디지털신호처리

강 의 노 트

차분 방정식과 FIR 필터

11주차 2차시

학습내용

- ❖ 차분 방정식의 특징과 해
- ❖ FIR 필터

학습목표

- ❖ 차분 방정식으로 표현되는 선형 시불변 시스템의 특징을 설명할 수 있으며 차분 방정식의 해를 구할 수 있다.
- ❖ FIR 필터의 특징을 이해하고 구현할 수 있다.

차분 방정식의 특징과 해

1. 차분 방정식으로 표현된 선형 시불변 시스템의 특징

1) 정의

- **모든 이산 선형 시불변 시스템(재귀·비재귀 시스템)은 상수 계수를 갖는 차분 방정식으로 표현 가능함**

$$y[n] = -\sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k] + \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

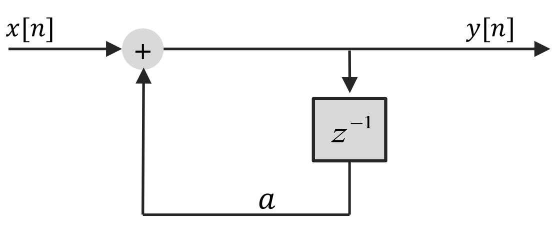
$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] \qquad a_0 \equiv 1$$

※ a_k, b_k: 상수, 정수 N: 차분 방정식의 차수 결정

- **시간 영역에서 이산 선형 시불변 시스템의 응답은 컨볼루션 연산과 더불어 차분 방정식의 해를 구하는 것**

2) 1차 차분 방정식으로 표현된 재귀시스템

$$y[n] = ay[n-1] + x[n]$$



- **입력 신호 $x[n]$은 $n \geq 0$ 동안 주어지고, 초기 조건 $y[-1]$은 임의의 초기값으로 가정**
- **차분 방정식의 수식을 전개하여 이산 시스템의 출력을 명확하게 구할 수 있음**

$n = 0$	$y[0] = ay[-1] + x[0]$
$n = 1$	$y[1] = ay[0] + x[1] = a^2 y[-1] + ax[0] + x[1]$
$n = 2$	$y[2] = ay[1] + x[2] = a^3 y[-1] + a^2 x[0] + ax[1] + x[2]$

$$y[n] = ay[n-1] + x[n] = a^{n+1} y[-1] + a^n x[0] + a^{n-1} x[1] + \cdots ax[n-1] + x[n]$$

보다 간단히 정리하면,

$$y[n] = a^{n+1} y[-1] + \sum_{k=0}^{n} a^k x[n-k], \quad n \geq 0$$

차분 방정식의 특징과 해

2) 1차 차분 방정식으로 표현된 재귀시스템

$$y[n]=ay[n-1]+x[n] \Rightarrow y[n]=\boxed{a^{n+1}y[-1]}+\boxed{\sum_{k=0}^{n}a^k x[n-k]},\quad n\ge 0$$

시스템의 초기조건에 대한 출력응답 / 입력 신호 *x[n]*에 대한 시스템 응답

- n=0에서 시스템의 초기 조건 $y[-1]$ =0 이라면 (즉, 메모리 값 = 0)
  ⇨ 시스템의 초기 조건에 의한 출력 응답은 0

$$y[n]=ay[n-1]+x[n] \Rightarrow y[n]=a^{n+1}y[-1]+\boxed{\sum_{k=0}^{n}a^k x[n-k]},\quad n\ge 0$$

영상태 응답

영상태 응답 Zero-state Response

영상태에 대한 출력을 의미

※ 시스템의 메모리는 '상태(State)', 시스템은 영상태(Zero-state)

$$y_{zs}[n]=\sum_{k=0}^{n}a^k x[n-k],\quad n\ge 0$$

- 입력 신호에 따른 강제적인 출력을 갖는 응답이므로 시스템의 강제 응답이라고도 함

  - 영상태 응답은 입력 신호와 다음과 같은 임펄스 응답의 컨볼루션 연산임

$$y_{zs}[n]=\sum_{k=0}^{n}a^k x[n-k],\quad n\ge 0 \Rightarrow y_{zs}[n]=h[n]*x[n]=\sum_{k=0}^{n}h[k]x[n-k],\quad n\ge 0$$

$$h[n]=a^n u[n]$$

$h[n]=a^n u[n]$ 임펄스 응답을 갖는 이산 시스템 ⇨ 선형 시불변 IIR 시스템

$$y[n]=ay[n-1]+x[n] \Rightarrow y[n]=\boxed{a^{n+1}y[-1]}+\sum_{k=0}^{n}a^k x[n-k],\quad n\ge 0$$

영입력 응답 (고유 응답, 자유 응답)

영입력 응답 Zero-input Response

입력 신호 $x[n]=0$이고, 초기 상태 $y[n]\neq 0$ 인 시스템 응답

$$y_{zi}[n]=a^{n+1}y[-1],\quad n\ge 0$$

- 0이 아닌 초기 조건을 갖는 재귀 시스템은 입력이 가해지지 않아도 출력 값을 생성할 수 있고, 이러한 영입력 응답은 시스템의 메모리에 기인함

차분 방정식의 특징과 해

2. 차분 방정식의 해

1) 1차 차분 방정식과 이산 시스템

- 1차 차분 방정식으로 표현되는 이산 시스템은 가장 간단하게 구현할 수 있는 재귀 시스템

$$y[n] = -\sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k] + \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

※ 정수 N: 차분 방정식의 차수 ,시스템의 차수

- 차분 방정식의 해 = 영입력 응답+ 영상태 응답

2) 차분 방정식의 해를 구하는 방법

① 차분 방정식의 해는 출력 값 n=0, 1, 2, ⋯, n 에 대한 $y[n]$을 순차적으로 구할 수 있음
② 해석적인 방법으로 영입력 응답과 영상태 응답의 합으로 구할 수 있음
③ Z-변환을 이용하여 구할 수 있음

차분 방정식의 특징과 해

2. 차분 방정식의 해

예제 31-01

다음 차분 방정식에 대한 해를 두 가지 방법(순차적인 $y[n]$ 계산 방법, 해석적인 방법)으로 구해 보자.

$$y[n]+0.5y[n-1]=x[n]$$
$$y[-1]=-1$$
$$x[n]=u[n]$$

[예제풀이]

- 차분 방정식의 해1) 순차적인 $\boldsymbol{y[n]}$계산 방법

$$y[n]+0.5y[n-1]=x[n],\quad y[-1]=-1,\quad x[n]=u[n]$$

$n=0$	$y[0]+0.5y[-1]=x[0]\ y[0]=-0.5y[-1]+x[0]=0.5+1=1.5$
$n=1$	$y[1]=-0.5y[0]+x[1]=-0.5*1.5+1=0.25$
$n=2$	$y[2]=-0.5y[1]+x[2]=-0.5*0.25+1=0.875$
$n=3$	$y[3]=-0.5y[2]+x[3]=-0.5*0.875+1=0.5625$

- 차분 방정식의 해2) 해석적인 방법

$$y[n]+0.5y[n-1]=x[n],\quad y[-1]=-1,\quad x[n]=u[n]$$
$$y[n]=y_{zi}[n]+y_{zs}[n]$$

i) 먼저 $\boldsymbol{x[n]=0}$인 경우에 대한 영입력 응답을 구하면 $y[n]=y_{zi}[n]$

$y_{zi}[n]=\lambda^n$ 이라고 가정하면, $\lambda^n+0.5\lambda^{n-1}=0$

$$\lambda^n+0.5\lambda^{n-1}=\lambda^{n-1}(\lambda+0.5)=0$$

$\lambda=-0.5$ 가 되고, 영입력 응답은 $y_{zi}[n]=C\lambda^n=C(-0.5)^n$

이 때, 초기조건에 의해 $y[-1]=-1$이므로, $C=0.5$가 됨

ii) 영상태 응답을 구하면 $y[n]=y_{zs}[n]$

먼저, 입력이 $n\geq 0$에서 입력 신호는 상수, 영상태 응답도 상수라고 가정 $y_{zs}[n]=Ku[n]$

여기서, K는 원래의 차분 방정식을 만족하도록 결정되어야 하는 상수

$$Ku[n]+0.5Ku[n-1]=u[n]$$

$n\geq 1$에 대해 $K+0.5K=1$이 되고, $K=1/1.5$

$$y_{zs}[n]=Ku[n]=\frac{1}{1.5}u[n]$$

FIR 필터

1. FIR 필터의 특징

1) FIR 시스템(Finite-duration Impulse Response)

- 유한 임펄스 응답: 임펄스 응답이 어느 유한한 구간 외에는 응답이 0의 값을 갖는 시스템

$$h[n] = 0 \qquad n < 0\text{과 } n \geq M$$

FIR 시스템 출력식	$y[n] = \sum_{k=0}^{M-1} h[k]x[n-k]$

2) 특징

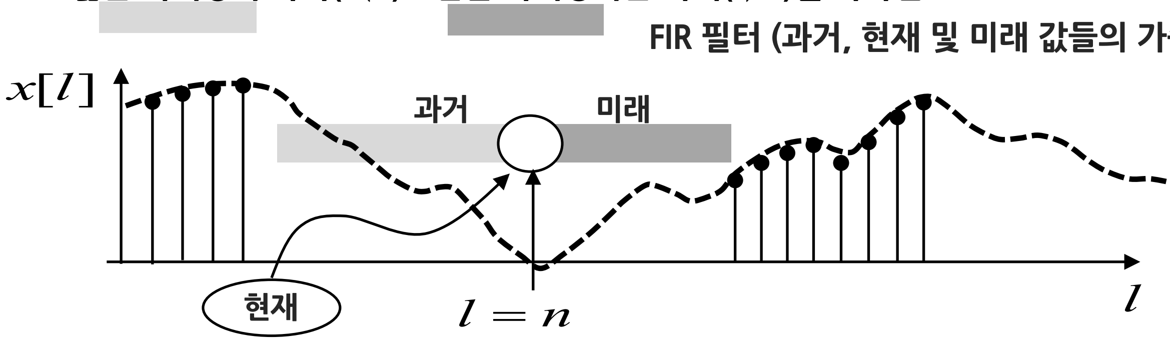
$$y[n] = \sum_{k=0}^{M-1} h[k]x[n-k]$$

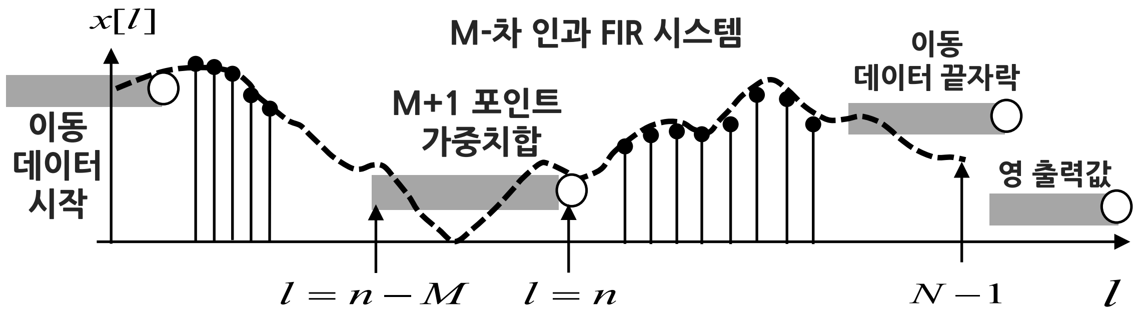
- 일반 차분 방정식에 하나의 특별한 경우가 FIR 필터임
- M+1개의 입력 신호 샘플에 가중치가 곱해진 이동 평균기(Weighted Running Average)라고도 함
- $y[n]$을 계산하는 데는 $l=n, n-1, n-2, \cdots, n-M$에 대하여 $x[l]$값이 필요함
- 미래의 입력 값을 이용하지 않음 ⇨ 인과성을 가짐

FIR 필터

2) 특징

- 이동 평균 필터(Moving Average/Running Average): FIR 필터의 한 종류임
  두 개 이상의 연속된 입력 값의 평균을 계속적으로 계산하는 것으로 평균 이산 시간 신호를 간단하게 변화시키며 유용함
- 현재 시간(l=n)에서의 이동 평균 필터 계산에서는 슬라이딩 윈도우 내(회색영역)의 값들을 사용함
  ⇨ 옅은 회색영역 과거(l<n) / 진한 회색영역은 미래(l>n)를 나타냄





$$y[n] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

- M+1개의 점으로 이루어진 슬라이딩 윈도우의 여러 위치를 보여주는 M차 인과성 FIR 필터의 작용
- 그림에서 가중치가 주어진 평균값을 구함
- 입력 신호 $x[l]$이 유한(N점)할 때, 결과적으로 얻는 출력도 유한한 길이를 가짐

$$\boxed{y[n] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]}$$

- FIR 필터 계수 {b_k}가 주어지면 FIR 필터는 완전히 정의됨
  [예] {b_k}={3,-1,2,1}이면, M=3이고, 필터의 길이가 4되어 4점 차분 방정식이 됨

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] = \sum_{k=0}^{3} b_k x[n-k]$$
$$= 3x[n] - x[n-1] + 2x[n-2] + x[n-3]$$

- 인자 M은 FIR 필터의 차수(Order)라고 함

FIR 필터

2. 이산 컨볼루션과 FIR 필터

1) 이산 컨볼루션과 FIR 필터 관계

FIR 필터 시스템		이산 컨볼루션
$y[n]=\sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$	⟺	$y[n]=\sum_{k=0}^{M} h[k]x[n-k]$

?

FIR 필터 계수 $\{b_k\}$와 임펄스 응답 $h[n]$의 관계는?

⇨ 임펄스 응답 $h[n]$이 FIR 필터 계수 b_k임

FIR 필터 계수와 임펄스 응답 $h[n]$의 관계

n	$n < 0$	0	1	2	3	$\cdots$	M	$M+1$	$n > M+1$
$x[n]=\delta[n]$	0	1	0	0	0	0	0	0	0
$y[n]=h[n]$	0	b_0	b_1	b_2	b_3	$\cdots$	b_M	0	0

$$h[n]=\sum_{k=0}^{M} b_k \delta[n-k]=\begin{cases} b_n, & n=0,1,2,\cdots,M \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

FIR 필터 계수 b_k = 임펄스 응답 $h[n]$

FIR 필터

2. 이산 컨볼루션과 FIR 필터

예제 31-02

4-point 이동 평균 필터의 입출력 관계식(차분 방정식)은 다음과 같다.
이러한 4-point 이동 평균 필터의 임펄스 응답 $h[n]$을 구해보자.

$$y[n]=\tfrac{1}{4}(x[n]+x[n-1]+x[n-2]+x[n-3])$$

[예제풀이]

- 임펄스 응답은 입력 신호가 임펄스일 때의 출력 신호이므로,

$x[n]=\delta[n]$ 일 때

$$y[n]=\tfrac{1}{4}(\delta[n]+\delta[n-1]+\delta[n-2]+\delta[n-3])$$

$$h[n]=\tfrac{1}{4}(\delta[n]+\delta[n-1]+\delta[n-2]+\delta[n-3])$$

$$h[n]=\{\cdots,0,0,\underset{\uparrow}{\frac{1}{4}},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4},0,0,0,\cdots\}$$

핵심정리

차분 방정식의 특징과 해

- 모든 이산 선형 불변 시스템(재귀/비재귀 시스템)은 상수 계수를 갖는 차분 방정식으로 표현됨

  $$y[n] = -\sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k] + \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

  여기서, a_k 와 b_k는 상수, 정수 N은 차분 방정식의 차수를 결정

- 시간 영역에서 이산 선형 시불변 시스템의 응답은 컨볼루션 연산과 더불어 차분 방정식의 해를 구하는 것임

- 일반적인 차분 방정식의 해(전체 이산 시스템의 응답)는 다음과 같이 영입력 응답과 영상태 응답의 합과 같음

  $$y[n] = y_{zi}[n] + y_{zs}[n]$$

- 차분 방정식의 해는 다음과 같이 3가지 방법으로 그 해를 구할 수 있음

방법 1) 출력 값 n=0, 1, 2, ⋯, n 에 대한 y[n]을 순차적으로 구할 수 있음

방법 2) 해석적인 방법으로 영입력 응답(Zero-input Response) 과 영상태 응답(Zero-state Response)의 합으로 구할 수 있음

방법 3) Z-변환을 이용한 차분 방정식의 해로 구할 수 있음

핵심정리

FIR 필터

- FIR(Finite-duration Impulse Response: 유한 임펄스 응답) 시스템
  임펄스 응답이 어느 유한한 구간 외에는 응답이 0의 값을 갖는 시스템을 의미
- FIR 이산 시스템의 출력식

$x[n]$ → **이산 시스템** → $y[n]$

$h[n] = 0 \qquad n < 0$과 $n \geq M$

FIR 시스템 출력식	$y[n] = \sum_{k=0}^{M-1} h[k]x[n-k]$

- FIR 필터: M+1개의 입력 신호 샘플에 가중치가 곱해진 이동 평균기 (Weighted Running Average)라고도 함
- y[n]을 계산하는 데는 $l = n, n-1, n-2, \cdots, n-M$에 대하여 $x[l]$값이 필요함
- FIR 필터 시스템은 미래의 입력 값을 이용하지 않기 때문에 인과성을 가짐