

# 以擺線減速機之等效連桿做誤差分析

徐冠倫<sup>1</sup> 周奕彬<sup>2</sup>

<sup>1</sup>副教授，國立臺灣大學機械工程系

<sup>2</sup>大專生，國立臺灣大學機械工程系

## 摘要

擺線減速機是被大量運用的減速機構，其中的擺線輪輪廓複雜，分析時有困難，加上加工不易，使輪廓產生較大的誤差，會對於機構輸出產生不良的影響。本研究將會重新推導擺線輪輪廓之解析式，並將其等效於平面四連桿機構，以四連桿機構本身結構簡單易做討論的特性分析擺線減速機之加工誤差所帶來的影響。

**關鍵詞：**擺線減速機、瞬心向量法、等效連桿、誤差分析

## 1. 前言

擺線減速機於各領域被廣泛應用，擁有大比率的速度與力矩變換。其中，擺線減速機由於使用壽命長、結構緊湊、強大的負載能力等優勢，在有限空間中是一個常被利用的方案。

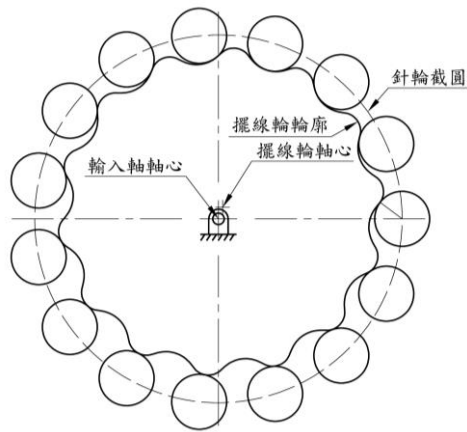
Botsiber 和 Kingston [1] 提出了有關擺線驅動機構的運用法，擺線減速機基本上僅有四個部件：偏心凸輪構成的高速輸入軸、擺線輪、針輪以及低速的輸出軸。以固定環齒型外擺線減速機為例，隨著輸入軸的旋轉，它使擺線輪沿固定針輪(環齒)的內緣滾動，運動模式類似於行星齒輪。當擺線輪環繞針輪圓心公轉時，自身則以偏心凸輪圓心為軸心相反方向緩慢自轉。

根據擺線輪輪廓與固定件的區別，可以將其分為四種擺線驅動類型：固定環齒型外擺線減速機、旋轉環齒型外擺線減速機、固定環齒型內擺線減速機和旋轉環齒型內擺線減速機。

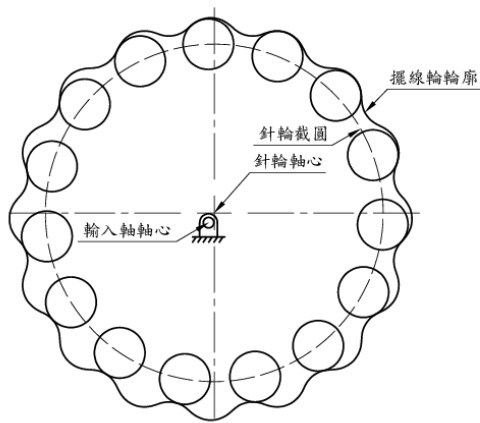
在應用時，需考慮輪廓加工誤差對運動帶來的影響，但據作者所知，有關擺線減速機誤差的分析發表信息不多，亦或是需使用軟體輔助。Malhotra 和 Parameswaran [2] 研究了設計參數對擺線減速器各元件力的影響，以及理論效率。Blanche 和 Yang [3] 利用加工公差開發了擺線驅動的分析模型，並提出了一種計算機輔助分析程式來驗證擺線驅動的性能。Shin 和 Kwon[4]提出了運用座標轉換尋求擺線輪廓的新方法。

等效連桿優勢在於簡化複雜機構的運動模式，將大部分構件的接觸形式轉換為二接頭桿與旋轉對，方便以順向以及逆向運動學分析各機構的運動模式，以及使用連桿機構的位移方程式進行誤差分析。本方法優勢在僅利用構件的輪廓解析式便可針對擺線減速機誤差分析。參考文獻中 Chang 和 Wu [5]中即使用等效連桿分析平面凸輪誤差。

在本文中，我們將提出了一種新的方法，通過瞬心向量法，計算擺線輪的幾何輪廓，並使用擺線減速機的等效四連桿進行誤差分析。由於固定元件的區別並不影響等效連桿的參數，為簡化研究，本研究僅考慮了如圖 1a、圖 1b 中以針輪與擺線輪表示兩種擺線減速機類型：固定環齒型外擺線減速機以及固定環齒型內擺線減速機，且不考慮輸出軸。



(a) 固定環齒型外擺線減速機



(b) 固定環齒型外擺線減速機

圖 1 擺線減速機式意圖

最後基於提出的方法，將使用 MATLAB 語言開發了一個輪廓設計與計算等效連桿的自動化程序。最後，提供了設計範例，以證明這種方法的可行性。

## 2. 擺線輪輪廓

### 2.1 瞬心向量法

瞬時速度中心是兩剛體相對運動時速度相同的點，根據 Kennedy's 定理[6]。平面機構中任意三個相對運動的構件的三個瞬時速度中心都位於同一條直線上。圖 2 顯示了找到瞬時速度中心所需的構造。其中，桿 1 為地桿，桿 2 和 3 以凸輪對相互接觸於點 C。所有的

旋轉對 ( $IC_{12}$ ,  $IC_{13}$ ) 都是固定位置的瞬時中心。凸輪對的接觸點間存在滑動。因此，桿 2 和 3 有的唯一相對運動是沿著接觸點的共同切線方向，而它們的相對旋轉中心，即瞬時速度中心  $IC_{23}$ ，必須位於接觸點的共同法線上。然而，根據 Kennedy's 定理，瞬時速度中心  $IC_{23}$  必須位於線  $\overline{IC_{12}IC_{13}}$  上。因此，瞬時速度中心  $IC_{23}$  位於共同法線和線  $\overline{IC_{12}IC_{13}}$  的交點處。

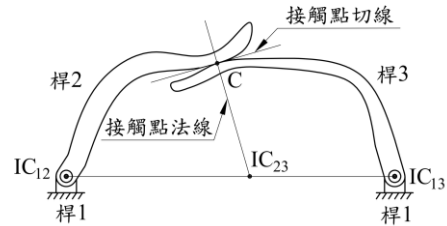


圖 2 瞬心示意圖

### 2.2 外擺線輪輪廓解析式

圖 3 是一個固定環齒型外擺線減速器的示意圖。基於外擺線輪軸的偏心，該機構使用一個旋轉角為  $\phi_2$  的曲柄  $\overline{O_1O_C}$  來表示輸入軸的偏心凸輪，使針輪繞著輸入軸中心  $O_1$  做行星運動。同時外擺線輪與固定針輪的啮合，擺線輪以其自身中心  $O_C$  自轉，旋轉角為  $\phi_3$ ，方向相反於公轉，並與針輪接觸於 C 點。我們將三個構件編號，曲柄為桿 1，擺線輪為桿 2，針輪為桿 3。輸入軸桿 1 有角位移  $\phi_2$  和擺線輪 2 的位移坐標系有角位移  $\phi_3$ 。根據 Kennedy's 定理，我們可以確定三個瞬時速度中心，即旋轉對點  $O_1$  作為  $IC_{12}$ ，旋轉對點  $O_C$  作為  $IC_{23}$ ，接觸點 C 的共同法線與  $\overline{O_1O_C}$  相交於點 M 作為  $IC_{13}$ 。我們將輸入軸產生的偏心長度  $\overline{O_1O_C}$  表示為 E，令  $\overline{O_1M}$  為 Q，並將針輪截圓半徑  $\overline{O_1O_r}$  表示為 R。假設  $\overline{MC}$  長度 L，角  $\angle O_1O_rC$  角度為  $\psi$ 。設計參數通常有偏心距離，即曲柄長度 E，滾輪數 N，針輪截圓半徑 R 以及針輪滾子半徑  $R_r$ 。



$$\psi = \tan^{-1} \frac{\sin((1-N)\phi)}{((R/(EN)) - \cos((1-N)\phi))} \quad (13)$$

### 2.3 內擺線輪輪廓解析式

圖 5 是一個固定環齒型內擺線減速器的示意圖。求得接觸點的解析式與外擺線減速器使用的過程類似。基於針輪截圓的偏心，該機構使用一個旋轉角為  $\phi_2$  的曲柄  $\overline{O_1O_C}$  來表示輸入軸的偏心凸輪，使針輪繞著輸入軸中心  $O_1$  做行星運動。同時針輪與固定的內擺線輪的嚙合，針輪以其截圓圓心  $O_C$  自轉，旋轉角為  $\phi_3$ ，方向相反於公轉，並與內擺線輪接觸於 C 點。我們將三個構件編號，曲柄為桿 1，針輪為桿 2，擺線輪為桿 3。輸入軸桿 2 有角位移  $\phi_2$  和針輪桿 3 的位移坐標系有角位移  $\phi_3$ 。根據 Kennedy's 定理，我們可以確定三個瞬時速度中心，即旋轉對點  $O_1$  作為  $IC_{12}$ ，旋轉對點  $O_C$  作為  $IC_{23}$ ，接觸點 C 的共同法線與  $\overline{O_1O_C}$  相交於點 M 作為  $IC_{13}$ 。假設  $\overline{MC}$  長度 L，角  $\angle O_C O_1 M$  角度為  $\psi$ 。我們將輸入軸產生的偏心長度  $\overline{O_1O_C}$  表示為 E，令  $\overline{O_1M}$  為 Q，並將針輪截圓半徑  $\overline{O_1O_r}$  表示為 R。設計參數通常偏心距離，即曲柄長度 E，滾輪數 N，針輪截圓半徑 R 以及針輪滾子半徑  $R_r$ 。

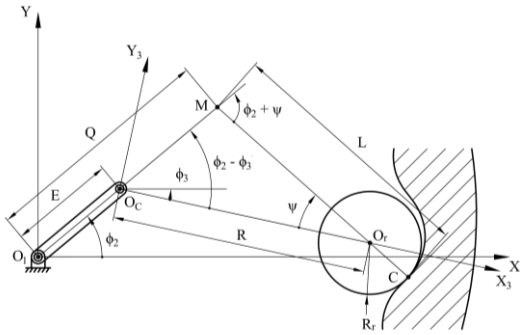


圖 5 固定環齒型內擺線減速器的示意圖

點  $O_C$  的速度  $V_{23}$  的大小可以由以下方式確定：

$$V_{23} = E \times d\phi_2 = (Q - E) \times d\phi_3 \quad (14)$$

與外擺線輪減速機有區別，太陽齒所需的齒數較針輪的滾子數多一。因此，輸出角速度除以輸入角速度定義的角速度比  $mV$  可以表示為：

$$mV = \frac{w_2}{w_3} = \frac{d\phi_2}{d\phi_3} = -\frac{1}{N} \quad (15)$$

由於  $\phi_2$  和  $\phi_3$  初始角度為 0，進一步將(15)式積分求得：

$$\frac{\phi_2}{\phi_3} = -\frac{1}{N} \quad (16)$$

根據等式(14)、(16)，我們可以確定假設距離 Q，如下所示：

$$Q = E(N+1) \quad (17)$$

根據從擺線輪移動座標原點到接觸點的向量路徑得出下列式子：

$$\overline{O_C C} = \overline{O_C M} + \overline{MO_r} + \overline{O_r C} = \overline{O_C M} + \overline{MC} \quad (18)$$

於式可以得到接觸點在擺線輪的坐標系下的解析式：

$$C_x = Q \cos(\phi_2) + L \cos(\phi_2 - (\phi_2 - \phi_3 + \psi)) \quad (19)$$

$$C_y = Q \sin(\phi_2) + L \sin(\phi_2 - (\phi_2 - \phi_3 + \psi)) \quad (20)$$

圖 6 中展示如何求得先前假設的未知數 L 和  $\psi$ ：

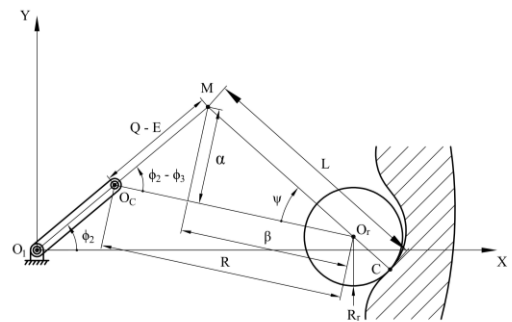


圖 6 L 與  $\psi$  示意圖

L 可由角  $\angle MO_1O_r$  求餘弦定理計算出：

$$L = \frac{\sqrt{R^2 + (Q - E)^2 - 2R(Q - E) \cos(\phi_2 - \phi_3)}}{-R_r} \quad (21)$$

而  $\psi$  可由角  $\angle O_C O_r M$  求正切值:

$$\begin{aligned} \psi &= \tan^{-1} \frac{\alpha}{\beta} \\ &= \tan^{-1} \frac{(Q - E) \sin(\phi_2 - \phi_3)}{R - (Q - E) \cos(\phi_2 - \phi_3)} \end{aligned} \quad (22)$$

擺線輪輪廓坐標系的旋轉角  $\phi_3$  等於身坐標系內輪廓的旋轉角度  $\phi$ ，將旋轉角  $\phi_3$  簡化成  $\phi$ ，代入等式 (16)、(17)，簡化 (19)、(20)、(21)、(22) 式得:

$$C_x = E \cos(N\phi)(N + 1) + L \cos(\phi - \psi) \quad (23)$$

$$C_y = -E \sin(N\phi)(N + 1) + L \sin(\phi - \psi) \quad (24)$$

$$L = \frac{\sqrt{R^2 + (EN)^2 - 2REN \cos((1 + N)\phi)}}{+ R_r} \quad (25)$$

$$\psi = \tan^{-1} \frac{-\sin((1 + N)\phi)}{((R/(EN)) - \cos((1 + N)\phi))} \quad (26)$$

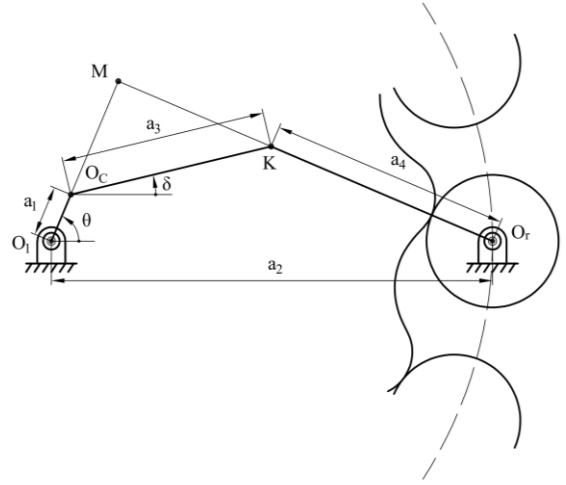
### 3. 擺線減速機等效連桿

#### 3.1 等效連桿

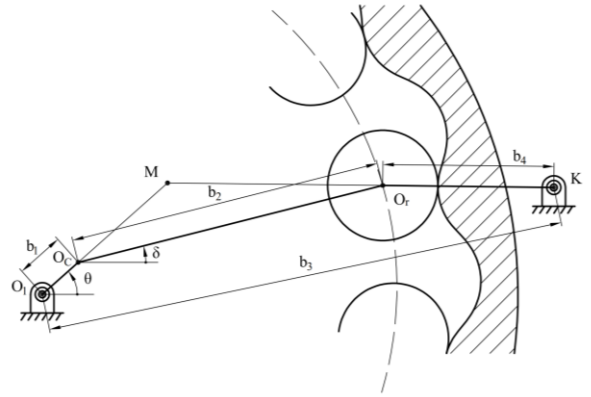
等效連桿將各種接觸型式減化為二接頭桿，若單個元件上有兩個旋轉對，可將旋轉對簡化成接頭，桿長即為旋轉對間的距離。而凸輪對每瞬間相當於兩圓在接觸點上滾動與滑動，所以接頭為二個曲率中心，桿長為接觸點之二個曲率半徑相加。

圖 7a 與圖 7b 為外擺線減速機與內擺線減速機之等效四連桿，四連桿有輸入角為輸入軸的旋轉角  $\theta$ ，以及輸出角  $\delta$ ，簡化凸輪對以及旋轉對為二節頭桿。曲柄輸入軸等效的二接頭桿，一端為輸入軸軸心  $O_1$ ，一端為輸入軸之偏心凸輪圓心  $O_C$ ，桿長分別為  $a_1$  和  $b_1$ 。第二個桿件接頭一端與針輪截圓圓心相接，一端為針輪滾子圓心  $O_r$ ，桿長分別為  $a_2$  和  $b_2$ 。第三個桿件為擺線輪輪廓中心到曲率中心  $K$ ，桿長分別為  $a_3$  和  $b_3$ 。最後的桿件為擺線輪曲率中心  $K$  到針輪滾子圓心

$O_r$ ，桿長分別為  $a_4$  和  $b_4$ 。



(a) 外擺線減速機等效連桿



(b) 內擺線減速機等效連桿

圖 7 擺線減速機等效連桿

桿長  $a_1$  和  $b_1$  為偏心率  $E$ ， $a_2$  和  $b_2$  為針輪截圓半徑  $R$ ，而  $a_3$  和  $b_3$  一端為針輪滾子圓心，一端與擺線輪輪廓曲率中心  $K$  相連接。外擺線減速機之點  $K$  位置在固定坐標系如下:

$$\overrightarrow{O_1 K} = \overrightarrow{O_1 O_r} + \overrightarrow{O_r K} \quad (27)$$

可得點  $K$  解析式如下:

$$K_{ax} = R - (R_r - R_c) \cos(\psi) \quad (28)$$

$$K_{ay} = (R_r - R_c)\sin(\psi) \quad (29)$$

可得出  $a_3$  桿長  $\overline{O_c K}$  如下:

$$\begin{aligned} \overline{O_c K} &= \left( K_{ax} - E\cos((1-N)\phi) \right)^2 \\ &+ \left( K_{ay} - E\sin((1-N)\phi) \right)^2 \end{aligned} \quad (30)$$

接下來求內擺線減速機擺線輪輪廓曲率中心 K，點 K 位置在固定坐標系如下:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{O_c K} &= \overrightarrow{O_c M} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CK} \\ &= \overrightarrow{O_1 M} + \overrightarrow{MK} - \overrightarrow{O_1 O_c} \end{aligned} \quad (31)$$

可得點 K 解析式如下:

$$\begin{aligned} K_{bx} &= Q\cos(\phi_2) \\ &+ (L - R_c)\cos(\phi_2 - (\phi_2 - \phi_3 + \psi)) \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} K_{by} &= Q\sin(\phi_2) \\ &+ (L - R_c)\sin(\phi_2 - (\phi_2 - \phi_3 + \psi)) \end{aligned} \quad (33)$$

於前所述擺線輪輪廓坐標系的旋轉角  $\phi_3$  等於身坐標系內輪廓的旋轉角度  $\phi$ ，將旋轉角  $\phi_3$  簡化成  $\phi$ 。代入等式(14)、(16)，簡化為:

$$\begin{aligned} K_{bx} &= E\cos(N\phi)(N+1) \\ &+ (L + R_c)\cos(\phi - \psi) \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} K_{by} &= -E\sin(N\phi)(N+1) \\ &+ (L + R_c)\sin(\phi - \psi) \end{aligned} \quad (35)$$

而  $b_3$  桿長  $\overline{O_1 K}$  如下:

$$\overline{O_1 K} = \sqrt{K_x^2 + K_y^2} \quad (36)$$

而  $a_4$  和  $b_4$  為凸輪對簡化，由擺線輪與針輪滾子接觸，其中針輪滾子為一圓，曲率半徑即為針輪滾子半徑  $R_f$ ，而擺線輪的曲率半徑可由先前求得的輪廓解析式求的， $a_4$  和  $b_4$  桿長為擺線輪的曲率半徑加上針輪半徑，曲率半徑  $R_c$ [8]由擺線輪輪廓解析式表示如下:

$$R_c = \frac{(C_x'^2 + C_y'^2)^{1.5}}{C_x'' \times C_y' - C_x' \times C_y''} \quad (37)$$

由與展開後解析式較為複雜與冗長，這邊交由軟體 MATLAB 計算，並不詳細描述於此。

### 3.5 位移方程式

在對等效連桿做誤差分析時，會需要用到四連桿的位移方程式，圖 7a 中能得到點 K 和點  $O_r$  位置:

$$K(a_1\cos\theta + a_3\cos\delta, a_1\sin\theta + a_3\sin\delta) \quad (38)$$

$$O_r(-a_2, 0) \quad (39)$$

對  $\overline{O_r K}$  做畢氏定理。推導出外擺線減速機的位移方程式如下:

$$\begin{aligned} |\overline{O_r K}|^2 &= a_4^2 = (a_1\cos\theta + a_3\cos\delta - a_2)^2 \\ &+ (a_1\sin\theta + a_3\sin\delta)^2 \end{aligned} \quad (40)$$

將式(40)展開並重新寫為:

$$F\sin\delta + G\cos\delta = H \quad (41)$$

其中 H、I、J 分別為:

$$H = 2a_1a_3\sin\theta \quad (42)$$

$$I = 2a_1a_3\cos\theta - 2a_2a_3 \quad (43)$$

$$J = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 - a_4^2 - 2a_1a_2\cos\theta \quad (44)$$

考慮每一輸入項誤差  $\Delta a_1$ 、 $\Delta a_2$ 、 $\Delta a_3$ 、 $\Delta a_4$ 、 $\Delta\theta$ ，以及輸出誤差  $\Delta\delta$ ，由於  $\Delta\delta$  極小，可有以下簡化:

$$\sin\Delta\delta = \Delta\delta \quad (45)$$

$$\cos\Delta\delta = 1 \quad (46)$$

將誤差項代入公式(41)並消除高次項，重新表示為:

$$\Delta\delta = \frac{-\Delta H\sin\delta - \Delta I\cos\delta + \Delta J}{H\cos\delta - I\sin\delta} \quad (47)$$

推導出內擺線減速機的位移方程式同外擺線減速機，圖 7b 中能得到點 K 和點  $O_r$  位置：

$$K(b_1 \cos \theta + b_2 \cos \delta, b_1 \sin \theta + b_2 \sin \delta) \quad (48)$$

$$O_r(K_{bx}, K_{by}) \quad (49)$$

圖 7b 中對  $\overline{O_r K}$  做畢氏定理，如下：

$$|\overline{O_r K}|^2 = b_4^2 = (b_1 \cos \theta + b_2 \cos \delta - K_{bx})^2 + (b_1 \sin \theta + b_2 \sin \delta - K_{by})^2 \quad (50)$$

將式(50)展開並重新寫為與式(41)(51)類似表達式：

$$U \sin \delta + V \cos \delta = W \quad (51)$$

，其中 H、I、J 分別為：

$$U = 2b_1 b_2 \sin \theta - 2b_2 K_{by} \quad (52)$$

$$V = 2b_1 b_2 \cos \theta - 2b_2 K_{bx} \quad (53)$$

$$W = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 - b_4^2 - 2b_1(K_{bx} \cos \theta + K_{by} \sin \theta) \quad (54)$$

將誤差項  $\Delta U$ 、 $\Delta V$ 、 $\Delta W$ ，以及輸出誤差  $\Delta \delta$ ，代入公式(51)：

$$(U + \Delta U) \sin(\delta + \Delta \delta) + (V + \Delta V) \cos(\delta + \Delta \delta) = (W + \Delta W) \quad (55)$$

由於  $\Delta \delta$  約等於 0：

$$\begin{aligned} \sin(\delta + \Delta \delta) &= \sin \delta \cos \Delta \delta + \sin \Delta \delta \cos \delta \\ &= \sin \delta + \Delta \delta \cos \delta \end{aligned} \quad (56)$$

$$\begin{aligned} \cos(\delta + \Delta \delta) &= \cos \delta \cos \Delta \delta - \sin \Delta \delta \sin \delta \\ &= \cos \delta + \Delta \delta \sin \delta \end{aligned} \quad (57)$$

簡化公式(55)、消除高次項並與公式(51)相減，重新整理後可得：

$$\Delta \delta = \frac{-\Delta U \sin \delta - \Delta V \cos \delta + \Delta W}{U \cos \delta - V \sin \delta} \quad (58)$$

## 4. 實例分析

### 4.1 外擺線減速機

給定外擺線減速機設計參數，偏心距離  $E = 5 \text{ mm}$ ，滾輪數  $N = 15$ ，針輪截圓半徑  $R = 120 \text{ mm}$  以及針輪滾子半徑  $R_r = 18 \text{ mm}$ 。圖 8 和圖 9 分別為擺線輪輪廓、擺線輪一齒之曲率半徑：

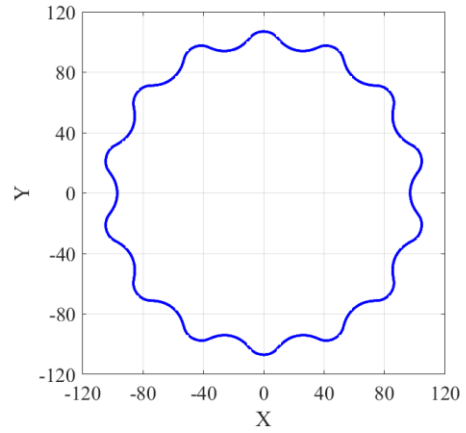


圖 8 外擺線輪輪廓

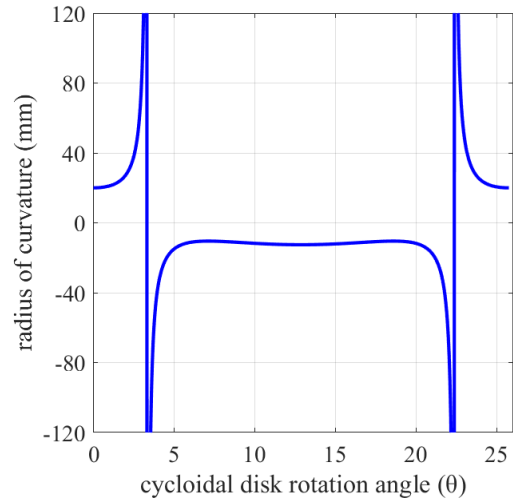


圖 9 外擺線輪一齒之曲率半徑

圖 9a 中可見擺線輪輪廓有時向擺線輪中心內凹，曲率中心於輪廓外，此時曲率半徑定義為負，有時向擺線輪輪廓外凹，曲率中心於輪廓內，此時曲率半徑定義為正，因此內凹輪廓與外凹輪廓相接必有反

曲點產生，此時如圖 9b 表示曲率半徑會到無限大。

通常外擺線減速機主要誤差來源源自圖 7a 中曲率半徑誤差加上針輪半徑誤差的和 $\Delta a_4$ ， $\Delta a_4$ 又可細分為 $\Delta R_C$ 和 $\Delta R_f$ ，所造成的誤差和 $\Delta \delta_t$ 如下：

$$\Delta \delta_t = \frac{a_4 \Delta R_C + a_4 \Delta R_f}{H \cos \delta - I \sin \delta} \quad (59)$$

圖 10 為假設輸出誤差 $\Delta R_C$ 為 0.01 mm、 $\Delta R_f$ 同為 0.01 mm 之計算結果：

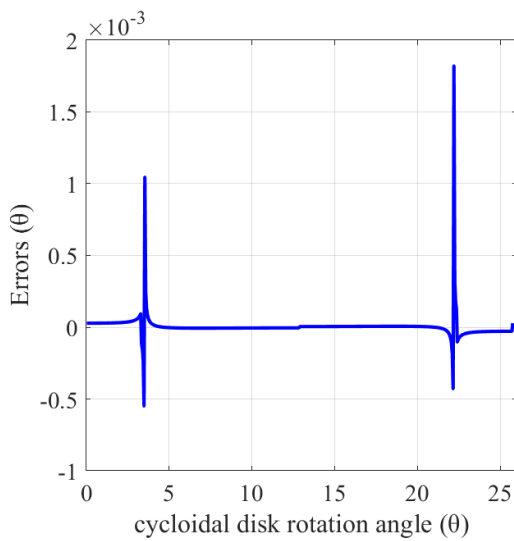


圖 10 一齒之誤差結果

由圖可見，如曲率半徑相同，在反曲點附近會使誤差變的相當大。

## 5. 結論

本研究重新推導了內擺線與外擺線輪廓的解析式，並且求得了輪廓曲率半徑與曲率中心，使設計上更為簡便。誤差分析方面使用了等效連桿來計算，以免去額外設計軟體亦或是使用複雜方程式計算加工誤差對擺線減速機所帶來的影響，僅需使用一般數學計算即可表達與呈現擺線輪設計參數與加工誤差對機構運動所帶來的變化，簡化實際運用上的繁瑣程序，增進效率與準確度。

誤差分析結果來看，靠近反曲點位置之誤差會迅速變大，但同一瞬間其他齒的接觸於其他角度，急速增大之部分對總體運動影響仍未分析解釋，未來將會

從在反曲點附近的地方著手，以進一步解決分析困難的部分。

## 誌謝

感謝教授與實驗室學長姐的慷慨協助，在理論推導與呈現方式上提供寶貴建議。

## 參考文獻

- [1] D.W. Botsiber, L. Kingston, Design and performance of the cycloid speed reducer, *Machine Design* 28, pp. 65–69, 1956.
- [2] S.K. Malhotra, M.A. Parameswaran, Analysis of a cycloid speed reducer, *Mechanism and Machine Theory* 18 (6), pp. 491–499, 1983.
- [3] J.G. Blanche, D.C.H. Yang, Cycloid drives with machining tolerances, *ASME Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design* 111, pp. 337–344, 1989.
- [4] Joong-Ho Shin, Soon-Man Kwon. On the lobe profile design in a cycloid reducer using instant velocity center. *Mechanism and Machine Theory* 41, pp. 596–616, 2006.
- [5] Wen-Tung Chang, Dr. Long-long Wu, Analysis of Mechanical Errors in Planar Cam Mechanism and Its Applications, Department of Power Mechanical Engineering, National Tsing Hua University, 2007.
- [6] J.E. Shigley, J.J. Uicker Jr., Theory and Machines and Mechanisms, McGraw-Hill, 1980.
- [7] E.P. Pollitt, Some applications of the cycloid machine design, *ASME Journal of Engineering for Industry* 82, pp. 407–414, 1960.
- [8] Wilson, C.E. and Sadler, J.P. Kinematics and Dynamics of Machinery. 3rd Edition (Int. Edition). Prentice-Hall, pp. 383–387, 2003.