Methoden der Numerik

Christina Eilers, Julian Lüken

1. April 2019

Mathematisches Institut Göttingen

Aufgabe 1 - Wärmegleichung

Wärmegleichung

Die Wärmegleichung lautet

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \alpha \nabla^2 u$$

Mit $u : \Omega \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ mit folgenden Randbedingungen:

- $u(x, t) = R$ für $x \in \partial\Omega$
- $u(x, 0) = f(x)$, wobei f beliebig aber fest.

Diskretisierung der Wärmegleichung

Nimm endlich viele, äquidistante Stellen aus Ω, sodass Folgen entstehen mit $x_i = ih + x_0$ und $y_j = jh + y_0$. Wähle zusätzlich für die Zeit $t_k = k\Delta t + t_0$ Wir schreiben $U_{i,j}^k$ für die i, j-te Stelle zum Zeitpunkt k. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ entsteht eine $m \times m$ Matrix. Zum Zeitpuntk k haben wir dann:

$$\begin{pmatrix} u_{0,0}^k & u_{0,1}^k & \cdots & u_{0,m}^k \\ u_{1,0}^k & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \\ u_{m,0}^k & \cdots & & u_{m,m}^k \end{pmatrix}$$

Diskretisierung der Wärmegleichung

Schreibe diese Matrix als Vektor, damit wir einen linearen Operator in Form einer Matrix darauf anwenden können, folgendermaßen:

$$u^k = \begin{pmatrix} u^k_{0,0} \\ u^k_{0,1} \\ \vdots \\ u^k_{0,m} \\ u^k_{1,0} \\ u^k_{1,1} \\ \vdots \\ u^k_{m,m} \end{pmatrix}$$

Diskretisierung der Wärmegleichung

Aus der Taylor-Entwicklung folgt für die Ableitung nach t

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,y,t) = \frac{u(x,y,t+\Delta t) - u(x,y,t)}{\Delta t} + O(\Delta t^2)$$

und für den Laplace-Operator

$$\nabla^2 u(x,y,t) = \frac{1}{4h^2}\Big(u(x-h,y,t) + u(x+h,y,t) + u(x,y-h,t) + u(x,y+h,t) - 4u(x,y,t)\Big) + O(h^4)$$

Diskretisierung der Wärmegleichung

Für den diskreten Fall (und unter der Annahme, dass bei den Gleichungen von vorhin der Fehlerterm für hinreichend kleine h und Δt wegfällt), erhalten wir folgende Matrix:

$$A = \frac{\alpha}{4h^2}\left(\operatorname{tridiag}(1,-4,1) + G\right) \in \mathbb{R}^{m^2 \times m^2}$$

wobei

$$G = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{I} & 0 & & \cdots & & 0 \\ \mathrm{I} & 0 & \mathrm{I} & & & & \\ 0 & \mathrm{I} & & & & & \\ \vdots & & & & \ddots & & \vdots \\ & & & & & 0 & \mathrm{I} \\ 0 & & & & & \mathrm{I} & 0 \end{pmatrix}$$

eine Blockmatrix mit $m \times m$ Einheitsmatrizen auf den Nebendiagonalen.

Diskretisierung der Wärmegleichung

Durch Umstellen der Wärmegleichung mit A von vorhin können wir durch folgende Iterationsvorschrift mit gegebenen Startwerten u^0 den Verlauf der Wärmegleichung simulieren:

$$u^{k+1} = (A + I)u^k$$

Mehrfachanwendung des Operators steht für größeres Δt.
Wählt man mehr Samples, so wird h kleiner.

Aufgabe 2 - Newton-Verfahren

Lösungen

	klassisch	BFGS	Broyden
$f(x)$	2291.020503182124	2291.0205031821224	2291.020503182123
$\nabla f(x)$	$\begin{pmatrix} 0 \\ -1.137 \\ 0.941 \\ -0.284 \\ 5.684 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot 10^{-13}$	$\begin{pmatrix} -2.274 \\ 67.075 \\ 21.245 \\ -7.248 \\ 37.232 \\ -2.256 \\ -2.487 \end{pmatrix} \cdot 10^{-13}$	$\begin{pmatrix} -3.411 \\ -14.780 \\ -4.814 \\ 1.705 \\ 86.118 \\ -3.606 \\ 0.249 \end{pmatrix} \cdot 10^{-13}$

Hesse-Matrizen

$$H^{-1} = \begin{pmatrix} 2.151 & 0.598 & 3.538 & 16.956 & -0.078 & -2.615 & -0.039 \\ 0.598 & 3.288 & 0.121 & 22.659 & 0.310 & 13.016 & -0.011 \\ 3.538 & 0.121 & 13.622 & 45.657 & -0.220 & -8.099 & -0.260 \\ 16.956 & 22.659 & 45.657 & 323.998 & 1.294 & 58.392 & -0.897 \\ -0.078 & 0.310 & -0.220 & 1.294 & 0.148 & 2.717 & 0.001 \\ -2.615 & 13.016 & -8.099 & 58.392 & 2.717 & 93.675 & 0.047 \\ -0.039 & -0.011 & -0.260 & -0.897 & 0.001 & 0.047 & 3.256 \end{pmatrix} \cdot 10^{-3}$$

$$H_{\text{BFGS}}^{-1} = \begin{pmatrix} 1.992 & 0.337 & 3.517 & 14.757 & -0.068 & -3.207 & -0.025 \\ 0.337 & 2.532 & 0.301 & 17.282 & 0.273 & 10.557 & -0.003 \\ 3.517 & 0.301 & 13.449 & 46.290 & -0.189 & -7.443 & -0.278 \\ 14.757 & 17.282 & 46.290 & 284.436 & 1.163 & 42.147 & -0.838 \\ -0.068 & 0.273 & -0.189 & 1.163 & 0.135 & 2.584 & -0.014 \\ -3.207 & 10.557 & -7.443 & 42.147 & 2.584 & 80.445 & 0.562 \\ -0.025 & -0.003 & -0.278 & -0.838 & -0.014 & 0.562 & 3.115 \end{pmatrix} \cdot 10^{-3}$$

$$H_{\text{Broyden}}^{-1} = \begin{pmatrix} 1.003 & 0.353 & 2.534 & 10.787 & -0.024 & -0.808 & -0.305 \\ 0.016 & 0.559 & 1.185 & 4.623 & 0.082 & 4.472 & -0.130 \\ 0.035 & 0.129 & 9.330 & 30.184 & -0.035 & -1.636 & -0.773 \\ 0.301 & 4.001 & 62.421 & 234.475 & -0.381 & 2.729 & -5.924 \\ -0.171 & 0.436 & -1.168 & -0.179 & 0.145 & 2.657 & 0.025 \\ 1.258 & -0.488 & 22.002 & 72.069 & 0.185 & 7.744 & -1.962 \\ 0.009 & -0.057 & -1.015 & -3.702 & 0.007 & -0.004 & 1.718 \end{pmatrix} \cdot 10^{-3}$$