

디지털신호처리



강 의 노 트

이산 시스템의 분류와 시간 응답

10주차 1차시

학습내용

- ❖ 이산 시간 시스템의 분류
- ❖ 이산 시스템의 시간 응답

학습목표

- ❖ 이산시스템의 분류에 대한 개념을 설명할 수 있다.
- ❖ 이산 시불변 시스템의 정의 및 임펄스 응답에 대해 설명하고, 시간 응답을 구할 수 있다.

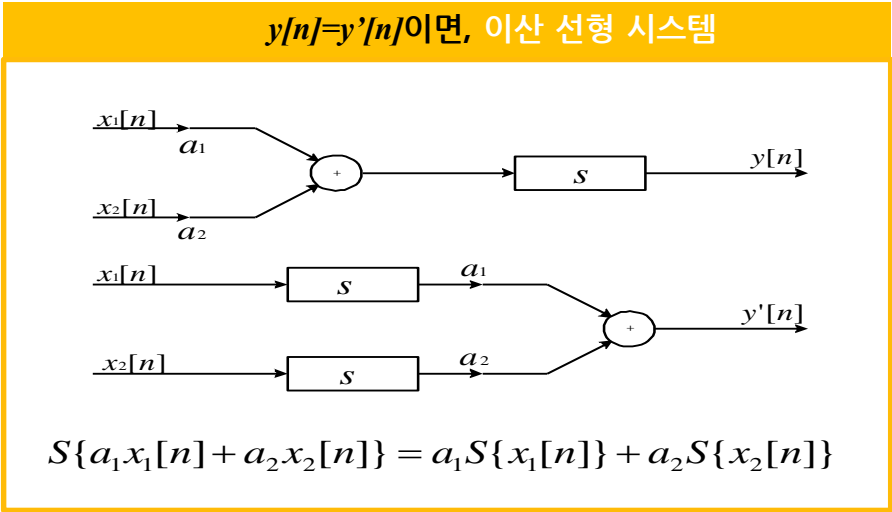


이산 시간 시스템의 분류

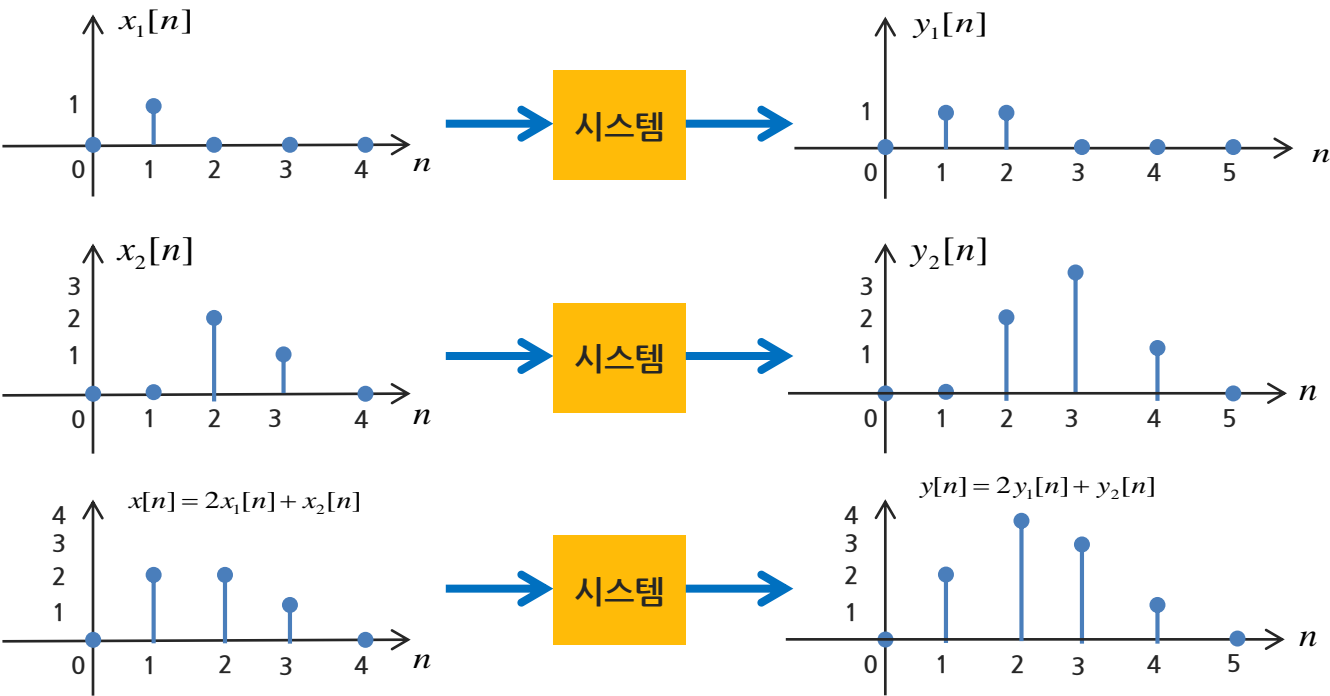
1. 선형 시스템과 비선형 시스템

1) 정의

- 이산 선형 시스템: 임의의 신호에 대하여 중첩의 원리가 만족되는 시스템



2) [예] 중첩의 원리가 성립하는 선형 시스템 개념



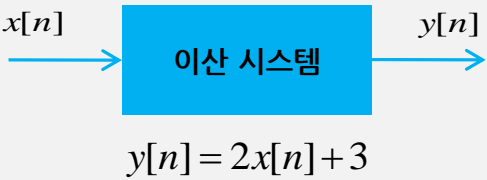


이산 시간 시스템의 분류

1. 선형 시스템과 비선형 시스템

예제 25-01

다음 입출력관계를 가지는 이산 시스템이 선형 시스템인지 비선형 시스템인지를 판별해 보자.



[예제풀이]

이산 시스템이 중첩의 원리가 성립하는지 확인 $y[n] = 2x[n] + 3$

if $x[n] = a_1x_1[n], \quad y_1[n] = 2a_1x_1[n] + 3$

if $x[n] = a_2x_2[n], \quad y_2[n] = 2a_2x_2[n] + 3$

if $x[n] = a_1x_1[n] + a_2x_2[n], \quad y_3[n] = 2(a_1x_1[n] + a_2x_2[n]) + 3$

$\therefore y_3[n] \neq y_1[n] + y_2[n]$

중첩의 원리가 성립되지 않기 때문에 비선형 시스템



이산 시간 시스템의 분류

2. 정적(무기억) 시스템과 동적(기억) 시스템

1) 비교

정적(무기억) 시스템

임의의 순간 n 에서 시스템의 출력이
입력의 이전 또는 이후의 샘플이 아닌
동일한 시간에서의 입력신호에
대부분 의존하는 시스템

$$y[n] = 3x[n]$$
$$y[n] = nx[n] + 2x^2[n]$$

동적(기억) 시스템

임의의 순간 n 에서 시스템의 출력이
동일한 시간에서의 입력신호뿐만 아니라
이전 또는 이후의 샘플에도 의존하는 시스템

$$y[n] = x[n-1] + 2x[n-2] + 3x[n+1]$$



이산 시간 시스템의 분류

3. 시변 시스템과 시불변 시스템

1) 정의

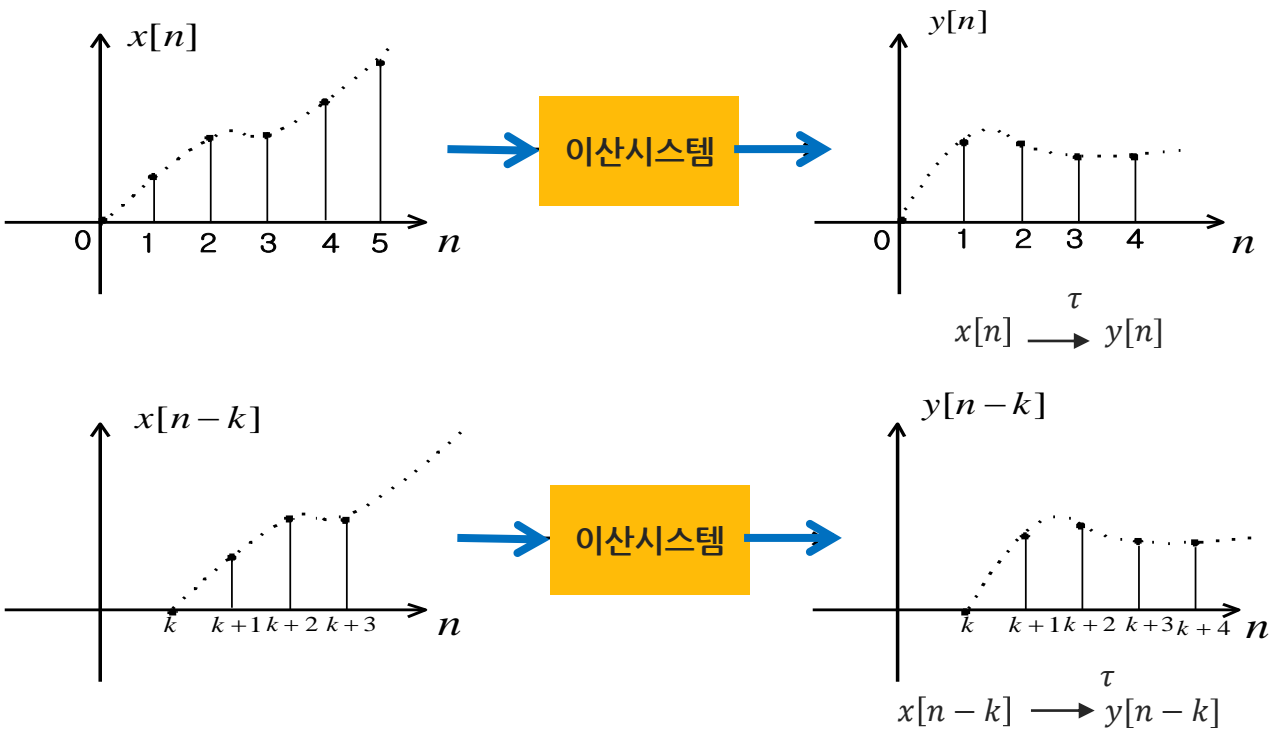
시변 시스템(Time-Varying System)

- 시스템의 특성이 시간에 따라 변하는 시스템

시불변 시스템(Time-Invariant System)

- 시스템의 특성이 시간에 따라 변하지 않는 시스템

2) [예]시불변 시스템의 입출력 관계



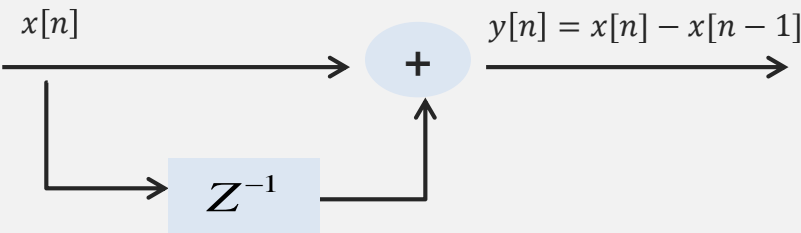


이산 시간 시스템의 분류

3. 시변 시스템과 시불변 시스템

예제 25-02

다음과 같은 이산신호 시스템은 이산신호를 미분하는 시스템이다. 이러한 미분 시스템이 시변 시스템인지 시불변 시스템인지를 판별해 보자.



[예제풀이]

$y[n] = x[n] - x[n-1]$

만약 시간적으로 k 단위만큼
지연된 입력신호가 입력될 때 그 출력값

$y(n, k) = x[n-k] - x[n-k-1]$

$y[n] = x[n] - x[n-1]$

시간적으로 $n \rightarrow n-k$ 만큼
지연된 출력 값

$y[n-k] = x[n-k] - x[n-k-1]$

$\therefore y[n-k] = y(n, k)$ 이 시스템은 **시불변 시스템**임



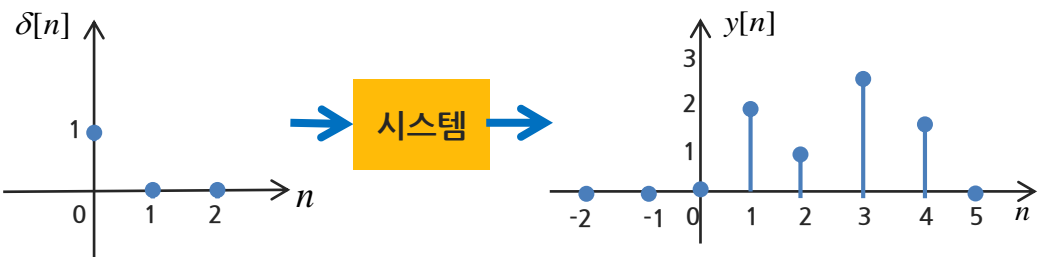
이산 시간 시스템의 분류

4. 인과 시스템과 비인과 시스템

1) 정의

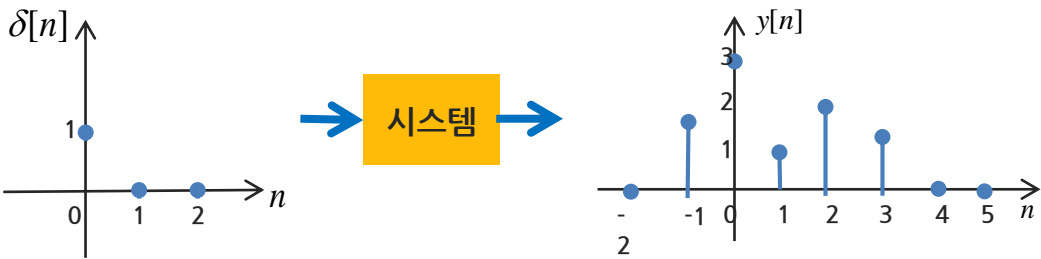
인과 시스템
(Casual System)

- 어떤 시스템의 시각 n 에서의 출력이 과거나 현재의 입력 값에만 의존하고 미래의 입력 값과는 무관한 시스템



비인과 시스템
(Non-Casual System)

- 어떤 시스템의 시각 n 에서의 출력이 과거나 현재의 입력 값에만 의존하지 않는 시스템





이산 시간 시스템의 분류

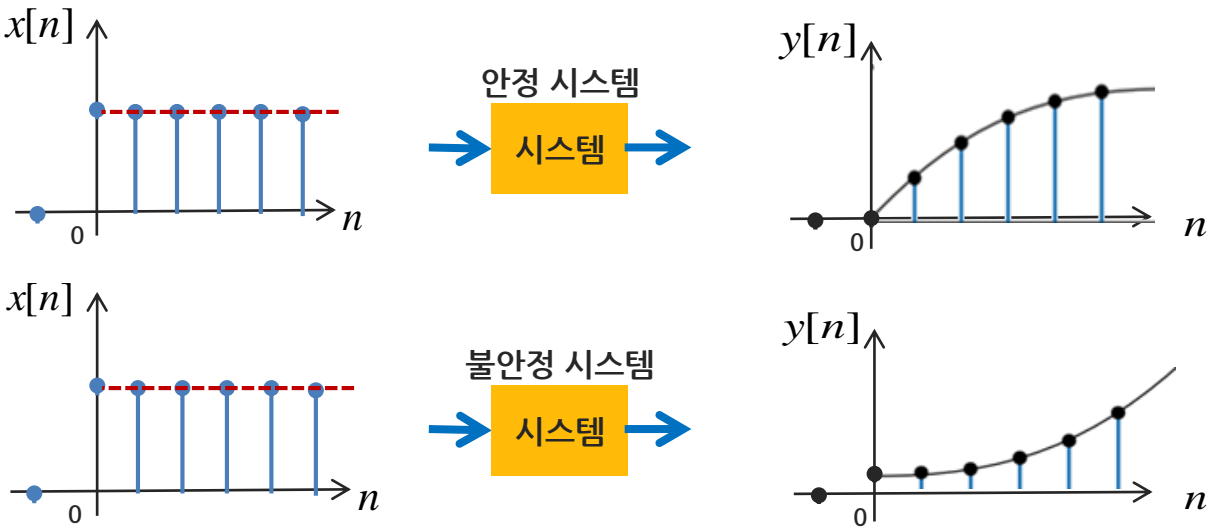
5. 안정 시스템과 불안정 시스템

1) 정의

- 유한 입력 유한 출력 안정도(BIBO: Bounded Input Bounded Output)
- 시스템에 인가된 **유한한 입력에 대한 시스템의 출력 특성**을 정의한 것
- 유한한 M_x 와 M_y 에 대해 모든 n 에 대하여 아래 식을 만족하면 **시스템은 BIBO 안정함**

$$|x(t)| \leq M_x < \infty \quad , \quad |y(t)| \leq M_y < \infty$$

2) 안정 시스템과 불안정 시스템 비교

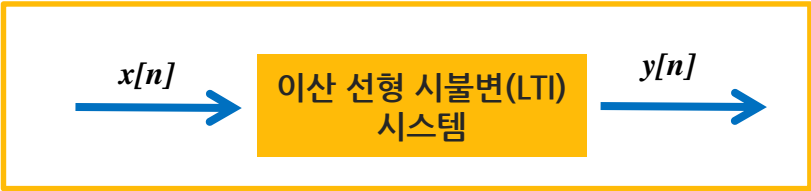




이산 시스템의 시간 응답

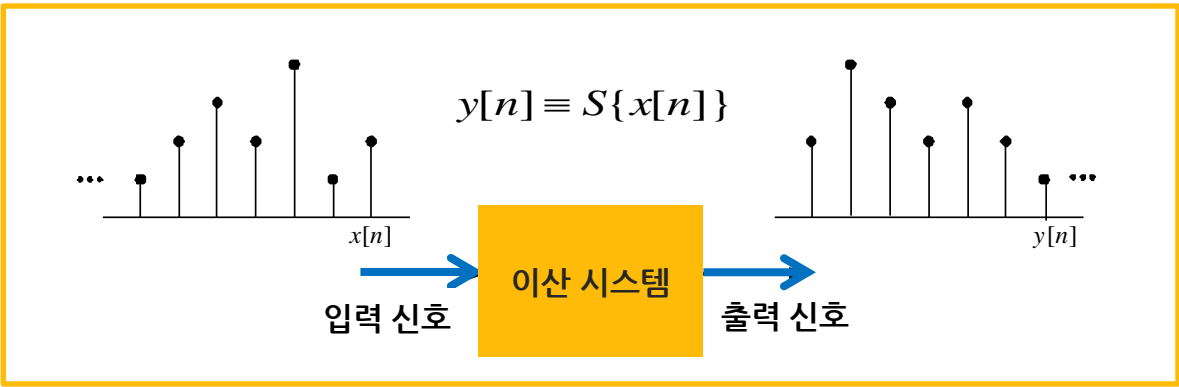
1. 이산 선형 시불변 시스템 정의

- 1) 이산 선형 시불변(LTI: Linear Time Invariant)
- 이산 신호 시스템이 **선형(Linear)** 시스템이면서 **시불변(Time-Invariant)** 시스템인 경우



2. 임펄스 응답

- 1) 정의
- 입력신호 $x[n]$ 에 대한 이산시스템의 응답을 $y[n]$ 이라고 하면,



시스템의 임펄스 응답 $h[n]$: 단위 임펄스 입력 신호에 대한 이산 시스템 응답
 $h[n] \equiv S\{\delta[n]\}$



이산 시스템의 시간 응답

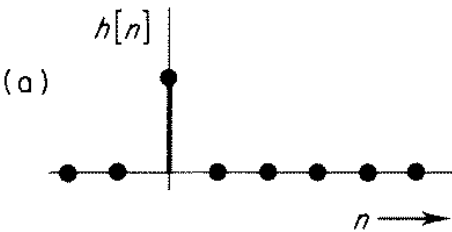
2. 임펄스 응답

2) 다양한 형태의 임펄스 응답

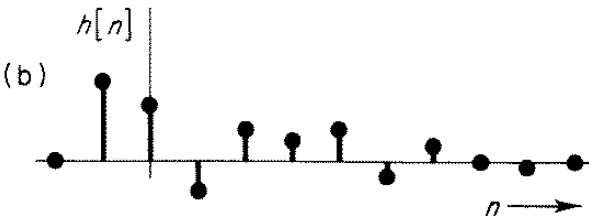
이산 선형 시불변 시스템



메모리가 없는 이산 시스템



비인과 시스템

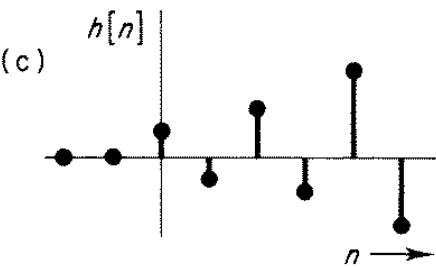




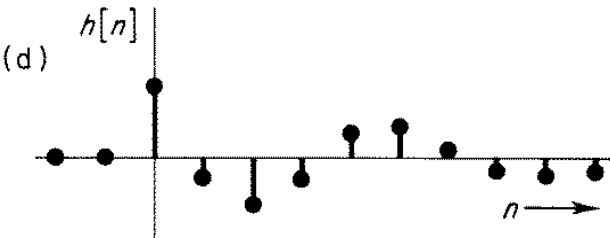
이산 시스템의 시간 응답

2) 다양한 형태의 임펄스 응답

불안정 시스템



인과 메모리보유 안정 시스템



대표적인 디지털 신호처리 응용에서 관심 있는 시스템

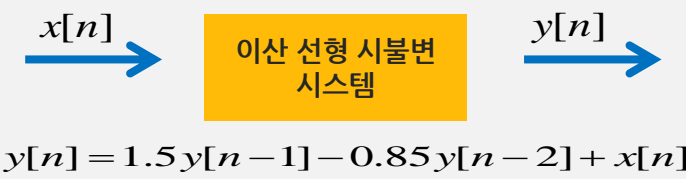


이산 시스템의 시간 응답

2. 임펄스 응답

예제 25-03

임의의 이산 선형 시불변 시스템의 입력 신호 $x[n]$ 과 출력신호 $y[n]$ 이 다음과 같은 차분 방정식으로 표현된다고 한다. 이러한 이산 선형 시불변 시스템에서 임펄스 응답 $h[0], h[1], h[2]$ 값을 구해 보자.
단, 이 시스템은 $n < 0$ 은 경우 $h[n] = 0$ 인 인과시스템이라고 가정하자.



[예제풀이]

$x[n] = \delta[n] \rightarrow h[n] = y[n]$

$h[n] = 1.5h[n-1] - 0.85h[n-2] + \delta[n]$

$n=0$ 일 때, $h[0] ?$ $h[0] = 1.5h[-1] - 0.85h[-2] + \delta[0] = 1$

$n=1$ 일 때, $h[1] ?$ $h[1] = 1.5h[0] - 0.85h[-1] + \delta[1] = 1.5$

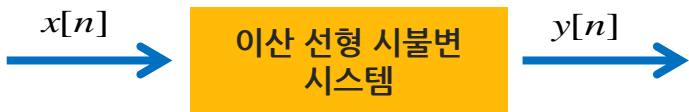
$n=2$ 일 때, $h[2] ?$ $h[2] = 1.5h[1] - 0.85h[0] + \delta[2] = 1.5 * 1.5 - 0.85 = 1.4$



이산 시스템의 시간 응답

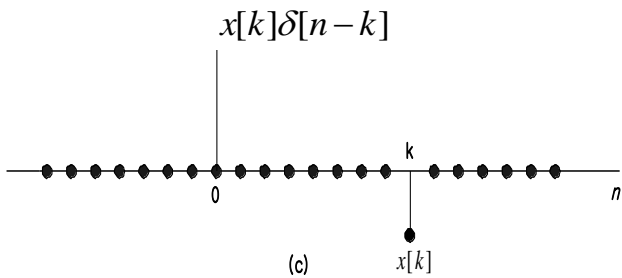
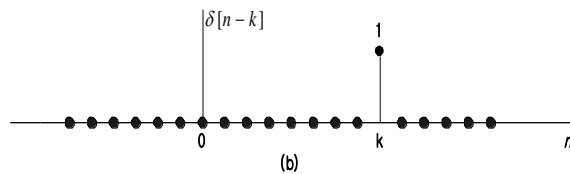
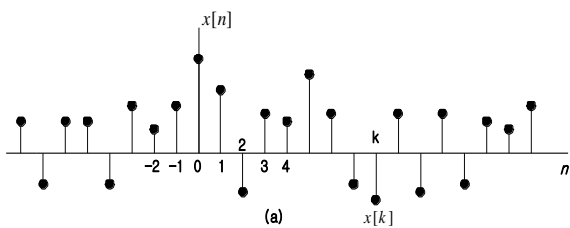
3. 이산 선형 시불변 시스템의 시간 응답

- 입력 신호가 주어졌을 때 이산 선형 시불변 시스템의 동작을 해석하는 방법?
⇒ 주어진 입력을 어떤 **기본 신호의 합으로 분해**하는 것



$$x[n] = \sum_k c_k x_k[n]$$

- 만약 기본 신호 $x_k[n]$ 에 대한 시스템 응답을 $y_k[n]$ 이라 하면, **선형시스템**이므로
$$y[n] = S\{x[n]\} = S\{\sum_k c_k x_k[n]\} = \sum_k c_k S\{x_k[n]\} = \sum_k c_k y_k[n]$$



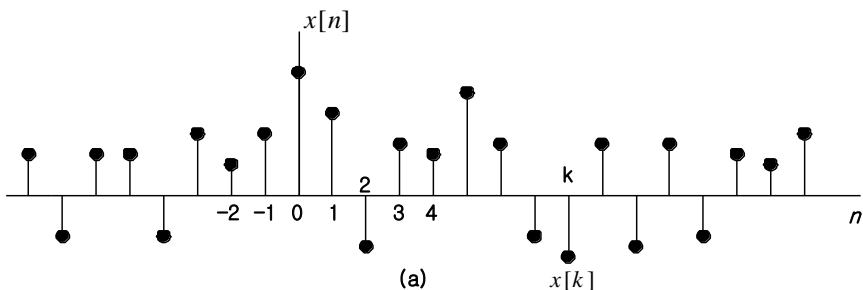
이산 신호 $x[n]$ 에 $n=k$ 에서의
임펄스 신호 $\delta[n-k]$ 를
곱한 신호

- 이산 신호 $x[n]$ 은 단위 임펄스 신호 $\delta[n]$ 을 기본 신호로 **임펄스의 가중된 합**으로 표현 가능함

$$x[n]\delta[n-k] = x[k]\delta[n-k]$$

$$x[n] = L + x[-1]\delta[n+1] + x[0]\delta[n] + x[1]\delta[n-1] + L$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]$$



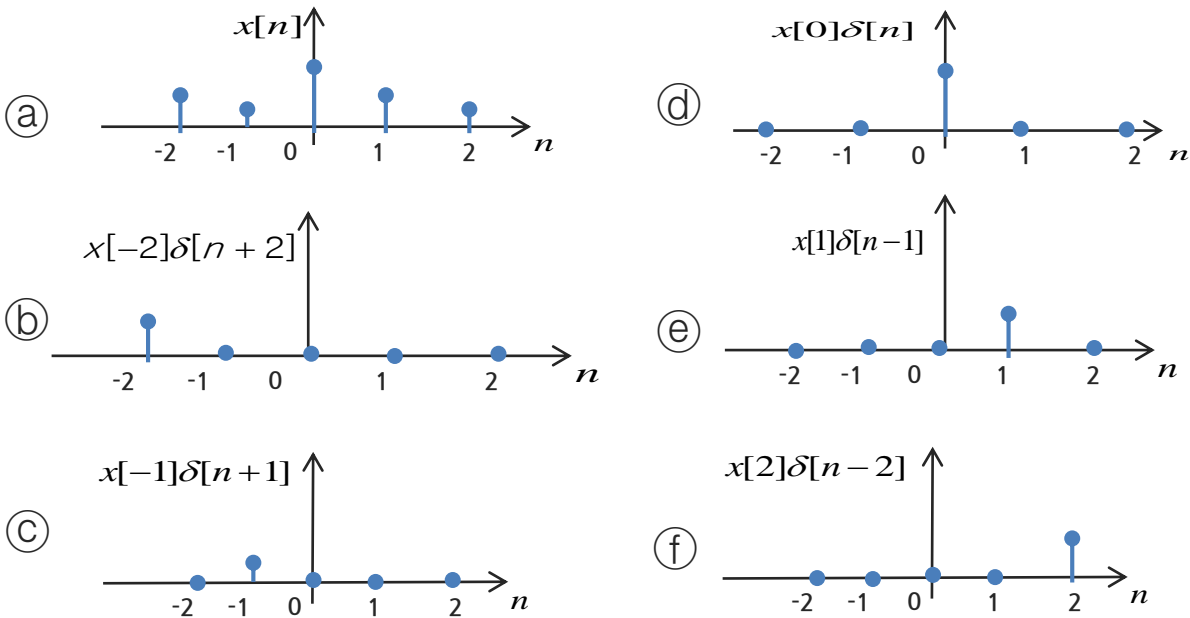


이산 시스템의 시간 응답

3. 이산 선형 시불변 시스템의 시간 응답

1) 다양한 형태의 임펄스 응답

- 가중되고 시간 이동된 단위 임펄스 신호들의 집합을 이용한 **디지털신호의 표현**



이산 시스템의 시간 응답

3. 이산 선형 시불변 시스템의 시간 응답

예제 25-04

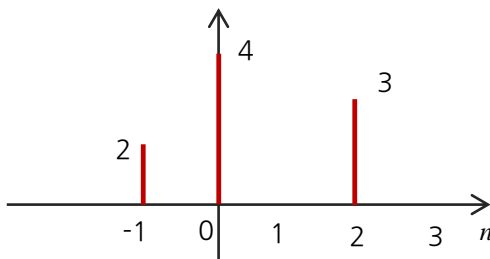
다음 식과 같이 주어진 입력신호 $x[n]$ 에 대해 기본 신호인 임펄스 신호의 합으로 나타내보자.

$$x[n] = \{2, 4, 0, 3\}$$

[예제풀이]

- 수열 $x[n]$ 은 $n=-1, 0, 2$ 인 순간에는 0이 아니므로, 지연 값 $k=-1, 0, 2$ 일 때에 해당하는 세 개의 임펄스를 필요로 함

$$x[n] = 2\delta[n+1] + 4\delta[n] + 3\delta[n-2]$$



$x[n]$ 에 대한 그래프 표현



이산 시스템의 시간 응답

3. 이산 선형 시불변 시스템의 시간 응답

2) 임의의 입력 $x[n]$ 에 대한 시스템의 응답

- $n=k$ 에서의 임펄스 응답을 $h[n,k]$ 라고 정의,
시스템이 시불변이라고 가정하였기 때문에 $h[n, k] = h[n-k]$ 가 됨

$$h[n,k] = S\{\delta[n-k]\}$$
$$= h[n-k]$$

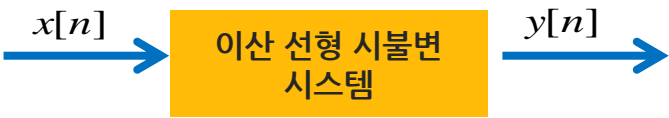
$y[n] = S\{x[n]\}$

$$= S\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]\right\}$$
$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]S\{\delta[n-k]\}$$
$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

선형시스템에 대한
중첩의 원리

시스템의 시불변
특성

- 이산 선형 시불변 시스템의 임펄스 응답이 $h[n]$ 이고, 입력이 $x[n]$ 일 경우
⇒ 출력 $y[n]$ 은 **컨볼루션합으로 계산**할 수 있음



$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

핵심정리

이산 시간 시스템의 분류

- 이산 선형 시스템: 중첩의 원리가 성립되는 시스템

정적(무기억) 시스템과
동적(기억) 시스템

임의의 순간 n 에서 시스템의 출력이 입력의 이전 또는 이후의 샘플이 아닌 동일한 시간에서의 입력신호에 대부분 의존하는 시스템을 정적(무기억) 시스템, 이와 다른 경우 동적(기억) 시스템이라고 함

시변 시스템과
시불변 시스템

시스템의 입력과 출력의 특성이 시간에 따라 변하면 시변 시스템, 변하지 않으면 시불변 시스템이라고 함

인과 시스템과
비인과 시스템

어떤 시스템의 시각 n 에서의 출력이 과거나 현재의 입력 값에만 의존하고 미래의 입력 값과는 무관한 시스템은 인과 시스템, 그렇지 않으면 비인과 시스템이라고 함

안정시스템과
불안정시스템

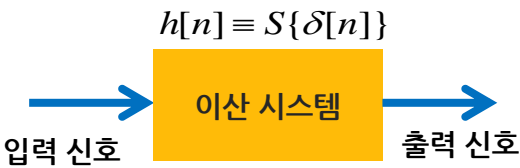
유한한 M_x 와 M_y 에 대해 모든 n 에 대하여, 유한한 입력에 대한 유한한 출력 신호를 가지면 BIBO(Bounded Input Bounded Output) 안정 시스템, 그렇지 않으면 불안정시스템 이라고 함

$$|x[n]| \leq M_x < \infty \qquad |y[n]| \leq M_y < \infty$$

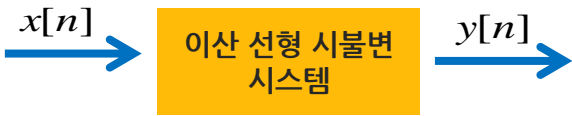
핵심정리

이산 시간 시스템의 시간 응답

- 이산 선형 시불변 시스템: 이산 시스템이 선형(Linear)이고, 시불변(Timeinvariant)인 시스템
- 이산 선형 시불변 시스템의 임펄스 응답 $h[n]$: 입력 신호로 단위 임펄스 입력신호에 대한 이산 시스템의 응답



- 이산 선형 시불변 시스템의 시간응답 $y[n]$: 입력 신호 $x[n]$ 과 임펄스 응답 $h[n]$ 과의 컨볼루션 연산으로 계산할 수 있음



$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$