**以****擺線減速機之等效連桿做誤差分析**

(題目：標楷體14點，粗體；14 points, Times New Roman, boldface)

徐冠倫1 周奕彬2

1教　授，國立臺灣大學機械工程系 aaaaa@yuntech.edu.tw

2大專生，國立臺灣大學機械工程系 bbbbb@yuntech.edu.tw

國科會計畫編號：NSTC XXX-XXXX-X-XXX-XXX

(若為科技部補助研究計劃，請填寫計畫編號，10 points, Times New Roman)

# 摘要

（標題：標楷體, Ti**mes New Rom**an 12點，粗體）

本研討會之目的希望藉由參與之學者專家在專業經驗之交流，進而促進有關機構與機器設計在學術研究與實務技術方面之提升，並藉此聯絡彼此之情誼。由國立雲林科技大學所主辦的第二十六屆全國機構與機器設計學術研討會，將於2023年10月27日(五)於雲林縣國立雲林科技大學機械工程系舉行。為了使論文集能有一致的格式，故以本文做為論文準備時之準則。論文可以中文或英文撰寫，但是必須同時有中、英文摘要。若以中文撰寫，文末請附上英文摘要。

(摘要內容 標楷體, Ti**mes New Rom**an, 10 點)

**關鍵詞：**擺線減速機、等效連桿、誤差分析

(3至5詞, 標楷體, Ti**mes New Rom**an, 10點)

# 1. 前言

（主標題置中：標楷體, Ti**mes New Rom**an 12點，粗體）

擺線減速機於各領域被廣泛應用，擁有大比率的速度與力矩變換。其中，擺線減速機由於使用壽命長、結構緊湊、強大的負載能力等優勢，在有限空間應用中是一個常被利用的方案。

擺線減速機的主要部分之一是擺線輪，它的接觸點數量等於與之接觸的由多個滾輪構成的針輪的滾輪數量。通常，根據擺線輪輪廓與固定件的區別，可以將其分為四種擺線驅動類型：固定環齒型外擺線減速機、旋轉環齒型外擺線減速機、固定環齒型內擺線減速機和旋轉環齒型內擺線減速機。

擺線減速機基本上僅有四個部件：偏心凸輪構成的高速輸入軸、擺線輪、針輪以及低速的輸出軸。以固定環齒型外擺線減速機為例，隨著輸入軸的旋轉，它使擺線輪沿固定針輪的內緣滾動，類似於行星齒輪。當擺線輪環繞針輪圓心公轉時，擺線輪本身以偏心凸輪圓心相反方向緩慢自轉。

在應用時，需考慮輪廓加工誤差對運動帶來的影響，但據作者所知，有關擺線減速機誤差的分析發表信息不多，亦或是需使用軟體輔助。Botsiber和Kingston [1] 提出了有關擺線驅動機構操作理論的論點，但缺乏分析工作。Malhotra和Parameswaran [2] 研究了設計參數對擺線減速器各元件力的影響，以及理論效率。Blanche和Yang [3] 利用加工公差開發了擺線驅動的分析模型，並研究了加工公差對反饋間隙和扭矩漣波的影響；他們還提出了一種計算機輔助分析程式來驗證擺線驅動的性能。Litvin和Feng [5] 利用微分幾何生成了擺線齒輪的共軛曲面。最近，Yan和Lai [6] 提出了使用共軛曲面理論的輪外減速器的幾何設計概念。最近，Li等人 [7] 提出了一種雙曲柄環板型擺線驅動，並介紹了其工作原理、優勢和設計問題。

等效連桿優勢在於簡化複雜機構的運動模式，將大部分構件的接觸形式轉換為二接頭桿與旋轉對，方便以順向以及逆向運動學分析各機構的運動模式，以及使用連桿機構的位移方程式進行誤差分析。本方法優勢在僅利用構件的輪廓解析式便可針對擺線減速機誤差分析。另外本研究也將參考\\\\\\\\\以等效連桿方式對凸輪做誤差分析。

在本文中，我們將提出了一種新的方法，通過瞬心向量法，計算擺線輪的幾何輪廓，並使用擺線減速機的等效四連桿進行誤差分析。由於固定元件的區別並不影響等效連桿的參數，本研究僅考慮了如圖 1a、圖 1b中以針輪與擺線輪顯示兩種擺線減速機類型：固定環齒型外擺線減速機以及固定環齒型內擺線減速機。最後基於提出的方法，將使用Matlab語言開發了一個輪廓設計與計算等效連桿的自動化程序。最後，提供了設計範例，以證明這種方法的可行性。

|  |
| --- |
|  |
| (a) 固定環齒型外擺線減速機 |
|  |
|  |
| (b) 固定環齒型外擺線減速機 |
|  |
| 圖 1 擺線減速機式意圖 |

(論文本文：標楷體, Ti**mes New Rom**an 10，標準體)

# 2. 擺線輪輪廓

## 2.1 瞬心向量法

以圖 2舉例，瞬時速度中心是兩剛體相對運動時速度相同的點，根據Kennedy’s定理[1]，平面機構中任意三個相對運動的構件的三個瞬時速度中心都位於同一條直線上。圖2顯示了找到瞬時速度中心所需的構造。在圖2中，元件1為地桿，元件2和3以凸輪對相互接觸。所有的旋轉對（IC12，IC13）都是固定位置的瞬時中心。凸輪對的接觸點間存在滑動。因此，構件2和3有的唯一相對運動是沿著接觸點的共同切線方向，而它們的相對旋轉中心，即瞬時速度中心IC23，必須位於接觸點的共同法線上。然而，根據Kennedy’s定理，瞬時速度中心IC23必須位於線IC12IC13上。因此，瞬時速度中心IC23位於共同法線和線IC12–IC13的交點處。

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | | | | |
|  | | | | |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

表單的頂端

|  |
| --- |
|  |
| 圖 2 |

（第二階層的副標題：標楷體, Ti**mes New Rom**an 11點，粗體）

## 2.2 外擺線輪輪廓解析式

圖 3是一個固定環齒型外擺線減速器的示意圖。基於外擺線輪軸的偏心，該機構的輸入軸旋轉角為φ2，並使用一個曲柄來使外擺線輪繞著輸入軸中心O1做行星運動。同時外擺線輪與固定針輪的嚙合，擺線輪以其自身中心OC自轉，旋轉角為φ3，方向相反於公轉，並與針輪接觸於C點。我們將三個構件編號，曲柄為桿1，擺線輪為桿2，針輪為桿3。輸入軸桿2有角位移𝜑2和擺線輪桿3的位移坐標系有角位移𝜑3。根據Kennedy’s定理，我們可以確定三個瞬時速度中心，即旋轉對點O1作為IC12，旋轉對點OC作為IC23，接觸點C的共同法線與相交於點M作為IC13。我們將輸入軸產生的偏心長度表示為E，令為Q，並將針輪截圓半徑表示為R。設計參數通常有偏心距離，即曲柄長度E，滾輪數N，針輪截圓半徑R以及針輪滾子半徑Rr。

|  |
| --- |
|  |
| 圖 3 |

根據瞬時中心的定義，兩元件在共有的瞬時中心具有相同的速度。點OC的速度V23的大小可以由以下方式確定：

|  |  |
| --- | --- |
| ​ | (1) |

而Pollitt [3] 展示了如何找到擺線輪（行星齒輪）與構成固定針輪（太陽齒）的圓柱滾子之間的接觸點，並得出太陽齒所需的滾子數N比擺線輪與針輪之間所要求的減速比多一。因此，輸出角速度除以輸入角速度定義的角速度比 mV 可以表示為：

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2) |

由於和初始角度為0，進一步將(2)式積分求得:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3) |

根據等式(1)、(3)，我們可以確定先前假設距離Q，如下所示：

|  |  |
| --- | --- |
| Q=EN | (4) |

我們根據圖 3中從擺線輪移動座標原點到接觸點的向量路徑得出下列式子:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5) |

圖 4我們顯示了向量路徑上的所有參數，並假設MC長度L，角角度為ψ:

|  |
| --- |
|  |
| 圖 4 |

於是可以得到接觸點在擺線輪的坐標系下的解析式:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (6) |

|  |  |
| --- | --- |
|  | (7) |

圖 5中展示如何求得L以及ψ:

|  |
| --- |
|  |
| 圖 5 |

L可由角MO1Or求餘弦定理計算出:

|  |  |
| --- | --- |
| L = | (8) |

而ψ可由角MOrO1求正切值:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (9) |

我們令擺線輪輪廓坐標系的旋轉角等於，代入式(3)、(4)，最後簡化(5)、(6)、(7)、(8)式得:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (10) |

|  |  |
| --- | --- |
|  | (11) |

|  |  |
| --- | --- |
|  | (12) |

|  |  |
| --- | --- |
|  | (13) |

## 2.3 內擺線輪輪廓解析式

圖 6是一個固定環齒型內擺線減速器的示意圖。求得接觸點解析式與外擺線減速器使用的過程類似。基於針輪的偏心，該機構的輸入軸使用一個曲柄來使針輪繞著輸入軸中心O1做行星運動。同時針輪與固定內擺線輪的嚙合，擺線輪以其自身中心OC自轉，方向相反於公轉，並與內擺線輪接觸於C點。我們將三個構件編號，曲柄為桿1，針輪為桿2，擺線輪為桿3。輸入軸桿2有角位移𝜑2和針輪桿3的位移坐標系有角位移𝜑3。根據甘迺迪定理，我們可以確定三個瞬時速度中心，即旋轉對點O1作為IC12，旋轉對點OC作為IC23，接觸點C的共同法線與相交於點M作為IC13。我們將輸入軸產生的偏心長度表示為E，令為Q，並將針輪截圓半徑表示為R。設計參數通常偏心距離，即曲柄長度E，滾輪數N，針輪截圓半徑R以及針輪滾子半徑Rr。

|  |
| --- |
|  |
| 圖 6 |

點OC的速度V23的大小可以由以下方式確定：

|  |  |
| --- | --- |
|  | (14) |

與外擺線輪減速機有區別，太陽齒所需的齒數較針輪的滾子數多一。因此，輸出角速度除以輸入角速度定義的角速度比 mV 可以表示為：

|  |  |
| --- | --- |
|  | (15) |

由於和初始角度為0，進一步將(15)式積分求得:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (16) |

根據等式(14)、(16)，我們可以確定假設距離Q，如下所示：

|  |  |
| --- | --- |
| Q=E(N+1) | (17) |

我們根據從擺線輪移動座標原點到接觸點的向量路徑得出下列式子:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (18) |

圖 7我們顯示了向量路徑上的所有參數，並假設MC長度L，角O1ORC為ψ:

|  |
| --- |
|  |
| 圖 7 |

我們可以得到接觸點在擺線輪的坐標系下的解析式:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (19) |

|  |  |
| --- | --- |
|  | (20) |

圖 8中展示如何求得L以及ψ:

|  |
| --- |
|  |
| 圖 8 |

L可由角MO1Or求餘弦定理計算出:

|  |  |
| --- | --- |
| L = | (21) |

而ψ可由角MOrO1求正切值:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (22) |

我們令擺線輪輪廓坐標系的旋轉角簡化成，最後簡化(19)、(20)、(21)、(22)式得:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (23) |

|  |  |
| --- | --- |
|  | (24) |

|  |  |
| --- | --- |
|  | (25) |

|  |  |
| --- | --- |
|  | (26) |

# 3. 擺線減速機等效連桿

## 3.1 等效連桿

若單個元件上有兩個旋轉對，可將旋轉對簡化成接頭，桿長即為旋轉對間的距離。而凸輪對相當於兩個圓在接觸點上滾動與滑動，所以接頭為二圓圓心，桿長為接觸點二曲率圓半徑相加。

圖 9a、圖 9b為內擺線減速機與外擺線減速機之等效四連桿，四連桿有輸入角為輸入軸的旋轉角θ，以及輸出角δ，簡化凸輪對以及旋轉對為二節頭桿，a1、b1為曲柄輸入軸等效的二接頭桿，一端為輸入軸軸心，一端為輸入軸之偏心凸輪圓心，桿長即為偏心量E。a2、b2接頭一端與輸入軸相接，一端為針輪滾子圓心，桿長為針輪截圓半徑R。其中a3、b3為OC到曲率中心K，桿長於之後計算。而a4、b4為曲率中心到針輪滾子圓心，桿長同於稍後計算:

|  |
| --- |
|  |
| (a) |
|  |
|  |
| (b) |
|  |
| 圖 9 |

而a4、b4為凸輪對簡化，由擺線輪與針輪接觸，針輪原為一圓，曲率半徑即為針輪半徑，而擺線輪的曲率圓半徑可由先前求得的輪廓解析式求的，a4、b4桿長為擺線輪的曲率半徑加上針輪半徑，曲率圓半徑Rc由XY解析式表示如下:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (27) |

而a3、b3一端為a2、b2之針輪滾子圓心，一端與擺線輪輪廓曲率中心K相連接，點K位置在固定坐標系如下:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (28) |

點K解析式如下:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (29) |

|  |  |
| --- | --- |
|  | (30) |

將我們令擺線輪輪廓坐標系的旋轉角等於，代入等式(1)、(3)，簡化為:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (31) |

|  |  |
| --- | --- |
|  | (32) |

可得出a3桿長如下:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (33) |

接下來求外擺線輪輪廓曲率中心K，點K位置在固定坐標系如下:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (34) |

解析式如下:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (35) |

|  |  |
| --- | --- |
|  | (36) |

將我們令擺線輪輪廓坐標系的旋轉角等於，代入等式(14)、(16)，簡化為:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (37) |

|  |  |
| --- | --- |
|  | (38) |

而b3桿長如下:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (39) |

## 3.5 位移方程式

在對等效連桿做誤差分析時，會需要用到四連桿的位移方程式，圖 9a中對桿a4做畢氏定理。推導出外擺線減速機的位移方程式如下:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (40) |

將式39 中的桿長替換成外擺線減速機中參數:

|  |  |
| --- | --- |
| (− R+ Ecos((1 – N)φ) – (Rc)cosδ)2  + (Rsin((1 – N)φ) − Rc sinδ)2 = Kx1+Ky1 | (41) |

|  |  |
| --- | --- |
| (− R+ Ecosθ + a3cosδ)2  + (Esinθ + a3sinδ)2 = (RC+Rf)2 | (42) |

圖 9b中對桿a4做畢氏定理，推導出外擺線減速機的位移方程式如下:

|  |  |
| --- | --- |
| (b1cosθ + b2cosδ − Kx2 )2  + (b1sinθ + b2sinδ – Ky2)2 = b42 | (43) |

將式39 中的桿長替換成內擺線減速機中參數:

|  |  |
| --- | --- |
| (Ecos(Nφ) + Rcosφ − Kx2 )2  + (Esin(Nφ) + Rsinφ – Ky2)2 = (RC+Rf)2 | (44) |

# 4. 實例分析

**4.1 外擺線減速機**

給定外擺線減速機設計參數，偏心距離E = 5 (mm)，滾輪數N = 15 (mm)，針輪截圓半徑R = 120 (mm)以及針輪滾子半徑Rr = 18 (mm)。圖 分別為擺線輪輪廓、曲率半徑和輸出誤差之設計結果。

|  |
| --- |
|  |
| 圖 10 |

|  |
| --- |
|  |
| 圖 11 |

|  |
| --- |
|  |
| 圖 12 |

給定內擺線減速機設計參數，偏心距離E = 5 (mm)，滾輪數N = 15 (mm)，針輪截圓半徑R = 120 (mm)以及針輪滾子半徑Rr = 18 (mm)。圖 分別為擺線輪輪廓、曲率半徑和輸出誤差之設計結果。

|  |
| --- |
|  |
| 圖 13 |

|  |
| --- |
|  |
| 圖 14 |

|  |
| --- |
|  |
| 圖 15 |

# 5. 結論

# 誌謝

依作者需要自行決定。

# 參考文獻

[1] J.E. Shigley, J.J. Uicker Jr., Theory and Machines and Mechanisms, McGraw-Hill, 1980.

[2] Joong-Ho Shin, Soon-Man Kwon (2006). On the lobe profile design in a cycloid reducer using instant velocity center. Mechanism and Machine Theory , 41, 596–616

[3] E.P. Pollitt, Some applications of the cycloid machine design, ASME Journal of Engineering for Industry 82 (1960)

407–414.

**Guidelines on How to Format an Abstract to the CSMMT 2023 Conference Proceedings**

**(**Title: 14 points, Times New Roman, Boldface**)**

Wu, O.O.1, Huang, O.O.2, Tsai, O.O.3, \*

1 Department of Mechanical Engineering, National Yunlin University of Science & Technology

2 Department of Mechanical Engineering, National Yunlin University of Science & Technology

3 Department of Mechanical Engineering, National Yunlin University of Science & Technology

(10 points, Times New Roman)

# Abstract

（Title: 12 points, Bold, Ti**mes New Rom**an）

(Abstract content: 10 points, Times New Roman)

**Keywords:** Introduction, Mechanism, Machine, Design

(3~5 words, 10 points, Times New Roman)