Weiterführende Projekte zu Numerik I
2019

Russell Luke, Jochen Schulz, Christoph Rügge

Projektaufgaben

Die folgenden Aufgaben sollen im Rahmen des Kurses bearbeitet werden. Aufgabe 1 und 2 sind verpflichtend zu bearbeiten; Aus den drei anderen Aufgaben kann man sich eine aussuchen.
Machen sie sich jeweils grundlegend Gedanken darüber, wie der Code strukturiert werden soll, und wie man diesen auf Korrektheit überprüft. Teilen sie sich die Arbeit in kleine Schritte auf. Insbesondere ist auch die Visualisierung von Bedeutung. Benutzen sie dafür z.B. direkt Matlab, Gnuplot, matplotlib (python) oder Daten-Formate die Paraview einlesen kann.

Aufgabe 1 : *Wärmeleitungsgleichung (linear)*

Gegeben sei ein rechteckiges Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ und eine zeitabhängige Funktion $u(x,t), x \in \Omega, t \in \mathbb{R}^+$. Dann ist die Wärmeleitungsgleichung gegeben durch

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \alpha \Delta u = 0 \text{ in } \Omega$$

mit einer Konstante $\alpha \in \mathbb{R}$. Gegeben seien Dirichlet Randbedingungen

$$u = R, \text{ auf } \partial\Omega$$

mit einer Funktion $R : \partial\Omega \to C(\partial\Omega)$. Zum Zeitpunkt $t = 0$ sei

$$u(x,0) = f(x), \forall x \in \Omega.$$

mit einer beliebigen, aber fest gewählten initialen Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
Lösen sie die Gleichung mit mindestens 3 von den unten angegebenen 5 Verfahren. Stellen sie die zeitliche Entwicklung von u in einer Animation oder einem Video dar.

Lösungsmöglichkeiten:

- Gauss-Seidel
- Gauss-Elemination
- Finite Differenzen
- Douglas-Rachford Splitting
- Konjugierte Gradienten

Aufgabe 2 : *Optimierung (nichtlinear)*

Lösen sie die nichtlineare Least Squares (Methode der kleinsten Quadrate) Aufgabe:

$$(\mathcal{P}) \qquad \underset{\mathbb{R}^7}{\text{minimize}}\ f(x) := \tfrac{1}{2}\|g(x)\|_2^2.$$

Die Matlab Funktions-Dateien für $g : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^8$, $\nabla g : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^{7\times 8}$ und $\nabla^2 g : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^{7\times 7\times 8}$ sind in StudIP zu finden (Ggf. konvertieren). Finden sie aus dem Anfangspunkt $x_0 = zeros(7,1)$ eine Approximation $\widetilde{x}$ zu einer globalen Lösung mit $\|\nabla f(\widetilde{x})\| \leq 10^{-11}$. Erstellen sie bei der Lösung der Aufgabe folgende Grafiken und Tabellen:

- Norm des Gradienten (Grafik),
- Funktionswerte (Grafik),
- Schrittweiten (Grafik),
- Funktionswert, Gradient und Hessian (Tabelle) mit folgenden Hessians:
  1. $H_\nu = \nabla^2 f(x_\nu)$
  2. H_ν gleich dem BFGS Schritt mit $H_0 = I$.
  3. H_ν gleich zu Broyden's *schlechten* Schritt mit $H_0 = I$.

Lösungsmöglichkeiten: (es muss in jedem Schritt ein lineares System gelöst werden!)

- Newton-Verfahren
- Matrix Sekanten Verfahren

Aufgabe 3 : *(SIAM 100 Digits Challenge, Aufgabe 3)*

Die unendliche Matrix A hat die Einträge $a_{11} = 1$, $a_{12} = 1/2$, $a_{21} = 1/3$, $a_{13} = 1/4$, $a_{22} = 1/5$, $a_{31} = 1/6$ und so weiter. Diese Matrix ist eine endlicher Operator in ℓ_2 (quadrat-summierbare Summen in $\mathbb{Z}_+$) .
Was ist die Norm von A ($\|A\|$)?

Aufgabe 4 : *(SIAM 100 Digits Challenge, Aufgabe 4)*

Berechnen Sie das globale Minimum der Funktion

$$f(x) := e^{\sin(50x)} + \sin(60e^y) + \sin(70\sin x) + \sin(\sin(80y)) - \sin(10(x+y)) + (x^2+y^2)/4.$$

Visualisieren sie die Funktion als erstes und untersuchen sie deren Verhalten.

Aufgabe 5 : *(SIAM 100 Digits Challenge, Aufgabe 7)*

Es sei A eine 20.000×20.000 Matrix, deren Eintrage Null sind bis auf die Primzahlen $2, 3, 5, 7, \ldots, 224737$ auf der Diagonalen und der Ziffer 1 in allen Einträgen a_{ij} mit $[i-j] = 1, 2, 4, 8, \ldots, 16384$.
Was ist der $(1,1)$ Eintrag von A^{-1}? Wie kann man sich die Struktur der Matrix geeignet ansehen? Überlegen sie sich auch die geeignete Speicherung und Behandlung der Matrix.