디지털신호처리

강의노트

이산 시간 퓨리에 급수

12주차 1차시

학습내용

❖ 이산 정현파 신호

❖ 이산 시간 퓨리에 급수

학습목표

❖ 이산 정현파 신호의 정의와 특징에 대해 설명할 수 있다.

❖ 이산 시간 퓨리에 급수 및 변환의 필요성에 대해 이해하고 이산 시간 퓨리에 분석식과 퓨리에 합성식의 의미를 설명할 수 있다.

이산 정현파 신호

1. 이산 정현파 신호의 정의

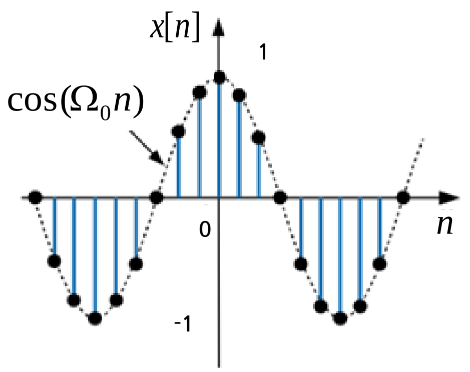
1) 이산 복소지수 신호

$x[n]$	$e^{j\Omega n} = \cos(\Omega n) + j\sin(\Omega n)$

- ω : 연속 신호 각주파수
- Ω : 이산 신호 각주파수

2) 이산 정현파 신호

- 이산 복소지수 신호로부터 실수부나 허수부를 취하여 표현할 수 있음



$$x[n] = Re\{e^{j\Omega n}\} = \cos(\Omega n)$$

$$x[n] = Im\{e^{j\Omega n}\} = \sin(\Omega n)$$

이산 정현파 신호

2. 이산 정현파 신호의 특징

- 연속 신호의 정현파 신호는 항상 주기 신호, 이산 정현파 신호는 반드시 그렇지는 않음
- 복소지수 신호 $x[n]$이 주기 신호(주기가 N)가 되려면 다음의 조건을 반드시 만족시켜야 함

$x[n] = e^{j\Omega n}$ $\qquad$ $x[n] = x[n+N]$

$x[n+N] = e^{j\Omega(n+N)} = e^{j\Omega n}e^{j\Omega N}$

$x[n] = x[n+N]$ 을 만족 시키기 위해서 $e^{j\Omega N} = 1$

$e^{j\Omega N} = 1$ 이 성립하려면 ΩN 이 2π의 정수배가 되어야 함

- 즉, 이산 정현파 신호가 주기 신호가 되려면 디지털 주파수가 유리수여야 함

각 주파수를 2π로 나눈 값

$$\frac{\Omega}{2\pi} = F = \frac{k}{N}$$

k, N: 정수, F: 디지털 주파수

- 주기 N 은 k=1인 경우에 대한 이산 시간

$$N = \frac{1}{F}$$

이산 정현파 신호

3. 이산 정현파 신호의 주기성

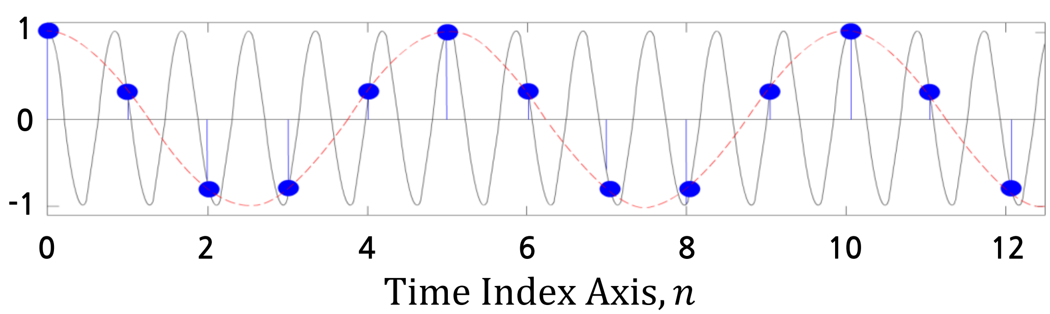
1) 정의

- **2π**의 정수배만큼 떨어진 주파수를 갖는 이산 정현파 신호들은 서로 구분되지 않음
  ⇨ 이산 신호의 모호성과 같은 원리

$$e^{j(\Omega+2\pi k)n} = e^{j\Omega n}e^{j2\pi kn} = e^{j\Omega n}$$

2) [예] 실제 신호

동일한 샘플 값을 가진 두 개의 서로 다른 주파수의 연속 코사인 함수

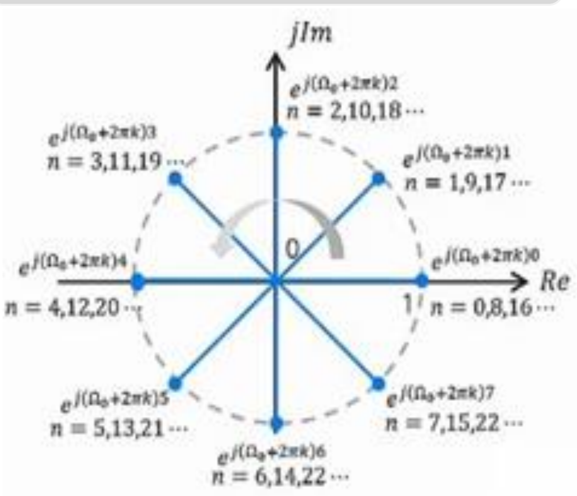


$x_1[n] = \cos(0.4\pi n)$ $\qquad$ $x_2[n] = \cos(2.4\pi n)$

n이 정수일 경우, $\cos(0.4\pi n) = \cos(2.4\pi n)$

3) [예] $x[n]$=$x[n$+8]인 이산 복소지수 신호의 주기성

$$e^{j(\Omega+2\pi k)n} = e^{j\Omega n}e^{j2\pi kn} = e^{j\Omega n}$$



$F = \frac{k}{N}$ $\qquad$ 기본 디지털주파수: $F_0 = \frac{1}{N} = \frac{1}{8}$

- n이 커짐에 따라 복소평면을 반시계 방향으로 돌면서 한 번에 위상이 $\Omega_0 = \frac{2\pi}{8}$ 씩 자리이동을 함

- n이 8번 증가하면 한 바퀴 돌아서 정확히 회전 직전의 원래 위치로 돌아오게 됨
  ⇨ 주기가 $N = 8$로 동일한 패턴의 이산 신호가 반복됨

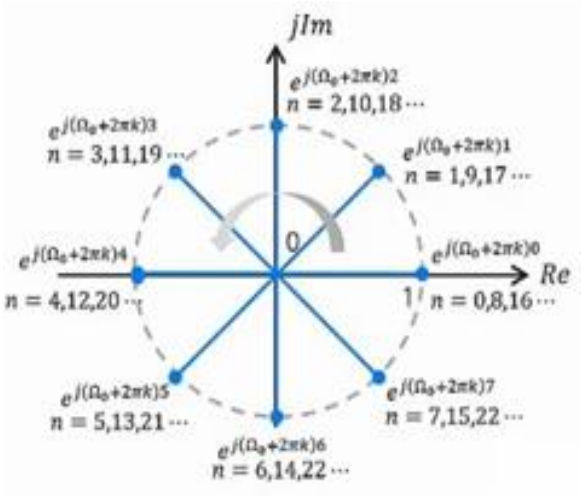
이산 정현파 신호

3. 이산 정현파 신호의 주기성

3) [예] $x[n]=x[n+8]$인 이산 복소지수 신호의 주기성

$$e^{j(\Omega+2\pi k)n}=e^{j\Omega n}e^{j2\pi kn}=e^{j\Omega n}$$

$$\Omega_0=\frac{2\pi}{8}$$



- $e^{j\Omega_0 n}$ 와 $e^{j(\Omega_0+2\pi k)n}$ 인 두 복소지수 신호는 n이 증가함에 따라서 복소평면의 단위원을 k 바퀴만큼 회전된 완전히 같은 위치의 신호임
- 단위원을 한 바퀴 도는 데 필요한 주파수 범위만 고려하면 모든 이산 정현파 신호를 빠짐없이 표현할 수 있음

모든 이산 정현파의 주파수 범위
$-\pi\le\Omega\le\pi\,(-0.5\le F\le0.5)$

이산 정현파 신호

3. 이산 정현파 신호의 주기성

예제 31-01

이산 정현파 신호가 가질 수 있는 최대 각주파수를 개념적으로 계산해 보자.

[예제풀이]

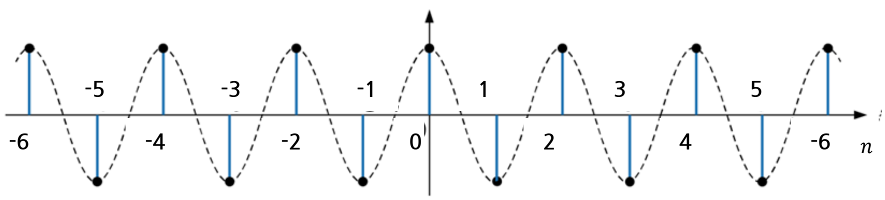
- 주파수는 신호의 주기에 반비례하므로 주파수가 높으려면 주기가 짧아야 함

주기 $N = 1$인 경우

이산 신호 값이 모든 시간 변수 n 에 대해 같게 되며, 주파수는 0으로 최저인 직류신호(DC)가 됨

주기 $N = 2$인 경우

다음 그림과 같이 n 의 증가에 따라 최대값과 최소값이 번갈아가며 나타나는 형태의 신호로.
이산 정현파들 중에 주기가 가장 짧게 되므로 주파수가 제일 높음



$$\Omega_0 = \frac{2\pi}{N} = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

모든 이산 정현파는 $-\pi \leq \Omega \leq \pi$ 에서만 정의해도
최저 주파수부터 최고 주파수까지 모두 나타낼 수 있다.

이산 정현파 신호

3. 이산 정현파 신호의 주기성

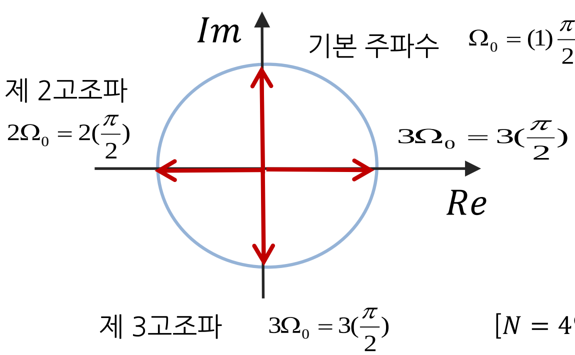
예제 31-02

다음과 같은 이산 주기 신호에 대한 주기(N)을 구해 보자.

$$x[n]=1+2\cos\frac{\pi}{2}n$$

[예제풀이]

- $\boldsymbol{x[n]}$신호는 두 개의 신호가 합성된 것
- 먼저 1은 DC 값 즉 주파수가 0인 신호이고, 코사인신호의 합으로 구성된 신호로 코사인 신호의 주기가 $x[n]$ 신호의 주기가 됨
- 코사인 신호의 주파수 $\Omega_0 = \frac{\pi}{2}\ rad/sec$ 디지털 주파수 $F_0 = \frac{\Omega_0}{2\pi} = \frac{1}{4} Hz$
  주기 N=4



[N = 4인 이산 정현파 신호에 대한 복소평면]

이산 시간 퓨리에 급수 (DTFS: Discrete Time Fourier Series)

1. 이산 시간 퓨리에 급수의 개요

1) 이산 퓨리에 변환 및 급수의 필요성

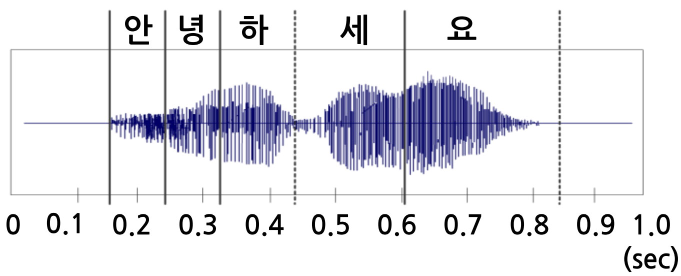
- 디지털신호처리 알고리즘과 시스템의 설계는 주파수 영역에서의 특성을 정의하는 것부터 시작됨
  [예] 저주파통과필터(LPF), 고주파 통과필터(HPF), 대역저지필터(BSF)등은 입력신호의 주파수 범위를 넓히거나 좁힐 것을 결정

- 컴퓨터는 디지털 데이터만 처리, 우리가 다루는 대부분의 신호와 스펙트럼은 연속함수임
  ⇨ 컴퓨터로 계산할 수 있는 이산 신호와 이산 스펙트럼으로 변환을 위해 새로운 종류의 퓨리에 급수 및 변환이 필요

연속 신호 $x(t)$ 퓨리에 변환	$X(f)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt$

?

다음과 같은 사람의 음성신호
즉, 연속 신호 $x(t)$에 대한 퓨리에 변환은?
음성 신호 $x(t)$는 수학적 표현은?



⇨ 음성 신호 $x(t)$를 수학적인 수식으로 표현할 수 없고,
연속 신호 $x(t)$에 대한 퓨리에 변환식으로 주파수 스펙트럼을 계산할 수 없음

따라서, 디지털 컴퓨터를 통한 이산 퓨리에 급수 및 변환 필요

연속 신호 → (샘플링) → 이산 신호 → (?) → 이산 신호 주파수 스펙트럼

연속 시간 영역 | 이산 시간 영역 | 이산 신호의 주파수 영역

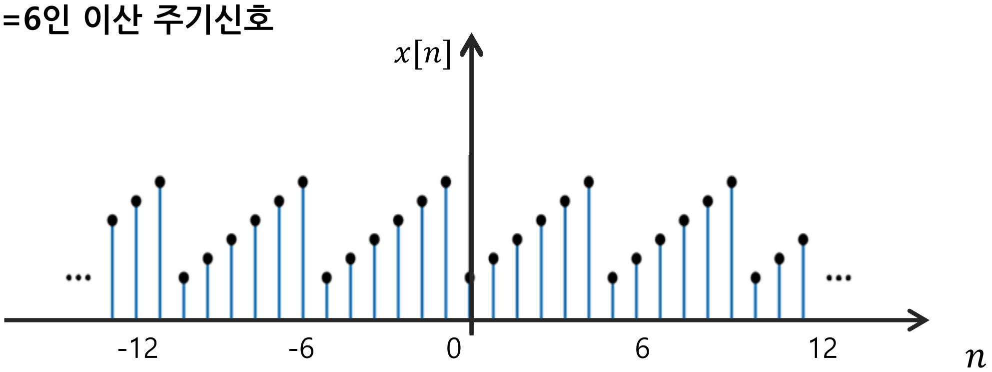
- 시간영역과 마찬가지로 주파수 영역의 연속적인 스펙트럼도 등간격으로 샘플링한다면, 신호와 스펙트럼 모두 이산데이터가 되어 컴퓨터로 쉽게 처리할 수 있음
- 이산 시간 퓨리에 급수 및 변환은 이산 신호의 주파수 영역 해석을 위한 이론적 토대가 됨

이산 시간 퓨리에 급수 (DTFS: Discrete Time Fourier Series)

1. 이산 시간 퓨리에 급수의 개요

2) 개요

- 이산 주기신호 $x[n]=x[n+N]$
- 주기 N인 신호의 한 주기 구간은 $n=[0\ N-1]$
  [예] N=6인 이산 주기신호



3) 이산 시간 퓨리에 급수

- 주기적인 이산 신호는 이산 퓨리에 급수로 표현가능하며 주기적인 아날로그 신호와 같이 선 스펙트럼을 가짐
- 임의의 주기적인 이산 신호의 선 스펙트럼 계수($X[k]$)은 이 이산 신호에 포함된 다양한 주파수 성분을 나타냄

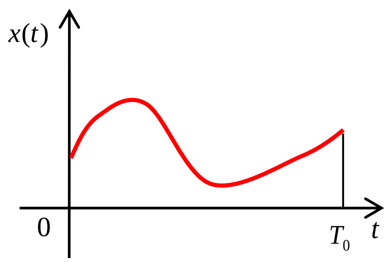
이산 퓨리에 급수의 분석식	$X[k]=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x[n]e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$

※ k는 고조파, k = 1는 기본주파수, k = 2는 제2고조파를 의미함
N은 이산 시간 신호의 한 주기내에 포함된 샘플의 수를 의미

이산 주기

이산 시간 퓨리에 급수 (DTFS: Discrete Time Fourier Series)

2. 이산 시간 퓨리에 급수의 유도

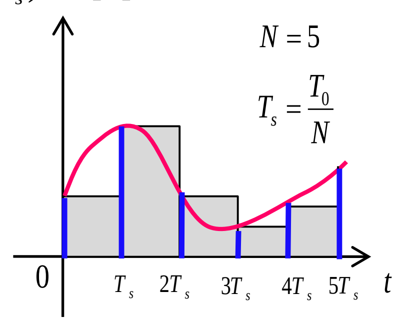


(a) 임의의 연속 신호 $x(t)$

$$a_k = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)e^{-j\omega_0 kt}dt$$

근사화 $t = nT_s$

$x(nT_s) = x[n]$



(b) 일련의 직각 펄스들을 사용한 적분 근사화

$$a_k \approx \frac{1}{T_0}\sum_{n=0}^{N-1} x(nT_s)e^{-jk\omega_0 nT_s}\cdot T_s$$

$$\approx \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(nT_s)e^{-jk\omega_0 nT_s}$$

$$T_s = \frac{T_0}{N}$$

$$\approx \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(nT_s)e^{-jk\frac{2\pi}{T_0}n\frac{T_0}{N}}$$

$$T_s = \frac{T_0}{N},\ \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

$$\approx \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(nT_s)e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} = X[k]$$

$$X[k] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$$

- 퓨리에 계수 $X[k]$, k=0,1, ..., $N-1$은 주파수 영역에서의 $x[n]$에 대한 표현임
- 연속 신호 퓨리에 급수와 같이 **주파수 성분과 결합된 진폭과 위상정보를** 나타냄

$$s_k[n] = e^{j2\pi kn/N} = e^{j\Omega_k n} \quad ※\Omega_k = 2\pi k/N$$

- 복소지수 함수 $S_k[n]$은 주기 N을 갖는 주기신호로 $S_k[n] = S_k[n+N]$임
- 마찬가지로, 이산 퓨리에 계수 $X[k]$ 또한 다음과 같이 **주기성을 가짐**

$$X[k+N] = X[k]$$

$$X[k+N] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j2\pi(k+N)n/N} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j2\pi kn/N} = X[k])$$

$$(\because e^{-j2\pi kNn/N} = e^{-j2\pi kn} = 1) \quad k, n\text{: 정수}$$

이산 시간 퓨리에 급수 (DTFS: Discrete Time Fourier Series)

2. 이산 시간 퓨리에 급수의 유도

$$X[k] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$$

$$X[k+N] = X[k]$$

- 이산 퓨리에 계수 $X[k]$는 기본 주기 N을 갖는 주기수열이고, 신호 주기 N을 가진 주기 신호 $x[n]$의 스펙트럼은 주기 N을 가진 주기 수열임
- N개의 연속하는 신호 샘플과 그 신호에 대한 N 개의 주파수 스펙트럼은 시간 영역과 주파수 영역에서 신호에 대한 완벽한 묘사를 제공함
- 만약 $x[n]$이 실함수인 경우에는 스펙트럼이 대칭이기 때문에 $N/2$개의 주파수로도 표현이 가능함
- 이산 신호의 주파수 영역에서 관심 구간이 $0 \le k \le N-1$ 일 경우, 주파수 범위는 $0 \le \Omega_k = 2\pi k/N < 2\pi$
- 주파수 범위가 $-\pi \le \Omega_k = 2\pi k/N < \pi$ 인 경우, 관심 구간은 $-N/2 < k \le N/2$
- N은 되도록이면 짝수로 설정하는 것이 계산에 편리함
- 이산 신호의 샘플링 주파수가 F_s일 경우, 범위 $0 \le k \le N-1$ 은 주파수 범위 $0 \le F < F_s$ 에 해당함

3. 이산 퓨리에 급수의 합성식

1) 합성식

이산 퓨리에 급수의 합성식	$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j2\pi kn/N}$

- 주기 N인 이산 주기 신호 $x[n]$은 N개의 고조파 관계를 갖는 복소지수 함수의 합으로 표현 가능함 $e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$, $k = 0, 1, \Lambda, N-1$
- 기본 주기 N을 갖는 이산 시간 신호는 $\Omega = 2\pi/N$ 라디안 또는 $F = 1/N$ 사이클씩 떨어져 있는 주파수 성분들로 구성됨

이산 시간 퓨리에 급수 (DTFS: Discrete Time Fourier Series)

3. 이산 퓨리에 급수의 합성식

예제 31-01

다음 이산 신호에 대한 주기성과 스펙트럼을 구해 보자.

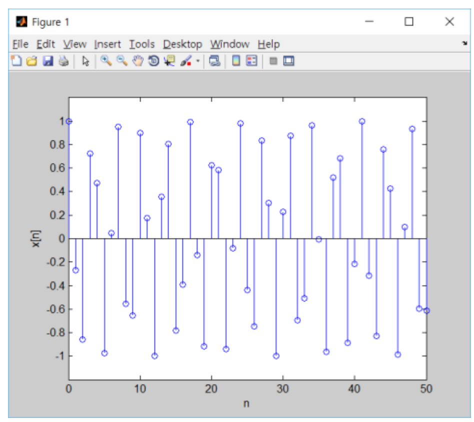
(a) $x[n] = \cos\sqrt{2}\pi n$

(b) $x[n] = \cos(\pi n/3)$

(c) $x[n]$은 주기 $N = 4$로서 주기적이고, $x[n] = \{\underset{\uparrow}{1},1,0,0\}$

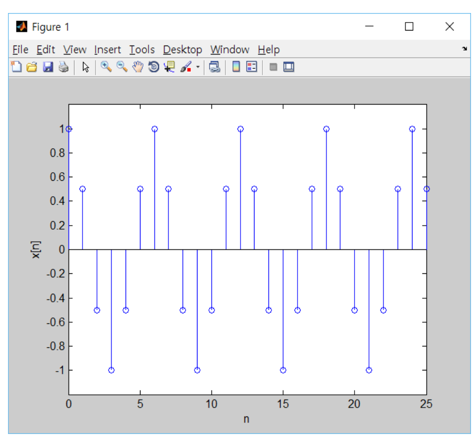
[예제풀이]

(a) $x[n] = \cos\sqrt{2}\pi n$



- 이산 신호 $x[n]$의 주파수 $\Omega_0 = \sqrt{2}\pi$ radian
디지털 주파수 $F_0 = 1/\sqrt{2}$ 로 F_0 가 유리수가 아님
- 따라서, 신호는 주기적이지 않으므로, 이 신호는
이산 퓨리에 급수로 전개될 수 없음
- 하지만 이 이산 신호는 스펙트럼을 가지고 있고,
그 스펙트럼은 $\Omega = \Omega_0 = \sqrt{2}\pi$ 에서의 단일 주파수
성분으로 구성되어 있음

(b) $x[n] = \cos(\pi n/3)$



- 이산 신호 $x[n]$의 주파수 $\Omega_0 = \pi/3$ radian
디지털 주파수 $F_0 = 1/6$ 로 F_0 가 유리함수임
- 따라서, 신호는 주기적임(기본 주기 N=6)
- 이산 퓨리에 급수 분석식으로부터 퓨리에 급수
계수 $X[k]$를 얻을 수 있음

$$X[k] = \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{5} x[n]e^{-jk\frac{2\pi}{6}n}, \quad k = 0,1,\Lambda,5$$

- 또한, 특별히 $x[n]$ 신호가 이산 정현파 신호이므로
오일러 공식으로 표현 가능함

$$x[n] = \cos\frac{2\pi n}{6} = \frac{1}{2}e^{j2\pi n/6} + \frac{1}{2}e^{-j2\pi n/6}$$

이산 시간 퓨리에 급수 (DTFS: Discrete Time Fourier Series)

3. 이산 퓨리에 급수의 합성식

[예제풀이] (계속)

(b) $x[n] = \cos(\pi n / 3)$

$$X[k] = \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{5} x[n] e^{-jk\frac{2\pi}{6}n}, \quad k = 0,1,\Lambda ,5$$

$$x[n] = \cos\frac{2\pi n}{6} = \frac{1}{2}e^{j2\pi n/6} + \frac{1}{2}e^{-j2\pi n/6} = \sum_{k=0}^{5} X[k] e^{jk\frac{2\pi}{6}n}$$

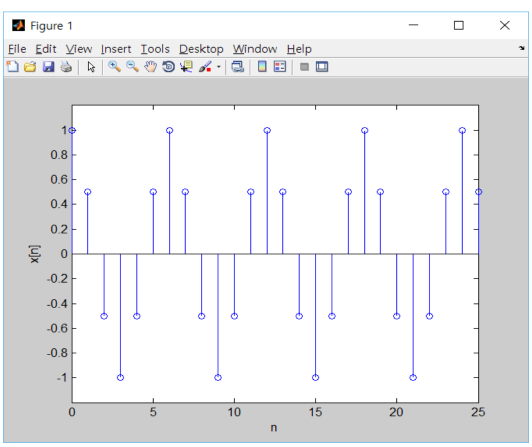
- $x[n]$에 대한 복소지수 함수 표현은 그 자체가 바로 퓨리에 급수로 표현된 것이고,

$$\frac{1}{2}e^{-j2\pi n/6} = X[-1]e^{j2\pi n(-1)/6} = X[-1]e^{j2\pi n(5-6)/6} = X[5]e^{j2\pi n(5)/6}$$

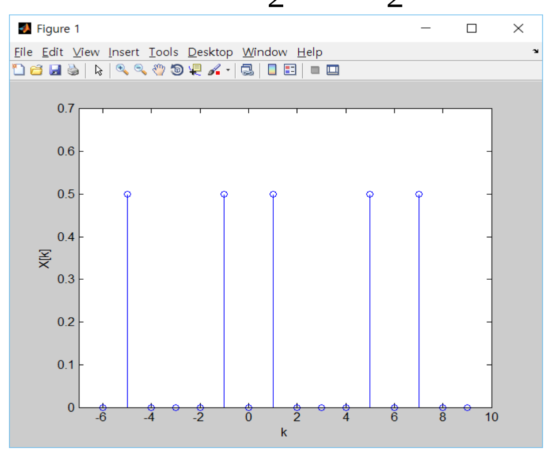
$$(\Theta\ X[-1] = X[5], e^{j2\pi n(-6)/6} = 1)$$

- $X[1]$= ½ , $X[5]$= ½ 다른 퓨리에 계수들은 $X[0]$=$X[2]$=$X[3]$=$X[4]$=0임

$$x[n] = \cos(\pi n / 3) \qquad\qquad X[k] = \{0, \frac{1}{2}, 0, 0, 0, \frac{1}{2}\}$$



시간 영역 $x[n]$



주파수영역 $X[k]$

이산 시간 퓨리에 급수 (DTFS: Discrete Time Fourier Series)

3. 이산 퓨리에 급수의 합성식

[예제풀이] (계속)

(c) $x[n]$은 주기 $N = 4$로서 주기신호이고, $x[n] = \{\mathbf{1}, 1, 0, 0\}$

- 스펙트럼 $X[k]$는 다음과 같이 계산할 수 있음

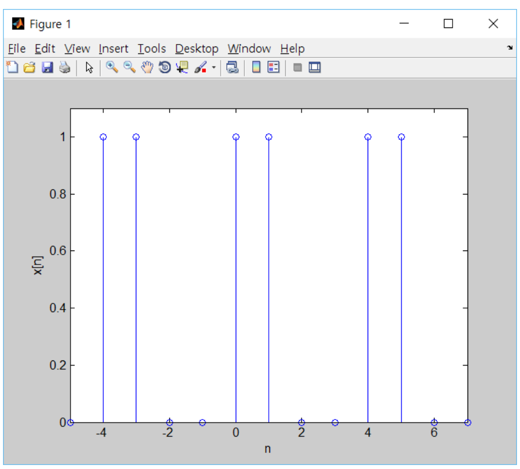
$$X[k] = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{3} x[n] e^{-jk\frac{2\pi}{4}n} = \frac{1}{4}(1 + e^{-j\pi k/2}), \quad k = 0,1,2,3$$

- k=0,1,2,3에 대하여 다음과 같은 결과를 얻을 수 있음

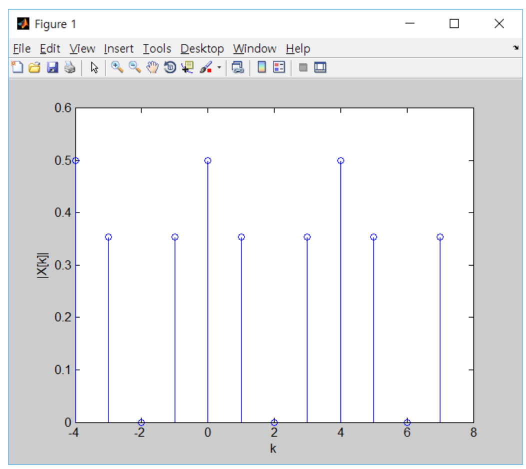
$$X[0] = \frac{1}{4}(1 + e^{-j\pi(0)/2}) = \frac{1}{2} \qquad X[1] = \frac{1}{4}(1 + e^{-j\pi(1)/2}) = \frac{1}{4}(1 - j)$$

$$X[2] = \frac{1}{4}(1 + e^{-j\pi(2)/2}) = \frac{1}{4}(1 - 1) = 0 \qquad X[3] = \frac{1}{4}(1 + e^{-j\pi(3)/2}) = \frac{1}{4}(1 + j)$$

- 주파수 스펙트럼에 대한 진폭 스펙트럼은 다음과 같음



시간영역 이산 주기신호 $x[n]$



주파수영역 퓨리에 계수 $X[k]$

핵심정리

이산 정현파 신호

- 이산 복소지수 신호 x[n]은 다음과 같음

$$x[n] = e^{j\Omega n} = \cos(\Omega n) + j\sin(\Omega n)$$

- 이산 복소지수 신호 또는 이산 정현파 신호 x[n]이 주기가 N인 주기 신호가 되려면 다음의 조건을 반드시 만족시켜야 함

$$\frac{\Omega}{2\pi} = F = \frac{k}{N}, \quad k, N \text{은 정수} \quad F: \text{디지털 주파수}$$

- 모든 이산 정현파의 주파수 범위 $-\pi \le \Omega \le \pi(-0.5 \le F \le 0.5)$

이산 시간 퓨리에 급수

- 대부분의 실제 연속 신호(예, 음성 신호)를 수학적인 수식으로 표현할 수 없고, 연속 신호에 대한 퓨리에 변환 수식을 통해 주파수 스펙트럼을 계산할 수 없기 때문에 디지털 컴퓨터를 통한 이산 퓨리에 급수/변환이 필요함
- 임의의 이산 주기 신호 $x[n]=x[n+N]$에 대한 이산 퓨리에 급수의 분석식

이산 퓨리에 급수의 분석식	$X[k] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$

- 이산 퓨리에 계수 $X[k]$는 주기성을 가짐 $X[k+N] = X[k]$
- 이산 퓨리에 급수의 스펙트럼 계수 X[k]로 부터 이산 신호 x[n]은 다음과 같은 합성식에 의하여 구할 수 있음

이산 퓨리에 급수의 합성식	$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} X[k]e^{j2\pi kn/N}$

- 기본 주기 N을 갖는 이산 시간 신호는 $\Omega = 2\pi / N$ 라디안 또는 $F = 1/N$ 사이클씩 떨어져 있는 주파수 성분들로 구성됨