디지털신호처리

강 의 노 트

복소수와 복소지수 신호

3주차 1차시

학습내용

- ❖ 복소수 표현
- ❖ 복소수의 합
- ❖ 오일러 공식
- ❖ 복소지수 신호

학습목표

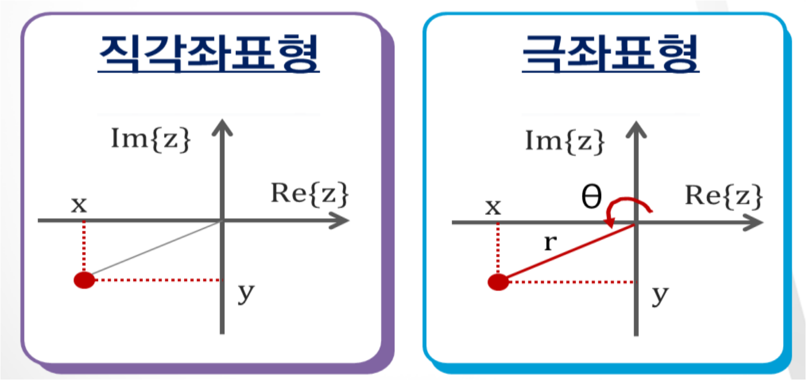
- ❖ 복소수를 직각좌표 형식과 극좌표 형식으로 표현할 수 있다.
- ❖ 복소수의 합을 계산할 수 있다.
- ❖ 오일러 공식을 이해하고, 활용할 수 있다.
- ❖ 복소지수 신호의 개념을 이해하고, 복소지수 신호를 사용하는 이유를 설명할 수 있다.

복소수 표현

1. 복소수(Complex Number)

- ‘복합적이다’ → 무엇과 무엇이 복합되어 있는 수
- 실수(Real)와 허수(Imaginary)가 복합되어 있는 수

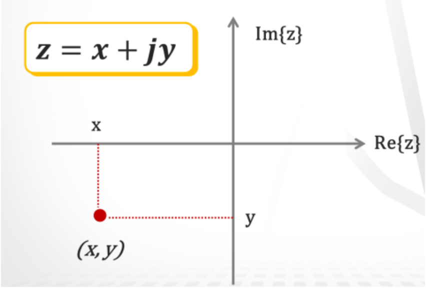
2. 복소수 표현 방법



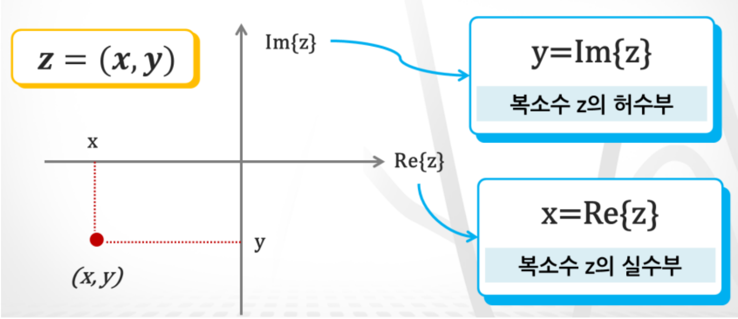
※ *전기전자 쪽에서는 일반적으로* $\sqrt{-1}$ *을 j로 표시함*

3. 직각좌표형 복소수 표현

1) 직교 좌표계(Cartesian Coordinate)에서의 복소수 표시



2) 하나의 복소수 z는 실수의 순서쌍으로 표현됨



복소수 표현

3. 극좌표형 복소수 표현

1) 복소수 = 벡터로 표현 가능

- 복소수는 복소수 평면에서 한 점으로 표현 가능하기 때문에 벡터와 유사함
- 복소수의 극좌표 형식(Polar Coordinate) 표현

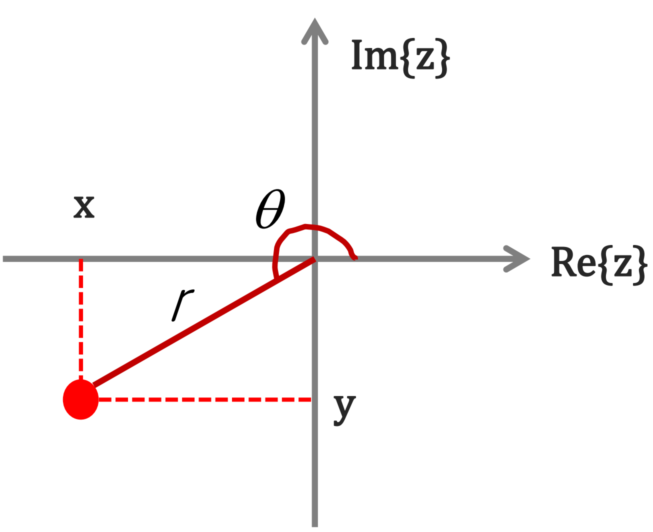
$$z = re^{j\theta} \quad or \quad z = r\angle\theta$$

r = 벡터의 길이

θ = 실수 축과 이루는 각

2) 복소수의 극좌표형 표현

$$z = re^{j\theta}$$



복소수의 직교좌표계 표현

$$z = (x, y) \quad or \quad z = x + jy$$

복소수의 극좌표계 표현

$$z = re^{j\theta} \quad or \quad z = r\angle\theta$$

복소수 표현

3. 직교좌표계와 극좌표계 표현의 관계

복소수의 직교좌표계 표현

$$z = (x, y) \quad or \quad z = x + jy$$

복소수의 극좌표계 표현

$$z = re^{j\theta} \quad or \quad z = r\angle\theta$$

$$x = r\cos\theta \quad and \quad y = r\sin\theta$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad and$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

복소수 표현

[한걸음 더] 극좌표형과 직교좌표형 복소수 바꿔 표현해보기!

한걸음 더

다음에 제시된 복소수를 각각 극 좌표형과 직교좌표형으로 각각 바꾸어 표현해봅시다.

직교좌표형	→	극좌표현
$z = 0.5 + j0.5$	→	?

전문가 해설을 통해 풀이를 확인해보세요.

[과제해설]

1) 직교좌표형으로 표현된 복소수를 극좌표형으로 변환하면?

- 복소수 z=(x, y)에 대한 극좌표형 $z=re^{j\theta}$으로의 변환식

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad and \quad \theta = \arctan(\frac{y}{x})$$

$$z = re^{j\theta}, \ r = \sqrt{(0.5^2 + 0.5^2)} = 0.707, \ \theta = \tan^{-1}(\frac{0.5}{0.5}) = \frac{\pi}{4}$$

$$\therefore z = 0.707e^{j\pi/4} \quad or \quad z = 0.707\angle\pi/4$$

2) (심화예제) 극좌표형으로 표현된 복소수에 대한 직교좌표형 변환하면?

- 복소수 z=(x,y)에 대한 직교좌표형 $z=re^{j\theta}$으로의 변환식

$$x = r\cos\theta \quad and \quad y = r\sin\theta$$

$$z = r(\cos\theta + j\sin\theta)$$
$$= 5\cos(-2.5) + j5\sin(-2.5) = -4.006 - j2.992$$

$$\therefore z = (-4.006, \ -2.992)$$

복소수의 합

1. 복소수의 합

[예) Z1과 복소수 Z2를 합해 Z3로 만들 경우]

$z_1 = 4 - j3 \qquad z_2 = 2 + j5$

$z_3 = 6 + j2$

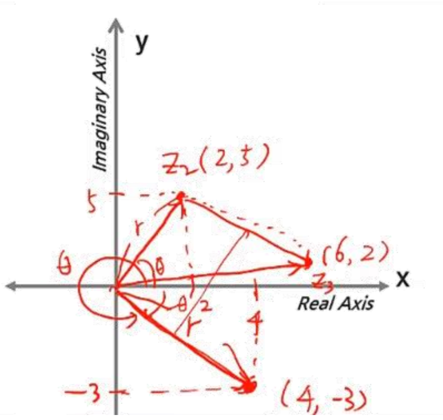
"실수부는 실수부끼리,
허수부는 허수부끼리 더하기"

2. 예제 풀이

$$z_1 = x_1 + jy_1, \quad z_2 = x_2 + jy_2$$

$$z_3 = z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2)$$

$$\begin{aligned} z_3 &= z_1 + z_2 \\ &= (4 - j3) + (2 + j5) \\ &= (4 + 2) + j(-3 + 5) \\ &= 6 + j2 \end{aligned}$$



※ Imaginary Axis: 허수축, Real Axis: 실수축,
Displaced Version of z1: 벡터합을 위한 이동된 벡터 z1

오일러 공식

1. 좌표형 변환

1) 극좌표형 복소수 표현의 문제

- $Z = r\angle\theta$이 다루기 힘들고 대수적 표현에도 적절하지 않음
- 복소지수의 오일러(Euler) 공식

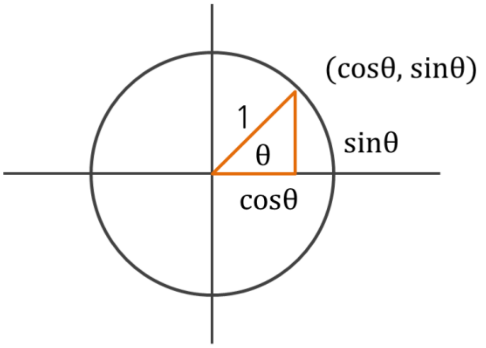
$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$$

2) 복소지수의 오일러 공식을 이용한 변환

복소지수의 오일러(Euler) 공식

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$$

직각좌표 쌍인(cosθ, sinθ)로 반지름이 1인 원 위의 모든 점 표현할 수 있음



- 단위 원이 아닌 크기 r인 원 위의 모든 점의 표현

$$z = re^{j\theta} = r\cos\theta + jr\sin\theta$$

- 복소지수의 극좌표계 표현은 복소수 곱셈과 나눗셈을 계산하는데 편리함
- 극좌표계 표현법은 복소지수 신호(Complex Exponential Signal)에 대한 중요한 기초가 됨

오일러 공식

2. 오일러 공식과 역오일러 공식

1) 오일러 공식에 대한 정리

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$$

$$re^{j\theta} = r\cos\theta + jr\sin\theta$$

2) 오일러 공식에서 θ=-θ를 대입해 도출

- 식1) $e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$
- 식2) $re^{j\theta} = r\cos\theta + jr\sin\theta$

$$\cos\theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2} \qquad \sin\theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$$

오일러 공식

[한걸음 더] 오일러 공식으로 복소수 변환하기

한걸음 더

극좌표형으로 표현된 복소수의 합을 계산한 후 오일러 공식을 활용해
직교좌표형식의 복소수로 변환해 보세요.

$$3e^{j(\pi/4)} + 4e^{-j(\pi/6)}$$

전문가 해설을 통해
풀이를 확인해보세요.

[과제해설]

- 오일러 공식을 이용해 직교좌표형식 복소수로 변환

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$$

$$3e^{j(\pi/4)} + 4e^{-j(\pi/6)} = 3(\cos\frac{\pi}{4} + j\sin\frac{\pi}{4}) + 4(\cos(-\frac{\pi}{6}) + j\sin(-\frac{\pi}{6}))$$

$$= 3(\frac{1}{\sqrt{2}} + j\frac{1}{\sqrt{2}}) + 4(\frac{\sqrt{3}}{2} + j(-\frac{1}{2})) = 5.5854 + j0.1213$$

복소지수 신호

1. 복소지수 함수

1) 복소지수

- 어떤 수를 밑으로 하고, 지수가 복소수로 되어 있는 수

2) 복소지수 함수

- 지수가 복소수로 되어 있고, 그 복소수가 변수일 때에 얻어지는 값

3) 복소지수 함수가 복소지수 신호가 되는 경우

- 각도변수인 θ가 각속도 ω와 시간 t의 변수일 때

$$f(\theta) = re^{j\theta} = r\cos(\theta) + jr\sin(\theta)$$

$$\theta = \omega t$$

$$f(\theta) = f(\omega t) = re^{j\omega t} = r\cos(\omega t) + jr\sin(\omega t)$$

4) 개념과 정의

- 복소지수 함수로 표현되는 복소지수 신호 z(t)의 실수부는 실수 코사인 신호이고, 허수부는 실수 사인 신호임

$$z(t) = Ae^{j(\omega_0 t + \phi)}$$

5) 복소지수 신호의 크기와 각도

- 크기 $|z(t)| = A$
- 각도 $\arg\ z(t) = (\omega_0 t + \phi)$

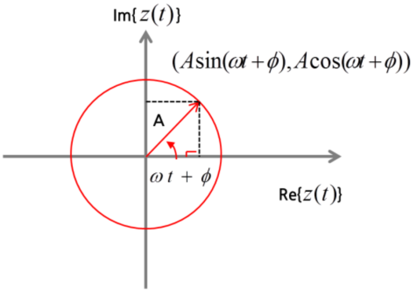
복소지수 신호

2. 복소지수 신호

1) 복소지수 신호에 대한 직교좌표계 표현

$$z(t) = Ae^{j(\omega_0 t + \phi)} = A\cos(\omega_0 t + \phi) + jA\sin(\omega_0 t + \phi)$$

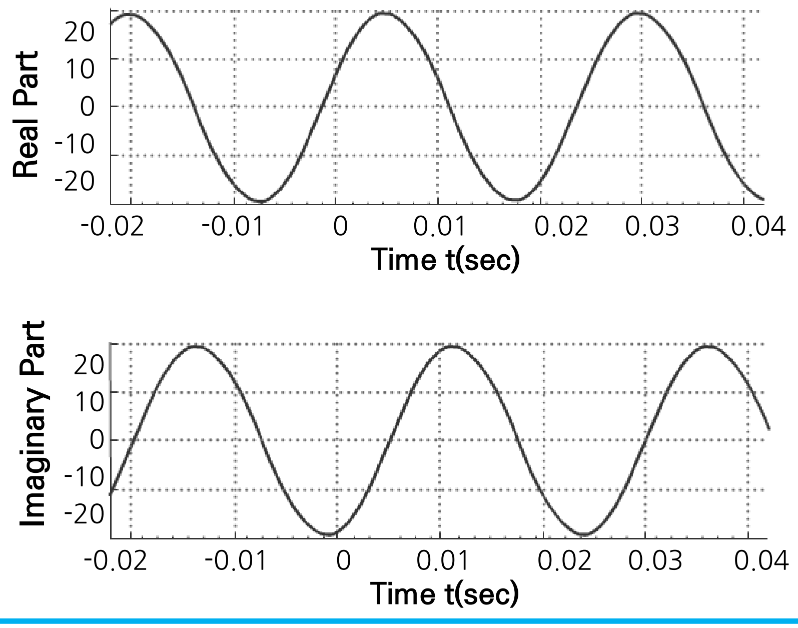
- t에 대한 복소수 함수로 복소평면에서 크기가 A인 길이의 벡터가 ω의 각속도로 반시계 방향으로 회전하는 경우에 대한 신호



2) 복소지수 신호의 실수부와 허수부

- 시간의 함수인 복소지수 신호의 실수부와 허수부는 모두 실수 정현파 신호
- 위상이 π/2 만큼 차이가 있음
- 복소지수 신호의 예

$$z(t) = 20e^{j(80\pi t - 0.4\pi)}$$
$$= 20\cos(80\pi t - 0.4\pi) + j20\sin(80\pi t - 0.4\pi)$$



복소지수 신호

2) 복소지수 신호의 실수부와 허수부

- 실수부만 취하면 코사인 신호, 허수부만 취하면 사인 신호가 됨

$$x(t) = \mathrm{Re}\{z(t)\} = \mathrm{Re}\{Ae^{j(\omega_0 t+\phi)}\} = A\cos(\omega_0 t + \phi)$$

$$y(t) = \mathrm{Im}g\{z(t)\} = \mathrm{Im}g\{Ae^{j(\omega_0 t+\varphi)}\} = A\sin(\omega_0 t + \varphi)$$

※ 여기서 Re{..} 연산의 의미는 실수부만 선택하는 연산이고, Im{..}은 허수부만 취하는 연산임

- 예시

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathrm{Re}\{(-3j)e^{j\omega t}\} \\ &= \mathrm{Re}\{3e^{-j0.5\pi}e^{j\omega t}\} \\ &= \mathrm{Re}\{3e^{j(\omega t-0.5\pi)}\} \\ &= 3\cos(\omega t - 0.5\pi) \end{aligned}$$

3) 복소지수 신호를 사용하는 이유

- 정현파신호를 표현하는 또 하나의 방법
- 많은 계산이 훨씬 간편
  → 모든 삼각함수 계산이 복소지수의 산술적인 연산으로 가능
- 정현파 신호를 분석하고 취급하는데, 복소지수 신호를 이용하면 더욱 간단함

복소수 표현

[한걸음 더] 복소지수 신호 구하기

한걸음 더

복소지수 신호 $z(t) = 5e^{j\pi/3}e^{j10\pi}$ 에 대해 허수부와 실수부 신호를 구하면?

허수부 신호	$s(t) = \mathrm{Im}\{z(t)\}$
실수부 신호	$r(t) = \mathrm{Re}\{z(t)\}$

전문가 해설을 통해
풀이를 확인해보세요.

[과제해설]

1) 복소지수 신호의 허수부 신호 $s(t) = Im\{z(t)\}$

$$s(t) = Im\{z(t)\} = Im\{5e^{j\pi/3}e^{j10\pi t}\}$$
$$= 5Im\{e^{j(10\pi t+\pi/3)}\} = 5Im\{cos(10\pi t + \pi/3) + jsin(10\pi t + \pi/3)\}$$
$$= 5sin(10\pi t + \pi/3)$$

2) 복소지수 신호의 실수부 신호 $r(t) = Re\{z(t)\}$

$$r(t) = Re\{z(t)\} = Re\{5e^{j\pi/3}e^{j10\pi t}\}$$
$$= 5Re\{e^{j(10\pi t+\pi/3)}\} = 5Re\{cos(10\pi t + \pi/3) + jsin(10\pi t + \pi/3)\}$$
$$= 5cos(10\pi t + \pi/3)$$

핵심정리

복소수 표현

- 복소수는 실수와 허수의 조합으로 이루어진 수이며, 직교좌표계와 극좌표계 두 형식으로 표현할 수 있음

$$z = x + jy \quad or \quad z = re^{j\theta}$$

오일러 공식

- 복소지수 함수를 직교좌표형식의 복소수로 변환하는 오일러 공식은 다음과 같음

$$re^{j\theta} = r\cos(\theta) + jr\sin(\theta)$$

복소지수 신호

- 복소지수 함수로 표현되는 복소지수 신호의 실수부는 실수 코사인 신호이고, 허수부는 실수 사인 신호임

$$z(t) = Ae^{j(\omega_0 t + \phi)} = A\cos(\omega_0 t + \phi) + jA\sin(\omega_0 t + \phi)$$

- 복소지수 신호는 정현파 신호(실수 코사인 신호 또는 사인신호)를 표현하는 또 하나의 방법임