디지털신호처리

강 의 노 트

연속 선형 시불변 시스템의 시간 응답

학습내용

❖ 연속 선형 시불변 시스템의 시간 응답

❖ 컨볼루션 적분

학습목표

❖ 연속 선형 시불변 시스템의 시간 응답을 구할 수 있다.

❖ 컨볼루션 적분이 무엇이고, 어디에 사용되는지 이해하고, 그 성질을 설명할 수 있다.

연속 선형 시불변 시스템의 시간 응답

1. 연속 선형 시불변 시스템의 정의

1) 연속 선형 시불변 시스템 (Continuous Linear Time-invariant System)

- 연속 시스템 + 선형 시스템 + 시불변 시스템
- 선형 시불변 시스템(LTI System)은 입출력에 대한 미분방정식으로 표현 가능

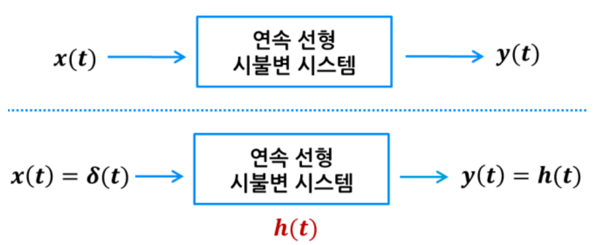
$$\frac{d^N y(t)}{dt^N} + \sum_{i=0}^{N-1} a_i \frac{d^i y(t)}{dt^i} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

2) 목적 및 질문

- 시스템의 해석이 매우 복잡하고 고난도의 수학이 필요하므로 과정의 범위를 벗어나기 때문에 선형 시불변 시스템으로 한정함
- 임의의 연속 입력 신호 $x(t)$에 대한 시스템($S\{..\}$)의 응답 $y(t)$는? 즉, 시스템 표현 방법은?
- 연속 선형 시불변 시스템의 시간 응답은 어떻게 구할까?

2. 임펄스 응답

- 연속 선형 시불변 시스템의 입력으로 임펄스 신호를 가했을 때, 출력신호 $h(t)$



[임펄스 응답(Impulse Response)]

연속 선형 시불변 시스템의 시간 응답

3. 컨볼루션 적분

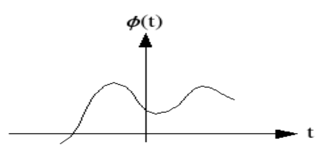
1) 임의의 입력신호 $x(t)$에 대한 시스템($S\{..\}$)의 응답 $y(t)$는?

- 출력신호 $y(t)$는 입력신호 $x(t)$와 연속 선형 시불변 시스템의 임펄스 응답 $h(t)$와의 컨볼루션 적분식으로 표현 가능함

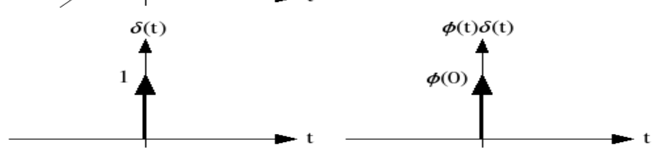
$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = x(t)*h(t)$$

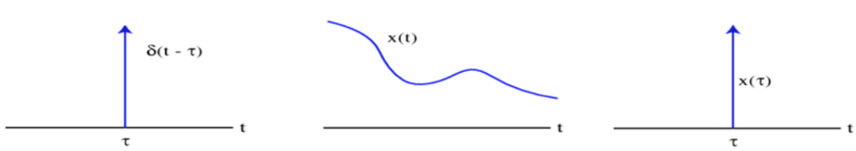
2) 단위 임펄스 신호의 체질 성질

- 시스템의 선형성과 시불변 성질 및 단위 임펄스 신호의 체질성질을 활용, '컨볼루션 적분' 이라는 결과식 도출
- 단위 임펄스 신호의 체질 성질(Shifting Property): 임의의 신호 $x(t)$는 가중치가 곱해진 단위 임펄스의 적분합으로 표현 가능함



$$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$





3) 임의의 입력 $x(t)$가 단위 임펄스 함수의 가중 선형 조합으로 표현된다면 시스템 응답 $y(t)$는?

$$y(t)=S[x(t)]=S\left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau\right]$$

선형 시스템, 중첩의 원리

$$=\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)S[\delta(t-\tau)]d\tau$$

시스템의 시불변의 특성

$$=\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

$x(t)=\delta(t) \Rightarrow y(t)=h(t)$

$x(t)=\delta(t-\tau) \Rightarrow y(t)=h(t-\tau)$

연속 선형 시불변 시스템의 시간 응답

4) 교환 법칙

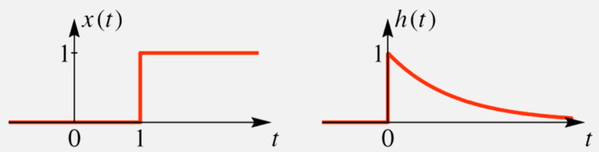
- 컨볼루션 적분은 교환 법칙이 성립

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = x(t)*h(t)$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau = h(t)*x(t)$$

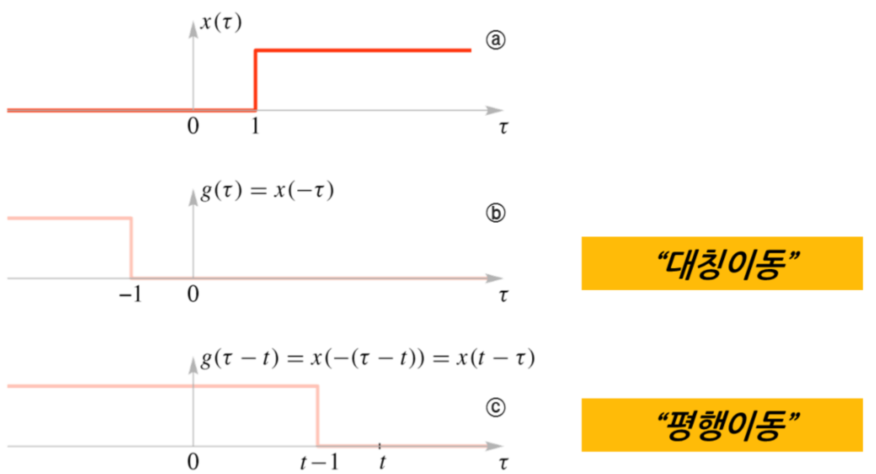
예제 17-01

다음과 같은 연속 선형 시불변 시스템의 임펄스 응답 $\boldsymbol{h(t)}$와 입력신호 $\boldsymbol{x(t)}$가 다음과 같을 때 시스템 출력 $\boldsymbol{y(t)}$를 구해 보자.



ⓐ $x(t)=u(t-1)$ ⓑ $h(t)=e^{-t}u(t)$

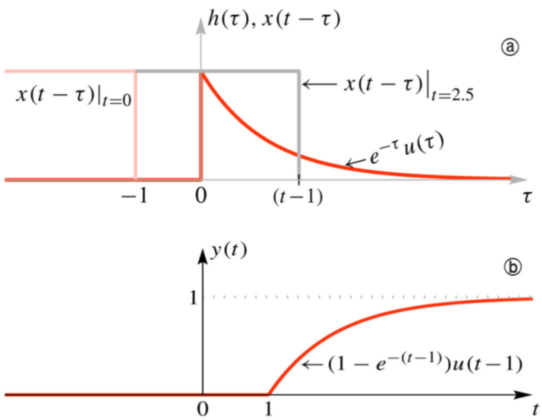
[예제풀이]



연속 선형 시불변 시스템의 시간 응답

4) 교환 법칙

[예제풀이-계속]



$$y(t)=\begin{cases} 0 & t-1<0 \\ \boxed{\displaystyle\int_0^{t-1} e^{-\tau}d\tau \qquad t-1>0} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^{t-1} e^{-\tau}d\tau = -e^{-\tau}\Big|_0^{t-1} \\ &= 1-e^{-(t-1)} \qquad t\geq 1 \end{aligned}$$

컨볼루션 적분

1. 컨볼루션 적분 개요

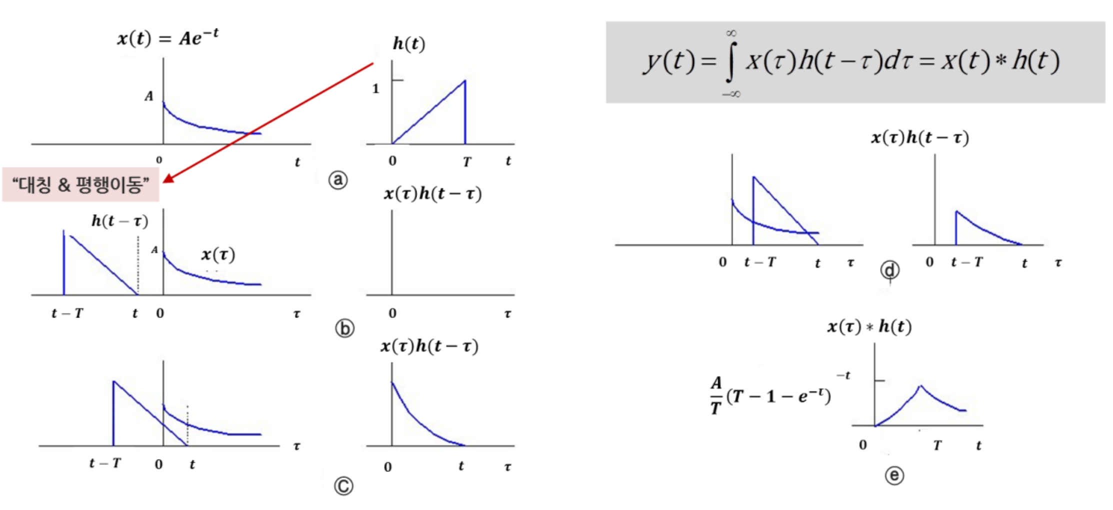
1) 컨볼루션 적분식

- 연속 선형 시불변 시스템의 임펄스 응답은 $h(t)$
- 입력 신호 $x(t)$에 대한 시간 응답 계산은?
  → 입력 신호 $x(t)$와 임펄스 응답 $h(t)$와의 컨볼루션 적분으로 가능

$x(t)$ → 연속 선형 시불변 시스템 $h(t)$ → $y(t)$

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = x(t)*h(t)$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau = h(t)*x(t)$$

2) 컨볼루션 적분



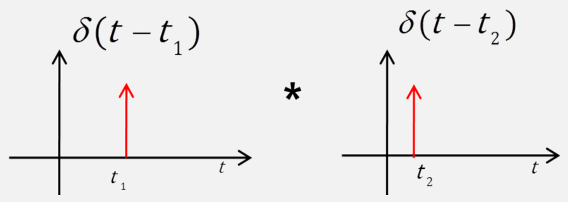
컨볼루션 적분

2. 임펄스 신호의 컨볼루션 적분

1) 두 임펄스 신호의 컨볼루션 적분 예제

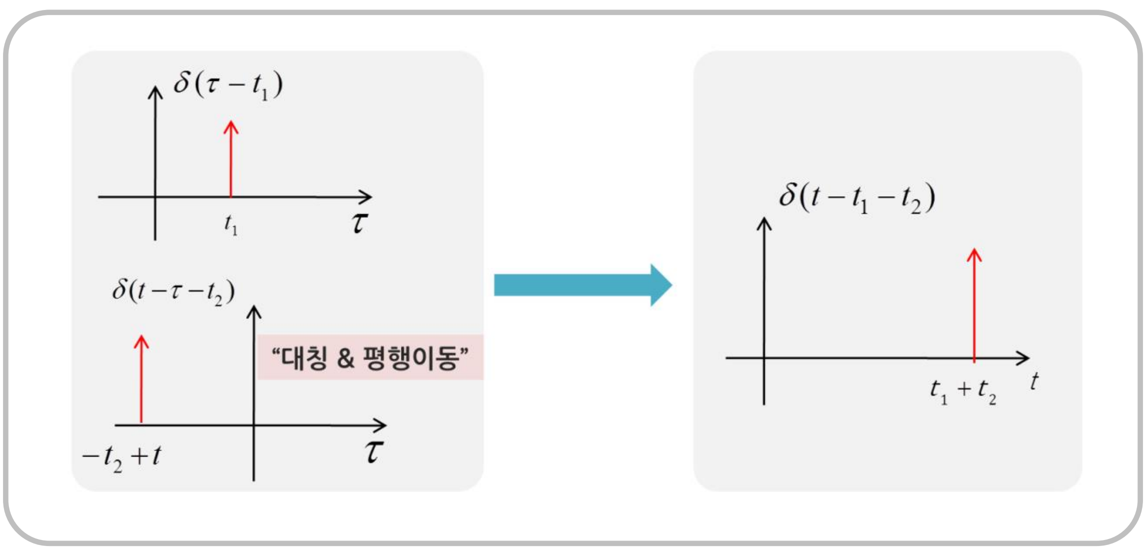
예제 17-02

다음과 같은 수식으로 표현되는 두 개의 임펄스 신호에 대한 컨볼루션 적분을 계산해 보자



$$\delta(t-t_1) * \delta(t-t_2) = ?$$

[예제풀이]

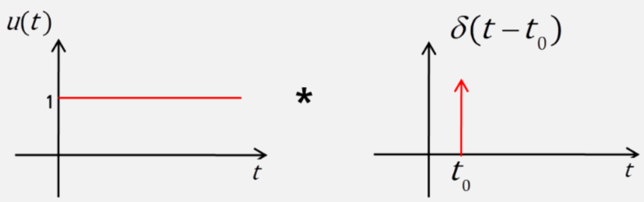


컨볼루션 적분

2) 단위 계단신호와 임펄스 신호의 컨볼루션 적분 예제

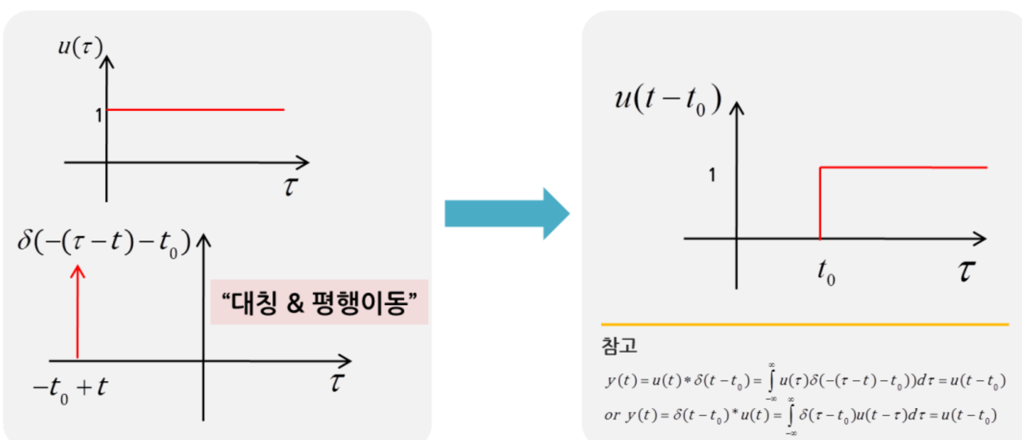
예제 17-03

다음과 같은 단위 계단신호와 임펄스 신호에 대한 컨볼루션 적분을 수행해 보자.



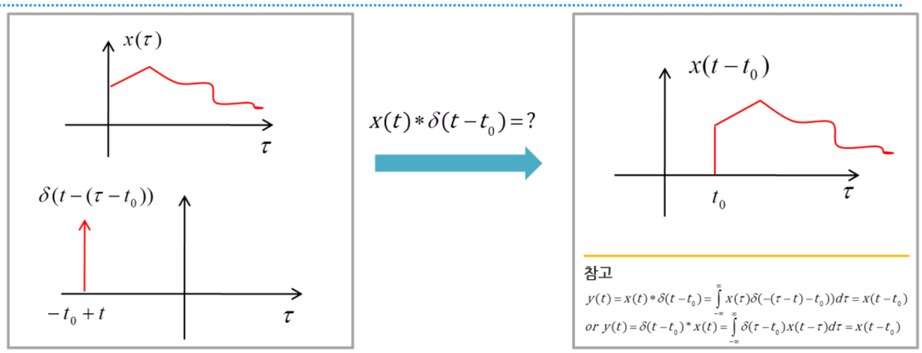
$$u(t)*\delta(t-t_0)=?$$

[예제풀이]



3) 참고

$x(t)*\delta(t-t_0)=?$ $\quad x(t-t_0)$



컨볼루션 적분

4) 지연 시스템

- 임의의 연속 선형 시불변 시스템이 t_0 시간만큼 지연시키는 시스템이라고 가정
- 시스템에서 $x(t)$를 입력하면, 출력 신호 $y(t)$는 시간 t_0만큼 지연된 신호가 출력됨을 의미

$$y(t) = x(t - t_0)$$

4) 지연 시스템 컨볼루션 적분 검증

- 1단계: 이 시스템에 대한 임펄스 응답은 다음과 같음

$$h(t) = \delta(t - t_0)$$

- 2단계: 입력으로 $x(t)$신호를 주었을 때 출력 신호는 앞에서 배운 것과 같이 입력 신호 $x(t)$와 임펄스 응답 $h(t)$와의 컨볼루션 적분으로 계산

$$y(t) = x(t) * h(t) = x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0)$$

- 3단계: 이미 우리가 알고 있는 이 시스템이 t_0만큼 시간 지연시키는 시스템이라는 것과 일치함

$$y(t) = x(t) * h(t) = x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0)$$

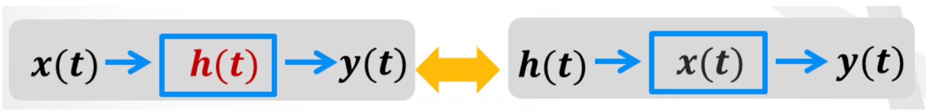
컨볼루션 적분

3. 컨볼루션 적분의 성질

1) 교환 법칙

- 컨볼루션 적분: 시간영역에서의 선형 시불변 시스템의 입·출력 해석 방법
- 교환 법칙이 성립함

$$x(t) * h(t) = h(t) * x(t)$$



2) 교환 법칙의 수학적 증명

$$h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

$$\text{let } \sigma = t-\tau \text{ and } d\sigma = -d\tau$$

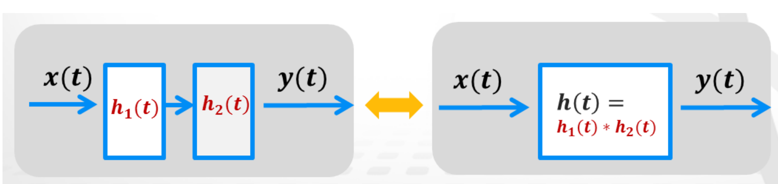
$$h(t) * x(t) = -\int_{\infty}^{-\infty} h(t-\sigma)x(\sigma)d\sigma$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\sigma)x(\sigma)d\sigma = x(t) * h(t)$$

3) 결합 법칙

- 두 개의 시스템이 종속 연결된 경우 두 시스템의 임펄스 응답의 컨볼루션을 새로운 임펄스 응답으로 갖는 하나의 시스템으로 대체 가능함

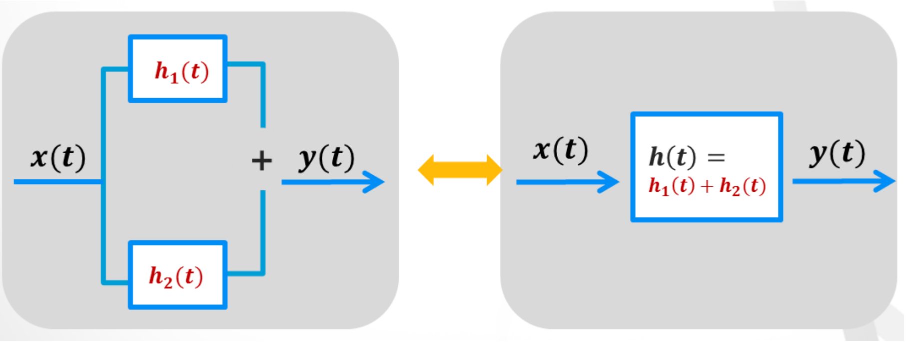
$$\left[x(t) * h_1(t)\right] * h_2(t) = x(t) * \left[h_1(t) * h_2(t)\right]$$



컨볼루션 적분

4) 배분 법칙

$$x(t)*\left[h_1(t)+h_2(t)\right]=x(t)*h_1(t)+x(t)*h_2(t)$$



핵심정리

연속 선형 시불변 시스템의 시간 응답

- 연속 선형 시불변 시스템(Continuous Linear Time-invariant System): 연속 시스템 + 선형 시스템 + 시불변 시스템을 의미
- 선형 시불변 시스템(LTI System)은 입출력에 대한 미분방정식으로 표현 가능함
- 출력신호 $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{t})$는 입력신호 $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t})$와 연속 선형 시불변 시스템의 임펄스 응답 $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{t})$와의 컨볼루션 적분식으로 표현됨
- 단위 임펄스 신호의 체질 성질(Shifting Property)

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

컨볼루션 적분

- 컨볼루션 적분: 입력 신호 $x(t)$와 임펄스 응답 $h(t)$와의 컨볼루션 적분으로 시간 응답 계산 가능하며 시간영역에서의 선형 시불변 시스템의 입·출력 해석 방법임

$$\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}) \rightarrow \boxed{\begin{array}{c}\text{연속 선형 시불변 시스템}\\ \boldsymbol{h}(\boldsymbol{t})\end{array}} \rightarrow \boldsymbol{y}(\boldsymbol{t})$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = x(t) * h(t)$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau = h(t) * x(t)$$

- 컨볼루션 적분 성질

교환 법칙 $x(t) * h(t) = h(t) * x(t)$

결합 법칙 $\left[x(t) * h_1(t)\right] * h_2(t) = x(t) * \left[h_1(t) * h_2(t)\right]$

배분 법칙 $x(t) * \left[h_1(t) + h_2(t)\right] = x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t)$