디지털신호처리

강 의 노 트

이산 선형 시불변 시스템의 시간 응답 특징

학습내용

❖ 컨볼루션 연산

❖ 컨볼루션의 성질과 LTI 시스템의 상호연결

❖ 선형 시불변 시스템의 인과성과 안정성

학습목표

❖ 이산 컨볼루션 연산을 수행할 수 있다.

❖ 이산 컨볼루션 연산의 성질과 LTI 시스템의 상호연결에 대해 설명할 수 있다.

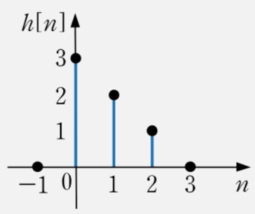
❖ 선형 시불변 시스템의 인과성과 안정성에 대해 설명할 수 있다.

컨볼루션 연산

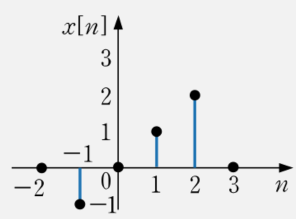
1. 수식적 연산

예제 26-01

다음 그림은 이산 선형 시불변 시스템의 임펄스 응답 h[n]과 입력 신호 x[n]을 나타낸 것이다. 이 입력 신호에 대한 시스템의 출력을 계산해 보자



임펄스 응답



입력 신호

[예제풀이]

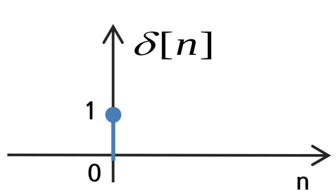
- 입력신호 *x[n]*은 임펄스 신호의 합으로 표현하면,

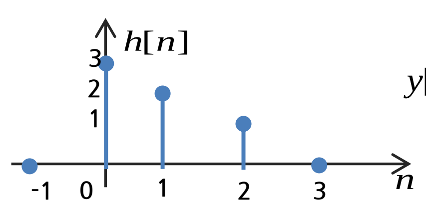
$$
\begin{aligned}
x[n] &= -1 \bullet \delta[n+1] + 0 \bullet \delta[n] + 1 \bullet \delta[n-1] + 2 \bullet \delta[n-2] \\
&= x[-1]\delta[n+1] + x[0]\delta[n] + x[1]\delta[n-1] + x[2]\delta[n-2] \\
&= \sum_{k=-1}^{2} x[k]\delta[n-k]
\end{aligned}
$$

- *x[n]*신호를 임펄스의 합으로 표현한 뒤 중첩의 원리를 적용하여 각 임펄스 성분 $x[n]\delta[n-k]$에 대한 시스템 응답을 모두 더하면 시스템의 출력 *y[n]을 얻을 수 있음*

$$
y[n] = \sum_{k=-1}^{2} x[k]h[n-k]
$$

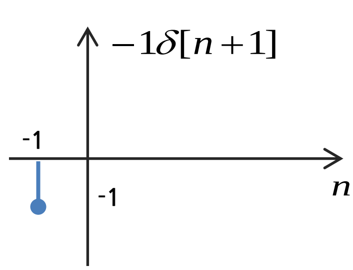
$x[n] = \delta[n]$

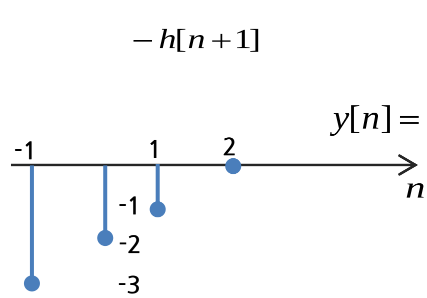




$y[n] = h[n]$

$x[n] = -1\delta[n+1]$





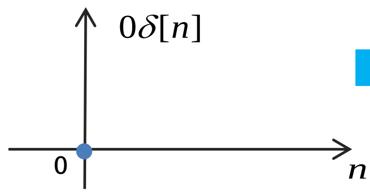
$y[n] = -1h[n+1]$

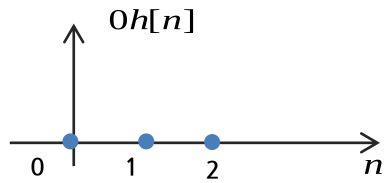
컨볼루션 연산

1. 수식적 연산

[예제풀이] (계속)

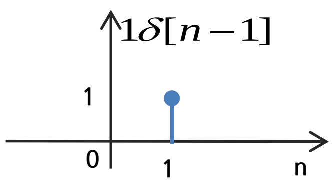
$x[n] = 0\delta[n]$

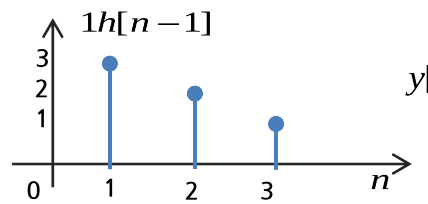




$y[n] = 0h[n]$

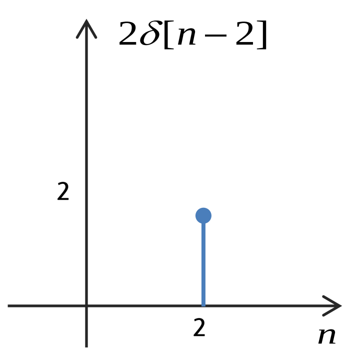
$x[n] = 1\delta[n-1]$

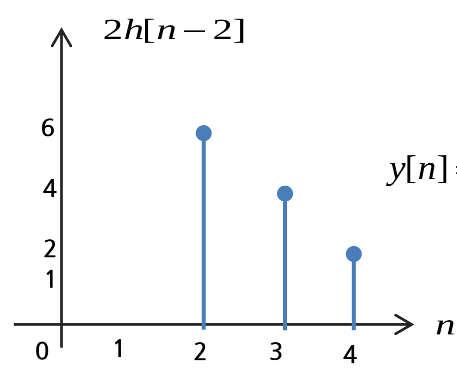




$y[n] = 1h[n-1]$

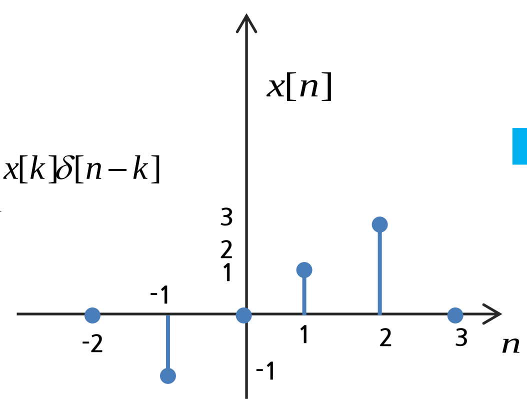
$x[n] = 2\delta[n-2]$

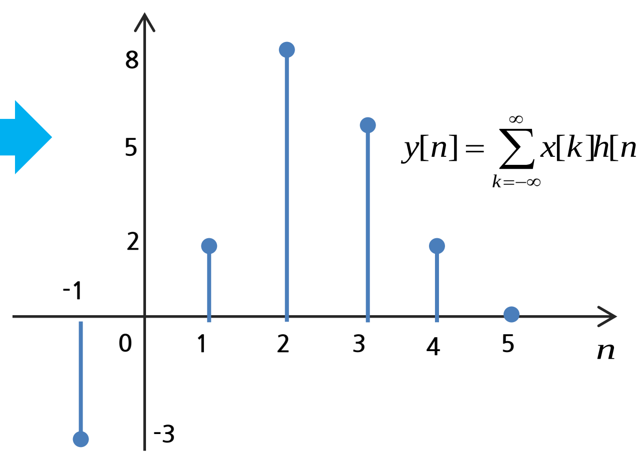




$y[n] = 2h[n-2]$

$x[n] = \sum_{k=-1}^{2} x[k]\delta[n-k]$





$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$

- 이와 같이 입력 신호 $x[n]$이 임펄스 중첩에 의한 이산 시스템 출력 계산은 컨볼루션 연산의 개념과 원리를 이해하기에는 좋지만, 만약 $x[n]$의 길이가 긴 경우에는 비효율적이므로 바람직한 컨볼루션 계산법은 아님

컨볼루션 연산

2. 그래프적 연산

1) 연산 과정

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] \qquad -\infty \le n \le \infty$$

대칭 이동

h[n] → *h[k]*로 변수변환
*h[-k]*를 얻기 위해
*h[k]*를 *k = 0*에 대해 대칭이동함

시프트 이동

h[-k] 그래프에서 *h[n-k]* 그래프를 얻기 위해서
*n*이 양(음)이라면,
오른쪽(왼쪽)으로 *n*만큼 *h[-k]*를 이동

곱셈

곱 수열
$v_n[k] = x[k]h[n-k]$ 를 계산

합

모든 *k*에 대한 곱 수열 $v_n[k] = x[k]h[n-k]$을
합해서 출력 *y[n]*을 계산
이 때, 모든 $-\infty \le n \le \infty$ 범위 내의
모든 시간에 대한 출력 값 *y[n]*을 계산

컨볼루션 연산

2. 그래프적 연산

예제 26-02

이산 선형 시불변 시스템의 임펄스 응답 h[n]과 입력 신호 x[n]이 다음과 같을 때 출력 신호 y[n]을 컨볼루션 연산을 통하여 계산해 보자.

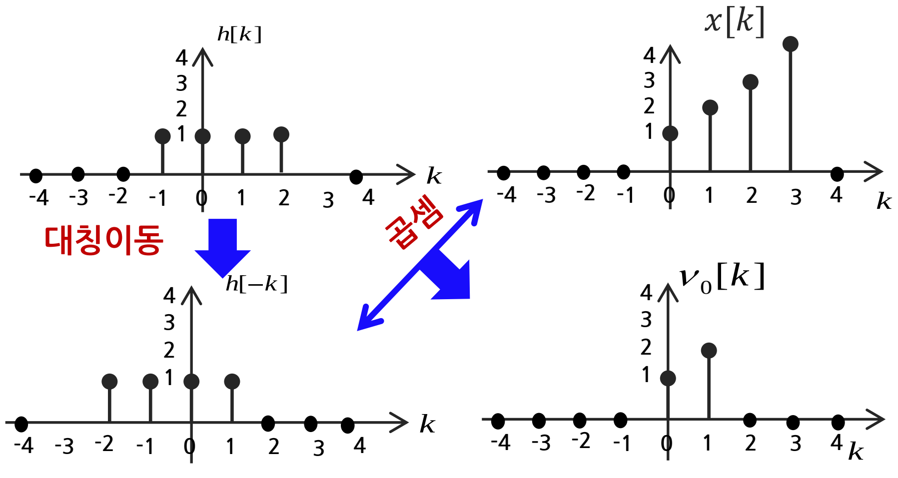
$h[n] = \{1, \underset{\uparrow}{1}, 1, 1\}, \quad x[n] = \{\underset{\uparrow}{1}, 2, 3, 4\}$

[예제풀이]

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

n = 0 일 때, *y[0]* = ?

$$y[0] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} v_0[k]$$
$$= 1 + 2 = 3$$



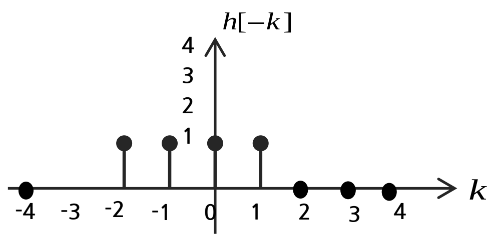
컨볼루션 연산

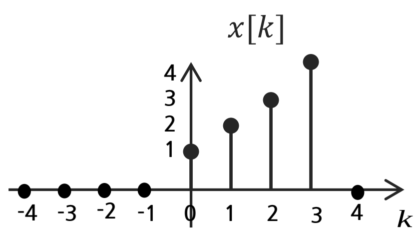
2. 그래프적 연산

[예제풀이] (계속)

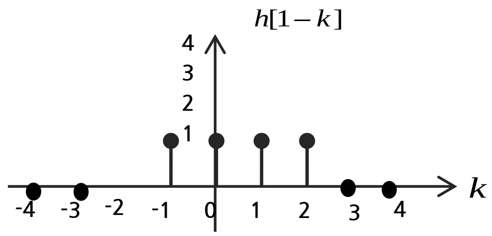
***n* = 1 일 때, *y[1]* = ?**

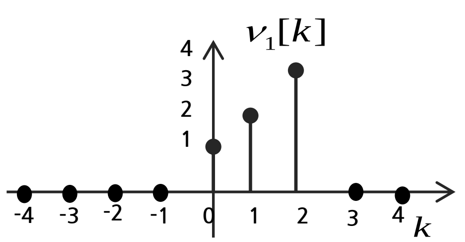
$$y[1]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]h[1-k]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}v_1[k]$$
$$=1+2+3=6$$





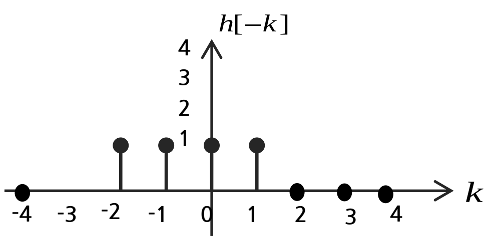
+1만큼 시프트

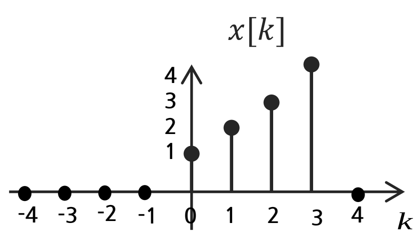




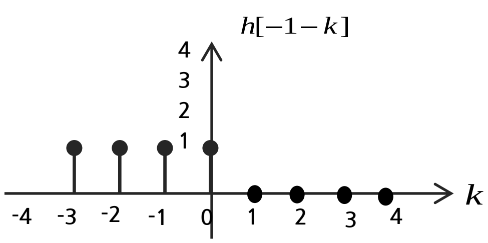
***n* = -1 일 때, *y[-1]* = ?**

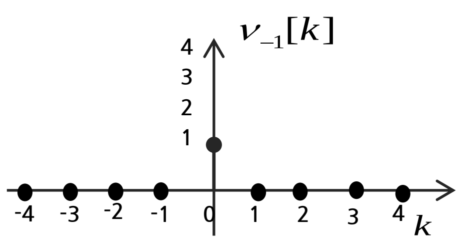
$$y[-1]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]h[-1-k]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}v_{-1}[k]$$
$$=1$$





-1만큼 시프트





컨볼루션 연산

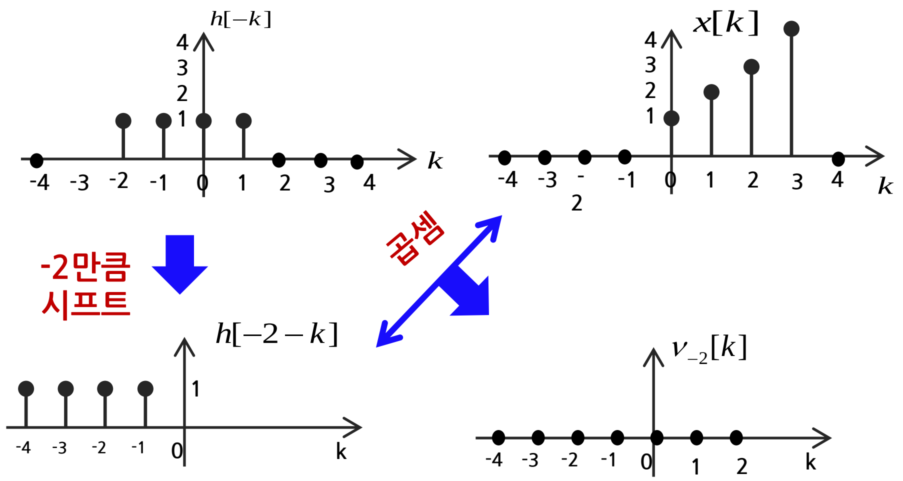
2. 그래프적 연산

[예제풀이] (계속)

***n* = -2 일 때, *y[-2]* = ?**

$$y[-2]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]h[-2-k]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}v_{-2}[k]$$

$$=0$$



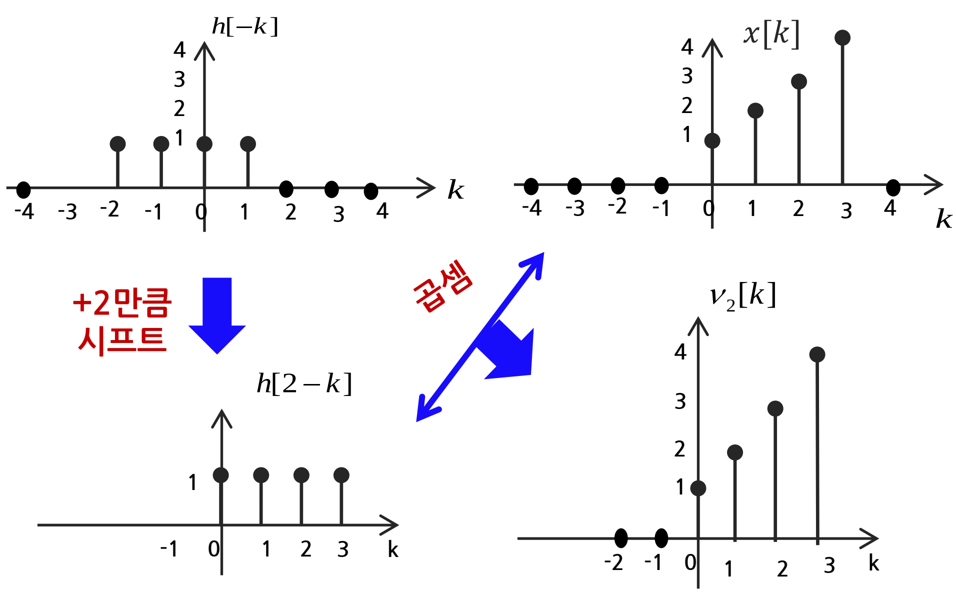
***n* =-3 일 때, *y[-3]*= ?**

n=-3 이하는 모두 *y[n]* = *0 임*

***n* = 2, *y[2]* = ?**

$$y[2]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]h[2-k]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}v_{2}[k]$$

$$=1+2+3+4=10$$



컨볼루션 연산

2. 그래프적 연산

[예제풀이] (계속)

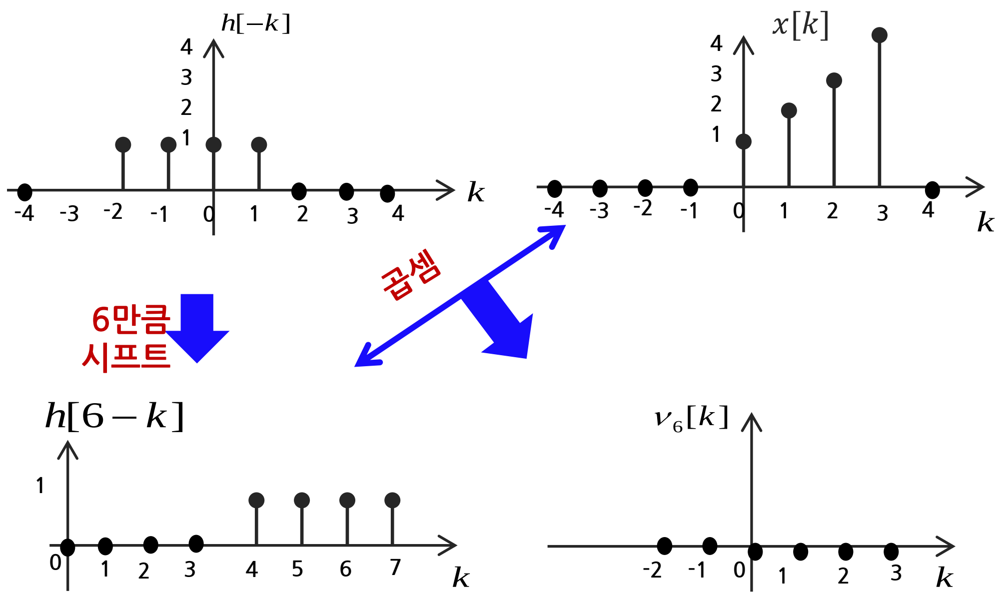
***n* = 3, 4, 5**

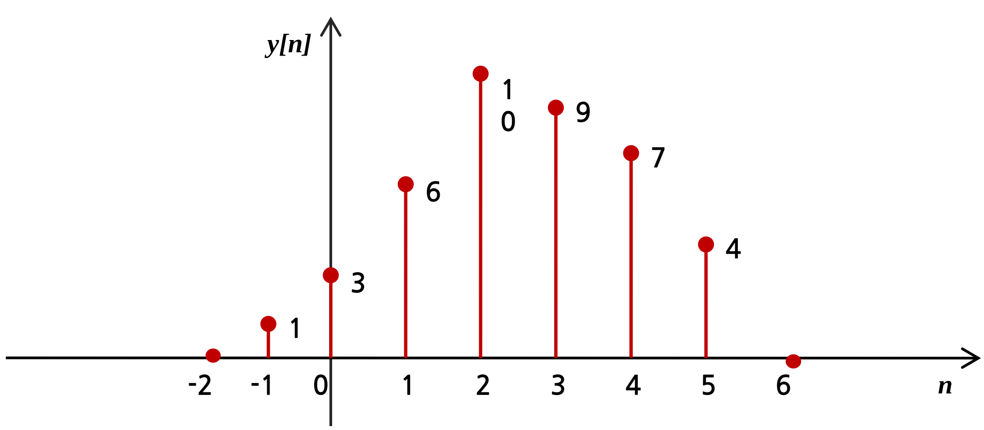
$$y[3]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]h[3-k]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}v_3[k]=2+3+4=9$$

$$y[4]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]h[4-k]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}v_4[k]=3+4=7$$

$$y[5]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]h[5-k]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}v_5[k]=4$$

***n* = 6, *y*[6] = ?** *n*= 6 이상에 대한 *y*[*n*] = 0 임 $y[n]=0,\quad n\geq 6$





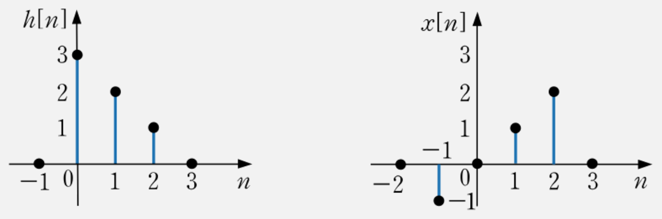
$$y[n]=\{1,\underset{\uparrow}{3},6,10,9,7,4\}$$

컨볼루션 연산

2. 그래프적 연산

예제 26-03

예제1의 컨볼루션 연산을 그래프적 연산방법을 통하여 출력 신호 y[n]을 계산 한 후, 예제1의 결과와 같은지 확인해 보자.

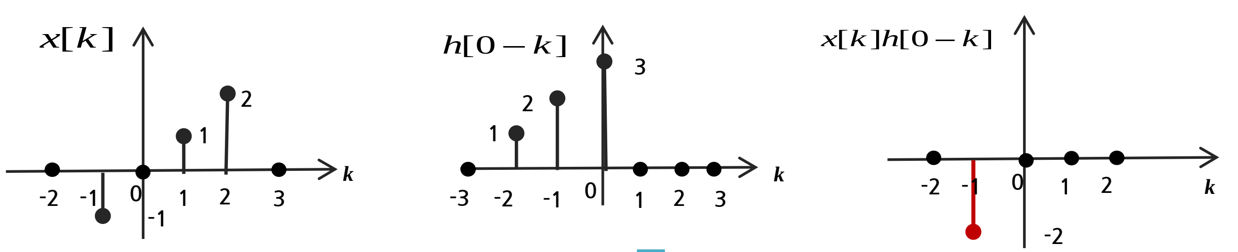


(a) 임펄스 응답　　(b) 입력 신호

[예제풀이]

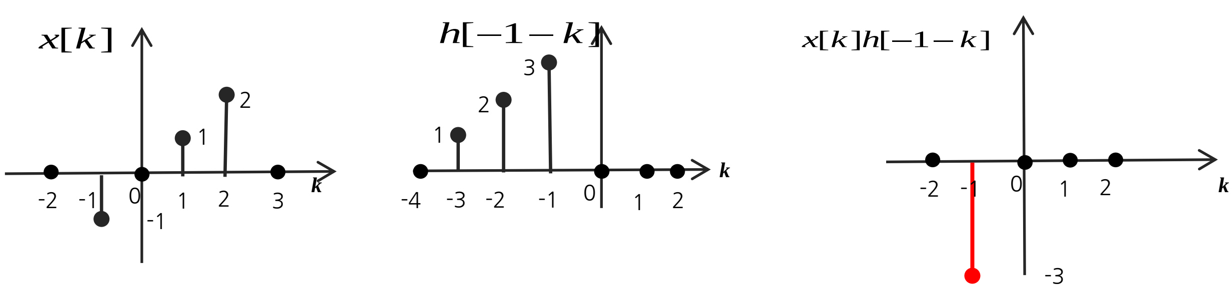
$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

n = *0* 일 때, *y[0]* = -2



-1 시프트

n = *-1* 일 때, *y[-1]* = -3

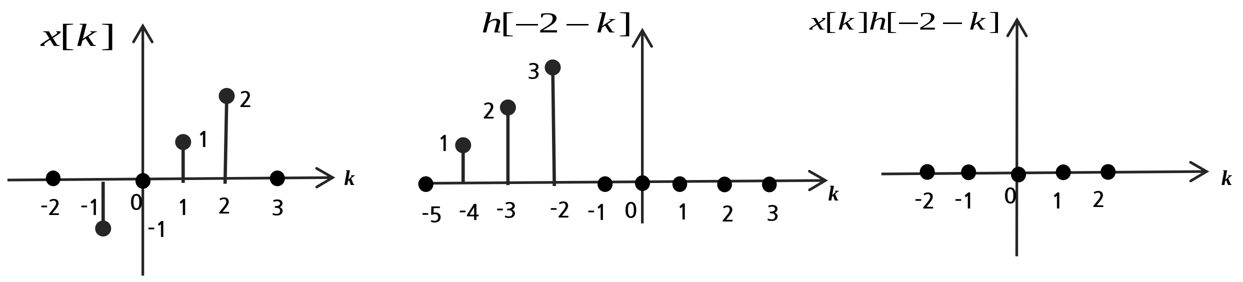


컨볼루션 연산

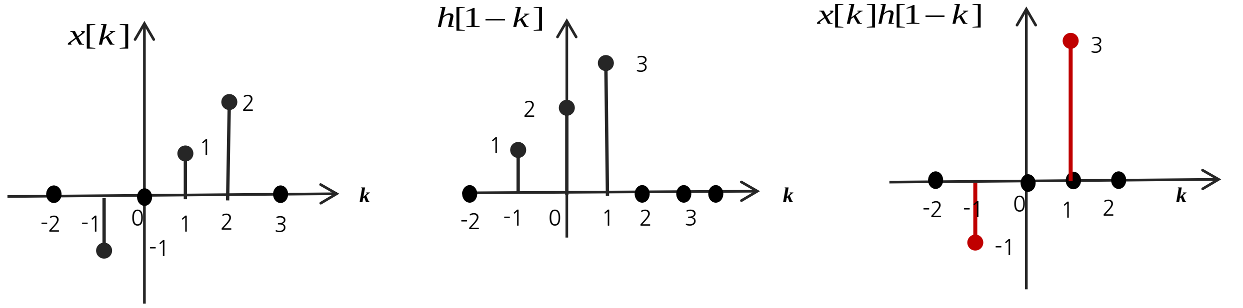
2. 그래프적 연산

[예제풀이] (계속)

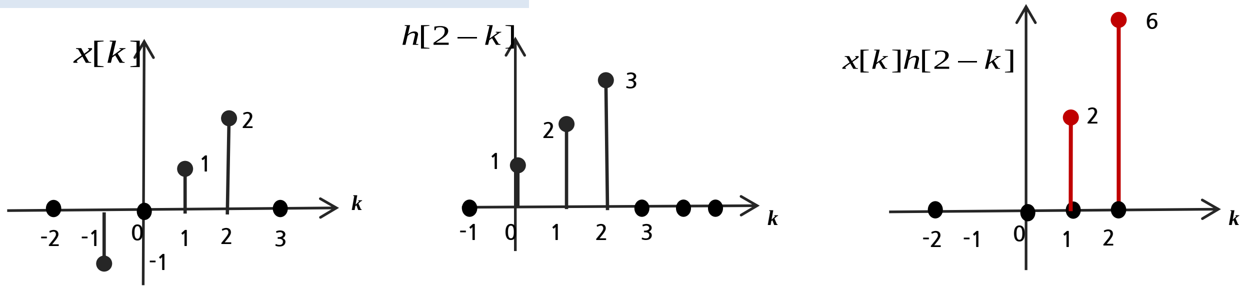
n = -2 일 때, *y*[-2] = 0



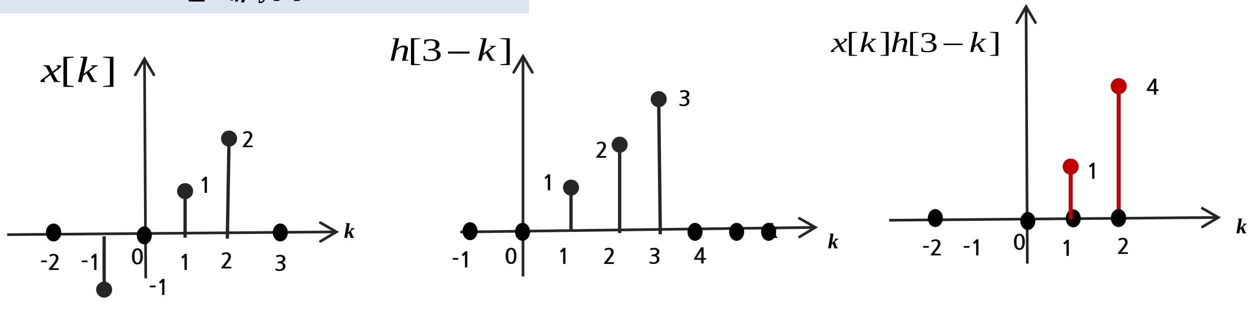
n = 1 일 때, *y*[1] = -1+3 = 2



n = 2 일 때, *y*[2] = 2+6 = 8



n = 3일 때, *y*[3] =1+4 = 5

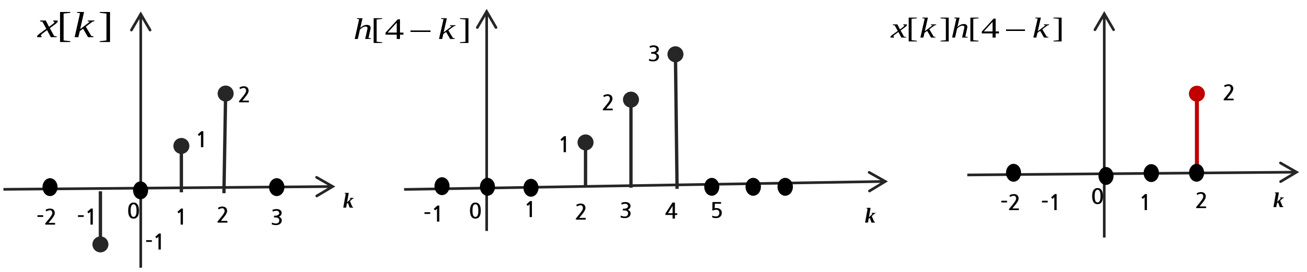


컨볼루션 연산

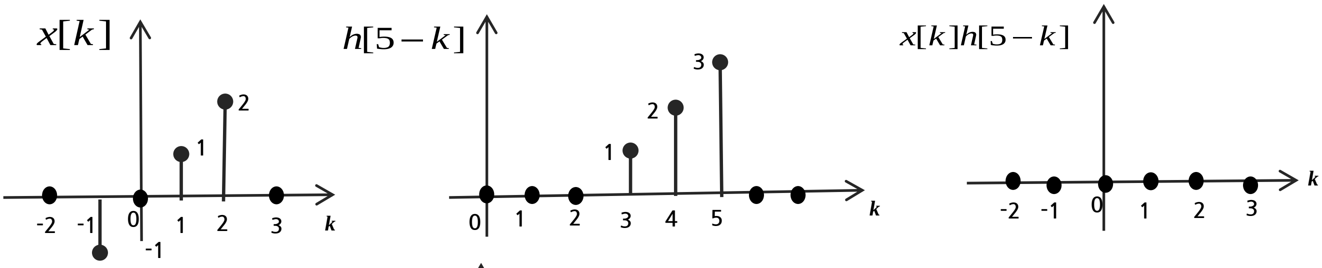
2. 그래프적 연산

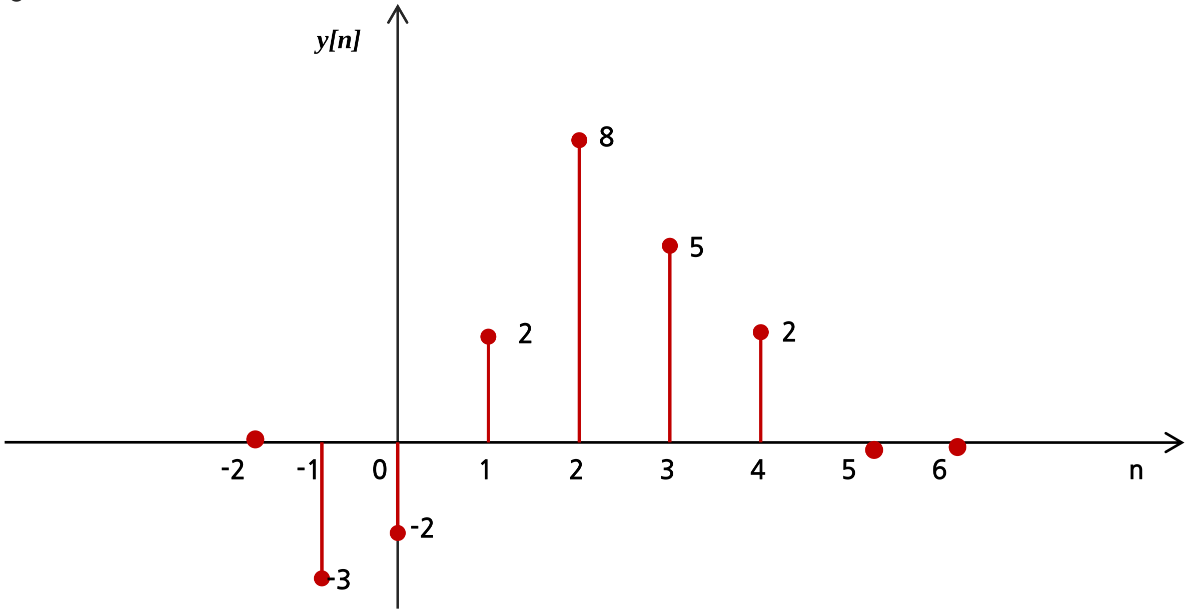
[예제풀이] (계속)

n = 4 일 때, *y[4]* =2



*n = 5*일 때, *y[5] = 0*





$$y[n]=\{0,-3,-2,2,8,5,2,0\}$$

컨볼루션의 성질과 LTI 시스템의 상호연결

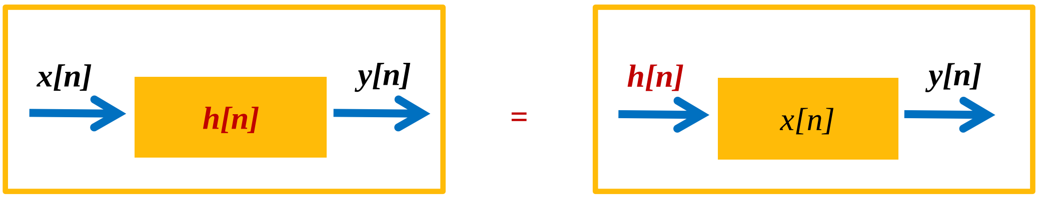
1. 교환법칙, 결합법칙, 분배법칙

1) 교환법칙

- 컨볼루션 연산은 두 신호 x[n]과 h[n]에 대해 다음과 같이 교환법칙이 성립

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

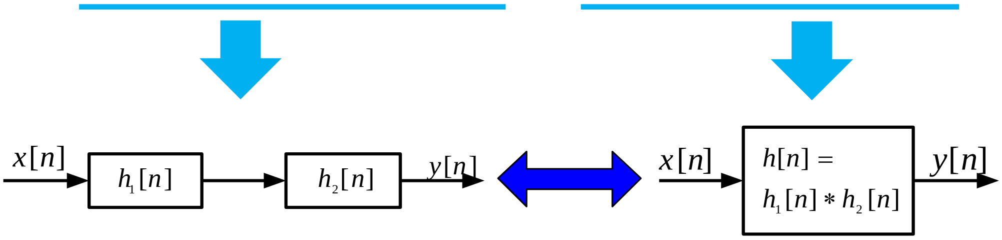
$$= h[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k]$$



2) 결합법칙

- 좌변은 종속접속을 갖는 두 LTI 시스템에 대응,
우변은 한 개의 임펄스 응답 h[n] = h1[n]*h2[n]을 갖는 하나의 LTI 시스템으로
대체할 수 있음

$$\{x[n] * h_1[n]\} * h_2[n] = x[n] * \{h_1[n] * h_2[n]\}$$



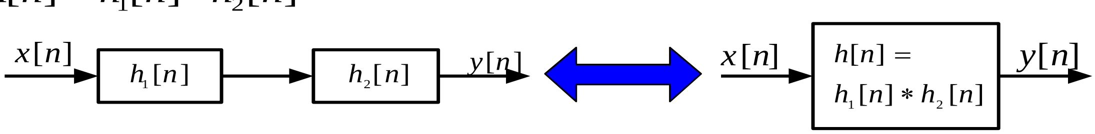
- 두 개 이상의 LTI 시스템이 종속 접속된 LTI 시스템에 대한 결합법칙은 일반화 가능함

$$h[n] = h_1[n] * h_2[n] * \cdots * h_L[n]$$

- 컨볼루션 연산에 대한 교환,결합법칙은 임의의 LTI 시스템은 다양한
부LTI 시스템의 종속적인 상호연결로 분리될 수 있음을 의미함
- 컨볼루션 연산이 결합법칙과 교환법칙이 성립하기 때문에 시스템적인 측면에서
두 LTI 시스템은 결합법칙이 성립

$$\{x[n] * h_1[n]\} * h_2[n] = x[n] * \{h_1[n] * h_2[n]\}$$

$$h[n] = h_1[n] * h_2[n]$$



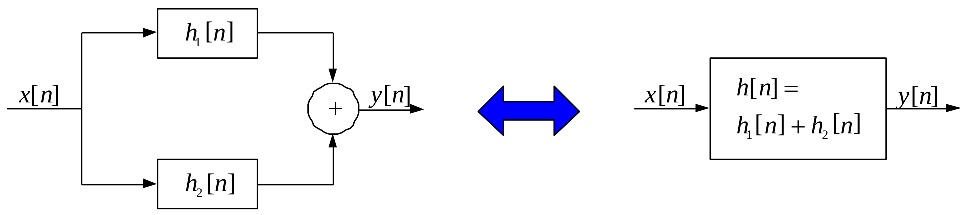
컨볼루션의 성질과 LTI 시스템의 상호연결

1. 교환법칙, 결합법칙, 분배법칙

3) 분배법칙

- 동일한 입력 신호 x[n]에 의한 임펄스응답이 h1[n]과 h2[n]인 경우, 두 응답의 합은 각각의 임펄스 응답의 합을 임펄스 응답을 갖는 시스템과 동일함

$$x[n]*\{h_1[n]+h_2[n]\}=x[n]*h_1[n]+x[n]*h_2[n]$$
$$h[n]=h_1[n]+h_2[n]$$



2. 항등성과 이동성

1) 항등성

- 단위 임펄스 신호 $\delta[n]$은 컨볼루션 연산에 대해 항등 원소임

$$y[n]=x[n]*\delta[n]=x[n]$$

2) 이동성

- 만약 $\delta[n-k]$을 k 만큼 이동시키면, 컨볼루션 연산 또한 k 만큼 이동됨

$$y[n]=x[n]*\delta[n-k]=x[n-k]$$

선형 시불변 시스템의 인과성과 안정성

1. LTI 시스템의 인과성

1) 인과성이란?

- 인과시스템(Causal System) : n 번째 현재 출력 신호가 현재나 과거의 입력 신호에 대해서만 영향을 미치고, 미래의 입력에 대해서는 고려하지 않는 시스템
- 즉, n=n0 의 시간에서 시스템의 출력은 $n \le n_0$ 인 입력 신호 x[n] 값에 의해서만 좌우되는 시스템

- 선형 시불변(LTI) 시스템의 인과성은 임펄스 응답 조건에 따라 변형 가능함
- 시간 n0를 기준으로 과거와 현재의 입력 성분과 미래의 입력 성분을 구분

$$y[n_0] = \sum_{k=0}^{\infty} h[k]x[n_0 - k] + \sum_{k=-\infty}^{-1} h[k]x[n_0 - k]$$

$$= \underbrace{\{h[0]x[n_0] + h[1]x[n_0 - 1] + h[2]x[n_0 - 2] + \cdots\}}_{\text{시간 } n_0 \text{ 를 기준으로 과거와 현재의 입력에 의한 출력 값}} + \underbrace{\{h[-1]x[n_0 + 1] + h[-2]x[n_0 + 2] + \cdots\}}_{\text{시간 } n_0 \text{ 를 기준으로 미래의 입력에 의한 출력 값}}$$

2) 조건

- LTI 시스템이 인과적이기 위해서는 임펄스 응답이 다음 관계식을 만족하여야 함

$$h[n] = 0 \qquad n < 0$$

인과 선형 시불변 시스템의 응답	$y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} h[k]x[n-k]$

※ 입력신호인 x[n] =0, n<0 일 때, 인과 선형 시불변 시스템의 응답은 더욱 한정

$$y[n] = \sum_{k=0}^{n} h[k]x[n-k]$$

선형 시불변 시스템의 인과성과 안정성

2. LTI 시스템의 안정성

1) 안정성이란?

- 안정성은 실제적인 시스템을 구현할 때 반드시 고려되어야 하는 중요한 성질
- 유한한 크기의 입력신호 x[n]에 대해 유한한 크기의 신호 y[n]이 출력되면 BIBO 안정하다고 함
- 즉, 다음 식과 같이 모든 n에 대해 만족되어야 함

$$|x[n]| \le M_x < \infty \qquad |y[n]| \le M_y < \infty$$

2) 조건

- 유한한 입력과 임펄스 응답 h[n]이 다음 조건을 만족하면 LTI 시스템은 BIBO 안정함

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty$$

3) 증명

$$|y[n]| = \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] \right| \le \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]||x[n-k]| \le M_x \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]|$$

$\therefore |y[n]| \le \infty$ 가 되기 위해서는 시스템의 임펄스 응답이 $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty$

핵심정리

컨볼루션 연산

- 그래프적 컨볼루션 연산 과정

1) 대칭 이동 → 2) 시프트 이동 → 3) 곱셈 → 4) 합

1) h[-k]를 얻기 위해서 h[k]를 k = 0에 대해 대칭 이동함

2) h[n-k]를 얻기 위해서 n이 양(음)이라면, 오른쪽(왼쪽)으로 n만큼 h[-k]를 이동

3) 곱 수열 $v_n[k]=x[k]h[n-k]$ 를 계산

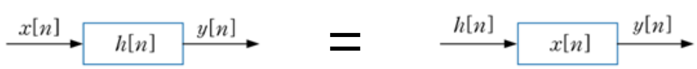
4) 모든 k에 대한 곱 수열 $v_n[k]=x[k]h[n-k]$ 을 합해서 출력 y[n]을 계산

이 때, 모든 $-\infty \le n \le \infty$ 범위 내의 모든 시간에 대한 출력 값 y[n]을 계산

컨볼루션의 성질과 LTI 시스템의 상호연결

교환법칙

$$y[n]=x[n]*h[n]=h[n]*x[n]$$



결합법칙

$$\{x[n]*h_1[n]\}*h_2[n]=x[n]*\{h_1[n]*h_2[n]\}$$

배분법칙

$$x[n]*\{h_1[n]+h_2[n]\}=x[n]*h_1[n]+x[n]*h_2[n]$$
$$h[n]=h_1[n]+h_2[n]$$

핵심정리

선형 시불변 시스템의 인과성과 안정성

- 선형 시불변 시스템의 인과성: n 번째 현재 출력신호가 현재나 과거의 입력신호에 대해서만 영향을 미치고, 미래의 입력에 대해서는 고려하지 않는 시스템을 인과시스템(Causal System)이라고 함

$n = n_0$ 의 시간에서 시스템의 출력은 $n \leq n_0$인 입력신호 x[n]

- LTI 시스템이 인과적이기 위해서는 임펄스 응답이 다음 관계식을 만족하여야 함

$$h[n] = 0 \qquad n < 0$$

- LTI 시스템에서 BIBO 안정(Stable)하기 위한 임펄스 응답 h[n]은 다음 조건을 만족하여야 함

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty$$