디지털신호처리

강의노트

FIR-IIR 및 재귀-비재귀 이산 시스템

학습내용

❖ 유한 임펄스 응답 시스템과 무한 임펄스 응답 시스템

❖ 재귀 시스템과 비재귀 시스템

학습목표

❖ 유한 임펄스 응답 시스템과 무한 임펄스 응답 시스템을 비교하여 설명할 수 있다.

❖ 재귀 시스템과 비재귀 시스템의 의미를 이해하고, 그 차이점을 설명할 수 있다.

유한 임펄스 응답 시스템과 무한 임펄스 응답 시스템

1. 유한 임펄스 응답 시스템

1) 유한 임펄스 응답(Finite -duration Impulse Response: FIR)

- 임펄스 응답을 가진 선형 시불변 시스템으로 임펄스 응답이 어느 유한한 구간 외에는 응답이 0의 값을 갖는 시스템

$$h[n]=0 \qquad n<0\text{과 } n\geq M$$

FIR 시스템 출력식	$y[n]=\sum_{k=0}^{M-1} h[k]x[n-k]$

- 임의의 시점 n에서 FIR시스템의 출력 값 $y[n]$은 입력 신호 샘플의 가중화된 선형조합으로 얻어짐
  $(x[n], x[n-1], \ldots, x[n-M+1])$
- 가장 최근 입력된 M개의 입력 신호 샘플을 임펄스 응답 $h[k]$, (k=0, 1, ⋯, $M-1$)의 값으로 가중시키고, 그 M개의 값들을 더함으로써 출력 값이 생성됨
- 출력 값을 생성할 때에, 가장 최근의 M개의 입력신호 샘플들을 저장할 유한 메모리가 필요하고, 가장 최근 M개의 샘플 외의 신호($x[n-M]$, $x[n-M-1]$), ⋯,)은 무시됨

유한 임펄스 응답 시스템과 무한 임펄스 응답 시스템

2. 무한 임펄스 응답 시스템

1) 무한 임펄스 응답(Infinite-duration Impulse Response: IIR)

- 이산 시스템의 임펄스 응답이 **무한구간에서 존재**하는 시스템

IIR 시스템 출력식	$y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} h[k]x[n-k]$

$x[n] \rightarrow$ IIR 시스템 $h[n]$ $\rightarrow y[n]$

- 출력 값은 무한개의 입력신호 샘플 $x[n], x[n-1], x[n-2], \cdots,$ 의 가중된 선형조합으로 결정
- IIR 시스템의 경우에는 **무한한 덧셈과 곱셈과정,무한 메모리**를 필요
  ⇨ 무한한 임펄스 응답 $h[n]$과 입력 신호 **$x[n]$의 컨볼루션 연산을 이용한 계산이 불가능**

?

컨볼루션 연산을 사용하지 않고 다른 형태로 IIR 시스템을 구현할 수 있는 방법?

⇨ **차분 방정식(Difference Equation)**으로 구현 가능
IIR 특성의 시스템들은 디지털 필터 구현, 물리적인 현상, 물리적인 시스템의 모델링 문제와 같은 다양하고, 실질적인 응용분야에서 이용됨

재귀 시스템과 비재귀 시스템

1. 재귀(Recursive) 시스템

1) 필요성

- 이산시스템의 컨볼루션 공식은 **오직 입력 신호와 시스템의 임펄스 응답 $h[n]$만**으로 선형 시불변 시스템의 출력을 표현
- 하지만, 입력 신호의 현재와 과거 값뿐만 아니라 이미 발생된 출력의 과거 값이 필요한 시스템이 존재

$x[n] \rightarrow$ 이산 시스템 $\rightarrow y[n]$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k]$$

예제 28-01

입력 신호 $x[n]$의 누적 평균값을 계산해서 출력하는 이산시스템을 구현해 보자.

※ k=0, 1, 2, ⋯, n 까지 입력신호가 입력될 때 출력 $y[n]$은 각 입력 신호에 대한 누적 평균값을 출력한다.

$x[n] \rightarrow$ 이산 시스템 $\rightarrow y[n]$

[예제풀이]

[예]

$k=0$	$x[0]$입력	$y[0]=x[0]$
$k=1$	$x[0], x[1]$입력	$y[1]=(x[0]+x[1])/2$
$k=2$	$x[0]x[1], x[2]$입력	$y[2]=(x[0]+x[1]+x[2])/3$
$k=3$	$x[0], x[1], x[2], x[3]$입력	$y[3]=(x[0]+x[1]+x[2]+x[3])/4$
$\cdots$		

$k=n$ 일 때, $x[0], x[1], x[2], \ldots, x[n]$입력

$$y[n] = \frac{1}{n+1}\{x[0]+x[1]+x[2]+\cdots+x[n]\}$$
$$= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} x[k], \quad n = 0,1,2\cdots,$$

재귀 시스템과 비재귀 시스템

1. 재귀(Recursive) 시스템

[예제풀이]

$$y[n] = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} x[k], \quad n = 0,1,2\cdots, \quad 0 \le k \le n$$

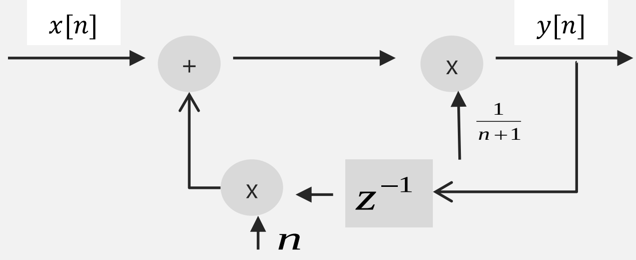
- $y[n]$을 계산하는 과정상 $0 \le k \le n$내의 모든 입력 샘플 $x[k]$를 저장할 메모리를 필요로 하고, 이러한 메모리는 n이 증가함에 따라 시간에 정비례 관계로 증가함
- 그런데, 이전의 출력 값 $y[n-1]$을 이용하여 계산하면, 출력 값 $y[n]$은 더욱 효율적으로 구할 수 있음
- 출력 값 $\boldsymbol{y[n]}$ 계산식을 수학적인 재배열을 통해 차분 방정식을 구할 수 있음

$$y[n] = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} x[k] \;\Rightarrow\; (n+1)y[n] = \sum_{k=0}^{n-1} x[k] + x[n]$$

$$= ny[n-1] + x[n]$$

$$y[n] = \frac{n}{n+1}y[n-1] + \frac{1}{n+1}x[n]$$

- 결론적으로 $\boldsymbol{y[n]}$은 이전 출력 값 $\boldsymbol{y[n-1]}$에 $\boldsymbol{n/(n+1)}$을 곱하고, 현재 출력 값 $\boldsymbol{x[n]}$에 $\boldsymbol{1/(n+1)}$을 곱한 값을 더해 줌으로써 누적 평균 $\boldsymbol{y[n]}$을 순환적으로 계산할 수 있음



[재귀 구조의 누적 평균 시스템의 구현]

- 순환 구조의 누적 평균 시스템의 구현은 두 개의 곱셈기와 한 개의 덧셈기, 한 개의 메모리를 이용하여 구현할 수 있음
- 시간 n에서 출력 $y[n]$은 $y[n-1]$, $y[n-2]$, $\cdots$, 와 같은 과거 출력값에 따라 결정되므로 이를 재귀 시스템이라고 함

- 재귀 시스템의 계산과정을 좀 더 자세하게 알아보면,

$$y[0] = x[0] \qquad y[1] = \frac{1}{2}y[0] + \frac{1}{2}x[1] \qquad y[2] = \frac{2}{3}y[1] + \frac{1}{3}x[2]$$

- 임의의 시간 $\boldsymbol{n = n_0}$에서의 출력 값 $\boldsymbol{y[n_0]}$는 이전 출력 값 $\boldsymbol{y[n_0-1]}$와 현재 입력 신호 $\boldsymbol{x[n_0]}$만 알고 있다면 다음 식을 통해 계산 가능함

$$y[n_0] = \frac{n_0}{n_0+1}y[n_0-1] + \frac{1}{n_0+1}x[n_0]$$

재귀 시스템과 비재귀 시스템

1. 재귀(Recursive) 시스템

2) 초기 조건(Initial Condition)

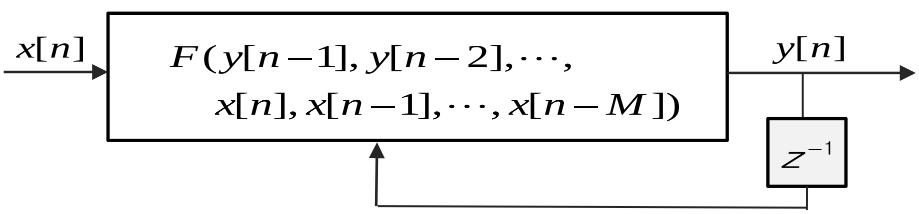
$$y[n_0] = \frac{n_0}{n_0+1} y[n_0-1] + \frac{1}{n_0+1} x[n_0]$$

- 만약 $n = n_0$일 때, 입력 신호 $x[n]$에 대해 이산 시스템의 출력 값 $y[n_0]$를 계산할 경우 이전 출력 값 $y[n_0-1]$의 값과 $n \geq n_0$일 때의 입력 신호 $x[n]$을 알고 있어야 함

시스템의 초기 조건

- 과거 출력 값과 현재와 과거의 입력 값으로 이루어진 출력 $y[n]$의 복잡한 재귀 시스템의 실제 구현을 위해서는 유한개의 메모리가 필요함

[구현 가능한 재귀 시스템의 기본 구조]



※ $F[\cdot]$은 괄호 안의 성분에 대한 임의의 함수

재귀 시스템과 비재귀 시스템

2. 비재귀 (Non-recursive) 시스템

1) 정의

- 출력 값 $\boldsymbol{y[n]}$이 현재와 과거의 입력 값에만 영향을 받는 시스템

$$x[n] \longrightarrow \boxed{F(x[n], x[n-1], \cdots, x[n-M])} \longrightarrow y[n]$$

- 선형 시불변 FIR 이산 시스템이 인과적일 경우 비재귀 시스템이라고 할 수 있음

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{k=0}^{M} h[k]x[n-k] \\ &= h[0]x[n] + h[1]x[n-1] + \cdots h[M]x[n-M] \\ &= F(x[n], x[n-1], \cdots, x[n-M]) \end{aligned}$$

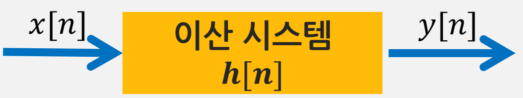
- IIR 이산 시스템은 재귀 시스템

재귀 시스템과 비재귀 시스템

2. 비재귀 (Non-recursive) 시스템

예제 28-02

다음 이산 시스템의 임펄스 응답 $h[n]$인 시스템의 입출력 표현식을 구하고, 재귀 시스템인지 비재귀 시스템인지, 시스템이 FIR 시스템인지 IIR 시스템인지 판별해 보자.



[예제풀이]

$$h[n] = (0.5)^n u[n]$$

- 이 시스템은 임펄스 응답의 길이가 무한하므로 기본적으로 IIR 시스템임
  이 때 입출력 관계를 컨볼루션 합으로 나타내면 다음과 같음

$$y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} h[k]x[n-k] = \sum_{k=0}^{\infty} (0.5)^k x[n-k]$$

$$y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} h[k]x[n-k] = \sum_{k=0}^{\infty} (0.5)^k x[n-k]$$
$$= x[n] + 0.5x[n-1] + (0.5)^2 x[n-2] + \cdots + (0.5)^k x[n-k] + \cdots \quad \text{(식 1)}$$

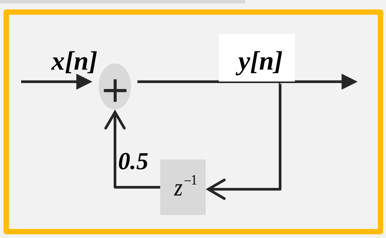
$$y[n-1] = \sum_{k=0}^{\infty} h[k]x[n-1-k] = \sum_{k=0}^{\infty} (0.5)^k x[n-1-k]$$
$$= x[n-1] + 0.5x[n-2] + \cdots + (0.5)^{k-1} x[n-k] + \cdots \quad \text{(식 2)}$$

(식 1) - (0.5)x(식 2)하면 다음의 결과값 도출

$$y[n] - 0.5y[n-1] = x[n] \qquad y[n] = 0.5y[n-1] + x[n] \quad \text{(식 3)}$$

$$y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} h[k]x[n-k] = \sum_{k=0}^{\infty} (0.5)^k x[n-k] \quad \text{(식 1)}$$

$$y[n] = 0.5y[n-1] + x[n] \quad \text{(식 3)}$$



결론적으로 (식1)의 경우 무한개의 시간 지연 소자와 곱셈기, 그리고 덧셈기가 필요하므로 물리적으로 구현이 불가능하지만, (식3)과 같은 차분 방정식 구현은 시간 지연 소자, 곱셈기, 덧셈기가 각각 하나씩만 있으면 되는 재귀 시스템임

핵심정리

유한 임펄스 응답 시스템과 무한 임펄스 응답 시스템

- 유한 임펄스 응답(FIR) 시스템: 임펄스 응답을 가진 선형 시불변 시스템
  임펄스 응답이 어느 유한한 구간 외에는 응답이 0의 값을 갖는 시스템을 의미

FIR 시스템 출력식	$y[n] = \sum_{k=0}^{M-1} h[k]x[n-k]$

- 무한 임펄스 응답(IIR) 시스템: 이산시스템의 임펄스 응답이 무한 구간에서 존재하는 시스템을 의미

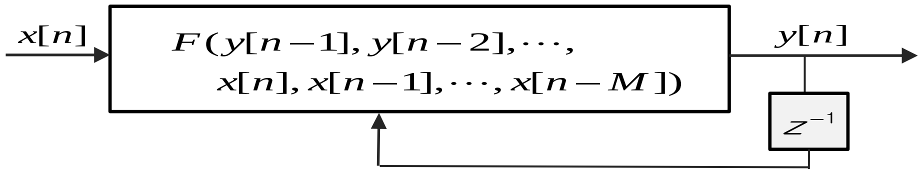
IIR 시스템 출력식	$y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} h[k]x[n-k]$

- 무한 임펄스 응답 시스템은 컨볼루션 연산으로 출력 신호를 구할 수 없고,
  차분 방정식으로 모델링되어 구현됨

재귀 시스템과 비재귀 시스템

- 재귀(Recursive) 시스템: 입력 신호의 현재와 과거 값 뿐만 아니라
  이미 발생된 출력의 과거값을 필요로 하는 시스템
- 일반적으로 과거 출력 값과 현재와 과거의 입력 값으로 이루어진 출력 $y[n]$의
  복잡한 재귀 시스템이 현실적으로 구현되기 위해서는 유한개의 메모리가 필요함
- 구현 가능한 재귀 시스템(Recursive System)
  $y[n] = F(y[n-1], y[n-2], \cdots, x[n], x[n-1], \cdots, x[n-M])$

[구현 가능한 재귀 시스템의 기본 구조]



※ $F[\cdot]$은 괄호 안의 성분에 대한 임의의 함수

핵심정리

재귀 시스템과 비재귀 시스템

- 비재귀 시스템(Non-recursive System): 출력 값 y[n]이 현재와 과거의 입력 값에만 영향을 받는 시스템

  $y[n]=F(x[n],x[n-1],\cdots,x[n-M])$

[비재귀 시스템의 기본 구조]