n と $\varphi(n)$ の比例関係について

梶田光

2025/08/13

1. はじめに

$n = 2\varphi(n)$ や $n = 3\varphi(n)$ は飯高先生によって調べられており, 解はそれぞれ $n = 2^e\ (e > 0), n = 2^e 3^f\ (e, f > 0)$ の形に書けることが証明されている.

そこで, 今回はより一般な n と $\varphi(n)$ の比例関係について考察した.

以降, A, B を $\gcd(A, B) = 1$ を満たす正の定数で, $An - B\varphi(n) = 0$ の形の方程式の解について考える.

2. $A = 1$ の場合

定理 2.1: $n - B\varphi(n) = 0$ に解が存在するならば, $B \leq 3$.

Proof: B の偶奇で場合分けをする.

(1) $B : \text{even}$ の場合

n は偶数なので $n = 2^e L\ (e > 0, L : \text{odd})$ と書ける.

これを $n - B\varphi(n) = 0$ に代入すると $2^e L - B \cdot 2^{e-1}\varphi(L) = 0$ が得られる.

両辺を $2^e > 0$ で割ると $L - \dfrac{B}{2}\varphi(L) = 0$ が得られる.

さて, B は偶数なので $\dfrac{B}{2}$ は自然数である.

ここで $L \neq 1$ とすると, $\varphi(L)$ は偶数であるが, これは L が奇数であることに矛盾.

よって $L = 1$ であるが, このとき $1 - \dfrac{B}{2} = 0$, つまり $B = 2$ であり, $B \leq 3$.

(2) $B : \text{odd}$ の場合

いま $B > 4$ を仮定しているので, B は素因数をもつ.

したがって, $B = pD\ (p : \text{odd prime}, D : \text{odd})$ と書ける.

さて, $n - B\varphi(n) = 0$ より n も p の倍数であるから, $n = p^e L\ (e > 0, p \nmid L)$ と書ける.

これと $B = pD$ を $n - B\varphi(n) = 0$ に代入すると $p^e L - p^e D(p-1)\varphi(L) = 0$ を得る.

両辺を $p^e > 0$ で割ると $L - D(p-1)\varphi(L) = 0$ となる.

さて, $p - 1$ は偶数であるから, $D(p-1)$ も偶数.

したがって, $D(p-1) \geq 4$ のときは先ほど示したように解は存在しない.

よって, 解が存在するとすれば $D(p-1) \leq 3$ の場合であるが, これを満たす唯一の D, p は $D = 1, p = 3$ である.

すると $B = pD = 3$ であるが, これは $B \leq 3$ を満たす. ■

3. $A : \mathrm{odd}$ の場合

定理 2.2: $A : \mathrm{odd} > 1, \gcd(A,B) = 1$ とする.

$An - B\varphi(n) = 0$ に解が存在するならば, $2 \parallel p-1$ を満たす奇素数 p を用いて $A = \dfrac{p-1}{2}, B = p$ と書け, さらにこのときの解は $n = 2^e p^f\ (e, f > 0)$ と書ける.

Proof: $\gcd(A,B) = 1, A > 1$ より $A \neq 1$, したがって $n \neq 1$.

また, n は 2 のべきではない; n が 2 のべきであるとすると, $An - B\varphi(n) = 0$ を満たしながら $\gcd(A,B) = 1$ を満たす組は $(A,B) = (1,2)$ しかなく, $A > 1$ の仮定に反するからである.

よって $n \geq 3$ より $\varphi(n)$ が偶数, したがって n も偶数で, $n = 2^e L\ (e > 0, L : \mathrm{odd})$ と書ける.

これを $An - B\varphi(n) = 0$ に代入すると $A \cdot 2^e L - B2^{e-1}\varphi(L) = 0$.

両辺を $2^{e-1} > 0$ で割って $2AL - B\varphi(L) = 0$ を得る.

(1) B が偶数の場合

$2AL - B\varphi(L) = 0$ は $L = \dfrac{B}{2} \cdot \dfrac{\varphi(L)}{A}$ と書き直せる.

ここで B は偶数なので $\dfrac{B}{2}$ は自然数だが, $\gcd(A,B) = 1$ より $\dfrac{\varphi(L)}{A}$ は自然数.

しかし n は 2 のべきではないので, $L > 1$ より $\varphi(L)$ は偶数.

すると $\dfrac{\varphi(L)}{A}$ も偶数となるが, これは L が奇数であることに矛盾.

(2) B が奇数の場合

B, A, L はすべて奇数なので, $2AL - B\varphi(L) = 0$ より $\nu_2(\varphi(L)) = 1$.

さて, $\varphi(L) = \displaystyle\prod_{p^e \parallel L} p^{e-1}(p-1)$ より, L は素因子を 1 つしか持てない.

よって $L = p^f\ (f > 0, p : \text{odd prime})$ と書け, また $\nu_2(p-1) = 1$ より $2 \parallel p-1$.

これを $2AL - B\varphi(L) = 0$ に代入すると $2A \cdot p^f - B \cdot p^{f-1}(p-1) = 0$ を得る.

両辺を $p^{f-1} > 0$ で割ると $2Ap - B(p-1) = 0$ となり, したがって $Ap = B\dfrac{p-1}{2}$.

さて, $\gcd\left(p, \dfrac{p-1}{2}\right) = 1$ より B は p の倍数である.

そこで $D = \dfrac{B}{p}$ とおくと $A = D\frac{p-1}{2}$.

しかし $\gcd(A,B) = 1$ から $\gcd(A,D) = 1$ より, $D = 1$.

したがって $B = p, A = \dfrac{p-1}{2}$

このとき $n = 2^e L = 2^e p^f$. ■