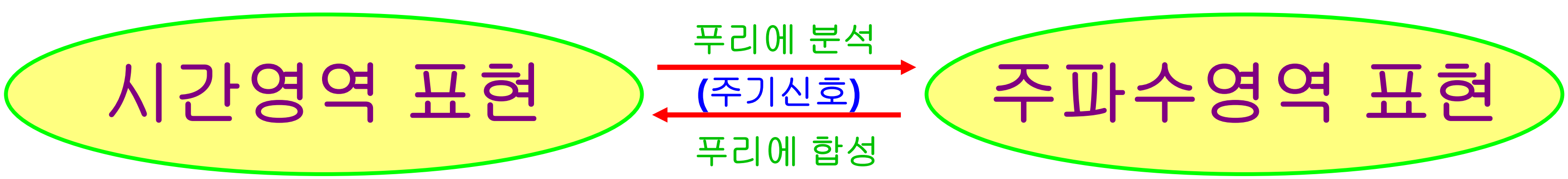
2장

푸리에변환과 스펙트럼

신호와 시스템의 기술 방법

- 신호를 기술하는 방법
  - 시간영역에서의 표현
    - 시간에 따른 진폭의 변화를 표시
  - 주파수 영역에서의 표현
    - 각 주파수 성분이 가지는 진폭의 크기로 표시
    - 각 주파수 성분이 가지는 위상을 표시



신호와 시스템의 기술 방법

- 시스템을 기술하는 방법
  - ◆시간 영역에서의 표현
    - 임의의 신호는 폭이 아주 좁은 펄스의 합으로 됨
      - » 각각의 펄스(impulse)의 응답을 더하면 ➔ 시스템응답
  - ◆주파수 영역에서의 표현
    - 전 주파수에서 각 정현파에 대한 시스템 응답
      - » **1.** 각 정현파의 진폭응답
      - » **2.** 각 정현파의 위상응답

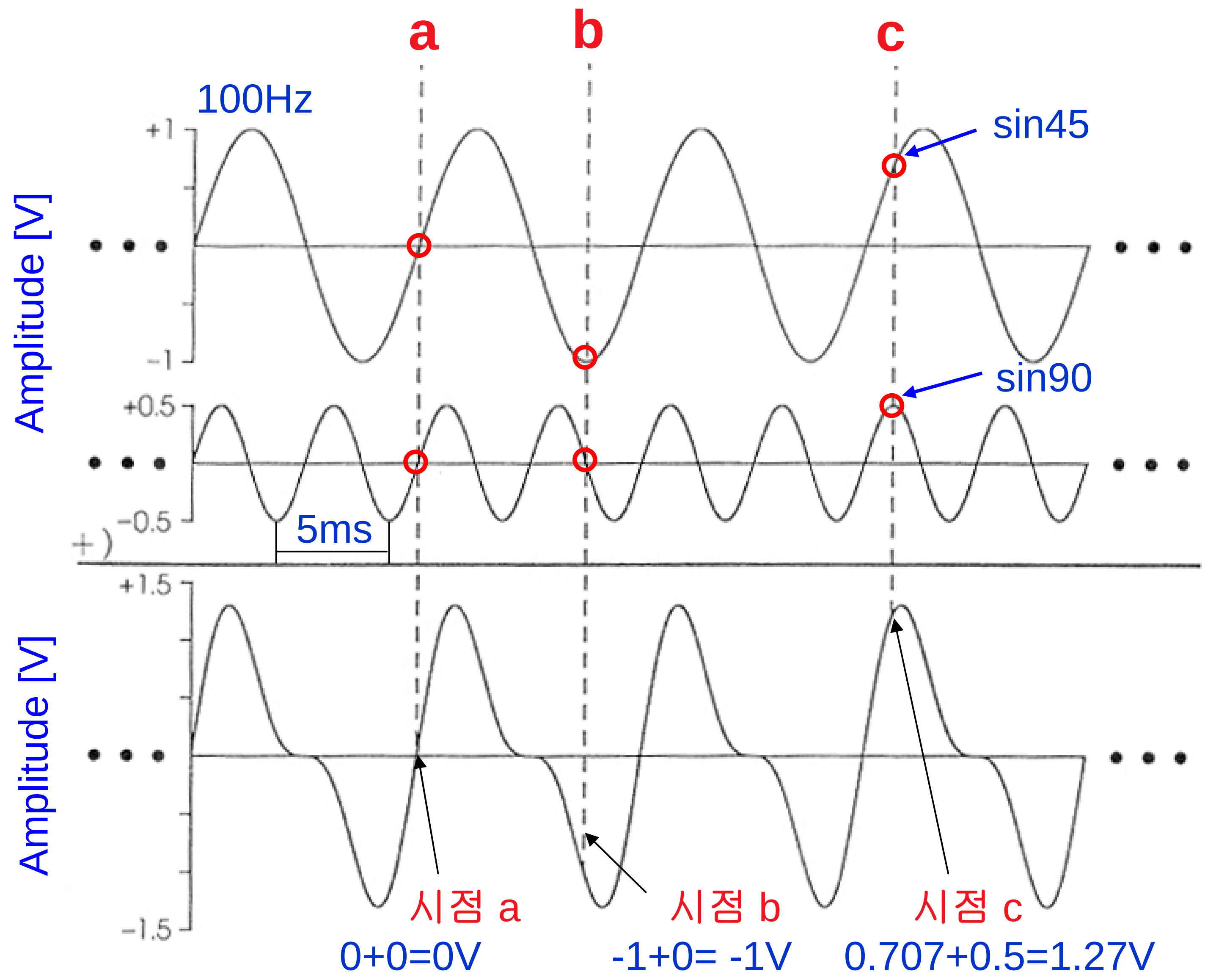
신호의 분석과 합성

어떤 복잡한 파형이라도 적당한 주파수, 진폭, 위상을 가진 여러 정현파를 서로 합하므로써 만들 수 있다

입력	분석	시스템의 영향	합성	출력
	각 정현파 성분으로 분해	전달함수에 의해 각 정현파를 가공	가공된 정현파를 합침	
	Fourier analysis	진폭 / 위상	Fourier synthesis	

1. 임의의 신호 파형은 정현파의 합으로 나타내어진다.
2. 어떤 신호 파형을 구성하는 정현파를 알면 그 신호 파형은 그 정현파로부터 간단히 복원할 수 있다.

정현파의 합성



a
b
c
100Hz
+1
-1
sin45
sin90
+0.5
-0.5
5ms
+)
+1.5
-1.5
Amplitude [V]
Amplitude [V]
시점 a
0+0=0V
시점 b
-1+0= -1V
시점 c
0.707+0.5=1.27V

주기신호의 분해 (주파수 분석)

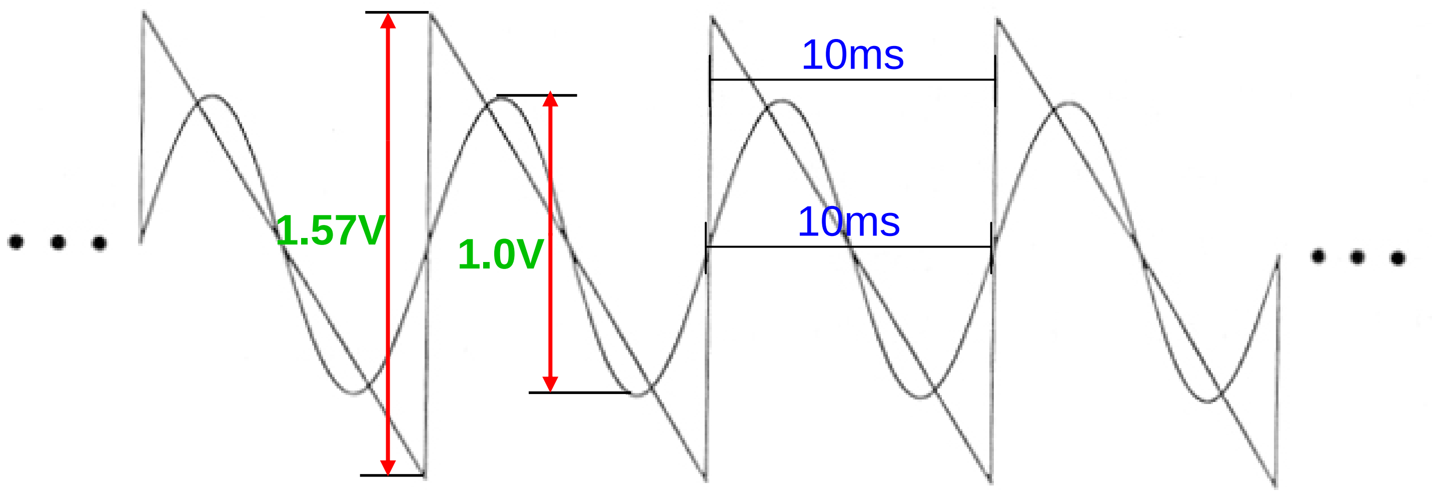
- 푸리에 정리 (Fourier's theorem)

  어떤 주기를 가진 임의의 파형을 여러 개의 정현파(배음 관계)로 분해가 가능

  단, 1) 합성파형의 주기보다도 긴 주기를 가진 정현파가 나타나지 않을 것

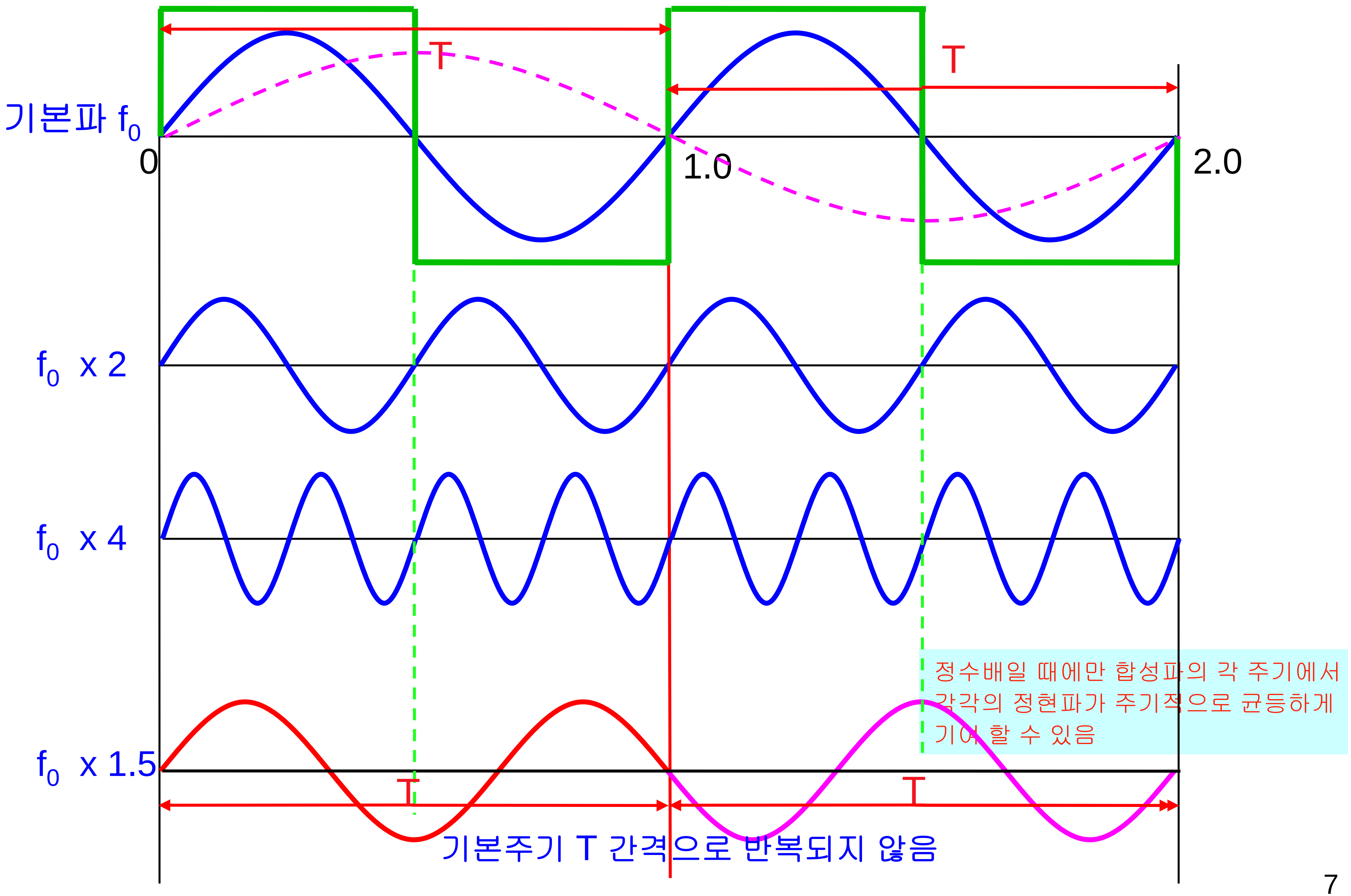
  2) 고차의 항(고조파)의 주파수가 최저항의 정수배일 것

  100Hz, 200Hz, 300Hz…

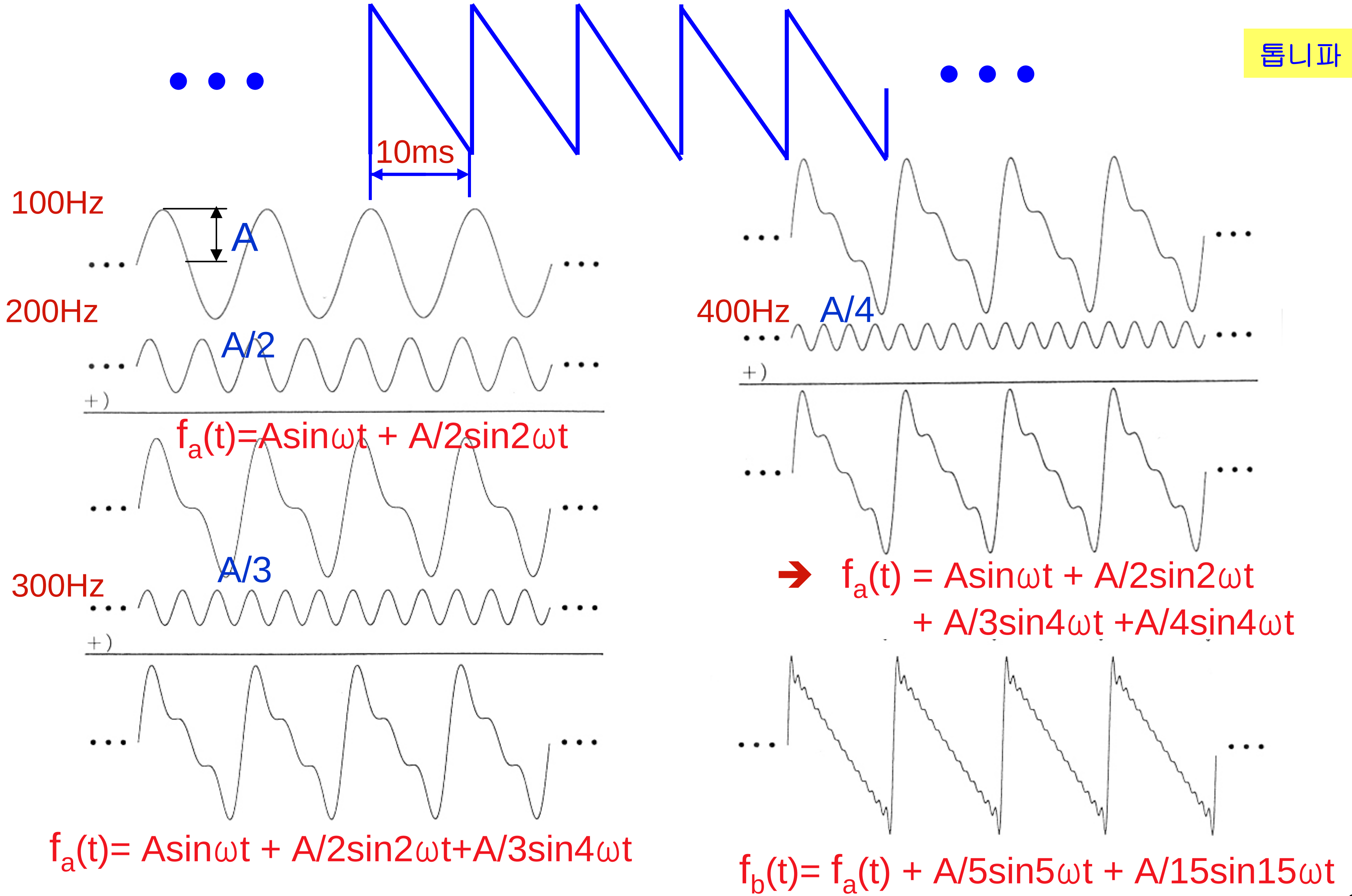


$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t)$$

배음성분이 기본파의 정수배가 되어야 되는 이유?



톱니파의 푸리에 급수



톱니파
10ms
100Hz
A
200Hz
A/2
+)
$f_a(t)$=Asinωt + A/2sin2ωt
300Hz
A/3
+)
$f_a(t)$= Asinωt + A/2sin2ωt+A/3sin4ωt
400Hz
A/4
+)
➔ $f_a(t)$ = Asinωt + A/2sin2ωt
+ A/3sin4ωt +A/4sin4ωt
$f_b(t)$= $f_a(t)$ + A/5sin5ωt + A/15sin15ωt

비주기 신호의 스펙트럼

비주기 신호

- 반복하는 사이클을 가지지 않는 신호
- 동시에 무한의 주기를 가진 주기 신호

이산적인 주파수 성분을 가진
스펙트럼을 가지지 않음

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

푸리에 변환 (Fourier transform)

비주기 신호의 주파수 성분을 표현 할때 사용

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df$$

푸리에 변환과 역푸리에 변환의 관계

❑ 푸리에 변환 (Fourier transform)

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

신호의 시간 표현(파형)을 주파수 표현(스펙트럼)으로 변환하는 수학적 도구 ➔ 복잡한 파형에 대해 그것을 구성하는 정현파로 분해

❑ 푸리에 역변환 (inverse Fourier transform)

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df$$

주파수 표현(스펙트럼)을 신호의 시간 표현(파형)으로 변환하는 수학적 도구 ➔ 정현파를 서로 더해서 원래의 복잡한 파형으로 합성

시간 영역에서 주파수 영역으로 변환에서 성립하는 특성은 주파수 영역에서 시간 영역으로의 변환에도 성립

신호의 시간폭이 좁으면 ➔ 주파수의 폭이 넓어짐

서로 대칭

신호의 주파수폭이 좁으면 ➔ 신호의 시간폭이 넓어짐

푸리에 변환

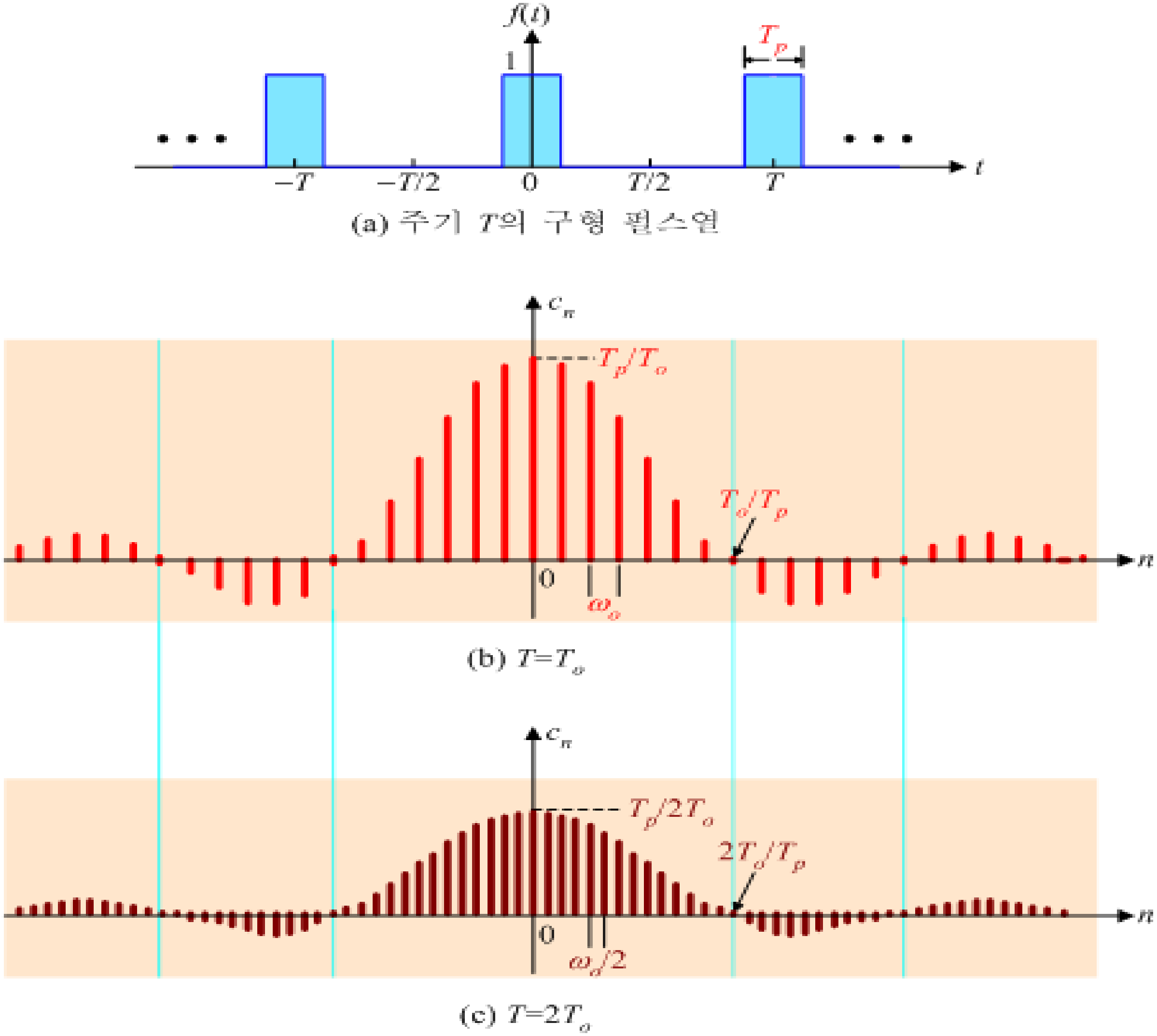


그림 2-1 주기 함수의 주기 변화에 따른 선 스펙트럼의 변화를 보여주는 예

신호의 스펙트럼 분석

- 스펙트럼
  - 시간상으로 변화하는 신호에 포함된 주파수 성분들을 분석
  - 이러한 주파수 성분에 대한 정보
  - 신호의 푸리에 변환

스펙트럼

- 스펙트럼의 크기
  - 진폭 스펙트럼(크기 스펙트럼)
  - 위상 스펙트럼

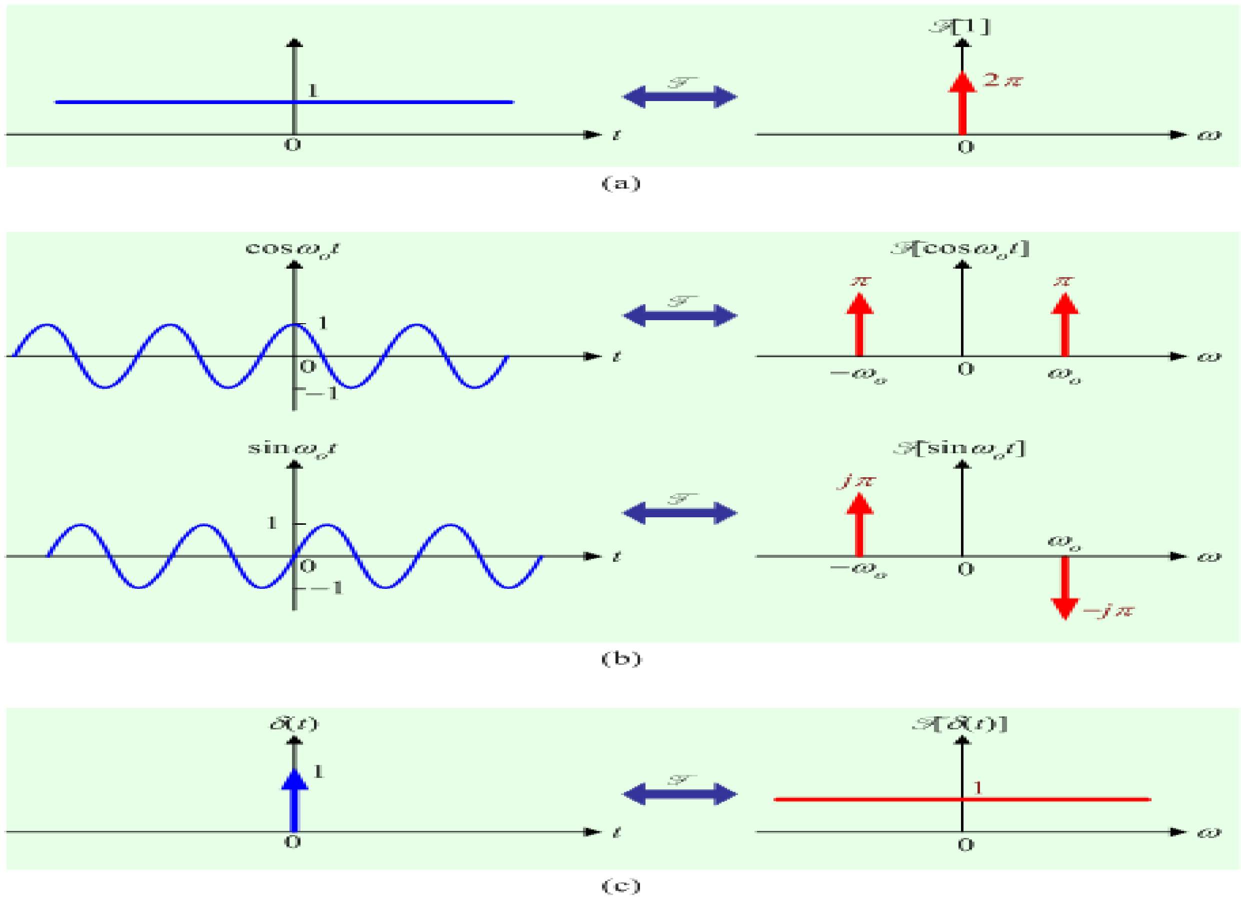


그림 2-6 스펙트럼의 예

시간폭과 대역폭

- 시간폭
  - 신호가 시간상에서 제한
- 대역폭
  - 주파수상에서 유한

- 두 영역에서의 제한은 상대 영역에서 서로 반대 현상을 일으킴
- 시간폭이 늘어나는 반면에 스펙트럼의 대역폭은 같은 순서로 줄어듬

시간폭 반비례 주파수폭

시간폭이 좁은 신호 ➔ 넓은 주파수 스펙트럼

시간폭이 넓은 신호 ➔ 좁은 주파수 스펙트럼

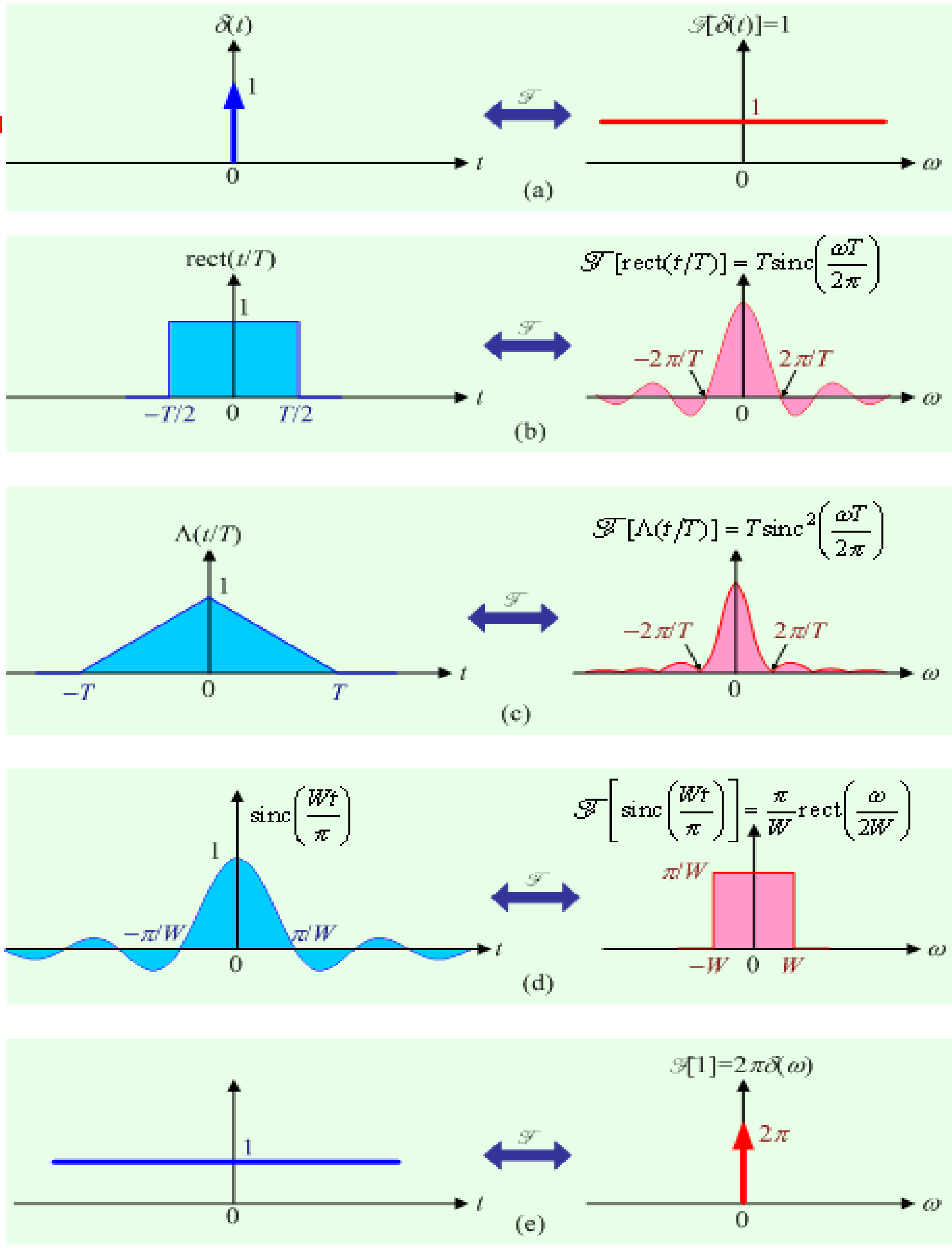


그림 2-7 시간폭과 대역폭간의 상반된 관계

시스템의 주파수 특성

- 선형 시스템의 입력과 출력 관계식(시간 영역)
  - y(t) = h(t) * x(t)
- 주파수 영역
  - Y(ω) = H(ω) X(ω)
- H(ω): 시스템의 주파수 응답(주파수 특성)

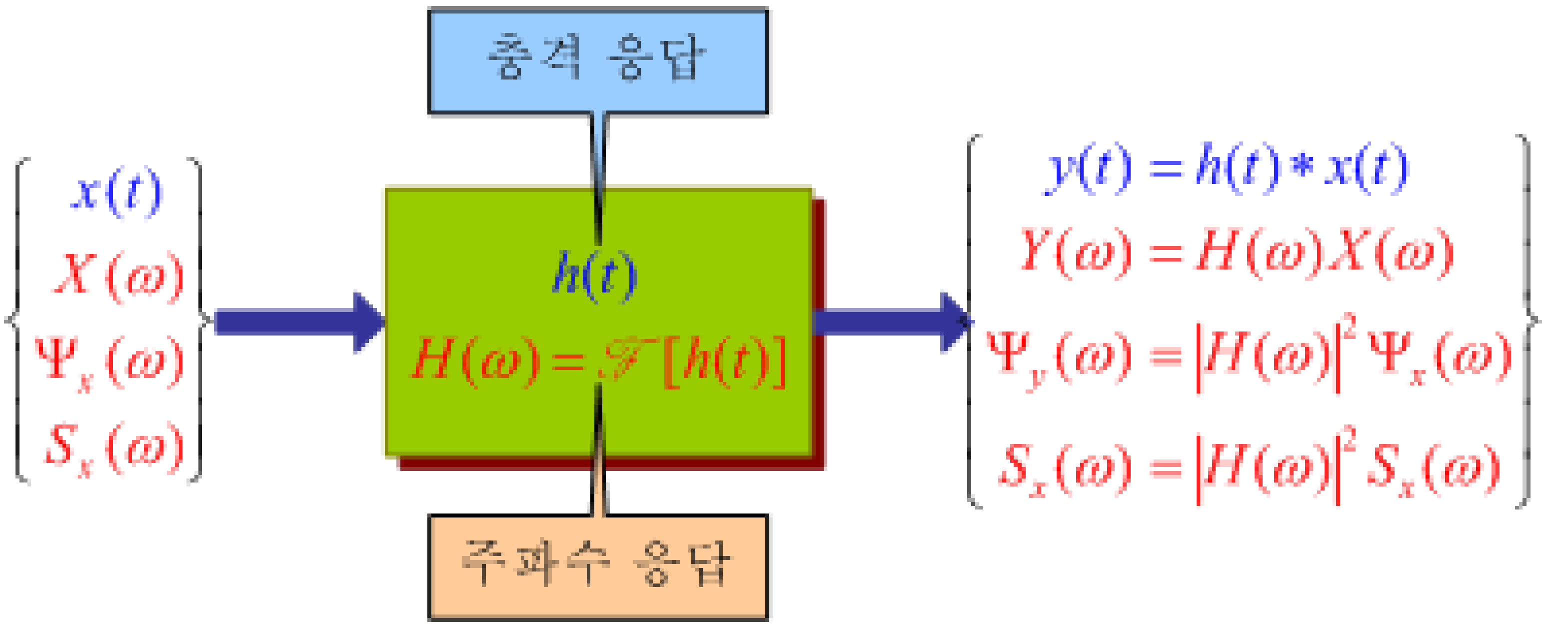


그림 2-9 입력과 출력의 관계에 대한 시스템의 영향

크기/위상 응답

- 전달함수 H(ω)
  - 입력의 스펙트럼은 시스템의 주파수 특성에 의해 변화되어 출력으로 전달되기 때문
  - 극 좌표 형태로 표현

$$H(\omega) = M(\omega)\angle\theta(\omega)$$

  - 입력에 포함된 수많은 정현파들의 진폭과 위상이 시스템의 특성 **H(ω)**에 의해 차별적으로 변화되므로 출력 파형은 입력 파형과 달라지게 된다.

- 사람의 귀는 진폭에 민감하고 위상에는 둔감
  - 음성 신호인 경우 스펙트럼의 크기가 중요시되며 위상은 상대적으로 무시된다.
- 영상 신호의 경우는 스펙트럼의 크기 못지 않게 위상이 중요

시스템의 크기 특성과 위상 특성이 신호 파형에 미치는 영향

- 두 정현파의 합 $x(t) = \sin \omega_o t + 0.5 \sin 2\omega_o t$

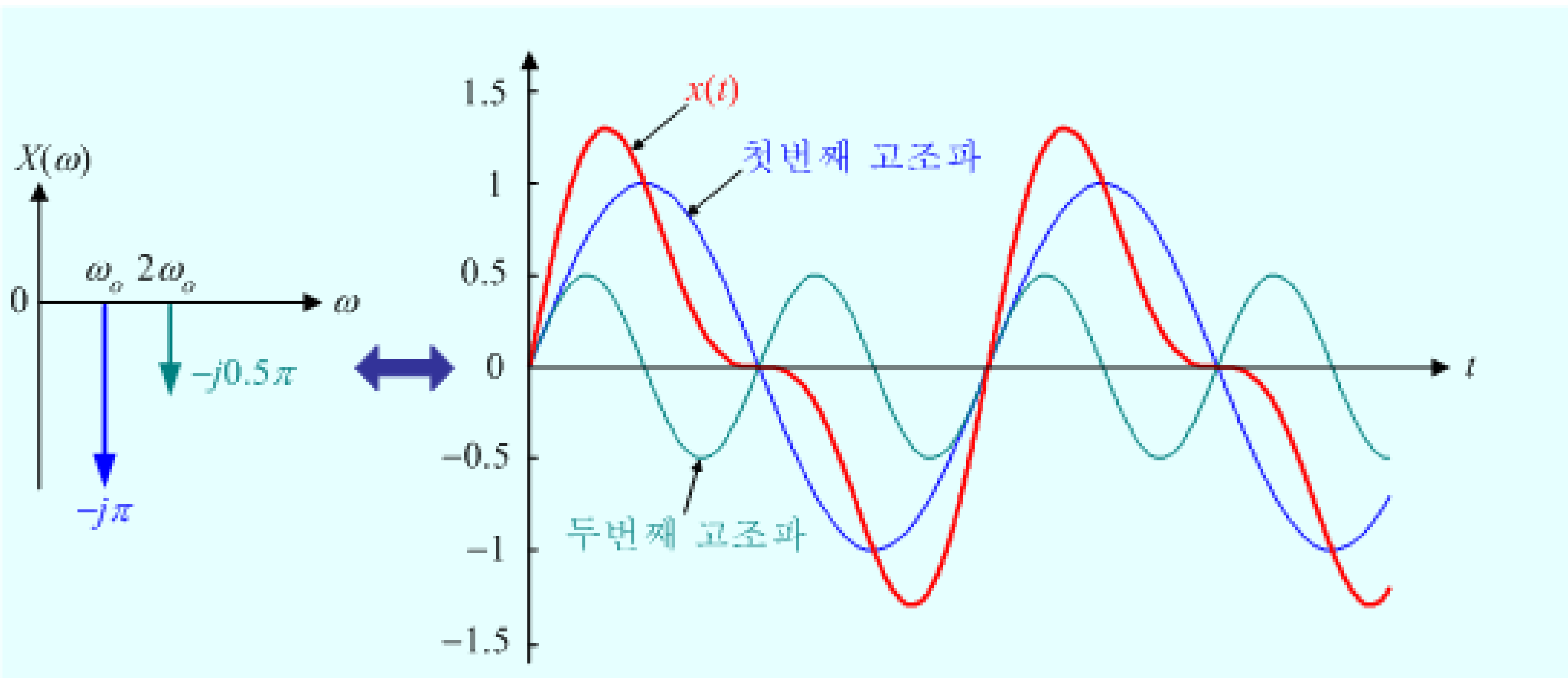


그림 2-10 입력 신호의 스펙트럼과 파형의 예

- 입력 x(t)를 진폭특성은 1로, 위상특성은 직선적이지 못한 시스템에 통과 시킬 경우
  - 두 주파수 성분의 진폭은 변화 없음
  - 주파수 $2\omega_0$에 대해서는 180^o의 위상변화가 생김

  - 출력의 스펙트럼과 파형

$$y(t) = \sin\omega_o t + 0.5\sin(2\omega_o t + \pi) = \sin\omega_o t - 0.5\sin 2\omega_o t$$

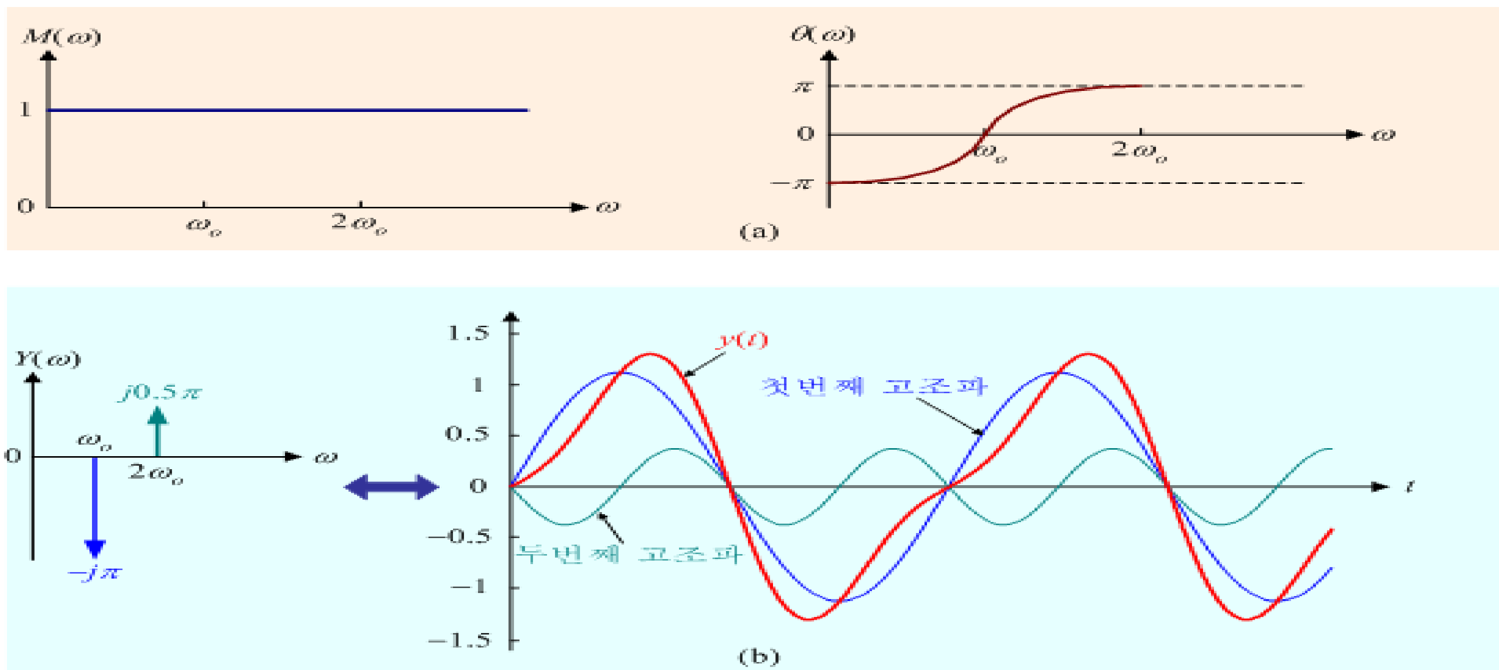
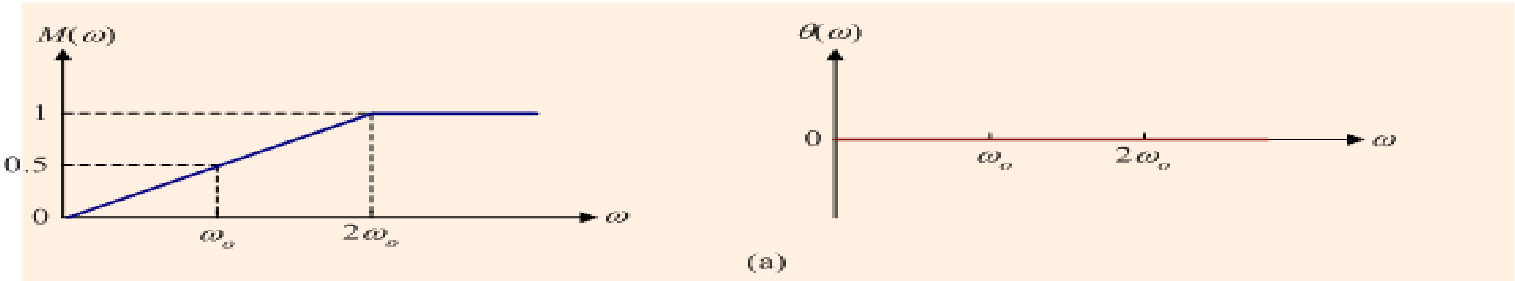


그림 2-11 (a) 시스템의 주파수 특성; (b) 그림 2.10의 입력에 대한 출력의 스펙트럼과 파형

- 입력 x(t)를 진폭특성은 1로 균일하지 않고, 위상특성만 0으로 균일한 경우
  - 첫 번째 고조파는 진폭만 절반
  - 나머지는 입력과 동일

  - 출력의 스펙트럼과 파형 $y(t) = 0.5\sin\omega_o t - 0.5\sin 2\omega_o t$
    - 출력의 에너지는 입력보다 작다.



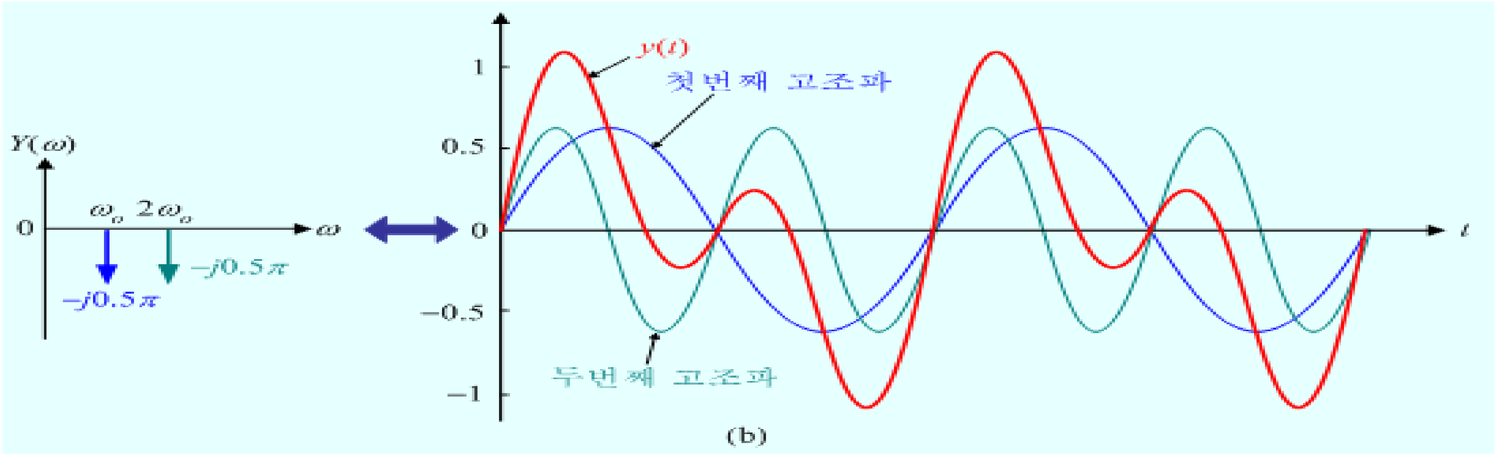


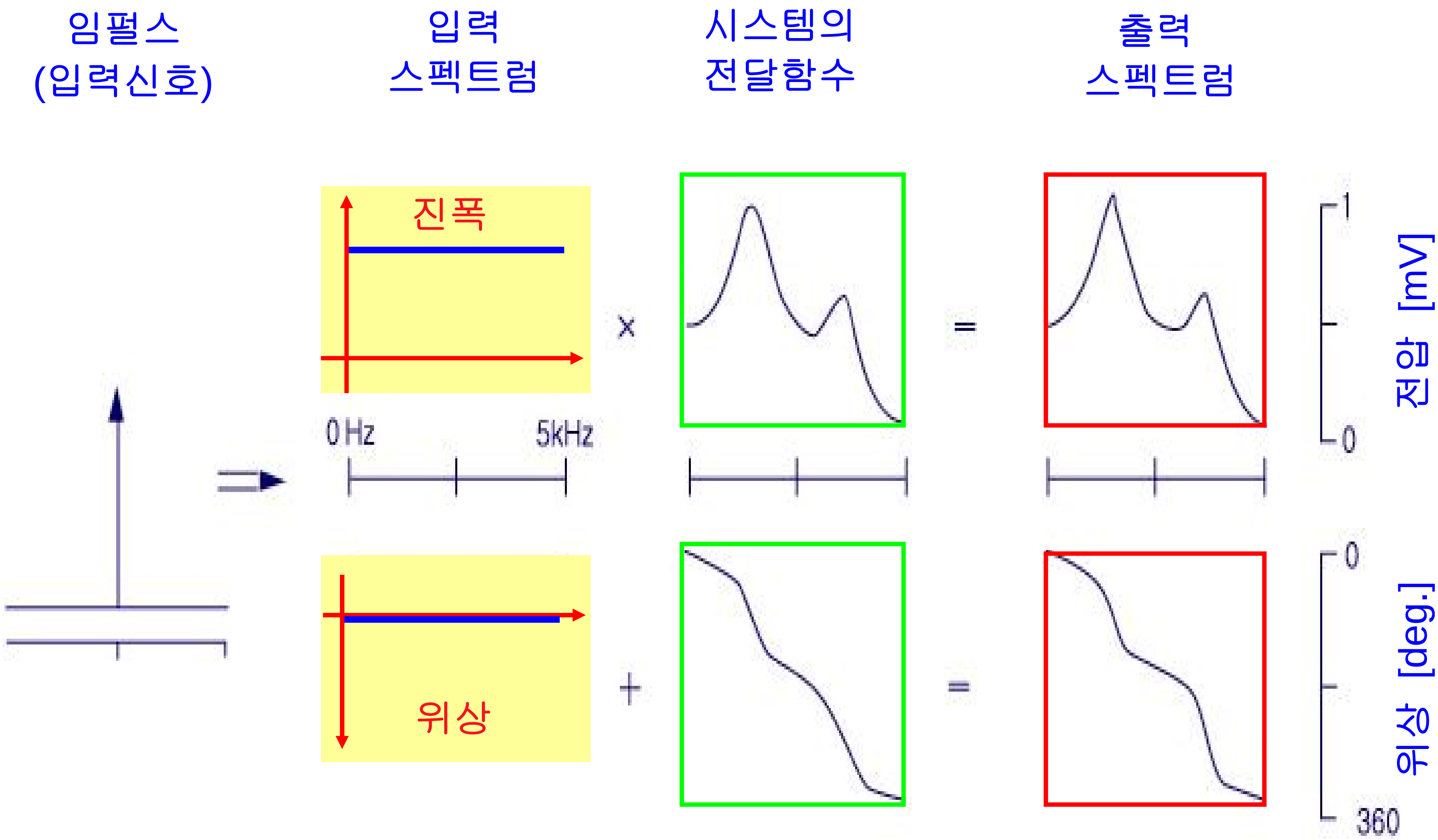
그림 2-12 (a) 시스템의 주파수 특성; (b) 그림 2.10의 입력에 대한 출력의 스펙트럼과 파형

- 신호의 비교

- 전송하고자 하는 입력신호가 음성일 경우
  - 2.11(a)의 시스템이 2.12(a)의 시스템보다 우수
  - 신호는 스펙트럼의 크기가 위상보다 더 중요하기 때문

- 전송하고자 하는 입력신호가 영상일 경우
  - 2.12(a)의 시스템이 2.11(a)의 시스템보다 우수
  - 2.12(a): 출력영상과 입력영상이 시각적으로 비슷
  - 2.11(a): 출력영상과 입력영상의 형태가 좌우로 뒤집힌 관계

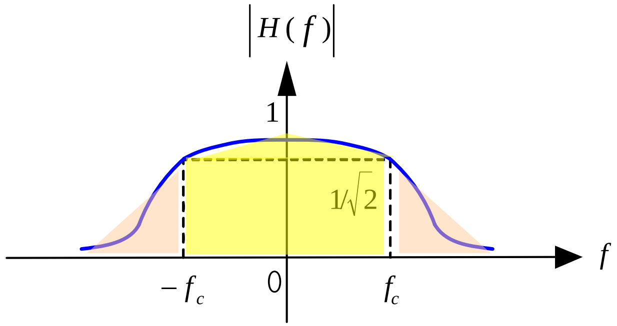
시스템의 임펄스 응답 = 시스템의 주파수 응답



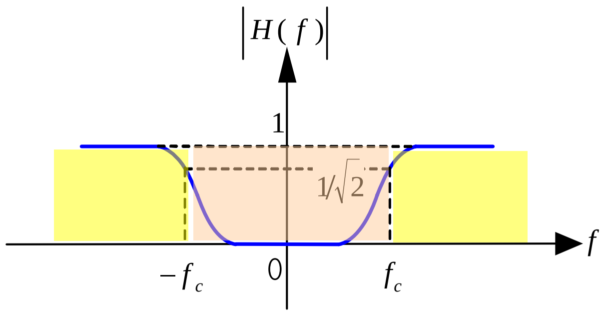
필터

- 어떤 내용물에서 필요한 성분만 가려내고 필요없는 성분들은 걸러버리는 시스템
- 필터의 대상
  - 주파수 성분(스펙트럼)
- 필터는 주파수 대역에 따라 분류

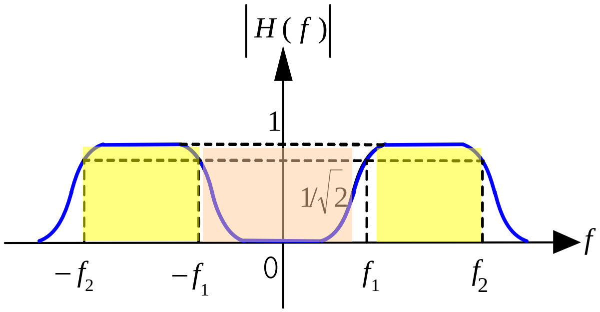
필터의 종류



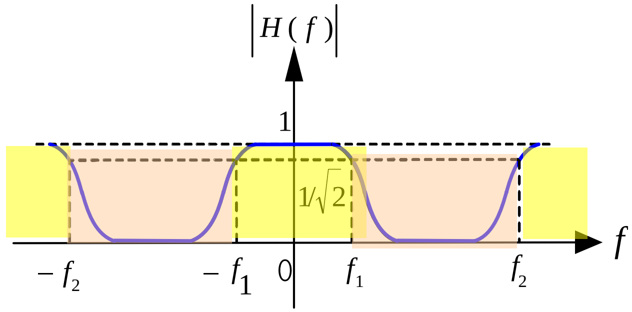
(a) 저역 통과 필터



(b) 고역 통과 필터



(c) 대역 통과 필터



(d) 대역 차단 필터

여러 형태의 필터 특성

저역통과 필터

- 버터워스 필터
  - 실제적인 저역통과 필터를 일반적인 형태로 확장시킨 필터

$$|H_{LP}(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega/W)^{2n}}}, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

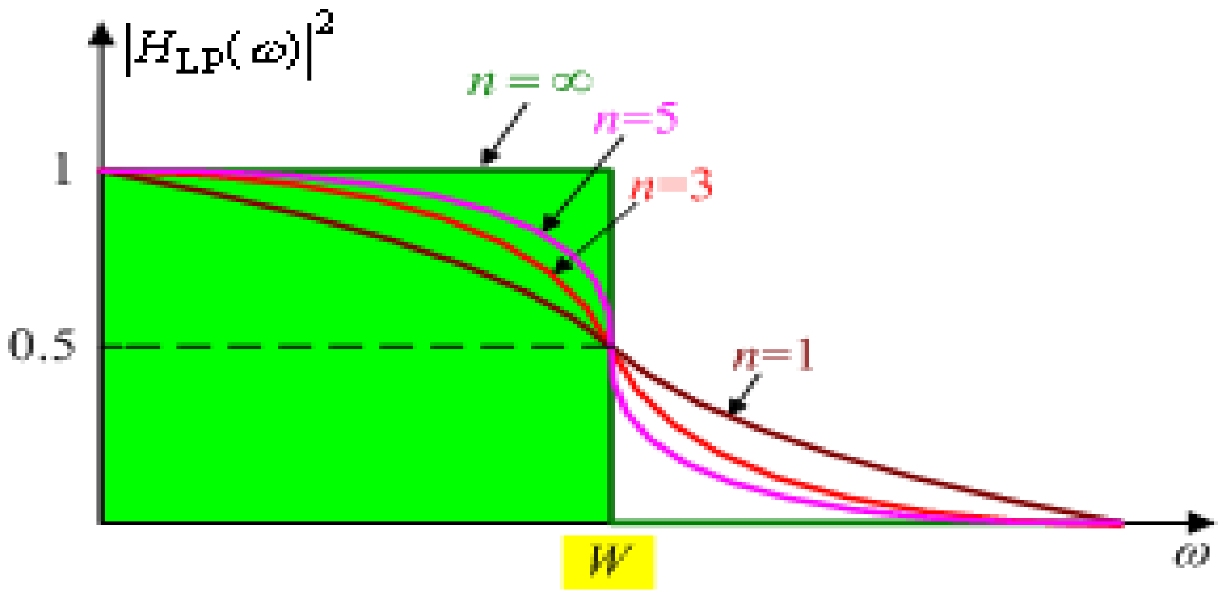


그림 2-22 버터워스 필터의 크기 특성

대역통과 필터

- 특정 중심 주파수를 중심으로 일정한 대역폭 내의 주파수 성분만 통과
- 나머지 성분은 차단

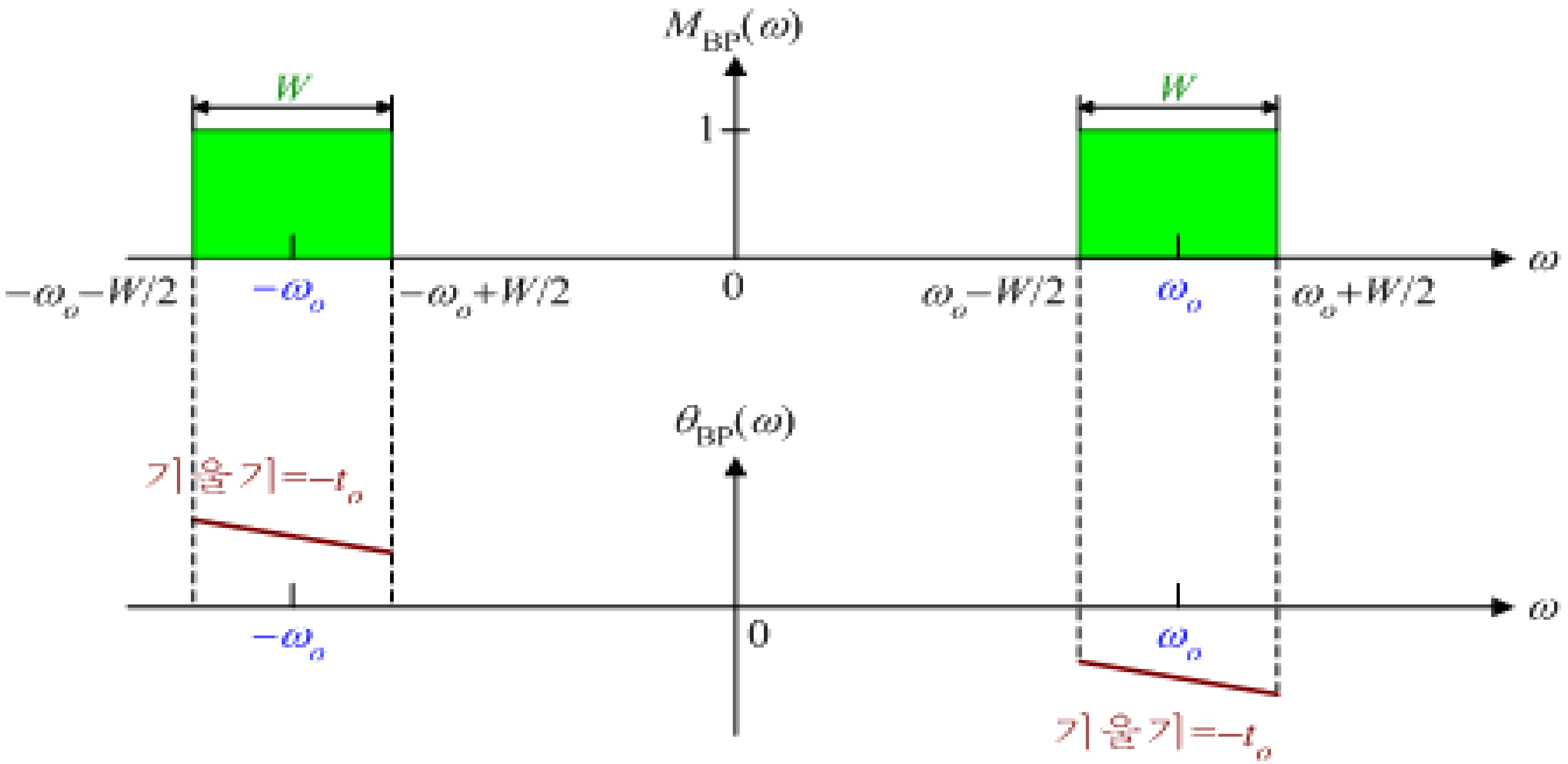


그림 2-23 이상적인 대역통과 필터의 주파수 특성