디지털신호처리

강 의 노 트

비주기 이산 신호 퓨리에 변환

12주차 2차시

학습내용

❖ 이산 퓨리에 급수의 특징

❖ 비주기 이산 신호 퓨리에 변환

학습목표

❖ 이산 퓨리에 급수의 특징에 대해 나열하여 설명할 수 있다.

❖ 비주기 이산 신호 퓨리에 변환에 대해 설명할 수 있다.

이산 퓨리에 급수의 특징

1. 이산 퓨리에 급수의 분석식과 합성식

이산 퓨리에 급수 (DTFS)의 분석식	$X[k]=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x[n]e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$ ➡ $X[k]=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x[n]e^{-jk\Omega_0 n}$
이산 퓨리에 급수의 합성식	$x[n]=\sum_{k=0}^{N-1}X[k]e^{j2\pi kn/N}$ ➡ $x[n]=\sum_{n=0}^{N-1}X[k]e^{jk\Omega_0 n}$

- 기본파($\Omega_0=\frac{2\pi}{N}$)와 고조파($\Omega_k=k\frac{2\pi}{N}=k\Omega_0$)로 신호 성분 표현
- 단지 N개의 서로 다른 주파수 성분 존재(연속계의 경우 무한개 존재)
- 2π: 주기성에 의해 k고조파와 $N+k, 2N+k$, ⋯ 고조파는 동일 신호
- 스펙트럼 이 2π구간으로 대역 제한 되어 주기적으로 반복됨
  ⇨ 신호도 주기 N, 스펙트럼도 주기 N인 주기 함수

1) 이산 시간 퓨리에 급수(DTFS)

이산 시간 분석식 (퓨리에 급수)	$X[k]=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x[n]e^{-jk\Omega_0 n}$
이산 시간 합성식 (퓨리에 급수)	$x[n]=\sum_{n=0}^{N-1}X[k]e^{jk\Omega_0 n}$

- 분석식과 합성식 모두 동일한 **유한개 항의 합**
  ⇨ **수치 계산**에 매우 **적합**함

2) 진폭 및 위상 스펙트럼

- 퓨리에 계수 $X[k]$는 복소수 ⇨ 극좌표 형태로 표현

$$X[k]=|X[k]|e^{j\angle X(k)}$$

진폭 스펙트럼	$|X[k]|$
위상 스펙트럼	$\angle X[k]$

- 퓨리에 급수 및 변환의 시간·주파수 쌍대성

시간 영역	⟷	주파수 영역
주기 신호 이산 신호		이산 스펙트럼 주기 스펙트럼

이산 퓨리에 급수의 특징

2. 이산 퓨리에 급수의 주요 성질

1) 선형성(Linearity)

$x_1[n] \Leftrightarrow X_1[k]$ 이고, $x_2[n] \Leftrightarrow X_2[k]$ 이면

$$Ax_1[n] + Bx_2[n] \Leftrightarrow AX_1[k] + BX_2[k]$$

2) 시간 이동(Time-shifting)

$x[n] \Leftrightarrow X[k]$ 이면,

$$x[n-n_0] \Leftrightarrow X[k]e^{-j2\pi k n_0/N} = X[k]e^{-jkn_0\Omega_0}$$

- 신호를 시간 영역에서 n_0샘플만큼 지연 또는 이동했을 경우, 주파수 영역에서는 위상의 변화만 있고, 진폭에는 변화가 없음을 의미
- [예] $n_0 = N$일 경우
  $x[n-N] \Leftrightarrow X[k]e^{-j2\pi kN/N} = X[k]e^{-j2\pi k} = X[k]$

3) 시간 컨볼루션

$x_1[n] \Leftrightarrow X_1[k]$ 이고, $x_2[n] \Leftrightarrow X_2[k]$ 일 경우

$$x_1[n] \otimes x_2[n] = \sum_{m=0}^{N-1} x_1[m]x_2[n-m] \Leftrightarrow NX_1[k]X_2[k]$$

※ 기호 $\otimes$: 원형 컨볼루션(Circular Convolution)

- 시간영역에서의 컨볼루션은 주파수 영역에서 곱셈이 된다는 성질

4) 주파수 컨볼루션

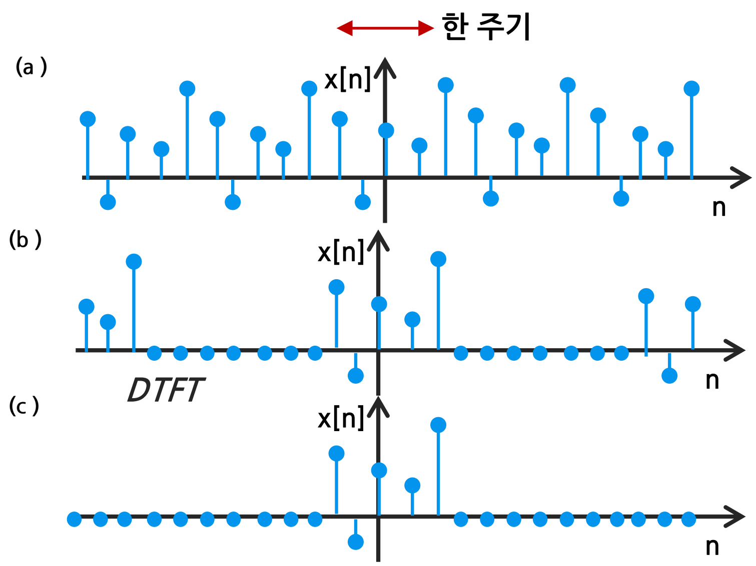
$$x_1[n]x_2[n] \Leftrightarrow X_1[k] \otimes X_2[k] = \sum_{m=0}^{N-1} X_1[m]X_2[k-m]$$

- 시간영역에서의 곱셈은 주파수 영역에서 컨볼루션으로 계산됨
- 시간영역과 주파수 영역에 대한 쌍대성(Duality)이 성립함

비주기 이산 신호 퓨리에 변환(Discrete Time Fourier Transform)

1. 비주기 이산 신호에 대한 퓨리에 변환 유도

$$X[k] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-jk\Omega_0 n}$$



- (a) 이산 신호의 주기 N=5
- 이산주기신호 (a)에서 한 주기만 (5개의 샘플)을 선택하여 (b) 부분과 같이 다른 주기를 가지도록 함
- 그 사이를 0으로 채우면, (b)신호는 주기 N=12의 주기신호
- 이 과정을 더 진행하여 0을 더 채워 넣으면서 주기가 무한대인 이산 신호를 만들 수 있음
- (c) 신호는 주기 $N=\infty$인 이산 신호 즉 비주기 이산 신호가 됨

? 이런 방법으로 비주기 신호를 만든다면 스펙트럼 $X[k]$는 어떻게 변화할까?

- 주기 N이 계속해서 증가함에 따라서 (1/N)의 곱셈 때문에 진폭 $X[k]$의 크기는 점점 작아짐 $N \to \infty$
- 기본 주파수 $\Omega_0 = \frac{2\pi}{N}$는 주기 N이 증가하면서 점점 작아지면 인접한 $X[k]$는 점점 가까워지며, $N \to \infty$의 극한에서는 모든 주파수 성분들이 점점 가까워져 궁극적으로 이산 스펙트럼의 분포가 연속적인 스펙트럼으로 변화

$$k\Omega_0 = k\frac{2\pi}{N} \to \Omega$$

비주기 이산 신호 퓨리에 변환(Discrete Time Fourier Transform)

1. 비주기 이산 신호에 대한 퓨리에 변환 유도

주기 N인 이산 신호 $x[n]$에 대한 이산 퓨리에 급수(DTFS)		비주기 이산 신호 $x[n]$에 대한 이산 퓨리에 변환(DTFT)
$X[k]=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x[n]e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$	→	$X(\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]e^{-j\Omega n}$

- 주기 N이 무한대로 커지면서 각각의 스펙트럼 계수 $X[k]$가 0으로 가는 것을 방지
- 스펙트럼 계수에 N을 곱하고($N\times X[k]$) n의 범위도 $n=\pm\infty$ 구간으로 확장된 비주기 이산 신호 $x[n]$에 대한 이산 퓨리에 변환 $X(\Omega)$를 얻을 수 있음

비주기 이산 신호 $x[n]$에 대한 이산 퓨리에 변환	$X(\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]e^{-j\Omega n}$

- $X(\Omega)$는 주기적임 (2π의 배수만큼 주파수 차가 나는 이산 복소 정현파는 동일)

$$X(\Omega+2m\pi)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]e^{-j(\Omega+2m\pi)n}$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]e^{-j\Omega n}e^{-j2m\pi n}=X(\Omega)$$

주기 N인 이산 신호 $x[n]$에 대한 이산 퓨리에 합성식		비주기 이산 신호 $x[n]$에 대한 이산 퓨리에 역변환
$x[n]=\sum_{n=0}^{N-1}X[k]e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$	→	$x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X(\Omega)e^{j\Omega n}d\Omega$

- 연속적인 이산 퓨리에 변환 $X(\Omega)$ 로 부터 시간영역 이산 신호 $x[n]$은 **이산 퓨리에 역변환**을 통하여 생성가능함
- 이산 퓨리에 역변환은 연속 스펙트럼 $X(\Omega)$로 부터 어떻게 **시간영역 신호 $x[n]$을 합성하고 재생성**할 수 있는지를 나타냄
- 이산 신호의 주파수 스펙트럼은 연속 신호와 **달리 반복적인 특성**을 가짐
  이는 샘플링에 따른 결과로, **디지털 신호의 모호성**을 나타내는 것임

비주기 이산 신호 퓨리에 변환(Discrete Time Fourier Transform)

2. 비주기 이산 신호 퓨리에 변환 수렴 조건

1) 절대 총합 가능

- $x[n]$이 절대 총합 가능(Absolutely Summable)하면 퓨리에 변환은 존재함

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty$$

3. 비주기 이산 신호에 대한 진폭과 위상 스펙트럼

1) 진폭과 위상 스펙트럼

$$X(\Omega) = |X(\Omega)| e^{j\angle X(\Omega)}$$

진폭 스펙트럼 $|X(\Omega)|$ → 주기가 2π인 주기함수

$x[n]$의 복소지수 성분들의 **상대적인 크기를** 나타냄

위상 스펙트럼 $\angle X(\Omega)$ → 주기가 2π인 주기함수

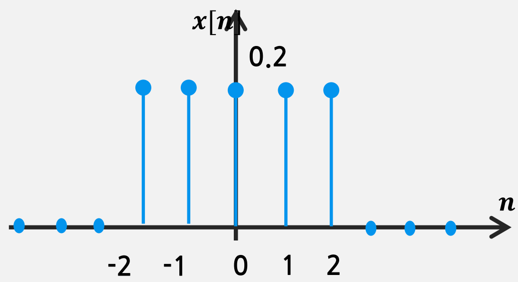
$x[n]$의 복소지수 성분들의 **상대적인 위상을** 나타냄

비주기 이산 신호 푸리에 변환(Discrete Time Fourier Transform)

3. 비주기 이산 신호에 대한 진폭과 위상 스펙트럼

예제 32-01

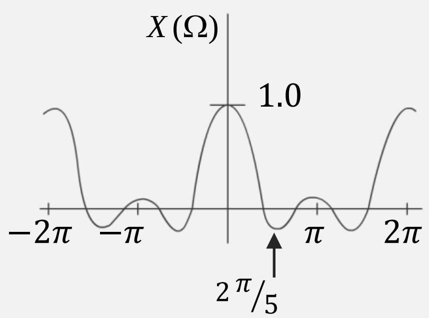
다음과 같은 비주기 이산 신호에 대한 푸리에 변환을 구해 보자.



[예제풀이]

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n} = 0.2e^{-j2\Omega} + 0.2e^{-j\Omega} + 0.2e^{j0} + 0.2e^{j\Omega} + 0.2e^{j2\Omega}$$

$$= 0.2(1 + 2\cos\Omega + 2\cos 2\Omega)$$



샘플링 정리에 의한 결과로 주파수 스펙트럼은 주기가 2π인 **주기적인 연속 스펙트럼**임

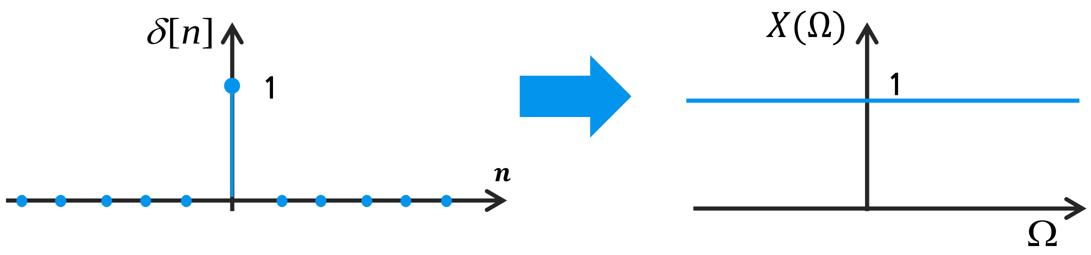
비주기 이산 신호 퓨리에 변환(Discrete Time Fourier Transform)

4. 주요 이산 신호에 대한 이산 퓨리에 변환

1) 임펄스 신호

- 단위 임펄스 신호 $x[n]=\delta[n]$ 의 이산 시간 퓨리에 변환

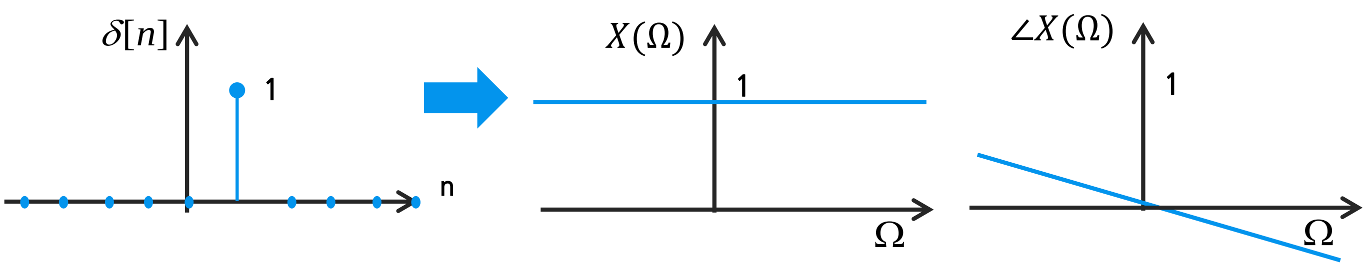
$$X(\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta[n]e^{-j\Omega n}=1$$



⇨ 임펄스 신호는 모든 주파수 성분을 포함함

2) 시간 지연된 임펄스 신호

$$x[n]=\delta[n-1] \qquad X(\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta[n-1]e^{-j\Omega n}=e^{-j\Omega}$$



⇨ 스펙트럼의 크기는 1이지만, 주파수에 비례하는 위상을 가짐

비주기 이산 신호 퓨리에 변환(Discrete Time Fourier Transform)

4. 주요 이산 신호에 대한 이산 퓨리에 변환

3) 정현파 신호

$$e^{j\Omega_0 n} \Leftrightarrow 2\pi\delta(\Omega-\Omega_0)$$

$$x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} 2\pi\delta(\Omega-\Omega_0)e^{j\Omega n}d\Omega = e^{j\Omega_0 n}$$

⇨ 오일러 공식을 이용하여 정현파는 복소 정현파로 바꾸어 나타내면

$$F\{\cos\Omega_0 n\} = F\left\{\frac{e^{j\Omega_0 n}+e^{-j\Omega_0 n}}{2}\right\} = \pi\delta(\Omega-\Omega_0)+\pi\delta(\Omega+\Omega_0)$$

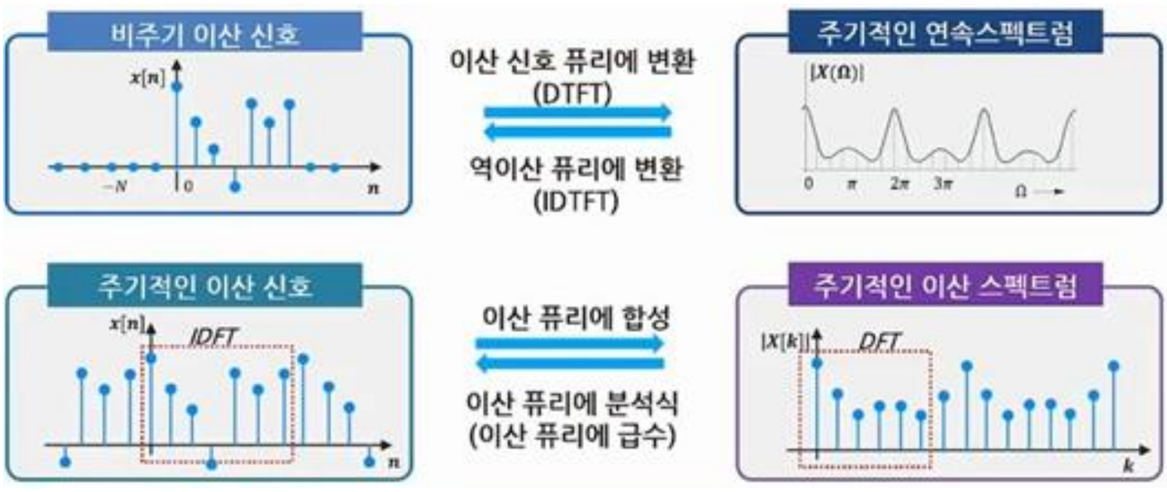
$$\boxed{\cos\Omega_0 n \Leftrightarrow \pi\delta(\Omega-\Omega_0)+\pi\delta(\Omega+\Omega_0)}$$

4) 이산 주기 신호

- 이산 주기 신호의 주파수 스펙트럼은 같은 파형을 가진 비주기 신호의 이산 퓨리에 변환을 샘플링한 이산함수임 ⇨ 스펙트럼 간격은 **2π**임

$$X_N(\Omega)=\frac{2\pi}{N}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X(k\Omega_0)\delta(\Omega-k\Omega_0)$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X_N(\Omega)e^{j\Omega n}d\,\Omega=\sum_{k=0}^{N-1}X_k e^{jk\Omega n}=x_N[n]$$



핵심정리

이산 퓨리에 급수의 특징

이산 시간 분석식 (퓨리에 급수)	$X[k]=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x[n]e^{-jk\Omega_0 n}$
이산 시간 합성식 (퓨리에 급수)	$x[n]=\sum_{n=0}^{N-1}X[k]e^{jk\Omega_0 n}$

- 이산 퓨리에 급수의 주요성질

– 선형성(Linearity)

$x_1[n] \Leftrightarrow X_1[k]$ 이고 $x_2[n] \Leftrightarrow X_2[k]$ 이면

$Ax_1[n]+Bx_2[n] \Leftrightarrow AX_1[k]+BX_2[k]$

– 시간이동(Time-shifting)

$x[n] \Leftrightarrow X[k]$ 이면, $x[n-n_0] \Leftrightarrow X[k]e^{-j2\pi kn_0/N}=X[k]e^{-jkn_0\Omega_0}$

– 시간 컨볼루션 $x_1[n]\otimes x_2[n]=\sum_{m=0}^{N-1}x_1[m]x_2[n-m] \Leftrightarrow NX_1[k]X_2[k]$

– 주파수 컨볼루션 $x_1[n]x_2[n] \Leftrightarrow X_1[k]\otimes X_2[k]=\sum_{m=0}^{N-1}X_1[m]X_2[k-m]$

비주기 이산 신호에 대한 퓨리에변환

주기 N인 이산 신호 $x[n]$에 대한 이산 퓨리에 급수(DTFS)		비주기 이산 신호 $x[n]$에 대한 이산 퓨리에 변환(DTFT)
$X[k]=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x[n]e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$	➡	$X(\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]e^{-j\Omega n}$

주기 N인 이산 신호 $x[n]$에 대한 이산 퓨리에 합성식		비주기 이산 신호 $x[n]$에 대한 이산 퓨리에 역변환
$x[n]=\sum_{n=0}^{N-1}X[k]e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$	➡	$x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X(\Omega)e^{j\Omega n}d\Omega$