

行政院國家科學委員會專題研究計畫 成果報告

盤形凸輪機構之機械誤差分析

計畫類別：個別型計畫

計畫編號：NSC94-2212-E-007-030-

執行期間：94 年 08 月 01 日至 95 年 07 月 31 日

執行單位：國立清華大學動力機械工程學系

計畫主持人：吳隆庸

報告類型：精簡報告

處理方式：本計畫可公開查詢

中 華 民 國 95 年 8 月 7 日

行政院國家科學委員會補助專題研究計畫成果報告

盤形凸輪機構之機械誤差分析

計畫類別：個別型計畫

計畫編號：NSC 94-2212-E-007-030

執行期間：94 年 8 月 1 日至 95 年 7 月 31 日

計畫主持人：吳隆庸

共同主持人：

本成果報告包括以下應繳交之附件：

- ☐ 赴國外出差或研習心得報告一份
- ☐ 赴大陸地區出差或研習心得報告一份
- ☐ 出席國際學術會議心得報告及發表之論文各一份
- ☐ 國際合作研究計畫國外研究報告書一份

執行單位：國立清華大學動力機械工程學系

中 華 民 國 95 年 8 月 6 日

盤形凸輪機構之機械誤差分析

Analysis of Mechanical Errors in Disk Cam Mechanisms

計畫編號： NSC 94-2212-E-007-030

執行期限：94 年 8 月 1 日至 95 年 7 月 31 日

主持人：吳隆庸 國立清華大學動力機械工程學系

一、中文摘要

本計畫的目的在於發展一套解析法以進行盤形凸輪機構的機械誤差分析。藉由凸輪輪廓之向量參數式及等效連桿組的觀念，機構各個設計參數之尺寸偏差所導致的從動件運動誤差可以解析式加以表示。本計畫對各種盤形凸輪機構的機械誤差進行分析。計畫內容包括：(1)推導出由凸輪機構各個設計參數之尺寸偏差所導致的從動件之運動誤差函數。(2)探討凸輪輪廓的法線方向誤差與徑向尺寸誤差之關係，以決定凸輪輪廓之尺寸公差的容許值。對這些研究項目，本計畫除了推導、列述各相關方程式之外，並以實例及圖表來說明所得到的結果及現象。

關鍵詞：盤形凸輪機構、機械誤差、等效連桿組、公差。

Abstract

The purpose of this project is to develop an analytical approach for analyzing the mechanical errors of disk cam mechanisms. With the aid of parametric expressions of the cam profile and by employing the concept of equivalent linkage, the error of the follower motion caused by the variation of each design parameter can be determined analytically. Mechanical error analysis of disk cams with various types of followers are performed. The contents of this project are: (1) Derive the motion error functions of the follower due to the variation of each design parameter. (2) Determine the geometric relation between the normal-direction error and the radial profile error of a disk cam so as to properly specify its radial profile tolerance. For these contents, mathematical expressions are derived and summarized, and examples are provided to illustrate the details of the results.

Keywords: disk cam mechanism, mechanical error, equivalent linkage, tolerance.

二、計畫緣由與目的

凸輪機構由於其構造簡單、節省空間及易於設計等優點，被廣泛地運用在機械系統裝置內的機件運動控制。相較於伺服控制系統，凸輪機構具有較穩定及低成本的優勢。但是，凸輪機構本身的製造與組裝誤差會對其從動件之定位精度及動態特性造成相當程度的影響。尤其是在高速機器中，凸輪輪廓本身微量的尺寸誤差，仍會導致系統出現振動、噪音與磨耗等現象[1-3]。因此，凸輪輪廓必須具備足夠的精確度（較小的製造公差）以達成機器的性能需求。

雖然較小的零件製造公差可以提升機構的精確度與穩定性，但是製造成本卻會隨著公差的減小而快速增加[4]。因此，如何決定零件的最大容許公差，以使機構或機器的工作性能與製造成本之間取得平衡，實為一項相當重要的工作。所以，就精密凸輪機構而言，設計者必須設法得知凸輪輪廓及機構設計參數的尺寸公差對於從動件之輸出函數的影響。換言之，機械誤差分析（mechanical error analysis）[5, 6]的進行將有助於精密凸輪機構的設計與製造。

至今，已有部分學者[7-10]對盤形凸輪機構的機械誤差分析進行過相關工作。Giordana 等[7]應用凸輪機構的等效四連桿組（equivalent four-bar linkage），以數值近似方法探討凸輪輪廓的製造與量測誤差對於從動件之運動函數所造成的偏差。Wang 等[9]利用常態分佈輪廓公差（normal-distributed profile tolerance）的概念以估算從動件的運動誤差。Chiu 等[10]應用平面曲線之偏位曲線（the offset curve of a plane curve）以分析盤形凸輪機構的製造與組裝誤差對於機構之輸出變異的影響。這些相關研究提供了設計者相當有用

的分析觀念，然而，其繁複的理論推導與數值計算程序卻可能使設計者為之卻步。

本計畫的主要目的在於利用等效四連桿組的觀念，提出一套較為簡易的解析式機械誤差分析方法，以應用於盤形凸輪機構的誤差評估與公差設計，尤其是用於設計凸輪輪廓及機構設計參數的公差容許值。

三、研究方法及成果與討論

3.1 基本理論

3.1.1 等效連桿組與其機械誤差分析法

直接接觸機構的運動分析問題，可以將該機構轉化至其所對應之等效連桿組以簡化分析的程序[5, 11]。同時，此一轉化處理亦提供了一個便利的途徑以進行盤形凸輪機構的機械誤差分析。

對於圖1(a)所示的直接接觸機構， O_2 及 O_3 分別為桿件2及桿件3的固定軸樞，A點為此兩桿件的瞬時接觸點（共同點）， K_2 及 K_3 分別為此兩桿件輪廓在A點所對應的曲率中心。此直接接觸機構之等效連桿組即為圖1(b)所示的四連桿機構 $O_2K_2K_3O_3$ ，其中，耦桿（桿件4）之兩端分別連接兩曲率中心 K_2 及 K_3 ，且 K_2K_3 會通過接觸點A所對應的公法線。若圖1(a)中的桿件2及桿件3分別代表凸輪與從動件，則在此瞬間，圖1(b)中之 O_2K_2 （桿件2）及 O_3K_3 （桿件3）會分別與凸輪及從動件具有相同的對應運動特性（角速度及角加速度會完全相同對應）。

對於一凸輪成品而言，其真實輪廓與理論輪廓之間可能存在微小的偏差量，進而會導致從動件的運動誤差。既然凸輪機構的瞬時運動特性會與其等效連桿組相同，則凸輪機構的機械誤差分析可透過其等效連桿組的輔助而加以進行。換言之，若凸輪輪廓在其法線方向具有尺寸誤差 Δn ，此誤差量會等於等效連桿組之耦桿桿長誤差 Δr_4 ，而使得兩機構的輸出桿會具有相同的運動誤差量。因此，由Hartenberg與Denavit [5, 6]所發展出的連桿機構之機械誤差分析程序可被加以應用，以便透過解析的方式探討凸輪輪廓及機構設計參數

的各項偏差量對於從動件之運動誤差的影響。

對於一具有單自由度的單迴路連桿機構而言，透過運動分析可以推導出其位移方程式（displacement equation）為

$$F(r_1, r_2, \dots, r_n, \theta, \psi) = 0 \quad (1)$$

其中 (r_1, r_2, \dots, r_n) 為機構之各桿件尺寸參數， θ 與 ψ 分別為機構之輸入與輸出變數。若各桿長參數及變數具有微小的誤差量，則位移方程式的全微分可表示為

$$\begin{aligned} dF \approx \Delta F &= \frac{\partial F}{\partial r_1} \Delta r_1 + \frac{\partial F}{\partial r_2} \Delta r_2 + \dots \\ &+ \frac{\partial F}{\partial r_n} \Delta r_n + \frac{\partial F}{\partial \theta} \Delta \theta + \frac{\partial F}{\partial \psi} \Delta \psi = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

在假設輸入變數無誤差的情況下（ $\Delta \theta = 0$ ），由各桿件尺寸參數之誤差量所分別造成的輸出位移誤差為

$$\Delta \psi_i = -\frac{\partial F / \partial r_i}{\partial F / \partial \psi} \Delta r_i \quad \text{for } i=1, 2, \dots, n \quad (3)$$

經由統計方法，可以估算出機構輸出位移的最差情況誤差（the worst-case deviation）為[5, 6]

$$\Delta \psi_{\text{wor}} = \sum_{i=1}^n |\Delta \psi_i| \quad (4)$$

以及機構輸出位移的最大預期誤差（the maximum expected deviation）為[5, 6, 12]

$$\Delta \psi_{\text{rms}} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (\Delta \psi_i)^2} \quad (5)$$

此誤差量通常與各項 $\Delta \psi_i$ 的均方根值（root mean square value）有關。在推導出輸出位移誤差方程式之後，可進一步地將其對時間進行一階與二階微分，以推導出輸出速度誤差與加速度誤差的解析式。

3.1.2 凸輪之徑向尺寸誤差與法線方向誤差

如3.1.1節所述，凸輪輪廓之法向尺寸誤差 Δn 會等於等效連桿組之耦桿桿長誤差 Δr_4 。然而，在實務上，盤形凸輪輪廓的

精確度是在於控制其徑向尺寸誤差 Δr ，而不是直接控制其法向尺寸誤差 Δn 。換言之，在不同的凸輪旋轉角度之下，真實凸輪輪廓與理論凸輪輪廓的徑向尺寸差異量均必須落在一容許的公差區域之內。在標註盤形凸輪輪廓的加工精度時，通常會給定一容許的徑向尺寸誤差 Δr ，而非其法向尺寸誤差 Δn 。因此，為了利用等效連桿組推導凸輪輪廓的徑向尺寸誤差與從動件運動誤差之間的理論關係，必須先設法建立徑向尺寸誤差與法向尺寸誤差之間的幾何轉換關係。

圖 2(a)、(b) 所示分別為盤形凸輪輪廓與滾子型從動件及平面型從動件的接觸情形，其中，理論凸輪輪廓以實線表示，而真實凸輪輪廓以虛線表示，且為求清晰起見，輪廓的偏差量被加以放大。A 點代表理論接觸點，通過該點的公法線與真實凸輪輪廓相交於 A_n 點，而直線 O_2A 與真實凸輪輪廓相交於 A_r 點。當法向尺寸誤差 AA_n 極為微小時，線段 A_nA_r 可視為與真實凸輪輪廓相切，而線段 A_nA 可視為與真實凸輪輪廓相垂直；若如此，則 $\triangle AA_nA_r$ 可視為一直角三角形，因此

$$\Delta n \approx \Delta r \cos \lambda \quad (6)$$

其中 $\Delta n = AA_n$ ， $\Delta r = AA_r$ 且 $\lambda = \angle A_rAA_n$ 。在本研究中，將 λ 稱為徑向尺寸誤差與法向尺寸誤差之間的轉換角 (shift angle)。此外，由於通過 A 點的公法線亦會通過 Q 點 (即瞬心 I_{23})，所以

$$\lambda = \angle O_2AQ \quad (7)$$

由 $\triangle O_2AQ$ ，轉換角 λ 可表示為

$$\lambda = \sin^{-1} \left(\frac{\mathbf{QA} \times \mathbf{O_2A}}{\|\mathbf{QA}\| \cdot \|\mathbf{O_2A}\|} \right) \quad (8)$$

(8) 式為轉換角 λ 的通解，可適用於所有的盤形凸輪機構。由 (6) 式可得到 $\Delta r_4 \approx \Delta r \cos \lambda$ 的關係式，當給定一 Δr 值之後，便可透過此轉換關係以計算出等效連桿組的耦桿桿長誤差 Δr_4 ，並利用 3.1.1 節所述的方法進行從動件的運動誤差分析。

藉由凸輪輪廓之向量參數式 [13-16] 及上述等效連桿組的觀念，機構各個設計參

數之尺寸偏差所導致的從動件運動誤差就可以解析式加以表示。以下分別對各種盤形凸輪機構 (包括：偏位直動式滾子型從動件凸輪機構、直動式傾斜平面型從動件凸輪機構、搖擺式滾子型從動件凸輪機構及搖擺式平面型從動件凸輪機構等) 的機械誤差進行分析。

3.2 偏位直動式滾子型從動件凸輪機構

3.2.1 凸輪輪廓之向量參數方程式

如圖 3 所示的偏位直動式滾子型從動件凸輪機構 (disk cam with an offset translating roller follower)，定一坐標系 O_2-XY 固定於凸輪上，坐標原點 O_2 與凸輪之旋轉軸心重合， θ 為凸輪的角位移；機架、凸輪及從動件之三個瞬心 I_{12} 、 I_{13} 和 I_{23} 的位置分別如圖上所示。若 Q 點代表瞬心 I_{23} 且 $O_2Q = q$ ，則在凸輪上之 Q 點的速率可表示為

$$V_Q = q\omega_2 \quad (9)$$

其中 ω_2 為凸輪轉速。為使獨立參數 θ 往逆時針方向遞增，可設定凸輪往順時針方向旋轉。因為從動件為平移運動，所以從動件上所有點的速度均相同；因此在從動件上之 Q 點的速率可表示為

$$V_Q = \frac{dL(\theta)}{dt} = \frac{dL(\theta)}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{dL(\theta)}{d\theta} \omega_2 \quad (10)$$

其中從動件位置函數 $L(\theta)$ 可表示為

$$L(\theta) = \sqrt{(r_b + r_f)^2 - e^2} + S(\theta) \quad (11)$$

其中 r_b 為凸輪基圓半徑， r_f 為從動滾子半徑， e 為從動件偏位量， $S(\theta)$ 為從動件運動曲線函數。根據瞬心的定義，桿件 2 (凸輪) 與桿件 3 (從動件) 在瞬心 I_{23} 上的點具有相同的線速度，而 Q 點為瞬心 I_{23} ，所以，比較 (9)、(10) 兩式可得

$$q = \frac{dL(\theta)}{d\theta} = \frac{dS(\theta)}{d\theta} = V(\theta) \quad (12)$$

其中 $V(\theta)$ 即為從動件速度函數。因此，只要選定 r_b 、 r_f 、 e 值及 $S(\theta)$ 函數後，對任意 θ 參數值均可由 (11) 式求得 $L(\theta)$ 值而定出

對應滾子中心 C 點的位置，並由(12)式求得 q 值而定出對應瞬心 Q 點的位置。

由於壓力角為接觸點之公法線 (CQ) 與從動件運動方向 (CE) 的夾角，因此由 $\triangle ECQ$ ，壓力角 ϕ 可表示為

$$\phi = \tan^{-1} \left[\frac{q-e}{L(\theta)} \right] = \tan^{-1} \left[\frac{V(\theta)-e}{L(\theta)} \right] \quad (13)$$

因此，凸輪輪廓之向量參數方程式可表示為

$$\mathbf{O}_2\mathbf{A} = \mathbf{O}_2\mathbf{E} + \mathbf{EC} + \mathbf{CA} \quad (14)$$

其中

$$\mathbf{O}_2\mathbf{E} = e \begin{Bmatrix} \cos(\theta + 90^\circ) \\ \sin(\theta + 90^\circ) \end{Bmatrix} = e \begin{Bmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{Bmatrix} \quad (15)$$

$$\mathbf{EC} = L(\theta) \begin{Bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{Bmatrix} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{CA} &= r_f \begin{Bmatrix} \cos(\theta + 180^\circ - \phi) \\ \sin(\theta + 180^\circ - \phi) \end{Bmatrix} \\ &= -r_f \begin{Bmatrix} \cos(\theta - \phi) \\ \sin(\theta - \phi) \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (17)$$

3.2.2 等效連桿組之機械誤差分析

對於圖 4(a)所示的偏位直動式滾子型從動件凸輪機構，其所對應的等效四連桿組為一偏位滑件曲柄機構，如圖 4(b)所示。凸輪（桿件 2）與從動件（桿件 3）在任一瞬間的相對運動關係（位移、速度與加速度）會等於曲柄與滑件之間所具有者；其中， O_2 為凸輪樞軸，Q 為凸輪與從動件之速度瞬心，K 為凸輪輪廓之曲率中心，A 為凸輪與滾子之接觸點，C 為滾子中心點。Q、K、A 與 C 等四點在任一瞬間均會通過凸輪與滾子之接觸點的公法線。凸輪樞軸至凸輪輪廓之曲率中心的距離 O_2K 為等效四連桿組的曲柄桿長 r_2 ，而凸輪輪廓之曲率中心至滾子中心點的距離 KC 則為耦桿桿長 r_4 。因此，凸輪輪廓的法線方向誤差 Δn 可由耦桿誤差 Δr_4 加以取代。由等效連桿組的桿件尺寸參數 e 、 r_2 、 r_4 以及輸入、輸出變數 θ_2 、 $L(\theta)$ 所構成的位移方程式可以表示為

$$\begin{aligned} F &= 2r_2(L\sin\theta_2 - e\cos\theta_2) + r_4^2 \\ &\quad - (r_2^2 + L^2 + e^2) = 0 \end{aligned} \quad (18)$$

其中 e 為偏位量， $r_2 = O_2K$ 且 $r_4 = KC$ 。當微小誤差量 Δe 、 Δr_2 、 Δr_4 、 $\Delta\theta_2$ 與 ΔL 存在時，位移方程式的全微分可以表示為

$$\begin{aligned} dF \approx \Delta F &= \frac{\partial F}{\partial e} \Delta e + \frac{\partial F}{\partial r_2} \Delta r_2 + \frac{\partial F}{\partial r_4} \Delta r_4 \\ &\quad + \frac{\partial F}{\partial \theta_2} \Delta \theta_2 + \frac{\partial F}{\partial L} \Delta L = 0 \end{aligned} \quad (19)$$

由 Δr_4 所造成之輸出位移誤差：

在假設誤差量 Δe 、 Δr_2 與 $\Delta\theta_2$ 均為零的情況下，由凸輪輪廓之法向尺寸誤差 Δr_4 所造成的輸出位移誤差為

$$\Delta S_n = \Delta L = -\frac{\partial F / \partial r_4}{\partial F / \partial L} \Delta r_4 = \frac{\Delta n}{\cos \phi} \quad (20)$$

ΔS_n 即為由凸輪輪廓之法向尺寸誤差所造成的從動件位移誤差。

由 Δe 所造成之輸出位移誤差：

在假設誤差量 Δr_2 、 Δr_4 與 $\Delta\theta_2$ 均為零的情況下，由從動件之偏位量誤差 Δe 所造成的輸出位移誤差為

$$\Delta S_e = \Delta L = -\frac{\partial F / \partial e}{\partial F / \partial L} \Delta e = \Delta e \tan \phi \quad (21)$$

ΔS_e 即為由凸輪機構之偏位量誤差所造成的從動件位移誤差。

由(20)與(21)兩式可知，壓力角 ϕ 對於從動件的位移誤差具有相當重要的影響；尤其，耦桿桿長誤差（即法向輪廓誤差）會以 $(1/\cos \phi)$ 的形式放大誤差量。此外，輸入桿長 r_2 與耦桿桿長 r_4 並未出現在位移誤差方程式的最後推導結果之中。換言之，凸輪輪廓之曲率中心位置的計算對於誤差分析程序而言並不重要，因此，可以相當程度地簡化分析過程的複雜度。

3.2.3 徑向尺寸誤差與法線方向誤差

在 3.2.2 節中已推導出由法向輪廓誤差

所造成的從動件位移誤差方程式，故可進一步地利用 3.1.2 節中所提出的方法以推導出徑向輪廓誤差所造成的從動件位移誤差。

如圖 5 所示的偏位直動式滾子型從動件凸輪機構，由其中的直角三角形 QEC 可得

$$\beta = 90^\circ - \phi \quad (22)$$

由 $\triangle O_2AQ$ 及正弦定理，可得轉換角 λ 的解析式為

$$\lambda = \sin^{-1} \left(\frac{q \sin \beta}{\|O_2A\|} \right) = \sin^{-1} \left[\frac{V(\theta) \cos \phi}{\|O_2A\|} \right] \quad (23)$$

由(6)、(20)及(23)等三式，可得徑向輪廓誤差所造成的輸出誤差近似解為

$$\Delta S_r = \Delta L \approx \frac{\Delta r \cos \lambda}{\cos \phi} \quad (24)$$

由(24)式可知，壓力角 ϕ 對於從動件之位移誤差的影響會被轉換角 λ 以 $\cos \lambda$ 的型式所抵消。

在推導出徑向輪廓誤差所造成的輸出誤差之後，可以估算出從動件位移函數的最差情況誤差為

$$\Delta S_{wor} = |\Delta S_r| + |\Delta S_e| \quad (25)$$

以及從動件位移函數的最大預期誤差為

$$\Delta S_{rms} = \sqrt{(\Delta S_r)^2 + (\Delta S_e)^2} \quad (26)$$

將(21)與(24)兩式對時間進行兩次微分，可得從動件的速度與加速度誤差方程式。

3.2.4 實例分析

一凸輪機構欲使其偏位直動式滾子型從動件產生以下的運動：當凸輪的角位移為 $0^\circ \sim 100^\circ$ 時，從動件以擺線運動 (cycloidal motion) 上升 24 mm；當凸輪的角位移為 $100^\circ \sim 150^\circ$ 時，從動件暫停；當凸輪的角位移為 $150^\circ \sim 250^\circ$ 時，從動件以擺線運動下降 24 mm；當凸輪的角位移為 $250^\circ \sim 360^\circ$ 時，從動件暫停。凸輪之基圓半徑 r_b 為 40 mm、從動滾子之半徑 r_f 為 10

mm，從動件偏位量 e 為 12 mm。

由 3.2.1 節之向量參數式，可計算並繪出上述凸輪的輪廓如圖 3 所示，其最大徑向尺寸為 63.525 mm。若採用 IT6 公差，可設定凸輪輪廓之徑向尺寸誤差 $\Delta r = 19 \mu\text{m}$ ，且從動件之偏位量誤差 $\Delta e = 11 \mu\text{m}$ 。

圖 6 所示為進行位移誤差分析後所得到的各項函數相對於凸輪角位移 θ 的變化情形。由圖 6(a)，壓力角 ϕ 與轉換角 λ 具有相似的變化趨勢，因此， $(1/\cos \phi)$ 的起伏會被 $\cos \lambda$ 所抵消。如圖 6(b) 所示，由於 $0.885 \leq (\cos \lambda / \cos \phi) \leq 1.0809$ ，相較於 $\tan \phi$ ，其僅具有輕微的起伏；此現象亦導致 ΔS_r 的變化趨勢較 ΔS_e 來得平坦。

ΔS_{wor} 的最大值出現在 $\theta = 206.9^\circ$ 的位置，非常接近 $\theta = 205.84^\circ$ ，其為壓力角 ϕ 出現最大絕對值 ($|\phi| = 33.74^\circ$) 的位置。此外， ΔS_{wor} 的最大值為 $27.84 \mu\text{m}$ 。以從動件之定位精度的觀點而言，在總體行程為 24 mm 的情況下出現 $\Delta S_{max} = 27.84 \mu\text{m}$ 的最大位移誤差，顯示其精度會比所預期的狀況來得差。換言之，若最差情況發生，從動件的位置精度等級會由機構各設計參數所採用的 IT6 降至 IT7 ($21 \mu\text{m}$) 與 IT8 ($33 \mu\text{m}$) 之間。

圖 7(a)、(b) 所示分別為從動件之速度誤差與加速度誤差的分析結果。值得注意的是，雖然從動件的理論位移曲線為擺線運動，其加速度誤差函數 ΔA_r 與 ΔA_e 在從動件之升、降程的起點與終點位置均會出現不連續的情況，進而導致在這些位置上會出現無窮大的急跳度。

3.3 直動式傾斜平面型從動件凸輪機構

3.3.1 凸輪輪廓之向量參數方程式

如圖 8 所示的偏位直動式傾斜平面型從動件凸輪機構 (disk cam with an offset translating oblique flat-faced follower)，從動件的傾斜平面與凸輪輪廓保持相切。同樣定坐標系 O_2-XY 固定於凸輪上，並標示出瞬心 I_{12} 、 I_{13} 及 I_{23} 的位置分別如圖上所示。若 Q 點代表瞬心 I_{23} 且 $O_2Q = q$ ，則

$$q = \frac{dL(\theta)}{d\theta} = \frac{dS(\theta)}{d\theta} = V(\theta) \quad (27)$$

其中從動件位置函數 $L(\theta)$ 可表示為

$$L(\theta) = r_b \sec \phi - e \tan \phi + S(\theta) \quad (28)$$

其中 r_b 為凸輪基圓半徑， e 為從動件偏位量， ϕ 為從動平面的傾斜角（即固定不變的壓力角）， $S(\theta)$ 為從動件運動曲線函數。因此，只要選定 r_b 、 e 、 ϕ 值及 $S(\theta)$ 函數後，對任意 θ 參數值均可由(28)式求得 $L(\theta)$ 值而定出對應 P 點（即從動件之參考點）的高度，並由(27)式求得 q 值而定出對應瞬心 Q 點的位置。由四邊形 EQAP，可得 Q 點至接觸點 A 的距離 QA 為

$$QA = L(\theta) \cos \phi - (q - e) \sin \phi \quad (29)$$

因此，凸輪輪廓之向量參數方程式可表示為

$$\mathbf{O}_2\mathbf{A} = \mathbf{O}_2\mathbf{Q} + \mathbf{QA} \quad (30)$$

其中

$$\mathbf{O}_2\mathbf{Q} = q \begin{Bmatrix} \cos(\theta + 90^\circ) \\ \sin(\theta + 90^\circ) \end{Bmatrix} = q \begin{Bmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{Bmatrix} \quad (31)$$

$$\mathbf{QA} = QA \begin{Bmatrix} \cos(\theta + \phi) \\ \sin(\theta + \phi) \end{Bmatrix} \quad (32)$$

3.3.2 等效連桿組之機械誤差分析

圖 9(a)所示為一偏位直動式傾斜平面型從動件凸輪機構及其等效連桿組，其中，桿件 4 為一浮動滑塊（floating slider block），其一端與桿件 2 在凸輪之曲率中心 K 的位置上相樞接，另一端則與桿件 3 具有相對滑動（桿件 3、4 之間的相對滑動軸為通過 AP 之直線），故而形成一蘇格蘭軛機構（Scotch yoke mechanism）。如圖上所示，相對滑動軸線 AP 並未通過凸輪之曲率中心 K，使得桿件 4 具有一特徵長度 $r_4 = KA$ 。事實上，只要 K 點的位置被決定之後，不論 r_4 的值為何，均不影響等效連桿組之桿件 3 的速度與加速度特性。然而，透過如此安排，可以將凸輪輪廓之法向尺寸誤差 Δn 轉化為浮動滑塊之特徵長度誤

差 Δr_4 ，以利於進行機械誤差分析。如圖 9(b)所示，由等效連桿組的桿件尺寸參數 e 、 r_2 、 r_4 、 ϕ 以及輸入、輸出變數 θ_2 、 $L(\theta)$ 所構成的位移方程式可以表示為

$$F = r_2 \sin(\theta_2 - \phi) + r_4 - e \sin \phi - L \cos \phi = 0 \quad (33)$$

其中 e 為偏位量， $r_2 = O_2K$ ， $r_4 = KA$ ， ϕ 為相對滑動軸 AP 的傾斜角（即固定不變的壓力角）。當微小誤差量 Δe 、 Δr_2 、 Δr_4 、 $\Delta \phi$ 、 $\Delta \theta_2$ 與 ΔL 存在時，位移方程式的全微分可以表示為

$$\begin{aligned} dF \approx \Delta F = & \frac{\partial F}{\partial e} \Delta e + \frac{\partial F}{\partial r_2} \Delta r_2 + \frac{\partial F}{\partial r_4} \Delta r_4 \\ & + \frac{\partial F}{\partial \phi} \Delta \phi + \frac{\partial F}{\partial \theta_2} \Delta \theta_2 + \frac{\partial F}{\partial L} \Delta L = 0 \end{aligned} \quad (34)$$

由 Δr_4 所造成之輸出位移誤差：

在假設誤差量 Δe 、 Δr_2 、 $\Delta \phi$ 與 $\Delta \theta_2$ 均為零的情況下，由凸輪輪廓之法向尺寸誤差 Δr_4 所造成的輸出位移誤差為

$$\Delta S_n = \Delta L = -\frac{\partial F / \partial r_4}{\partial F / \partial L} \Delta r_4 = \frac{\Delta n}{\cos \phi} \quad (35)$$

ΔS_n 即為由凸輪輪廓之法向尺寸誤差所造成的從動件位移誤差。值得注意的是，若傾斜角 $\phi = 0^\circ$ ，則 $\Delta S_n = \Delta n$ 。

由 $\Delta \phi$ 所造成之輸出位移誤差：

在假設誤差量 Δe 、 Δr_2 、 Δr_4 與 $\Delta \theta_2$ 均為零的情況下，由從動平面之傾斜角誤差 $\Delta \phi$ 所造成的輸出位移誤差為

$$\Delta S_\phi = \Delta L = -\frac{\partial F / \partial \phi}{\partial F / \partial L} \Delta \phi = \frac{u}{\cos \phi} \Delta \phi \quad (36)$$

其中

$$u = PA = L \sin \phi + (q - e) \cos \phi \quad (37)$$

由(27)式可知 $q = O_2Q = V(\theta)$ ； u 為 A 點相對於 P 點的滑動距離，而 ΔS_ϕ 即為由從動平面之傾斜角誤差所造成的從動件位移誤差。值得注意的是，若傾斜角 $\phi = 0^\circ$ ，則

$u = q - e$ 且 $\Delta S_\phi = (q - e)\Delta\phi$ 。

由 Δe 所造成之輸出位移誤差：

在假設誤差量 Δr_2 、 Δr_4 、 $\Delta\phi$ 與 $\Delta\theta_2$ 均為零的情況下，由從動件之偏位量誤差 Δe 所造成的輸出位移誤差為

$$\Delta S_e = \Delta L = -\frac{\partial F / \partial e}{\partial F / \partial L} \Delta e = -\Delta e \tan \phi \quad (38)$$

ΔS_e 即為由凸輪機構之偏位量誤差所造成的從動件位移誤差。值得注意的是，若傾斜角 $\phi = 0^\circ$ ，則 $\Delta S_e = 0$ 。

由(35)、(36)與(38)等三式可知，壓力角 ϕ 對於從動件的位移誤差具有相當重要的影響；尤其，浮動滑塊之特徵長度誤差（即法向輪廓誤差）會以 $(1/\cos\phi)$ 的形式放大誤差量。由於壓力角 ϕ 為一定值，故 ΔS_e 必為一不變量，同時，若假設凸輪輪廓的法向尺寸誤差 Δn 為一定值，則 ΔS_n 亦為一不變量。此外，輸入桿長 r_2 與浮動滑塊之特徵長度 r_4 並未出現在位移誤差方程式的最後推導結果之中。換言之，凸輪輪廓之曲率中心位置的計算對於誤差分析程序而言並不重要，因此，可以相當程度地簡化分析過程的複雜度。

3.3.3 徑向尺寸誤差與法線方向誤差

在 3.3.2 節中已推導出由法向輪廓誤差所造成的從動件位移誤差方程式，故可進一步地利用 3.1.2 節中所提出的方法以推導出徑向輪廓誤差所造成的從動件位移誤差。

如圖 10 所示的偏位直動式傾斜平面型從動件凸輪機構，由 $\triangle O_2AQ$ 及正弦定理，可得轉換角 λ 的解析式為

$$\lambda = \sin^{-1} \left[\frac{V(\theta) \cos \phi}{\|O_2A\|} \right] \quad (39)$$

由(6)、(35)及(39)等三式，可得徑向輪廓誤差所造成的輸出誤差近似解為

$$\Delta S_r = \Delta L \approx \frac{\Delta r \cos \lambda}{\cos \phi} \quad (40)$$

由(40)式可知，壓力角 ϕ 對於從動件之位移誤差的影響會被轉換角 λ 以 $\cos\lambda$ 的型式所抵消。但由於 $\cos\phi$ 為一定值，故從動件之位移誤差的變化趨勢只與 $\cos\lambda$ 有關。

在推導出徑向輪廓誤差所造成的輸出誤差之後，由(36)、(38)與(40)等三式，可以估算出從動件位移函數的最差情況誤差為

$$\Delta S_{\text{wor}} = |\Delta S_r| + |\Delta S_\phi| + |\Delta S_e| \quad (41)$$

以及從動件位移函數的最大預期誤差為

$$\Delta S_{\text{rms}} = \sqrt{(\Delta S_r)^2 + (\Delta S_\phi)^2 + (\Delta S_e)^2} \quad (42)$$

將(36)、(38)與(40)等三式對時間進行兩次微分，可得從動件的速度與加速度誤差方程式。

3.3.4 實例分析

一凸輪機構欲使其偏位直動式傾斜平面型從動件產生以下的運動：當凸輪的角位移為 $0^\circ \sim 120^\circ$ 時，從動件以擺線運動上升 22 mm；當凸輪的角位移為 $120^\circ \sim 190^\circ$ 時，從動件暫停；當凸輪的角位移為 $190^\circ \sim 290^\circ$ 時，從動件以擺線運動下降 22 mm；當凸輪的角位移為 $290^\circ \sim 360^\circ$ 時，從動件暫停。給定凸輪之基圓半徑 r_b 為 40 mm，從動件偏位量 e 為 10 mm，從動平面之傾斜角 ϕ 為 15° 。

由 3.3.1 節之向量參數式，可計算並繪出上述凸輪的輪廓如圖 8 所示者，其最大徑向尺寸為 61.25 mm。若採用 IT6 公差，可設定凸輪輪廓之徑向尺寸誤差 $\Delta r = 19 \mu\text{m}$ ，從動件之偏位量誤差 $\Delta e = 9 \mu\text{m}$ ，從動平面之傾斜角誤差 $\Delta\phi = 0.011^\circ$ 。

圖 11 所示為進行位移誤差分析後所得到的各項函數相對於凸輪角位移 θ 的變化情形。由圖 11(a)，轉換角 λ 與滑動距離 u 具有相似的變化趨勢，然而，轉換角 λ 是以 $\cos\lambda$ 的型式放大誤差量，不及滑動距離 u 本身對於放大誤差量所具有的敏感程度。由於 $(u/\cos\phi)$ 本身具有長度的單位，故在圖 11(b) 中以一無因次化的比值 $(u/u_{\text{max}} \cos\phi)$ 來與 $(\cos\lambda/\cos\phi)$ 進行比較。如圖中所示，由於

$0.9297 \leq (\cos \lambda / \cos \phi) \leq 1.0353$ ，相較於 $(u/u_{\max} \cos \phi)$ ，其僅具有輕微的起伏；此現象亦導致 ΔS_r 的變化趨勢較 ΔS_ϕ 來得平坦。此外，由於 $\tan \phi = 0.2679$ 為一定值，故 $\Delta S_e = -2.41 \mu\text{m}$ 為一不變量。

ΔS_{wor} 的最大值出現在 $\theta = 71.5^\circ$ 的位置，其值為 $25.57 \mu\text{m}$ 。以從動件之定位精度的觀點而言，在總體行程為 22 mm 的情況下出現 $\Delta S_{\max} = 25.57 \mu\text{m}$ 的最大位移誤差，顯示其精度會比所預期的狀況來得差。換言之，若最差情況發生，從動件的位置精度等級會由機構各設計參數所採用的 IT6 降至 IT7 ($21 \mu\text{m}$) 與 IT8 ($33 \mu\text{m}$) 之間。

圖 12(a)、(b) 所示分別為從動件之速度誤差與加速度誤差的分析結果。由於位移誤差函數 ΔS_e 為一水平直線，故 ΔV_e 與 ΔA_e 均為零。值得注意的是，雖然從動件的理論位移曲線為擺線運動，加速度誤差函數 ΔA_ϕ 在從動件之升、降程的起點與終點位置均會出現不連續的情況，使得在這些位置上會出現無窮大的急跳度。然而，加速度誤差函數 ΔA_r 在這些位置上卻仍具有連續可微分的特性；如(40)式所示， ΔS_r 的變化趨勢只與 $\cos \lambda$ 有關，由此，可推論 $\cos \lambda$ 具有高階連續可微分的特性。因此，對於直動式平面型從動件凸輪機構而言，凸輪輪廓的尺寸誤差不會使從動件產生無窮大的急跳度。

3.4 搖擺式滾子型從動件凸輪機構

3.4.1 凸輪輪廓之向量參數方程式

如圖 13 所示的搖擺式滾子型從動件凸輪機構 (disk cam with an oscillating roller follower)，凸輪旋轉軸與從動件搖擺軸間的軸心距為 $O_2O_3 = f$ ，從動件之擺臂長為 l 。同樣定坐標系 $O_2\text{-}XY$ 固定於凸輪上，並標示出瞬心 I_{12} 、 I_{13} 及 I_{23} 的位置分別如圖上所示。若 Q 點代表瞬心 I_{23} 且 $O_2Q = q$ ，則在凸輪上之 Q 點的速率可表示為

$$V_Q = q\omega_2 \quad (43)$$

而在從動件上之 Q 點的速率可表示為

$$V_Q = (f + q) \frac{d\xi(\theta)}{dt} = (f + q) \frac{d\xi(\theta)}{d\theta} \omega_2 \quad (44)$$

其中 $\xi(\theta)$ 為從動件的角位置函數

$$\xi(\theta) = \cos^{-1} \left[\frac{l^2 + f^2 - (r_b + r_f)^2}{2lf} \right] + S(\theta) \quad (45)$$

其中 r_b 為凸輪基圓半徑， r_f 為從動滾子半徑， $S(\theta)$ 為從動擺臂之角位移函數。根據瞬心的定義，桿件 2 (凸輪) 與桿件 3 (從動件) 在瞬心 I_{23} 上的點具有相同的線速度，而 Q 點為瞬心 I_{23} ，所以比較(43)、(44)兩式，並經移項化簡後可得

$$q = \frac{f \frac{d\xi(\theta)}{d\theta}}{1 - \frac{d\xi(\theta)}{d\theta}} = \frac{f \frac{dS(\theta)}{d\theta}}{1 - \frac{dS(\theta)}{d\theta}} = \frac{fV(\theta)}{1 - V(\theta)} \quad (46)$$

其中 $V(\theta)$ 即為從動擺臂之角速度函數。因此，只要選定 r_b 、 r_f 、 l 、 f 值及 $S(\theta)$ 函數後，對任意 θ 參數值均可由(45)式求得 $\xi(\theta)$ 值而定出對應滾子中心 C 點的位置，並由(46)式求得 q 值而定出對應瞬心 Q 點的位置。由 $\triangle O_3QC$ 及餘弦定理，可得 Q 點至滾子中心 C 的距離 QC 為

$$QC = \sqrt{l^2 + (f + q)^2 - 2l(f + q)\cos \xi(\theta)} \quad (47)$$

由 $\triangle O_3QC$ 及正弦定理可得

$$\alpha = \sin^{-1} \left[\frac{l \sin \xi(\theta)}{QC} \right] \quad (48)$$

因此，凸輪輪廓之向量參數方程式可表示為

$$O_2A = O_2Q + QA \quad (49)$$

其中

$$O_2Q = q \begin{Bmatrix} \cos(\theta + 180^\circ) \\ \sin(\theta + 180^\circ) \end{Bmatrix} = -q \begin{Bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{Bmatrix} \quad (50)$$

$$QA = (QC - r_f) \begin{Bmatrix} \cos(\theta + \alpha) \\ \sin(\theta + \alpha) \end{Bmatrix} \quad (51)$$

由 $\triangle O_3QC$ 可知，壓力角 ϕ 可表示為

$$\phi = 90^\circ - \alpha - \xi(\theta) \quad (52)$$

3.4.2 等效連桿組之機械誤差分析

圖 14(a)所示為一搖擺式滾子型從動件凸輪機構及其等效連桿組，其中，耦桿（桿件 4）之兩端分別連接凸輪之曲率中心 K 及滾子中心 C，以形成一個四連桿機構。如圖 14(b)所示，由等效連桿組的桿長參數 r_1 、 r_2 、 r_3 、 r_4 以及輸入、輸出變數 θ_2 、 θ_3 所構成的位移方程式可以表示為

$$\begin{aligned} F = & 2[r_1(r_3 \cos \theta_3 - r_2 \cos \theta_2) \\ & - r_2 r_3 \cos(\theta_2 - \theta_3)] + r_1^2 + r_2^2 \\ & + r_3^2 - r_4^2 = 0 \end{aligned} \quad (53)$$

其中 $r_1 = O_2O_3 = f$ ， $r_2 = O_2K$ ， $r_3 = O_3C = l$ 且 $r_4 = KC$ 。當微小誤差量 Δr_1 、 Δr_2 、 Δr_3 、 Δr_4 、 $\Delta \theta_2$ 與 $\Delta \theta_3$ 存在時，位移方程式的全微分可以表示為

$$\begin{aligned} dF \approx \Delta F = & \frac{\partial F}{\partial r_1} \Delta r_1 + \frac{\partial F}{\partial r_2} \Delta r_2 + \frac{\partial F}{\partial r_3} \Delta r_3 \\ & + \frac{\partial F}{\partial r_4} \Delta r_4 + \frac{\partial F}{\partial \theta_2} \Delta \theta_2 + \frac{\partial F}{\partial \theta_3} \Delta \theta_3 = 0 \end{aligned} \quad (54)$$

由 Δr_4 所造成之輸出位移誤差：

在假設誤差量 Δr_1 、 Δr_2 、 Δr_3 與 $\Delta \theta_2$ 均為零的情況下，由凸輪輪廓之法向尺寸誤差 Δr_4 所造成的輸出位移誤差為

$$\Delta S_n = -\Delta \theta_3 = -\frac{\partial F / \partial r_4}{\partial F / \partial \theta_3} \Delta r_4 = \frac{\Delta n}{l \cos \phi} \quad (55)$$

ΔS_n 即為由凸輪輪廓之法向尺寸誤差所造成的從動件位移誤差。

由 Δr_1 所造成之輸出位移誤差：

在假設誤差量 Δr_2 、 Δr_3 、 Δr_4 與 $\Delta \theta_2$ 均為零的情況下，由旋轉軸心距之誤差 Δr_1 所造成的輸出位移誤差為

$$\begin{aligned} \Delta S_f = -\Delta \theta_3 = & -\frac{\partial F / \partial r_1}{\partial F / \partial \theta_3} \Delta r_1 \\ = & -\frac{\Delta f \sin(\xi + \phi)}{l \cos \phi} \end{aligned} \quad (56)$$

ΔS_f 即為由凸輪與從動件之軸心距誤差所造成的從動件位移誤差。

由 Δr_3 所造成之輸出位移誤差：

在假設誤差量 Δr_1 、 Δr_2 、 Δr_4 與 $\Delta \theta_2$ 均為零的情況下，由從動件之擺臂長誤差 Δr_3 所造成的輸出位移誤差為

$$\Delta S_l = -\Delta \theta_3 = -\frac{\partial F / \partial r_3}{\partial F / \partial \theta_3} \Delta r_3 = \frac{\Delta l \tan \phi}{l} \quad (57)$$

ΔS_l 即為由從動件之擺臂長誤差所造成的從動件位移誤差。

由(55)、(56)與(57)等三式可知，壓力角 ϕ 對於從動件的位移誤差具有相當重要的影響；尤其，耦桿桿長誤差（即法向輪廓誤差）會以 $(1/\cos \phi)$ 的形式放大誤差量。同時，誤差量會與擺臂長 l 呈反比的關係。此外，輸入桿長 r_2 與耦桿桿長 r_4 並未出現在位移誤差方程式的最後推導結果之中。換言之，凸輪輪廓之曲率中心位置的計算對於誤差分析程序而言並不重要，因此，可以相當程度地簡化分析過程的複雜度。

3.4.3 徑向尺寸誤差與法線方向誤差

在 3.4.1 節中已推導出由法向輪廓誤差所造成的從動件位移誤差方程式，故可進一步地利用 3.1.2 節中所提出的方法以推導出徑向輪廓誤差所造成的從動件位移誤差。

如圖 15 所示的搖擺式滾子型從動件凸輪機構，由其中的 $\triangle O_2AQ$ 及正弦定理，可得轉換角 λ 的解析式為

$$\begin{aligned} \lambda = & \sin^{-1} \left(\frac{q \sin \alpha}{\|O_2A\|} \right) \\ = & \sin^{-1} \left\{ \frac{fV(\theta) \sin \alpha}{[1 - V(\theta)] \|O_2A\|} \right\} \end{aligned} \quad (58)$$

由(6)、(55)及(58)等三式，可得徑向輪廓誤差所造成的輸出誤差近似解為

$$\Delta S_r = -\Delta\theta_3 \approx \frac{\Delta r \cos \lambda}{l \cos \phi} \quad (59)$$

由(59)式可知，壓力角 ϕ 對於從動件之位移誤差的影響會被轉換角 λ 以 $\cos \lambda$ 的型式所抵消。

在推導出徑向輪廓誤差所造成的輸出誤差之後，由(56)、(57)與(59)等三式，可以估算出從動件位移函數的最差情況誤差為

$$\Delta S_{\text{wor}} = |\Delta S_r| + |\Delta S_f| + |\Delta S_l| \quad (60)$$

以及從動件位移函數的最大預期誤差為

$$\Delta S_{\text{rms}} = \sqrt{(\Delta S_r)^2 + (\Delta S_f)^2 + (\Delta S_l)^2} \quad (61)$$

將(56)、(57)與(59)等三式對時間進行兩次微分，可得從動件的速度與加速度誤差方程式。

3.4.4 實例分析

一凸輪機構欲使其搖擺式滾子型從動件產生以下的運動：當凸輪的角位移為 $0^\circ \sim 120^\circ$ 時，從動件以擺線運動往順時針方向搖擺 25° ；當凸輪的角位移為 $120^\circ \sim 160^\circ$ 時，從動件暫停；當凸輪的角位移為 $160^\circ \sim 280^\circ$ 時，從動件以擺線運動往逆時針方向搖擺 25° ；當凸輪的角位移為 $280^\circ \sim 360^\circ$ 時，從動件暫停。給定凸輪之基圓半徑 r_b 為 40 mm，從動滾子之半徑 r_f 為 8 mm，凸輪與從動件之軸心距 f 為 80 mm，從動件之擺臂長 l 為 52 mm。

由 3.4.1 節之向量參數式，可計算並繪出上述凸輪的輪廓如圖 13 所示者，其最大徑向尺寸為 62.478 mm。若採用 IT6 公差，則軸心距誤差 Δf 、擺臂長誤差 Δl 與徑向輪廓誤差 Δr 均為 $19 \mu\text{m}$ 。

圖 16 所示為進行位移誤差分析後所得到的各項函數相對於凸輪角位移 θ 的變化情形。由圖 16(a)，壓力角 ϕ 與轉換角 λ 具有相似的變化趨勢，因此， $(1/\cos \phi)$ 的起伏會被 $\cos \lambda$ 所抵消。如圖 16(b)所示，由於 $0.9391 \leq (\cos \lambda / \cos \phi) \leq 1.0704$ ，相較

於 $\tan \phi$ ，其僅具有輕微的起伏；此現象亦導致 ΔS_r 的變化趨勢較 ΔS_f 與 ΔS_l 來得平坦。

ΔS_{wor} 的最大值出現在 $\theta = 41.24^\circ$ 的位置，非常接近 $\theta = 41.49^\circ$ ，其為壓力角 ϕ 出現最大絕對值 ($|\phi| = 26.35^\circ$) 的位置。此外， ΔS_{wor} 的最大值為 0.0539° 。以從動件之定位精度的觀點而言，在總體行程為 25° 的情況下出現 $\Delta S_{\text{max}} = 0.0539^\circ$ 的最大位移誤差，顯示其精度會比所預期的狀況來得差。換言之，若最差情況發生，從動件的位置精度等級會由機構各設計參數所採用的 IT6 降至 IT9 (0.052°) 與 IT10 (0.084°) 之間。

圖 17(a)、(b) 所示分別為從動件之速度誤差與加速度誤差的分析結果。值得注意的是，雖然從動件的理論位移曲線為擺線運動，其加速度誤差函數 ΔA_r 、 ΔA_f 與 ΔA_l 在從動件之升、降程的起點與終點位置均會出現不連續的情況，進而導致在這些位置上會出現無窮大的急跳度。

3.5 搖擺式平面型從動件凸輪機構

3.5.1 凸輪輪廓之向量參數方程式

如圖 18 所示的搖擺式平面型從動件凸輪機構 (disk cam with an oscillating flat-faced follower)，凸輪旋轉軸與從動件搖擺軸間的軸心距為 $O_2O_3 = f$ ，從動件軸心到從動擺臂平面的偏位量為 e 。同樣定坐標系 O_2-XY 固定於凸輪上，並標出瞬心 I_{12} 、 I_{13} 及 I_{23} 的位置分別如圖上所示。若 Q 點代表瞬心 I_{23} 且 $O_2Q = q$ ，則

$$q = \frac{f \frac{d\xi(\theta)}{d\theta}}{1 - \frac{d\xi(\theta)}{d\theta}} = \frac{f \frac{dS(\theta)}{d\theta}}{1 - \frac{dS(\theta)}{d\theta}} = \frac{fV(\theta)}{1 - V(\theta)} \quad (62)$$

其中 $\xi(\theta)$ 為從動件的角位置函數

$$\xi(\theta) = \sin^{-1} \left(\frac{r_b - e}{f} \right) + S(\theta) \quad (63)$$

因此，只要選定 r_b 、 e 、 f 值及 $S(\theta)$ 函數後，對任意 θ 參數值均可由(62)式求得 q 值而

定出對應瞬心 Q 點的位置，並由 $\xi(\theta)$ 值定出 O_3E 的方向，再由 Q 點對 O_3E 線作垂線決定 E 點及 A 點的位置。由 $\triangle O_3QE$ 可得

$$QE = (f + q) \sin \xi(\theta) \quad (64)$$

$$\alpha = 90^\circ - \xi(\theta) \quad (65)$$

因此，凸輪輪廓之向量參數方程式可表示為

$$O_2A = O_2Q + QA \quad (66)$$

其中

$$O_2Q = q \begin{Bmatrix} \cos(\theta + 180^\circ) \\ \sin(\theta + 180^\circ) \end{Bmatrix} = -q \begin{Bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{Bmatrix} \quad (67)$$

$$QA = (QE + e) \begin{Bmatrix} \cos(\theta + \alpha) \\ \sin(\theta + \alpha) \end{Bmatrix} \quad (68)$$

由基本的幾何關係可知，壓力角 ϕ 就是 $\triangle O_3EA$ 的頂角而可表示為

$$\phi = \tan^{-1} \left[\frac{e}{(f + q) \cos \xi(\theta)} \right] \quad (69)$$

3.5.2 等效連桿組之機械誤差分析

圖 19(a)所示為一搖擺式平面型從動件凸輪機構及其等效連桿組，其中，桿件 4 為一浮動滑塊，其一端與桿件 2 在凸輪之曲率中心 K 的位置上相樞接，另一端則與桿件 3 具有相對滑動（桿件 3、4 之間的相對滑動軸為通過 AP 之直線；四邊形 O_3EAP 為一矩形，且 $O_3P = EA = e$ 為滑動軸的偏位量），故而形成一迴轉塊連桿組（turning-block linkage）。如圖上所示，相對滑動軸線並未通過凸輪之曲率中心 K，使得桿件 4 具有一特徵長度 $r_4 = KA$ 。事實上，只要 K 點的位置被決定之後，不論 r_4 的值為何，均不影響等效連桿組之桿件 3 的角速度與角加速度特性。然而，透過如此安排，可以將凸輪輪廓之法向尺寸誤差 Δn 轉化為浮動滑塊之特徵長度誤差 Δr_4 ，以利於進行機械誤差分析。如圖 19(b)所示，由等效連桿組的桿件尺寸參數 e 、 r_1 、 r_2 、 r_4 以及輸入、輸出變數 θ_2 、 θ_3 所構成的位移方程式可以表示為

$$F = r_1 \sin \theta_3 + r_2 \sin(\theta_2 - \theta_3) - r_4 + e = 0 \quad (70)$$

其中 e 為偏位量， $r_1 = O_2O_3 = f$ ， $r_2 = O_2K$ 且 $r_4 = KA$ 。當微小誤差量 Δe 、 Δr_1 、 Δr_2 、 Δr_4 、 $\Delta \theta_2$ 與 $\Delta \theta_3$ 存在時，位移方程式的全微分可以表示為

$$dF \approx \Delta F = \frac{\partial F}{\partial e} \Delta e + \frac{\partial F}{\partial r_1} \Delta r_1 + \frac{\partial F}{\partial r_2} \Delta r_2 + \frac{\partial F}{\partial r_4} \Delta r_4 + \frac{\partial F}{\partial \theta_2} \Delta \theta_2 + \frac{\partial F}{\partial \theta_3} \Delta \theta_3 = 0 \quad (71)$$

由 Δr_4 所造成之輸出位移誤差：

在假設誤差量 Δe 、 Δr_1 、 Δr_2 與 $\Delta \theta_2$ 均為零的情況下，由凸輪輪廓之法向尺寸誤差 Δr_4 所造成的輸出位移誤差為

$$\begin{aligned} \Delta S_n &= -\Delta \theta_3 = -\frac{\partial F / \partial r_4}{\partial F / \partial \theta_3} \Delta r_4 \\ &= \frac{\Delta n}{u} = \frac{\Delta n \tan \phi}{e} \end{aligned} \quad (72)$$

其中

$$\begin{aligned} u &= O_3E = PA \\ &= (f + q) \cos \xi(\theta) = \frac{e}{\tan \phi} \end{aligned} \quad (73)$$

u 為 A 點相對於 P 點（或 E 點相對於 O_3 點）的滑動距離，而 ΔS_n 即為由凸輪輪廓之法向尺寸誤差所造成的從動件位移誤差。

由 Δr_1 所造成之輸出位移誤差：

在假設誤差量 Δe 、 Δr_2 、 Δr_4 與 $\Delta \theta_2$ 均為零的情況下，由旋轉軸心距之誤差 Δr_1 所造成的輸出位移誤差為

$$\begin{aligned} \Delta S_f &= -\Delta \theta_3 = -\frac{\partial F / \partial r_1}{\partial F / \partial \theta_3} \Delta r_1 \\ &= -\frac{\Delta f \sin \xi}{u} = -\frac{\Delta f \sin \xi \tan \phi}{e} \end{aligned} \quad (74)$$

ΔS_f 即為由凸輪與從動件之軸心距誤差所造成的從動件位移誤差。

由 Δe 所造成之輸出位移誤差：

在假設誤差量 Δr_1 、 Δr_2 、 Δr_4 與 $\Delta \theta_2$ 均為零的情況下，由從動擺臂平面之偏位量

誤差 Δe 所造成的輸出位移誤差為

$$\begin{aligned}\Delta S_e &= -\Delta\theta_3 = -\frac{\partial F/\partial e}{\partial F/\partial\theta_3}\Delta e \\ &= -\frac{\Delta e}{u} = -\frac{\Delta e \tan\phi}{e}\end{aligned}\quad (75)$$

ΔS_e 即為由從動擺臂平面之偏位量誤差所造成的從動件位移誤差。

由(73)、(74)與(75)等三式可知，壓力角 ϕ 對於從動件的位移誤差具有相當重要的影響，其會以 $\tan\phi$ 的形式放大誤差量，且誤差量會與相對滑動距離 u 呈反比關係。當 $e=0$ 時，由幾何關係可知 $\tan\phi$ 亦為零（因為 $\phi=0^\circ$ ），則 $\tan\phi/e=0/0$ 的情況會發生在位移誤差方程式之中；此時必須改以相對滑動距離 u 來估算輸出誤差量。此外，輸入桿長 r_2 與浮動滑塊之特徵長度 r_4 並未出現在位移誤差方程式的最後推導結果之中。換言之，凸輪輪廓之曲率中心位置的計算對於誤差分析程序而言並不重要，因此，可以相當程度地簡化分析過程的複雜度。

3.5.3 徑向尺寸誤差與法線方向誤差

在 3.5.1 節中已推導出由法向輪廓誤差所造成的從動件位移誤差方程式，故可進一步地利用 3.1.2 節中所提出的方法以推導出徑向輪廓誤差所造成的從動件位移誤差。

如圖 20 所示的搖擺式平面型從動件凸輪機構，由其中的 $\triangle O_2AQ$ 及正弦定理，可得轉換角 λ 的解析式為

$$\begin{aligned}\lambda &= \sin^{-1}\left(\frac{q \sin\alpha}{\|\mathbf{O}_2\mathbf{A}\|}\right) \\ &= \sin^{-1}\left\{\frac{fV(\theta)\cos\xi(\theta)}{[1-V(\theta)]\|\mathbf{O}_2\mathbf{A}\|}\right\}\end{aligned}\quad (76)$$

由(6)、(72)及(76)等三式，可得徑向輪廓誤差所造成的輸出誤差近似解為

$$\begin{aligned}\Delta S_r &= -\Delta\theta_3 \\ &\approx \frac{\Delta r \cos\lambda}{u} = \frac{\Delta r \cos\lambda \tan\phi}{e}\end{aligned}\quad (77)$$

由(77)式可知，壓力角 ϕ 與轉換角 λ 會以 $(\cos\lambda \tan\phi)$ 的型式放大輸出誤差量。

在推導出徑向輪廓誤差所造成的輸出誤差之後，由(74)、(75)與(77)等三式，可以估算出從動件位移函數的最差情況誤差為

$$\Delta S_{\text{wor}} = |\Delta S_r| + |\Delta S_f| + |\Delta S_e| \quad (78)$$

以及從動件位移函數的最大預期誤差為

$$\Delta S_{\text{rms}} = \sqrt{(\Delta S_r)^2 + (\Delta S_f)^2 + (\Delta S_e)^2} \quad (79)$$

將(74)、(75)與(77)等三式對時間進行兩次微分，可得從動件的速度與加速度誤差方程式。

3.5.4 實例分析

一凸輪機構欲使其搖擺式平面型從動件產生以下的運動：當凸輪的角位移為 $0^\circ \sim 120^\circ$ 時，從動件以擺線運動往順時針方向搖擺 15° ；當凸輪的角位移為 $120^\circ \sim 160^\circ$ 時，從動件暫停；當凸輪的角位移為 $160^\circ \sim 280^\circ$ 時，從動件以擺線運動往逆時針方向搖擺 15° ；當凸輪的角位移為 $280^\circ \sim 360^\circ$ 時，從動件暫停。給定凸輪之基圓半徑 r_b 為 40 mm，凸輪與從動件之軸心距 f 為 80 mm，從動擺臂平面之偏位量 e 為 16 mm。

由 3.5.1 節之向量參數式，可計算並繪出上述凸輪的輪廓如圖 18 所示者，其最大徑向尺寸為 58.934 mm。若採用 IT6 公差，則徑向輪廓誤差 Δr 與軸心距誤差 Δf 均為 $19 \mu\text{m}$ ，而偏位量誤差 Δe 為 $11 \mu\text{m}$ 。

圖 21 所示為進行位移誤差分析後所得到的各項函數相對於凸輪角位移 θ 的變化情形。由圖 21(a)，壓力角的變化範圍為 $9.355^\circ \leq \phi \leq 15.535^\circ$ ，相較於轉換角 λ ，其僅具有輕微的起伏。因此，如圖 21(b)所示， $(\cos\lambda \tan\phi)$ 與 $\tan\phi$ 會呈現相似的變化趨勢；此現象亦導致 ΔS_r 與 ΔS_e 之極值的出現位置相當接近。

ΔS_{wor} 的最大值出現在 $\theta = 203.54^\circ$ 的位置，略為接近 $\theta = 212.11^\circ$ ，其為壓力角 ϕ 出現最大絕對值 ($|\phi| = 15.535^\circ$) 的位置。此外， ΔS_{wor} 的最大值為 0.0382° 。以從動件

之定位精度的觀點而言，在總體行程為 15° 的情況下出現 $\Delta S_{\max} = 0.0382^\circ$ 的最大位移誤差，顯示其精度會比所預期的狀況來得差。換言之，若最差情況發生，從動件的位置精度等級會由機構各設計參數所採用的 IT6 降至 IT8 (0.027°) 與 IT9 (0.043°) 之間。

圖 22(a)、(b) 所示分別為從動件之速度誤差與加速度誤差的分析結果。值得注意的是，雖然從動件的理論位移曲線為擺線運動，其加速度誤差函數 ΔA_r 、 ΔA_f 與 ΔA_e 在從動件之升、降程的起點與終點位置均會出現不連續的情況，進而導致在這些位置上會出現無窮大的急跳度。

四、結論

本計畫應用盤形凸輪機構之等效連桿組的概念，提出了一套解析方法以進行各種盤形凸輪機構的機械誤差分析。由凸輪輪廓及機構設計參數的各項偏差量所分別導致的從動件運動誤差，均可以解析式加以表示。同時，各項誤差方程式的最後推導結果與凸輪輪廓之曲率中心位置的計算並無直接的關係，因此可以相當程度地簡化分析過程的複雜度。此外，透過凸輪輪廓的法線方向與徑向方向之轉換角的建立，可推導出凸輪輪廓的法線方向誤差與徑向尺寸誤差之間的理論幾何關係。

由各項誤差方程式的最後推導結果可知，壓力角對於凸輪機構的機械誤差具有相當重要的影響。不論是以 $(1/\cos\phi)$ 或 $\tan\phi$ 的型式放大輸出誤差量，若壓力角愈大，則從動件的運動誤差亦會顯著變大。

對於滾子型從動件凸輪機構而言，由於壓力角與轉換角具有相似的變化趨勢，藉由兩者的相互抵消，使得由徑向輪廓誤差所導致的從動件位移誤差僅具有輕微的起伏。當最差情況發生時，由於凸輪輪廓及機構設計參數的各項偏差量所分別導致之輸出誤差的加總效應，從動件的位置精度會有較差的公差等級，且位移誤差量與壓力角之極值的出現位置相當接近。

對於平面型從動件凸輪機構而言，由於壓力角的變化趨勢較轉換角來得平坦許多，使得轉換角基本上主導了由徑向輪廓

誤差所導致的從動件位移誤差。當最差情況發生時，從動件的位置精度亦會有較差的公差等級。

雖然在本研究的實例分析中，從動件所使用的理論位移曲線均為擺線運動，但各加速度誤差函數在從動件之升、降程的起點與終點位置幾乎都會出現不連續的情況，進而導致在這些位置上會出現無窮大的急跳度。然而，對於偏位直動式傾斜平面型從動件凸輪機構而言，凸輪輪廓的尺寸誤差及從動件的偏位量誤差則不會使從動件產生無窮大的急跳度。

五、計畫成果自評

本計畫有系統地發展出一套適用於盤形凸輪機構的機械誤差分析方法。透過本方法可以簡易地推導出由凸輪機構各個設計參數之尺寸偏差所導致的從動件之運動誤差函數。而且，透過凸輪輪廓的法線方向誤差與徑向尺寸誤差之理論關係的建立，可幫助設計者較容易地決定凸輪輪廓之尺寸公差的容許值。本理論方法將可應用於精密凸輪機構的公差最佳化設計。

本計畫所完成之研究工作與內容均照原計畫之預定進度完成，並已達成預期的研究目標。這些研究結果可方便國內相關的研發人員查詢參考。本計畫成果的部份內容已發表於：W. T. Chang, and L. I. Wu, March 2006, "Mechanical Error Analysis of Disk Cam Mechanisms with a Flat-Faced Follower," *Journal of Mechanical Science and Technology*, Vol. 20, No. 3, pp. 345-357.

六、參考文獻

- [1] Norton, R. L., *Cam Design and Manufacturing Handbook*, 2002, pp. 315-334 (Industrial, New York).
- [2] Rothbart, H. A. (Ed.), *Cam Design Handbook*, 2004, pp. 285-301 (McGraw-Hill, New York).
- [3] Norton, R. L., "Effect of manufacturing method on dynamic performance of

- cams—an experimental study. Part I—eccentric cams and Part II—double dwell cams,” *Mech. Mach. Theory*, 1988, 23(3), 191-208.
- [4] Spotts, M. F., *Design of Machine Elements*, sixth edition, 1985, p. 611 (Prentice-Hall, New Jersey).
- [5] Hartenberg, R. S. and Denavit, J., *Kinematic Synthesis of Linkages*, 1964, pp. 59-63, pp. 295-306, pp. 315-320 (MacGraw-Hill, New York).
- [6] Grosjean, J., *Kinematics and Dynamics of Mechanisms*, 1991, pp. 267-285 (McGraw-Hill, New York).
- [7] Giordana, F., Rognoni, V. and Ruggieri, G., “On the influence of measurement errors in the kinematic analysis of cams,” *Mech. Mach. Theory*, 1979, 14(5), 327-340.
- [8] Kim, H. R. and Newcombe, W. R., “The effect of cam profile errors and system flexibility on cam mechanism output,” *Mech. Mach. Theory*, 1982, 17(1), 57-71.
- [9] Wang, W. H., Tseng, C. H., Tsay, C. B. and Ling, S. F., “On the manufacturing tolerance of disk cam profile,” *J. Mater. Process. Tech.*, 1993, 38(1-2), 71-84.
- [10] Chiu, H., Ozaki, H., Sato, E., Suzuki, T., Oho, A. and Ariura, Y., “An analysis using offset curves for profiles, manufacturing and errors of plane cams,” *Jap. Soc. Mech. Engrs Int. J.*, 1993, 36(C1), 110-118.
- [11] Hall Jr, A. S., *Kinematics and Linkage Design*, 1961, pp. 2-3, pp. 65-67 (Balt, Indiana).
- [12] Garrett, R. E., and Hall Jr, A. S., “Effect of tolerance and clearance in linkage design,” *Trans ASME J. Eng. Ind.*, 1969, 91B, 198-202.
- [13] Rees-Jones, J., “Mechanisms, cam curvature and interference,” *Engineering*, May 1978, 460-463.
- [14] Rees-Jones, J., “Mechanisms, cam cutting coordinates,” *Engineering*, March 1978, 220-224.
- [15] Davison, J. K., “Calculating cam profiles quickly,” *Mach. Des.*, 7 December 1978, 151-155.
- [16] Wu, L. I., “Calculating conjugate cam profiles by vector equations,” *Journal of Mechanical Engineering Science*, 2003, 217(C10), 1117-1123.

七、圖表

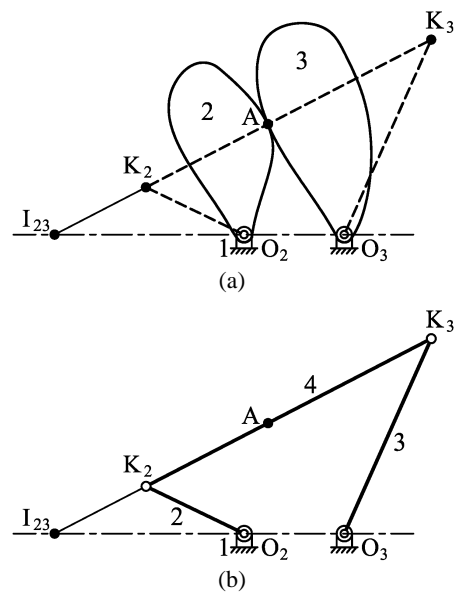


圖 1 直接接觸機構及其等效連桿組

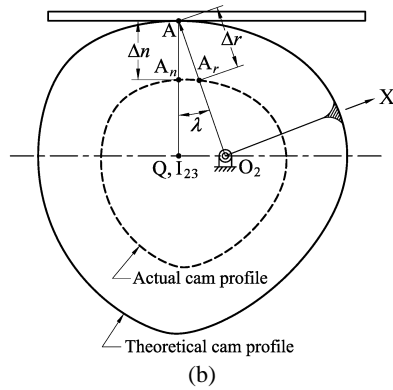
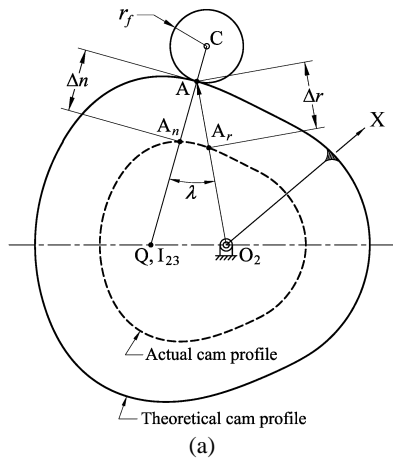


圖 2 盤形凸輪之理論輪廓與真實輪廓

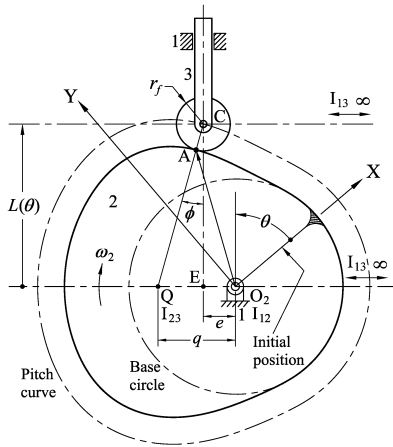


圖 3 偏位直動式滾子型從動件凸輪機構及其瞬心

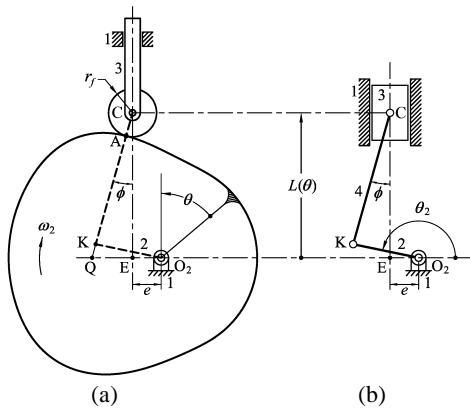


圖 4 偏位直動式滾子型從動件凸輪機構及其等效連桿組

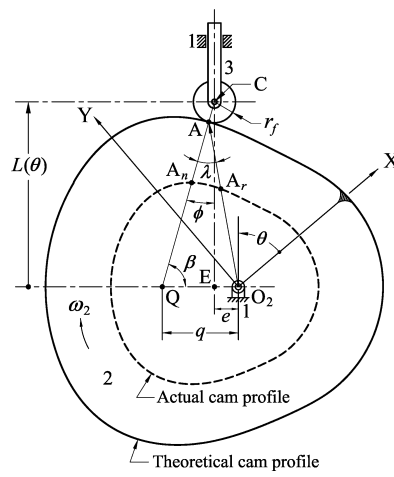


圖 5 偏位直動式滾子型從動件凸輪機構及其真實凸輪輪廓

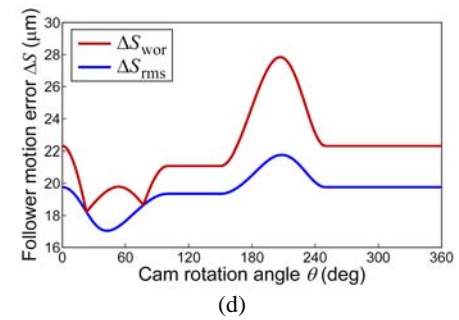
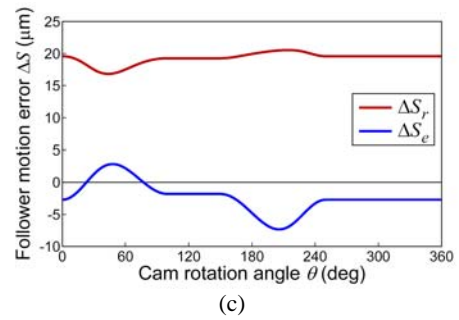
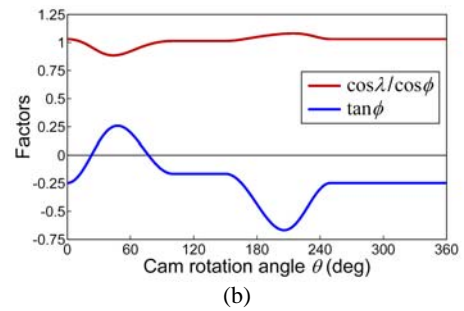
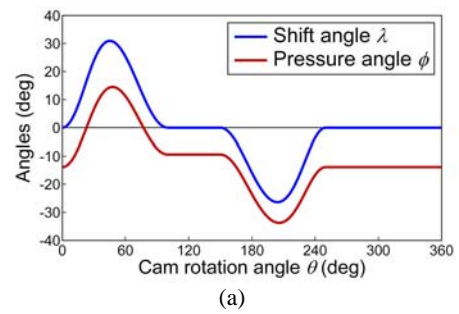


圖 6 機械誤差分析結果(偏位直動式滾子型從動件凸輪機構實例)

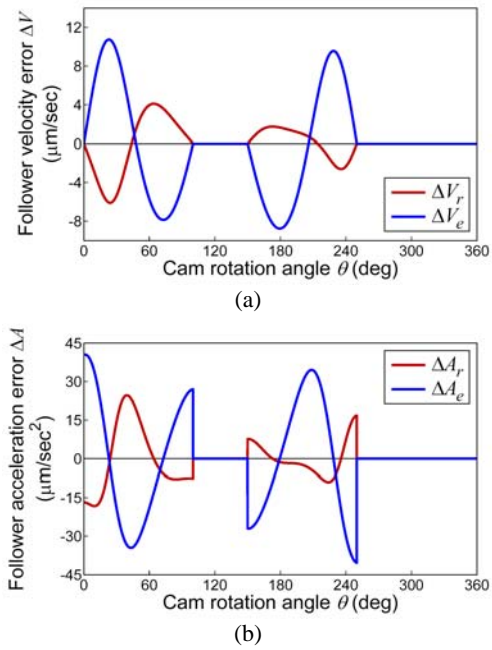


圖 7 速度與加速度誤差函數(偏位直動式滾子型從動件凸輪機構實例)

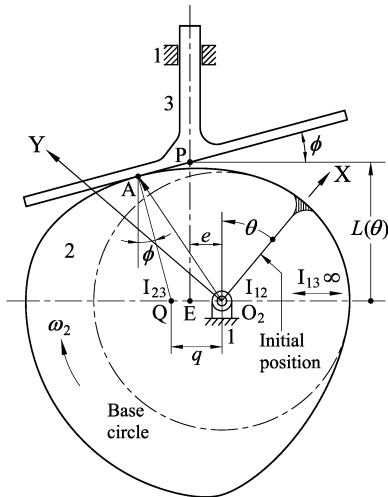


圖 8 偏位直動式傾斜平面型從動件凸輪機構及其瞬心

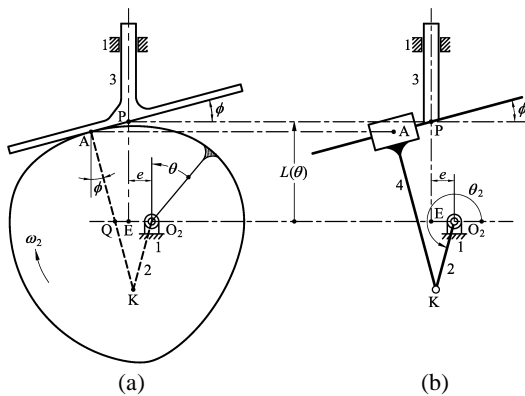


圖 9 偏位直動式傾斜平面型從動件凸輪機構及其等效連桿組

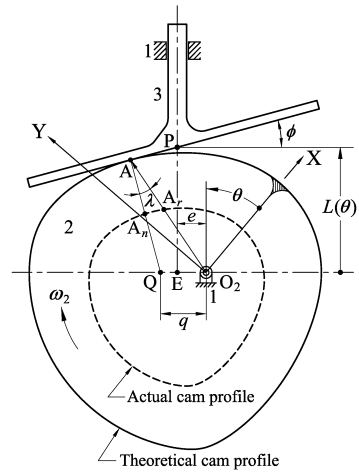


圖 10 偏位直動式傾斜平面型從動件凸輪機構及其真實凸輪輪廓

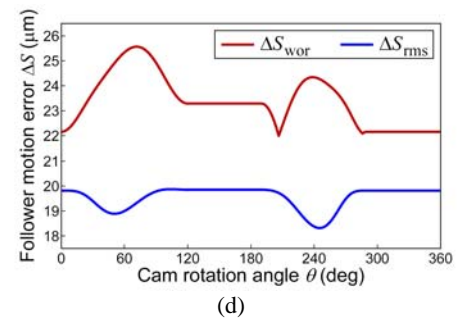
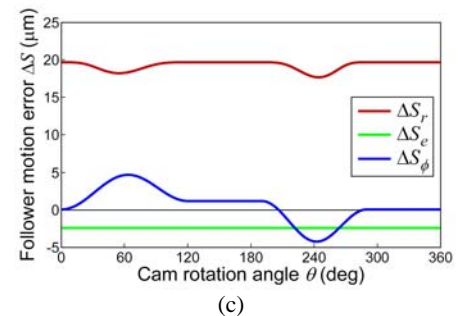
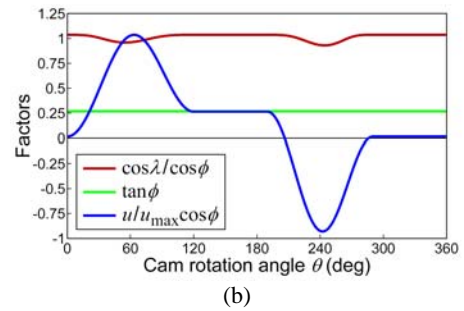
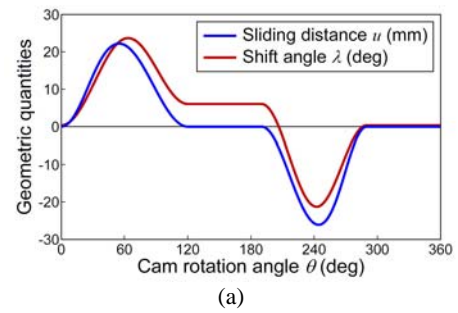
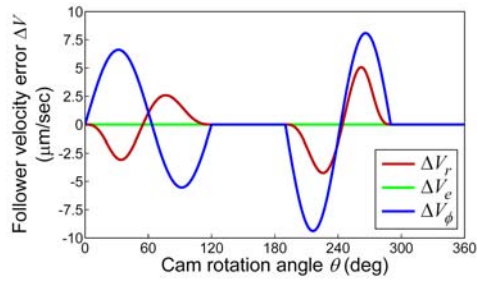
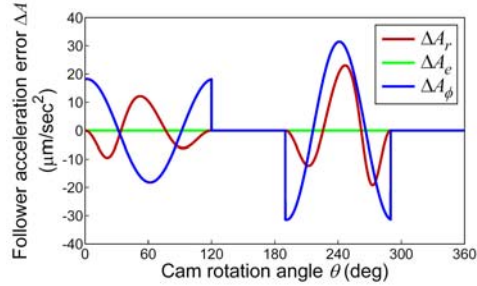


圖 11 機械誤差分析結果(偏位直動式傾斜平面型從動件凸輪機構實例)



(a)



(b)

圖 12 速度與加速度誤差函數（偏位直動式傾斜平面型從動件凸輪機構實例）

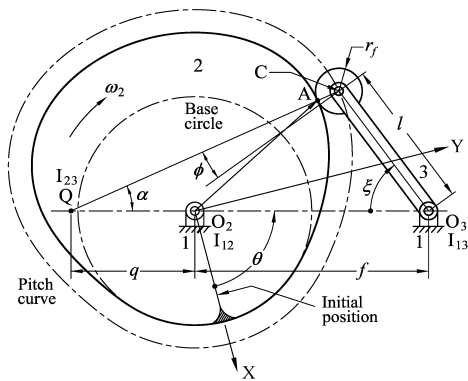


圖 13 搖擺式滾子型從動件凸輪機構及其瞬心

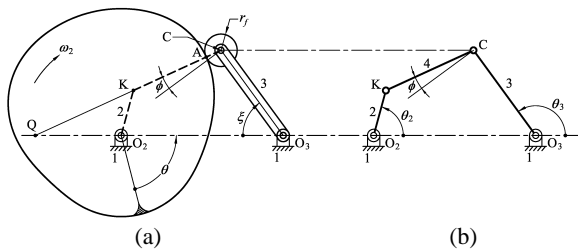


圖 14 搖擺式滾子型從動件凸輪機構及其等效連桿組

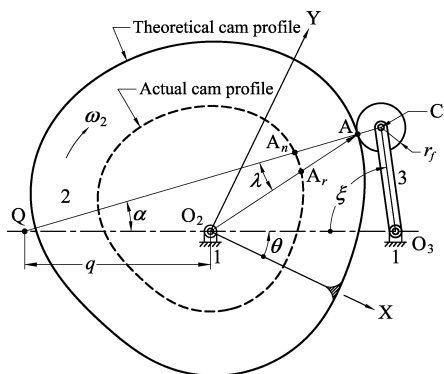
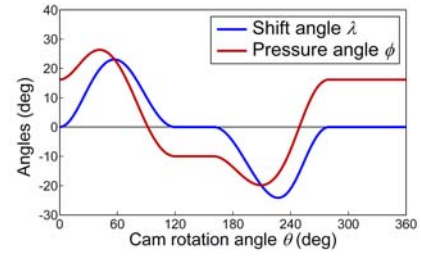
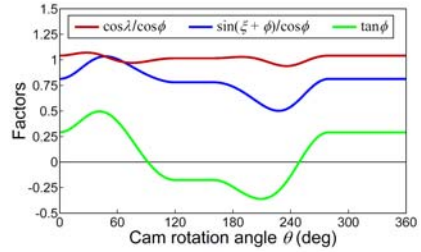


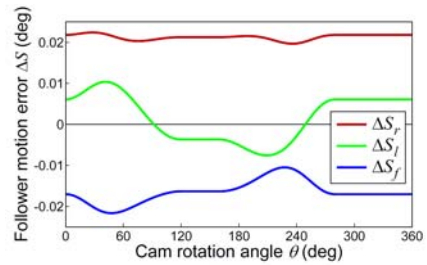
圖 15 搖擺式滾子型從動件凸輪機構及其真實凸輪輪廓



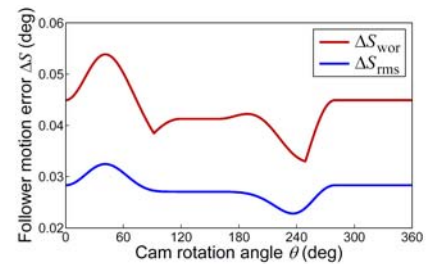
(a)



(b)

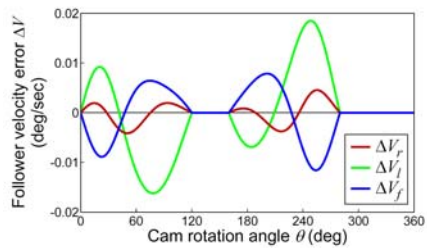


(c)

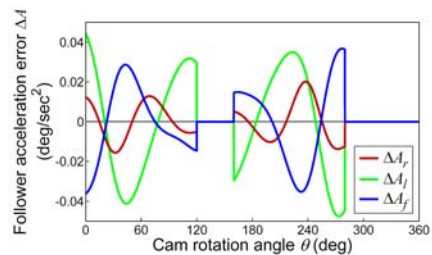


(d)

圖 16 機械誤差分析結果（搖擺式滾子型從動件凸輪機構實例）



(a)



(b)

圖 17 速度與加速度誤差函數（搖擺式滾子型從動件凸輪機構實例）

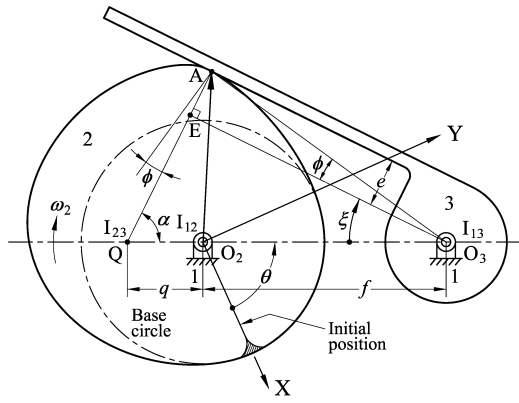


圖 18 搖擺式平面型從動件凸輪機構及其瞬心

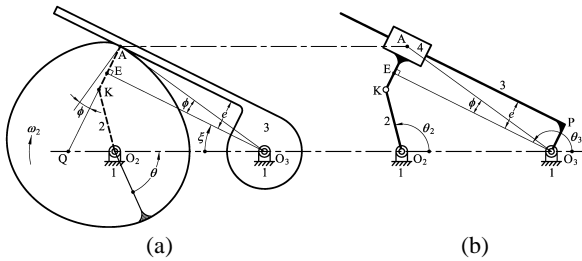


圖 19 搖擺式平面型從動件凸輪機構及其等效連桿組

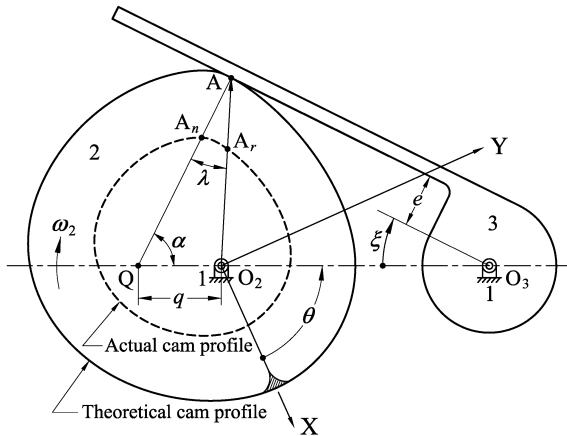
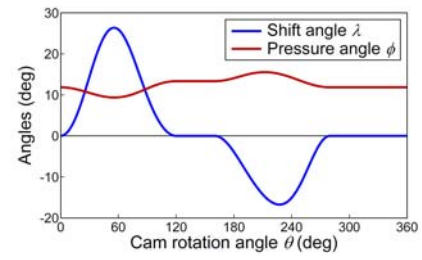
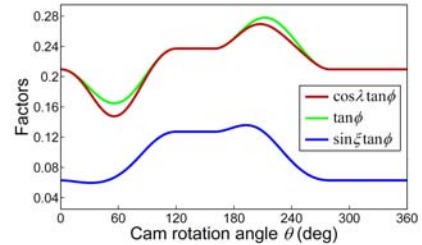


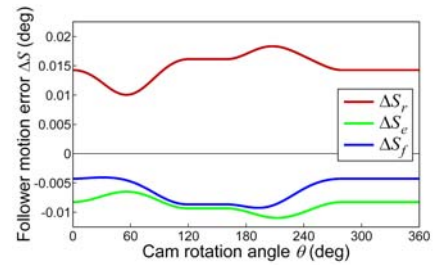
圖 20 搖擺式平面型從動件凸輪機構及其真實凸輪輪廓



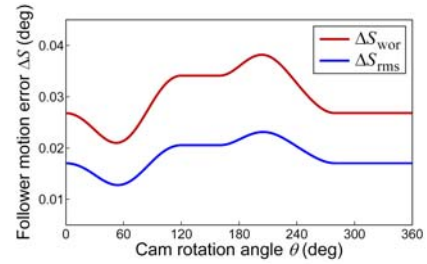
(a)



(b)

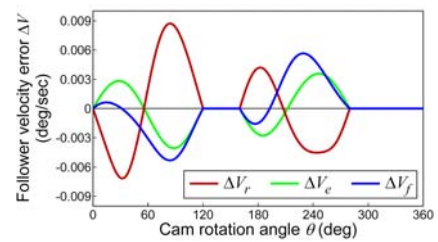


(c)

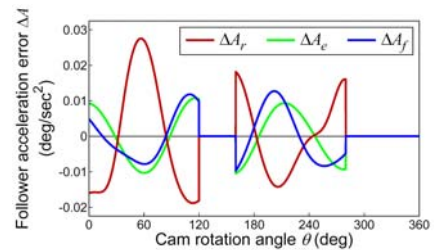


(d)

圖 21 機械誤差分析結果（搖擺式平面型從動件凸輪機構實例）



(a)



(b)

圖 22 速度與加速度誤差函數（搖擺式平面型從動件凸輪機構實例）