에 변환(IDFT)

2. 주파수 영역 샘플링

1) 이산 퓨리에 변환(Discrete Fourier Transform: DFT)

$$X(\Omega) = F\{x[n]\} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\Omega n} \quad \xrightarrow[\Delta\Omega = \frac{2\pi}{N}]{\text{N-주파수 샘플링}} \quad X_N(\Omega) = X(k\Delta\Omega) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}, k = 0,1,\ldots,N-1$$



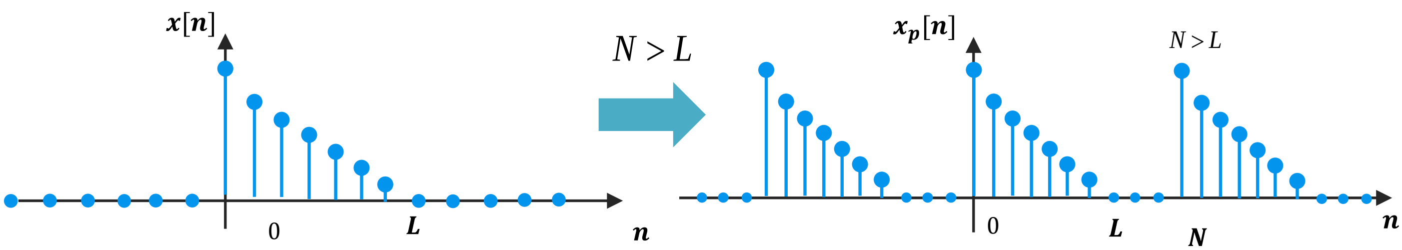
- DFT는 연속 함수로 표현된 이산 시간 신호를 주파수 표현
  ⇨ 이산 신호 퓨리에 변환(DTFT) 계산에 필요함
- 연속적인 이산 신호 퓨리에 변환(DTFT)을 주파수 영역에서 N개의 주파수를 샘플링한 것 ⇨ DFT

이산 퓨리에 변환(DFT)과 역이산 퓨리에 변환(IDFT)

3. 이산 신호 복원

1) 역이산 퓨리에 변환(Inverse Discrete Fourier Transform: IDFT)

비주기 이산 신호 $x[n]$ 주기 이산 신호 $x_p[n]$



$$x[n]=\begin{cases} x_p[n], & 0\le n\le N-1 \\ 0, & elsewere \end{cases}$$

$$x_p[n]=\sum_{l=-\infty}^{\infty} x[n-lN]$$

이산 퓨리에 급수(DTFS) 분석식

$$X[k]=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x_p[n]e^{-j2\pi kn/N}=\frac{1}{N}X(\frac{2\pi}{N}k),$$

$$k=0,1,\ldots,N-1$$

이산 퓨리에 급수 (DTFS) 합성식

$$x_p[n]=\sum_{k=0}^{N-1}X[k]e^{j2\pi kn/N}=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(\frac{2\pi}{N}k)e^{j2\pi kn/N}$$

$$n=0,1,2,\ldots,N-1$$

$$x_p[n]=\sum_{k=0}^{N-1}X[k]e^{j2\pi kn/N}=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(\frac{2\pi}{N}k)e^{j2\pi kn/N},\quad n=0,1,2,\ldots,N-1 \quad (식1)$$

$$x[n]=x_p[n],\quad 0\le n\le N-1 \quad (식2)$$

- (식1): 이산 신호 스펙트럼 $X(\Omega)$의 주파수 샘플 $X(\frac{2\pi}{N}k)$로 부터 주기 신호 ***x_p* [*n*]**을 복원
- (식 2): 복원된 ***x_p* [*n*]**신호로 부터 원본 비주기 신호 ***x*[*n*]**을 복원

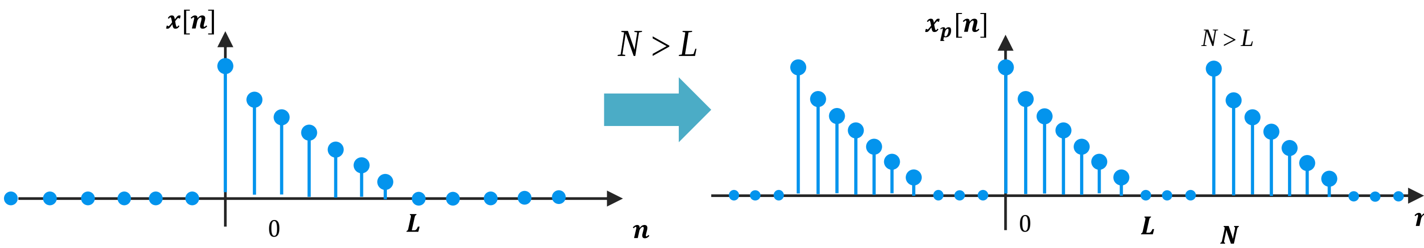
이산 신호 스펙트럼의 주파수 샘플 $X(\frac{2\pi}{N}k)$ 로부터 원본 비주기 신호 $x[n]$을 복원

⇨ 역이산 퓨리에 변환(IDFT)

이산 퓨리에 변환(DFT)과 역이산 퓨리에 변환(IDFT)

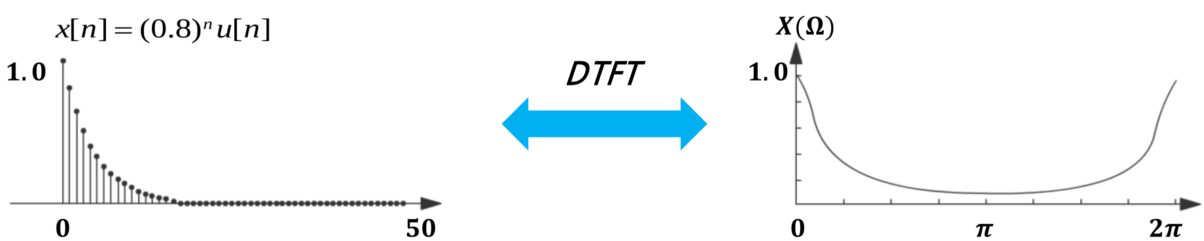
1) 역이산 퓨리에 변환(Inverse Discrete Fourier Transform: IDFT)

비주기 이산 신호 $x[n]$ | 주기 이산 신호 $x_p[n]$



$$x[n] = x_p[n], \quad 0 \le n \le N-1$$

- 하지만, 만약 그림과 같이 $N < L$이면 시간 영역 에일리어싱으로 주기적으로 확장된 ***x_p* [*n*]** 신호로 부터 원본 신호 ***x*[*n*]을 복원하는 것은 불가능**
- 만약 $N \ge L$이면, 주파수 $\Omega_k = \frac{2\pi}{N}k$ 에서의 N-주파수 샘플 $X(\frac{2\pi}{N}k)$로 부터 유한 구간 L을 갖는 비주기 이산 신호 $x[n]$을 정확하게 복원 가능함



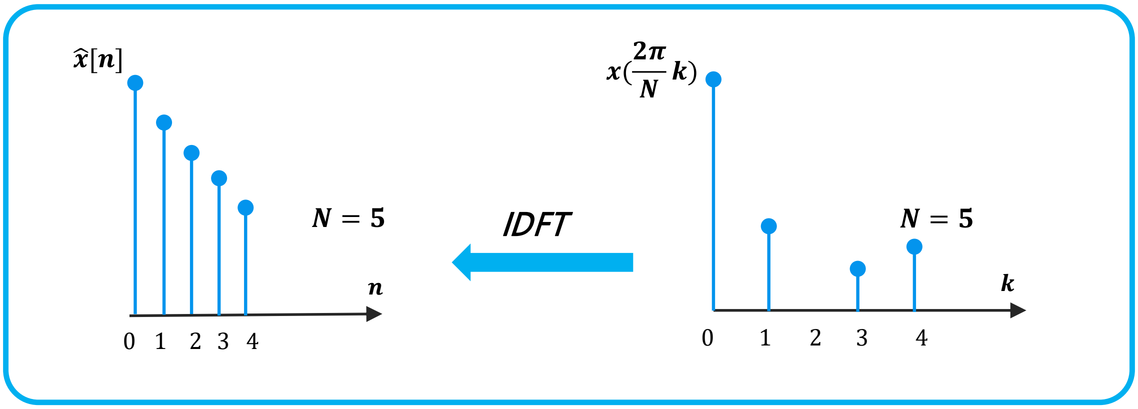
- 이산퓨리에 변환으로부터 시간영역 이산 신호를 복원 시
⇨ 주파수 영역의 샘플 수가 부족하다면 **시간 영역 겹칩 효과(시간 영역 에일리어싱)**가 발생함
- 일반적으로 등간격 주파수 샘플 $X(\frac{2\pi}{N}k), k = 0, 1, \ldots, N-1$은 ***x*[*n*]**의 구간이 무한히 길 때 원래의 이산 신호 수열 ***x*[*n*]**을 유일하게 표현하지 못함

이산 퓨리에 변환(DFT)과 역이산 퓨리에 변환(IDFT)

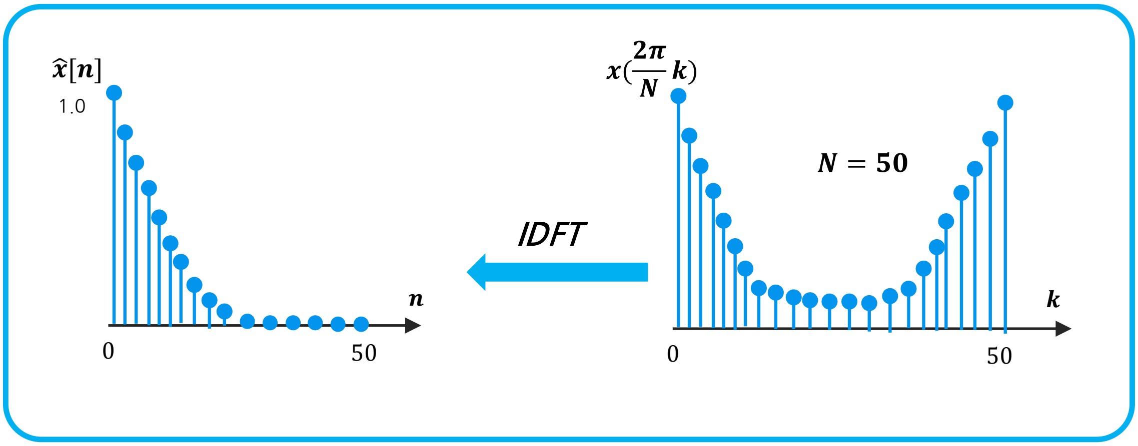
3. 이산 신호 복원

1) 역이산 퓨리에 변환(Inverse Discrete Fourier Transform: IDFT)

- N=5인 경우에 원본 이산 신호 복원
  ⇨ 에일리어싱의 영향이 심한 경우



- N=50인 경우에 원본 이산 신호 복원
  ⇨ 에일리어싱의 영향이 감소된 경우



이산 퓨리에 변환(DFT)과 역이산 퓨리에 변환(IDFT)

4. 이산 퓨리에 변환(DFT)과 역이산 퓨리에 변환(IDFT)

1) 역이산 퓨리에 변환(Inverse Discrete Fourier Transform: IDFT)

이산 퓨리에 변환(DFT)	↔	역이산 퓨리에 변환(IDFT)
$X(\frac{2\pi}{N}k) = X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$		$x[n] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} X(k)e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$

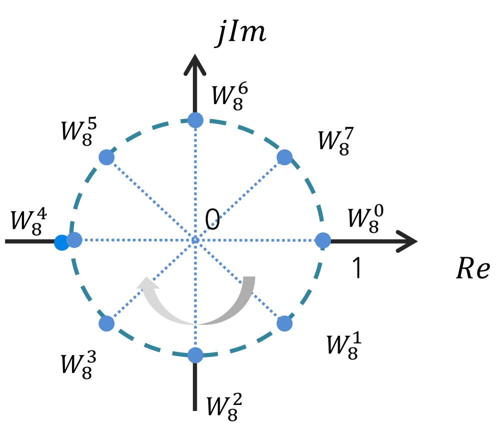
이산 퓨리에 급수 분석식(DTFS)	↔	이산 퓨리에 급수 합성식
$X[k] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$		$x[n] = \sum_{n=0}^{N-1} X[k]e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$

- DTFS: 이산 주기 신호를 퓨리에 변환 → 이산 주기 스펙트럼
- DFT: 연속 스펙트럼을 샘플링하여 이산 스펙트럼
  → 그 결과로 이에 대응되는 시간 신호가 이산 주기 신호가 됨

2) 이산 퓨리에 변환(DFT)

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]W_N^{kn}$$

[회전인자 N=8인 예]



$W_N^{kn} = e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$: 회전 인자

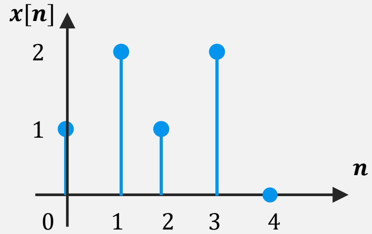
- 복소 평면 단위원을 ***N***등분한 점
  회전 인자 W_N^{kn} 은 주기 ***N***인 주기 함수
  $$W_N^{kn+N} = W_N^{kn}$$
- ***N***이 정해지면 데이터와 상관없이 W_N^{kn}값을 미리 계산 가능

이산 퓨리에 변환(DFT)과 역이산 퓨리에 변환(IDFT)

4. 이산 퓨리에 변환(DFT)과 역이산 퓨리에 변환(IDFT)

예제 35-01

다음 그림과 같은 유한 구간 신호 $x[n]$의 이산 퓨리에 변환(DFT)을 구해 보자. (단, N=4)



$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$$

[예제풀이]

- 이산 퓨리에 변환식에 의하여

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}=\sum_{n=0}^{3} x[n]e^{-jk\frac{2\pi}{4}n}$$

$$W_N^{kn}=e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}=W_4^{kn}=(e^{-j\frac{2\pi}{4}})^{kn}=(-j)^{kn}$$

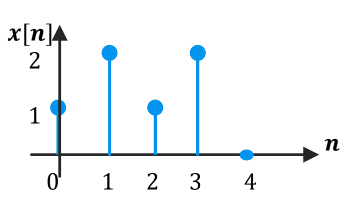
$$X(0)=\sum_{n=0}^{3} x[n]e^{-jk\frac{2\pi}{4}n}=\sum_{n=0}^{3} x[n]W_4^{kn}=x[0]W_4^0+x[1]W_4^0+x[2]W_4^0+x[3]W_4^0=(1)(1)+(2)(1)+(1)(1)+(2)(1)=6$$

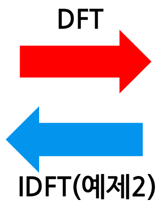
$$X(1)=\sum_{n=0}^{3} x[n]W_4^{kn}=x[0]W_4^0+x[1]W_4^1+x[2]W_4^2+x[3]W_4^3=(1)(1)+(2)(-j)+(1)(-1)+(2)(j)=0$$

$$X(2)=\sum_{n=0}^{3} x[n]W_4^{kn}=x[0]W_4^0+x[1]W_4^2+x[2]W_4^4+x[3]W_4^6=(1)(1)+(2)(-1)+(1)(1)+(2)(-1)=-2$$

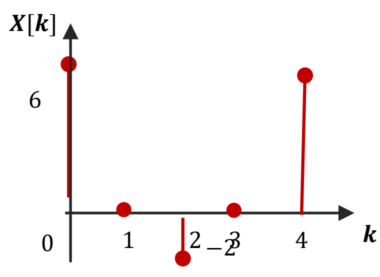
$$X(3)=\sum_{n=0}^{3} x[n]W_4^{kn}=x[0]W_4^0+x[1]W_4^3+x[2]W_4^6+x[3]W_4^9=(1)(1)+(2)(j)+(1)(-1)+(2)(-j)=0$$

[이산 신호]

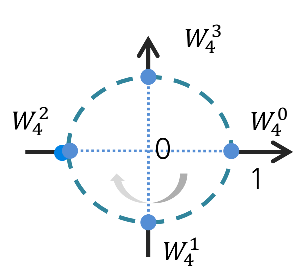




[이산 퓨리에 변환: 샘플 스펙트럼]



[회전 인자]

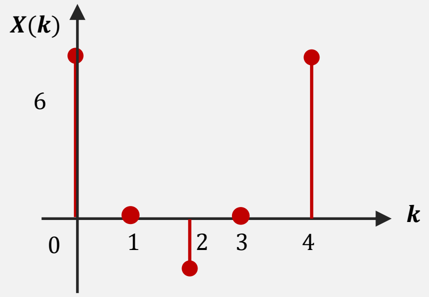


이산 퓨리에 변환(DFT)과 역이산 퓨리에 변환(IDFT)

4. 이산 퓨리에 변환(DFT)과 역이산 퓨리에 변환(IDFT)

예제 35-02

[예제 1]의 이산 퓨리에 변환 $\boldsymbol{X(k)}$로 부터 역이산 퓨리에 변환을 수행하여 이산 신호 $\boldsymbol{x[n]}$을 계산해 보자.



[예제풀이]

$$x[n]=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)e^{jk\frac{2\pi}{N}n}=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)W_N^{-kn}$$

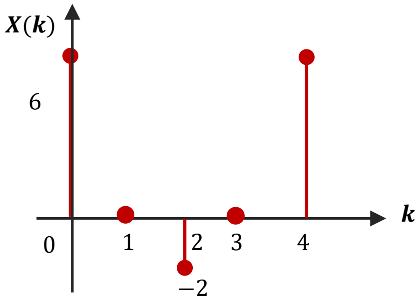
$$W_N^{-kn}=e^{jk\frac{2\pi}{N}n}=(e^{j\frac{2\pi}{4}})^{kn}=(j)^{kn} \qquad x[n]=\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3}X(k)W_4^{-kn}=\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3}X(k)(j)^{kn}$$

$$x[0]=\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3}X(k)(j)^0=\frac{1}{4}(X[0]+X[1]+X[2]+X[3])=\frac{1}{4}(6+0+(-2)+0)=1$$

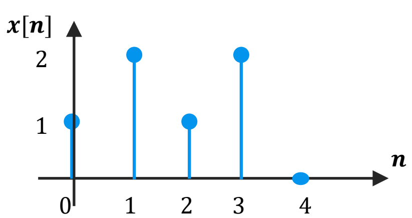
$$x[1]=\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3}X(k)(j)^k=\frac{1}{4}(X[0](j)^0+X[1](j)^1+X[2](j)^2+X[3](j)^3)=\frac{1}{4}(6+0+(-2)(-1)+0)=2$$

$$x[2]=\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3}X(k)(j)^{2k}=\frac{1}{4}(X[0](j)^0+X[1](j)^2+X[2](j)^4+X[3](j)^6)=\frac{1}{4}(6+0+(-2)(1)+0)=1$$

$$x[3]=\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3}X(k)(j)^{3k}=\frac{1}{4}(X[0](j)^0+X[1](j)^3+X[2](j)^6+X[3](j)^9)=\frac{1}{4}(6+0+(-2)(-1)+0)=2$$



역이산 퓨리에 변환



$$x[n]=\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3}X(k)W_4^{-kn}=\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3}X(k)(j)^{kn}=\{1,2,1,2\}$$

이산 퓨리에 변환(DFT)과 역이산 퓨리에 변환(IDFT)

4. 이산 퓨리에 변환(DFT)과 역이산 퓨리에 변환(IDFT)

3) 정리

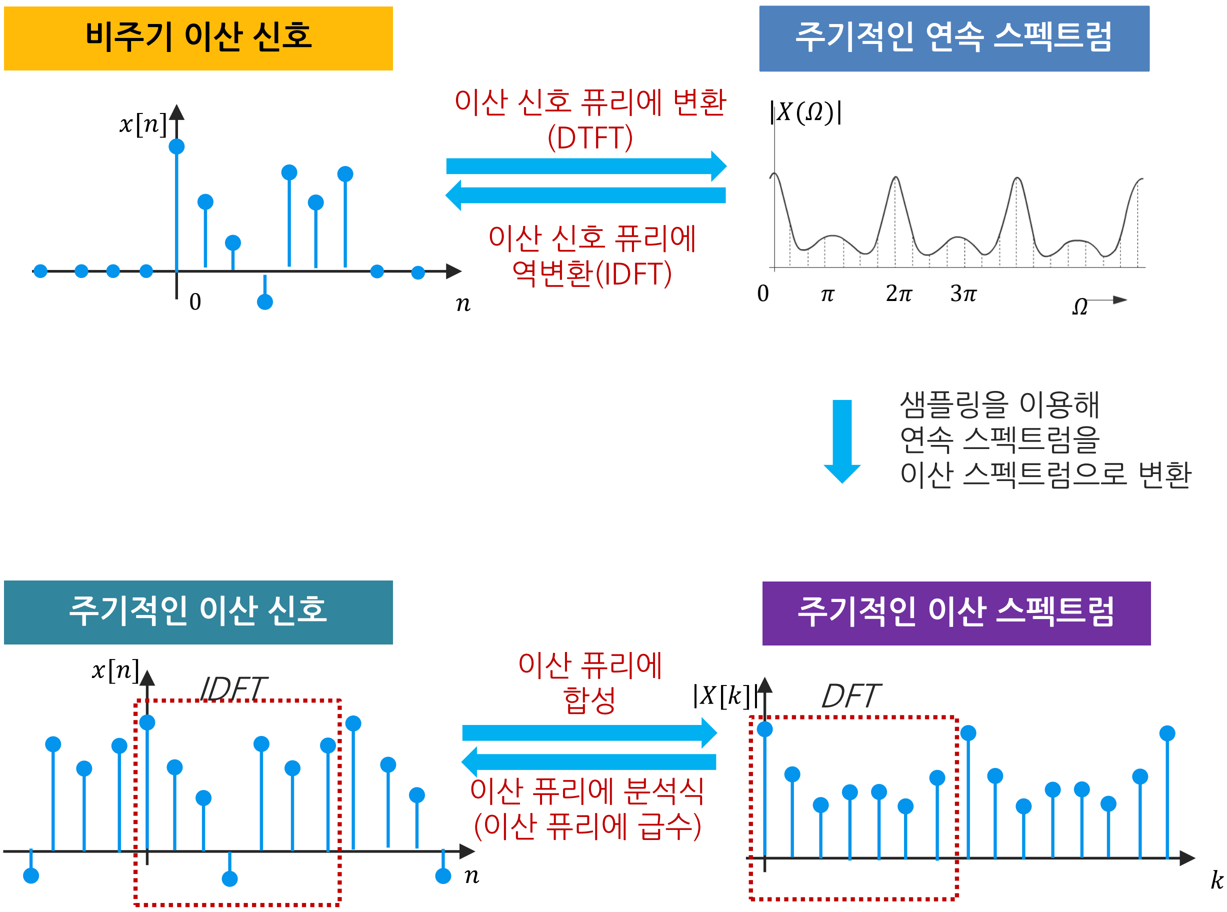
- 이산 퓨리에 변환(역변환)과 이산 퓨리에 급수의 분석식·합성식의 차이점?
  ⇨ 1/N이 곱해진 위치 (이외에는 동일함)
- 이산 퓨리에 변환(DFT)은?
  ⇨ 실제 연속신호(예, 음성신호)에 대한 퓨리에 계수를 수식적으로 계산하는 방법
- 이산 퓨리에 변환 시 고려할 사항은?
  ⇨ Ts의 간격으로 연속 신호의 N개 표본들을 취하고, 이산 퓨리에 변환식을 디지털 컴퓨터로 계산하면 됨

단, 표본 수 N이 커지거나 표본화 간격이 짧아질수록
스펙트럼 근사화는 더 정확해지지만
N이 증가함에 따라 DFT를 수식적으로 결정하는 것은
더 많은 메모리와 계산을 필요로 함

⇨ 더 빠른 DFT 계산을 위해 FFT(Fast Fourier Transform)

핵심정리

이산 신호 퓨리에 변환(DTFT)의 한계



핵심정리

이산 퓨리에 변환(DFT)과 역이산 퓨리에 변환(IDFT)

이산 퓨리에 변환(DFT)	역이산 퓨리에 변환(IDFT)
$X(\frac{2\pi}{N}k) = X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$	$x[n] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} X(k)e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$

- 이산 퓨리에 변환(DFT)

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]W_N^{kn},\quad \text{여기서},\quad W_N^{kn} = e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} : \text{회전인자}$$

- 회전인자 N=8인 예