

國立清華大學

碩士論文

題目 銷子輪機構之設計及機械誤差分析

系別：動力機械工程學系 組別：設計製造組

學號姓名：9733578 彭繼增

指導教授：吳隆庸 博士 (Dr. Wu, Long-Iong)

中華民國九十九年七月

摘要

銷子輪是屬於一種特殊之擺線齒輪，銷輪之齒形為圓柱形，齒輪之齒形輪廓與銷輪之圓柱符合共軛關係。由於銷子輪之齒輪為不規則形狀的機械元件，其輪廓較不容易被精確地加工。因此，齒輪輪廓的公差設定及誤差檢測成為設計與製造精密銷子輪機構時的重要工作。

銷子輪機構的機械誤差分析旨在建立各設計參數之偏差量與從動件運動誤差之間的理論關係。本論文主要目的為提出一套簡易且有系統的解析方法以進行銷子輪機構的機械誤差分析。首先，藉由等效連桿的概念，以及透過輪廓的徑向尺寸誤差與法線方向誤差間之理論關係的建立，發展出一套稱為等效連桿法的解析方法以預測由銷子輪機構之各設計參數偏差量所導致的從動件運動誤差。其次，將內接式銷子輪、漸開線齒輪與漸開線內齒輪也利用等效連桿法以分別推得其各設計參數偏差量所導致的從動件運動誤差。最後，分別以實例及圖表來說明所得到的結果及現象。



關鍵詞：銷子輪，等效連桿，機械誤差分析，漸開線齒輪，漸開線內齒輪。

誌 謝

本論文能順利完成，首先要感謝指導教授吳隆庸博士在專業領域上細心指導，在此謹向吾師致上衷心的感謝與敬意。同時，亦感謝碩士學位口試委員雷衛台教授及蔡錫錚助理教授所給予的指教及諸多寶貴意見，使得本論文得以更趨完整。

在研究所求學期間，感謝劉俊賢學長、張文桐學長、劉俊宏學長、李韶華學長、徐冠倫及 Emma、李伯賢、黃友豪及范姜韶華、林慧萍和陳珮綺，他們的協助與陪伴，使平凡的碩士生活更加的多彩多姿。

最後，感謝我的爸爸、媽媽、姐姐與哥哥的支持與包容，讓我能全心全力的完成學業。



目 錄

	頁數
摘 要.....	I
誌 謝.....	II
目 錄.....	III
圖 目 錄.....	V
表 目 錄.....	VII
符 號 說 明.....	VIII
第一章 前言.....	1
1-1 概述.....	1
1-2 文獻回顧.....	2
1-3 研究動機與目的.....	2
第二章 搖擺式盤型凸輪輪廓與曲率半徑.....	3
2-1 平面機構的瞬心.....	3
2-2 搖擺式滾子從動件凸輪輪廓向量表示法.....	4
第三章 銷子輪輪廓設計.....	7
3-1 輪廓設計.....	7
3-2 各項參數對銷子輪輪廓之影響.....	9
3-2-1 速比對銷子輪輪廓之影響.....	10
3-2-2 齒輪齒數.....	11
3-2-3 滾子半徑.....	13
3-2-4 擺臂長度.....	14
3-3 銷子輪之拘束條件.....	16
3-3-1 接觸比.....	16
3-3-2 壓力角.....	17
3-3-3 滾子中心路徑.....	19
3-3-4 輪廓外形過切.....	22
第四章 銷子輪之機械誤差分析與漸開線齒輪比較.....	23
4-1 各項參數對銷子輪之機械誤差.....	23
4-1-1 軸心距誤差之影響.....	24
4-1-2 擺臂長誤差之影響.....	25
4-1-3 輪廓及滾子半徑誤差之影響.....	25
4-1-4 輪廓徑向尺寸誤差之影響.....	26

4-1-5 結果與討論	32
4-2 各項參數對內接式銷子輪之機械誤差	33
4-2-1 軸心距誤差之影響	34
4-2-2 擺臂長誤差之影響	35
4-2-3 輪廓及滾子半徑誤差之影響	35
4-2-4 輪廓徑向尺寸誤差之影響	36
4-2-5 結果與討論	46
4-3 各項參數對漸開線齒輪之機械誤差	47
4-3-1 軸心距誤差之影響	48
4-3-2 輪廓誤差之影響	48
4-3-3 輪廓徑向尺寸誤差之影響	49
4-3-5 結果與討論	54
4-4 各項參數對漸開線內齒輪之機械誤差	54
4-4-1 軸心距誤差之影響	55
4-4-2 輪廓誤差之影響	56
4-4-3 輪廓徑向尺寸誤差之影響	57
4-4-5 結果與討論	64
4-5 本章結果與討論	65
第五章 結論與建議	70
參考文獻	71
附錄 A	73
附錄 B	74
附錄 C	75
附錄 D	76

圖 目 錄

	頁數
圖 1.1 KAMO系列TCG直線及環形導軌.....	1
圖 1.2 銷子輪機構及其等效四連桿.....	2
圖 2.1 三桿機構的瞬心.....	3
圖 2.2 盤型凸輪機構的瞬心.....	4
圖 2.3 搖擺式滾子從動件凸輪機構及其瞬心.....	4
圖 3.1 銷子輪機構及其瞬心.....	7
圖 3.2 位移運動曲線.....	7
圖 3.3 主動輪轉速高於從動件情況.....	11
圖 3.4 主動輪轉速低於從動件情況.....	11
圖 3.5 不同滾子數目與相對應之齒輪輪廓圖.....	12
圖 3.6 不同之滾子半徑與相對應之齒輪輪廓圖.....	13
圖 3.7 滾子半徑為 5、10、15 及 20 mm之齒輪輪廓疊合圖.....	14
圖 3.8 不同擺臂長度與相對應之齒輪輪廓.....	15
圖 3.9 不同擺臂長度與相對應之上升區間壓力角.....	15
圖 3.10 八齒八滾子之實例與壓力角($l=49\text{ mm}$, $r_f=5\text{ mm}$).....	18
圖 3.11 六齒十二滾子之實例與壓力角($l=65\text{ mm}$, $r_f=5\text{ mm}$).....	18
圖 3.12 十二齒六滾子之實例與壓力角($l=31\text{ mm}$, $r_f=5\text{ mm}$).....	18
圖 3.13 二種特殊情況之路徑.....	19
圖 3.14 滾子中心路徑有尖點前之情況($l=49\text{ mm}$, $r_f=10\text{ mm}$).....	19
圖 3.15 齒輪輪廓斷裂之情況($l=50\text{ mm}$, $r_f=10\text{ mm}$).....	20
圖 3.16 齒輪輪廓凸出之情況($l=56\text{ mm}$, $r_f=10\text{ mm}$).....	20
圖 3.17 以圓弧連接之齒輪輪廓.....	21
圖 3.18 擺臂長度極限值 l_{\max} 與速比 r_v 關係圖($f=100\text{ mm}$).....	22
圖 4.1 銷子輪機構及其等效四連桿.....	23
圖 4.2 銷子輪機構之實際輪廓.....	26
圖 4.3 KAMO系列TCG環形導軌.....	27
圖 4.4 TCG環形導軌之一般化機構簡圖.....	28
圖 4.5 TCG環型機構及其等效四連桿.....	29
圖 4.6 軸心距誤差對輸出之影響.....	29
圖 4.7 擺臂長誤差對輸出之影響.....	30
圖 4.8 法線方向輪廓誤差對輸出之影響.....	30
圖 4.9 徑向輪廓誤差對輸出之影響.....	30
圖 4.10 滾子半徑誤差對輸出之影響.....	31
圖 4.11 IT 6 其各參數誤差對輸出之影響.....	32
圖 4.12 IT 6 最差情況誤差及最大預期誤差.....	32
圖 4.13 內接式銷子輪機構(速比 3:2)及其等效四連桿.....	33
圖 4.14 內接式銷子輪機構(速比 2:3)及其等效四連桿.....	33
圖 4.15 內接式銷子輪機構(速比 3:2)之實際輪廓.....	36
圖 4.16 內接式銷子輪機構(速比 2:3)之實際輪廓.....	37
圖 4.17 內接式銷子輪機構(速比 3:2)之一般化機構簡圖.....	38
圖 4.18 內接式銷子輪機構(速比 2:3)之一般化機構簡圖.....	38
圖 4.19 內接式銷子輪機構(速比 3:2)及其等效四連桿.....	39
圖 4.20 內接式銷子輪機構(速比 2:3)及其等效四連桿.....	39
圖 4.21 軸心距誤差(速比 3:2)對輸出之影響.....	40
圖 4.22 軸心距誤差(速比 2:3)對輸出之影響.....	41
圖 4.23 擺臂長誤差(速比 3:2)對輸出之影響.....	41
圖 4.24 擺臂長誤差(速比 2:3)對輸出之影響.....	41

圖 4.25	法線方向輪廓誤差(速比 3 : 2)對輸出之影響	42
圖 4.26	法線方向輪廓誤差(速比 2 : 3)對輸出之影響	42
圖 4.27	徑向輪廓誤差(速比 3 : 2)對輸出之影響	42
圖 4.28	徑向輪廓誤差(速比 2 : 3)對輸出之影響	43
圖 4.29	滾子半徑誤差(速比 3 : 2)對輸出之影響	43
圖 4.30	滾子半徑誤差(速比 2 : 3)對輸出之影響	43
圖 4.31	IT 6 其各參數誤差(速比 3 : 2)對輸出之影響	45
圖 4.32	IT 6 最差情況誤差及最大預期誤差(速比 3 : 2)	45
圖 4.33	IT 6 其各參數誤差(速比 2 : 3)對輸出之影響	46
圖 4.34	IT 6 最差情況誤差及最大預期誤差(速比 2 : 3)	46
圖 4.35	漸開線齒輪機構及其等效四連桿	47
圖 4.36	漸開線齒輪機構之實際輪廓	49
圖 4.37	漸開線齒輪之一般化機構簡圖	50
圖 4.38	漸開線齒輪機構及其等效四連桿	51
圖 4.39	軸心距誤差對輸出之影響	52
圖 4.40	法向輪廓誤差 Δn_2 對輸出之影響	52
圖 4.41	法向輪廓誤差 Δn_3 對輸出之影響	52
圖 4.42	徑向輪廓誤差 Δrd_2 對輸出之影響	52
圖 4.43	徑向輪廓誤差 Δrd_3 對輸出之影響	52
圖 4.44	IT 6 其各參數誤差對輸出之影響	53
圖 4.45	IT 6 最差情況誤差及最大預期誤差	53
圖 4.46	漸開線內齒輪機構(速比 3 : 2)及其等效四連桿	54
圖 4.47	漸開線內齒輪機構(速比 2 : 3)及其等效四連桿	54
圖 4.48	漸開線內齒輪機構(速比 3 : 2)之實際輪廓	57
圖 4.49	漸開線內齒輪機構(速比 2 : 3)之實際輪廓	57
圖 4.50	漸開線內齒輪機構(速比 3 : 2)之一般化機構簡圖	59
圖 4.51	漸開線內齒輪機構(速比 2 : 3)之一般化機構簡圖	59
圖 4.52	漸開線內齒輪機構(速比 3 : 2)及其等效四連桿	60
圖 4.53	漸開線內齒輪機構(速比 2 : 3)及其等效四連桿	60
圖 4.54	軸心距誤差對輸出之影響	61
圖 4.55	法向輪廓誤差 Δn_2 對輸出之影響	62
圖 4.56	法向輪廓誤差 Δn_3 對輸出之影響	62
圖 4.57	徑向輪廓誤差 Δrd_2 對輸出之影響	62
圖 4.58	徑向輪廓誤差 Δrd_3 對輸出之影響	63
圖 4.59	IT 6 其各參數誤差對輸出之影響	64
圖 4.60	IT 6 最差情況誤差及最大預期誤差	64
圖 4.61	速比 2 : 3 在 IT 6 等級公差之長條圖	66
圖 4.62	速比 2 : 3 在 IT 6 等級公差之比較圖	67
圖 4.63	速比 3 : 2 在 IT 6 等級公差之長條圖	67
圖 4.64	速比 3 : 2 在 IT 6 等級公差之比較圖	68
圖 A1	使用座標系	73
圖 A2	環形導軌輪廓與銷子輪輪廓比較圖	73
圖 B1	擺臂長度極限值 l_{\min} 與速比 r_v 關係圖 ($f = 25 \text{ mm}$)	74

表 目 錄

	頁數
表 3.1 轉速比 1：1 不同齒數之建議設計參數與輸出之接觸比.....	16
表 3.2 轉速比 1：2 不同齒數之建議設計參數與輸出之接觸比.....	17
表 3.3 轉速比 2：1 不同齒數之建議設計參數與輸出之接觸比.....	17
表 4.1 各參數之各等級公差值.....	29
表 4.2 各參數在 IT 6 時輸出誤差對應之精度等級.....	31
表 4.3 各參數(速比 3：2)之各等級公差值.....	40
表 4.4 各參數(速比 2：3)之各等級公差值.....	40
表 4.5 各參數(速比 3：2)在 IT 6 時輸出誤差對應之精度等級.....	44
表 4.6 各參數(速比 2：3)在 IT 6 時輸出誤差對應之精度等級.....	44
表 4.7 各參數之各等級公差值.....	51
表 4.8 各參數在 IT 6 時輸出誤差對應之精度等級.....	53
表 4.9 各參數(速比 3：2)之各等級公差值.....	61
表 4.10 各參數(速比 2：3)之各等級公差值.....	61
表 4.11 各參數(速比 3：2)在 IT 6 時輸出誤差對應之精度等級.....	63
表 4.12 各參數(速比 2：3)在 IT 6 時輸出誤差對應之精度等級.....	63
表 4.13 各銷子輪與漸開線齒輪之主要誤差.....	65
表 4.14 速比 2：3 在 IT 6 等級公差之各參數.....	66
表 4.15 速比 3：2 在 IT 6 等級公差之各參數.....	66
表 4.16 實驗齒輪之各參數.....	68
表 4.17 各模數在 IT 5 等級公差之參數.....	69
表 4.18 IT 5 最差情況誤差及最大預期誤差與實驗數據比較.....	69
表 D1 漸開線內齒輪主、被動齒輪對調其各參數機械誤差之轉換關係.....	76

符 號 說 明

A	接觸點
A_r	O_2A 與實際輪廓之交點
A_n	QA 與實際輪廓之交點
C	滾子中心點
D,E	滾子中心軸線與凸輪軸心之距離
f	主動件與從動件軸心之距離
I_{ij}	桿件 i 與桿件 j 之瞬心
K	輪廓接觸點之曲路中心
l	從動件之擺臂長度
l_{\max}	擺臂長度的最大值
O_i	機件 i 之固定旋轉點
Q	瞬心 I_{23}
P	滾子中心路徑點
P_l	滾子中心軌跡之尖點
P_Q	滾子中心軌跡之結點
q	固定旋轉點 O_2 至瞬心 I_{23} 之距離
r_f	滾子半徑
r_i	桿件 i
r_v	轉速比之比值
Δr_f	滾子半徑之微小誤差
$\Delta r_1 \sim \Delta r_4$	桿件 1~4 之微小誤差值
$S(\theta)$	位移運動函數
ΔS_f	軸心距之機械誤差
ΔS_l	擺臂長之機械誤差
ΔS_n	法線方向輪廓之機械誤差
ΔS_r	徑向輪廓之機械誤差
ΔS_{rf}	滾子半徑之機械誤差



ΔS_{rd}	漸開線徑向輪廓之機械誤差
ΔS_{wor}	位移函數的最差情況誤差
ΔS_{rss}	最大預期誤差
t_i	桿件 i 之齒數
V_Q	瞬心 Q 點之速率
α	Q 點至滾子中心 C 之連線與 O_2Q 之夾角
$\xi(\theta)$	從動件的角位移函數
ξ	從動件自 X 軸起始之旋轉角度
θ	主動件自 X 軸起始之旋轉角度
θ_a	每齒平均須帶動從動件滾子旋轉之角度
θ_i	機件 i 自 X 軸起始之旋轉角度
$\Delta\theta_i$	機件 i 旋轉角之微小誤差
λ	接觸點 A 到瞬心 Q 與 O_2 之夾角
ϕ	壓力角
ρ	曲率半徑
ω_i	機件 i 之轉速



第一章 前言

1-1 概述

銷子輪機構已被廣泛應用於鐘錶與量測儀器中。至今，銷子輪仍在鐘錶業與儀錶業中扮演不可取代的重要腳色。由於可做成較少的齒數及具有高傳動效率，其齒形是經由精密加工的環形導軌與滾輪所構成，能對應高定位精度的需求。因此，銷子輪不容易被漸開線齒輪替代。

銷子輪機構屬於一種特殊之擺線齒輪，由兩部分組成，一部份為銷輪(pin wheel)其齒形為圓柱形，另一部份為齒輪(toothed wheel)其齒形輪廓與銷輪之圓柱符合共軛關係[1]。在 2007 年，Kamo 公司開發了兩種無齒隙導軌[2]，分別為直線與環形導軌(如圖 1.1)；台灣是由厚利貿易股份有限公司代理[3]，提供了環形及直線導軌之型錄。由於銷子輪之齒輪為不規則形狀的機械元件，其輪廓較不容易被精確地加工。因此，齒輪輪廓的公差設定及誤差檢測成為設計與製造精密銷子輪機構時的重要工作。本文希望預測銷子輪機構之各設計參數公差量所導致的運動誤差。



(a) TCG 直線導軌



(b) TCG 環形導軌

圖 1.1 KAMO 系列 TCG 直線及環形導軌

1-2 文獻回顧

關於銷子輪機構相關之研究，Litvin 在 1993 年利用笛卡兒座標(Cartesian coordinates)導出此機構之輪廓方程式[4]。1998 年 Inho Gu[5]針對無齒隙齒輪之運動特徵做分析，並提到軸心距誤差是主要影響輸出運動函數之誤差。2002 年吳、洪及張[6]藉由速度瞬心之概念，導出凸輪節曲線之向量方程式、壓力角的方程式以及加工凸輪之刀具的中心點相對於凸輪的運動路徑曲線方程式，可精確求出盤形凸輪輪廓及刀具路徑。2004 年劉[7]對於無暫停定速比共軛凸輪之輪廓設計與最佳化做了詳盡的分析。2007 年張[8]藉由等效連桿的概念，以及透過凸輪輪廓的徑向尺寸誤差與法線方向誤差間之理論關係的建立，發展出一套稱為等效連桿法的解析方法以預測由盤形凸輪機構之各設計參數偏差量所導致的從動件運動誤差。

1-3 研究動機與目的

由於銷子輪為不規則形狀的機械元件，其輪廓較不容易被精確地加工。因此，輪廓的公差設定及誤差檢驗成為設計與製造精密齒輪機構時的重要工作。銷子輪機構的機械誤差分析旨在建立各設計參數之公差量(或偏差量)與銷輪運動誤差之間的理論關係。本文的主要目的為利用等效連桿的觀念(如圖 1.2 所示)，提出一套較為簡易的解析式機械誤差分析方法，以應用於銷子輪機構之各設計參數偏差量所導致的運動誤差。

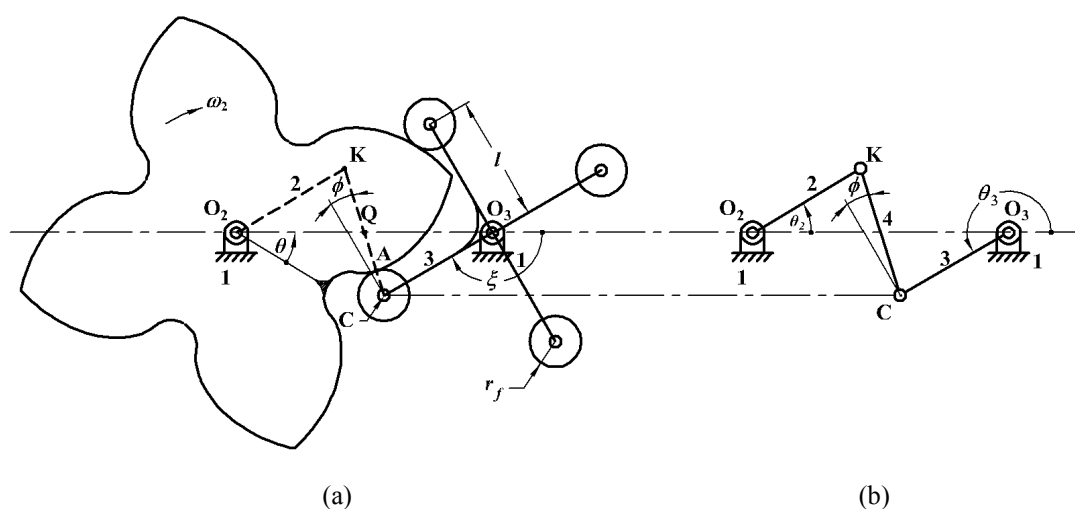


圖 1.2 銷子輪機構及其等效四連桿

第二章 搖擺式盤型凸輪輪廓與曲率半徑

2-1 平面機構的瞬心

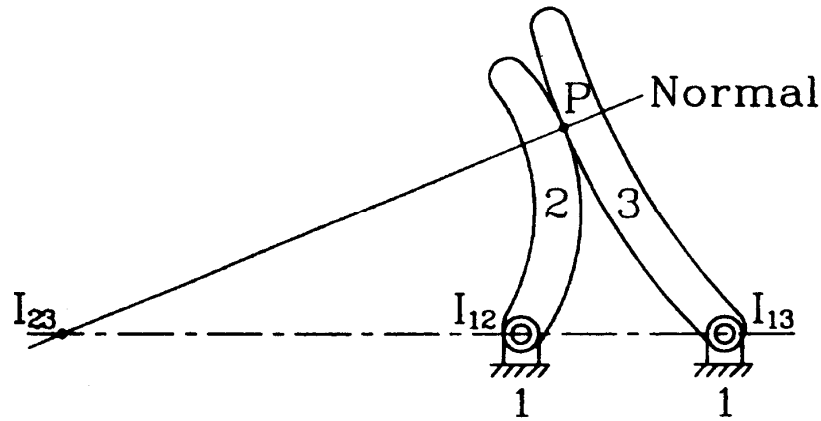


圖 2.1 三桿機構的瞬心

一個機構中的任意兩個機件（ i 和 j ）在任一時刻皆有一個共同點，且這個共同點在兩個機件上的線速度相同，這個共同點稱為此二機件的瞬心，以 I_{ij} 表示之；一個具有 N 根機件的機構有 $N(N-1)/2$ 個瞬心[9]。一個機構中，任意三個機件桿 i 、桿 j 及桿 k 做相對平面運動時， I_{ij} 、 I_{jk} 、 I_{ik} 分別為它們之間的瞬心，則此三個瞬心必會在同一直線上，此即稱為三心定理(Aronhold-Kennedy's theorem)。如圖 2.1 所示的三桿機構，瞬心 I_{12} 及 I_{13} 分別為固定軸樞，而瞬心 I_{23} 則在桿 2 和桿 3 接觸點的公法線與軸心線 $I_{12} I_{13}$ 的交點上。上述的觀點可應用於盤形凸輪機構的運動分析及設計。

圖 2.2 所示盤型凸輪機構有機架（桿件 1）、凸輪（桿件 2）及從動件（桿件 3）等三個機件，因此具有三個瞬心 I_{12} 、 I_{13} 及 I_{23} 。瞬心 I_{12} 為凸輪固定軸樞，瞬心 I_{13} 為從動件固定軸樞，這兩個瞬心位置可由觀察法決定；而瞬心 I_{23} 則在凸輪和從動件接觸點的公法線與軸心線 $I_{12}I_{13}$ 的交點上。

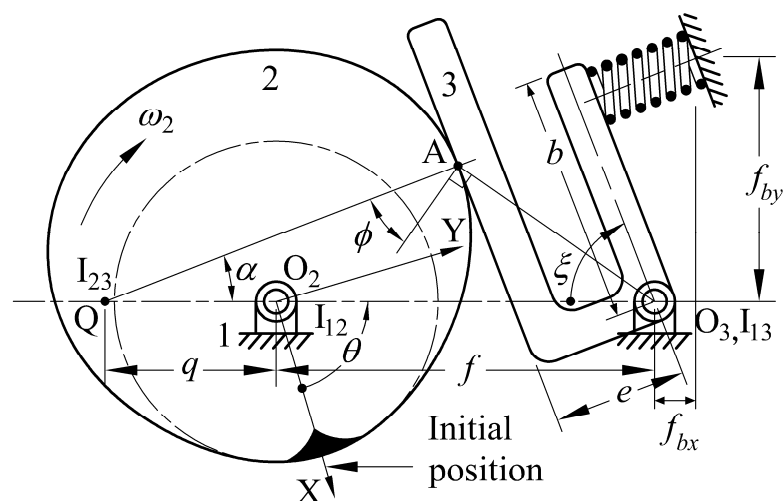


圖 2.2 盤型凸輪機構的瞬心

2-2 搖擺式滾子從動件凸輪輪廓向量表示法

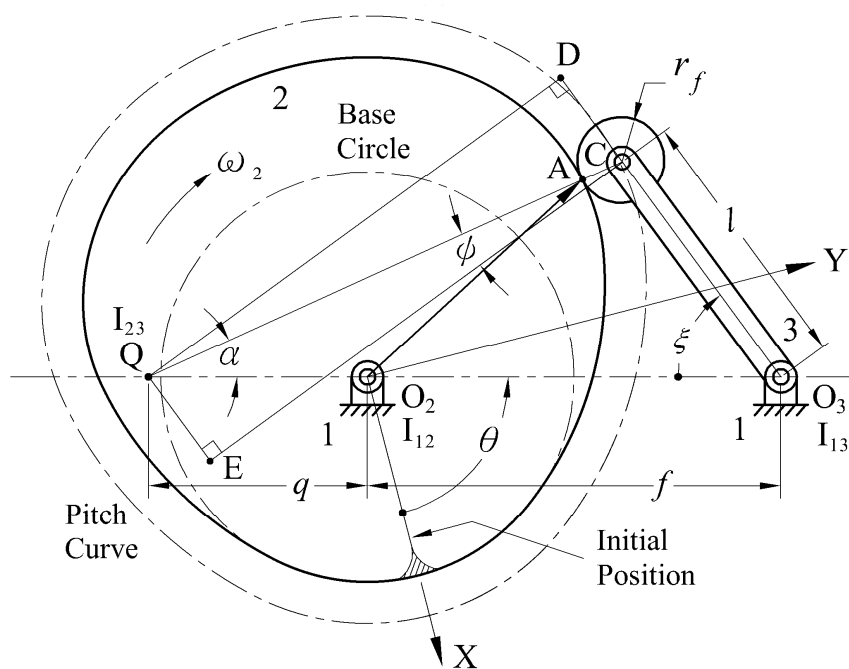


圖 2.3 搖擺式滾子從動件凸輪機構及其瞬心

如圖 2.3 所示的搖擺式滾子從動件凸輪機構，凸輪旋轉軸與從動件搖擺軸間的軸心距為 $O_2O_3 = f$ ，從動件擺臂長為 l 。建立坐標系 O_2 -X-Y 固定於凸輪上，並標出瞬心 I_{12} 、 I_{13} 以及 I_{23} 的位置分別如圖 2.3 所示。若 Q 點代表瞬心 I_{23} ，且 $O_2Q = q$ ，則在凸輪上之 Q 點速率可表示為：

$$V_Q = q \cdot \omega_2 \quad (2.1)$$

而從動件上之 Q 點速率可表示為：

$$V_Q = (f + q) \cdot \frac{d\xi(\theta)}{dt} = (f + q) \cdot \frac{d\xi(\theta)}{d\theta} \omega_2 \quad (2.2)$$

其中 $\xi(\theta)$ 為從動件的角位移函數：

$$\xi(\theta) = \xi_i + S(\theta) \quad (2.3)$$

其中 ξ_i 為從動搖臂起始位置角， $S(\theta)$ 為從動搖臂角位移函數。根據瞬心的定義，凸輪與從動件在瞬心 I_{23} 點具有相同的速度，因 Q 點為瞬心 I_{23} ，所以比較(2.1)、(2.2)式，並經移項化簡後可得：

$$q = \frac{f \cdot \frac{d\xi(\theta)}{d\theta}}{1 - \frac{d\xi(\theta)}{d\theta}} = \frac{f \cdot \frac{dS(\theta)}{d\theta}}{1 - \frac{dS(\theta)}{d\theta}} \quad (2.4)$$


只要選定 r_b 、 r_f 、 l 、 f 值及 $S(\theta)$ 函數後，對任意 θ 參數值均可由 $\xi(\theta)$ 定出對應 C 點的位置，並由方程式 (2.4) 求得 q 值而定出對應瞬心 Q 點的位置。若 Q 點至滾子中心 C 的距離為 $QC = g$ ，由 $\triangle O_3QC$ 及餘弦定理可得：

$$g = \sqrt{l^2 + (f + q)^2 - 2 \cdot l \cdot (f + q) \cdot \cos(\xi(\theta))} \quad (2.5)$$

由 $\triangle O_3QC$ 及正弦定理可得：

$$\alpha = \sin^{-1} \left(\frac{l \cdot \sin(\xi(\theta))}{g} \right) \quad (2.6)$$

由壓力角的定義可知，壓力角 ϕ 就是 $\triangle QCE$ 的頂角，可表示為：

$$\phi = \tan^{-1} \left[\frac{(f + q) \cdot \cos(\xi(\theta)) - l}{(f + q) \cdot \sin(\xi(\theta))} \right] = 90^\circ - \alpha - \xi(\theta) \quad (2.7)$$

凸輪輪廓向量方程式可表示為：

$$\mathbf{O}_2\mathbf{A} = \mathbf{O}_2\mathbf{Q} + \mathbf{QA} \quad (2.8)$$

其中

$$\mathbf{O}_2\mathbf{Q} = q \begin{Bmatrix} \cos(\theta + 180^\circ) \\ \sin(\theta + 180^\circ) \end{Bmatrix} \quad (2.9)$$

$$\mathbf{QA} = (QC - r_f) \cdot \begin{Bmatrix} \cos(\theta + \alpha) \\ \sin(\theta + \alpha) \end{Bmatrix} \quad (2.10)$$

凸輪輪廓的座標 (x, y) 為：

$$x = -q \cdot \cos(\theta) + (QC - r_f) \cos(\theta + \alpha) \quad (2.11)$$

$$y = -q \cdot \sin(\theta) + (QC - r_f) \sin(\theta + \alpha) \quad (2.12)$$

圖 2.3 所示的凸輪輪廓，乃是以上述向量參數方程式所繪出。此機構軸心距 f 為 80 mm，凸輪的基圓半徑 r_b 為 40 mm，從動件的擺臂長 l 為 52 mm，從動件滾子的半徑 r_f 為 8 mm。當凸輪的角位移為 $0^\circ \sim 120^\circ$ 時，從動件以擺線運動曲線以順時針方向搖擺 25° ；當凸輪的角位移為 $120^\circ \sim 160^\circ$ 時，從動件暫停；當凸輪的角位移為 $160^\circ \sim 280^\circ$ 時，從動件以擺線運動曲線以逆時針方向搖擺 25° ；當凸輪的角位移為 $280^\circ \sim 360^\circ$ 時，從動件暫停。

第三章 銷子輪輪廓設計

3-1 輪廓設計

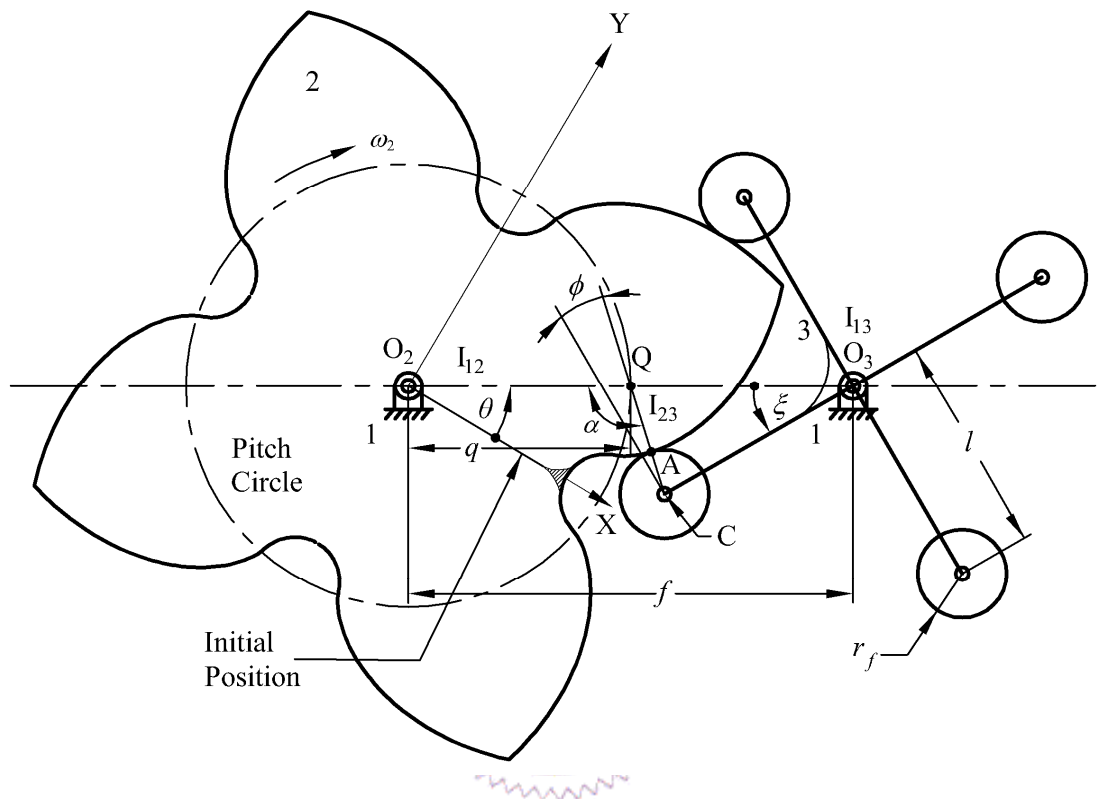


圖 3.1 銷子輪機構及其瞬心

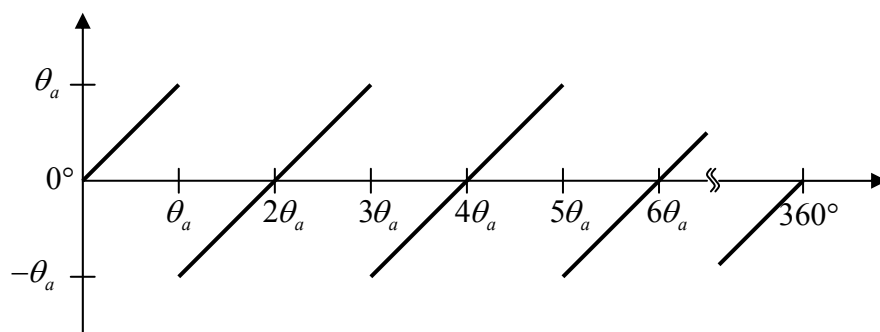


圖 3.2 位移運動曲線

如圖 3.1 所示的銷子輪機構，齒輪旋轉軸與從動件搖擺軸間的軸心距為 $O_2O_3 = f$ ，從動件擺臂長為 l 。建立坐標系 O_2-X-Y 固定於齒輪上，並標出瞬心 I_{12} 、 I_{13} 以及 I_{23} 的位置分別如圖 3.1 所示。若 Q 點代表瞬心 I_{23} ，且 $O_2Q = q$ ，則在齒輪上之 Q 點速率可

表示為：

$$V_Q = q \cdot \omega_2 \quad (3.1)$$

而瞬心 Q 點速率可表示為：

$$V_Q = (f - q) \cdot \frac{d\xi(\theta)}{dt} = (f - q) \cdot \frac{d\xi(\theta)}{d\theta} \omega_2 \quad (3.2)$$

其中 $\xi(\theta)$ 為從動件的角位移函數：

$$\xi(\theta) = \xi_i + S(\theta) \quad (3.3)$$

其中 ξ_i 為從動搖臂起始位置角，因每齒皆由 0° 開始帶動，故 $\xi_i = 0$ 。如圖 3.2 所示此一轉速比為 1:1 的位移運動函數 $S(\theta)$ ，其向量表示為：

$$S(\theta) = \begin{cases} r_v \cdot \theta & \text{for } \theta = [2(n-1) \cdot \theta_a] \sim [\theta_a + 2(n-1) \cdot \theta_a] \\ r_v \cdot (-2\theta_a + \theta) & \text{for } \theta = [\theta_a + 2(n-1) \cdot \theta_a] \sim [2n \cdot \theta_a] \end{cases} \quad (3.4)$$

$$\theta_a = \frac{360^\circ}{2t} \quad (3.5)$$

其中， r_v 為轉速比、 t 為齒數、 n 為正整數 ($n = 1 \sim t$)。然而，根據瞬心的定義，齒輪與從動件在瞬心 I_{23} 點具有相同的速度，因 Q 點為瞬心 I_{23} ，所以比較(3.1)、(3.2)式，並經移項化簡後可得：

$$q = \frac{f \cdot \frac{d\xi(\theta)}{d\theta}}{1 + \frac{d\xi(\theta)}{d\theta}} = \frac{f \cdot \frac{dS(\theta)}{d\theta}}{1 + \frac{dS(\theta)}{d\theta}} \quad (3.6)$$

只要選定 r_b 、 r_f 、 l 、 f 值及 $S(\theta)$ 函數後，對任意 θ 參數值均可由 $\xi(\theta)$ 定出對應 C 點的位置，並由方程式(3.4)求得 q 值而定出對應瞬心 Q 點的位置。若 Q 點至滾子中心 C 的距

離為 QC，由 $\triangle O_3QC$ 及餘弦定理可得：

$$QC = \sqrt{l^2 + (f - q)^2 - 2 \cdot l \cdot (f - q) \cdot \cos(\xi(\theta))} \quad (3.7)$$

由 $\triangle O_3QC$ 及正弦定理可得：

$$\alpha = 180^\circ - \sin^{-1}\left(\frac{l \cdot \sin(\xi(\theta))}{QC}\right) \quad (3.8)$$

由壓力角的定義可知，壓力角 ϕ 就是 $\triangle QCE$ 的頂角，可表示為：

$$\phi = \alpha - \xi(\theta) - 90^\circ \quad (3.9)$$

輪廓向量方程式可表示為：

$$\mathbf{O}_2\mathbf{A} = \mathbf{O}_2\mathbf{Q} + \mathbf{QA} \quad (3.10)$$

其中

$$\mathbf{O}_2\mathbf{Q} = q \begin{Bmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{Bmatrix} \quad (3.11)$$

$$\mathbf{QA} = (QC - r_f) \cdot \begin{Bmatrix} \cos(180^\circ + \alpha) \\ \sin(180^\circ + \alpha) \end{Bmatrix} \quad (3.12)$$



由(3.10)~(3.12)式可得其輪廓向量參數方程式

$$\mathbf{O}_2\mathbf{A} = \begin{Bmatrix} q \cdot \cos(\theta) + (QC - r_f) \cdot \cos(180^\circ + \alpha) \\ q \cdot \sin(\theta) + (QC - r_f) \cdot \sin(180^\circ + \alpha) \end{Bmatrix} \quad (3.13)$$

3-2 各項參數對銷子輪輪廓之影響

根據 3-1 節中使用向量表示法所繪出之銷子輪，其各項參數標示於圖 3.1。此圖為銷子輪輪廓示意圖，主要的參數為 θ (起動角度)、 r_v (速比)、 l (擺臂長度)、 t_2 (齒輪之齒數)、 t_3 (滾子數目)、 r_f (滾子半徑)及 f (軸心距)。

對於圖中基圓半徑此一參數，加上滾子半徑及擺臂長度之總合便為軸心距離。因

存在此一條件，四個參數中僅有三個為獨立變數，第四個則為相依變數，故基圓半徑雖為重要參數，但在此不加以討論。滾子數也與速比及齒輪齒數相依，故討論時以齒輪齒數為主，不考慮滾子數目之參數，並設定軸心距為 100 mm 的固定參數來探討各項主要參數對齒輪輪廓之影響。

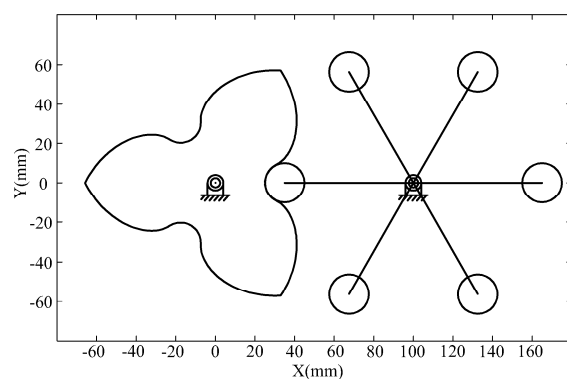
3-2-1 速比對銷子輪輪廓之影響

凸輪機構與齒輪機構二者皆為直接接觸之傳動機構，雖然常見的凸輪與從動件之速比並非常數，但由於此處設定為等速比之銷子輪，若主動件之角速度為 ω_2 ，從動件之角速度為 ω_3 ，則故速比(Velocity ratio) r_v 可定義為[9]：

$$r_v = \frac{\omega_3}{\omega_2} = -\frac{t_2}{t_3} \quad (3.14)$$

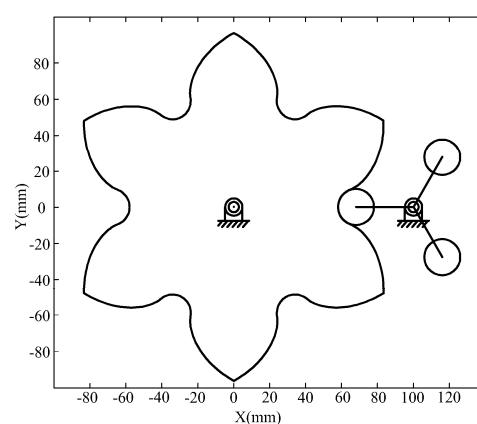
其中，負號代表轉向相反。

依主動件與從動件轉速不同，可分為加速比型與減速比型，在以此兩類分別討論不同速比下對輪廓的影響，即為以下各種速比情形：



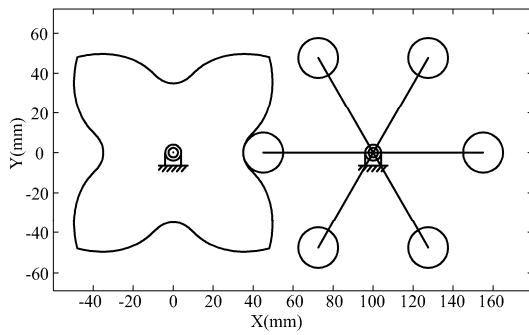
(a)速比 1 : 2

(續)

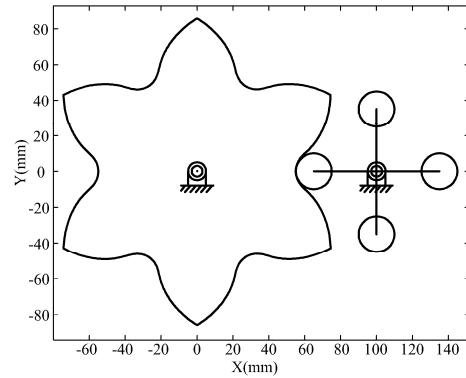


(a)速比 2 : 1

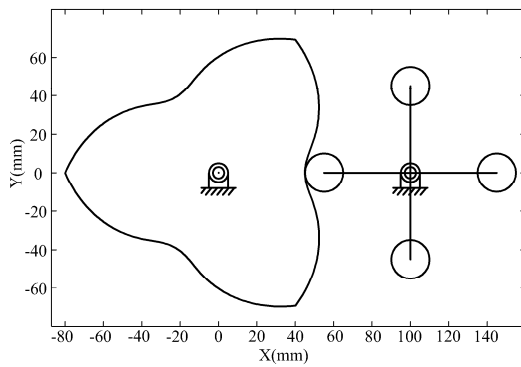
(續)



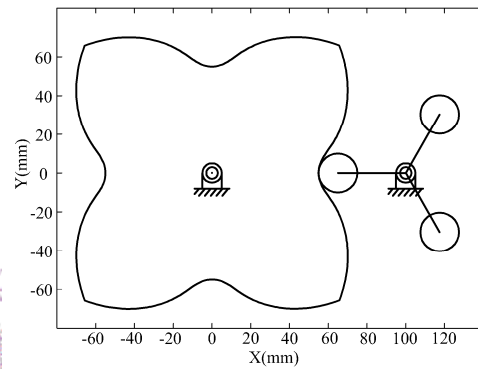
(b)速比 2 : 3



(b)速比 3 : 2



(c)速比 3 : 4



(c)速比 4 : 3

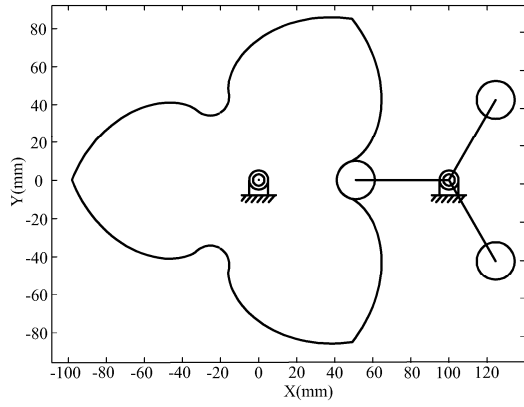
圖 3.3 主動輪轉速高於從動件情況

圖 3.4 主動輪轉速低於從動件情況

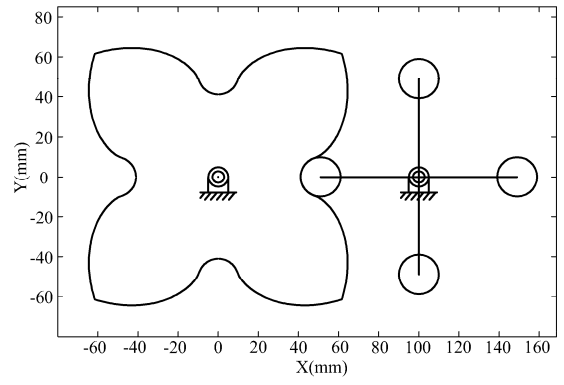
3-2-2 齒輪齒數

在固定速比、滾子半徑與擺臂長度下， t_2 及 t_3 之比值亦為固定，但若調整滾子數目配合相對應之齒輪齒數，亦可對 t_2 及 t_3 進行調整。在速比為 1 : 1 中，因滾子數目與齒輪齒數相同，可輕易調整滾子數目之多寡來比較銷子輪輪廓之差異。此處選擇齒數 3、4、5、6 與 7 在擺臂長度 50 mm 及滾子半徑 10 mm 之銷子輪輪廓加以比較，如圖 3.5。

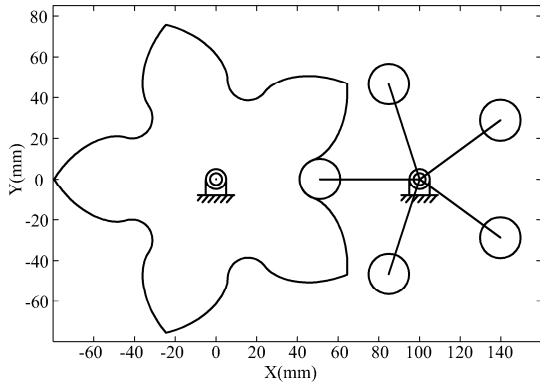
在圖 3.5(f) 中可發現，重疊後在右側是完全重疊的，僅有延伸量的差異。參考 (3.1)~(3.13) 式可知，在相同的條件下只有 $S(\theta)$ 與齒數有關，再觀察圖 3.2 與 (3.5) 式可知，不同齒數會改變 θ_d 的大小，但運動曲線的斜率不變。故可得知，在相同條件下，齒數不會對輪廓形狀造成影響。



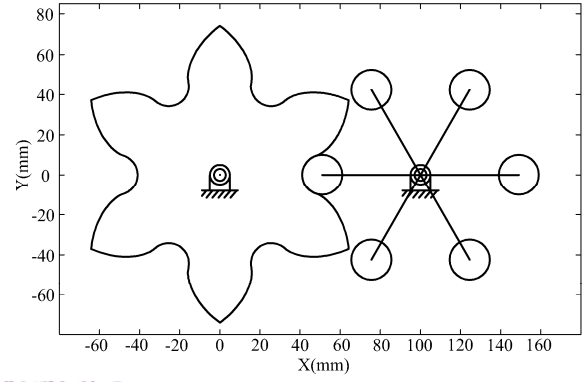
(a) $t_2 = 3$



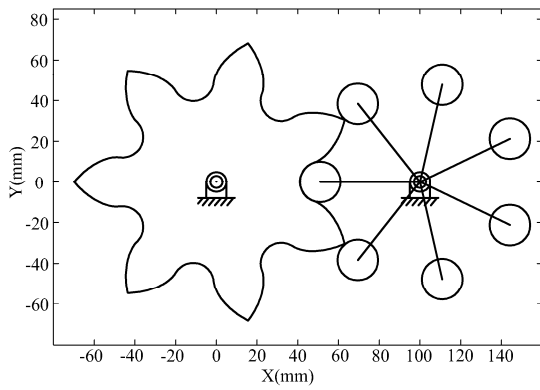
(b) $t_2 = 4$



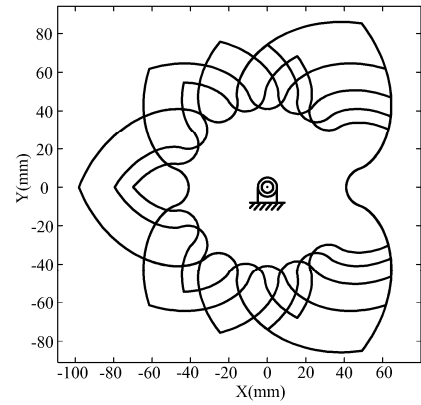
(c) $t_2 = 5$



(d) $t_2 = 6$



(e) $t_2 = 7$



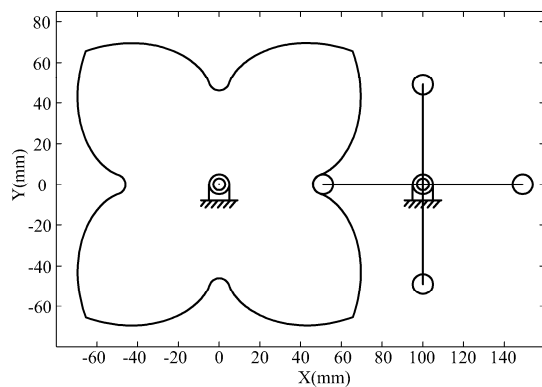
(f) 重疊後

圖 3.5 不同滾子數目與相對應之齒輪輪廓圖

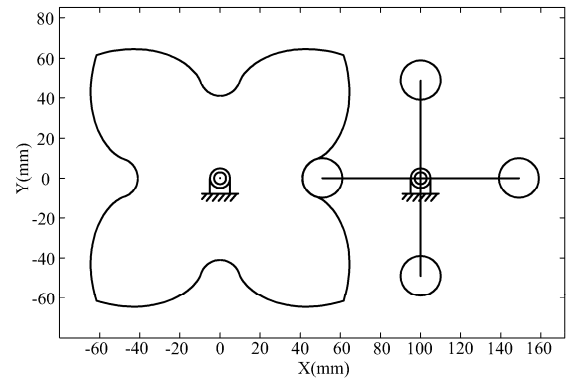
3-2-3 滾子半徑

在固定速比、滾子數目與擺臂長度下，滾子半徑之改變亦對於銷子輪輪廓造成影響。設定滾子半徑須注意相鄰滾子是否有造成過切，及其半徑要小於擺臂長度等幾何外形上之條件。此處選擇速比 1:1，滾子數目 4，擺臂長度 50 mm，滾子半徑為 5、10、15 及 20 mm 之各種銷子輪輪廓示於圖 3.6。

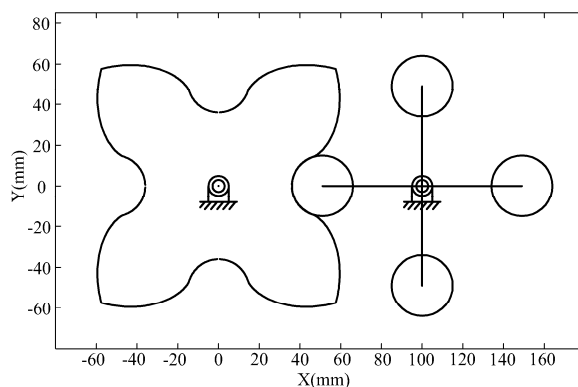
為仔細比較滾子半徑對銷子輪輪廓所造成之影響，圖 3.7 將滾子半徑為 5、10、15 及 20 mm 之輪廓加以重疊可發現四種滾子半徑不同之輪廓差異。此乃因所使用之向量法中，當擺臂長度固定時，滾子中心路徑亦為相同，在中心路徑法線方向上扣除滾子半徑之長度，便可得到銷子輪輪廓，故輪廓間差異即為各滾子半徑的差。



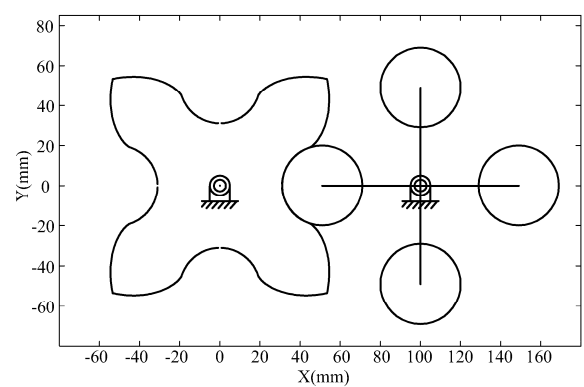
(a) $r_f = 5 \text{ mm}$



(b) $r_f = 10 \text{ mm}$



(c) $r_f = 15 \text{ mm}$



(d) $r_f = 20 \text{ mm}$

圖 3.6 不同之滾子半徑與相對應之齒輪輪廓圖

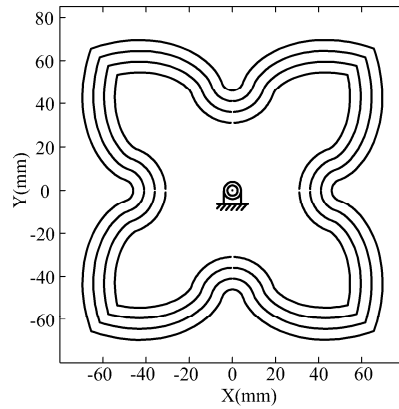
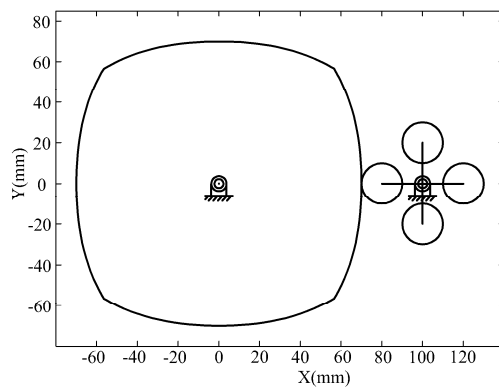


圖 3.7 滾子半徑為 5、10、15 及 20 mm 之齒輪輪廓疊合圖

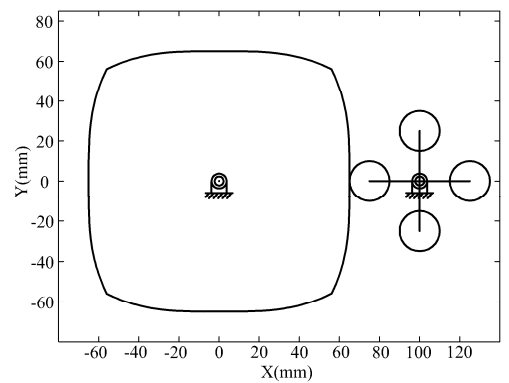
3-2-4 擺臂長度

固定速比、滾子半徑與滾子數目，僅改變擺臂長度亦會對齒輪之輪廓加以改變。由 3-2-3 節可知，擺臂長度除必須大於滾子半徑，亦須視滾子數目之不同，選取避免相鄰滾子在輪廓上相互干涉之擺臂長度。圖 3.8 為滾子半徑為 10 mm 下，描繪擺臂長度為 20、25、30、35、40 及 45 mm 相對應之銷子輪輪廓。

由圖 3.9 可知，擺臂長度較短之輪廓在齒輪旋轉時，所對應壓力角皆比擺臂長度較長之輪廓大。

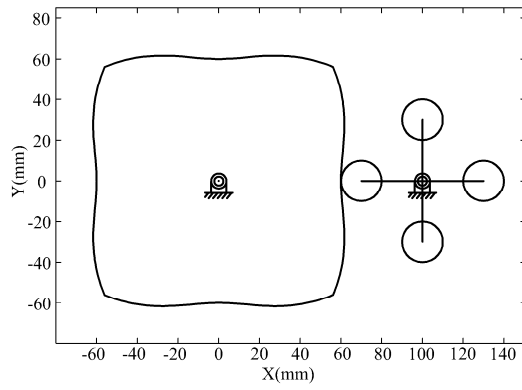


(a) $l = 20$ mm

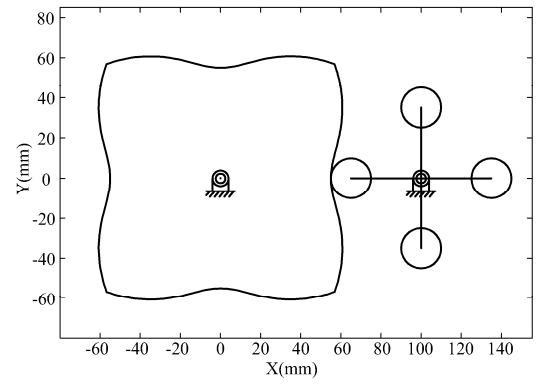


(b) $l = 25$ mm

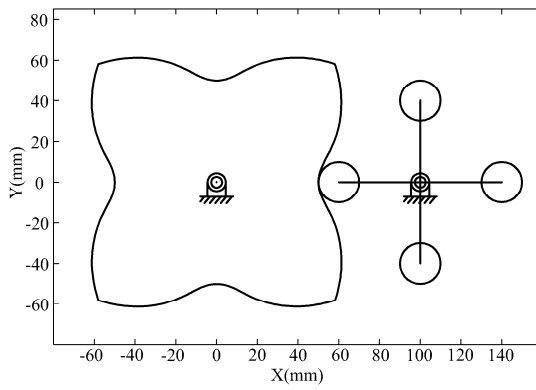
(續)



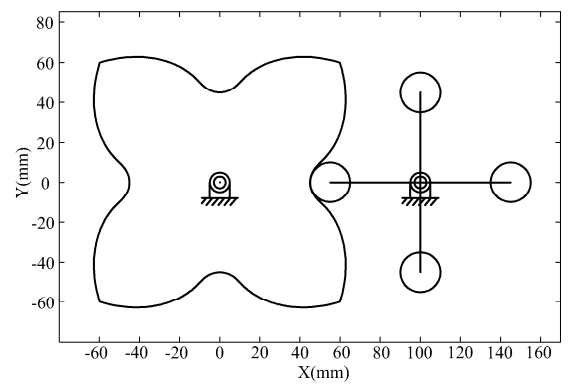
(c) $l = 30$ mm



(d) $l = 35$ mm



(e) $l = 40$ mm



(f) $l = 45$ mm

圖 3.8 不同擺臂長度與相對應之齒輪輪廓

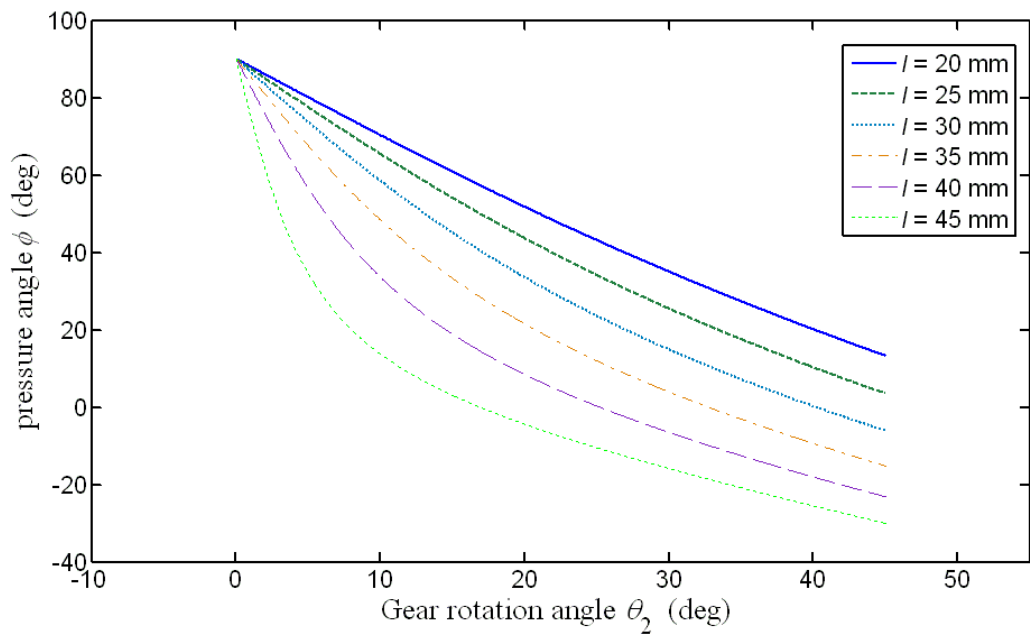


圖 3.9 不同擺臂長度與相對應之上升區間壓力角

3-3 銷子輪之拘束條件

3-3-1 接觸比

在傳動的過程中，主動件與從動件必須每一刻都有確實的接觸，以達到確實的傳動。接觸比相當於在等速運轉時任何瞬間的平均接觸齒數，其最小值為 1。接觸比越大，作用越平滑，傳力效果越佳[9]。

利用劉[7]所提供的參數最佳化程式方法得到的建議參數，將其代入銷子輪之設計參數內，得在轉速比 1:1 之情況下，不同齒數之建議設計參數與輸出之接觸比如表 3.1。相同地，轉速比為 1:2 和 2:1 之情況，如表 3.2 和表 3.3。其軸心距皆固定為 100 mm。

表 3.1 轉速比 1:1 不同齒數之建議設計參數與輸出之接觸比

凸輪 齒數	建議設計參數		輸出效果
	擺臂長度(mm)	滾子半徑(mm)	接觸比
4	44	5	1.548
5	45	5	1.698
6	45	5	1.817
7	45	5	1.922
8	46	5	2.051
9	46	5	2.137
10	47	5	2.266
11	47	5	2.338
12	47	5	2.401

表 3.2 轉速比 1：2 不同齒數之建議設計參數與輸出之接觸比

凸輪 齒數	建議設計參數		輸出效果
	擺臂長度(mm)	滾子半徑(mm)	接觸比
3	64	5	1.636
3	65	5	1.650
4	64	5	1.822
4	65	5	1.842
6	64	5	2.114
6	65	5	2.154
8	64	5	2.323
8	65	5	2.385

表 3.3 轉速比 2：1 不同齒數之建議設計參數與輸出之接觸比

凸輪 齒數	建議設計參數		輸出效果
	擺臂長度(mm)	滾子半徑(mm)	接觸比
6	31	5	1.528
6	32	5	1.543
8	31	5	1.730
8	32	5	1.754
10	31	5	1.900
10	32	5	1.935
12	31	5	2.043
12	32	5	2.092

3-3-2 壓力角

壓力角為權量凸輪機構傳動效率的一種簡單指標，其大小隨從動件的位置改變；壓力角越大表示從動件在運動時的傳動效率越差，因此壓力角越小傳動效率越好。一般

的齒輪的壓力角是使用 20° 或 25° ，而在搖擺式滾子從動件凸輪的使用上，一般建議最大值不超過 45° 。

由劉[7]所提供的參數最佳化程式方法，可知在速比 $1:1$ 、 $1:2$ 與 $2:1$ 之情況下最低齒數分別為 8、6 及 12 齒，壓力角對應如下圖 3.10~圖 3.12。

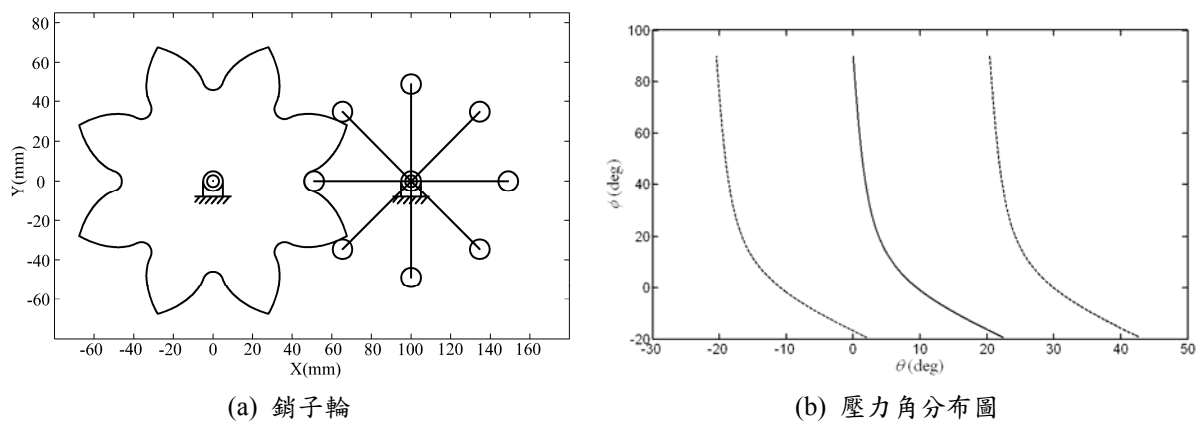


圖 3.10 八齒八滾子之實例與壓力角 ($l = 49 \text{ mm}$, $r_f = 5 \text{ mm}$)

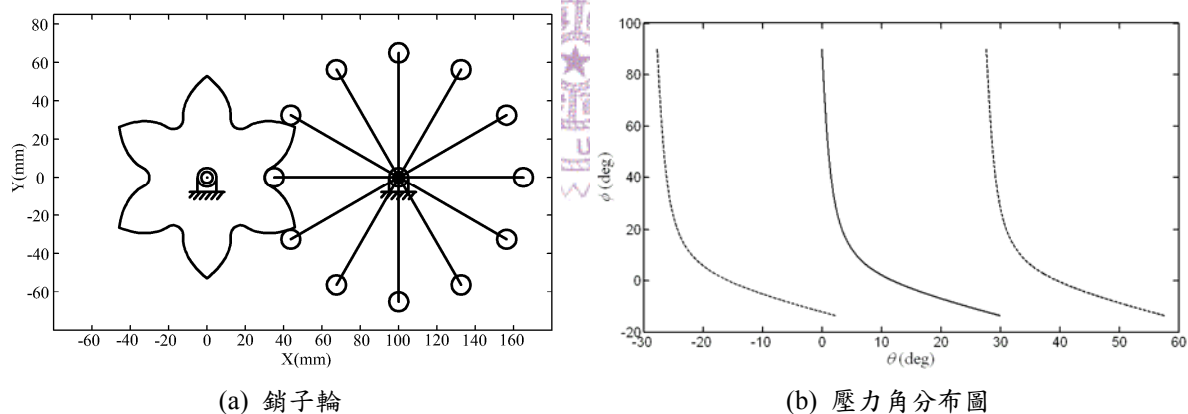


圖 3.11 六齒十二滾子之實例與壓力角 ($l = 65 \text{ mm}$, $r_f = 5 \text{ mm}$)

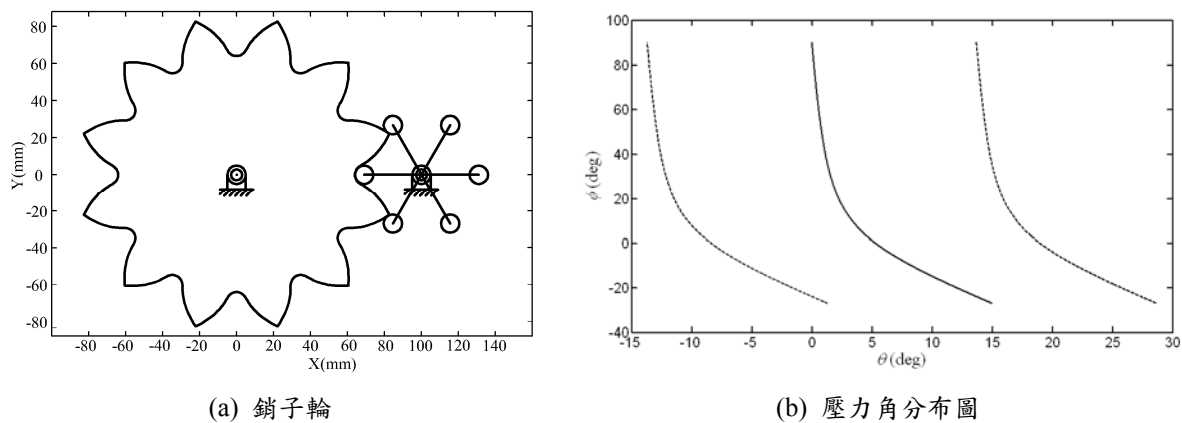


圖 3.12 十二齒六滾子之實例與壓力角 ($l = 31 \text{ mm}$, $r_f = 5 \text{ mm}$)

3-3-3 滾子中心路徑

由 3-1 節之向量表示法中可知，以此法繪製齒輪輪廓時，皆為先求出滾子中心路徑 (Pitch Curve) 後，扣除垂直齒輪輪廓方向上滾子半徑之長度後可得齒輪輪廓。但若滾子中心路徑具有尖點(Cusp)(如圖 3.13(a)之 P_I 點)或結點(Crunode)(如圖 3.13 (b)之 P_Q 點)時，齒輪輪廓會無法完整地加以繪製。圖 3.14 則為滾子中心路徑將要形成尖點前之情況；當滾子中心路徑有尖點時會造成齒輪輪廓之斷裂，如圖 3.15；當路徑產生結點則使輪廓向外凸出，如圖 3.16。(在圖 3.14、3.15 及 3.16 中(b)之放大圖的 Q 點表瞬心位置。)

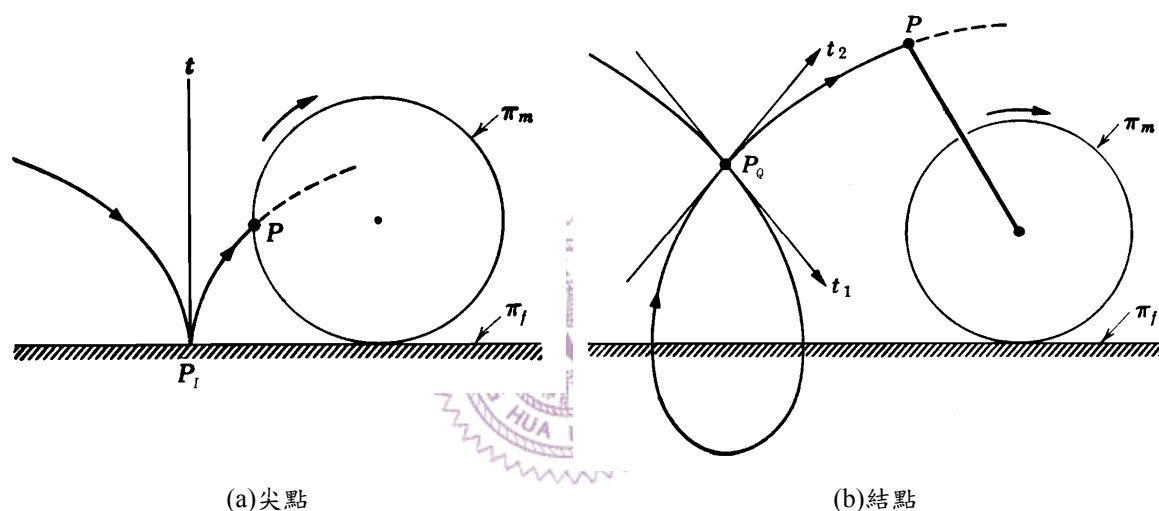


圖 3.13 二種特殊情況之路徑

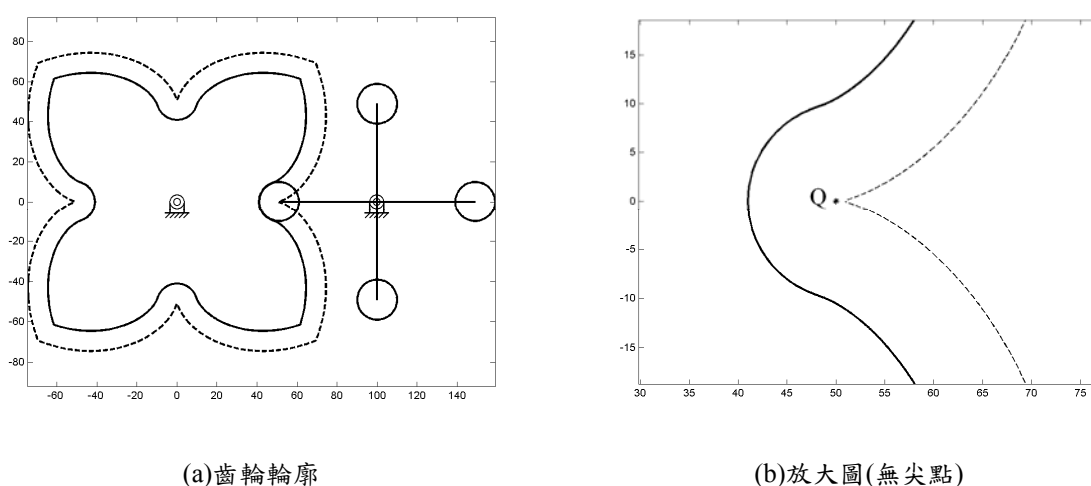
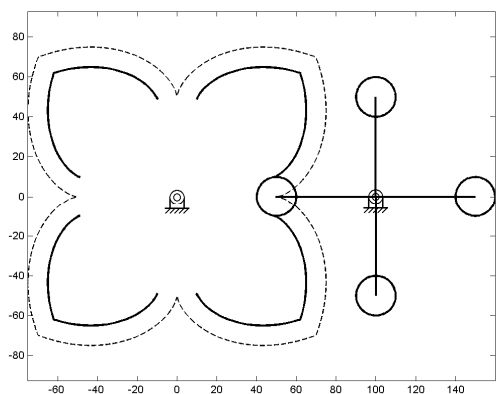
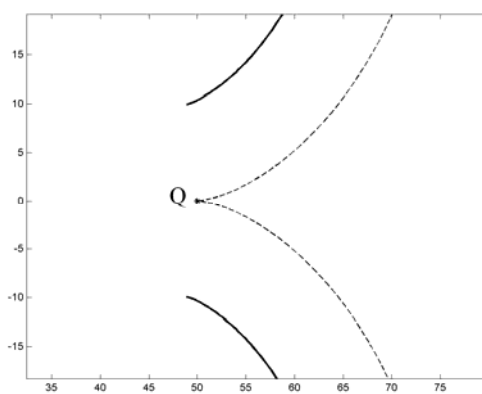


圖 3.14 滾子中心路徑有尖點前之情況($l = 49 \text{ mm}$, $r_f = 10 \text{ mm}$)

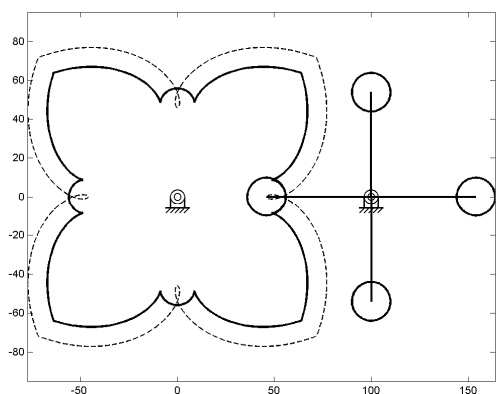


(a)斷裂之齒輪輪廓

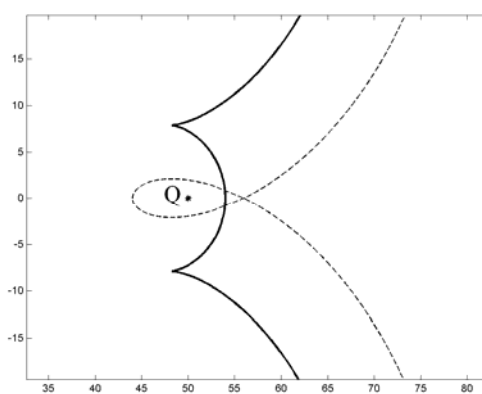


(b)放大圖(有尖點)

圖 3.15 齒輪輪廓斷裂之情況($l = 50 \text{ mm}$, $r_f = 10 \text{ mm}$)



(a)凸出之齒輪輪廓



(b)放大圖(有結點)

圖 3.16 齒輪輪廓凸出之情況($l = 56 \text{ mm}$, $r_f = 10 \text{ mm}$)

滾子中心路徑有尖點導致齒輪輪廓斷裂之原因，乃由於路徑在該點之切線向量不連續，幾何上無法定義該點之切線斜率，故無法求出垂直齒輪輪廓之法線斜率。由齒輪輪廓向量表示法來看，尖點發生在滾子中心落在瞬心 Q 點上，原本向量法求得法線斜率的方式是，利用滾子中心與瞬心 Q 之連線而求得；當此兩點重合時便無法得到法線斜率，故齒輪輪廓在該處形成斷裂。至於有結點之情況造成齒輪輪廓向外凸出則是因擺臂長度過長，使滾子中心路徑落入齒輪輪廓之內部，可參考圖 3.16(b)。由滾子中心至瞬心之射線其方向由原本朝向左側改為朝向右側，亦造成滾子中心路徑對齒輪輪廓之過切。故當滾子中心超出 Q 點之左側時，齒輪輪廓便會按照向量式求得之法線斜率，並扣除滾子半徑之長度而導致輪廓向外凸出。由此可知會發生尖點之狀態為

$$l = \frac{f}{1-r_v} \quad (3.15)$$

結點發生之情況為

$$l > \frac{f}{1-r_v} \quad (3.16)$$

此兩種特殊之滾子中心路徑，會造成齒輪輪廓之斷裂或向外凸出。對於其中心產生尖點之特殊路徑，雖使輪廓斷裂，但若不違反其他拘束條件，且有另一可提供有效之傳動時，則仍屬可以使用之範圍，便可在輪廓斷裂部分使用與滾子半徑相同之圓弧加以連接，如圖 3.17。

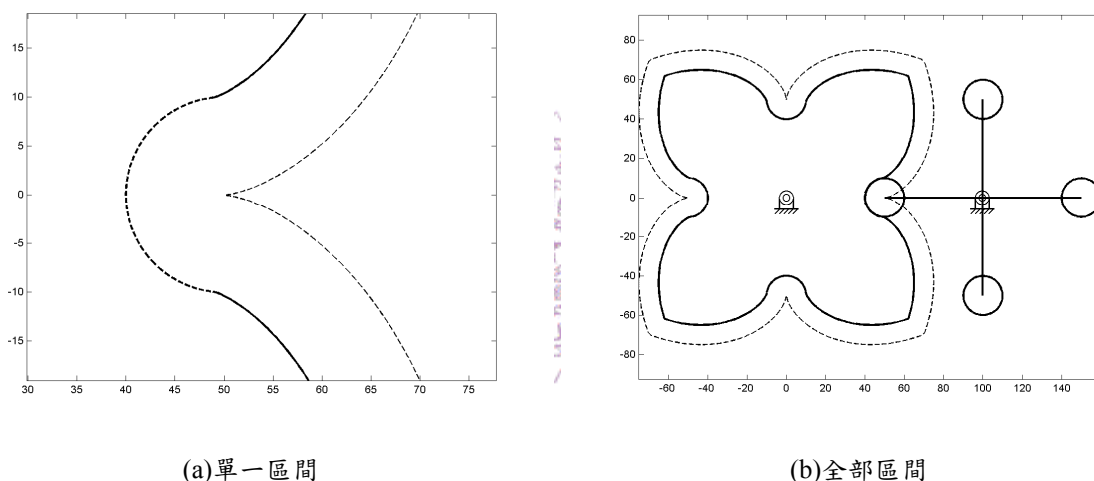


圖 3.17 以圓弧連接之齒輪輪廓

由上可知，滾子中心路徑有尖點時輪廓斷裂，雖可用圓弧加以連接而屬適用之範圍，但當其向外凸出時，則屬不適用之範圍，故需避免結點的情況發生，因此可設定之拘束條件為

$$l \leq \frac{f}{1-r_v} \quad (3.17)$$

當 $f = 100 \text{ mm}$ ，轉速比 r_v 對應之擺臂長度極限值 l_{\max} 的關係，如圖 3.18。當固定軸心距時，其轉速比越低其擺臂長度之最大長度越長。

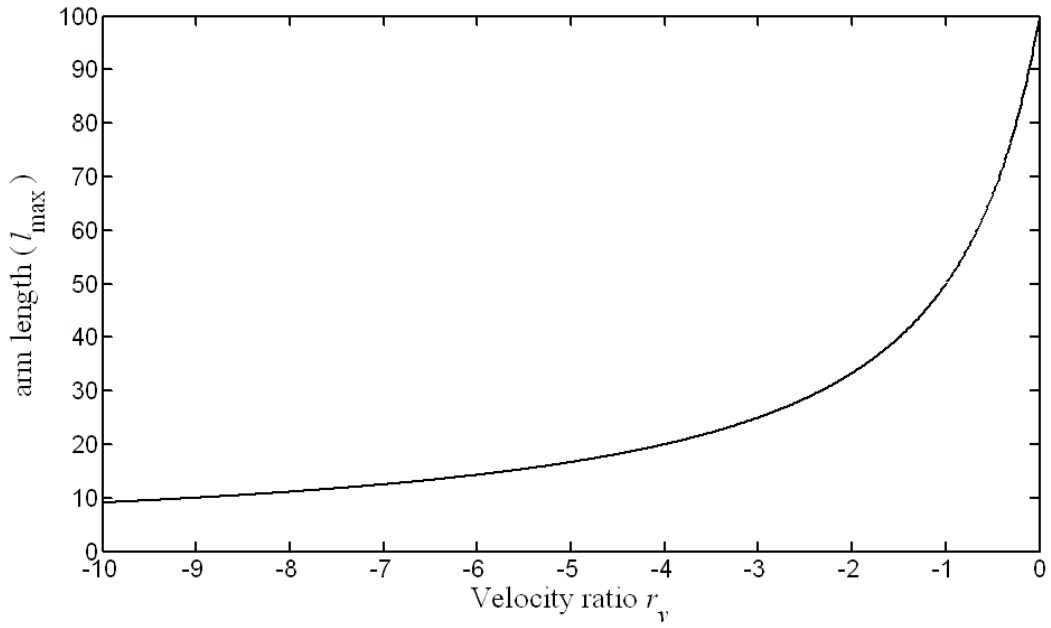


圖 3.18 擺臂長度極限值 l_{\max} 與速比 r_v 關係圖 ($f = 100 \text{ mm}$)

3-3-4 輪廓外形過切

齒輪輪廓的曲率半徑為判斷是否過切的依據，當銷子輪輪廓之曲率半徑 ρ 落在 0 與 r_f 之間，會產生輪廓外形過切之現象[10]。銷子輪輪廓之曲率半徑可視其參數表示式而分別由以下二式求得。

$$\rho = \frac{\left[\left(\frac{dx}{d\theta} \right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}{\left(\frac{dx}{d\theta} \right) \left(\frac{d^2 y}{d\theta^2} \right) - \left(\frac{d^2 x}{d\theta^2} \right) \left(\frac{dy}{d\theta} \right)} \quad (3.18)$$

$$\rho = \frac{\left[r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2 \left(\frac{dx}{d\theta} \right)^2 - r \cdot \left(\frac{d^2 r}{d\theta^2} \right)} \quad (3.19)$$

第四章 銷子輪之機械誤差分析與漸開線齒輪比較

銷子輪本身的製造與組裝誤差會對其滾子之定位精度及動態特性造成相當程度的影響。雖然較小的零件製造公差可以提升機構的精確度與穩定性，但製造成本卻會隨著公差的減小而快速增加[11]。因此，如何決定零件的最大容許公差，以使機構或機器的工作性能與製造成本之間取得平衡，實為一項相當重要工作。所以，就銷子輪機構而言，設計者必須設法得知輪廓及機構設計參數的尺寸公差對於滾子之輸出函數的影響。換言之，機械誤差分析的進行將有助於銷子輪機構的設計與製造。以下分別將各機構設計參數的尺寸公差對於滾子之輸出函數的影響作分析。

4-1 各項參數對銷子輪之機械誤差

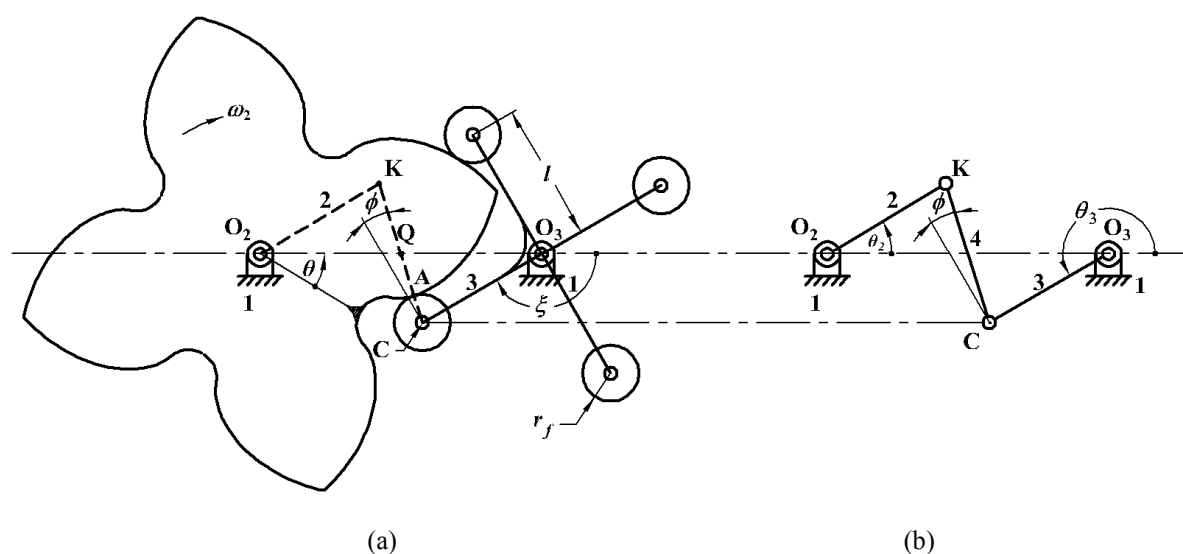


圖 4.1 銷子輪機構及其等效四連桿

如圖 4.1(a)所示的銷子輪機構，可知其軸心距、擺臂長、輪廓及滾子半徑會對此機構產生誤差，本節將探討各項參數對銷子輪之機械誤差，K 為輪廓上接觸點 A 之曲率中心。此機構之等效連桿為四連桿機構如圖 4.1(b)所示，其耦桿(桿 4)為曲率中心 K 點與滾子中心 C 點之連線。其曲柄和搖桿在每一瞬間的運動特性與此銷子輪完全相同。等效連桿如圖 4.1(b)之位置函數，其參數 r_1 、 r_2 、 r_3 、 r_4 與輸入跟輸出變量 θ_2 和 θ_3 之關係可表示為：

$$F(\mathbf{r}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\psi}) = F(r_1, r_2, r_3, r_4, \theta_2, \theta_3) = 0 \quad (4.1)$$

其中 $\mathbf{r} = \{r_1, r_2, r_3, r_4\}^T$ 、 $\boldsymbol{\theta} = \{\theta_2\}$ 及 $\boldsymbol{\psi} = \{\theta_3\}$ ；或[12,13]

$$F = 2[r_1(r_3 \cos \theta_3 - r_2 \cos \theta_2) - r_2 r_3 \cos(\theta_2 - \theta_3)] + r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 - r_4^2 = 0 \quad (4.2)$$

當 $r_1 = \mathbf{O}_2 \mathbf{O}_3 = f$ 、 $r_2 = \mathbf{O}_2 \mathbf{K}$ 、 $r_3 = \mathbf{O}_3 \mathbf{C} = l$ 、及 $r_4 = \mathbf{K} \mathbf{C}$ 。式(4.2)也可從 Freudenstein's equation [12,13]得知。然而， F 方程式對於各微小的誤差值 Δr_1 、 Δr_2 、 Δr_3 、 Δr_4 、 $\Delta \theta_2$ 和 $\Delta \theta_3$ 的微分可表示為：

$$dF \approx \Delta F = \frac{\partial F}{\partial r_1} \Delta r_1 + \frac{\partial F}{\partial r_2} \Delta r_2 + \frac{\partial F}{\partial r_3} \Delta r_3 + \frac{\partial F}{\partial r_4} \Delta r_4 + \frac{\partial F}{\partial \theta_2} \Delta \theta_2 + \frac{\partial F}{\partial \theta_3} \Delta \theta_3 = 0 \quad (4.3)$$

4-1-1 軸心距誤差之影響

若只考慮軸心距誤差 Δr_1 (或 Δf) 對輸出角 $\Delta \theta_3$ 的影響，此輸出之機械誤差可表示為：

$$\Delta \theta_3 = - \frac{\frac{\partial F}{\partial r_1} \Delta r_1}{\frac{\partial F}{\partial \theta_3}} \quad (4.4)$$

其中

$$\frac{\partial F}{\partial r_1} = 2(r_1 + r_3 \cos \theta_3 - r_2 \cos \theta_2) \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \theta_3} = -2r_3[r_1 \sin \theta_3 + r_2 \sin(\theta_2 - \theta_3)] \quad (4.6)$$

將式(4.5)和式(4.6)代入式(4.4)化簡轉換後，可知由軸心距誤差 Δf 導致之機械誤差 ΔS_f 為：

$$\begin{aligned} \Delta S_f = -\Delta \theta_3 &= - \frac{r_1 + r_3 \cos \theta_3 - r_2 \cos \theta_2}{r_3[r_1 \sin \theta_3 + r_2 \sin(\theta_2 - \theta_3)]} \Delta r_1 = - \frac{\Delta r_1 \sin(\theta_3 - \phi)}{r_3 \cos \phi} \\ &= - \frac{\Delta f \sin(\xi + \phi)}{l \cos \phi} = - \frac{\Delta f \cos \alpha}{l \cos \phi} \end{aligned} \quad (4.7)$$

4-1-2 擺臂長誤差之影響

若只考慮擺臂長誤差 Δr_3 (或 Δl) 對輸出角 $\Delta \theta_3$ 的影響，此輸出之機械誤差可表示為：

$$\Delta \theta_3 = -\frac{\partial F / \partial r_3}{\partial F / \partial \theta_3} \Delta r_3 \quad (4.8)$$

其中

$$\frac{\partial F}{\partial r_3} = 2[r_3 + r_1 \cos \theta_3 - r_2 \cos(\theta_2 - \theta_3)] \quad (4.9)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \theta_3} = -2r_3[r_1 \sin \theta_3 + r_2 \sin(\theta_2 - \theta_3)] \quad (4.10)$$

將式(4.9)和式(4.10)代入式(4.8)化簡轉換後，可知由擺臂長誤差 Δl 導致之機械誤差 ΔS_l 為：

$$\Delta S_l = -\Delta \theta_3 = -\frac{r_3 + r_1 \cos \theta_3 - r_2 \cos(\theta_2 - \theta_3)}{r_3[r_1 \sin \theta_3 + r_2 \sin(\theta_2 - \theta_3)]} \Delta r_3 = \frac{\Delta r_3 \tan \phi}{r_3} = \frac{\Delta l \tan \phi}{l} \quad (4.11)$$

4-1-3 輪廓及滾子半徑誤差之影響

若只考慮耦桿誤差 Δr_4 對輸出角 $\Delta \theta_3$ 的影響，此輸出之機械誤差可表示為：

$$\Delta \theta_3 = -\frac{\partial F / \partial r_4}{\partial F / \partial \theta_3} \Delta r_4 \quad (4.12)$$

其中

$$\frac{\partial F}{\partial r_4} = -2r_4 \quad (4.13)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \theta_3} = -2r_3[r_1 \sin \theta_3 + r_2 \sin(\theta_2 - \theta_3)] \quad (4.14)$$

此誤差 Δr_4 包含了輪廓的誤差 Δn 和滾子的誤差 Δr_f ，即 $\Delta r_4 = \Delta n + \Delta r_f$ 。由圖 4.1 可知 $\xi(\theta) = 360^\circ - \theta_3$ ，所以 $\Delta S = \Delta \xi = -\Delta \theta_3$ 。再將式(4.13)和式(4.14)代入式(4.12)化簡轉換後，可知由輪廓誤差 Δn 導致之機械誤差 ΔS_n 及滾子誤差 Δr_f 導致之機械誤差 ΔS_{rf} 為：

$$\Delta S_n = -\Delta\theta_3 = \frac{r_4}{r_3[r_1 \sin \theta_3 + r_2 \sin(\theta_2 - \theta_3)]}(\Delta r_4 - \Delta r_f) = \frac{\Delta r_4 - \Delta r_f}{r_3 \cos \phi}$$

$$= \frac{\Delta n}{l \cos \phi} \quad (4.15)$$

$$\Delta S_{r_f} = -\Delta\theta_3 = \frac{r_4}{r_3[r_1 \sin \theta_3 + r_2 \sin(\theta_2 - \theta_3)]}(\Delta r_4 - \Delta n) = \frac{\Delta r_4 - \Delta n}{r_3 \cos \phi}$$

$$= \frac{\Delta r_f}{l \cos \phi} \quad (4.16)$$

4-1-4 輪廓徑向尺寸誤差之影響

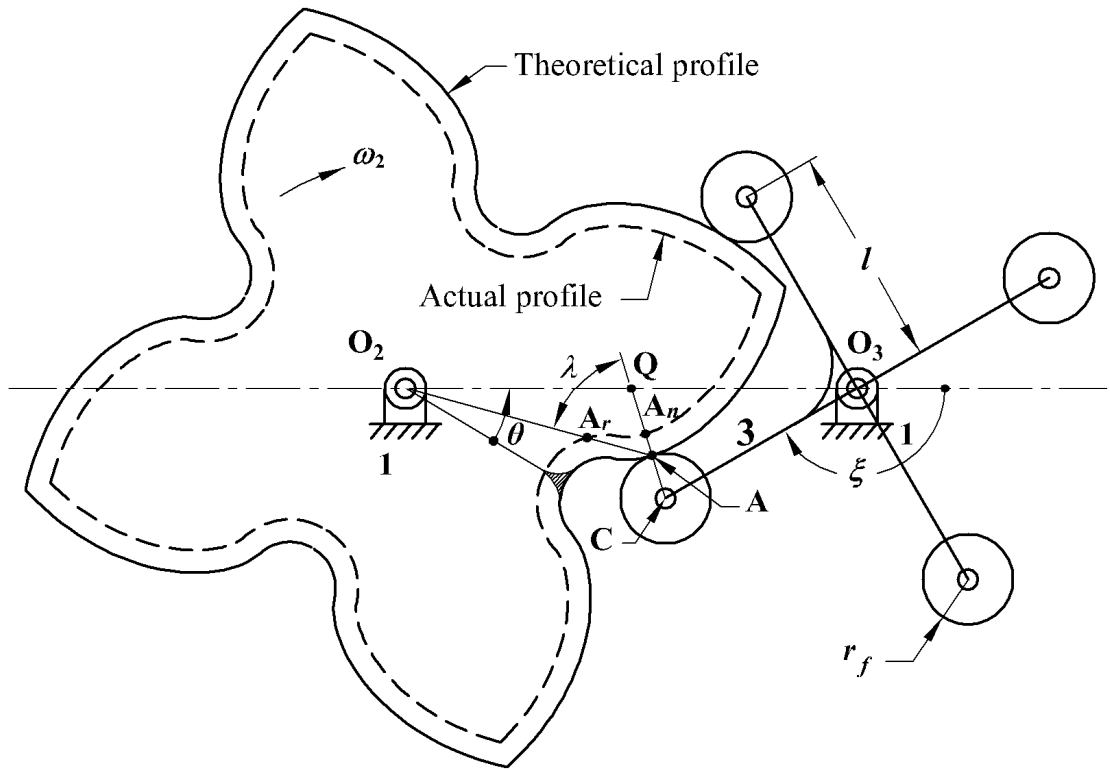


圖 4.2 銷子輪機構之實際輪廓

由圖 4.2 中接觸點 A 的法線和 O_2A 與實際輪廓分別交於點 A_n 、 A_r 。對於微小輪廓誤差之法線 AA_n ，其 $A_n A_r$ 會正切於實際輪廓，所以 $\triangle AA_n A_r$ 可視為是一直角三角形得：

$$\Delta n \approx \Delta r \cos \lambda \quad (4.17)$$

其中 $\Delta r = AA_r$ 和 $\Delta n = AA_n$ 及 $\lambda = \angle A_r AA_n$ 。輪廓徑向尺寸誤差 Δr 對輸出角 $\Delta\theta_3$ 的影響，由式(4.15)和式(4.17)可得此輸出之機械誤差為：

$$\Delta S_r = -\Delta \theta_3 \approx \frac{\Delta r \cos \lambda}{l \cos \phi} \quad (4.18)$$

在推倒出徑向輪廓誤差所造成的輸出誤差之後，由(4.7)、(4.11)及(4.18)三式，可以估計銷輪位移函數的最差情況誤差為

$$\Delta S_{\text{wor}} = |\Delta S_r| + |\Delta S_f| + |\Delta S_l| \quad (4.19)$$

以及最大預期誤差為

$$\Delta S_{\text{rss}} = \sqrt{\Delta S_r^2 + \Delta S_f^2 + \Delta S_l^2} \quad (4.20)$$

將(4.7)、(4.11)及(4.18)等三式對時間進行兩次微分，可得從動件的速度與加速度誤差方程式。

實例分析：



圖 4.3 KAMO 系列 TCG 環形導軌

參考加茂精工株式會社提供產品型錄[2]，台灣由厚利貿易股份有限公司代理，其 KAMO 系列 TCG 環形導軌(如圖 4.3)。對環形機構進行一般化，可得到圖 4.4。此機構之齒形與銷子輪齒形相同，詳細內容在附錄 A 中。

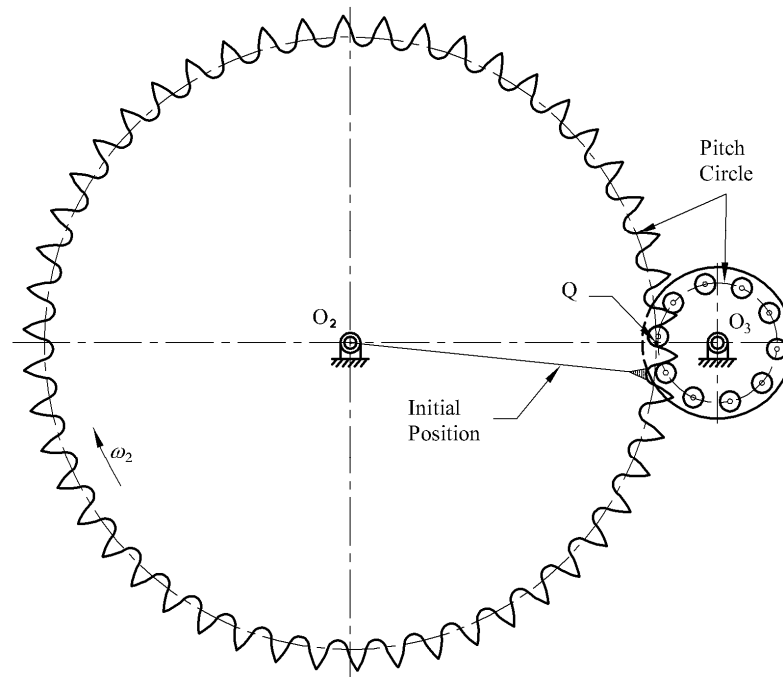


圖 4.4 TCG 環形導軌之一般化機構簡圖

如圖 4.4 所示的銷子輪機構，其速比為 5:1、軸心距 f 為 146 mm、擺臂長 l 為 23.75 mm 以及滾子半徑 r_f 為 4 mm 之參數。利用 4-1 節探討的結果對此機構作誤差分析。圖 4.5 為 TCG 環形導軌機構圖及對應的等效四連桿。由以上的資料可知從標準機械設計圖表便覽[14]所查得其對應之公差值及各等級公差值，如表 4.1。其次，將各等級的公差代入作分析，由於各齒的對應為對稱的關係，只顯示齒輪旋轉半齒的角度，可得到圖 4.6~圖 4.10。因此接觸比大於 1，故齒輪的旋轉角會超過原本半齒 18 度。圖 4.6~圖 4.10 中的(a)為主要觀察一齒及相鄰一齒造成的誤差影響，然而，只針對單一齒來討論，如圖 4.6~圖 4.10 中的(b)。

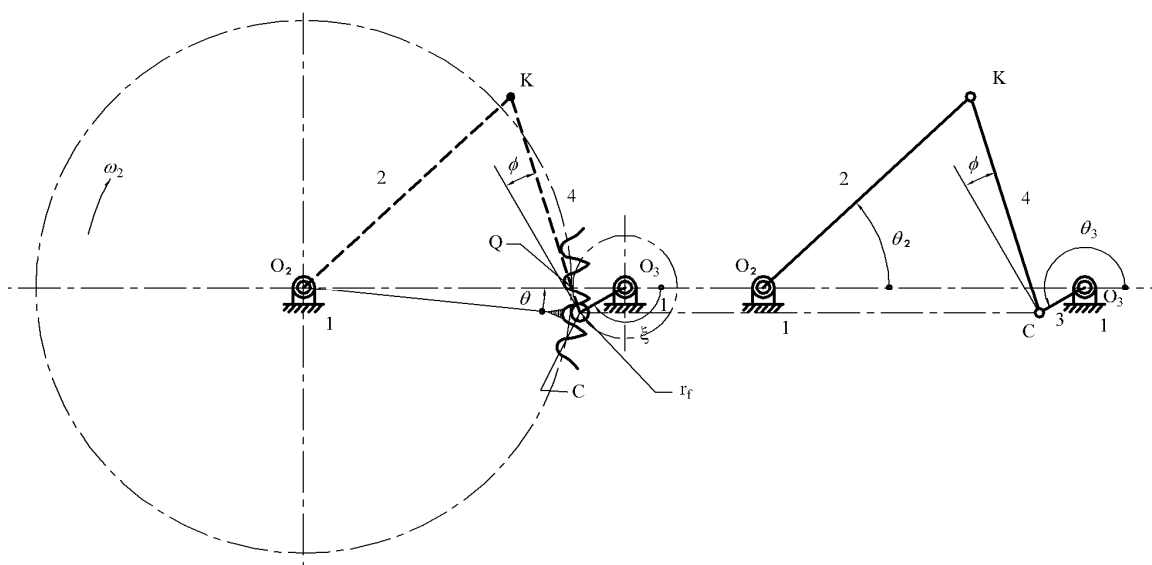
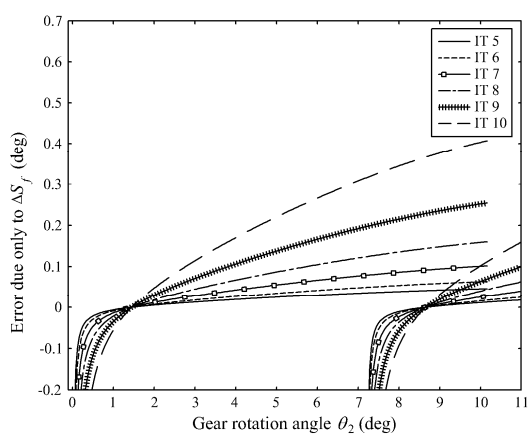


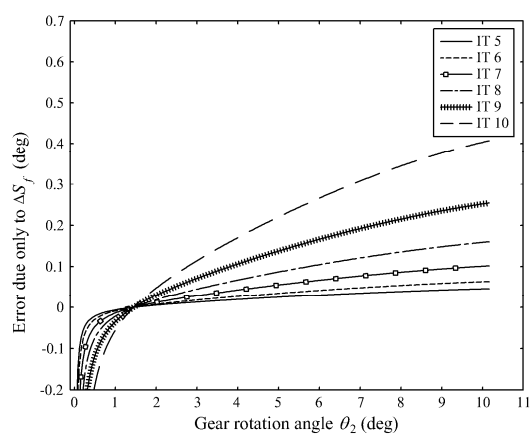
圖 4.5 TCG 環型機構及其等效四連桿

表 4.1 各參數之各等級公差值

參數	IT 基本公差(mm)					
	IT 5	IT 6	IT 7	IT 8	IT 9	IT 10
Δr_1	0.018	0.025	0.004	0.063	0.1	0.16
Δr_3	0.009	0.013	0.021	0.033	0.052	0.084
Δn	0.011	0.016	0.025	0.039	0.062	0.1
Δr_f	0.005	0.008	0.012	0.018	0.03	0.048
Δr	0.018	0.025	0.04	0.063	0.1	0.16



(a)



(b)

圖 4.6 軸心距誤差對輸出之影響

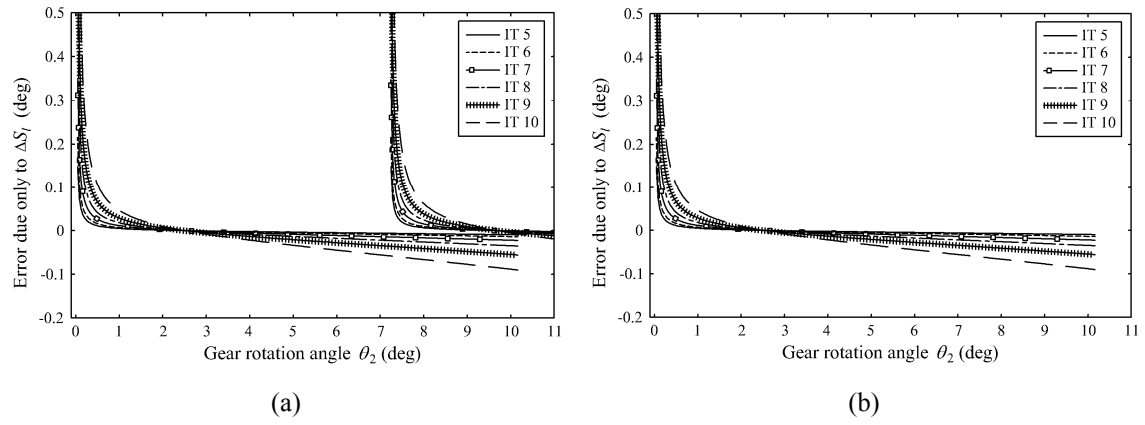


圖 4.7 擺臂長誤差對輸出之影響

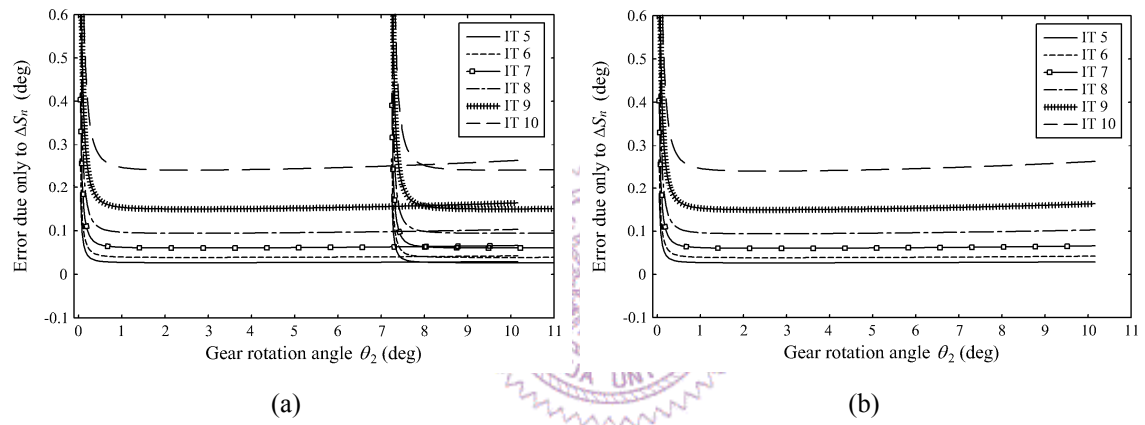


圖 4.8 法線方向輪廓誤差對輸出之影響

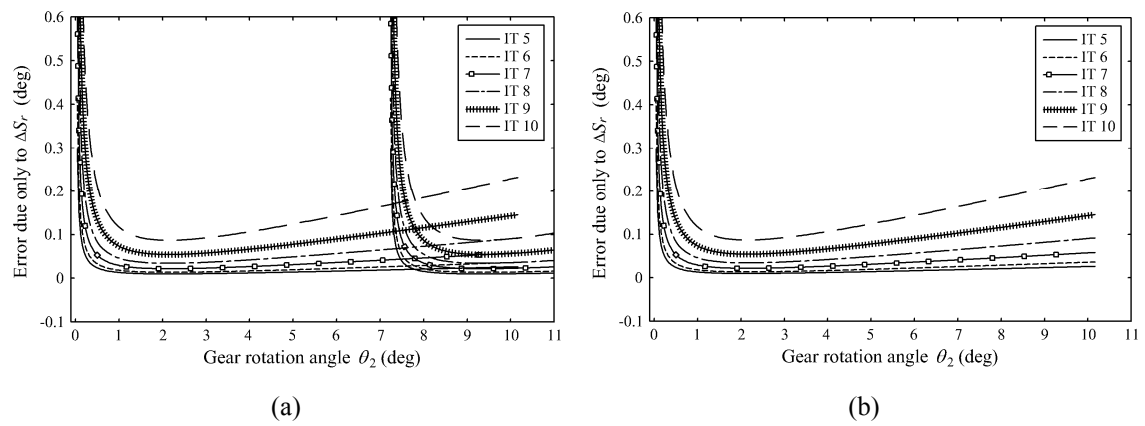


圖 4.9 徑向輪廓誤差對輸出之影響

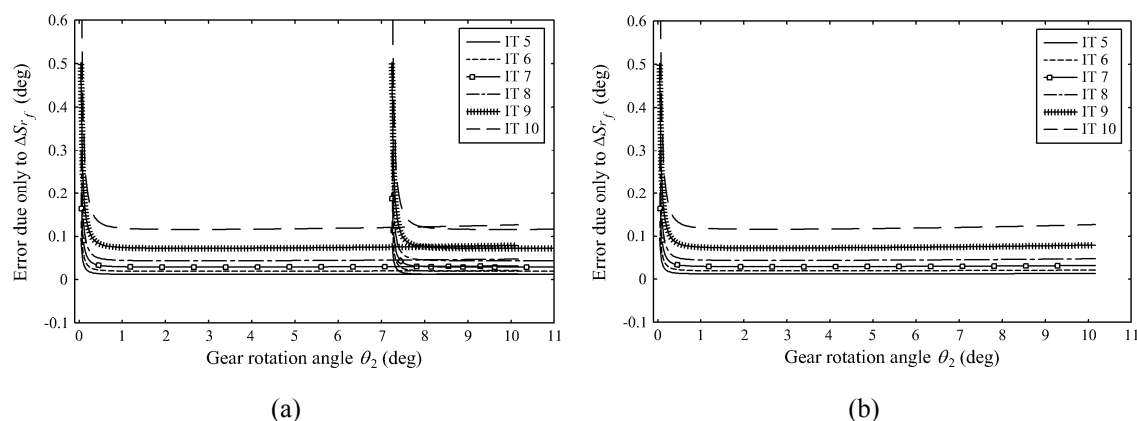


圖 4.10 滾子半徑誤差對輸出之影響

由圖 4.6~圖 4.10 可知，各參數在公差等級 5~10，所對應之輸出誤差。若以 IT6 公差來討論各參數對輸出之誤差影響，如表 4.2。從表中可看出，軸心距誤差使輸出精度的等級下降至 IT8 至 IT9 之間，相較其他參數所造成之影響為大；符合 Inho Gu[5]所提到軸心距誤差為主要影響輸出位置函數之誤差。

表 4.2 各參數在 IT 6 時輸出誤差對應之精度等級

參數	IT 6 輸出的誤差	誤差值比率	輸出精度等級
ΔS_f	0.0636°	1	IT 8(0.046°)~IT 9(0.074°)
ΔS_l	0.0139°	0.218	IT 5(0.013°)~IT 6(0.019°)
ΔS_n	0.0422°	0.663	IT 7(0.03°)~IT 8(0.046°)
ΔS_r	0.0363°	0.571	IT 7(0.03°)~IT 8(0.046°)
ΔS_{r_c}	0.0211°	0.331	IT 6(0.019°)~IT 7(0.03°)

若採用 IT6 公差，當齒輪旋轉 10.12° 時，對應之銷輪輸出角為 50.6° ，由圖 4.12 可得 $\Delta S_{wor} = 0.1138^\circ$ ，顯示其精度會比所預期的狀況來的差。換言之，若最差的情況發生，其銷輪位置精度等級會由機構設計參數所採用的 IT6 降至 IT9(0.074°)與 IT10(0.12°)之間。

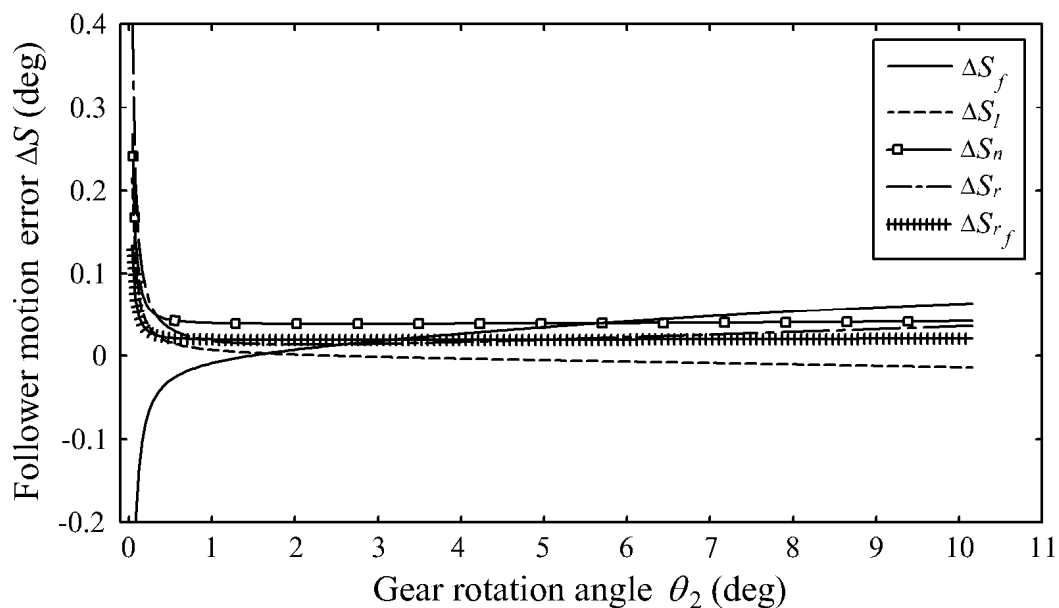


圖 4.11 IT 6 其各參數誤差對輸出之影響

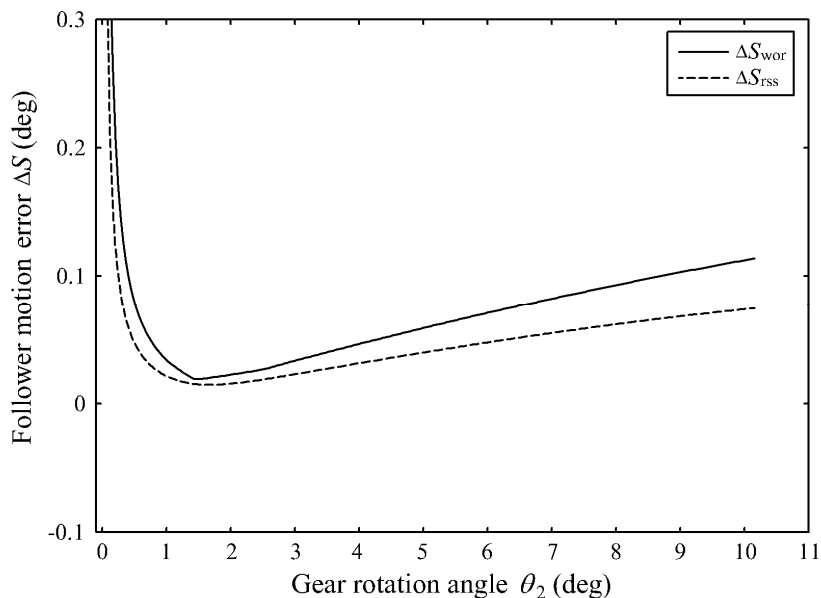


圖 4.12 IT 6 最差情況誤差及最大預期誤差

4-1-5 結果與討論

本節推導出銷子輪機構之軸心距、擺臂長、滾子半徑、法線方向及徑向尺寸輪廓的偏差量所導致輸出位置函數誤差的解析式，並估計銷輪位移函數的最差情況誤差及最大期望誤差。然而，由實際例子可得知軸心距誤差為主要影響輸出位置函數之誤差。

4-2 各項參數對內接式銷子輪之機械誤差

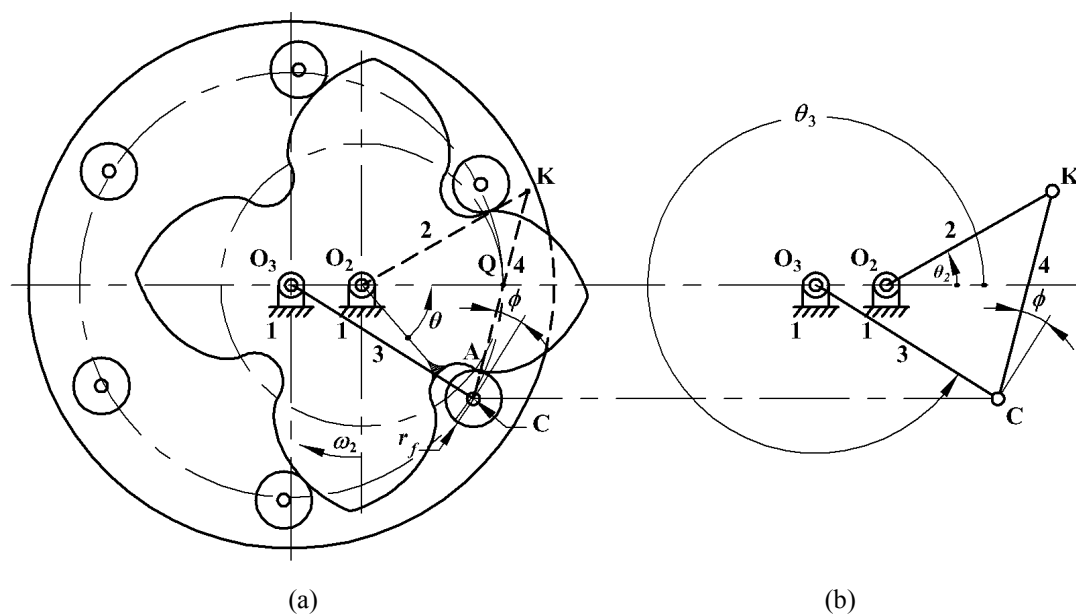


圖 4.13 內接式銷子輪機構(速比 3 : 2)及其等效四連桿

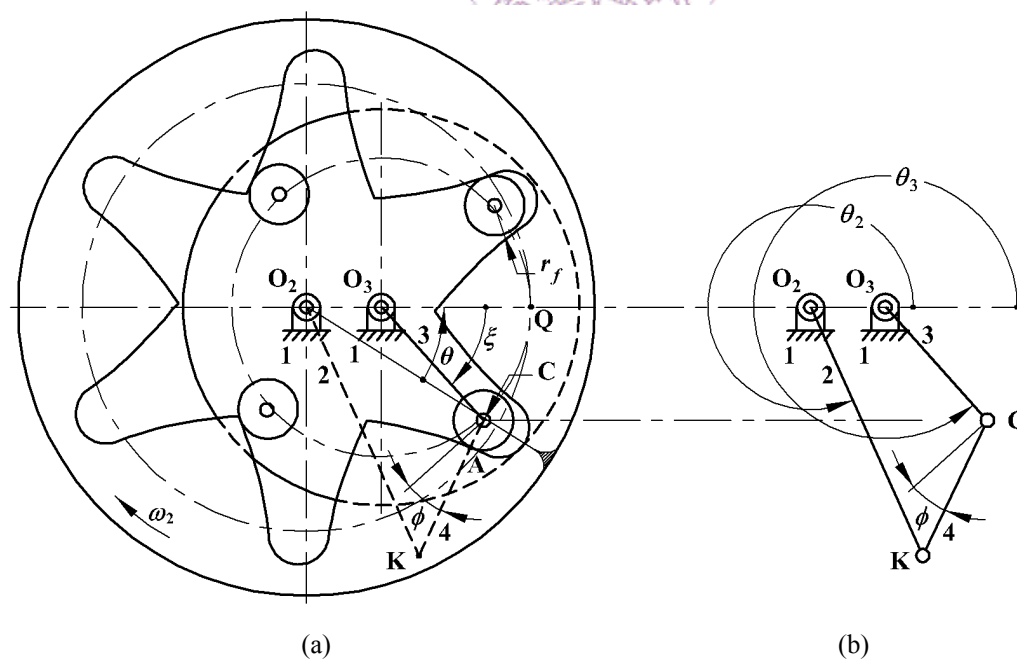


圖 4.14 內接式銷子輪機構(速比 2 : 3)及其等效四連桿

圖 4.13 和圖 4.14 分別為速比 3 : 2、2 : 3 之內接式銷子輪機構，由圖 4.13(a)和圖 4.14(a)所示的內接式銷子輪機構，我們可知其軸心距、擺臂長、輪廓及滾子半徑會對此機構產生誤差，本節將探討各項參數對銷子輪之機械誤差， K 為輪廓上接觸點 A 之曲

率中心。其中，擺臂長之限制條件與外接式類似，詳細內容整理於附錄 B 中。然而，此機構之等效連桿為四連桿機構如圖 4.13(b)和圖 4.14(b)所示，其耦桿(桿 4)為曲率中心 K 點與滾子中心 C 點之連線。其曲柄和搖桿在每一瞬間的運動特性與此銷子輪完全相同。等效連桿如圖 4.13(b)和圖 4.14(b)之位置函數，其參數 r_1 、 r_2 、 r_3 、 r_4 與輸入跟輸出變量 θ_2 和 θ_3 之關係可表示為：

$$F(\mathbf{r}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\psi}) = F(r_1, r_2, r_3, r_4, \theta_2, \theta_3) = 0 \quad (4.21)$$

其中 $\mathbf{r} = \{r_1, r_2, r_3, r_4\}^T$ 、 $\boldsymbol{\theta} = \{\theta_2\}$ 及 $\boldsymbol{\psi} = \{\theta_3\}$ ；或[12,13]

$$F = 2[r_1(r_3 \cos \theta_3 - r_2 \cos \theta_2) - r_2 r_3 \cos(\theta_2 - \theta_3)] + r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 - r_4^2 = 0 \quad (4.22)$$

當 $r_1 = \mathbf{O}_2 \mathbf{O}_3 = f$ 、 $r_2 = \mathbf{O}_2 \mathbf{K}$ 、 $r_3 = \mathbf{O}_3 \mathbf{C} = l$ 、及 $r_4 = \mathbf{K} \mathbf{C}$ 。式(4.22)也可從 Freudenstein's equation [12,13]得知。然而， F 方程式對於各微小的誤差值 Δr_1 、 Δr_2 、 Δr_3 、 Δr_4 、 $\Delta \theta_2$ 和 $\Delta \theta_3$ 的微分可表示為：

$$dF \approx \Delta F = \frac{\partial F}{\partial r_1} \Delta r_1 + \frac{\partial F}{\partial r_2} \Delta r_2 + \frac{\partial F}{\partial r_3} \Delta r_3 + \frac{\partial F}{\partial r_4} \Delta r_4 + \frac{\partial F}{\partial \theta_2} \Delta \theta_2 + \frac{\partial F}{\partial \theta_3} \Delta \theta_3 = 0 \quad (4.23)$$

4-2-1 軸心距誤差之影響

若只考慮軸心距誤差 Δr_1 (或 Δf) 對輸出角 $\Delta \theta_3$ 的影響，此輸出之機械誤差可表示為：

$$\Delta \theta_3 = - \frac{\frac{\partial F}{\partial r_1} \Delta r_1}{\frac{\partial F}{\partial \theta_3}} \quad (4.24)$$

其中

$$\frac{\partial F}{\partial r_1} = 2(r_1 + r_3 \cos \theta_3 - r_2 \cos \theta_2) \quad (4.25)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \theta_3} = -2r_3[r_1 \sin \theta_3 + r_2 \sin(\theta_2 - \theta_3)] \quad (4.26)$$

將式(4.25)和式(4.26)代入式(4.24)化簡轉換後，可知由軸心距誤差 Δf 導致之機械誤差 ΔS_f 為：

$$\Delta S_f = -\Delta\theta_3 = -\frac{r_1 + r_3 \cos\theta_3 - r_2 \cos\theta_2}{r_3 [r_1 \sin\theta_3 + r_2 \sin(\theta_2 - \theta_3)]} \Delta r_1 = -\frac{\Delta f \cos\alpha}{l \cos\phi} \quad (4.27)$$

4-2-2 擺臂長誤差之影響

若只考慮擺臂長誤差 Δr_3 (或 Δl) 對輸出角 $\Delta\theta_3$ 的影響，此輸出之機械誤差可表示為：

$$\Delta\theta_3 = -\frac{\partial F / \partial r_3}{\partial F / \partial \theta_3} \Delta r_3 \quad (4.28)$$

其中

$$\frac{\partial F}{\partial r_3} = 2[r_3 + r_1 \cos\theta_3 - r_2 \cos(\theta_2 - \theta_3)] \quad (4.29)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \theta_3} = -2r_3 [r_1 \sin\theta_3 + r_2 \sin(\theta_2 - \theta_3)] \quad (4.30)$$

將式(4.29)和式(4.30)代入式(4.28)化簡轉換後，可知由擺臂長誤差 Δl 導致之機械誤差 ΔS_l 為：

$$\Delta S_l = -\Delta\theta_3 = -\frac{r_3 + r_1 \cos\theta_3 - r_2 \cos(\theta_2 - \theta_3)}{r_3 [r_1 \sin\theta_3 + r_2 \sin(\theta_2 - \theta_3)]} \Delta r_3 = \frac{\Delta r_3 \tan\phi}{r_3} = \frac{\Delta l \tan\phi}{l} \quad (4.31)$$

4-2-3 輪廓及滾子半徑誤差之影響

若只考慮耦桿誤差 Δr_4 對輸出角 $\Delta\theta_3$ 的影響，此輸出之機械誤差可表示為：

$$\Delta\theta_3 = -\frac{\partial F / \partial r_4}{\partial F / \partial \theta_3} \Delta r_4 \quad (4.32)$$

其中

$$\frac{\partial F}{\partial r_4} = -2r_4 \quad (4.33)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \theta_3} = -2r_3 [r_1 \sin\theta_3 + r_2 \sin(\theta_2 - \theta_3)] \quad (4.34)$$

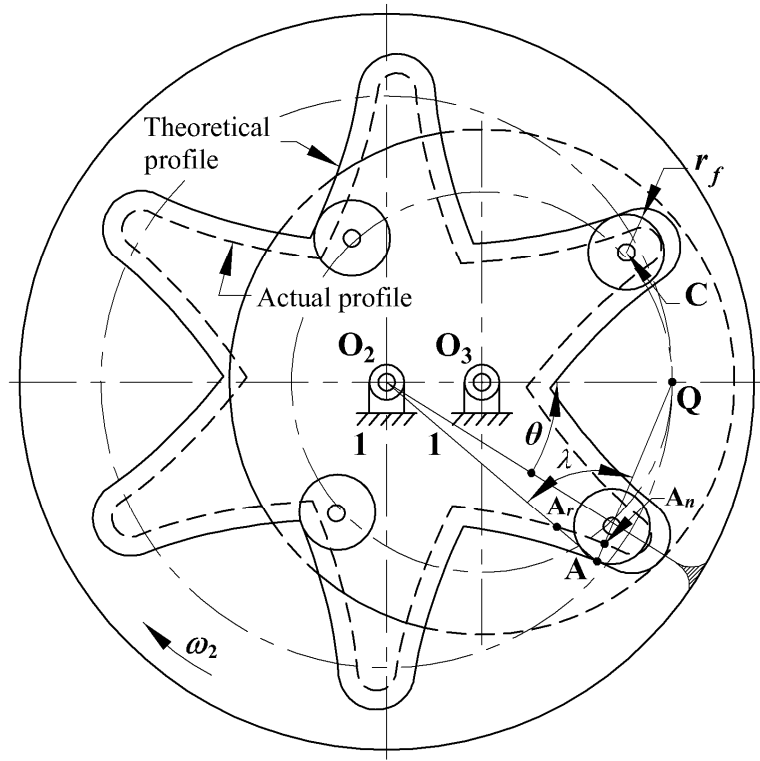


圖 4.16 內接式銷子輪機構(速比 2 : 3)之實際輪廓

由圖 4.15 和圖 4.16 中接觸點 A 的法線和 O_2A 與實際輪廓分別交於點 A_n 、 A_r 。對於微小輪廓誤差之法線 AA_n ，其 A_nA_r 會正切於實際輪廓，所以 $\triangle AA_nA_r$ 可視為是一直角三角形得：

$$\Delta n \approx \Delta r \cos \lambda \quad (4.37)$$

其中 $\Delta r = AA_r$ 和 $\Delta n = AA_n$ 及 $\lambda = \angle A_rAA_n$ 。輪廓徑向尺寸誤差 Δr 對輸出角 $\Delta\theta_3$ 的影響，由式(4.35)和式(4.37)可得此輸出之機械誤差為：

$$\Delta S_r = -\Delta\theta_3 \approx \frac{\Delta r \cos \lambda}{l \cos \phi} \quad (4.38)$$

在推導出徑向輪廓誤差所造成的輸出誤差之後，由(4.27)、(4.31)及(4.38)三式，可以估計銷輪位移函數的最差情況誤差為

$$\Delta S_{\text{wor}} = |\Delta S_r| + |\Delta S_f| + |\Delta S_l| \quad (4.39)$$

以及最大預期誤差為

$$\Delta S_{\text{rss}} = \sqrt{\Delta S_r^2 + \Delta S_f^2 + \Delta S_l^2} \quad (4.40)$$

將(4.27)、(4.31)及(4.38)等三式對時間進行兩次微分，可得從動件的速度與加速度誤差方程式。

實例分析：

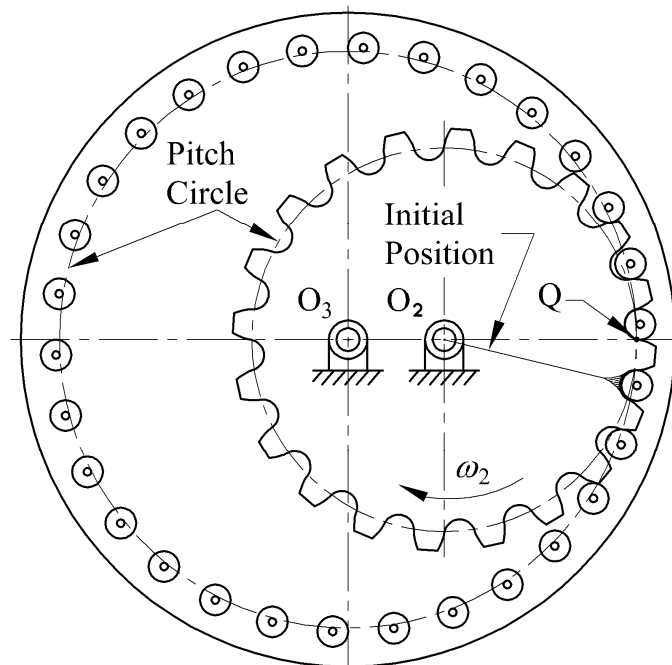


圖 4.17 內接式銷子輪機構(速比 3 : 2)之一般化機構簡圖

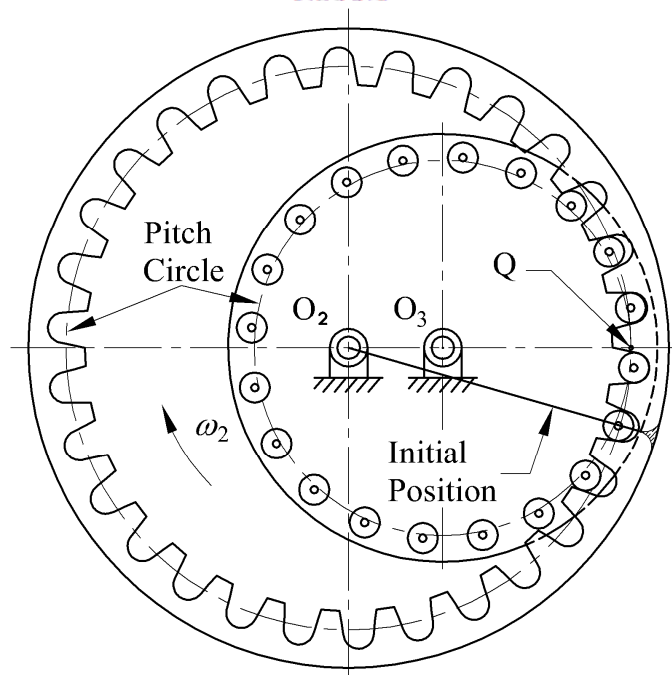


圖 4.18 內接式銷子輪機構(速比 2 : 3)之一般化機構簡圖

如圖 4.17 與圖 4.18 所示的內接式銷子輪機構，其速比分別為 3：2 與 2：3、擺臂長 l 為 76 與 51 mm、軸心距 f 以及滾子半徑 r_f 皆為 25 mm 及 4 mm 之參數。利用 4-2 節探討的結果對此機構作誤差分析。圖 4.19 與圖 4.20 為內接式銷子輪機構圖及對應的等效四連桿。由以上資料可知從標準機械設計圖表便覽[14]所查得其對應之公差值及各等級公差值，如表 4.3 和表 4.4。其次，將各等級的公差代入作分析，由於各齒的對應為對稱之關係，只顯示齒輪旋轉半齒的角度，可得到圖 4.21~圖 4.30。因接觸比大於 1，故齒輪的旋轉角會超過原本半齒的角度。圖 4.21~圖 4.30 中的(a)為主要觀察一齒及相鄰一齒造成的誤差影響，然而，我們只針對單一齒來討論，如圖 4.21~圖 4.30 中的(b)。

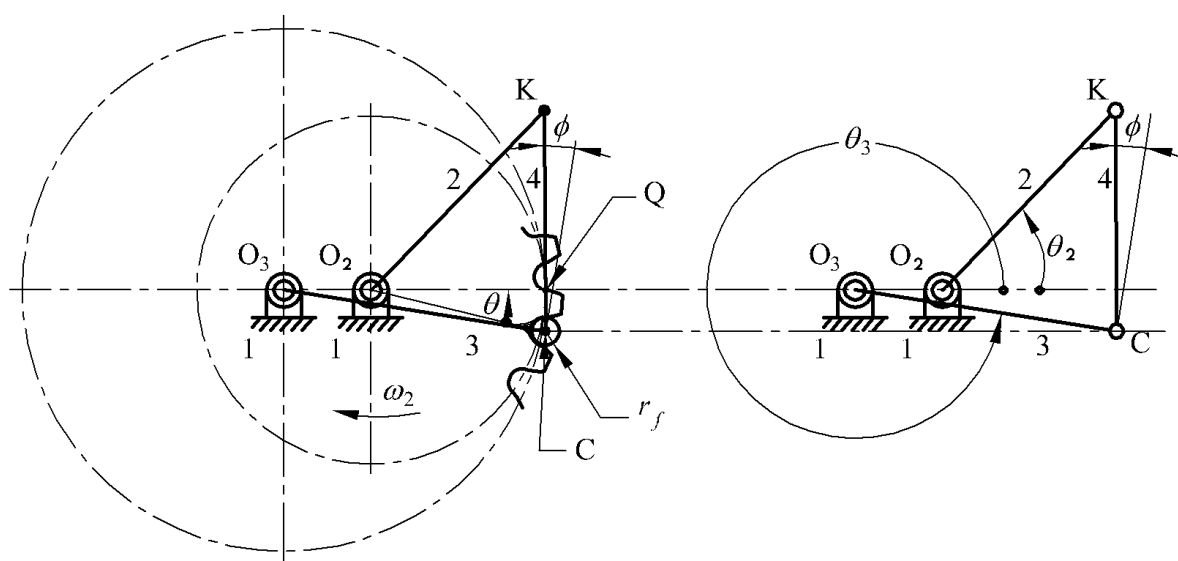


圖 4.19 內接式銷子輪機構(速比 3：2)及其等效四連桿

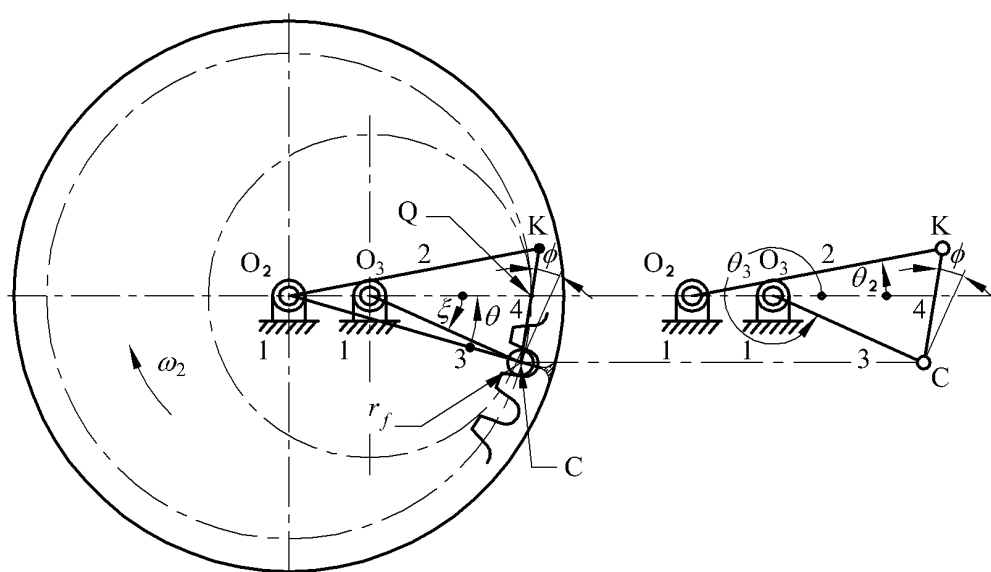


圖 4.20 內接式銷子輪機構(速比 2：3)及其等效四連桿

表 4.3 各參數(速比 3 : 2)之各等級公差值

參數	IT 基本公差(mm)					
	IT 5	IT 6	IT 7	IT 8	IT 9	IT 10
Δr_1	0.009	0.013	0.021	0.033	0.052	0.084
Δr_3	0.013	0.019	0.030	0.046	0.074	0.120
Δn	0.013	0.019	0.030	0.046	0.074	0.120
Δr_f	0.005	0.008	0.012	0.018	0.030	0.048
Δr	0.013	0.019	0.030	0.046	0.074	0.120

表 4.4 各參數(速比 2 : 3)之各等級公差值

參數	IT 基本公差(mm)					
	IT 5	IT 6	IT 7	IT 8	IT 9	IT 10
Δr_1	0.009	0.013	0.021	0.033	0.052	0.084
Δr_3	0.013	0.019	0.030	0.046	0.074	0.120
Δn	0.013	0.019	0.030	0.046	0.074	0.120
Δr_f	0.005	0.008	0.012	0.018	0.03	0.048
Δr	0.013	0.019	0.030	0.046	0.074	0.120

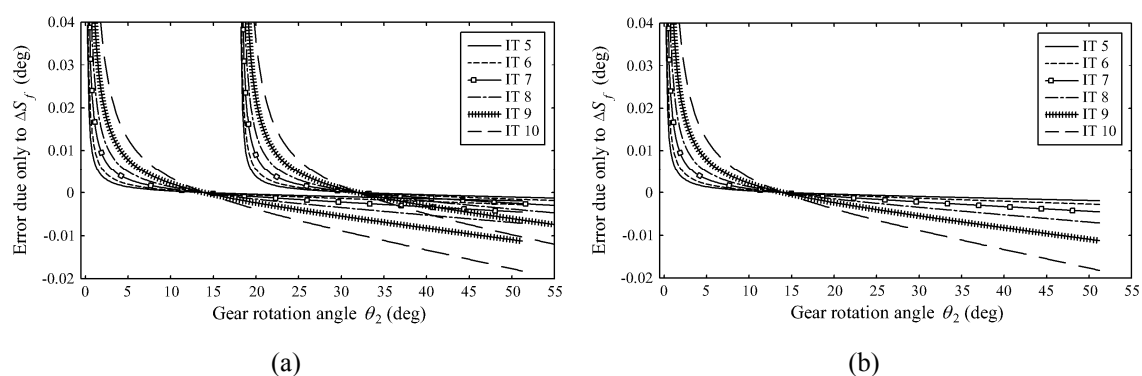


圖 4.21 軸心距誤差(速比 3 : 2)對輸出之影響

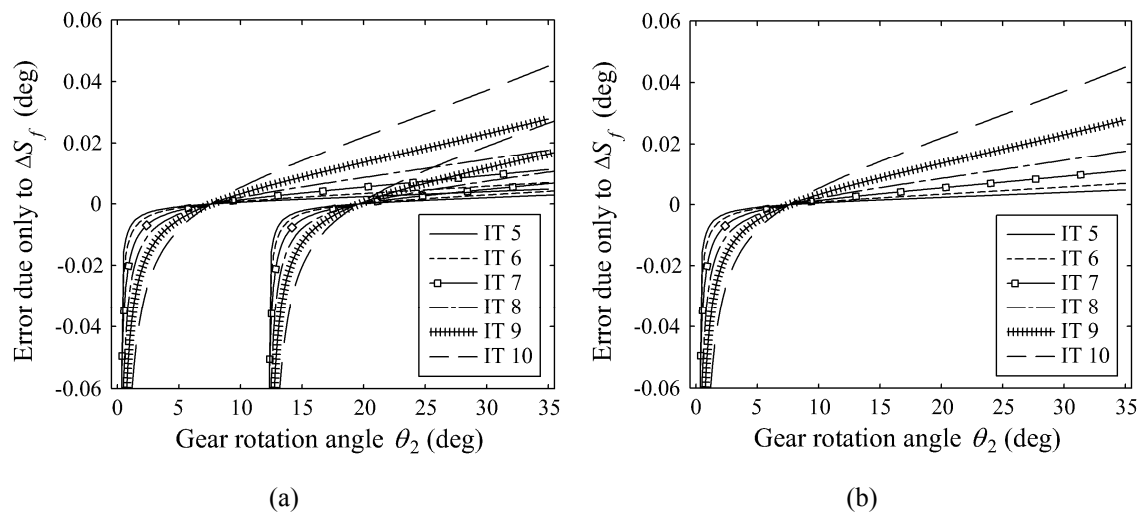


圖 4.22 軸心距誤差(速比 2 : 3)對輸出之影響

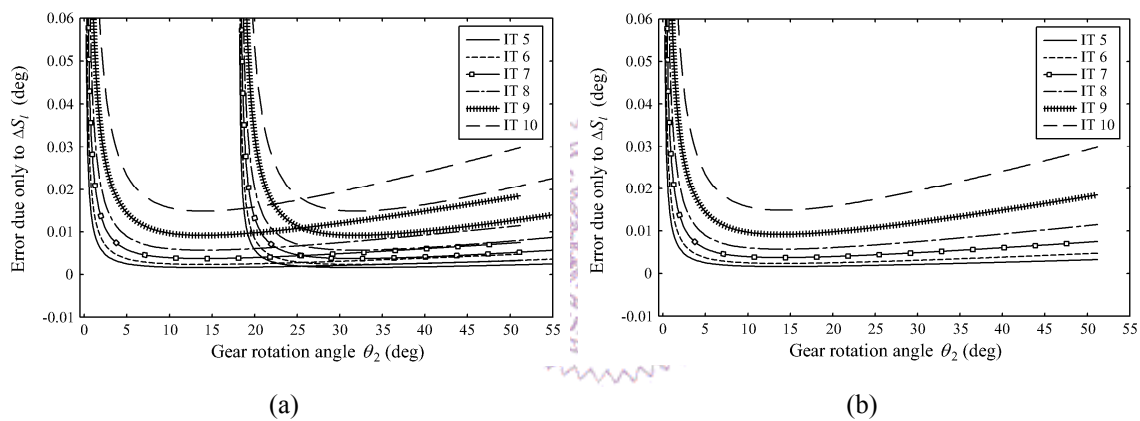


圖 4.23 擺臂長誤差(速比 3 : 2)對輸出之影響

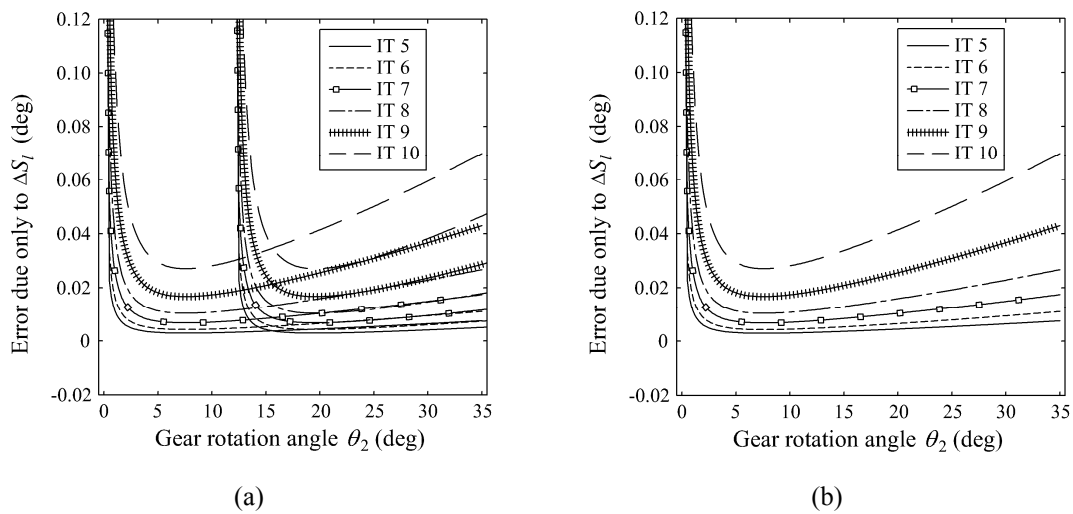


圖 4.24 擺臂長誤差(速比 2 : 3)對輸出之影響

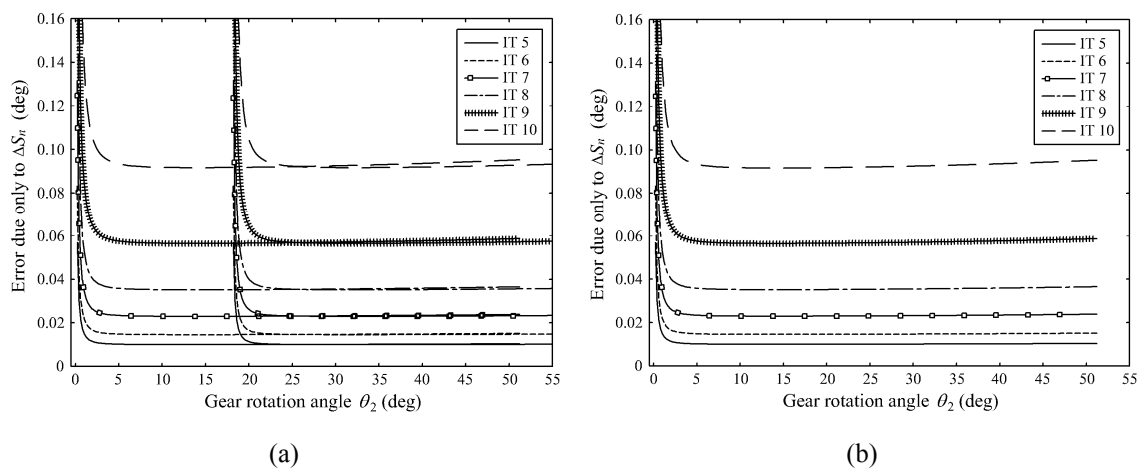


圖 4.25 法線方向輪廓誤差(速比 3 : 2)對輸出之影響

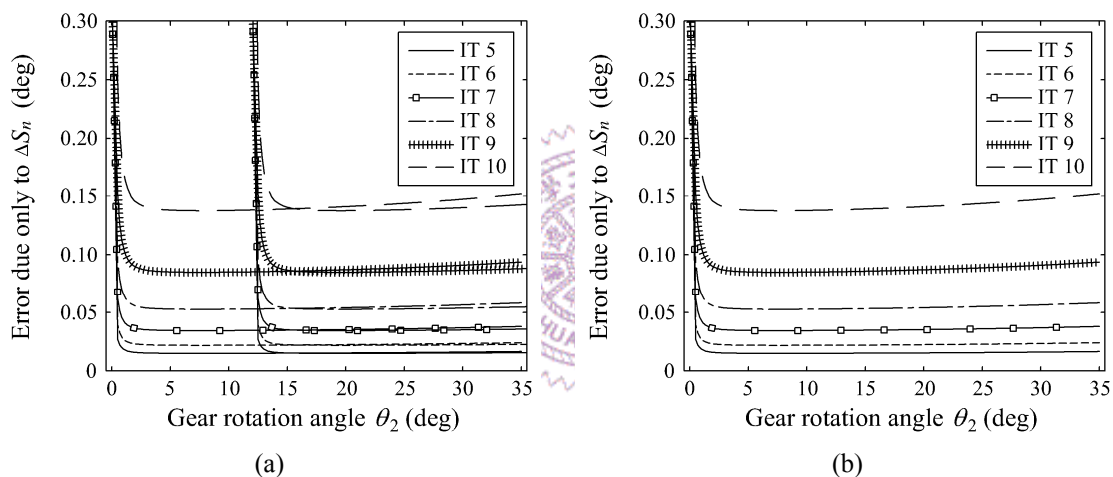


圖 4.26 法線方向輪廓誤差(速比 2 : 3)對輸出之影響

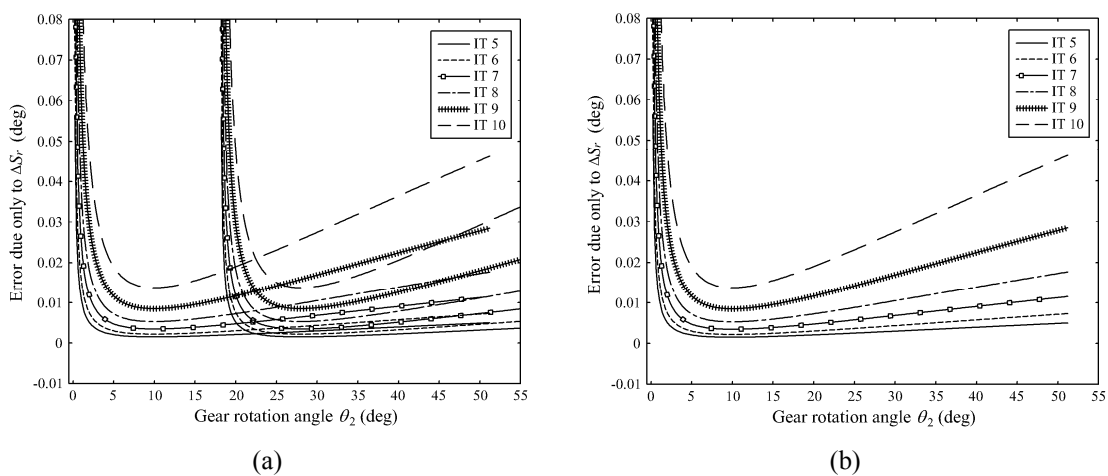
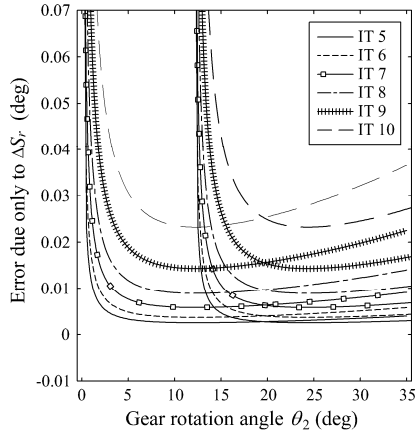
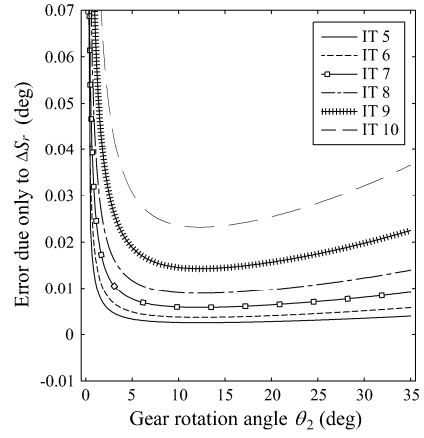


圖 4.27 徑向輪廓誤差(速比 3 : 2)對輸出之影響

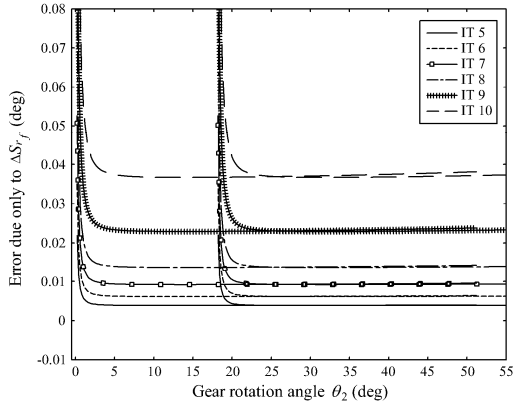


(a)

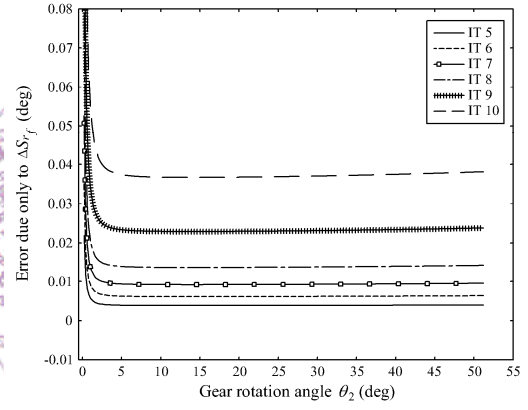


(b)

圖 4.28 徑向輪廓誤差(速比 2 : 3)對輸出之影響

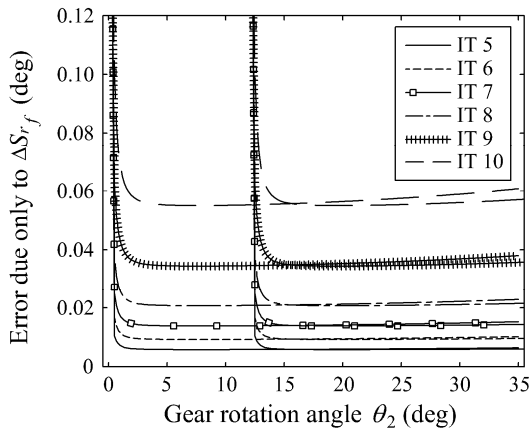


(a)

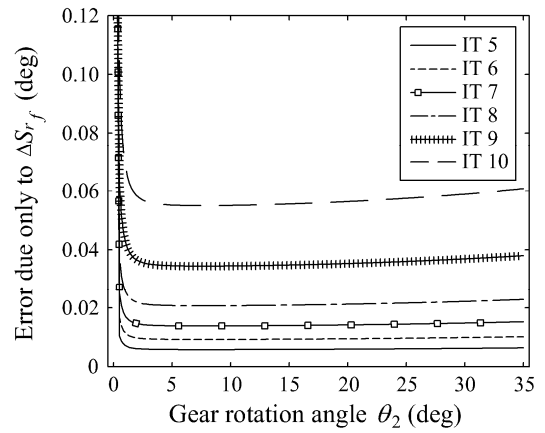


(b)

圖 4.29 滾子半徑誤差(速比 3 : 2)對輸出之影響



(a)



(b)

圖 4.30 滾子半徑誤差(速比 2 : 3)對輸出之影響

由圖 4.21~圖 4.30 可知，各參數在公差等級 5~10，所對應之輸出誤差。若以 IT6 公差來討論各參數對輸出之誤差影響，如表 4.5 及表 4.6。從表中可看出，法向輪廓誤差對輸出精度的影響，相較其他參數所造成之影響為大。

表 4.5 各參數(速比 3：2)在 IT 6 時輸出誤差對應之精度等級

參數	IT 6 輸出的誤差	誤差值比率	輸出精度等級
ΔS_f	0.0028°	0.185	IT 2(0.0025°)~IT 3(0.004°)
ΔS_l	0.0047°	0.311	IT 3(0.004°)~IT 4(0.007°)
ΔS_n	0.0151°	1	IT 5(0.011°)~IT 6(0.016°)
ΔS_r	0.0073°	0.483	IT 4(0.007°)~IT 5(0.011°)
ΔS_{r_f}	0.0064°	0.424	IT 3(0.004°)~IT 4(0.007°)

表 4.6 各參數(速比 2：3)在 IT 6 時輸出誤差對應之精度等級

參數	IT 6 輸出的誤差	誤差值比率	輸出精度等級
ΔS_f	0.007°	0.292	IT 3(0.005°)~IT 4(0.008°)
ΔS_l	0.011°	0.458	IT 4(0.008°)~IT 5(0.013°)
ΔS_n	0.024°	1	IT 6(0.019°)~IT 7(0.030°)
ΔS_r	0.0058°	0.242	IT 3(0.005°)~IT 4(0.008°)
ΔS_{r_f}	0.0101°	0.421	IT 4(0.008°)~IT 5(0.013°)

若採用 IT6 公差，其速比為 3：2、2：3 之齒輪旋轉 51.16°、34.95°時，對應之銷輪輸出角為 34.11°、52.43°，由圖 4.32、圖 4.34 可得 $\Delta S_{\text{wor}} = 0.0149^\circ$ 、 0.0238° 。便可以得知其銷輪輸出位置之精度等級分別為 IT5(0.011°)與 IT6(0.016°)及 IT6(0.019°)與 IT7(0.030°)之間。

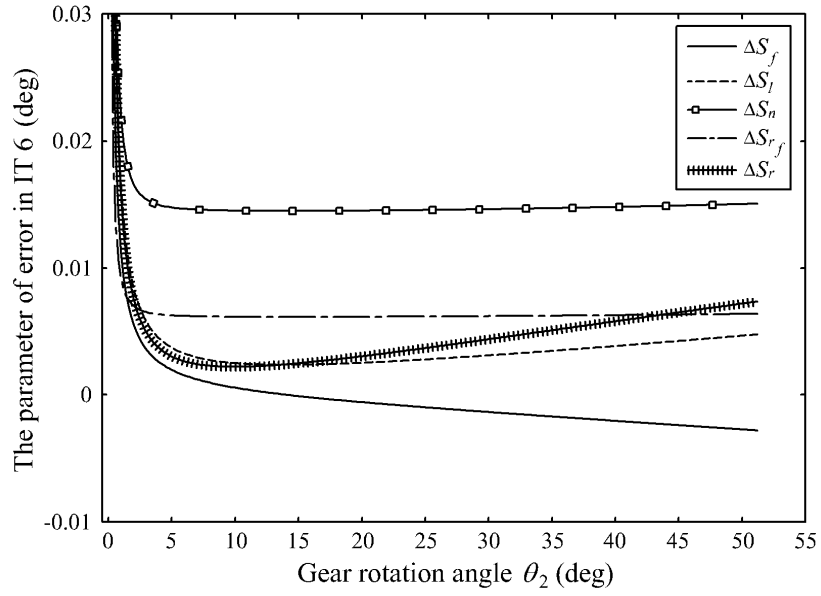


圖 4.31 IT 6 其各參數誤差(速比 3 : 2)對輸出之影響

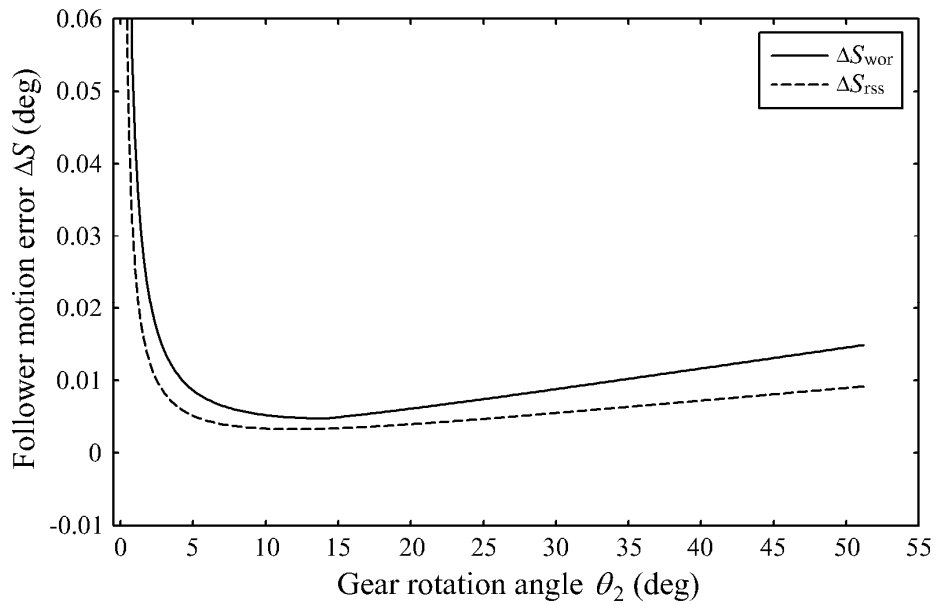


圖 4.32 IT 6 最差情況誤差及最大預期誤差(速比 3 : 2)

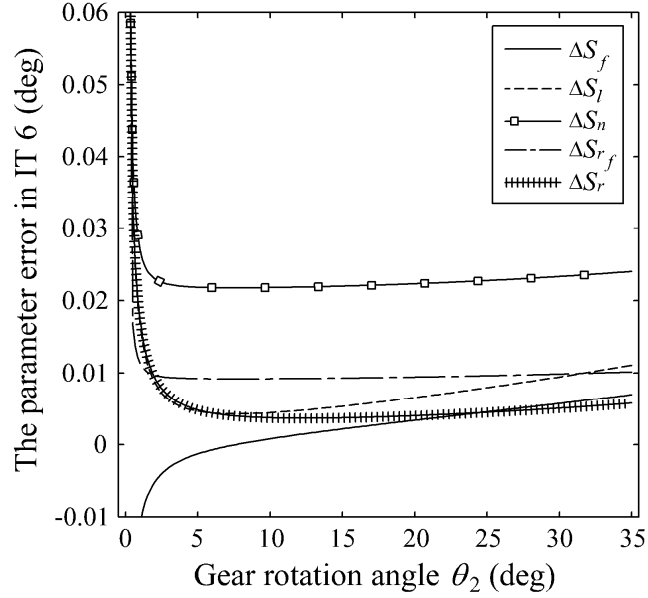


圖 4.33 IT 6 其各參數誤差(速比 2 : 3)對輸出之影響

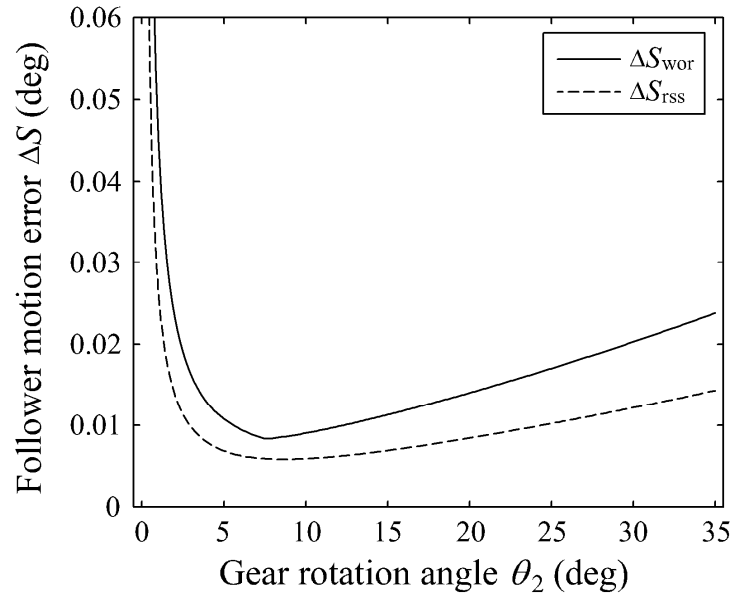


圖 4.34 IT 6 最差情況誤差及最大預期誤差(速比 2 : 3)

4-2-5 結果與討論

本節推導出內接式銷子輪機構之軸心距、擺臂長、滾子半徑、法線方向及徑向尺寸輪廓的偏差量所導致輸出位置函數誤差的解析式，並估計銷輪位移函數的最差情況誤差及最大期望誤差。然而，由實際例子可得知法向輪廓誤差為主要影響輸出位置函數之誤差。

4-3 各項參數對漸開線齒輪之機械誤差

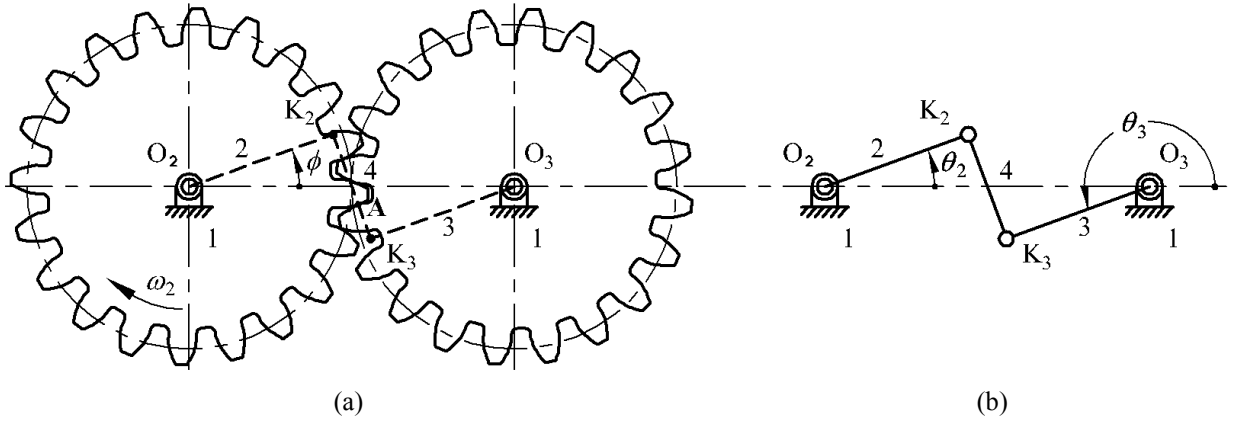


圖 4.35 漸開線齒輪機構及其等效四連桿

如圖 4.35(a)所示的漸開線齒輪機構，可知其軸心距及輪廓會對此機構產生誤差，本節將探討各項參數對漸開線齒輪之機械誤差， K_2 、 K_3 為輪廓上接觸點 A 之曲率中心。其中， K_2 、 K_3 正好在基圓上，可由附錄 C 得知。然而，此機構之等效連桿為四連桿機構如圖 4.35(b)所示，其耦桿(桿 4)為曲率中心 K_2 與 K_3 點之連線。其曲柄和搖桿在每一瞬間的運動特性與此漸開線齒輪完全相同。等效連桿如圖 4.35(b)之位置函數，其參數 r_1 、 r_2 、 r_3 、 r_4 與輸入跟輸出變量 θ_2 和 θ_3 之關係可表示為：

$$F(\mathbf{r}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\psi}) = F(r_1, r_2, r_3, r_4, \theta_2, \theta_3) = 0 \quad (4.41)$$

其中 $\mathbf{r} = \{r_1, r_2, r_3, r_4\}^T$ 、 $\boldsymbol{\theta} = \{\theta_2\}$ 及 $\boldsymbol{\psi} = \{\theta_3\}$ ；或[12,13]

$$F = 2[r_1(r_3 \cos \theta_3 - r_2 \cos \theta_2) - r_2 r_3 \cos(\theta_2 - \theta_3)] + r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 - r_4^2 = 0 \quad (4.42)$$

當 $r_1 = \mathbf{O}_2 \mathbf{O}_3 = f$ 、 $r_2 = \mathbf{O}_2 \mathbf{K}_2$ 、 $r_3 = \mathbf{O}_3 \mathbf{K}_3$ 、及 $r_4 = \mathbf{K}_2 \mathbf{K}_3$ 。式(4.42)也可從 Freudenstein's equation [12,13]得知。然而， F 方程式對於各微小的誤差值 Δr_1 、 Δr_2 、 Δr_3 、 Δr_4 、 $\Delta \theta_2$ 和 $\Delta \theta_3$ 的微分可表示為：

$$dF \approx \Delta F = \frac{\partial F}{\partial r_1} \Delta r_1 + \frac{\partial F}{\partial r_2} \Delta r_2 + \frac{\partial F}{\partial r_3} \Delta r_3 + \frac{\partial F}{\partial r_4} \Delta r_4 + \frac{\partial F}{\partial \theta_2} \Delta \theta_2 + \frac{\partial F}{\partial \theta_3} \Delta \theta_3 = 0 \quad (4.43)$$

4-3-1 軸心距誤差之影響

若只考慮軸心距誤差 Δr_1 (或 Δf) 對輸出角 $\Delta \theta_3$ 的影響，此輸出之機械誤差可表示為：

$$\Delta \theta_3 = -\frac{\partial F / \partial r_1}{\partial F / \partial \theta_3} \Delta r_1 \quad (4.44)$$

其中

$$\frac{\partial F}{\partial r_1} = 2(r_1 + r_3 \cos \theta_3 - r_2 \cos \theta_2) \quad (4.45)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \theta_3} = -2r_3[r_1 \sin \theta_3 + r_2 \sin(\theta_2 - \theta_3)] \quad (4.46)$$

將式(4.45)和式(4.46)代入式(4.44)化簡轉換後，可知由軸心距誤差 Δf 導致之機械誤差 ΔS_f 為：

$$\Delta S_f = -\Delta \theta_3 = -\frac{r_1 + r_3 \cos \theta_3 - r_2 \cos \theta_2}{r_3[r_1 \sin \theta_3 + r_2 \sin(\theta_2 - \theta_3)]} \Delta r_1 = -\frac{\Delta r_1 \sin \phi}{r_3} \quad (4.47)$$

4-3-2 輪廓誤差之影響

若只考慮耦桿誤差 Δr_4 對輸出角 $\Delta \theta_3$ 的影響，此輸出之機械誤差可表示為：

$$\Delta \theta_3 = -\frac{\partial F / \partial r_4}{\partial F / \partial \theta_3} \Delta r_4 \quad (4.48)$$

其中

$$\frac{\partial F}{\partial r_4} = -2r_4 \quad (4.49)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \theta_3} = -2r_3[r_1 \sin \theta_3 + r_2 \sin(\theta_2 - \theta_3)] \quad (4.50)$$

此誤差 Δr_4 包含了兩齒輪輪廓的誤差 Δn_2 和 Δn_3 ，即 $\Delta r_4 = \Delta n_2 + \Delta n_3$ 。將式(4.49)和式(4.50)代入式(4.48)化簡轉換後，可知由輪廓誤差 Δn_2 和 Δn_3 導致之機械誤差 ΔS_{n_2} 及 ΔS_{n_3} 為：

$$\begin{aligned}\Delta S_{n_2} = -\Delta\theta_3 &= \frac{r_4}{r_3[r_1 \sin\theta_3 + r_2 \sin(\theta_2 - \theta_3)]}(\Delta r_4 - \Delta n_3) = \frac{\Delta r_4 - \Delta n_3}{r_3} \\ &= \frac{\Delta n_2}{r_3}\end{aligned}\quad (4.51)$$

$$\begin{aligned}\Delta S_{n_3} = -\Delta\theta_3 &= \frac{r_4}{r_3[r_1 \sin\theta_3 + r_2 \sin(\theta_2 - \theta_3)]}(\Delta r_4 - \Delta n_2) = \frac{\Delta r_4 - \Delta n_2}{r_3} \\ &= \frac{\Delta n_3}{r_3}\end{aligned}\quad (4.52)$$

4-3-3 輪廓徑向尺寸誤差之影響

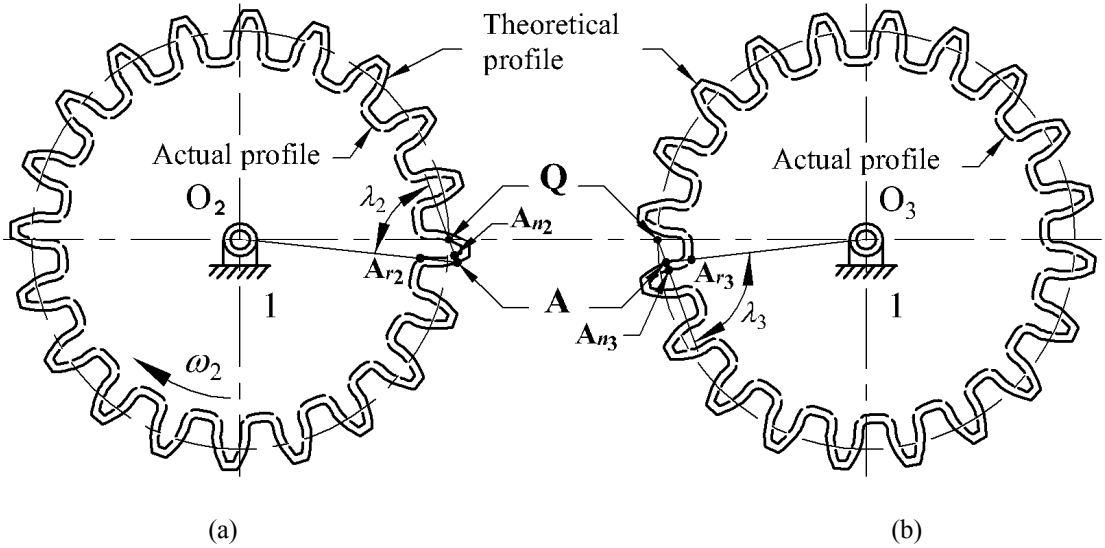


圖 4.36 漸開線齒輪機構之實際輪廓

由圖 4.36(a)中接觸點 A 的法線和 $O_2 A$ 與實際輪廓分別交於點 A_{n_2} 、 A_{r_2} 。對於微小輪廓誤差之法線 AA_{n_2} ，其 $A_{n_2} A_{r_2}$ 會正切於實際輪廓，所以 $\triangle AA_{n_2} A_{r_2}$ 可視為是一直角三角形得：

$$\Delta n_2 \approx \Delta r d_2 \cos \lambda_2 \quad (4.53)$$

其中 $\Delta r d_2 = AA_{r_2}$ 和 $\Delta n_2 = AA_{n_2}$ 及 $\lambda_2 = \angle A_{r_2} A A_{n_2}$ 。輪廓徑向尺寸誤差 $\Delta r d_2$ 對輸出角 $\Delta\theta_3$ 的影響，由式(4.51)和式(4.53)可得此輸出之機械誤差為：

$$\Delta S_{rd_2} = -\Delta\theta_3 \approx \frac{\Delta r d_2 \cos \lambda_2}{r_3} \quad (4.54)$$

相同的，在另一個齒輪的輪廓也可以找出所對應的徑向輪廓誤差 Δrd_3 ，由圖 4.36(b) 中接觸點 A 的法線和 O_3A 與實際輪廓分別交於點 A_{n_3} 、 A_{r_3} 。對於微小輪廓誤差之法線 AA_{n_3} ，其 $A_{n_3}A_{r_3}$ 會正切於實際輪廓，所以 $\triangle AA_{n_3}A_{r_3}$ 可視為是一直角三角形得：

$$\Delta n_3 \approx \Delta rd_3 \cos \lambda_3 \quad (4.55)$$

其中 $\Delta rd_3 = AA_{r_3}$ 和 $\Delta n_3 = AA_{n_3}$ 及 $\lambda_3 = \angle A_{r_3}AA_{n_3}$ 。輪廓徑向尺寸誤差 Δrd_3 對輸出角 $\Delta \theta_3$ 的影響，由式(4.52)和式(4.55)可得此輸出之機械誤差為：

$$\Delta S_{rd_3} = -\Delta \theta_3 \approx \frac{\Delta rd_3 \cos \lambda_3}{r_3} \quad (4.56)$$

在推導出徑向輪廓誤差所造成的輸出誤差之後，由(4.47)、(4.54)及(4.56)三式，可以估計齒輪位移函數的最差情況誤差為

$$\Delta S_{\text{wor}} = |\Delta S_f| + |\Delta S_{rd_2}| + |\Delta S_{rd_3}| \quad (4.57)$$

以及最大預期誤差為

$$\Delta S_{\text{rss}} = \sqrt{\Delta S_f^2 + \Delta S_{rd_2}^2 + \Delta S_{rd_3}^2} \quad (4.58)$$

將(4.47)、(4.54)及(4.56)等三式對時間進行兩次微分，可得從動件的速度與加速度誤差方程式。

實例分析：

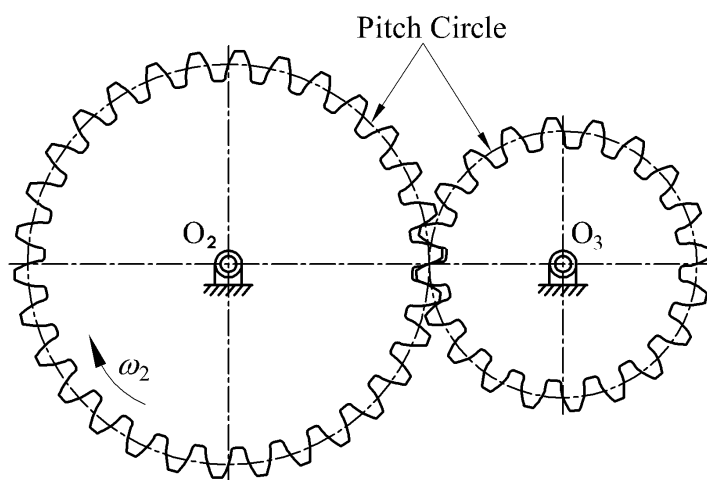


圖 4.37 漸開線齒輪之一般化機構簡圖

如圖 4.37 所示的漸開線齒輪機構，其速比為 2：3、軸心距 f 為 125 mm、模數 m 為 5 mm、壓力角 ϕ 為 20° 之參數。利用 4-3 節探討的結果對此機構作誤差分析。圖 4.38 為漸開線齒輪機構圖及對應的等效四連桿。由以上資料可知從標準機械設計圖表便覽 [14] 所查得其對應之公差值及各等級公差值，如表 4.7。其次，將各等級的公差代入作分析，由於各齒的對應為對稱之關係，只顯示齒輪旋轉半齒的角度，可得到圖 4.39~圖 4.43。

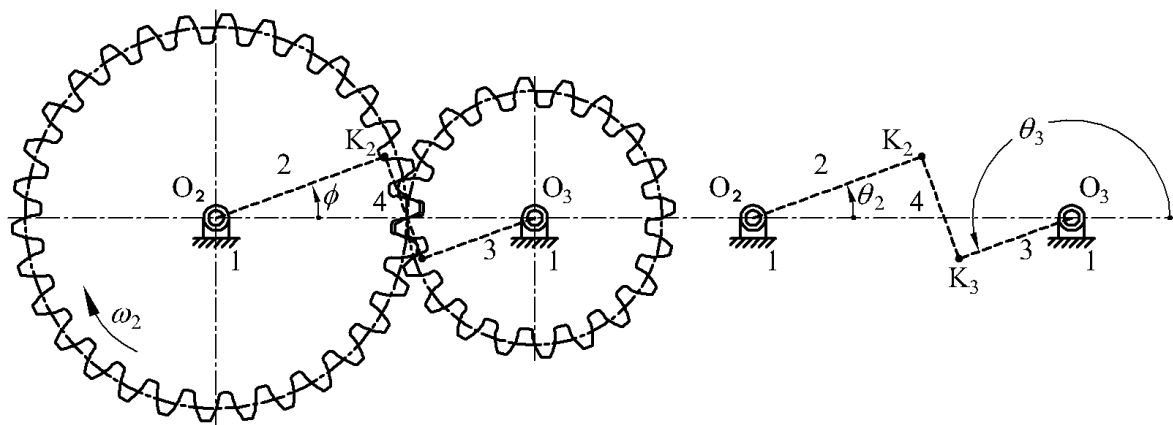


圖 4.38 漸開線齒輪機構及其等效四連桿

表 4.7 各參數之各等級公差值

參數	IT 基本公差(mm)					
	IT 5	IT 6	IT 7	IT 8	IT 9	IT 10
Δr_1	0.018	0.025	0.040	0.063	0.100	0.160
Δn_2	0.011	0.016	0.025	0.039	0.062	0.100
Δn_3	0.009	0.013	0.021	0.033	0.052	0.084
Δrd_2	0.013	0.019	0.030	0.046	0.074	0.120
Δrd_3	0.013	0.019	0.030	0.046	0.074	0.120

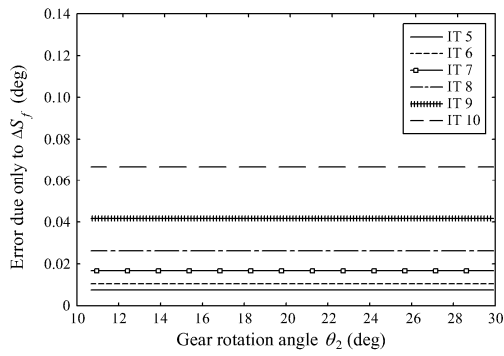


圖 4.39 軸心距誤差對輸出之影響

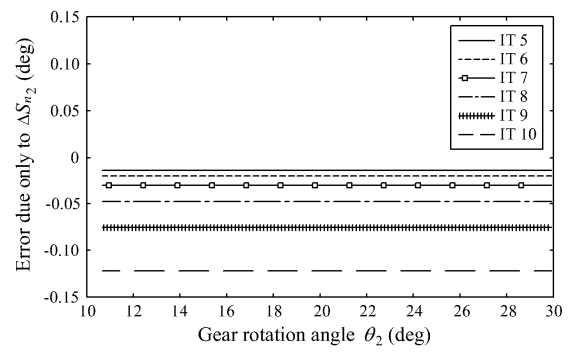


圖 4.40 法向輪廓誤差 Δn_2 對輸出之影響

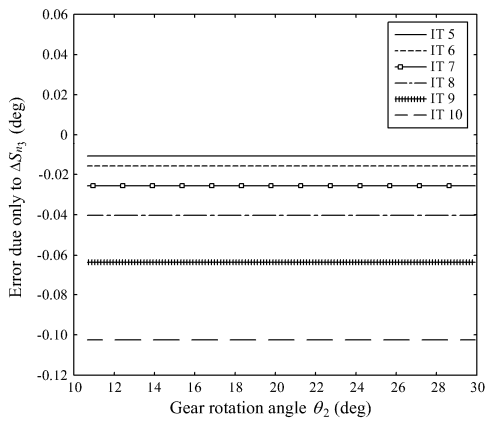


圖 4.41 法向輪廓誤差 Δn_3 對輸出之影響

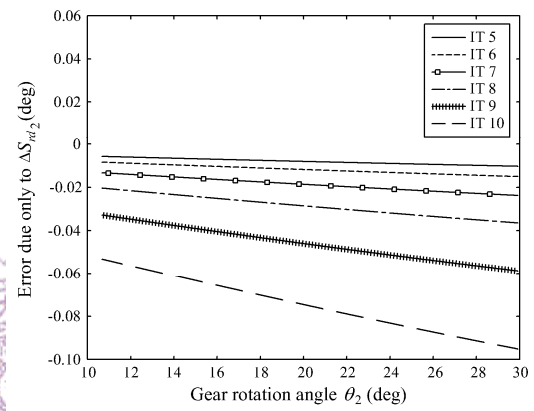


圖 4.42 徑向輪廓誤差 Δrd_2 對輸出之影響

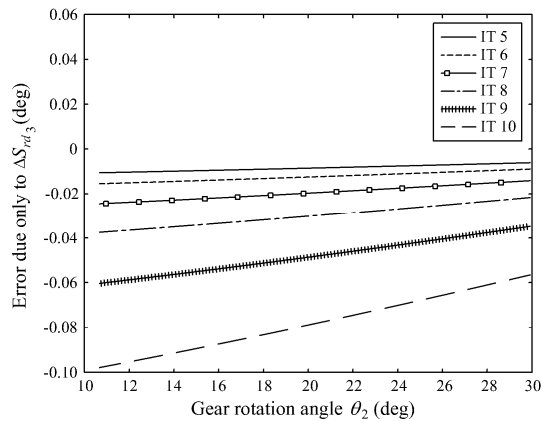


圖 4.43 徑向輪廓誤差 Δrd_3 對輸出之影響

由圖 4.39~圖 4.43 可知，各參數在公差等級 5~10，所對應之輸出誤差。若以 IT6 公差來討論各參數對輸出之誤差影響，如表 4.8。從表中可看出，較大齒輪法向輪廓誤差對輸出精度的影響，相較其他參數所造成之影響為大。

表 4.8 各參數在 IT 6 時輸出誤差對應之精度等級

參數	IT 6 輸出的誤差	誤差值比率	輸出精度等級
ΔS_f	0.0104°	0.53	IT 4(0.007°)~IT 5(0.011°)
ΔS_{n_2}	0.0195°	1	IT 6(0.016°)~IT 7(0.025°)
ΔS_{n_3}	0.0158°	0.81	IT 5(0.011°)~IT 6(0.016°)
ΔS_{rd_2}	0.0121°	0.62	IT 5(0.011°)~IT 6(0.016°)
ΔS_{rd_3}	0.0121°	0.62	IT 5(0.011°)~IT 6(0.016°)

若採用 IT6 公差，其速比為 2：3 之齒輪旋轉角 $\theta_2=20.97^\circ$ 時，由圖 4.45 可得 $\Delta S_{\text{wor}}=0.0347^\circ$ 。便可以得知其銷輪輸出位置之精度等級降至為 IT7(0.025°)與 IT8(0.039°)之間。

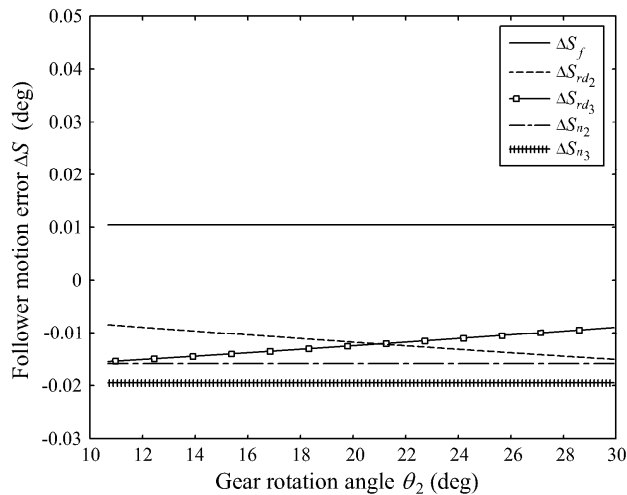


圖 4.44 IT 6 其各參數誤差對輸出之影響

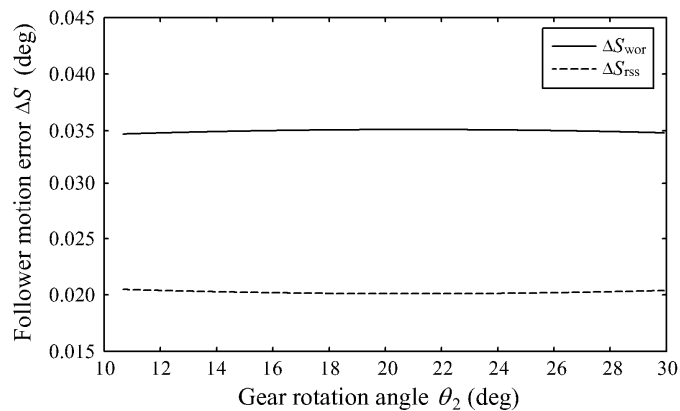


圖 4.45 IT 6 最差情況誤差及最大預期誤差

4-3-5 結果與討論

本節推導出漸開線齒輪機構之軸心距、法線方向及徑向尺寸輪廓的偏差量所導致輸出位置函數誤差的解析式，並估計位移函數的最差情況誤差及最大期望誤差。然而，由實際例子可得知較大齒輪法向輪廓誤差為主要影響輸出位置函數之誤差。

4-4 各項參數對漸開線內齒輪之機械誤差

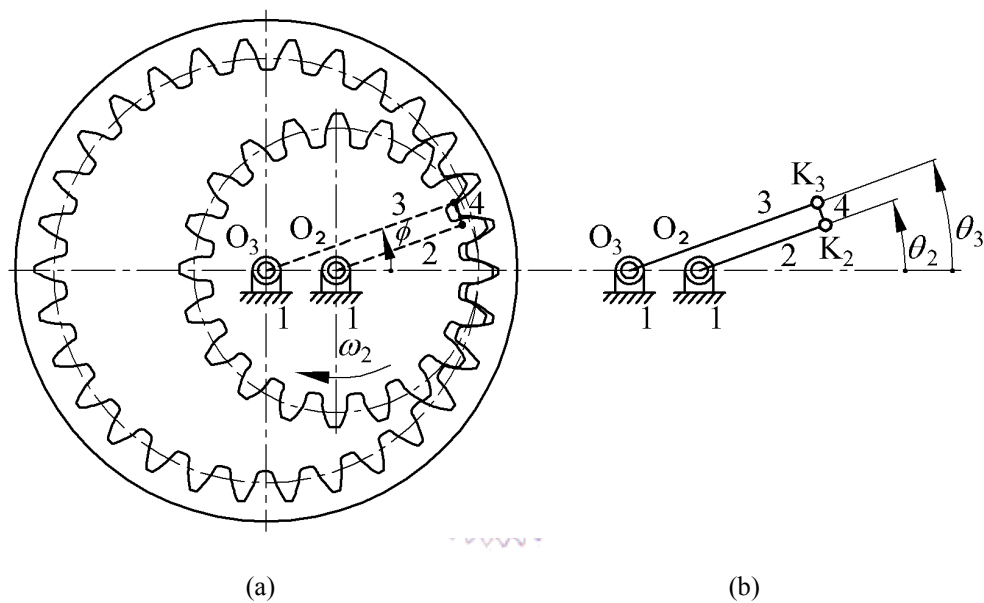


圖 4.46 漸開線內齒輪機構(速比 3 : 2)及其等效四連桿

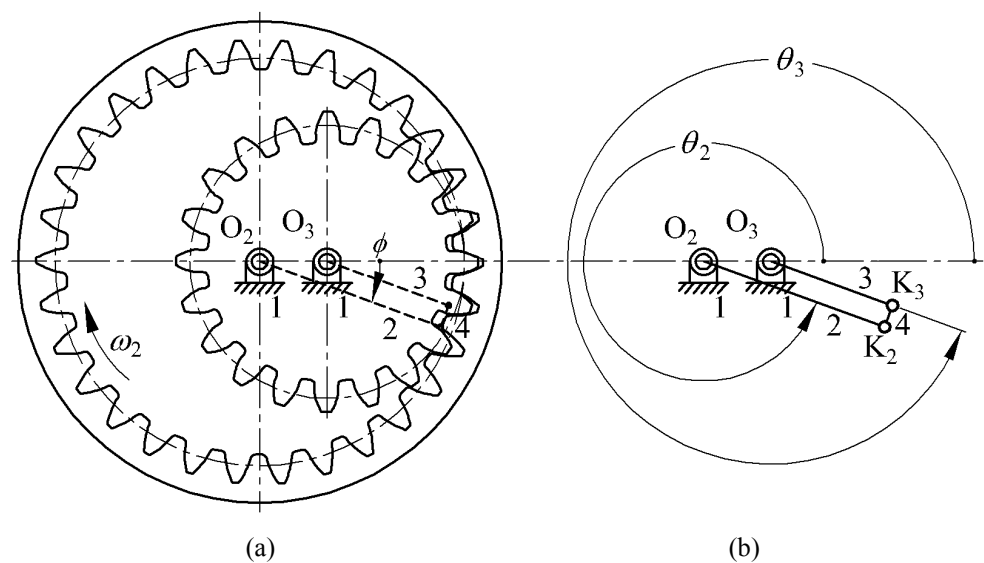


圖 4.47 漸開線內齒輪機構(速比 2 : 3)及其等效四連桿

圖 4.46 和圖 4.47 分別為速比 3 : 2、2 : 3 之漸開線內齒輪機構，由圖 4.46(a)和圖 4.47(a)所示的漸開線內齒輪機構，本節將探討各項參數對漸開線齒輪之機械誤差， K_2 、 K_3 為輪廓上接觸點 A 之曲率中心。此機構之等效連桿為四連桿機構如圖 4.46(b)和圖 4.47(b)所示，其耦桿(桿 4)為曲率中心 K_2 與 K_3 點之連線。其曲柄和搖桿在每一瞬間的運動特性與此漸開線齒輪完全相同。等效連桿如圖 4.46(b) 和圖 4.47(b)之位置函數，其參數 r_1 、 r_2 、 r_3 、 r_4 與輸入跟輸出變量 θ_2 和 θ_3 之關係可表示為：

$$F(\mathbf{r}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\psi}) = F(r_1, r_2, r_3, r_4, \theta_2, \theta_3) = 0 \quad (4.59)$$

其中 $\mathbf{r} = \{r_1, r_2, r_3, r_4\}^T$ 、 $\boldsymbol{\theta} = \{\theta_2\}$ 及 $\boldsymbol{\psi} = \{\theta_3\}$ ；或[12,13]

$$F = 2[r_1(r_3 \cos \theta_3 - r_2 \cos \theta_2) - r_2 r_3 \cos(\theta_2 - \theta_3)] + r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 - r_4^2 = 0 \quad (4.60)$$

當 $r_1 = \mathbf{O}_2 \mathbf{O}_3 = f$ 、 $r_2 = \mathbf{O}_2 \mathbf{K}_2$ 、 $r_3 = \mathbf{O}_3 \mathbf{K}_3$ 、及 $r_4 = \mathbf{K}_2 \mathbf{K}_3$ 。式(4.60)也可從 Freudenstein's equation [12,13]得知。然而， F 方程式對於各微小的誤差值 Δr_1 、 Δr_2 、 Δr_3 、 Δr_4 、 $\Delta \theta_2$ 和 $\Delta \theta_3$ 的微分可表示為：

$$dF \approx \Delta F = \frac{\partial F}{\partial r_1} \Delta r_1 + \frac{\partial F}{\partial r_2} \Delta r_2 + \frac{\partial F}{\partial r_3} \Delta r_3 + \frac{\partial F}{\partial r_4} \Delta r_4 + \frac{\partial F}{\partial \theta_2} \Delta \theta_2 + \frac{\partial F}{\partial \theta_3} \Delta \theta_3 = 0 \quad (4.61)$$

4-4-1 軸心距誤差之影響

若只考慮軸心距誤差 Δr_1 (或 Δf) 對輸出角 $\Delta \theta_3$ 的影響，此輸出之機械誤差可表示為：

$$\Delta \theta_3 = - \frac{\frac{\partial F}{\partial r_1} \Delta r_1}{\frac{\partial F}{\partial \theta_3}} \quad (4.62)$$

其中

$$\frac{\partial F}{\partial r_1} = 2(r_1 + r_3 \cos \theta_3 - r_2 \cos \theta_2) \quad (4.63)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \theta_3} = -2r_3[r_1 \sin \theta_3 + r_2 \sin(\theta_2 - \theta_3)] \quad (4.64)$$

將式(4.63)和式(4.64)代入式(4.62)化簡轉換後，可知由軸心距誤差 Δf 導致之機械誤差 ΔS_f 為：

$$\Delta S_f = -\Delta\theta_3 = -\frac{r_1 + r_3 \cos \theta_3 - r_2 \cos \theta_2}{r_3 [r_1 \sin \theta_3 + r_2 \sin(\theta_2 - \theta_3)]} \Delta r_1 = -\frac{\Delta r_1 \sin \phi}{r_3} \quad (4.65)$$

4-4-2 輪廓誤差之影響

若只考慮耦桿誤差 Δr_4 對輸出角 $\Delta\theta_3$ 的影響，此輸出之機械誤差可表示為：

$$\Delta\theta_3 = -\frac{\partial F / \partial r_4}{\partial F / \partial \theta_3} \Delta r_4 \quad (4.66)$$

其中

$$\frac{\partial F}{\partial r_4} = -2r_4 \quad (4.67)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \theta_3} = -2r_3 [r_1 \sin \theta_3 + r_2 \sin(\theta_2 - \theta_3)] \quad (4.68)$$

此誤差 Δr_4 包含了兩齒輪輪廓的誤差 Δn_2 和 Δn_3 ，即 $\Delta r_4 = \Delta n_2 + \Delta n_3$ 。將式(4.67)和式(4.68)代入式(4.66)化簡轉換後，可知由輪廓誤差 Δn_2 和 Δn_3 導致之機械誤差 ΔS_{n_2} 及 ΔS_{n_3} 為：

$$\begin{aligned} \Delta S_{n_2} = -\Delta\theta_3 &= \frac{r_4}{r_3 [r_1 \sin \theta_3 + r_2 \sin(\theta_2 - \theta_3)]} (\Delta r_4 - \Delta n_3) = \frac{\Delta r_4 - \Delta n_3}{r_3} \\ &= \frac{\Delta n_2}{r_3} \end{aligned} \quad (4.69)$$

$$\begin{aligned} \Delta S_{n_3} = -\Delta\theta_3 &= \frac{r_4}{r_3 [r_1 \sin \theta_3 + r_2 \sin(\theta_2 - \theta_3)]} (\Delta r_4 - \Delta n_2) = \frac{\Delta r_4 - \Delta n_2}{r_3} \\ &= \frac{\Delta n_3}{r_3} \end{aligned} \quad (4.70)$$

4-4-3 輪廓徑向尺寸誤差之影響

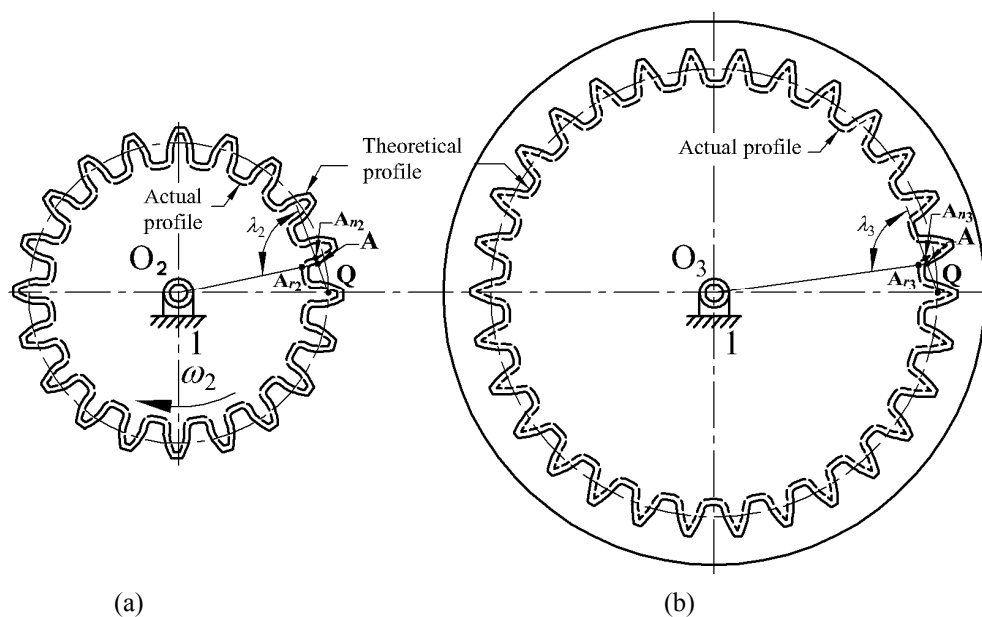


圖 4.48 漸開線內齒輪機構(速比 3 : 2)之實際輪廓

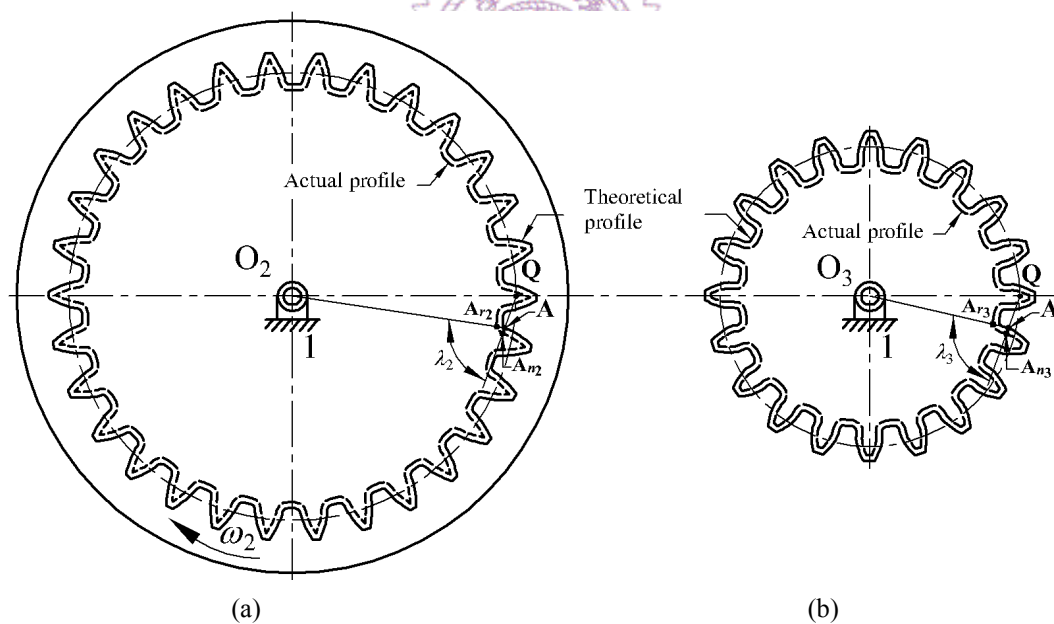


圖 4.49 漸開線內齒輪機構(速比 2 : 3)之實際輪廓

由圖 4.48(a)和圖 4.49(a)中接觸點 A 的法線和 O_2A 與實際輪廓分別交於點 A_{n_2} 、 A_{r_2} 。對於微小輪廓誤差之法線 AA_{n_2} ，其 $A_{n_2}A_{r_2}$ 會正切於實際輪廓，所以 $\triangle AA_{n_2}A_{r_2}$ 可視為是一直角三角形得：

$$\Delta n_2 \approx \Delta r d_2 \cos \lambda_2 \quad (4.71)$$

其中 $\Delta rd_2 = AA_{r_2}$ 和 $\Delta n_2 = AA_{n_2}$ 及 $\lambda_2 = \angle A_{r_2} AA_{n_2}$ 。輪廓徑向尺寸誤差 Δrd_2 對輸出角 $\Delta \theta_3$ 的影響，由式(4.69)和式(4.71)可得此輸出之機械誤差為：

$$\Delta S_{rd_2} = -\Delta \theta_3 \approx \frac{\Delta rd_2 \cos \lambda_2}{r_3} \quad (4.72)$$

相同的，在另一個齒輪的輪廓也可以找出所對應的徑向輪廓誤差 Δrd_3 ，由圖 4.48(b) 和圖 4.49(b) 中接觸點 A 的法線和 O_3A 與實際輪廓分別交於點 A_{n_3} 、 A_{r_3} 。對於微小輪廓誤差之法線 AA_{n_3} ，其 $A_{n_3}A_{r_3}$ 會正切於實際輪廓，所以 $\triangle AA_{n_3}A_{r_3}$ 可視為是一直角三角形得：

$$\Delta n_3 \approx \Delta rd_3 \cos \lambda_3 \quad (4.73)$$

其中 $\Delta rd_3 = AA_{r_3}$ 和 $\Delta n_3 = AA_{n_3}$ 及 $\lambda_3 = \angle A_{r_3} AA_{n_3}$ 。輪廓徑向尺寸誤差 Δrd_3 對輸出角 $\Delta \theta_3$ 的影響，由式(4.70)和式(4.73)可得此輸出之機械誤差為：

$$\Delta S_{rd_3} = -\Delta \theta_3 \approx \frac{\Delta rd_3 \cos \lambda_3}{r_3} \quad (4.74)$$

在推導出徑向輪廓誤差所造成的輸出誤差之後，由(4.65)、(4.72)及(4.74)三式，可以估計齒輪位移函數的最差情況誤差為

$$\Delta S_{\text{wor}} = |\Delta S_f| + |\Delta S_{rd_2}| + |\Delta S_{rd_3}| \quad (4.75)$$

以及最大預期誤差為

$$\Delta S_{\text{rss}} = \sqrt{\Delta S_f^2 + \Delta S_{rd_2}^2 + \Delta S_{rd_3}^2} \quad (4.76)$$

將(4.65)、(4.72)及(4.74)等三式對時間進行兩次微分，可得從動件的速度與加速度誤差方程式。其中，此兩種型態的各參數誤差有對應之關係，將整理於附錄 D 中。

實例分析：

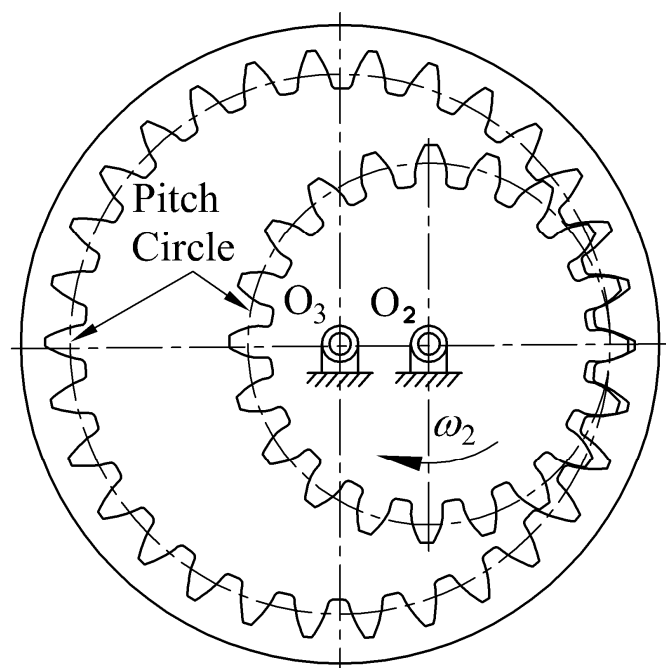


圖 4.50 漸開線內齒輪機構(速比 3 : 2)之一般化機構簡圖

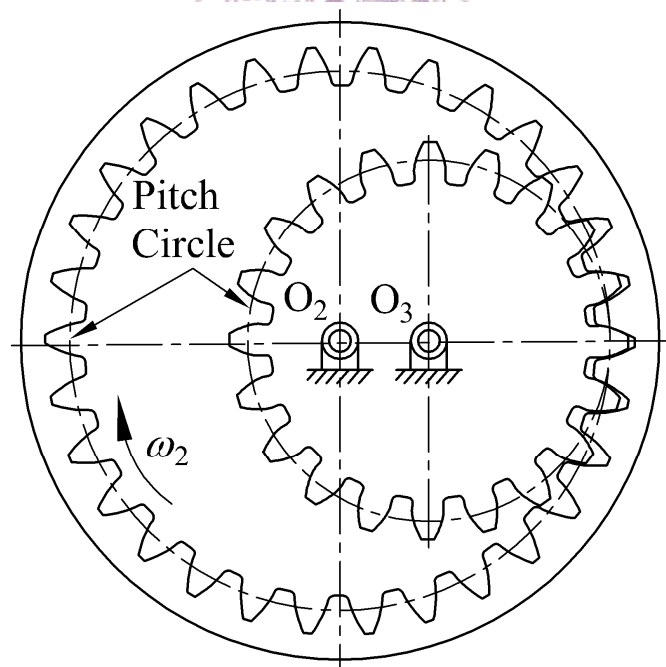


圖 4.51 漸開線內齒輪機構(速比 2 : 3)之一般化機構簡圖

如圖 4.50 與圖 4.51 所示的漸開線內齒輪機構，其速比分別為 3 : 2 與 2 : 3、壓力

角 $\phi=20^\circ$ 、軸心距 f 以及模數 m 皆為25 mm及5 mm之參數。利用4-4節探討的結果對此機構作誤差分析。圖4.52與圖4.53為漸開線內齒輪機構圖及對應的等效四連桿。由以上資料可知從標準機械設計圖表便覽[14]所查得其對應之公差值及各等級公差值，如表4.9和表4.10。其次，將各等級的公差代入作分析，由於各齒的對應為對稱之關係，只顯示齒輪旋轉半齒的角度，可得到圖4.54~圖4.58。其中，圖4.54~圖4.58中的(a)為速比3：2、(b)為速比2：3。

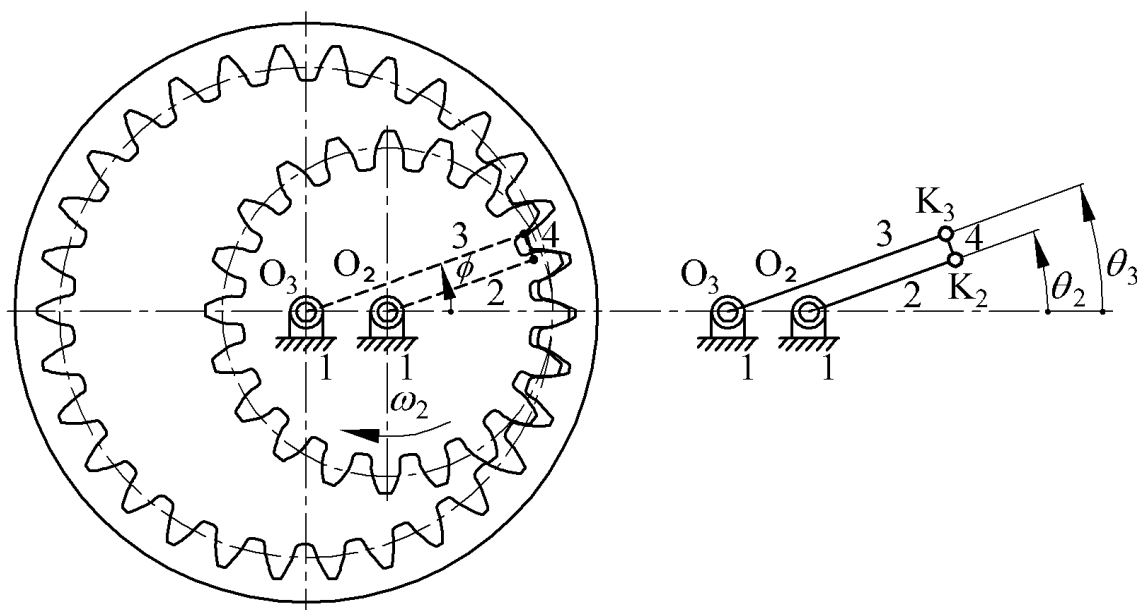


圖 4.52 漸開線內齒輪機構(速比 3：2)及其等效四連桿

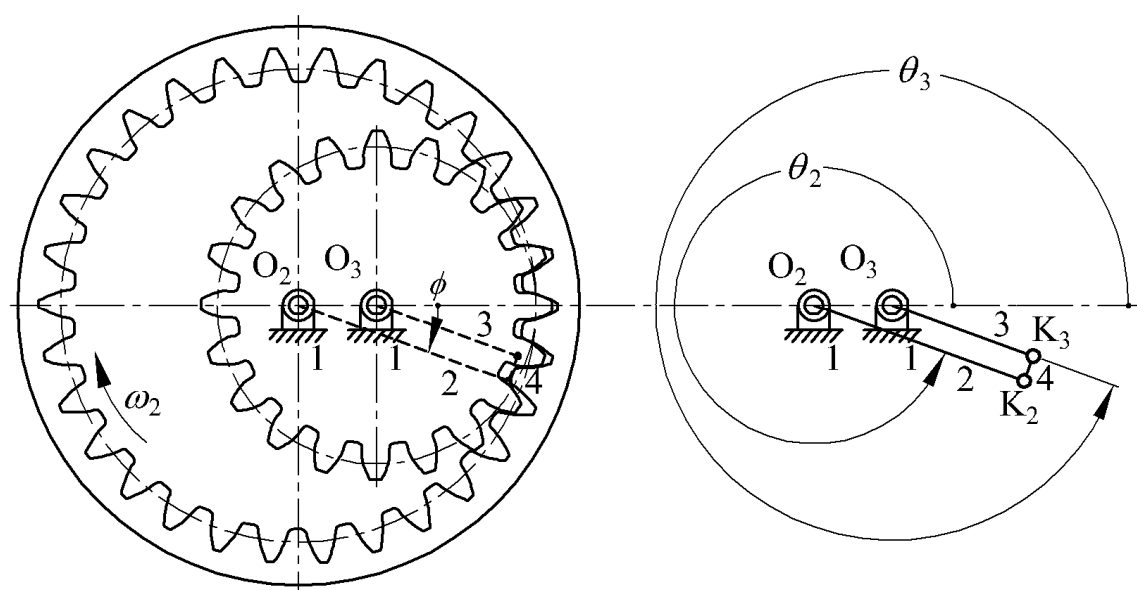


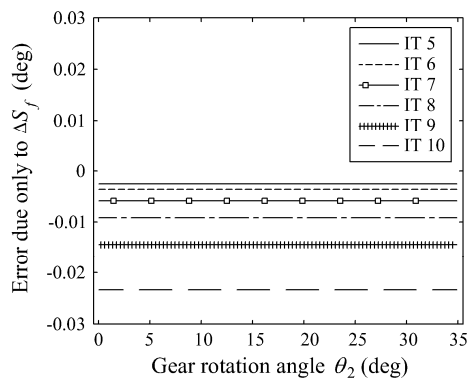
圖 4.53 漸開線內齒輪機構(速比 2：3)及其等效四連桿

表 4.9 各參數(速比 3 : 2)之各等級公差值

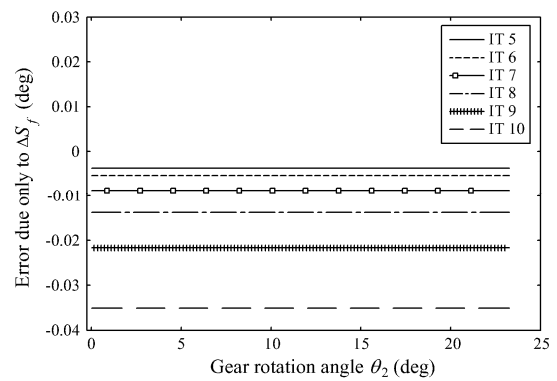
參數	IT 基本公差(mm)					
	IT 5	IT 6	IT 7	IT 8	IT 9	IT 10
Δr_1	0.009	0.013	0.021	0.033	0.052	0.084
Δn_2	0.009	0.013	0.021	0.033	0.052	0.084
Δn_3	0.011	0.016	0.025	0.039	0.062	0.100
Δrd_2	0.013	0.019	0.030	0.046	0.074	0.120
Δrd_3	0.013	0.019	0.030	0.046	0.074	0.120

表 4.10 各參數(速比 2 : 3)之各等級公差值

參數	IT 基本公差(mm)					
	IT 5	IT 6	IT 7	IT 8	IT 9	IT 10
Δr_1	0.009	0.013	0.021	0.033	0.052	0.084
Δn_2	0.011	0.016	0.025	0.039	0.062	0.100
Δn_3	0.009	0.013	0.021	0.033	0.052	0.084
Δrd_2	0.013	0.019	0.030	0.046	0.074	0.120
Δrd_3	0.013	0.019	0.030	0.046	0.074	0.120

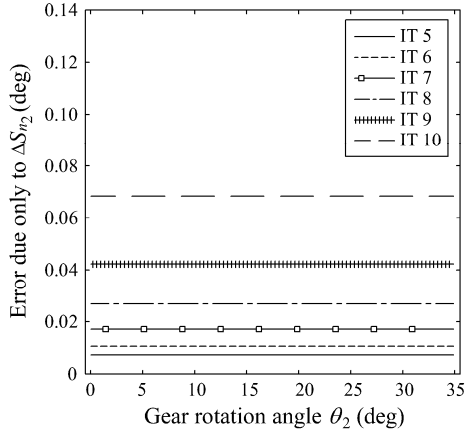


(a)

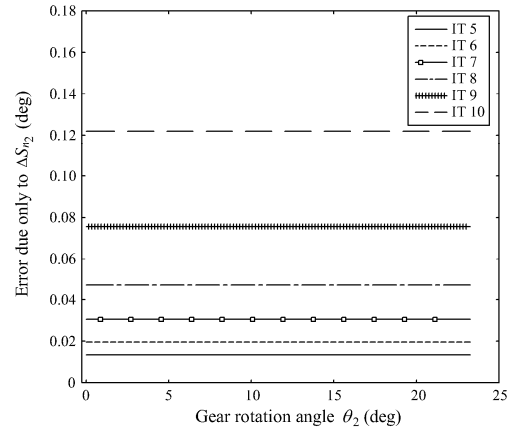


(b)

圖 4.54 軸心距誤差對輸出之影響

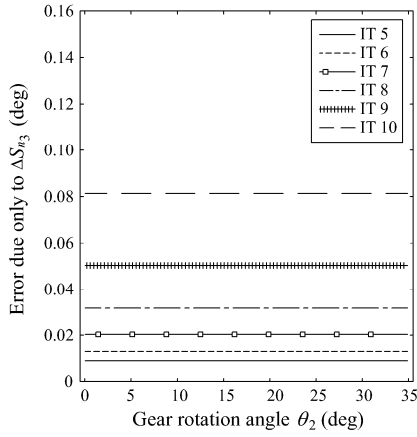


(a)

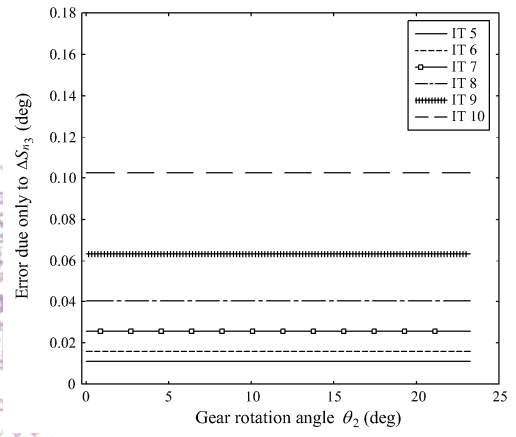


(b)

圖 4.55 法向輪廓誤差 Δn_2 對輸出之影響

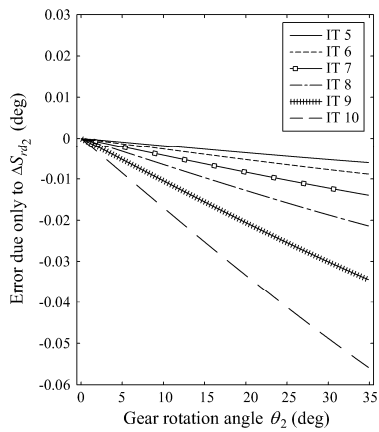


(a)

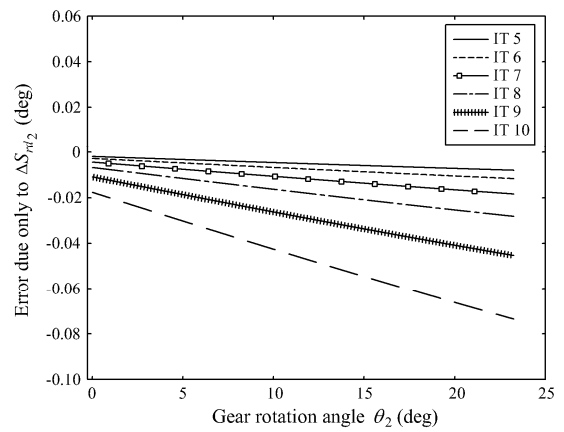


(b)

圖 4.56 法向輪廓誤差 Δn_3 對輸出之影響



(a)



(b)

圖 4.57 徑向輪廓誤差 Δrd_2 對輸出之影響

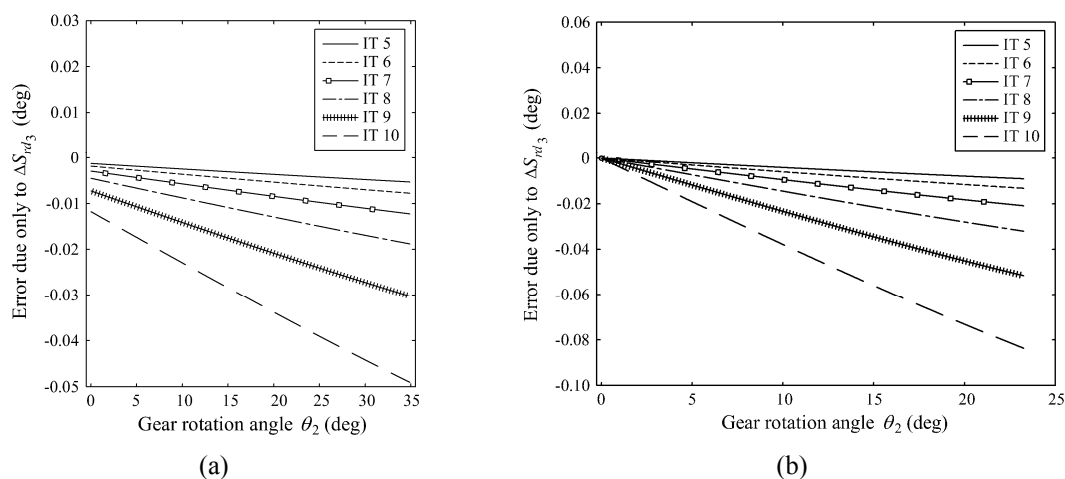


圖 4.58 徑向輪廓誤差 ΔS_{rd3} 對輸出之影響

由圖 4.54~圖 4.58 可知，各參數在公差等級 5~10，所對應之輸出誤差。若以 IT6 公差來討論各參數對輸出之誤差影響，如表 4.11 及表 4.12。從表中可看出，較大齒輪之法向輪廓誤差對輸出精度的影響，相較其他參數所造成之影響為大。

表 4.11 各參數(速比 3 : 2)在 IT 6 時輸出誤差對應之精度等級

參數	IT 6 輸出的誤差	誤差值比率	輸出精度等級
ΔS_f	0.0036°	0.277	IT 2(0.0025°)~IT 3(0.004°)
ΔS_{n_2}	0.0106°	0.815	IT 5(0.009°)~IT 6(0.013°)
ΔS_{n_3}	0.0130°	1	IT 6(0.013°)~IT 7(0.021°)
ΔS_{rd_2}	0.0088°	0.677	IT 5(0.009°)~IT 6(0.013°)
ΔS_{rd_3}	0.0077°	0.592	IT 4(0.006°)~IT 5(0.009°)

表 4.12 各參數(速比 2 : 3)在 IT 6 時輸出誤差對應之精度等級

參數	IT 6 輸出的誤差	誤差值比率	輸出精度等級
ΔS_f	0.0054°	0.277	IT 3(0.004°)~IT 4(0.007°)
ΔS_{n_2}	0.0195°	1	IT 6(0.016°)~IT 7(0.025°)
ΔS_{n_3}	0.0158°	0.810	IT 5(0.011°)~IT 6(0.016°)
ΔS_{rd_2}	0.0116°	0.595	IT 5(0.011°)~IT 4(0.016°)
ΔS_{rd_3}	0.0132°	0.677	IT 5(0.011°)~IT 6(0.016°)

若採用 IT6 公差，其速比為 3：2、2：3 之齒輪旋轉 34.88° 、 23.25° 時，由圖 4.60 可得 $\Delta S_{\text{wor}} = 0.0202^\circ$ 、 0.0303° 。便可以得知其銷輪輸出位置之精度等級分別為 IT6(0.013°)與 IT7(0.021°)及 IT6(0.016°)與 IT7(0.025°)之間。

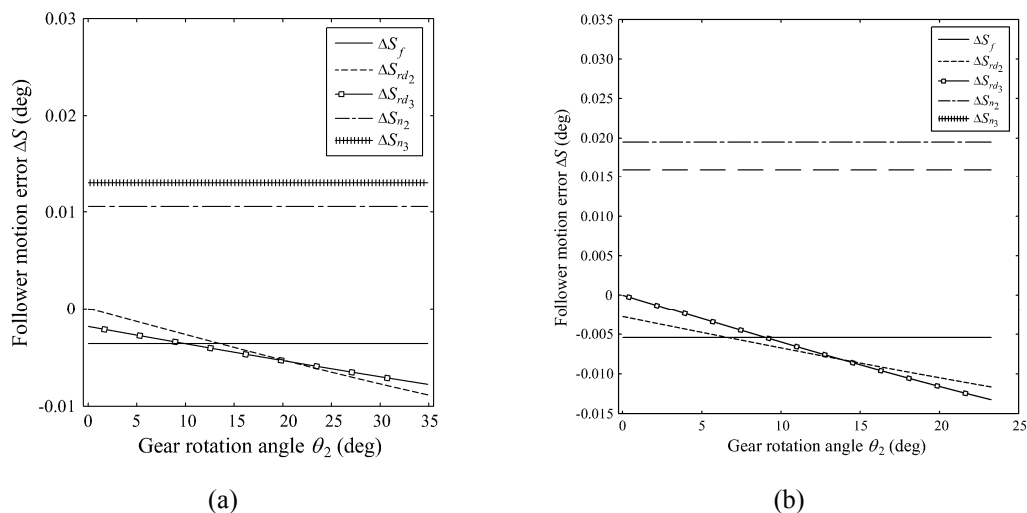


圖 4.59 IT 6 其各參數誤差對輸出之影響

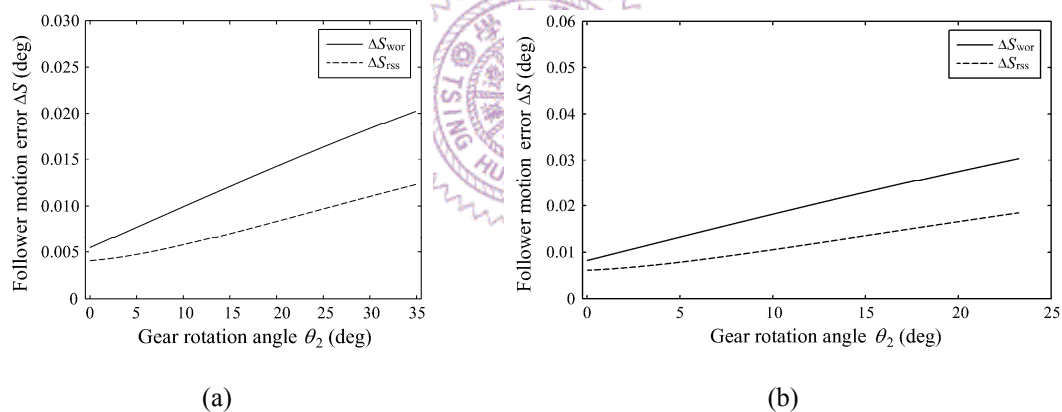


圖 4.60 IT 6 最差情況誤差及最大預期誤差

4-4-5 結果與討論

本節推導出漸開線內齒輪機構之軸心距、法線方向及徑向尺寸輪廓的偏差量所導致輸出位置函數誤差的解析式，並估計位移函數的最差情況誤差及最大期望誤差。然而，由實際例子可得知較大齒輪之法向輪廓誤差為主要影響輸出位置函數之誤差。

4-5 本章結果與討論

根據前四節之討論，若將前述之機構配合一般公制齒輪規定，並以速比 3:2 與 2:3 分成兩種形式做比較，如表 4.13。其模數 m 為 5 mm、軸心距 f 為 125 及 25 mm、壓力角 ϕ 為 20° 、滾子半徑 r_f 為 4 mm 之參數。其次，以 IT 6 等級公差為例，將各參數之誤差放一起做比較，如表 4.14 及表 4.15。由表 4.14 及表 4.15 可發現，銷子輪之法向輪廓誤差和漸開線齒輪較大齒輪之法向輪廓誤差為主要影響輸出位置函數之誤差。亦可將此數據轉為圖表，如圖 4.61~圖 4.64。由圖 4.61~圖 4.64 便可明顯看出其各參數誤差之影響多寡。

表 4.13 各銷子輪與漸開線齒輪之主要誤差

	外接式 銷子輪	內接式 銷子輪	漸開線 齒輪	漸開線 內齒輪	外接式 銷子輪	內接式 銷子輪	漸開線 齒輪	漸開線 內齒輪
轉速比	2:3	2:3	2:3	2:3	3:2	3:2	3:2	3:2
模數	5	5	5	5	5	5	5	5
軸心距	125	25	125	25	125	25	125	25
齒數	30	30	30	30	20	20	20	20
接觸比	2.464	5.825	1.6	1.937	2.514	5.684	1.6	1.937
輸出位 移誤差	IT 6 → IT 7~8	IT 6 → IT 6~7	IT 6 → IT 7~8	IT 6 → IT 6~7	IT 6 → IT 6~7	IT 6 → IT 5~6	IT 6 → IT 6~7	IT 6 → IT 6~7
主要誤 差影響	法向輪 廓誤差	法向輪 廓誤差	較大齒 輪法向 輪廓誤 差	較大齒 輪法向 輪廓誤 差	法向輪 廓誤差	法向輪 廓誤差	較大齒 輪法向 輪廓誤 差	較大齒 輪法向 輪廓誤 差

表 4.14 速比 2 : 3 在 IT 6 等級公差之各參數

	外接式銷子輪	內接式銷子輪	漸開線齒輪	漸開線內齒輪
ΔS_l	0.0027°	0.011°	-	-
ΔS_{r_f}	0.0094°	0.0101°	-	-
ΔS_f	0.0149°	0.007°	0.0104°	0.0054°
ΔS_r	0.0093°	0.0058°	0.0121°	0.0116°
ΔS_n	0.0189°	0.024°	0.0195°	0.0195°
ΔS_{rd_3}	-	-	0.0121°	0.0132°
ΔS_{n_3}	-	-	0.0158°	0.0158°

表 4.15 速比 3 : 2 在 IT 6 等級公差之各參數

	外接式銷子輪	內接式銷子輪	漸開線齒輪	漸開線內齒輪
ΔS_l	0.0012°	0.0047°	-	-
ΔS_{r_f}	0.0062°	0.0064°	-	-
ΔS_f	0.0065°	0.0028°	0.007°	0.0036°
ΔS_r	0.0066°	0.0073°	0.0097°	0.0088°
ΔS_n	0.0124°	0.0151°	0.0106°	0.0106°
ΔS_{rd_3}	-	-	0.0084°	0.0077°
ΔS_{n_3}	-	-	0.0130°	0.0130°

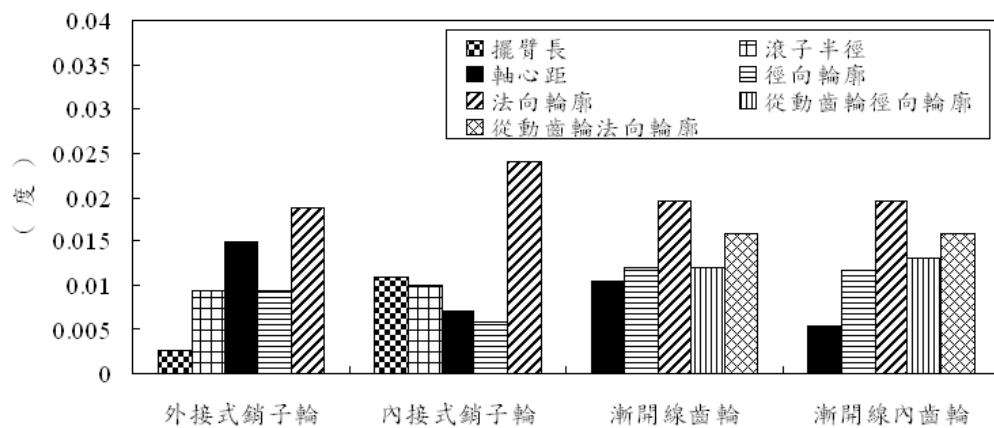


圖 4.61 速比 2 : 3 在 IT 6 等級公差之長條圖

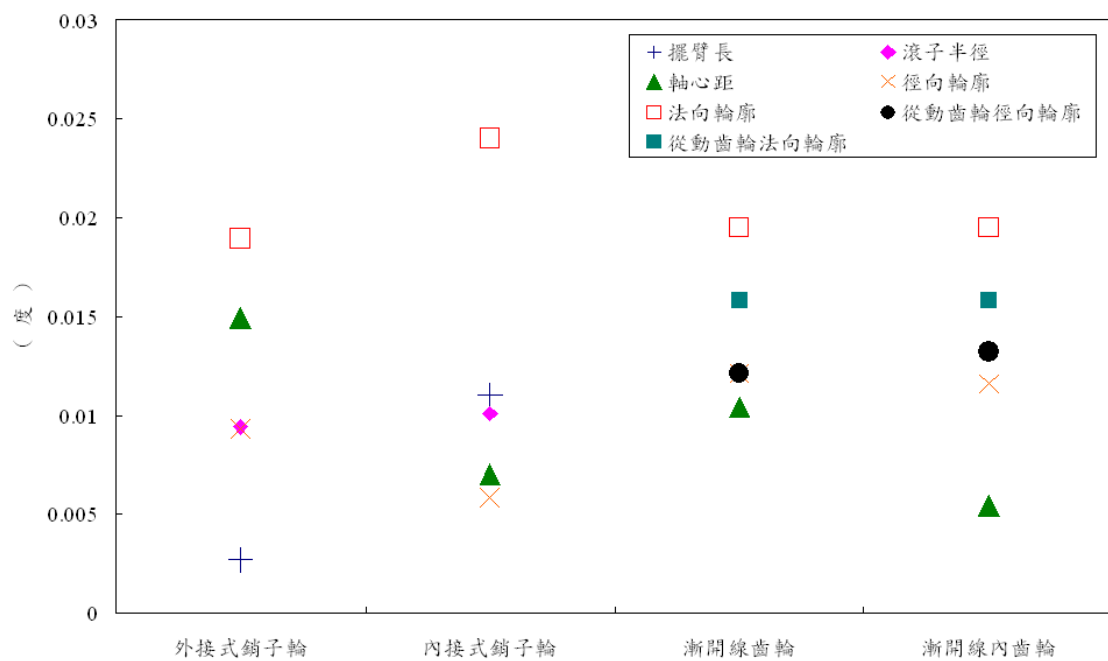


圖 4.62 速比 2 : 3 在 IT 6 等級公差之比較圖

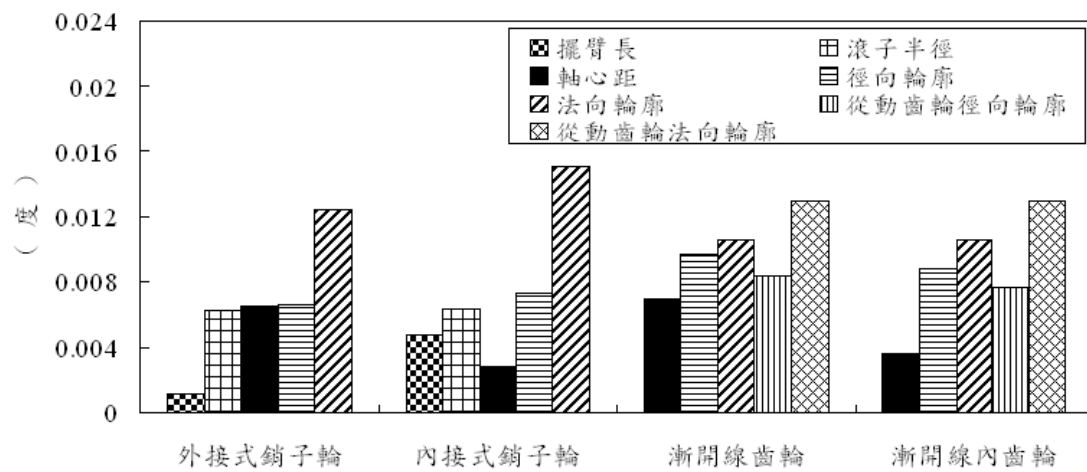


圖 4.63 速比 3 : 2 在 IT 6 等級公差之長條圖

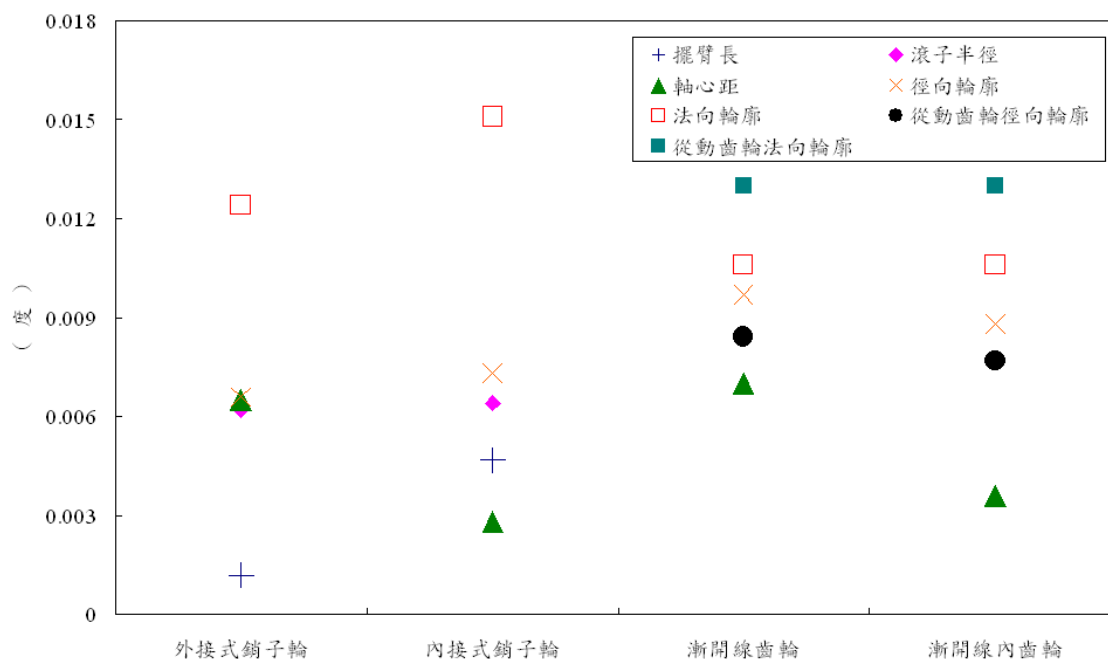


圖 4.64 速比 3：2 在 IT 6 等級公差之比較圖

其次，將所推導之方程式與實驗數據[15]做比較。材料為鋼材，其齒數 18 齒、轉速比 1：1、壓力角 20°、模數為 2 至 4 mm 之設計參數，如表 4.16。假設各參數之 IT 5 等級誤差及最大期望誤差 ΔS_{rss} 和最差情況誤差 ΔS_{wor} 與實驗結果之比較，如表 4.17 及表 4.18。由表 4.18 可得知實驗結果之範圍會落在最大期望誤差及最差情況誤差之間，其中，模數為 3 mm 的實驗數據差距太大，可能是實驗上的誤差。

表 4.16 實驗齒輪之各參數

參數	模數		
	2	3	4
齒數	18	18	18
接觸比	1.41	1.34	1.34
速比	1：1	1：1	1：1
壓力角	20°	20°	20°
軸心距	54	54	72

表 4.17 各模數在 IT 5 等級公差之參數

參數	模數		
	2	3	4
ΔS_f	0.013°	0.013°	0.013°
ΔS_{n_2}	0.009°	0.009°	0.009°
ΔS_{n_3}	0.009°	0.009°	0.009°
ΔS_{rd_2}	0.009°	0.009°	0.011°
ΔS_{rd_3}	0.009°	0.009°	0.011°

表 4.18 IT 5 最差情況誤差及最大預期誤差與實驗數據比較

參數	模數		
	2	3	4
ΔS_{wor}	0.0302°	0.0275°	0.0235°
ΔS_{rss}	0.0178°	0.0169°	0.0146°
實驗數據	0.0191°	0.0474°	0.0233°

第五章 結論與建議

本文以一系統化之流程，計算銷子輪機構之機械誤差。首先根據瞬心的觀念，利用向量法求得銷子輪之齒輪輪廓。其次，將各設計參數對輪廓之影響分別做討論。再配合拘束條件與曲率半徑公式，判斷齒輪輪廓是否過切，即銷子輪機構是否可正常運作。最後，應用等效連桿組的概念，推導出一套解析方法以進行各種齒輪機構的機械誤差分析。由齒輪機構設計參數的各項偏差量所分別導致的輸出運動誤差，均可以解析式加以表示。同時，各項誤差方程式的最後推導結果與輪廓之曲率中心位置的計算並無直接關係，因此可以相當程度地簡化分析過程的複雜度。此外，透過輪廓法線方向與徑向方向之轉換角的建立，可推導出輪廓法線方向誤差與徑向尺寸誤差之間的理論幾何關係。綜合以上之研究結果，可得到幾項結論如下：

1. 外接式銷子輪之機械誤差以軸心距誤差為最大影響參數。
2. 內接式銷子輪之機械誤差以法向輪廓誤差為最大影響參數。
3. 外接式及內接式漸開線齒輪之機械誤差以法向輪廓誤差為最大影響參數。
4. 銷子輪各項誤差方程式的最後推導結果可知，壓力角對其機械誤差具有相當重要的影響。以 $(1/\cos\phi)$ 或 $\tan\phi$ 的型式放大輸出誤差量，若壓力角越大，則輸出的運動誤差亦會顯著變大。
5. 銷子輪與漸開線齒輪之比較由下表表示(以 4-5 節例子為例)：

項目	銷子輪	漸開線齒輪
交換性	差	佳
施加預壓	易	不易
接觸比	大(2.464)	小(1.6)
壓力角	非定值($-8.08^\circ \sim 13.71^\circ$)	公制為 20°
壓力角對機械誤差影響	大	小

6. 製造加工時，以較小的齒輪當成銷子輪的齒輪做為加工，較大的齒輪利用銷子製作，這可減少加工的複雜度。
7. 在允許誤差內，不再對輪廓外形進行加工，便只剩軸心距可調整，銷子輪對此參數的變動較漸開線齒輪敏感。

除了上述獲得之結論外，仍有幾項重要目標尚未進行討論，或是需加以改進之部分：

1. 本文主要探討位置函數的誤差，但速度與加速度誤差也需要列入考慮，可將所推得之解析式做一次及兩次微分而得到。
2. 在考慮齒輪傳動誤差中，除了位置的絕對增量外，還需討論角度的變化，換言之，將位置函數進行一次微分再做觀察分析。以漸開線為例，法向輪廓誤差一次微分後為零，所以在角度的變化是好的。

參考文獻

- [1] Gitin M. Maitra, *Handbook of gear design*, 2nd Ed., McGraw-Hill, New York, 1998.
- [2] 加茂精工株式會社, <http://www.kamo.co.jp/index.php>
- [3] 厚利股份貿易公司, <http://www.sunholy.com.tw/upload/pd/20060802TCG.pdf>
- [4] Litvin, F. L., *Gear Geometry and Applied Theory*, Prentice-Hill, New Jersey, 1994.
- [5] Gu Inhoy, "Design of Antibacklash Pin-Gearing," *Transactions of The ASME, Journal of Mechanical Design*, Vol 120, pp.133-138.
- [6] Wu, L. I., 2003, "Calculating conjugate cam profile by vector equation," *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers Part C : Journal of Mechanical Engineering Science*, Vol. 217, No. 10, pp. 1117-1123.
- [7] 劉紘宇, 無暫停定速比共軛凸輪之輪廓設計與最佳化, 碩士論文, 國立清華大學, 新竹, 2004。
- [8] 張文桐, 平面凸輪機構之機械誤差分析及其應用, 博士論文, 國立清華大學, 新竹, 2007。
- [9] 顏鴻森, 吳隆庸, 2006, *機構學*, 東華書局, 台北, 221-304 頁。
- [10] Wilson C. E. and Sadler J. P., *Kinematics and Dynamics of Machinery*, 2nd Ed., Harper Collins, New York, 1991.
- [11] Spotts, M. F., *Design of Machine Elements*, sixth edition, McGraw-Hill, New York, 1985, p. 611
- [12] Hartenberg, R. S. and Denavit, J., 1964, *Kinematic Synthesis of Linkages*, McGraw-Hill, New York, pp. 59-63, pp. 140-144, pp. 295-308, pp. 315-320.
- [13] Freudenstein, F., 1955, "Approximate synthesis of four-bar linkages", *Transactions of the ASME*, Vol. 77, August, pp. 853-861.
- [14] 小栗富士雄、小栗達男 合著, 黃炎森 譯, *標準機械設計圖表便覽*, 第三版, 眾

文圖書，台北，1993。

[15] 陳義仁，受負載之正齒輪對的傳動誤差探討，博士論文，國立交通大學，新竹，2005。

[16] 張文桐，吳隆庸，"平面曲線之曲率半徑"，機構與機器設計—中華民國機構與機器原理學會會刊，第十七卷，第一期，13-19 頁，2006。



附錄 A

TCG 環形導軌基本齒形是擺線齒形進一步做修正而產生，其構成原理是由基礎圓上的任意點且靠著大圓(環形導軌)回轉時的軌跡變成基本曲線，以這一軌跡當成滾子中心的路徑，其滾子外周所描出的曲線成為基本齒形。其次，參考 F. L. Litvin [4]的座標系轉換(圖 A1)，推導出輪廓的方程式如下所示：

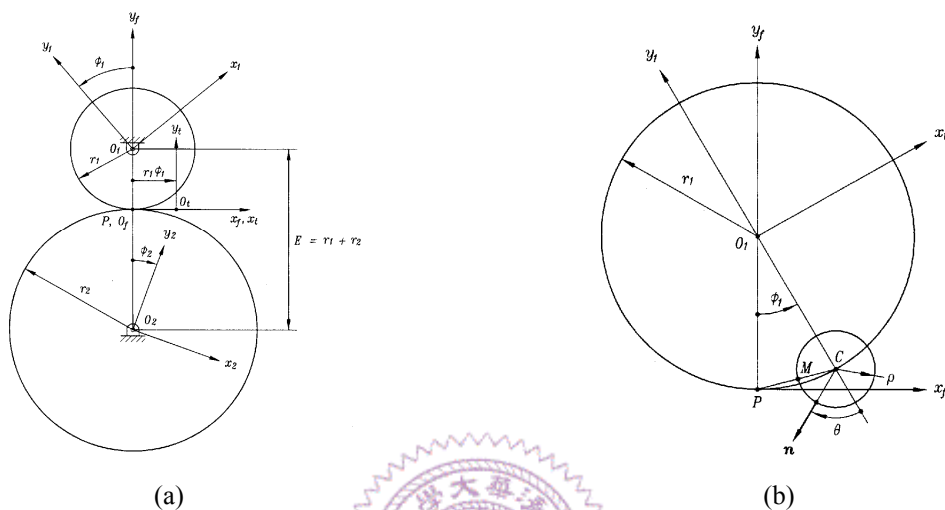


圖 A1 使用座標系

$$x_2 = r_1 \sin(\phi_1 + \phi_2) - (r_1 + r_2) \sin \phi_2 - r_f \cos\left(\frac{\phi_1}{2} + \phi_2\right) \quad (\text{A.1})$$

$$y_2 = -r_1 \cos(\phi_1 + \phi_2) + (r_1 + r_2) \cos \phi_2 - r_f \sin\left(\frac{\phi_1}{2} + \phi_2\right) \quad (\text{A.2})$$

其中， r_f 為滾子半徑、 $\phi_1 > 0$ 、 $\phi_2 = \phi_1 \frac{r_1}{r_2}$ 。

將此輪廓方程式與第三章所推導出銷子輪輪廓的方程式以圖形表示，並放在同一張圖中做比較，發現兩者輪廓完全相同，如圖 A2 所示。

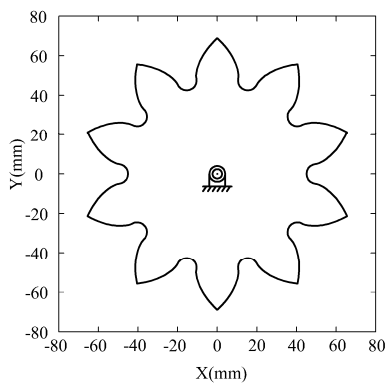


圖 A2 環形導軌輪廓與銷子輪輪廓比較圖

附錄 B

在內接式銷子輪之滾子中心路徑若具有尖點或結點時，齒輪輪廓會無法完整地加以繪製。其情況與外接式類似，可歸納出會發生尖點之狀態為

$$l = \left| \frac{f}{1 - r_v} \right| \quad (\text{B.1})$$

結點發生之情況為

$$l < \left| \frac{f}{1 - r_v} \right| \quad (\text{B.2})$$

因此可設定之拘束條件為

$$l \geq \left| \frac{f}{1 - r_v} \right| \quad (\text{B.3})$$

當 $f = 25 \text{ mm}$ ，轉速比 r_v 對應之擺臂長度極限值 l_{\min} 的關係，如圖 B1。當固定軸心距時，轉速比越高其擺臂長度之最小長度越長。

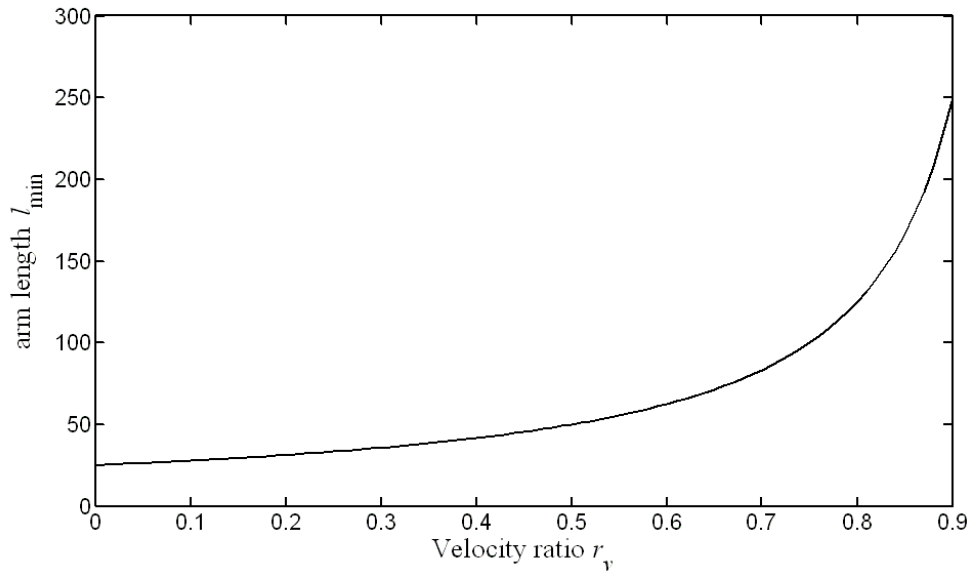


圖 B1 擺臂長度極限值 l_{\min} 與速比 r_v 關係圖 ($f = 25 \text{ mm}$)

附錄 C

將漸開線輪廓方程式利用平面曲線之曲率半徑[16]求其曲率半徑，可表示為：

$$\rho(\theta) = \frac{|\alpha'(\theta) + \beta(\theta)\psi'(\theta)|}{|\psi'(\theta)|} \quad (C.1)$$

其中

$$\alpha(\theta) = R_b \quad (C.2)$$

$$\beta(\theta) = R_b \theta \quad (C.3)$$

$$\alpha'(\theta) = 0 \quad (C.4)$$

將式(C.2)、式(C.3)、式(C.4)帶入式(C.1)，可得：

$$\rho(\theta) = \beta(\theta) = R_b \theta \quad (C.5)$$

因此，由式(C.5)可知，其曲率中心落於基圓上。



附錄 D

將漸開線內齒輪的主、被動齒輪對調時，各參數之機械誤差方程式可找出其轉換關係，如下表所示：

表 D1 漸開線內齒輪主、被動齒輪對調其各參數機械誤差之轉換關係

參數	漸開線內齒輪		
	小齒輪為主動	轉換式	大齒輪為主動
ΔS_f	$-\frac{\Delta r_1 \sin \phi}{r_3}$	$\frac{r_3}{r_2}$	$-\frac{\Delta r_1 \sin \phi}{r_2}$
ΔS_{n_2}	$\frac{\Delta n_2}{r_3}$	$\frac{r_3}{r_2} \cdot \frac{\Delta n_3}{\Delta n_2}$	$\frac{\Delta n_3}{r_2}$
ΔS_{n_3}	$\frac{\Delta n_3}{r_3}$	$\frac{r_3}{r_2} \cdot \frac{\Delta n_2}{\Delta n_3}$	$\frac{\Delta n_2}{r_2}$
ΔS_{rd_2}	$\frac{\Delta r d_2 \cos \lambda_2}{r_3}$	$\frac{r_3}{r_2} \cdot \frac{\Delta r d_3 \cos \lambda_3}{\Delta r d_2 \cos \lambda_2}$	$\frac{\Delta r d_3 \cos \lambda_3}{r_2}$
ΔS_{rd_3}	$\frac{\Delta r d_3 \cos \lambda_3}{r_3}$	$\frac{r_3}{r_2} \cdot \frac{\Delta r d_2 \cos \lambda_2}{\Delta r d_3 \cos \lambda_3}$	$\frac{\Delta r d_2 \cos \lambda_2}{r_2}$

因此，由上表 D1 可知，當漸開線內齒輪主、被動齒輪對調之後，只要將原本計算出的各參數誤差，然後乘上所對應之轉換式子，即可知道對調之後的各參數誤差方程式，不必重新再推導。