디지털신호처리

강 의 노 트

신호의 스펙트럼 표현 및 합성

4주차 1차시

학습내용

- ❖ 스펙트럼 표현
- ❖ 스펙트럼을 이용한 신호 합성

학습목표

- ❖ 스펙트럼의 개념을 이해하고, 임의의 정현파 신호에 대해 스펙트럼을 계산할 수 있다.
- ❖ 시간 영역 표현과 주파수 영역 표현을 설명할 수 있다.
- ❖ 주파수 영역으로 표현된 스펙트럼을 이용하여 신호를 합성할 수 있다.

스펙트럼 표현

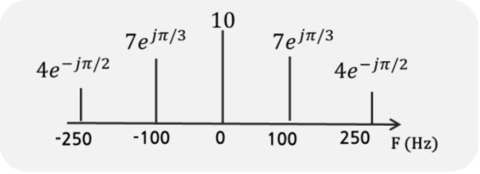
1. 스펙트럼 개요

1) 스펙트럼(Spectrum)이란?

- 신호를 만들어 주는 각각의 정현파 요소를 그래프식으로 표현한 것
  → Frequency Diagram
- 각 주파수 요소와 그들의 진폭과의 상호관계를 빠르고 쉽게 나타낼 수 있음

2) 신호 $x(t)$에 대한 스펙트럼(Frequency Diagram)

$$x(t) = 10 + 14\cos(2\pi(100)t - \pi/3) + 8\cos(2\pi(250)t + \pi/2)$$



- 신호 $x(t)$ = 주파수 성분으로 DC(0 Hz)와 100, 250Hz의 정현파 신호를 포함
- 그 중에서 DC값이 가장 많은 성분을 차지하고 있고, 250Hz의 정현파 보다 100Hz의 정현파 성분이 더 많이(크게) 가지고 있다고 해석할 수 있음

2. 정현파들의 합에 대한 스펙트럼

1) 정현파의 합

- 모든 복잡한 신호들을 기본신호인 정현파들의 합으로 표현할 수 있음
- 선형 중첩 결합을 통해 새 신호를 만들며, 상수와 서로 다른 주파수, 크기, 위상을 갖는 N개의 정현파들의 합으로 구성됨

$$x(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{N} A_k \cos(2\pi f_k t + \varphi_k)$$

스펙트럼 표현

2) 정현파 요소의 복소지수 신호 표현

$$x(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{N} A_k \cos(2\pi f_k t + \varphi_k) \Rightarrow x(t) = X_0 + \sum_{k=1}^{N} \mathrm{Re}\{X_k e^{j2\pi f_k t}\}$$

※ $X_0 = A_0,\ X_k = A_k e^{j\varphi_k}$

역오일러 공식에 의해,

$$x(t) = X_0 + \sum_{k=1}^{N}\{\frac{X_k}{2}e^{j2\pi f_k t} + \frac{X^*_k}{2}e^{-j2\pi f_k t}\} = \sum_{k=-N}^{N} a_k e^{j2\pi f_k t}$$

$$※\ a_k = \begin{cases} A_0 & for\ k = 0 \\ \frac{1}{2}A_k e^{j\varphi_k} & for\ k \neq 0 \end{cases}$$

$$x(t) = X_0 + \sum_{k=1}^{N}\{\frac{X_k}{2}e^{j2\pi f_k t} + \frac{X^*_k}{2}e^{-j2\pi f_k t}\} = \sum_{k=-N}^{N} a_k e^{j2\pi f_k t}$$

- 각 정현파는 두 개의 회전 페이저로 나누어짐
  → 양의 주파수 $f(k)$와 음의 주파수 $-f(k)$의 합으로 표현
- 신호 $x(t)$는 2N+1개의 복소크기와 2N+1개의 주파수로 구성된 정현파들의 양측대역 스펙트럼(Two-sided Spectrum)을 정의할 수 있음
- 스펙트럼은 결국 (주파수, 복소진폭) 쌍의 집합으로 표현할 수도 있음

$$\{(0,X_0),(f_1,\frac{1}{2}X_1),(-f_1,\frac{1}{2}X^*_1),\cdots,(f_k,\frac{1}{2}X_k),(-f_k,\frac{1}{2}X^*_k),\cdots\}$$

- 각 쌍 $(f_k,\frac{1}{2}X_k)$는 주파수 f_k에 기여하는 정현파 요소의 크기와 상대적인 위상을 의미함

3) 정현파 신호 x(t)에 대한 스펙트럼 표현

- 아주 간단한 1개의 정현파 신호 $x(t)$에 대한 스펙트럼 또는 주파수 영역표현도 (Frequency Diagram) 그리기

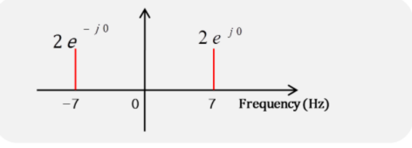
$$x(t) = 4\cos(14\pi t) \Rightarrow x(t) = 4\cos(14\pi t) = 4\cdot\frac{1}{2}(e^{j14\pi t} + e^{-j14\pi t})$$
$$= 2e^{j14\pi t} + 2e^{-j14\pi t}$$

$$\cos(\omega t) = \frac{1}{2}(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t})$$

1. (주파수, 복소 진폭) 집합

$$(f_k,\frac{1}{2}X_k) = \{(7,2e^{j0}),(-7,2e^{-j0})\}$$

2. 스펙트럼(Frequency Diagram)



스펙트럼 표현

3) 정현파 신호 x(t)에 대한 스펙트럼 표현

예제 10-01

다음과 같은 sine 정현파에 대한 (주파수, 복소 진폭)을 구하고, 스펙트럼을 그려보자.

$$x(t) = A\sin(2\pi f_0 t)$$

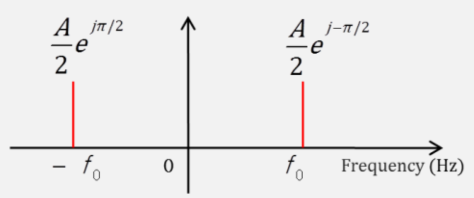
[예제풀이]

$$x(t) = A\sin(2\pi f_0 t) = \frac{A}{2j}(e^{j2\pi f_0 t} - e^{-j2\pi f_0 t}) = \frac{A}{2}e^{-j\pi/2}e^{j2\pi f_0 t} + \frac{A}{2}e^{j\pi/2}e^{-j2\pi f_0 t}$$

1. (주파수, 복소진폭) 집합

$$(f_k, \frac{1}{2}X_k)$$
$$= \{(f_0, \frac{A}{2}e^{j-\pi/2}), (-f_0, \frac{A}{2}e^{j\pi/2})\}$$

2. 스펙트럼(Frequency Diagram)



스펙트럼 표현

3) 정현파 신호 x(t)에 대한 스펙트럼 표현

예제 10-02

정현파들의 합으로 구성된 $x(t)$에 대한 (주파수, 복소 진폭)을 구하고, 스펙트럼을 그려보자.

$$x(t) = 10 + 14\cos(2\pi(100)t - \pi/3) + 8\cos(2\pi(250)t + \pi/2)$$

[예제풀이]

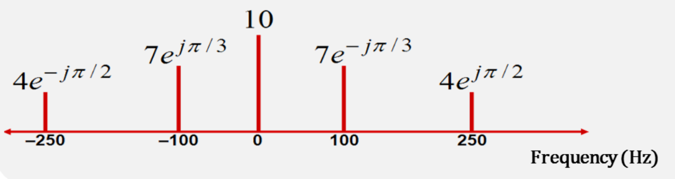
$$\begin{aligned} x(t) &= 10 + 14\cos(2\pi(100)t - \pi/3) + 8\cos(2\pi(250)t + \pi/2) \\ &= 10 + 7e^{j(2\pi(100)t - \pi/3)} + 7e^{-j(2\pi(100)t - \pi/3)} + 4e^{j(2\pi(250)t + \pi/2)} + 4e^{-j(2\pi(250)t + \pi/2)} \\ &= 10 + 7e^{-j\pi/3}e^{j2\pi(100)t} + 7e^{j\pi/3}e^{-j2\pi(100)t} + 4e^{j\pi/2}e^{j2\pi(250)t} + 4e^{-j\pi/2}e^{-j2\pi(250)t} \end{aligned}$$

※ DC 성분: $10 = 10e^{j2\pi 0t}$

1. (주파수, 복소 진폭) 집합

$$(f_k, \frac{1}{2}X_k) = \{(0,10), (100, 7e^{-j\pi/3}), (-100, 7e^{j\pi/3}), (250, 4e^{j\pi/2}), (-250, 4e^{-j\pi/2})\}$$

2. x(t)에 대한 스펙트럼



스펙트럼 표현

3. 정현파들의 곱에 대한 스펙트럼

- 서로 다른 주파수를 갖는 2개의 정현파를 곱하면 비트 음색(Beat Note)의 오디오 효과 제작 가능

$$x(t) = \cos(\pi t)\sin(10\pi t)$$

- [예] 라디오 방송의 AM(Amplitude Modulation)

$$x(t) = v(t)\cos(2\pi f_c t)$$

예제 10-03

5Hz와 ½Hz인 두 정현파들의 곱으로 구성된 비트신호 $x(t)$에 대한 (주파수, 복소 진폭)을 구하고, 스펙트럼을 그려보자.

$$x(t) = \cos(\pi t)\sin(10\pi t)$$

[예제풀이]

$$x(t) = \cos(\pi t)\sin(10\pi t) = \left(\frac{e^{j\pi t} + e^{-j\pi t}}{2}\right)\left(\frac{e^{j10\pi t} - e^{-j10\pi t}}{2j}\right)$$

$$= \frac{1}{4j}\left(e^{j11\pi t} - e^{-j9\pi t} + e^{j9\pi t} + e^{-j11\pi t}\right)$$

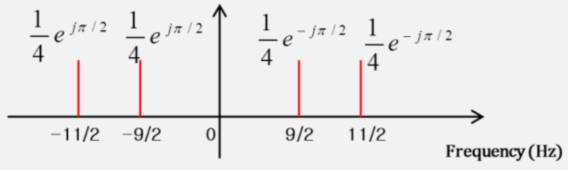
$$= \frac{1}{4j}\left(e^{j11\pi t} - e^{-j11\pi t}\right) + \frac{1}{4j}\left(e^{j9\pi t} - e^{-j9\pi t}\right) = \frac{1}{2}\sin(11\pi t) + \frac{1}{2}\sin(9\pi t)$$

1. (주파수, 복소 진폭) 집합

$$\left(f_k, \frac{1}{2}X_k\right) = \left\{\left(\frac{9}{2}, \frac{1}{4}e^{-j\pi/2}\right), \left(-\frac{9}{2}, \frac{1}{4}e^{j\pi/2}\right), \left(\frac{11}{2}, \frac{1}{4}e^{-j\pi/2}\right), \left(-\frac{11}{2}, \frac{1}{4}e^{j\pi/2}\right)\right\}$$

2. 스펙트럼

비트 신호 $x(t)$에 대한 스펙트럼

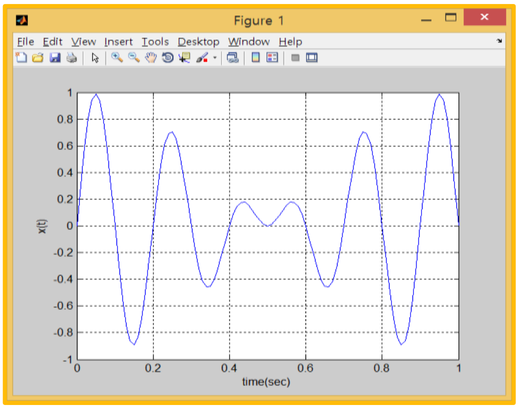


스펙트럼을 이용한 신호 합성

1. 시간 영역 표현과 주파수 영역 표현

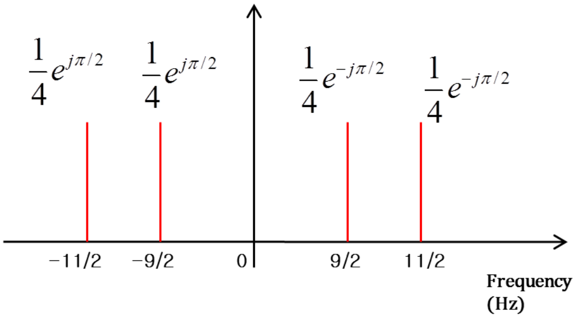
1) 신호에 대한 시간 영역 표현

$$x(t) = \cos(\pi t)\sin(10\pi t)$$



2) 신호에 대한 주파수 영역 표현(스펙트럼 표현)

$$x(t) = \cos(\pi t)\sin(10\pi t)$$

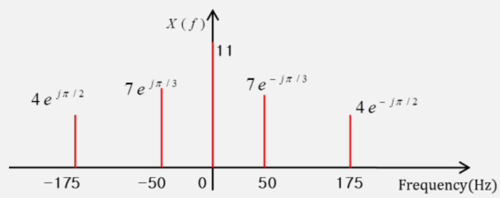


스펙트럼을 이용한 신호 합성

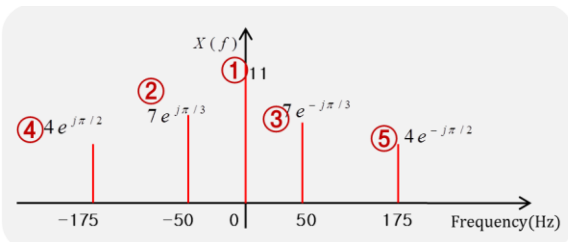
2. 스펙트럼에 의한 신호 합성

예제 10-04

다음은 임의의 신호 $x(t)$에 대한 스펙트럼 X(f)이다. 이 스펙트럼에 대한 신호의 시간 영역 $x(t)$를 구해보자.

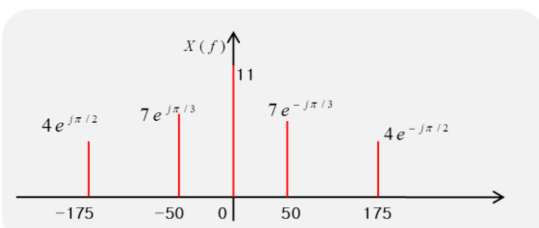


[예제풀이]



$$x(t) = \boxed{11e^{j0}} + \boxed{(7e^{j\pi/3})e^{j2\pi(-50)t}} + \boxed{(7e^{-j\pi/3})e^{j2\pi(50)t}} + \boxed{(4e^{j\pi/2})e^{j2\pi(-175)t}} + \boxed{(4e^{-j\pi/2})e^{j2\pi(175)t}}$$

$$x(t) = 11 + 2\times 7\times\left(\frac{e^{j(2\pi(50)t-\pi/3)} + e^{-j(2\pi(50)t-\pi/3)}}{2}\right) + 2\times 4\times\left(\frac{e^{j(2\pi(175)t-\pi/2)} + e^{-j(2\pi(175)t-\pi/2)}}{2}\right)$$



스펙트럼을 이용한 신호 합성 ↓ ↑ *스펙트럼 분석 (또는 주파수 분석)*

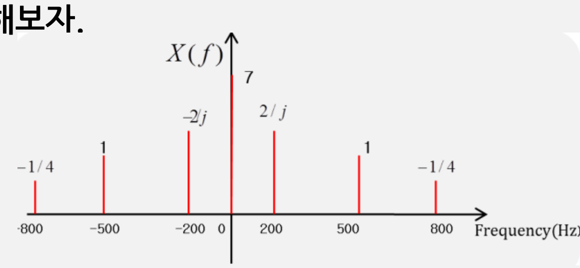
$$x(t) = 11 + 14\cos(2\pi(50)t - \pi/3) + 8\cos(2\pi(175)t - \pi/2)$$

스펙트럼을 이용한 신호 합성

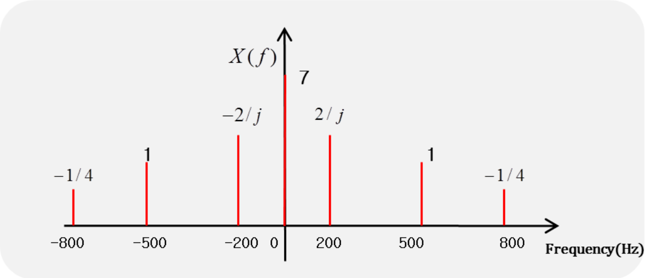
2. 스펙트럼에 의한 신호 합성

예제 10-05

신호 $x(t)$가 다음과 같이 스펙트럼 X(f)로 표현된다. 이 스펙트럼에 대한 신호의 시간 영역 $x(t)$를 구해보자.



[예제풀이]



$$x(t)=7e^{j0}+\frac{2}{j}(e^{j2\pi(200)t}-e^{-j2\pi(200)t})+1(e^{j2\pi(500)t}+e^{-j2\pi(500)t})-\frac{1}{4}(e^{j2\pi(800)t}+e^{-j2\pi(800)t})$$

$$=7+4\sin(2\pi(200)t)+2\cos(2\pi(500)t-\frac{1}{2}\cos(2\pi(800)t)$$

핵심정리

스펙트럼 표현

- 스펙트럼: 신호를 만들어 주는 각각의 정현파 요소를 그래프식으로 표현한 것으로 Frequency Diagram이라고도 함
- 신호의 각 주파수 요소와 진폭의 상호관계를 빠르고 쉽게 보여줌

스펙트럼을 이용한 신호 합성

- 신호는 시간 영역, 스펙트럼을 이용한 주파수 영역으로도 표현 가능함
- 주파수 영역으로 표현된 스펙트럼을 이용하여 신호 합성 가능