

디지털신호처리



강 의 노 트

이산 시간 신호 및 시스템

학습내용

- ❖ 이산 시간 신호
- ❖ 이산 시간 시스템

학습목표

- ❖ 이산 신호의 정의와 표현에 대해 이해하고 간단한 이산 신호 변환을 할 수 있다.
- ❖ 이산 시간 시스템에 대하여 이해하고 설명할 수 있다.

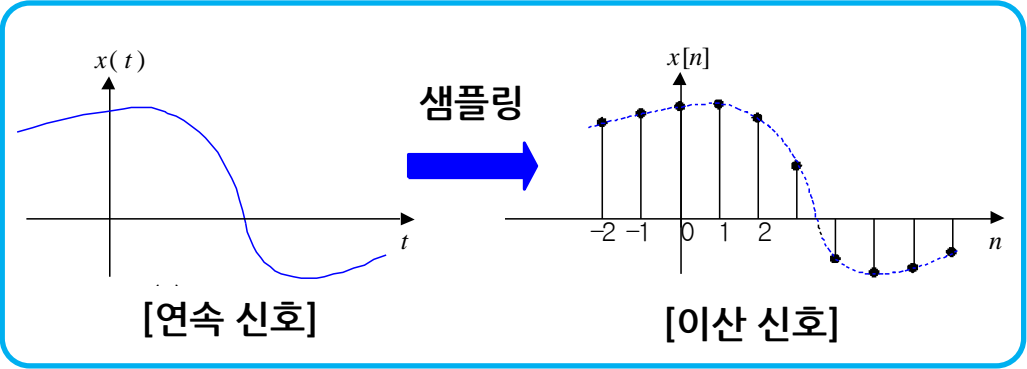


이산 시간 신호

1. 이산 시간 신호의 정의 및 표현

1) 정의

- 연속 신호: 모든 연속적인 시간 t 에 대하여 정의
- 이산 신호: 특정한 시각에서만 값을 갖는 신호
- 연속 신호 $x(t)$ 를 T_s 의 일정한 간격으로 샘플링하면 이산 신호 $x[n] = x(nT_s)$





이산 시간 신호

1. 이산 시간 신호의 정의 및 표현

2) 표현

함수

$$x[n] = \begin{cases} 1, & n = 1, 3 \\ 4, & n = 2 \\ 0, & \text{그 이외에} \end{cases}$$

표

<i>n</i>	---	-2	-1	0	1	2	3	4	5	---
<i>x[n]</i>	---	0	0	0	1	4	1	0	0	---

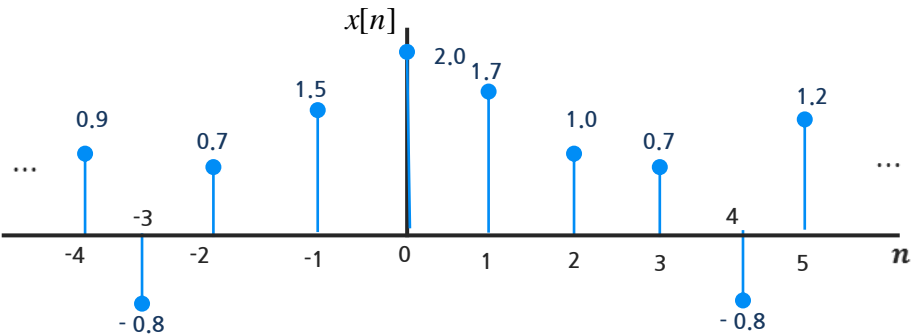
수열

심볼 ↑에 의해 표현되는 원점(*n*=0)을 갖는
무한 구간 신호 또는 수열 표현

$$x[n] = \{ \dots 0, 0, 1, 4, 1, 0, 0, \dots \}$$

↑

그래프



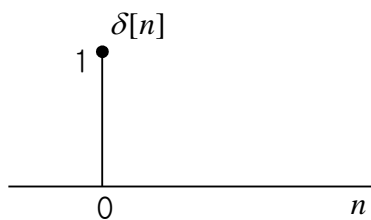


이산 시간 신호

2. 기본적인 이산 시간 신호

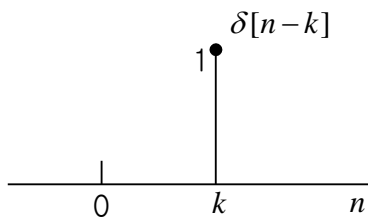
1) 단위 임펄스 신호(Unit Impulse Signal)

$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$



(a)

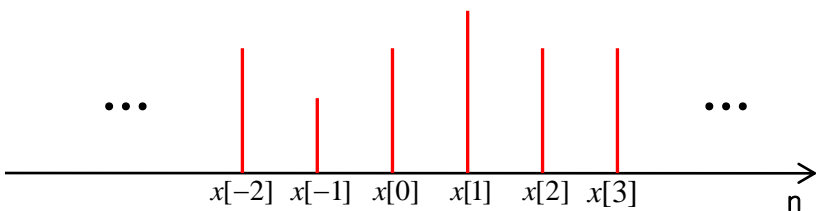
[단위 임펄스 함수]



(b)

[시간 이동된 단위 임펄스 함수]

- 임의의 이산 시간 신호 $x[n]$ 을 임펄스 신호로 표현



$$x[n] = \cdots + x[-1]\delta[n+1] + x[0]\delta[n] + x[1]\delta[n-1] + \cdots$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]$$

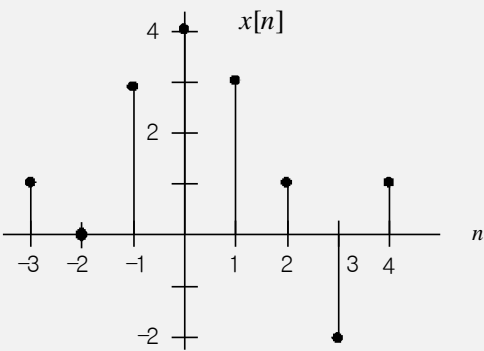


이산 시간 신호

2. 기본적인 이산 시간 신호

예제 23-01

단위 임펄스 신호를 이용하여 다음 그림과 같은 이산 신호 $x[n]$ 을 표현해 보자.



[예제풀이]

$$x[n] = \delta[n+3] + 3\delta[n+1] + 4\delta[n] + 3\delta[n-1] + \delta[n-2] - 2\delta[n-3] + \delta[n-4]$$

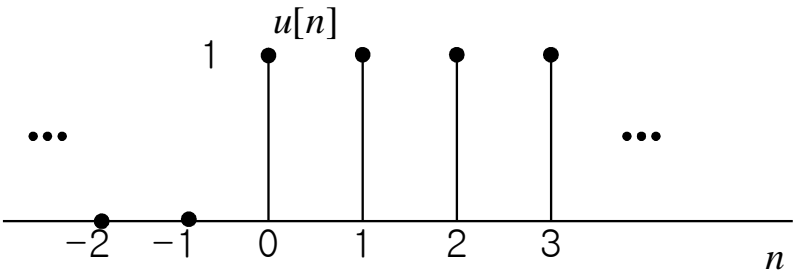


이산 시간 신호

2. 기본적인 이산 시간 신호

2) 이산 단위 계단 신호(Unit Step Signal)

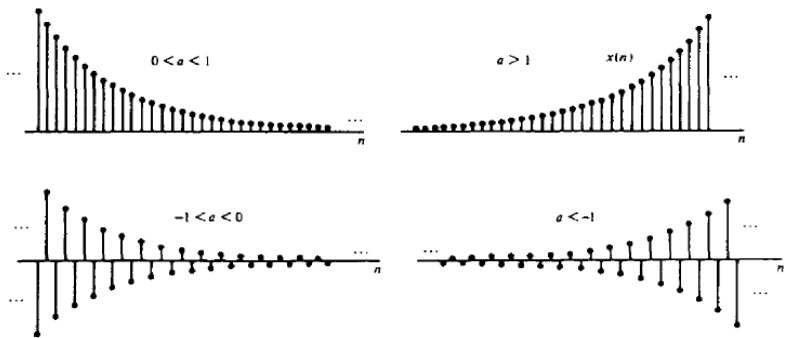
$$u[n] = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$



[단위 계단 신호]

3) 지수 신호

$$x[n] = a^n, \quad \text{모든 } n \text{에 대하여}$$





이산 시간 신호

3. 이산 시간 신호의 간단한 변환

1) 독립 변수(시간)의 변환

- 수열 $x[n]$ 의 독립 변수 n 을 $n-k$ (k 는 정수)로 변형함으로써 신호 $x[n]$ 은 시간축 상에서 이동
- $x[n]$ 과 $x[n-k]$ 의 관계
 - ⇒ $k = \text{양의 정수}$, 시간 이동은 k 만큼 오른쪽으로 신호의 지연(Delay)을 의미
 - ⇒ $k = \text{음의 정수}$, 시간 이동은 k 만큼 왼쪽으로 진전된 시간 이동을 의미

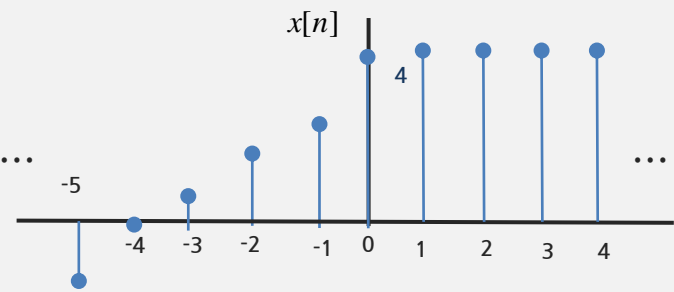


이산 시간 신호

3. 이산 시간 신호의 간단한 변환

예제 23-02

신호 $x[n]$ 이 다음 그림과 같을 때, 신호 $x[n-3]$ 과 $x[n+2]$ 에 대해 그래프로 표현해 보자.

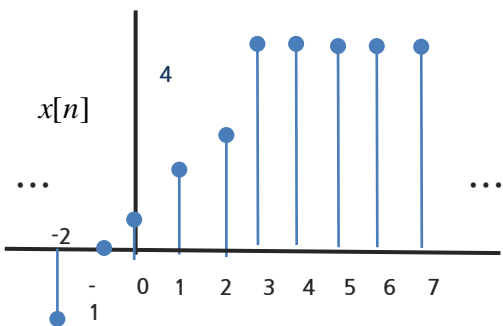


[예제풀이]

신호 $x[n-3]$

시간축 상에서 $x[n]$ 을 3개의 샘플 단위만큼 지연시키는 신호

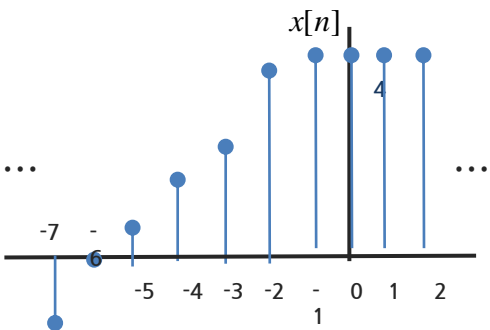
→ 오른쪽으로 시프트



신호 $x[n+2]$

시간축 상에서 2개의 샘플 단위만큼 $x[n]$ 을 진전시키는 신호

→ 왼쪽으로 시프트





이산 시간 신호

3. 이산 시간 신호의 간단한 변환

2) 시간 스케일링 변환

- 다운 샘플링(Down Sampling)과 업 샘플링(Up Sampling)
 - $y[n] = x[\mu n]$ 으로 변환되는 $y[n]$ 신호는 이산 신호 $x[n]$ 를 **시간축으로 다운 샘플링 또는 업 샘플링**하는 변환
- ※ 참고: μ 는 정수

3) [예] 다운 샘플링 된 영상 신호



원본 영상 신호
(640x480)

※ 이미지 출처: www.iclickart.com



2배 다운 샘플링 된
영상 신호
(320x240)



4배 다운 샘플링 된
영상 신호
(160x120)

4) [예] 업 샘플링 된 영상 신호



원본 영상 신호
(160x120)



2배 업 샘플링 된 영상 신호
(320x240)



4배 업 샘플링 된 영상 신호
(640x480)

※ 이미지 출처: www.iclickart.com

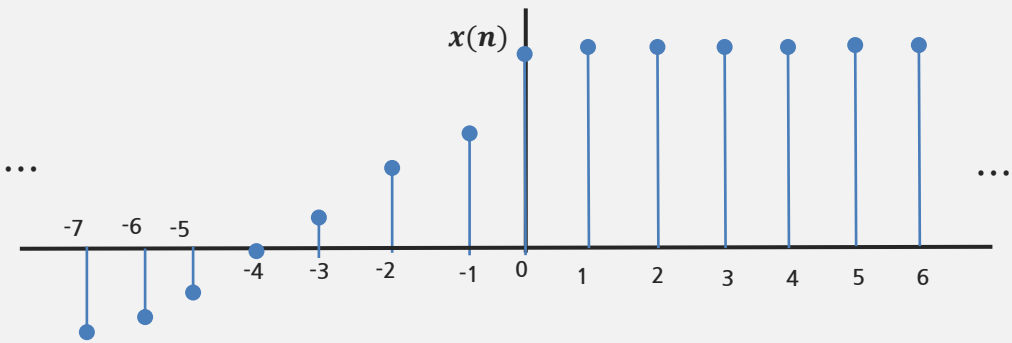


이산 시간 신호

3. 이산 시간 신호의 간단한 변환

예제 23-03

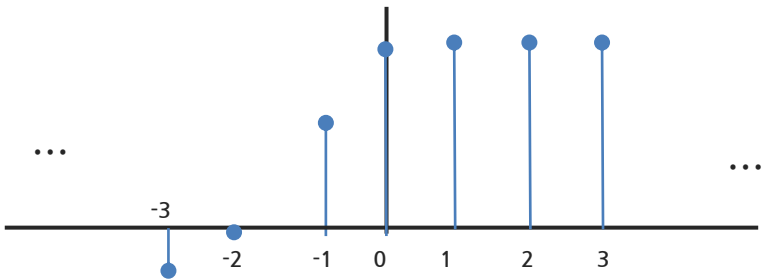
이산 신호 $x[n]$ 이 다음 그림과 같을 때, 이산 신호 $y[n] = x[2n]$ 을 그래프로 나타내어 보자. 이 때 신호 $y[n]$ 은 이산 신호 $x[n]$ 을 다운 샘플링한 연산인지 확인해 보자.



[예제풀이]

- 신호 $y[n]$ 은 $x[0]$ 에서 시작되는 $x[n]$ 으로 부터 서로 다른 샘플들을 취함으로써 얻어지는 신호로,

n	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
$x[n]$	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	4	4	4	4	4	4	0
$y[n] = x[2n]$	0	0	0	0	-2	0	2	4	4	4	4	0	0	0	0



- 신호 $x[n]$ 이 아날로그 신호 $x_a(t)$ 에 대한 샘플링을 통해 얻어진다면 $x[n] = x_a(nT)$ 가 성립, T 는 샘플링 간격, $y[n] = x[2n] = x_a(2nT)$
- 스케일링 연산은 $1/T$ 에서 $1/2T$ 로 샘플링율을 변화시키는 것과 동일 즉, 샘플링율은 두 배 감소
⇒ 다운샘플링 연산

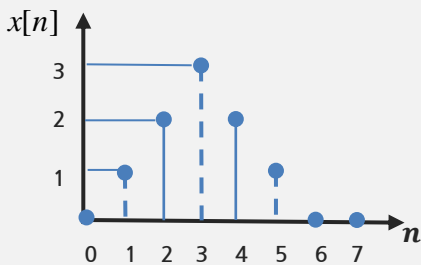


이산 시간 신호

3. 이산 시간 신호의 간단한 변환

예제 23-04

이산 신호의 업 샘플링은 원 신호 샘플 사이에 새로운 샘플을 생성하는 문제가 발생한다. 다음과 같은 이산 신호 $x[n]$ 에 대하여 업 샘플링한 $y[n]=x[n/2]$ 신호를 계산해 보자.



[예제풀이]

- 다음과 같은 이산신호 $x[n]$ 에 대하여 업 샘플링한 $y[n]=x[n/2]$ 신호를 계산해 보면

$n (y[n])$	0	1	2	3	4	5	6	7
$y[n]$	$x[0]=0$	$x[0.5]=?$	$x[1]=1$	$x[1.5]=?$	$x[2]=2$	$x[2.5]=?$	$x[3]=3$	$x[3.5]=?$
$n (y[n])$	8	9	10	11	12	13	14	
$y[n]$	$x[4]=2$	$x[4.5]=?$	$x[5]=1$	$x[5.5]=?$	$x[6]=0$	$x[6.5]=?$	$x[7]=0$	

- 이산신호의 업 샘플링의 경우 실제 샘플 된 값보다 더 많은 양의 신호를 필요함에 따라 정의되지 않은 $x[0.5], x[1.5], x[2.5], x[3.5], x[4.5] = ???$ 의 값을 어떻게 생성하느냐가 중요
- 실제 이산신호 $x[n]$ 의 값에서는 정의되지 않은 신호임
⇒ 이들의 값을 정할 수 있는 방법은? **보간법**
- 대표적으로 영차 보간법과 일차(선형) 보간법이 있음

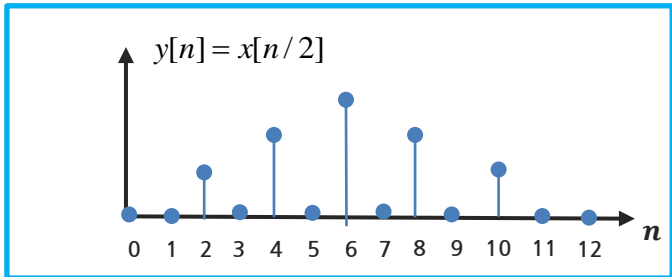
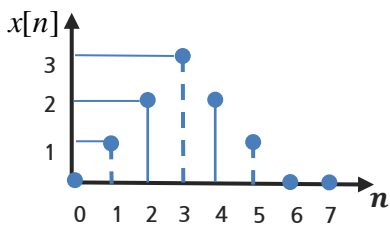


이산 시간 신호

3. 이산 시간 신호의 간단한 변환

[예제풀이]

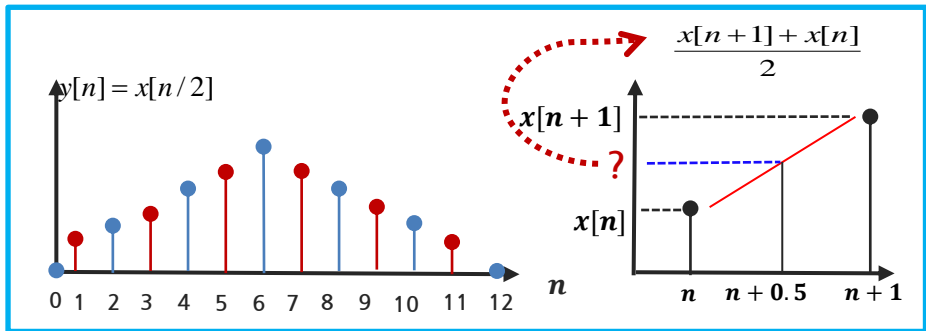
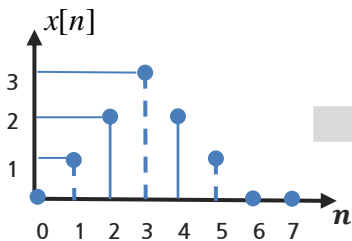
- 영차 보간법에 의한 업 샘플링



정의되지 않은 값에 0을 삽입하여 신호를 업 샘플링

$n (y \Rightarrow n)$	0	1	2	3	4	5	6	7
$y[n]$	$x[0]=0$	$x[0.5]=0$	$x[1]=1$	$x[1.5]=0$	$x[2]=2$	$x[2.5]=0$	$x[3]=3$	$x[3.5]=0$
$n (y \Rightarrow n)$	8	9	10	11	12	13	14	
$y[n]$	$x[4]=2$	$x[4.5]=0$	$x[5]=1$	$x[5.5]=0$	$x[6]=0$	$x[6.5]=0$	$x[7]=0$	

- 일차(선형) 보간법에 의한 업 샘플링



정의되지 않은 값에 선형 보간함으로써 업 샘플링

$n (y \Rightarrow n)$	0	1	2	3	4	5	6	7
$y[n]$	$x[0]=0$	$x[0.5]=0.5$	$x[1]=1$	$x[1.5]=1.5$	$x[2]=2$	$x[2.5]=2.5$	$x[3]=3$	$x[3.5]=2.5$
$n (y \Rightarrow n)$	8	9	10	11	12	13	14	
$y[n]$	$x[4]=2$	$x[4.5]=1.5$	$x[5]=1$	$x[5.5]=0.5$	$x[6]=0$	$x[6.5]=0$	$x[7]=0$	

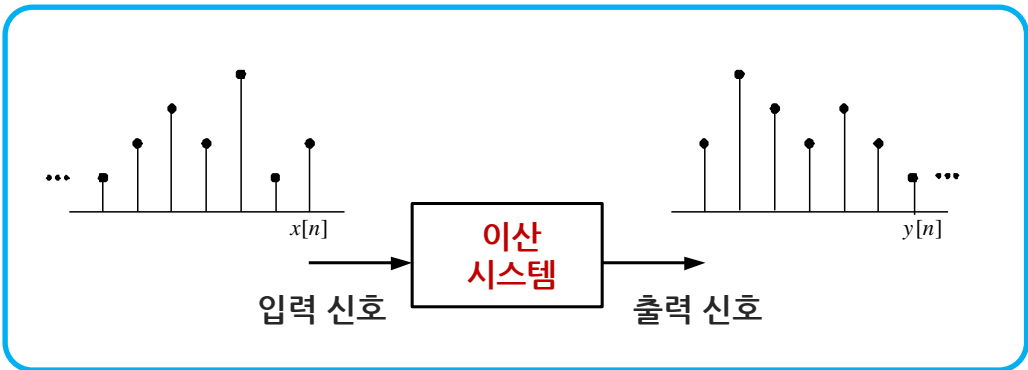


이산 시간 시스템

1. 이산 시간 시스템의 정의

1) 이산 시간 시스템(Discrete System)

- 다양한 디지털 신호처리 응용에서 이산 시간 신호를 입력 신호로 받아 다양한 연산을 수행하도록 하는 어떤 장치나 알고리즘

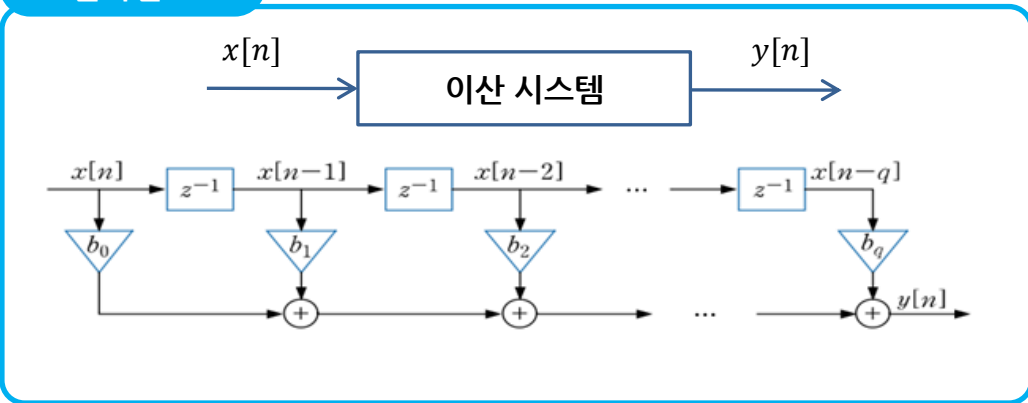


2. 이산 시간 시스템의 입출력 표현

1) 표현 방법

- 입출력 신호 사이의 관계를 명확히 정의하는 수학적 표현 또는 규칙으로 구성

블록선도



차분 방정식

$$y[n] \equiv S\{x[n]\}$$

$$y[n] + a_1y[n-1] + \cdots + a_p y[n-p] = b_0x[n] + \cdots + b_q x[n-q]$$

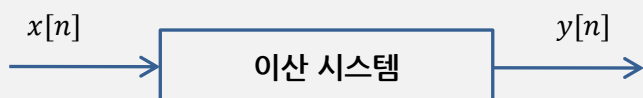


이산 시간 시스템

2. 이산 시간 시스템의 입출력 표현

예제 23-05

다음과 같은 이산 시스템의 입력 신호 $x[n]$ 과 출력 신호 $y[n]$ 이 다음과 같이 수학적으로 표현된다. 출력 신호, $y[n]$ 을 구하고, 그래프로 나타내보자.



$$x[n] = \begin{cases} |n|, & -2 \leq n \leq 2 \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases}$$

$$y[n] = \frac{1}{2} (x[n-1] + x[n])$$

[예제풀이]

$$x[n] = \{\cdots 0, 2, 1, 0, 1, 2, 0, \cdots\}$$

n=0

$$y[-3] = \frac{1}{2} (x[-4] + x[-3]) = \frac{1}{2} (0 + 0) = 0$$

$$y[-2] = \frac{1}{2} (x[-3] + x[-2]) = \frac{1}{2} (0 + 2) = 1$$

$$y[-1] = \frac{1}{2} (x[-2] + x[-1]) = \frac{1}{2} (2 + 1) = 3/2$$

$$y[0] = \frac{1}{2} (x[-1] + x[0]) = \frac{1}{2} (1 + 0) = 1/2$$

$$y[1] = \frac{1}{2} (x[0] + x[1]) = \frac{1}{2} (0 + 1) = 1/2$$

$$y[2] = \frac{1}{2} (x[1] + x[2]) = \frac{1}{2} (1 + 2) = 3/2$$

$$y[3] = \frac{1}{2} (x[2] + x[3]) = \frac{1}{2} (2 + 0) = 1$$

$$y[4] = \frac{1}{2} (x[3] + x[4]) = \frac{1}{2} (0 + 0) = 0$$



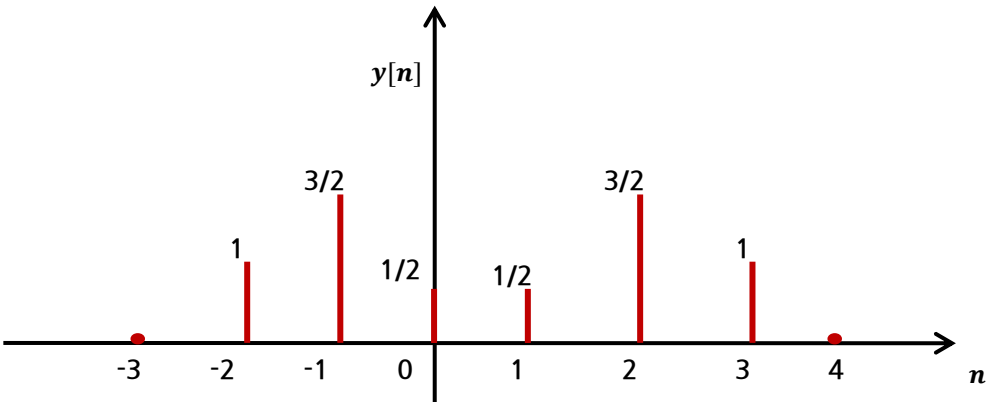
이산 시간 시스템

2. 이산 시간 시스템의 입출력 표현

[예제풀이] (계속)

$$y[n] = \{\cdots 0, 1, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 1, 0, \cdots\}$$

↑
n=0





이산 시간 시스템

3. 이산 시간 시스템의 블록도 표현

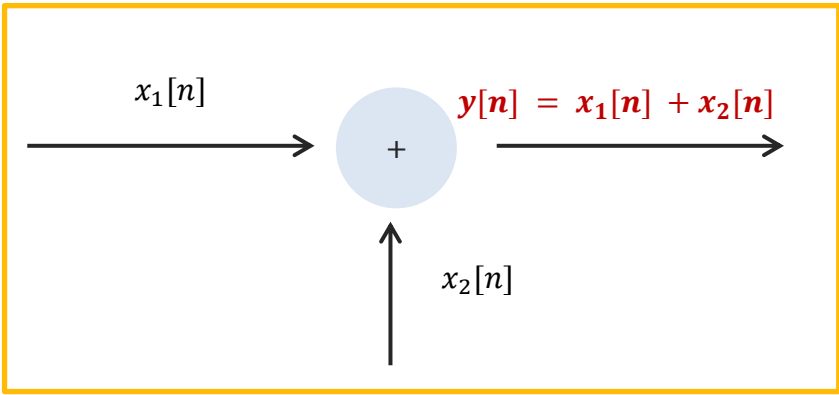
1) 이산 신호 상수 곱셈기

- 기본적인 이산 신호 블록을 이용하여 이산 시간 시스템을 블록선도로 표현 가능
- 이산 신호 상수 곱셈기(Constant Multiplier) 이산 신호의 크기를 상수배하는 동작을 수행



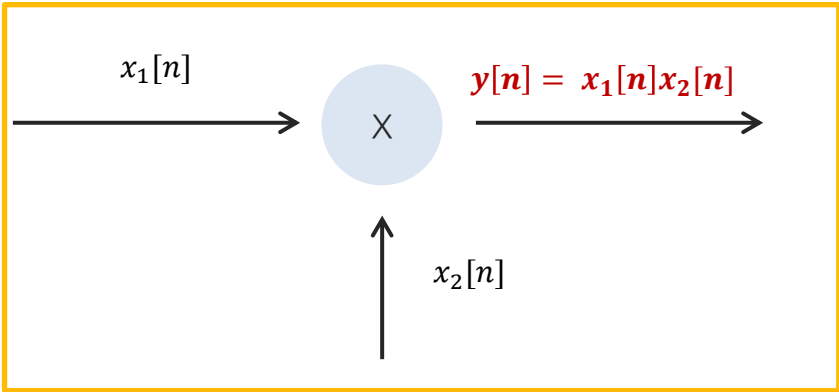
2) 이산 신호 덧셈기

- 두 이산 신호를 더하는 동작을 수행



3) 이산 신호 곱셈기

- 신호를 곱해서 다른 신호로 만드는 동작



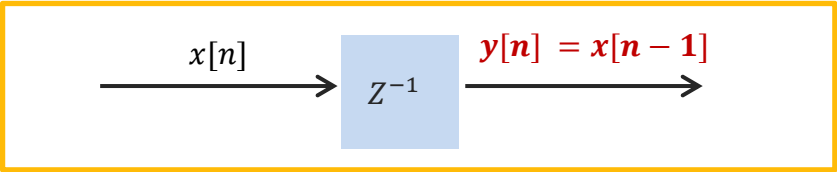


이산 시간 시스템

3. 이산 시간 시스템의 블록도 표현

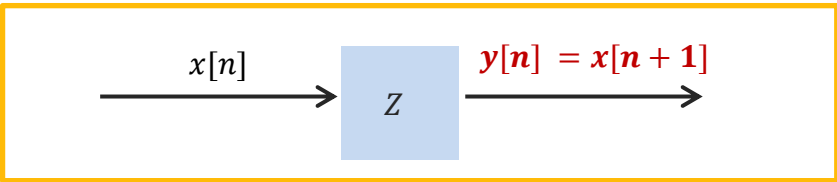
4) 단위 시간 지연기

- 통과하는 신호를 단순히 한 개의 샘플만큼 지연시키는 동작



5) 단위 시간 선행기

- 단위 시간 지연기와는 반대로 입력 신호를 한 샘플씩 먼저 출력





이산 시간 시스템

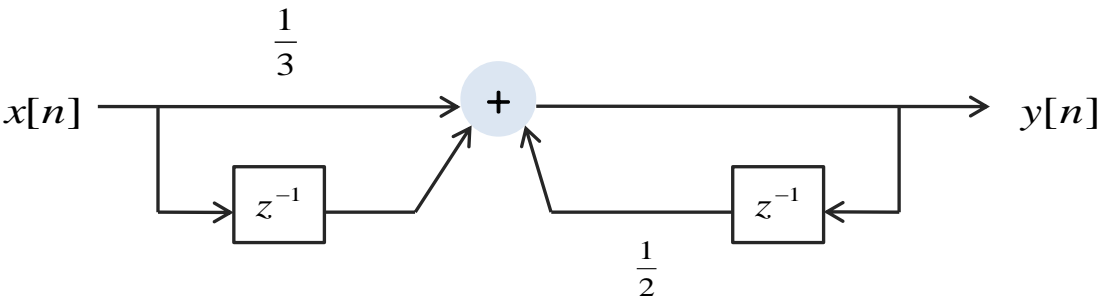
3. 이산 시간 시스템의 블록도 표현

예제 23-06

이산 시간 시스템의 연산에 대한 구성 요소들을 가지고, 다음 입출력 관계를 가지는 이산 시간 시스템의 블록도를 그려보자.

$$y[n] = \frac{1}{2} y[n-1] + \frac{1}{3} x[n] + x[n-1]$$

[예제풀이]



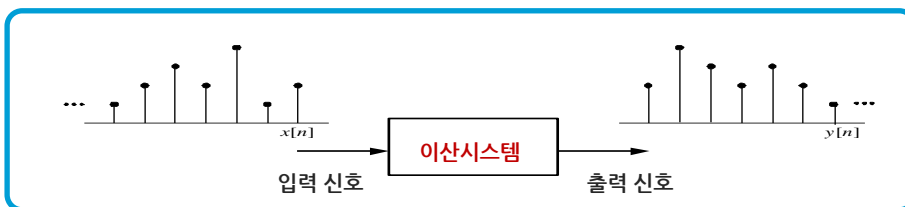
핵심정리

이산 시간 신호

- 이산 신호: 연속 신호가 모든 연속적인 시간 t 에 대하여 정의되는 반면 특정한 시각에서만 값을 갖는 신호
- 함수, 표, 수열 및 그래프 등으로 다양하게 표현할 수 있다.
- 단위 임펄스 신호, 단위 스텝신호, 지수신호 등이 있다.
- $y[n]=x[\mu n]$ 으로 변환되는 $y[n]$ 신호는 이산 신호 $x[n]$ 를 시간 축으로 다운 샘플링 또는 업 샘플링하는 변환임
- 이산시간 신호의 업 샘플링의 경우 보간법(Interpolation)이 필요하고, 영차보간법과 일차 보간법을 이용하여 업 샘플링함

이산 시간 시스템

- 이산 시스템: 이산 신호를 가지고 정해진 연산을 수행하도록 하는 어떤 장치나 알고리즘



- 블록선도 표현과 차분 방정식으로 입출력을 표현 가능함