디지털신호처리

강 의 노 트

샘플링 이론

학습내용

❖ 샘플링 이론

❖ 샘플링 이론 증명

학습목표

❖ 샘플링 이론에 대해 이해하고 설명할 수 있다.

❖ 샘플링 이론을 증명할 수 있다.

샘플링 이론

1. 아날로그·디지털 시스템

1) 아날로그와 디지털

- 아날로그 시계 vs. 디지털 시계
- 아날로그 TV vs. 디지털 TV
- 아날로그 영화(아날로그 카메라, 필름) vs. 디지털 영화(디지털 카메라, 파일)
- 비디오 테이프 레코더 vs. 디지털 비디오 레코더

2) 정의

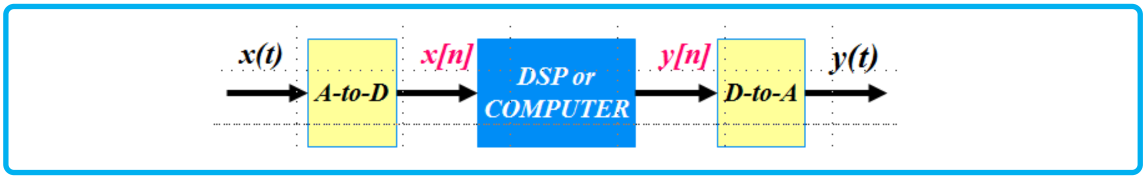
- 입력 $x(t)$을 변경하여 출력 신호 $y(t)$ 생성
- 입력 신호 $x(t)$를 개선 [예] 이미지 개선(Image Enhancement)
- $x(t)$에서 원하는 정보 신호 $y(t)$를 추출

3) 아날로그 시스템과 디지털 시스템의 비교- 아날로그 시스템

- 아날로그 부품들:저항(Resistor), 커패시터(Capacitor), 증폭기(Op-amps)

4) 아날로그 시스템과 디지털 시스템의 비교- 디지털 시스템

- 마이크로프로세서(Microprocessor), 다양한 디지털 신호 처리 알고리즘인 DSP(Digital Signal Processor)

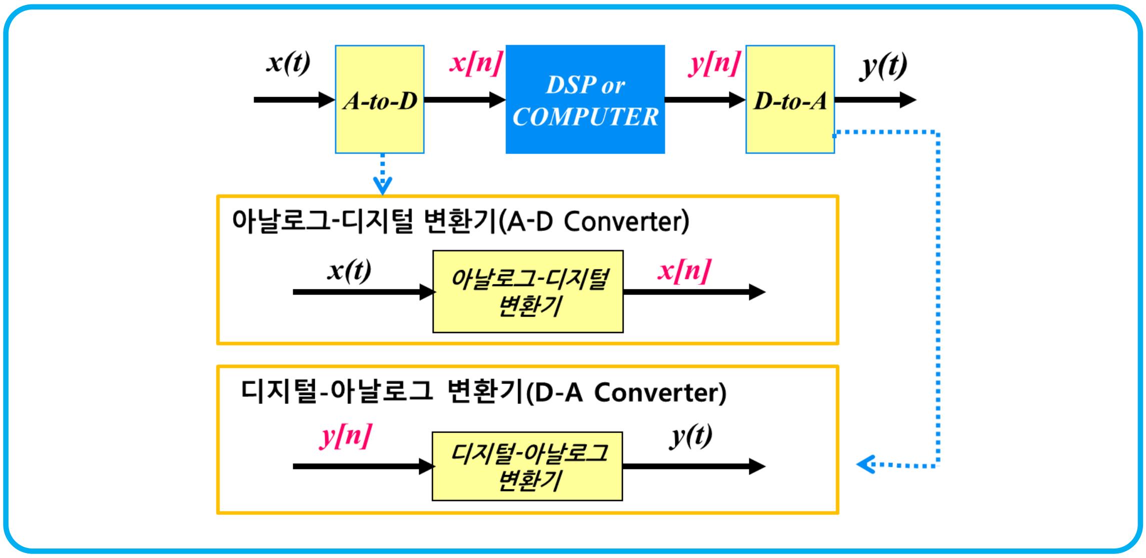


5) [예] 블러링(Blurring) 신호 처리하는 디지털 시스템

샘플링 이론

2. 아날로그·디지털 변환기(A-D변환기)

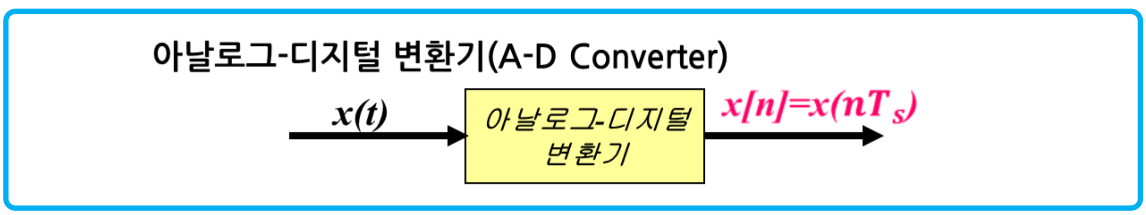
1) 개념



- 샘플링 과정: 연속 신호 $x(t)$를 이산 신호 $x[n]$으로 변환하는 과정
- Uniform Sampling: 일정한 간격의 시간($t = nT_s$) 에서의 샘플링

$$x[n] = x[nT_s]$$

2) 샘플링 주파수(Sampling Frequency, f_s)



- $f_s = {}^{1}/_{T_s}$: 1초에 샘플링하는 샘플 수
- [예] $T_s = 125\mu sec$ 일 때, $f_s = 1/(125 \times 10^{-6}) = 8,000\ samples/sec$

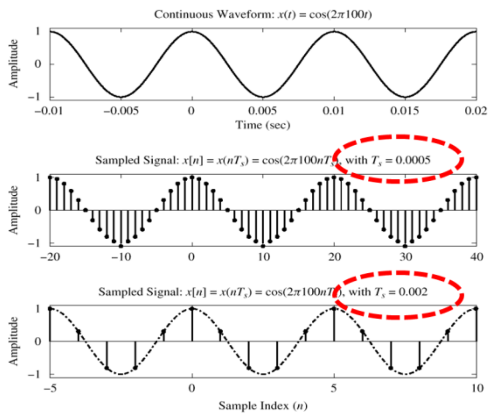
샘플링 이론

2) 샘플링 주파수(Sampling Frequency, f_s) (계속)

$f = 100\text{Hz}$

$f_s = 2kHz$

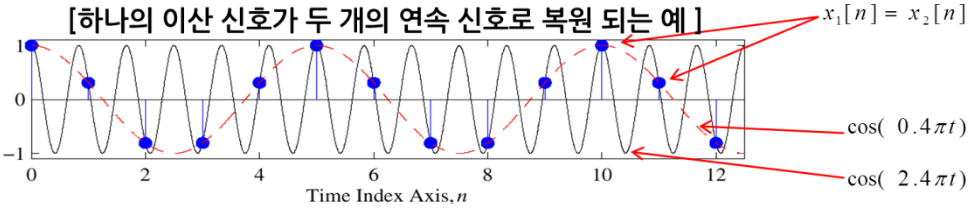
$f_s = 500Hz$



3) 디지털 신호의 모호성

- 이산 신호 $x[n]$으로부터 연속 신호 $x(t)$의 복원(Reconstruction)은?

[하나의 이산 신호가 두 개의 연속 신호로 복원 되는 예]



$x_1[n] = \cos(0.4\pi n)$

$x_2[n] = \cos(2.4\pi n)$

n이 정수인 경우

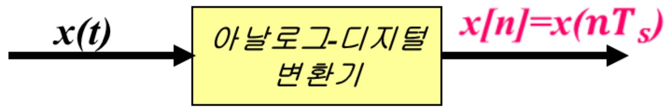
$\cos(0.4\pi n) = \cos(2.4\pi n)$

샘플링 이론

3. 샘플링 이론이란?

1) 정의

아날로그-디지털 변환기(A-D Converter)



- 아날로그·디지털 변환기에서 입력 신호 $x(t)$를 이산 신호 $x[n]$으로 변환하기 위해 얼마나 자주 샘플링 해야 할까? 즉, 샘플링 주파수 f_s?
→ 섀논의 샘플링 이론(Shannon's Sampling Theorem)

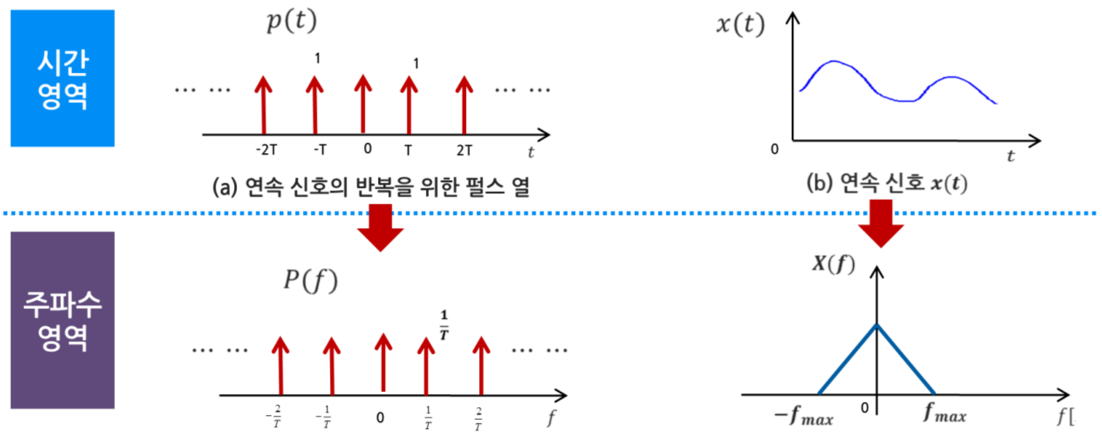
2) 섀논의 샘플링 이론(Shannon's Sampling Theorem)

- 연속 신호 $x(t)$의 최대 주파수가 f_{max} 이고, 이산 신호 $x[n]=x(nT_s)$으로 부터 정확하게 복원하기 위해서는 연속 신호 $x(t)$에 대한 샘플링 주파수 f_s 는 입력 신호의 최대 주파수의 2배($2f_{max}$)이상임

$$f_s \geq 2f_{max}$$

샘플링 이론 증명

1. 샘플링 이론 증명



(a) 연속 신호의 반복을 위한 펄스 열

(b) 연속 신호 $x(t)$

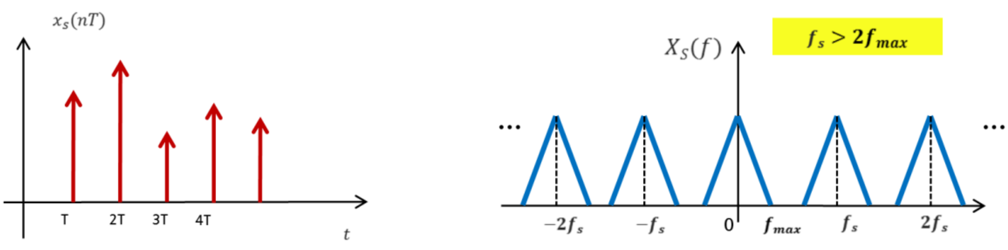
(c) $p(t)$의 스펙트럼 $P(f)$

(d) 연속 신호 $x(t)$의 스펙트럼 $X(f)$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k e^{j\omega_0 kt} \qquad \omega_o = 2\pi f_0, \quad f_0=\frac{1}{T}$$

$$a_k=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}x(t)e^{-j\omega_0 kt}dt=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\delta(t)e^{-j\omega_0 kt}dt=\frac{1}{T}$$ 모든 k에 대하여

$$x_s(nT)=x(t)p(t) \quad\Rightarrow\quad X_s(f)=X(f)*P(f)$$



(a) 샘플링된 이산 신호

(b) 샘플링된 이산 신호의 스펙트럼, $X_s(f)$

- 샘플링 된 이산 신호의 스펙트럼

(a) $f_s = 2f_{max}$ 일 때의 샘플링 된 이산 신호의 스펙트럼

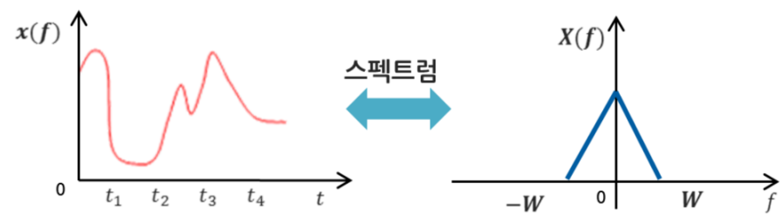
(a) $f_s < 2f_{max}$ 일 때의 샘플링 된 이산 신호의 스펙트럼

샘플링 이론 증명

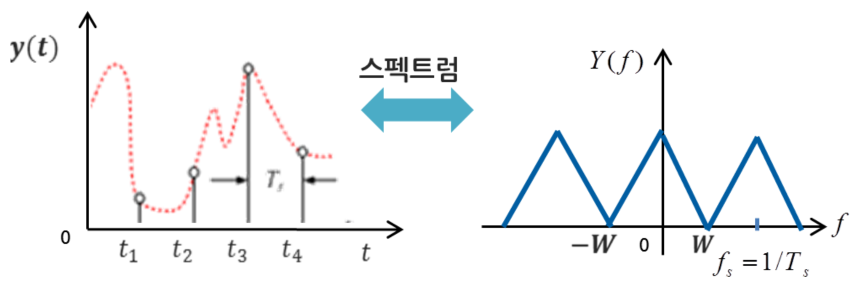
2. 나이키스트 샘플링률(Nyquist Sampling Rate)

1) 아날로그 신호와 이산 신호의 스펙트럼

- 아날로그 신호



- 이산 신호



2) 정의

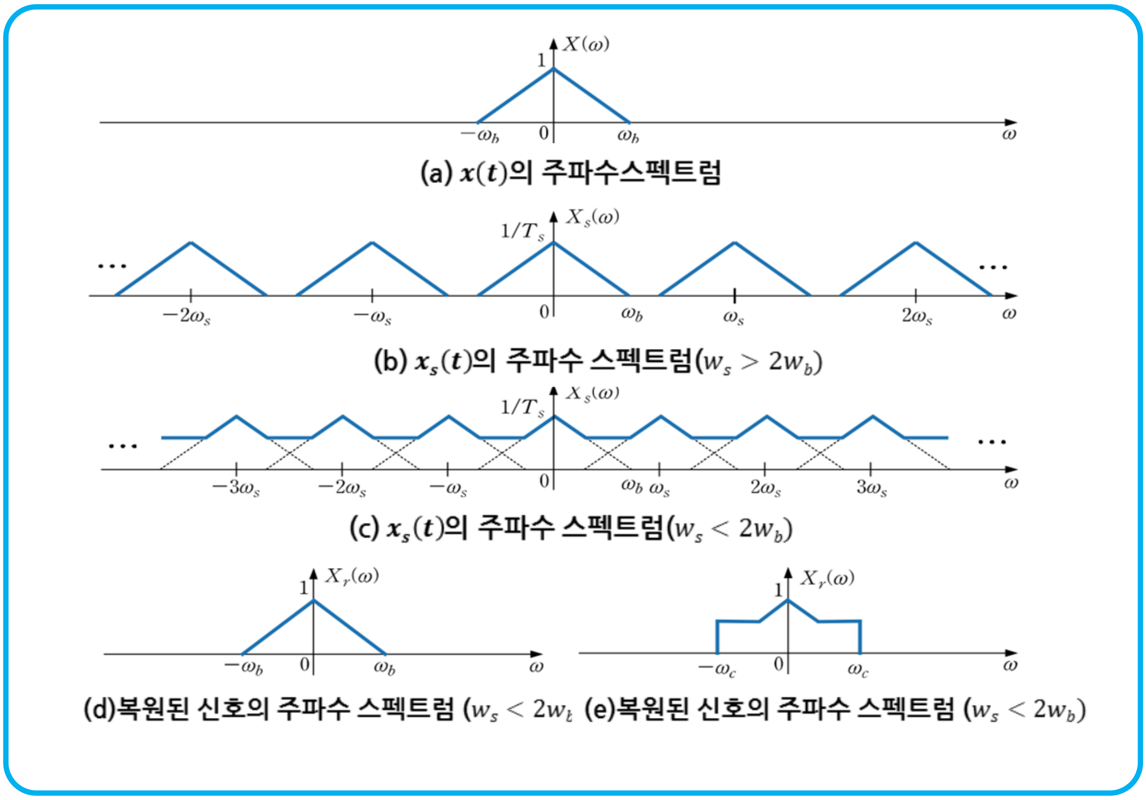
- 아날로그 입력 신호 $x(t)$의 주파수 성분 중 최대 주파수를 f_m 이라 하면, 샘플링 주파수 f_s 가 $f_s = 2f_m$ 이 되는 주파수

$$f_{Nyquist\ Sampling\ Rate} = 2f_m$$

샘플링 이론 증명

3. 주파수 겹침 현상(Aliasing)

- 아날로그 신호를 디지털 신호 변환 과정에서 샘플링 주파수 < 나이키스트 샘플링률 (Nyquist Sampling Rate)로 원래의 신호를 복원하지 못하고, 왜곡이 발생하는 현상
- 샘플링 효과와 LP필터를 이용한 신호 복원
  → 샘플링 이론에 의하여, 연속 신호를 샘플링할 때 주파수 겹침 현상이 발생하면 원신호를 제대로 복원할 수 없음



핵심정리

샘플링 이론

- 연속 신호 $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t})$의 최대 주파수가 $\boldsymbol{f_{max}}$이고, 이산 신호 $x[n]=x(\boldsymbol{nT_s})$으로 부터 정확하게 복원하기 위해서는 연속 신호 $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t})$에 대한 샘플링 주파수 $\boldsymbol{f_s}$ 는 입력 신호의 최대 주파수의 2배($\boldsymbol{2f_{max}}$)이상임

$$\boldsymbol{f_s \geq 2f_{max}}$$

샘플링 이론 증명

- 나이키스트 샘플링률(Nyquist Sampling Rate): 아날로그 입력 신호 $x(t)$의 주파수 성분 중 최대 주파수를 $\boldsymbol{f_m}$ 이라 하면, 샘플링 주파수 $\boldsymbol{f_s}$ 가 $\boldsymbol{f_s = 2f_m}$ 이 되는 주파수

$$\boldsymbol{f_{Nyquist\ Sampling\ Rate} = 2f_m}$$

- 주파수 겹침 현상(Aliasing): 아날로그 신호를 디지털 신호로 변환하는 과정에서 샘플링 주파수를 나이키스트 샘플링률(Nyquist Sampling Rate)보다 작게 하여 원래의 신호를 복원하지 못하고, 왜곡이 발생하는 현상