디지털신호처리

강 의 노 트

이산 퓨리에 변환의 성질과 고속 퓨리에 변환(FFT)

학습내용

- ❖ 이산 퓨리에 변환(DFT)의 해상도
- ❖ 이산 퓨리에 변환(DFT)의 성질과 고속 퓨리에 변환(FFT)

학습목표

- ❖ 이산 퓨리에 변환(DTFT)의 해상도에 대해 설명할 수 있다.
- ❖ 이산 퓨리에 변환의 성질과 고속 퓨리에 변환에 대해 설명할 수 있다.

이산 퓨리에 변환(DFT)의 해상도

1. 이산 퓨리에 변환(DFT)의 해상도

1) 이산 퓨리에 변환과 해상도

- 이산 퓨리에 변환(DFT)은 신호의 전체 스펙트럼이 아닌 연속된 스펙트럼 $X(\Omega)$에서 샘플링된 이산 스펙트럼 $X(k)$을 얻는 것
- 스펙트럼 샘플의 간격이 너무 넓어서 실제 스펙트럼의 변화를 적절히 보여주지 못하는 문제가 발생할 수 있다.

  ⇨ 이산 퓨리에 변환의 해상도를 고려함

2) DFT에 의한 주파수 스펙트럼 해상도

$$\Delta\Omega = \frac{2\pi}{N} \qquad \text{또는} \qquad \Delta F = \frac{1}{N}$$

- DFT에 의한 주파수 스펙트럼 해상도는 $x[n]$의 샘플 수(N)에 의존
- 더 높은 주파수 해상도가 요구되면 더욱 많은 데이터 샘플을 사용해야 함

3) 연속 신호 관점

- 연속 신호(지속 시간)를 T_s간격으로 샘플링할 때 주파수 중첩을 피하기 위한 조건

$$f_s = \frac{1}{T_s} \geq 2 f_{\max}$$

- DFT에 의해 얻어진 샘플 스펙트럼의 샘플간 간격 (해상도- 연속신호 관점에서)

$$\Delta f \quad = \quad \frac{\text{한주기 구간에 해당하는 주파수}}{\text{샘플 개수}} \quad = \frac{f_s}{N}$$

이산 퓨리에 변환(DFT)의 해상도

2. 이산 퓨리에 변환(DFT)의 영 채우기(Zero Padding)

1) 영 채우기에 의한 해상도 증가

- 시간 영역에서의 N_1개의 유효 데이터이나, 주파수 영역에서 N_2 샘플이 요구될 경우
  ⇨ 만약 $N_1 < N_2$, 주파수 해상도 $\Delta\Omega=2\pi/ N_2$
  ⇨ 강제로 데이터 샘플 수를 증가시켜야 함
  → $N_2 - N_1$개의 0을 첨가
  (∵ 데이터 수는 증가,스펙트럼 형태 변화는 없도록)
- 영 채우기에 의한 해상도 증가는 스펙트럼 정확도를 증가시키지 않음
  ⇨ 관찰의 정확성은 신호의 유효 샘플 수 N_1을 더 늘려야 함
  ∵ 유효 샘플 수 N_1의 증가
  ⇨ 해상도 향상 & 주파수 중첩 감소

예제 35-01

다음과 같은 길이 L인 유한 구간 수열에 $N \geq L$인 경우 N-점 DFT를 결정해보고 $N = 50$인 경우와 $N = 100$인 경우의 DFT를 비교해 보자. (단, $L = 10$)

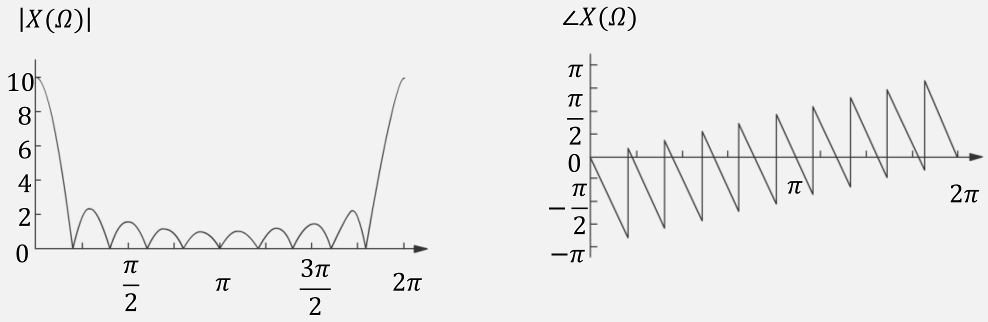
$$x[n] = \begin{cases} 1, 0 \leq n \leq L-1 \\ 0, L \leq n \leq N-1 \end{cases}$$

[예제풀이]

[신호 x[n] 대한 이산신호 퓨리에 변환(DTFT)]

$$X(\Omega) = \sum_{n=0}^{L-1} x[n]e^{-j\Omega n} = \sum_{n=0}^{L-1} e^{-j\Omega n} = \frac{1-e^{-j\Omega L}}{1-e^{-j\Omega}} = \frac{\sin(\Omega L/2)}{\sin(\Omega/2)} e^{-j\Omega(L-1)/2}$$

[$L = 10$인 경우 $X(\Omega)$ 의 크기와 위상 스펙트럼]



이산 퓨리에 변환(DFT)의 해상도

2. 이산 퓨리에 변환(DFT)의 영 채우기(Zero Padding)

[예제풀이] (계속)

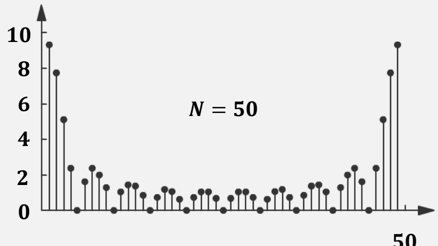
[$\boldsymbol{x}[\boldsymbol{n}]$의 N-점 DFT)]
N개의 등간격 주파수에서 단순히 $X(\Omega_k)$를 계산 한 것

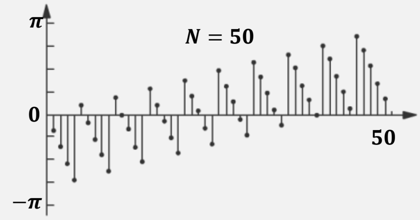
$$\Omega_k = \frac{2\pi}{N}k,\ k = 0, 1, \cdots, N-1$$

$$X(\Omega_k) = X(k) = \sum_{n=0}^{L-1} e^{-j(\frac{2\pi}{N})k} = \frac{1-e^{-j(\frac{2\pi}{N})kL}}{1-e^{-j(\frac{2\pi}{N})k}} = \frac{\sin(\pi kL/N)}{\sin(\pi k/N)} e^{-j\pi(L-1)/N}$$

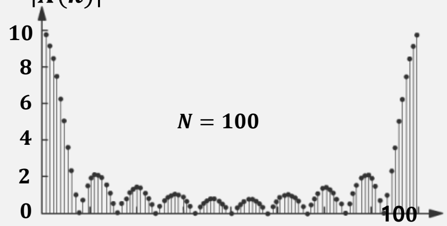
ⅰ) $N = 10\ (N = L)$ $\quad X(k) = \begin{cases} L, & k = 0 \\ 0, & k = 1, 2, \ldots, L-1 \end{cases}$

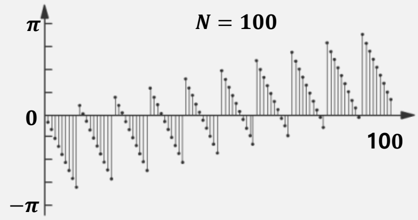
ⅱ) $N = 50$ $\quad |X(k)|$ $\quad \angle X(\Omega)$





ⅲ) $N = 100$ $\quad |\boldsymbol{X}(\boldsymbol{k})|$ $\quad \angle \boldsymbol{X}(\boldsymbol{\Omega})$





이산 퓨리에 변환(DFT)의 해상도

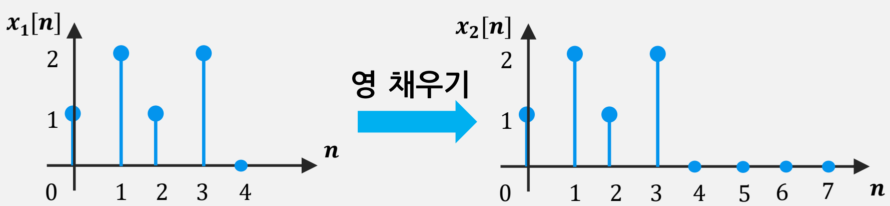
2. 이산 퓨리에 변환(DFT)의 영 채우기(Zero Padding)

[예제풀이] (계속)

- 주파수 영역에서 L-점 DFT가 신호 $x[n]$을 유일하게 표현하기에 충분하지만, $x[n]$의 자세한 스펙트럼 특성을 파악하기에는 충분하지 못함
- L-점 신호 $x[n]$에서 $N-L$개의 영을 첨가함으로써(Zero Padding), 신호의 크기를 L-점에서 N-점으로 확장하는 것으로 볼 수 있음
  이 때, N-점 DFT는 L-점 DFT보다 훨씬 자세한 스펙트럼 해상도를 제공함

예제 35-02

$x_1[n]$에 대해 네 개의 0을 추가하여 $N=8$일 때($x_2[n]$)의 DFT를 구한 후, $N=4$인 경우와 스펙트럼을 비교해 보자.



$$x_1[n] = \{x[0], x[1], x[2], x[3]\} = \{1, 2, 1, 2\}$$

$$x_2[n] = \begin{cases} x_1[n], & 0 \le n \le 3 \\ 0, & 4 \le n \le 7 \end{cases} = \{x[0], x[1], x[2], x[3], 0, 0, 0, 0\} = \{1, 2, 1, 2, 0, 0, 0, 0\}$$

[예제풀이]

- 영 채우기 된 신호 $x_2\ [n]$에 대한 DFT를 구하면

$$x_2[n] = \{1, 2, 1, 2, 0, 0, 0, 0\}$$

$$X_2[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x_2[n] e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} = \sum_{n=0}^{7} x_2[n] W_8^{kn}$$

$$W_N^{kn} = e^{-jk\frac{2\pi}{7}n} = W_8^{kn} = (e^{-j\frac{2\pi}{8}})^{kn} = ((\cos(-\frac{\pi}{4}) + j\sin(-\frac{\pi}{4}))^{kn} = (\frac{1}{\sqrt{2}} - j\frac{1}{\sqrt{2}})^{kn}$$

(계속)

이산 퓨리에 변환(DFT)의 해상도

2. 이산 퓨리에 변환(DFT)의 영 채우기(Zero Padding)

[예제풀이] (계속)

$$W_8^0 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - j\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^0 = 1 \qquad W_8^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} - j\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad W_8^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - j\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = -j$$

$$W_8^3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - j\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 = -\frac{1}{\sqrt{2}} - j\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad W_8^4 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - j\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 = -1$$

$$W_8^5 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - j\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^5 = -\frac{1}{\sqrt{2}} + j\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad W_8^6 = j$$

$$X_2[0] = \sum_{n=0}^{7} x_2[n]W_8^{(0)n} = x_2[0]W_8^0 + x_2[1]W_8^0 + x_2[2]W_8^0 + x_2[3]W_8^0$$
$$= (1)(1) + (2)(1) + (1)(1) + (2)(1) = 6$$

$$X_2[1] = \sum_{n=0}^{7} x_2[n]W_8^{(1)n} = x_2[0]W_8^0 + x_2[1]W_8^1 + x_2[2]W_8^2 + x_2[3]W_8^3$$
$$= (1)(1) + (2)\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - j\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + (1)(-j) + (2)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - j\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$
$$= 1 - j\frac{4+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$X_2[2] = \sum_{n=0}^{7} x_2[n]W_8^{(2)n} = x_2[0]W_8^0 + x_2[1]W_8^2 + x_2[2]W_8^4 + x_2[3]W_8^6$$
$$= (1)(1) + (2)(-j) + (1)(-1) + (2)(j) = 0$$

$$X_2[3] = \sum_{n=0}^{7} x_2[n]W_8^{(3)n} = x_2[0]W_8^0 + x_2[1]W_8^3 + x_2[2]W_8^6 + x_2[3]W_8^9$$
$$= (1)(1) + (2)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - j\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + (1)(j) + (2)\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - j\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$
$$= 1 - j\frac{4-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

이산 퓨리에 변환(DFT)의 해상도

2. 이산 퓨리에 변환(DFT)의 영 채우기(Zero Padding)

[예제풀이] (계속)

$$X_2[4] = \sum_{n=0}^{7} x_2[n]W_8^{(4)n} = x_2[0]W_8^0 + x_2[1]W_8^4 + x_2[2]W_8^0 + x_2[3]W_8^4$$
$$= (1)(1) + (2)(-1) + (1)(1) + (2)(-1) = -2$$

$$X_2[5] = \sum_{n=0}^{7} x_2[n]W_8^{(5)n} = x_2[0]W_8^0 + x_2[1]W_8^5 + x_2[2]W_8^2 + x_2[3]W_8^7$$
$$= (1)(1) + (2)(-\frac{1}{\sqrt{2}} + j\frac{1}{\sqrt{2}}) + (1)(-j) + (2)(\frac{1}{\sqrt{2}} + j\frac{1}{\sqrt{2}})$$
$$= 1 + j\frac{4-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$X_2[6] = \sum_{n=0}^{7} x_2[n]W_8^{(6)n} = x_2[0]W_8^0 + x_2[1]W_8^6 + x_2[2]W_8^4 + x_2[3]W_8^2$$
$$= (1)(1) + (2)(-j) + (1)(-1) + (2)(-j) = 0$$

$$X_2[7] = \sum_{n=0}^{7} x_2[n]W_8^{(7)n} = x_2[0]W_8^0 + x_2[1]W_8^7 + x_2[2]W_8^6 + x_2[3]W_8^5$$
$$= (1)(1) + (2)(\frac{1}{\sqrt{2}} + j\frac{1}{\sqrt{2}}) + (1)(j) + (2)(-\frac{1}{\sqrt{2}} + j\frac{1}{\sqrt{2}})$$
$$= 1 + j\frac{4+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore X_2[k] = \{\underset{\uparrow}{6}, 1 - j\frac{4+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}, 0, 1 - j\frac{4-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}, -2, 1 + j\frac{4-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}, 0, 1 + j\frac{4+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\}$$

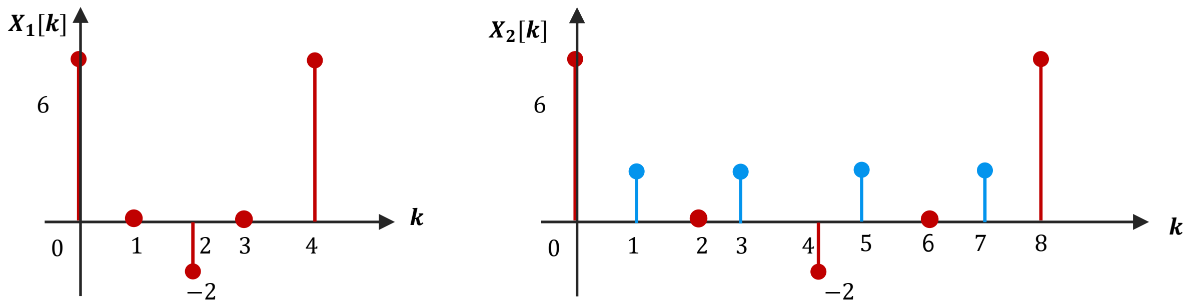
이산 퓨리에 변환(DFT)의 해상도

2. 이산 퓨리에 변환(DFT)의 영 채우기(Zero Padding)

[예제풀이] (계속)

$X_1[k] = \{6, 0, -2, 0\}$

$X_2[k] = \{6, 1-j\frac{4+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}, 0, 1-j\frac{4-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}, -2, 1+j\frac{4-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}, 0, 1+j\frac{4+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\}$



- 두 스펙트럼을 비교하면, 영 채우기 한 $X_2[k]$신호의 스펙트럼 1,3,5,7번째의 스펙트럼 샘플은 $X_2[0], X_2[2], X_2[4], X_2[6]$ $X_1[k]$ 의 스펙트럼 결과와 일치
- 해상도를 두 배로 높인 2,4,6,8번째의 스펙트럼 샘플 $X_2[1], X_2[3], X_2[5], X_2[7]$ 은 이전 스펙트럼에서 볼 수 없었던 새로운 스펙트럼 값들이 추가되어 이산 퓨리에 변환의 해상도가 증가됨

이산 퓨리에 변환(DFT)의 해상도

[한걸음 더] 이산 퓨리에 변환(DFT)의 해상도

한걸음 더

1초 구간의 아날로그 신호 x(t)에 대해 등간격으로 256개의 샘플을 취하여 DFT를 계산하였다. 이 때, DFT로 구한 스펙트럼에 대한 연속 신호 관점에서의 주파수 해상도는 얼마인가?

A. 1
B. 2

[예제풀이]

정답: A

$F_s = 256\ Hz$ 현재 이산신호의 샘플링 주파수

$f_{max} = 256\ Hz$ DFT로 구한 스펙트럼에서 나타나는 가장 높은 주파수는 이산 신호 스펙트럼의 한 주기에 해당하고, 이산 신호 스펙트럼의 한 주기는 연속 신호의 샘플링 주파수 해당

↓

DFT로 구한 스펙트럼의 주파수 해상도 (연속신호 관점)

$$\Delta f = \frac{f_s}{N} = \frac{256}{256} = 1\ Hz$$

이산 퓨리에 변환(DFT)의 성질과 고속 퓨리에변환(FFT)

1. 이산 퓨리에 변환(DFT)의 기본 성질

1) 6가지 기본 성질

이산 퓨리에 급수(DTFS), 이산 신호 퓨리에 변환(DTFT)의 성질과 매우 비슷함

① **주기성** $x[n]=x[n+N] \Leftrightarrow X[k]=X[k+N]$

② **선형성** $\alpha x[n]+\beta y[n] \Leftrightarrow \alpha X[k]+\beta Y[k]$

③ **대칭성** $X^*[k]=X[-k]$, $x[n]$은 실수

$$\begin{cases} RE\{X[k]\}=RE\{X[-k]\} \\ \mathrm{Im}\{X[k]\}=-\mathrm{Im}\{X[-k]\} \end{cases}$$ $x[n]$은 실수

$$\begin{cases} |X[k]|=|X[-k]| \\ \angle X[k]=-\angle X[k] \end{cases}$$ $x[n]$은 실수

④ **시간 이동** $x[n-n_0] \Leftrightarrow X[k]W_N^{kn_0}$

⑤ **시간 컨볼루션** $x[n]\otimes y[n] \Leftrightarrow X[k]Y[k]$

⑥ **주파수 컨볼루션** $x[n]y[n] \Leftrightarrow \dfrac{1}{n}X[k]\otimes Y[k]$

이산 퓨리에 변환(DFT)의 성질과 고속 퓨리에변환(FFT)

2. 이산 퓨리에 변환(DFT)에 기초한 선형 필터링

$x[n] \rightarrow \boxed{h[n]} \rightarrow y[n]$

(a) 임펄스 응답 표현

$X(\Omega) \rightarrow \boxed{H(\Omega)} \rightarrow Y(\Omega)$

(b) 주파수 응답 표현

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = x[n] * h[n] \Leftrightarrow Y(\Omega) = H(\Omega)X(\Omega)$$

- 출력 신호 $y[n]$은 주파수 응답 표현에서 스펙트럼을 역퓨리에 변환하면 얻을 수 있음
- 주파수 영역표현의 문제점: 계산하는데 있어서 $X(\Omega), H(\Omega), Y(\Omega)$ 가 연속변수 Ω의 함수인 것임
  ⇨ DFT와 IDFT를 이용하면 디지털 컴퓨터 계산에 매우 적합
- DFT에 기초한 주파수 영역 접근법은 시간 영역 컨볼루션 보다 계산에서 훨씬 효과적임
  ⇨ DFT 계산을 훨씬 효율적으로 계산할 수 있는 FFT(Fast Fourier Transform: 고속 퓨리에 변환) 알고리즘이 있기 때문

1) 선형 필터링 방법 I

$x[n] \rightarrow \boxed{h[n]} \rightarrow y[n]$

(a) 임펄스 응답 표현

$X(\Omega) \rightarrow \boxed{H(\Omega)} \rightarrow Y(\Omega)$

(b) 주파수 응답 표현

$\boldsymbol{x}[\boldsymbol{n}] = \mathbf{0}, \boldsymbol{n} < \mathbf{0}$ 그리고 $\boldsymbol{n} \geq \boldsymbol{L}$

$\boldsymbol{h}[\boldsymbol{n}] = \mathbf{0}, \boldsymbol{n} < \mathbf{0}$ 그리고 $\boldsymbol{n} \geq \boldsymbol{M}$, 여기서 $\boldsymbol{h}[\boldsymbol{n}]$은 $\boldsymbol{FIR}$ 필터의 임펄스 응답

- 시간 영역에서 출력 신호 $y[n]$은 입력 신호 $x[n]$과 임펄스 응답 $h[n]$과 선형 컨볼루션으로 표현
  ⇨$\boldsymbol{h}[\boldsymbol{n}]$과 $\boldsymbol{x}[\boldsymbol{n}]$은 유한 구간 신호이므로 그 컨볼루션 결과 $y[n]$ 역시 구간이 유한하고 구간은 $L+M-1$이 됨

이산 퓨리에 변환(DFT)의 성질과 고속 퓨리에변환(FFT)

2) 선형 필터링 방법 II

(a) 임펄스 응답 표현 (b) 주파수 응답 표현

- 주파수 영역 표현식은 $Y(\Omega)=X(\Omega)H(\Omega)$, 이산 주파수에서 스펙트럼 $Y(\Omega)$를 샘플링해서 유일하게 표현한다면 샘플수 N은 $L+M-1$이상이어야 함
- 주파수 영역에서 $\{y[n]\}$을 표현하기 위해 DFT의 크기는 $N \geq L+M-1$를 요구

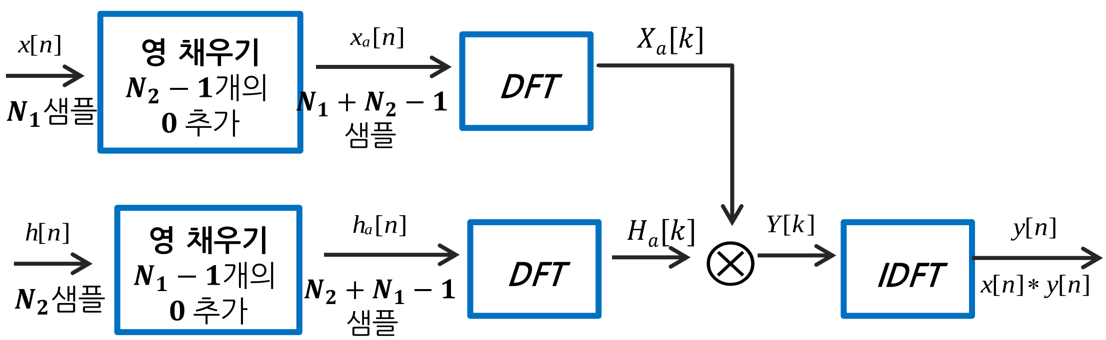
$$\begin{aligned} Y(k) &\equiv Y((\Omega)\,|_{\Omega=2\pi k/N},\ k=0,1,\cdots,N-1 \\ &= X(\Omega)H(\Omega)\,|_{\Omega=2\pi k/N},\ k=0,1,\cdots,N-1 \end{aligned}$$

$$Y(k)=X(k)H(k),\ k=0,1,\cdots,N-1$$

$$y[n]=IDFT\{Y(k)\}$$

※여기서, $X[k]$: 입력 신호 $x[n]$ N-점 DFT, $H[k]$: 임펄스 응답 $h[n]$ N-점 DFT,
$y[n]$: $Y[k]$를 N-점 DFT한 시간영역 출력 신호

3) DFT-IDFT에 기초한 선형 필터링 계산 전체 블록도



이산 퓨리에 변환(DFT)의 성질과 고속 퓨리에변환(FFT)

2. 이산 퓨리에 변환(DFT)에 기초한 선형 필터링

예제 35-03

DFT와 IDFT를 이용하여 다음 임펄스 응답 (FIR 필터)과 입력 신호 $x[n]$에 대하여 FIR 필터링 한 $y[n]$을 계산해 보고, 시간 영역에서 선형 컨볼루션으로 계산한 결과와 같은지를 확인해 보자.

$$x[n] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n] \qquad\qquad X(\Omega) \longrightarrow \boxed{H(\Omega)} \longrightarrow Y(\Omega)$$

(a) 임펄스 응답 표현 (b) 주파수 응답 표현

$$h[n]=\{1,2,3\} \qquad\qquad x[n]=\{1,2,2,1\}$$

[예제풀이]

- 입력 신호의 길이는 L=4이고, 임펄스 응답의 길이는 M=3
  이 두 신호의 선형 컨볼루션 길이는 $L+M-1=6$, DFT의 N은 적어도 6이상
  간단히 N=8인 8-점 DFT를 계산하면

$$x[n]=\{1,2,2,1\} \xrightarrow{DFT} X(k)=\sum_{n=0}^{7} x(n)e^{-j2\pi kn/8}$$

$$=1+2e^{-j\pi k/4}+2e^{-j\pi k/2}+e^{-j3\pi k/4}, k=0.1.\ldots,7$$

$$X[0]=6 \quad X[1]=\frac{2+\sqrt{2}}{2}-j(\frac{4+\sqrt[3]{2}}{2}) \quad X[2]=-1-j \quad X[3]=\frac{2-\sqrt{2}}{2}+j(\frac{4-\sqrt[3]{2}}{2})$$

$$X[4]=0 \quad X[5]=\frac{2-\sqrt{2}}{2}-j(\frac{4-\sqrt[3]{2}}{2}) \quad X[6]=-1+j \quad X[7]=\frac{2+\sqrt{2}}{2}+j(\frac{4+\sqrt[3]{2}}{2})$$

$$h[n]=\{1,2,3\} \xrightarrow{DFT} H[k]=\sum_{n=0}^{7} h(n)e^{-j2\pi kn/8}$$

$$=1+2e^{-j\pi k/4}+3e^{-j\pi k/2}$$

$$H[0]=6 \quad H[1]=1+\sqrt{2}-j(3+\sqrt{2}) \quad H[2]=-2-j2 \quad H[3]=1+\sqrt{2}-j(3-\sqrt{2})$$

$$H[4]=2 \quad H[5]=1-\sqrt{2}-j(3-\sqrt{2}) \quad H[6]=-2+j2 \quad H[7]=1+\sqrt{2}+j(3+\sqrt{2})$$

(계속)

이산 퓨리에 변환(DFT)의 성질과 고속 퓨리에변환(FFT)

2. 이산 퓨리에 변환(DFT)에 기초한 선형 필터링

[예제풀이] (계속)

$$Y(k) = X(k)H(k),\ k = 0,1,\cdots,N-1$$

$Y[0] = 36$ $\quad Y[1] = -14.07 - j17.48$ $\quad Y[2] = j4$ $\quad Y[3] = 0.07 + j0.515$

$Y[4] = 0$ $\quad Y[5] = 0.07 - j0.515$ $\quad Y[6] = -j4$ $\quad Y[7] = -14.07 + j17.48$

$$y[n] = IDFT\{Y(k)\} = \frac{1}{8}\sum_{k=0}^{7} Y(k)e^{j2\pi kn/8},\ n = 0,1,\cdots,7$$

$$y[n] = \{1, 4, 9, 11, 8, 3, 0, 0\}$$

- 시간 영역에서 에일리어싱은 DFT의 크기가 L+M-1보다 작을 때 발생할 수 있음

이산 퓨리에 변환(DFT)의 성질과 고속 퓨리에변환(FFT)

3. 고속 퓨리에 변환(FFT: Fast Fourier Transform)

1) DFT 계산: N-샘플 $x[n] \leftrightarrow \boldsymbol{X}[\boldsymbol{k}]$간의 대수 방정식 계산 문제

$$\begin{cases} DFT : X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn}, k = 0, \ldots, N-1 \\ IDFT : x[n] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{-kn}, k = 0, \ldots, N-1 \end{cases}$$

2) DFT 계산: 직접 계산시의 계산량(곱셈×과 덧셈+의 수)

$$X[k] = x[0]W_N^0 + x[1]W_N^k + x[2]W_N^{2k} + \cdots + x[N-1]W_N^{(N-1)k}$$

- 각 k당 N번의 복소수 곱셈과 $N-1$번의 복소수 덧셈
- 총 N^2번의 복소수 곱셈과 $N(N-1)$번의 복소수 덧셈
- N이 커지면 계산량이 늘어남

⇨ 효과적인 계산 방법이 요구됨

3) DFT 계산

- W_N^{kn}은 $\mathbf{0} \leq \boldsymbol{kn} \leq (\boldsymbol{N}-\mathbf{1})^2$의 항
  → 실제로 N개의 서로 다른 값만 존재
- W_N^{kn}의 성질을 이용하면 계산량을 줄일 수 있음

$$\begin{cases} \text{대칭성} \quad : W_N^{k(N-n)} = (W_N^{kn})^* \\ \text{주기성} \quad : W_N^{kn} = W_N^{k(n+N)} \end{cases}$$

⇨ Cooley & Tukey 고속 퓨리에 변환(FFT)

4) 역할

- DFT를 효과적으로 계산하기 위한 컴퓨터 처리 알고리즘
- 주어진 신호를 여러 개의 길이가 짧은 신호로 분할하여 분할된 신호들의 DFT를 구한 후 그 결과들을 적절하게 결합하여 원래 주어진 긴 신호의 DFT를 수행

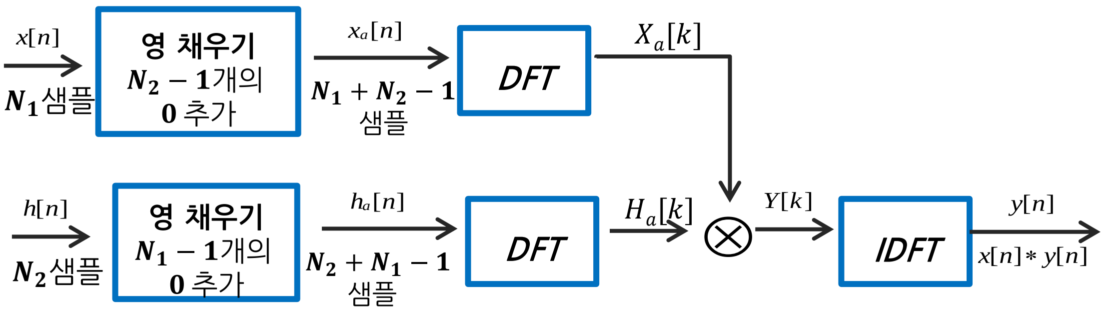
핵심정리

이산 퓨리에 변환(DFT)의 해상도

- 이산 퓨리에 변환(DFT): 신호의 전체 스펙트럼이 아니라 단지 연속된 스펙트럼에서 샘플링된 스펙트럼만을 얻는 것
- 더 높은 주파수 해상도가 요구되면 더 많은 데이터 샘플을 사용해야 함
- 영 채우기에 의한 해상도 증가는 스펙트럼 정확도를 증가시키지 않음
  → 관찰의 정확성은 신호의 유효 샘플 수 N^1 을 더 늘려야 함

이산 퓨리에 변환(DFT)의 성질과 고속 퓨리에 변환(FFT)

- DFT에 기초한 주파수 영역 접근법은 시간영역 컨볼루션 보다 계산에서 훨씬 효과적임
  → DFT 계산을 훨씬 효율적으로 계산할 수 있는 FFT(Fast Fourier Transform: 고속 퓨리에 변환) 알고리즘이 있기 때문임
- DFT-IDFT에 기초한 선형 컨볼루션 계산 전체 블록도



- 고속 퓨리에 변환(FFT): DFT를 효과적으로 계산하기 위한 알고리즘
- 주어진 신호를 여러 개의 길이가 짧은 신호로 분할하여 분할된 신호들의 DFT를 구한 후 그 결과들을 적절하게 결합하여 원래 주어진 신호의 DFT를 수행하는 알고리즘