

# 盤形凸輪輪廓及其加工刀具路徑之解析計算法

吳隆庸\* (教授)      張文桐 (博士班研究生)

國立清華大學動力機械工程學系

\*聯絡作者：電話 03-5715131 轉 33754；傳真 03-5722840；電子郵件網址 liwu@pme.nthu.edu.tw

## 摘要

本文利用速度瞬心的觀念，說明如何推導並完整列示出單片式盤形凸輪與共軛式盤形凸輪之所有相關參數方程式。選定凸輪系統的相關條件、從動件的尺寸及從動件運動曲線函數後，即可定出凸輪與從動件的瞬心位置；由瞬心的位置即可定出凸輪與從動件的接觸點，並藉以導出單片式凸輪及共軛式凸輪之凸輪節曲線的向量方程式、壓力角的方程式、凸輪輪廓的向量方程式以及加工凸輪之刀具的中心點相對於凸輪的運動路徑曲線方程式。對於各種單片式與共軛式的盤形凸輪機構，本文除推導、列述這些方程式外，並分別以實例繪圖說明所得到的凸輪輪廓。

**關鍵詞：**凸輪輪廓、刀具中心點、盤形凸輪、共軛凸輪、速度瞬心、向量參數方程式。

## 1. 前言

凸輪機構的主要功能在於使其從動件產生預定的不規則拘束運動。為了達成此目的，從動件與凸輪必須隨時保持接觸；因此單片式凸輪常使用回動彈簧 (return spring)，而共軛凸輪 (conjugate cam) 則藉由凸輪和從動件在任一時刻均有兩個接觸點以達成從動件與凸輪隨時保持接觸的效果。此外，共軛凸輪機構常會設法施加適當預負荷 (preload) 以提高機構的剛性[1]，而且它又不必使用回動彈簧而不必承受彈簧力；因此，適當設計且精確加工之共軛凸輪機構的轉速可比單片式凸輪機構提高許多。所以有些產業機械若其提高轉速的瓶頸是凸輪機構時，便可以將其慣用的單片式凸輪改用共軛式凸輪，以有效提高機械轉速及其附加價值。

當凸輪輪廓的製造誤差超過容許量時，將會影響其從動件的定位精度與機構的動態特性。因此，為了確保凸輪機構在高速運轉的過程中能使其從動件的位置達到預定的精確度並降低機械的振動、噪音，凸輪輪廓必須精確地加工，因而凸輪輪廓及其加工刀具中心點的運動路徑均必須在設計的階段中以解析法精確地計算。

早期的盤形凸輪輪廓設計，乃是利用運動倒置 (kinematic inversion) 來決定出從動件在每一凸輪旋轉角度下相對於凸輪的位置，並以作圖法將凸輪的輪廓繪出[2-10]。但使用作圖法進行凸輪設計時，通常無法得到精確的輪廓，更無法避免地在後續的加工時出現相當程度的製造誤差。Hanson 與 Churchill [11]利用包絡線理論 (theory of envelope)

以解析法計算盤形凸輪輪廓；至今相關的教科書也大多仍採用包絡線的觀念以計算盤形凸輪輪廓[5-10]。然而，利用包絡線理論計算凸輪輪廓時必須解聯立方程式，所以方程式的推導過程相當繁雜；尤其是加工凸輪之刀具的尺寸若和從動件的尺寸不相同時，其刀具的運動路徑更是難以精確地規劃。

本文利用平面機構之速度瞬心的觀念，說明如何定出盤形凸輪與從動件的瞬心位置以及如何進一步地定出凸輪與從動件的接觸點，並藉以導出單片式凸輪及共軛式凸輪之凸輪節曲線的向量方程式、凸輪輪廓曲線的向量方程式、壓力角的方程式以及加工凸輪之刀具的中心點相對於凸輪的運動路徑曲線方程式[12, 13]；且這些式子均以參數方程式的形式簡明地表示。

## 2. 平面機構的瞬心

利用速度瞬心的觀念並採用平面向量表示法，可求得盤形凸輪節曲線、凸輪輪廓、凸輪壓力角及加工凸輪之銑刀（或磨輪）中心點路徑等各種相關方程式。在此先簡要地說明平面機構的瞬心及其求取步驟。

一個平面機構中的任意兩個桿件（ $i$  和  $j$ ）在任一時刻皆有一共同點，且這個共同點在兩個桿件上的線速度相同，這個共同點稱為此二桿件的瞬心，以  $I_{ij}$  表示之；一個具有  $N$  個桿件的機構有  $N(N-1)/2$  個瞬心。平面凸輪機構的各個瞬心位置可由此定義並藉由三心定理（Aronhold-Kennedy theorem）決定。如圖 1 所示的三桿機構，瞬心  $I_{12}$  及  $I_{13}$  分別為固定軸樞，而瞬心  $I_{23}$  則位於桿 2 和桿 3 之接觸點  $A$  的公法線（ $n-n$ ）與軸心線  $I_{12}I_{13}$  的交點上。上述的瞬心觀念可應用於盤形凸輪機構的運動分析及設計。

盤形凸輪機構有機架（桿件 1）、凸輪（桿件 2）及從動件（桿件 3）等三個桿件，因此它有三個瞬心  $I_{12}$ 、 $I_{13}$  及  $I_{23}$ 。瞬心  $I_{12}$  為凸輪固定軸樞，瞬心  $I_{13}$  為從動件固定軸樞，這兩個瞬心位置均可由觀察法決定；而瞬心  $I_{23}$  則在凸輪和從動件之接觸點的公法線與軸心線  $I_{12}I_{13}$  的交點上。相對地，若從相關的設計條件，由從動件的位置及速度也可以決定瞬心  $I_{23}$  的位置，並藉由從動件的位置及瞬心  $I_{23}$  的位置來決定凸輪的輪廓。

對於共軛凸輪機構而言，亦具有機架（桿件 1）、凸輪（桿件 2）及從動件（桿件 3）等三個桿件；所不同之處在於其凸輪和從動件在任一時刻均具有兩個接觸點，以使從動件產生拘束運動，而且不須使用回動彈簧即可使從動件與凸輪保持接觸。如圖 2 所示具有兩個接觸點的三桿機構若欲產生拘束運動，則由於瞬心  $I_{23}$  會位於桿 2 和桿 3 之接觸點的公法線與軸心線  $I_{12}I_{13}$  的交點上，所以該兩條公法線（ $n-n$  與  $n'-n'$ ）與軸心線  $I_{12}I_{13}$  在任一時刻必須同時交於瞬心  $I_{23}$  之上。若違反此三條線（兩條公法線與軸心線）必須相交於瞬心點的條件，將會導致瞬心  $I_{23}$  不唯一的情況發生，致使得凸輪和從動件之間出現過度拘束而無法產生相對運動。對於共軛凸輪機構而言，由於其凸輪和從動件在任一時刻均具有兩個接觸點，所以其兩個接觸點的公法線與軸心線在任一時刻也必須同時交於瞬心  $I_{23}$  之上。藉由此三條線必須相交於瞬心點的條件之特殊的幾何條件之滿足，便可以簡易地決定共軛凸輪的輪廓。

（比較：其實有固定軸樞之兩個圓形齒輪互相嚙合時也常會有兩個接觸點，且其兩個接觸點的公法線與軸心線在任一時刻也必須同時交於軸心線上的一個固定點；此固定點即齒輪傳動基本定律中所謂的節點，而此節點也就是上述的瞬心  $I_{23}$ 。在凸輪機構中，此瞬心  $I_{23}$  的位置會隨著凸輪的旋轉而變動；但在齒輪機構中，此瞬心  $I_{23}$  的位置卻一直固定不動。）

以下分別針對各種盤形凸輪機構，說明如何以上述的方式決定凸輪與從動件的瞬心位置以及如何定出凸輪與從動件的接觸點，並藉以導出凸輪節曲線、凸輪輪廓、壓力角及銑刀（或磨輪）中心點路徑的方程式。

### 3. 平移式徑向滾子型從動件凸輪輪廓

#### 3.1. 單片式凸輪

如圖 3 所示的盤形凸輪機構，定一座標系  $O_2$ -XY 固定於凸輪上，座標原點  $O_2$  與凸輪之旋轉軸心重合， $\theta$  為凸輪的角位移；機架、凸輪及從動件之三個瞬心  $I_{12}$ 、 $I_{13}$  和  $I_{23}$  的位置分別如圖上所示。若 Q 點代表瞬心  $I_{23}$  且  $O_2Q = q$ ，則在凸輪上之 Q 點的速率可表示為

$$V_Q = q\omega_2 \quad (1)$$

其中  $\omega_2$  為凸輪轉速。因為從動件為平移運動，所以從動件上所有點的速度均相同；因此在從動件上之 Q 點的速率可表示為

$$V_Q = \frac{dL(\theta)}{dt} = \frac{dL(\theta)}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{dL(\theta)}{d\theta} \omega_2 \quad (2)$$

其中  $L(\theta)$  為從動件位置函數

$$L(\theta) = r_b + r_f + S(\theta) \quad (3)$$

其中  $r_b$  為凸輪基圓半徑， $r_f$  為從動滾子半徑， $S(\theta)$  為從動件運動曲線函數。根據瞬心的定義，桿件 2（凸輪）與桿件 3（從動件）在瞬心  $I_{23}$  上的點具有相同的線速度，而 Q 點為瞬心  $I_{23}$ ，所以比較(1)、(2)兩式可得

$$q = \frac{dL(\theta)}{d\theta} = \frac{dS(\theta)}{d\theta} = V(\theta) \quad (4)$$

其中  $V(\theta)$  即為從動件速度函數。只要選定  $r_b$ 、 $r_f$  值及  $S(\theta)$  函數後，對任意  $\theta$  參數值均可由  $L(\theta)$  定出對應 C 點的位置，並由(4)式求得  $q$  值而定出對應瞬心 Q 點的位置；而 CQ 與從動滾子圓的交點 A 即為凸輪與從動滾子的接觸點，也就是凸輪輪廓的對應點。

由於壓力角乃接觸點的公法線（CQ）與從動件運動方向（ $CO_2$ ）的夾角，因此由  $\triangle O_2CQ$ ，壓力角  $\phi$  可表示為

$$\phi = \tan^{-1} \left[ \frac{q}{L(\theta)} \right] = \tan^{-1} \left[ \frac{V(\theta)}{L(\theta)} \right] \quad (5)$$

因此，凸輪輪廓之向量參數方程式可表示為

$$\mathbf{O}_2\mathbf{A} = \mathbf{O}_2\mathbf{C} + \mathbf{CA} \quad (6)$$

其中  $\mathbf{O}_2\mathbf{C}$  為凸輪節曲線

$$\mathbf{O}_2\mathbf{C} = L(\theta)\cos\theta \mathbf{i} + L(\theta)\sin\theta \mathbf{j} \quad (7)$$

$$\mathbf{CA} = r_f \cos(\theta + 180^\circ - \phi) \mathbf{i} + r_f \sin(\theta + 180^\circ - \phi) \mathbf{j} \quad (8)$$

凸輪輪廓之向量參數方程式亦可表示為

$$\mathbf{O}_2\mathbf{A} = x_A(\theta) \mathbf{i} + y_A(\theta) \mathbf{j} \quad (9)$$

其中

$$x_A(\theta) = L(\theta)\cos\theta - r_f \cos(\theta - \phi) \quad (10)$$

$$y_A(\theta) = L(\theta)\sin\theta - r_f \sin(\theta - \phi) \quad (11)$$

此外，由於凸輪與從動滾子之接觸點的公法線必須通過銑刀（或磨輪）的中心點，由 A 點在其公法線方向上往外延伸銑刀半徑  $r_c$  的距離，即得出銑刀中心點 G 的位置，其向量參數方程式可表示為

$$\mathbf{O}_2\mathbf{G} = \mathbf{O}_2\mathbf{C} + \mathbf{CG} \quad (12)$$

其中  $\mathbf{O}_2\mathbf{C}$  如(7)式所示，而

$$\mathbf{CG} = (r_c - r_f)\cos(\theta - \phi)\mathbf{i} + (r_c - r_f)\sin(\theta - \phi)\mathbf{j} \quad (13)$$

圖 3 所示的凸輪輪廓就是以上述向量參數方程式所繪出。此凸輪之基圓半徑  $r_b$  為 40 mm，從動滾子之半徑  $r_f$  為 10 mm。當凸輪的角位移為  $0^\circ \sim 120^\circ$  時，從動件以擺線運動曲線上升 24 mm；當凸輪的角位移為  $120^\circ \sim 170^\circ$  時，從動件暫停；當凸輪的角位移為  $170^\circ \sim 290^\circ$  時，從動件以擺線運動曲線下降 24 mm；當凸輪的角位移為  $290^\circ \sim 360^\circ$  時，從動件暫停。

### 3.2. 共軛式凸輪

如圖 4 所示的共軛凸輪機構，凸輪 A 和凸輪 B 均固接於同一旋轉軸上，且可視為同一剛體（桿件 2）；滾子 C 和滾子 D 則安裝於同一從動件（桿件 3）上，且分別與凸輪 A 和凸輪 B 相接觸。同樣定座標系  $O_2$ -XY 固定於凸輪 A 上，並標示出瞬心  $I_{12}$ 、 $I_{13}$  和  $I_{23}$  的位置分別如圖上所示。若 Q 點代表瞬心  $I_{23}$  且  $O_2Q = q$ ，由(1~3)式可知

$$q = \frac{dL(\theta)}{d\theta} = \frac{dS(\theta)}{d\theta} = V(\theta) \quad (14)$$

由於凸輪 A 之壓力角乃接觸點的公法線（CQ）與從動件運動方向（ $CO_2$ ）的夾角，因此由  $\triangle O_2CQ$ ，壓力角  $\phi_A$  可表示為

$$\phi_A = \tan^{-1} \left[ \frac{q}{L(\theta)} \right] = \tan^{-1} \left[ \frac{V(\theta)}{L(\theta)} \right] \quad (15)$$

因此，凸輪 A 之輪廓的向量參數方程式可表示為

$$\mathbf{O}_2\mathbf{A} = \mathbf{O}_2\mathbf{C} + \mathbf{CA} \quad (16)$$

其中  $\mathbf{O}_2\mathbf{C}$  為凸輪 A 之節曲線

$$\mathbf{O}_2\mathbf{C} = L(\theta)\cos\theta\mathbf{i} + L(\theta)\sin\theta\mathbf{j} \quad (17)$$

$$\mathbf{CA} = r_f \cos(\theta + 180^\circ - \phi_A)\mathbf{i} + r_f \sin(\theta + 180^\circ - \phi_A)\mathbf{j} \quad (18)$$

由於滾子 C 和滾子 D 的中心點距離為一選定的常數，且  $CD = d$ ，所以當 C 點的位置被決定後，D 點的位置亦隨之被決定。因此由  $\triangle O_2DQ$ ，凸輪 B 之壓力角  $\phi_B$  可表示為

$$\phi_B = \tan^{-1} \left[ \frac{q}{d - L(\theta)} \right] = \tan^{-1} \left[ \frac{V(\theta)}{d - L(\theta)} \right] \quad (19)$$

因此，凸輪 B 之輪廓的向量參數方程式可表示為

$$\mathbf{O}_2\mathbf{B} = \mathbf{O}_2\mathbf{D} + \mathbf{DB} \quad (20)$$

其中  $\mathbf{O}_2\mathbf{D}$  為凸輪 B 之節曲線

$$\mathbf{O}_2\mathbf{D} = [d - L(\theta)]\cos(\theta + 180^\circ)\mathbf{i} + [d - L(\theta)]\sin(\theta + 180^\circ)\mathbf{j} \quad (21)$$

$$\mathbf{DB} = r_f \cos(\theta + \phi_B)\mathbf{i} + r_f \sin(\theta + \phi_B)\mathbf{j} \quad (22)$$

此外，由 A 點在其公法線方向上往外延伸銑刀半徑  $r_c$  的距離，即得出加工凸輪 A 之銑刀中心點 G 的位置，所以其向量參數方程式可表示為

$$\mathbf{O}_2\mathbf{G} = \mathbf{O}_2\mathbf{C} + \mathbf{CG} \quad (23)$$

其中  $\mathbf{O}_2\mathbf{C}$  如(17)式所示，而

$$\mathbf{CG} = (r_c - r_f)\cos(\theta - \phi_A)\mathbf{i} + (r_c - r_f)\sin(\theta - \phi_A)\mathbf{j} \quad (24)$$

同理，加工凸輪 B 之銑刀中心點 H 的向量參數方程式可表示為

$$\mathbf{O}_2\mathbf{H} = \mathbf{O}_2\mathbf{D} + \mathbf{DH} \quad (25)$$

其中  $\mathbf{O}_2\mathbf{D}$  如(21)式所示，而

$$\mathbf{DH} = (r_c - r_f)\cos(\theta + 180^\circ + \phi_B)\mathbf{i} + (r_c - r_f)\sin(\theta + 180^\circ + \phi_B)\mathbf{j} \quad (26)$$

圖 4 所示的兩共軛凸輪輪廓就是以上述向量參數方程式所繪出。凸輪 A 之基圓半徑  $r_b$  為 40 mm，兩從動滾子之半徑  $r_f$  均為 10 mm，兩滾子之中心點距離  $d$  為 124 mm。當凸輪的角位移為  $0^\circ \sim 120^\circ$  時，從動件以擺線運動曲線上升 20 mm；當凸輪的角位移為  $120^\circ \sim 170^\circ$  時，從動件暫停；當凸輪的角位移為  $170^\circ \sim 290^\circ$  時，從動件以擺線運動曲線下降 20 mm；當凸輪的角位移為  $290^\circ \sim 360^\circ$  時，從動件暫停。

## 4. 平移式偏位滾子型從動件凸輪輪廓

### 4.1. 單片式凸輪

如圖 5 所示的盤形凸輪機構，此機構的從動件具有偏位距離  $e$ 。同樣定座標系  $\mathbf{O}_2\text{-XY}$  固定於凸輪上，並標示出瞬心  $I_{12}$ 、 $I_{13}$  和  $I_{23}$  的位置分別如圖上所示。若 Q 點代表瞬心  $I_{23}$  且  $\mathbf{O}_2\mathbf{Q} = q$ ，則

$$q = \frac{dL(\theta)}{d\theta} = \frac{dS(\theta)}{d\theta} = V(\theta) \quad (27)$$

其中從動件位置函數  $L(\theta)$  可表示為

$$L(\theta) = \sqrt{(r_b + r_f)^2 - e^2} + S(\theta) \quad (28)$$

因此只要選定  $r_b$ 、 $r_f$ 、 $e$  值及  $S(\theta)$  函數後，對任意  $\theta$  參數值均可由  $L(\theta)$  定出對應 C 點的位置，並由(27)式求得  $q$  值而定出對應瞬心 Q 點的位置。

由  $\triangle ECQ$ ，壓力角  $\phi$  可表示為

$$\phi = \tan^{-1} \left[ \frac{q - e}{L(\theta)} \right] = \tan^{-1} \left[ \frac{V(\theta) - e}{L(\theta)} \right] \quad (29)$$

因此，凸輪輪廓之向量參數方程式可表示為

$$\mathbf{O}_2\mathbf{A} = \mathbf{O}_2\mathbf{E} + \mathbf{EC} + \mathbf{CA} \quad (30)$$

其中

$$\mathbf{O}_2\mathbf{E} = e\cos(\theta + 90^\circ)\mathbf{i} + e\sin(\theta + 90^\circ)\mathbf{j} \quad (31)$$

$$\mathbf{EC} = L(\theta)\cos\theta\mathbf{i} + L(\theta)\sin\theta\mathbf{j} \quad (32)$$

$$\mathbf{CA} = r_f\cos(\theta + 180^\circ - \phi)\mathbf{i} + r_f\sin(\theta + 180^\circ - \phi)\mathbf{j} \quad (33)$$

$\mathbf{O}_2\mathbf{C} = \mathbf{O}_2\mathbf{E} + \mathbf{EC}$  為凸輪節曲線；而銑刀中心點 G 的位置向量參數方程式為

$$\mathbf{O}_2\mathbf{G} = \mathbf{O}_2\mathbf{E} + \mathbf{EC} + \mathbf{CG} \quad (34)$$

其中  $\mathbf{O}_2\mathbf{E}$  及  $\mathbf{EC}$  分別如(31)、(32)兩式所示，而

$$\mathbf{CG} = (r_c - r_f)\cos(\theta - \phi)\mathbf{i} + (r_c - r_f)\sin(\theta - \phi)\mathbf{j} \quad (35)$$

圖 5 所示的凸輪輪廓就是以上述向量參數方程式所繪出。此凸輪之基圓半徑  $r_b$  為 40 mm，從動件偏位距離  $e$  為 12 mm，從動滾子之半徑  $r_f$  為 10 mm。當凸輪的角位移為  $0^\circ \sim 100^\circ$  時，從動件以擺線運動曲線上升 24 mm；當凸輪的角位移為  $100^\circ \sim 150^\circ$  時，從動件暫停；當凸輪的角位移為  $150^\circ \sim 250^\circ$  時，從動件以擺線運動曲線下降 24 mm；當凸輪的角位移為  $250^\circ \sim 360^\circ$  時，從動件暫停。

#### 4.2. 共軛式凸輪

如圖 6 所示的共軛凸輪機構，凸輪 A 和凸輪 B 均固接於同一旋轉軸上，且可視為同一剛體（桿件 2）；滾子 C 和滾子 D 則安裝於同一從動件（桿件 3）上，且分別與凸輪 A 和凸輪 B 相接觸。同樣定座標系  $O_2\text{-}XY$  固定於凸輪 A 上，並標示出瞬心  $I_{12}$ 、 $I_{13}$  和  $I_{23}$  的位置分別如圖上所示。若 Q 點代表瞬心  $I_{23}$  且  $O_2Q = q$ ，則

$$q = \frac{dL(\theta)}{d\theta} = \frac{dS(\theta)}{d\theta} = V(\theta) \quad (36)$$

由於凸輪 A 之壓力角乃接觸點的公法線（CQ）與從動件運動方向（CE）的夾角，因此由  $\triangle ECQ$ ，壓力角  $\phi_A$  可表示為

$$\phi_A = \tan^{-1}\left[\frac{q-e}{L(\theta)}\right] = \tan^{-1}\left[\frac{V(\theta)-e}{L(\theta)}\right] \quad (37)$$

因此，凸輪 A 之輪廓的向量參數方程式可表示為

$$\mathbf{O}_2\mathbf{A} = \mathbf{O}_2\mathbf{E} + \mathbf{EC} + \mathbf{CA} \quad (38)$$

其中

$$\mathbf{O}_2\mathbf{E} = e\cos(\theta + 90^\circ)\mathbf{i} + e\sin(\theta + 90^\circ)\mathbf{j} \quad (39)$$

$$\mathbf{EC} = L(\theta)\cos\theta\mathbf{i} + L(\theta)\sin\theta\mathbf{j} \quad (40)$$

$$\mathbf{CA} = r_f\cos(\theta + 180^\circ - \phi_A)\mathbf{i} + r_f\sin(\theta + 180^\circ - \phi_A)\mathbf{j} \quad (41)$$

由於滾子 C 和滾子 D 的中心點距離為一選定的常數，且  $CD = d$ ，所以當 C 點的位置被決定時，D 點的位置亦隨之被決定。因此由  $\triangle EDQ$ ，凸輪 B 之壓力角  $\phi_B$  可表示為

$$\phi_B = \tan^{-1}\left[\frac{q-e}{d-L(\theta)}\right] = \tan^{-1}\left[\frac{V(\theta)-e}{d-L(\theta)}\right] \quad (42)$$

因此，凸輪 B 之輪廓的向量參數方程式可表示為

$$\mathbf{O}_2\mathbf{B} = \mathbf{O}_2\mathbf{E} + \mathbf{ED} + \mathbf{DB} \quad (43)$$

其中  $\mathbf{O}_2\mathbf{E}$  如(39)式所示，而

$$\mathbf{ED} = [d - L(\theta)]\cos(\theta + 180^\circ)\mathbf{i} + [d - L(\theta)]\sin(\theta + 180^\circ)\mathbf{j} \quad (44)$$

$$\mathbf{DB} = r_f \cos(\theta + \phi_B)\mathbf{i} + r_f \sin(\theta + \phi_B)\mathbf{j} \quad (45)$$

此外，加工凸輪 A 之銑刀中心點 G 的位置向量參數方程式為

$$\mathbf{O}_2\mathbf{G} = \mathbf{O}_2\mathbf{E} + \mathbf{EC} + \mathbf{CG} \quad (46)$$

其中  $\mathbf{O}_2\mathbf{E}$  及  $\mathbf{EC}$  分別如(39)、(40)兩式所示，而

$$\mathbf{CG} = (r_c - r_f)\cos(\theta - \phi_A)\mathbf{i} + (r_c - r_f)\sin(\theta - \phi_A)\mathbf{j} \quad (47)$$

同理，加工凸輪 B 之銑刀中心點 H 的向量參數方程式可表示為

$$\mathbf{O}_2\mathbf{H} = \mathbf{O}_2\mathbf{E} + \mathbf{ED} + \mathbf{DH} \quad (48)$$

其中  $\mathbf{O}_2\mathbf{E}$  及  $\mathbf{ED}$  分別如(39)、(44)兩式所示，而

$$\mathbf{DH} = (r_c - r_f)\cos(\theta + 180^\circ + \phi_B)\mathbf{i} + (r_c - r_f)\sin(\theta + 180^\circ + \phi_B)\mathbf{j} \quad (49)$$

圖 6 所示的兩共軛凸輪輪廓就是以上述向量參數方程式所繪出。凸輪 A 之基圓半徑  $r_b$  為 40 mm，從動件偏位距離  $e$  為 12 mm，兩從動滾子之半徑  $r_f$  均為 10 mm，兩滾子之中心點距離  $d$  為 113 mm。當凸輪的角位移為  $0^\circ \sim 100^\circ$  時，從動件以擺線運動曲線上升 20 mm；當凸輪的角位移為  $100^\circ \sim 150^\circ$  時，從動件暫停；當凸輪的角位移為  $150^\circ \sim 250^\circ$  時，從動件以擺線運動曲線下降 20 mm；當凸輪的角位移為  $250^\circ \sim 360^\circ$  時，從動件暫停。

## 5. 平移式平面型從動件凸輪輪廓

### 5.1. 單片式凸輪

如圖 7 所示的盤形凸輪機構，從動件的平面與凸輪輪廓保持相切。同樣定座標系  $\mathbf{O}_2\text{-XY}$  固定於凸輪上，並標示出瞬心  $I_{12}$ 、 $I_{13}$  和  $I_{23}$  的位置分別如圖上所示。若 Q 點代表瞬心  $I_{23}$  且  $\mathbf{O}_2\mathbf{Q} = q$ ，則

$$q = \frac{dL(\theta)}{d\theta} = \frac{dS(\theta)}{d\theta} = V(\theta) \quad (50)$$

其中從動件位置函數  $L(\theta)$  可表示為

$$L(\theta) = r_b + S(\theta) \quad (51)$$

因此只要選定  $r_b$  值及  $S(\theta)$  函數後，對任意  $\theta$  參數值均可由  $L(\theta)$  定出對應 A 點的高度，並由(50)式求得  $q$  值而定出對應瞬心 Q 點的位置。因此，凸輪輪廓之向量參數方程式可表示為

$$\mathbf{O}_2\mathbf{A} = \mathbf{O}_2\mathbf{Q} + \mathbf{QA} \quad (52)$$

其中

$$\mathbf{O}_2\mathbf{Q} = q \cos(\theta + 90^\circ)\mathbf{i} + q \sin(\theta + 90^\circ)\mathbf{j} \quad (53)$$

$$\mathbf{QA} = L(\theta)\cos\theta \mathbf{i} + L(\theta)\sin\theta \mathbf{j} \quad (54)$$

而銑刀中心點 G 的位置向量參數方程式為

$$\mathbf{O}_2\mathbf{G} = \mathbf{O}_2\mathbf{Q} + \mathbf{QG} \quad (55)$$

其中  $\mathbf{O}_2\mathbf{Q}$  如(53)式所示，而

$$\mathbf{QG} = [L(\theta) + r_c]\cos\theta \mathbf{i} + [L(\theta) + r_c]\sin\theta \mathbf{j} \quad (56)$$

圖 7 所示的凸輪輪廓就是以上述向量參數方程式所繪出。此凸輪之基圓半徑  $r_b$  為 40 mm。當凸輪的角位移為  $0^\circ \sim 120^\circ$  時，從動件以擺線運動曲線上升 22 mm；當凸輪的角位移為  $120^\circ \sim 190^\circ$  時，從動件暫停；當凸輪的角位移為  $190^\circ \sim 290^\circ$  時，從動件以擺線運動曲線下降 20 mm；當凸輪的角位移為  $250^\circ \sim 360^\circ$  時，從動件暫停。

## 5.2. 共軛式凸輪

如圖 8 所示的共軛凸輪機構，凸輪 A 和凸輪 B 均固接於同一旋轉軸上，且可視為同一剛體（桿件 2）；從動件（桿件 3）的兩平面分別與凸輪 A 和凸輪 B 保持相切。同樣定座標系  $\mathbf{O}_2\text{-XY}$  固定於凸輪 A 上，並標示出瞬心  $I_{12}$ 、 $I_{13}$  和  $I_{23}$  的位置分別如圖上所示。若 Q 點代表瞬心  $I_{23}$  且  $\mathbf{O}_2\mathbf{Q} = q$ ，則

$$q = \frac{dL(\theta)}{d\theta} = \frac{dS(\theta)}{d\theta} = V(\theta) \quad (57)$$

其中  $L(\theta)$  如(51)式所示。因此，凸輪 A 之輪廓的向量參數方程式可表示為

$$\mathbf{O}_2\mathbf{A} = \mathbf{O}_2\mathbf{Q} + \mathbf{QA} \quad (58)$$

其中

$$\mathbf{O}_2\mathbf{Q} = q\cos(\theta + 90^\circ)\mathbf{i} + q\sin(\theta + 90^\circ)\mathbf{j} \quad (59)$$

$$\mathbf{QA} = L(\theta)\cos\theta \mathbf{i} + L(\theta)\sin\theta \mathbf{j} \quad (60)$$

由於從動件的寬度  $d$  為一選定的常數，所以凸輪 B 之輪廓的向量參數方程式可表示為

$$\mathbf{O}_2\mathbf{B} = \mathbf{O}_2\mathbf{Q} + \mathbf{QB} \quad (61)$$

其中  $\mathbf{O}_2\mathbf{Q}$  如(59)式所示，而

$$\mathbf{QB} = [d - L(\theta)]\cos(\theta + 180^\circ)\mathbf{i} + [d - L(\theta)]\sin(\theta + 180^\circ)\mathbf{j} \quad (62)$$

此外，加工凸輪 A 之銑刀中心點 G 的位置向量參數方程式為

$$\mathbf{O}_2\mathbf{G} = \mathbf{O}_2\mathbf{Q} + \mathbf{QG} \quad (63)$$

其中  $\mathbf{O}_2\mathbf{Q}$  如(59)式所示，而

$$\mathbf{QG} = [L(\theta) + r_c]\cos\theta \mathbf{i} + [L(\theta) + r_c]\sin\theta \mathbf{j} \quad (64)$$

同理，加工凸輪 B 之銑刀中心點 H 的向量參數方程式可表示為

$$\mathbf{O}_2\mathbf{H} = \mathbf{O}_2\mathbf{Q} + \mathbf{QH} \quad (65)$$

其中  $\mathbf{O}_2\mathbf{Q}$  如(59)式所示，而

$$\mathbf{QH} = [d - L(\theta) + r_c]\cos(\theta + 180^\circ)\mathbf{i} + [d - L(\theta) + r_c]\sin(\theta + 180^\circ)\mathbf{j} \quad (66)$$



圖 8 所示的兩凸輪輪廓就是以上述向量參數方程式所繪出。凸輪 A 之基圓半徑  $r_b$  為 40 mm，從動件之寬度  $d$  為 102 mm。當凸輪的角位移為  $0^\circ \sim 140^\circ$  時，從動件以擺線運動曲線上升 22 mm；當凸輪的角位移為  $140^\circ \sim 200^\circ$  時，從動件暫停；當凸輪的角位移為  $200^\circ \sim 300^\circ$  時，從動件以擺線運動曲線下降 22 mm；當凸輪的角位移為  $300^\circ \sim 360^\circ$  時，從動件暫停。

## 6. 搖擺式滾子型從動件凸輪輪廓

### 6.1. 單片式凸輪

如圖 9 所示的盤形凸輪機構，凸輪旋轉軸與從動件搖擺軸間的軸心距為  $O_2O_3 = f$ ，從動件之擺臂長為  $l$ 。同樣定坐標系  $O_2-XY$  固定於凸輪上，並標示出瞬心  $I_{12}$ 、 $I_{13}$  和  $I_{23}$  的位置分別如圖上所示。若  $Q$  點代表瞬心  $I_{23}$  且  $O_2Q = q$ ，則在凸輪上之  $Q$  點的速率可表示為

$$V_Q = q\omega_2 \quad (67)$$

而在從動件上之  $Q$  點的速率可表示為

$$V_Q = (f+q)\frac{d\xi(\theta)}{dt} = (f+q)\frac{d\xi(\theta)}{d\theta}\omega_2 \quad (68)$$

其中  $\xi(\theta)$  為從動件的角位置函數

$$\xi(\theta) = \cos^{-1}\left[\frac{l^2 + f^2 - (r_b + r_f)^2}{2lf}\right] + S(\theta) \quad (69)$$

其中  $r_b$  為凸輪基圓半徑， $r_f$  為從動滾子半徑， $S(\theta)$  為從動擺臂之角位移函數。根據瞬心的定義，桿件 2（凸輪）與桿件 3（從動件）在瞬心  $I_{23}$  上的點具有相同的線速度，而  $Q$  點為瞬心  $I_{23}$ ，所以比較(67)、(68)兩式，並經移項化簡後可得

$$q = \frac{f\frac{d\xi(\theta)}{d\theta}}{1 - \frac{d\xi(\theta)}{d\theta}} = \frac{f\frac{dS(\theta)}{d\theta}}{1 - \frac{dS(\theta)}{d\theta}} = \frac{fV(\theta)}{1 - V(\theta)} \quad (70)$$

其中  $V(\theta)$  即為從動擺臂之角速度函數。只要選定  $r_b$ 、 $r_f$ 、 $l$ 、 $f$  值及  $S(\theta)$  函數後，對任意  $\theta$  參數值均可由  $\xi(\theta)$  定出對應  $C$  點的位置，並由(70)式求得  $q$  值而定出對應瞬心  $Q$  點的位置。由  $\triangle O_3QC$  及餘弦定理，可得  $Q$  點至滾子中心  $C$  的距離  $QC$  為

$$QC = \sqrt{l^2 + (f+q)^2 - 2l(f+q)\cos\xi(\theta)} \quad (71)$$

由  $\triangle O_3QC$  及正弦定理可得

$$\alpha = \sin^{-1}\left[\frac{l\sin\xi(\theta)}{QC}\right] \quad (72)$$

因此，凸輪輪廓之向量參數方程式可表示為

$$\mathbf{O}_2\mathbf{A} = \mathbf{O}_2\mathbf{Q} + \mathbf{QA} \quad (73)$$

其中

$$\mathbf{O}_2\mathbf{Q} = q\cos(\theta + 180^\circ)\mathbf{i} + q\sin(\theta + 180^\circ)\mathbf{j} \quad (74)$$

$$\mathbf{QA} = (\mathbf{QC} - r_f) \cos(\theta + \alpha) \mathbf{i} + (\mathbf{QC} - r_f) \sin(\theta + \alpha) \mathbf{j} \quad (75)$$

$\mathbf{O}_2\mathbf{C} = \mathbf{O}_2\mathbf{Q} + \mathbf{QC}$  為凸輪節曲線。由  $\triangle O_3QC$  可知，壓力角  $\phi$  可表示為

$$\phi = 90^\circ - \alpha - \xi(\theta) \quad (76)$$

此外，銑刀中心點  $G$  的位置向量參數方程式為

$$\mathbf{O}_2\mathbf{G} = \mathbf{O}_2\mathbf{Q} + \mathbf{QG} \quad (77)$$

其中  $\mathbf{O}_2\mathbf{Q}$  如(74)式所示，而

$$\mathbf{QG} = (\mathbf{QC} - r_f + r_c) \cos(\theta + \alpha) \mathbf{i} + (\mathbf{QC} - r_f + r_c) \sin(\theta + \alpha) \mathbf{j} \quad (78)$$

圖 9 所示的凸輪輪廓就是以上述向量參數方程式所繪出。此機構之軸心距  $f$  為 80 mm，凸輪之基圓半徑  $r_b$  為 40 mm，從動件之擺臂長  $l$  為 52 mm，從動滾子之半徑  $r_f$  為 8 mm。當凸輪的角位移為  $0^\circ \sim 120^\circ$  時，從動件以擺線運動曲線以順時針方向擺動  $25^\circ$ ；當凸輪的角位移為  $120^\circ \sim 160^\circ$  時，從動件暫停；當凸輪的角位移為  $160^\circ \sim 280^\circ$  時，從動件以擺線運動曲線以逆時針方向擺動  $25^\circ$ ；當凸輪的角位移為  $280^\circ \sim 360^\circ$  時，從動件暫停。

## 6.2. 共軛式凸輪

如圖 10 所示的共軛凸輪機構，凸輪 A 和凸輪 B 均固接於同一旋轉軸上，且可視為同一剛體（桿件 2）；滾子 C 和滾子 D 則安裝於同一從動件（桿件 3）上，且分別與凸輪 A 和凸輪 B 相接觸。同樣定坐標系  $O_2\text{-}XY$  固定於凸輪 A 上，並標示出瞬心  $I_{12}$ 、 $I_{13}$  和  $I_{23}$  的位置分別如圖上所示。若  $Q$  點代表瞬心  $I_{23}$  且  $O_2Q = q$ ，由(67~69)式可知

$$q = \frac{f \frac{d\xi(\theta)}{d\theta}}{1 - \frac{d\xi(\theta)}{d\theta}} = \frac{f \frac{dS(\theta)}{d\theta}}{1 - \frac{dS(\theta)}{d\theta}} = \frac{fV(\theta)}{1 - V(\theta)} \quad (79)$$

其中  $\xi(\theta)$  如(69)式所示。由  $\triangle O_3QC$  及餘弦定理，可得  $Q$  點至滾子中心  $C$  的距離  $QC$  為

$$QC = \sqrt{l^2 + (f + q)^2 - 2l(f + q)\cos\xi(\theta)} \quad (80)$$

由  $\triangle O_3QD$  及餘弦定理，可得  $Q$  點至滾子中心  $D$  的距離  $QD$  為

$$QD = \sqrt{l^2 + (f + q)^2 - 2l(f + q)\cos[\eta - \xi(\theta)]} \quad (81)$$

其中  $\eta$  為兩從動擺臂間的固定夾角。由  $\triangle O_3QC$  及正弦定理可得

$$\alpha_A = \sin^{-1} \left[ \frac{l \sin \xi(\theta)}{QC} \right] \quad (82)$$

由  $\triangle O_3QD$  及正弦定理可得

$$\alpha_B = \sin^{-1} \left\{ \frac{l \sin[\eta - \xi(\theta)]}{QD} \right\} \quad (83)$$

因此，凸輪 A 之輪廓的向量參數方程式可表示為

$$\mathbf{O}_2\mathbf{A} = \mathbf{O}_2\mathbf{Q} + \mathbf{QA} \quad (84)$$

其中

$$\mathbf{O}_2\mathbf{Q} = q \cos(\theta + 180^\circ) \mathbf{i} + q \sin(\theta + 180^\circ) \mathbf{j} \quad (85)$$

$$\mathbf{QA} = (QC - r_f) \cos(\theta + \alpha_A) \mathbf{i} + (QC - r_f) \sin(\theta + \alpha_A) \mathbf{j} \quad (86)$$

同理，凸輪 B 之輪廓的向量參數方程式可表示為

$$\mathbf{O}_2\mathbf{B} = \mathbf{O}_2\mathbf{Q} + \mathbf{QB} \quad (87)$$

其中  $\mathbf{O}_2\mathbf{Q}$  如(85)式所示，而

$$\mathbf{QB} = (QD - r_f) \cos(\theta - \alpha_B) \mathbf{i} + (QD - r_f) \sin(\theta - \alpha_B) \mathbf{j} \quad (88)$$

由  $\triangle O_3QC$  可知，凸輪 A 之壓力角  $\phi_A$  可表示為

$$\phi_A = 90^\circ - \alpha_A - \xi(\theta) \quad (89)$$

由  $\triangle O_3QD$  可知，凸輪 B 之壓力角  $\phi_B$  可表示為

$$\phi_B = 90^\circ - \alpha_B - [\eta - \xi(\theta)] \quad (90)$$

此外，加工凸輪 A 之銑刀中心點 G 的位置向量參數方程式為

$$\mathbf{O}_2\mathbf{G} = \mathbf{O}_2\mathbf{Q} + \mathbf{QG} \quad (91)$$

其中  $\mathbf{O}_2\mathbf{Q}$  如(85)式所示，而

$$\mathbf{QG} = (QC - r_f + r_c) \cos(\theta + \alpha_A) \mathbf{i} + (QC - r_f + r_c) \sin(\theta + \alpha_A) \mathbf{j} \quad (92)$$

同理，加工凸輪 B 之銑刀中心點 H 的位置向量參數方程式為

$$\mathbf{O}_2\mathbf{H} = \mathbf{O}_2\mathbf{Q} + \mathbf{QH} \quad (93)$$

其中  $\mathbf{O}_2\mathbf{Q}$  如(85)式所示，而

$$\mathbf{QH} = (QD - r_f + r_c) \cos(\theta - \alpha_B) \mathbf{i} + (QD - r_f + r_c) \sin(\theta - \alpha_B) \mathbf{j} \quad (94)$$

圖 10 所示的共軛凸輪輪廓就是以上述向量參數方程式所繪出。此機構之軸心距  $f$  為 80 mm，凸輪 A 之基圓半徑  $r_b$  為 40 mm，兩從動件之擺臂長  $l$  均為 32 mm，兩從動滾子之半徑  $r_f$  均為 16 mm，兩從動擺臂間的固定夾角  $\eta$  為  $100^\circ$ 。當凸輪的角位移為  $0^\circ \sim 120^\circ$  時，從動件以擺線運動曲線以順時針方向擺動  $30^\circ$ ；當凸輪的角位移為  $120^\circ \sim 160^\circ$  時，從動件暫停；當凸輪的角位移為  $160^\circ \sim 280^\circ$  時，從動件以擺線運動曲線以逆時針方向擺動  $30^\circ$ ；當凸輪的角位移為  $280^\circ \sim 360^\circ$  時，從動件暫停。

## 7. 搖擺式平面型從動件凸輪輪廓

### 7.1. 單片式凸輪

如圖 11 所示的盤形凸輪機構，凸輪旋轉軸與從動件搖擺軸間的軸心距為  $O_2O_3 = f$ ，從動件軸心到從動擺臂平面的距離為  $e$ 。同樣定坐標系  $O_2-XY$  固定於凸輪上，並標出瞬心  $I_{12}$ 、 $I_{13}$  和  $I_{23}$  的位置分別如圖上所示。若 Q 點代表瞬心  $I_{23}$  且  $O_2Q = q$ ，則

$$q = \frac{f \frac{d\xi(\theta)}{d\theta}}{1 - \frac{d\xi(\theta)}{d\theta}} = \frac{f \frac{dS(\theta)}{d\theta}}{1 - \frac{dS(\theta)}{d\theta}} = \frac{fV(\theta)}{1 - V(\theta)} \quad (95)$$

其中  $\xi(\theta)$  為從動件的角位置函數

$$\xi(\theta) = \sin^{-1} \left( \frac{r_b - e}{f} \right) + S(\theta) \quad (96)$$

只要選定  $r_b$ 、 $e$ 、 $f$  值及  $S(\theta)$  函數後，對任意  $\theta$  參數值均可由(95)式求得  $q$  值而定出對應瞬心  $Q$  點的位置，並由  $\xi(\theta)$  值定出  $O_3E$  的方向，再由  $Q$  點對  $O_3E$  線作垂線而決定  $E$  點及  $A$  點的位置。由  $\triangle O_3QE$  可得

$$QE = (f + q) \sin \xi(\theta) \quad (97)$$

$$\alpha = 90^\circ - \xi(\theta) \quad (98)$$

因此，凸輪輪廓之向量參數方程式可表示為

$$\mathbf{O}_2\mathbf{A} = \mathbf{O}_2\mathbf{Q} + \mathbf{QA} \quad (99)$$

其中

$$\mathbf{O}_2\mathbf{Q} = q \cos(\theta + 180^\circ) \mathbf{i} + q \sin(\theta + 180^\circ) \mathbf{j} \quad (100)$$

$$\mathbf{QA} = (QE + e) \cos(\theta + \alpha) \mathbf{i} + (QE + e) \sin(\theta + \alpha) \mathbf{j} \quad (101)$$

由基本的幾何關係可知，壓力角  $\phi$  就是  $\triangle O_3EA$  的頂角而可表示為

$$\phi = \tan^{-1} \left[ \frac{e}{(f + q) \cos \xi(\theta)} \right] \quad (102)$$

此外，銑刀中心點  $G$  的位置向量參數方程式為

$$\mathbf{O}_2\mathbf{G} = \mathbf{O}_2\mathbf{Q} + \mathbf{QG} \quad (103)$$

其中  $\mathbf{O}_2\mathbf{Q}$  如(100)式所示，而

$$\mathbf{QG} = (QE + e + r_c) \cos(\theta + \alpha) \mathbf{i} + (QE + e + r_c) \sin(\theta + \alpha) \mathbf{j} \quad (104)$$

圖 11 所示的凸輪輪廓就是以上述向量參數方程式所繪出。此機構之軸心距  $f$  為 80 mm，凸輪之基圓半徑  $r_b$  為 40 mm，從動件軸心到從動擺臂平面的距離  $e$  為 16 mm。當凸輪的角位移為  $0^\circ \sim 120^\circ$  時，從動件以擺線運動曲線往順時針方向擺動  $15^\circ$ ；當凸輪的角位移為  $120^\circ \sim 160^\circ$  時，從動件暫停；當凸輪的角位移為  $160^\circ \sim 280^\circ$  時，從動件以擺線運動曲線往逆時針方向擺動  $15^\circ$ ；當凸輪的角位移為  $280^\circ \sim 360^\circ$  時，從動件暫停。

## 7.2. 共軛式凸輪

如圖 12 所示的共軛凸輪機構，凸輪 A 和凸輪 B 均固接於同一旋轉軸上，且可視為同一剛體（桿件 2）；從動件（桿件 3）上的兩平面分別與凸輪 A 和凸輪 B 保持相切。同樣定坐標系  $O_2$ -XY 固定於凸輪 A 上，並標出瞬心  $I_{12}$ 、 $I_{13}$  和  $I_{23}$  的位置分別如圖上所示。若  $Q$  點代表瞬心  $I_{23}$  且  $O_2Q = q$ ，則

$$q = \frac{f \frac{d\xi(\theta)}{d\theta}}{1 - \frac{d\xi(\theta)}{d\theta}} = \frac{f \frac{dS(\theta)}{d\theta}}{1 - \frac{dS(\theta)}{d\theta}} = \frac{fV(\theta)}{1 - V(\theta)} \quad (105)$$

其中  $\xi(\theta)$  如(96)式所示。由  $\triangle O_3QE$  可得

$$QE = (f + q) \sin \xi(\theta) \quad (106)$$

$$\alpha_A = 90^\circ - \xi(\theta) \quad (107)$$

由 $\triangle O_3QF$  可得

$$QF = (f + q) \sin[\eta - \xi(\theta)] \quad (108)$$

$$\alpha_B = 90^\circ - [\eta - \xi(\theta)] \quad (109)$$

其中 $\eta$ 為兩從動擺臂間的固定夾角。因此，凸輪 A 之輪廓的向量參數方程式可表示為

$$\mathbf{O}_2\mathbf{A} = \mathbf{O}_2\mathbf{Q} + \mathbf{QA} \quad (110)$$

其中

$$\mathbf{O}_2\mathbf{Q} = q \cos(\theta + 180^\circ) \mathbf{i} + q \sin(\theta + 180^\circ) \mathbf{j} \quad (111)$$

$$\mathbf{QA} = (QE + e) \cos(\theta + \alpha_A) \mathbf{i} + (QE + e) \sin(\theta + \alpha_A) \mathbf{j} \quad (112)$$

同理，凸輪 B 之輪廓的向量參數方程式可表示為

$$\mathbf{O}_2\mathbf{B} = \mathbf{O}_2\mathbf{Q} + \mathbf{QB} \quad (113)$$

其中 $\mathbf{O}_2\mathbf{Q}$  如(111)式所示，而

$$\mathbf{QB} = (QF + e) \cos(\theta - \alpha_B) \mathbf{i} + (QF + e) \sin(\theta - \alpha_B) \mathbf{j} \quad (114)$$

由 $\triangle O_3EA$  可知，凸輪 A 之壓力角 $\phi_A$ 可表示為

$$\phi_A = \tan^{-1} \left[ \frac{e}{(f + q) \cos \xi(\theta)} \right] \quad (115)$$

由 $\triangle O_3FB$  可知，凸輪 B 之壓力角 $\phi_B$ 可表示為

$$\phi_B = \tan^{-1} \left[ \frac{e}{(f + q) \cos[\eta - \xi(\theta)]} \right] \quad (116)$$

此外，加工凸輪 A 之銑刀中心點 G 的位置向量參數方程式為

$$\mathbf{O}_2\mathbf{G} = \mathbf{O}_2\mathbf{Q} + \mathbf{QG} \quad (117)$$

其中 $\mathbf{O}_2\mathbf{Q}$  如(111)式所示，而

$$\mathbf{QG} = (QE + e + r_c) \cos(\theta + \alpha_A) \mathbf{i} + (QE + e + r_c) \sin(\theta + \alpha_A) \mathbf{j} \quad (118)$$

同理，加工凸輪 B 之銑刀中心點 H 的位置向量參數方程式為

$$\mathbf{O}_2\mathbf{H} = \mathbf{O}_2\mathbf{Q} + \mathbf{QH} \quad (119)$$

其中 $\mathbf{O}_2\mathbf{Q}$  如(111)式所示，而

$$\mathbf{QH} = (QF + e + r_c) \cos(\theta - \alpha_B) \mathbf{i} + (QF + e + r_c) \sin(\theta - \alpha_B) \mathbf{j} \quad (120)$$

圖 12 所示的共軛凸輪輪廓就是以上述向量參數方程式所繪出。此機構之軸心距  $f$  為 80 mm，凸輪之基圓半徑  $r_b$  為 40 mm，從動件軸心到兩從動擺臂平面的距離  $e$  均為 14 mm，兩從動擺臂間的固定夾角 $\eta$ 為  $50^\circ$ 。當凸輪的角位移為  $0^\circ \sim 120^\circ$  時，從動件以擺

線運動曲線往順時針方向擺動 $15^\circ$ ；當凸輪的角位移為 $120^\circ \sim 170^\circ$ 時，從動件暫停；當凸輪的角位移為 $170^\circ \sim 270^\circ$ 時，從動件以擺線運動曲線往逆時針方向擺動 $15^\circ$ ；當凸輪的角位移為 $270^\circ \sim 360^\circ$ 時，從動件暫停。

## 8. 結論

由盤形凸輪機構的設計條件即可定出凸輪與從動件的速度瞬心位置、凸輪與從動件接觸點的法線及凸輪與從動件的接觸點，並可藉以推導出凸輪節曲線的向量方程式、凸輪輪廓的向量方程式、壓力角的方程式以及加工凸輪之刀具的中心點相對於凸輪的運動路徑曲線方程式。對於共軛凸輪機構而言，由於其凸輪和從動件在任一時刻均具有兩個接觸點，所以其兩個接觸點的公法線與軸心線在任一時刻必須同時交於瞬心點。藉由此三條線必須相交於瞬心點的條件之特殊的幾何條件之滿足，便可以簡易地決定共軛凸輪的輪廓以及加工凸輪之刀具的中心點相對於凸輪的運動路徑曲線方程式。

本文完整地推導並列示出平移式從動件、搖擺式從動件、滾子型從動件、平面型從動件等各種型式之單片式盤形凸輪機構與共軛式盤形凸輪機構之所有相關方程式。這些式子均以參數方程式的形式簡明地表示。

此外，本文也說明：有固定軸樞之兩個圓形齒輪互相嚙合時也常會有兩個接觸點，且其兩個接觸點的公法線與軸心線在任一時刻也必須同時交於軸心線上的一個固定點；此固定點即齒輪傳動基本定律中所謂的節點，而此節點也就是相當於共軛凸輪機構中的瞬心  $I_{23}$ 。只是在凸輪機構中，此瞬心  $I_{23}$  的位置會隨著凸輪的旋轉而變動；但在齒輪機構中，此瞬心  $I_{23}$  的位置卻一直固定不動。

## 參考文獻

- [1] Nakazawa, H., 1994, *Principles of Precision Engineering*, Oxford University Press, Oxford, pp. 96-98.
- [2] Rothbart, H. A., 1956, *Cams—Design, Dynamics, and Accuracy*, John Wiley & Sons, New York.
- [3] Paul, B., 1979, *Kinematics and Dynamics of Planar Machinery*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- [4] Martin, G. H., 1982, *Kinematics and Dynamics of Machines, 2nd Ed.*, MacGraw-Hill, New York.
- [5] Chen, F. Y., 1982, *Mechanics and Design of Cam Mechanisms*, Pergamon Press, New York.
- [6] Jenson, P.W., 1987, *Cam Design and Manufacture, 2nd Ed.*, Marcel Dekker, New York.
- [7] Wilson, C. E. and Sadler, J. P., 2003, *Kinematics and Dynamics of Machinery, 3rd Ed.*, HarperCollins, New York.
- [8] Mabie, H. H. and Reinholtz, C. F., 1987, *Mechanisms and Dynamics of Machinery, 4th Ed.*, John Wiley & Sons, New York.
- [9] Waldron, K. J. and Kinzel, G. L., 2004, *Kinematics, Dynamics, and Design of Machinery, 2nd Ed.*, John Wiley & Sons, New York.
- [10] 顏鴻森，1999，機構學，二版，東華書局，台北市。
- [11] Hanson, R. S. and Churchill, F. T., 1962, "Theory of Envelopes Provides New Cam Design Equations," *Product Engineering*, August 20, pp. 45-55.
- [12] 吳隆庸，洪嘉宏，張信良，2002，"盤形凸輪輪廓的向量式表示法"，技術學刊，17卷，1期，59-65頁。
- [13] Wu, L. I., 2003, "Calculating Conjugate Cam Profiles by Vector Equations," *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers—Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, Vol. 217, No. 10, pp. 1117-1123.

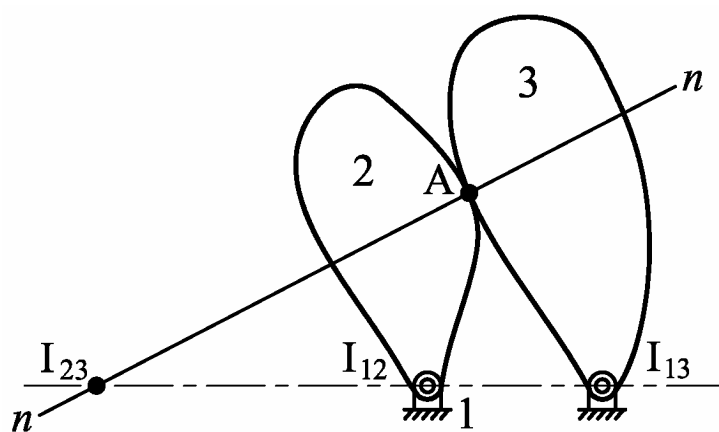


圖 1 三桿機構的瞬心

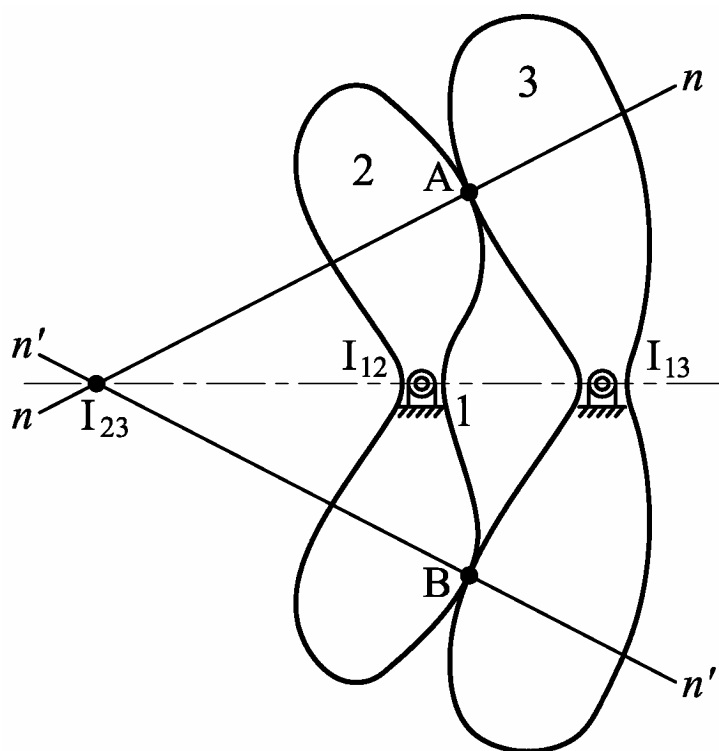


圖 2 具有兩個接觸點之三桿機構的瞬心

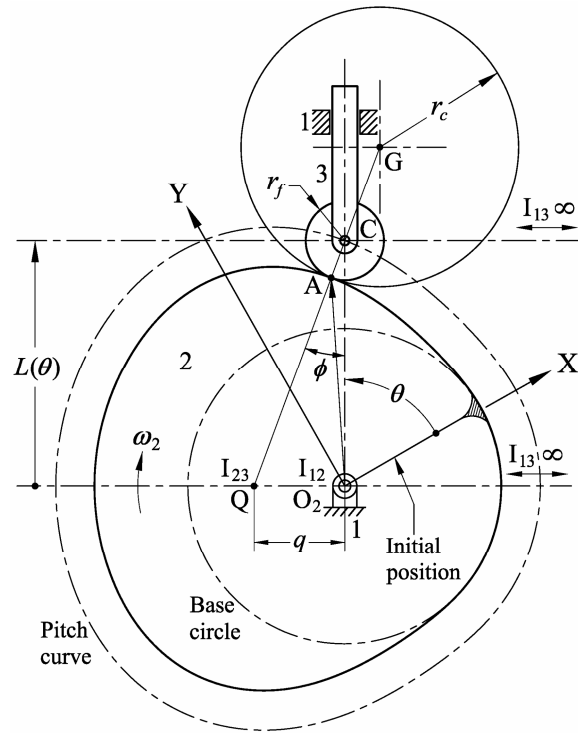


圖 3 平移式徑向滾子型從動件凸輪機構及其瞬心

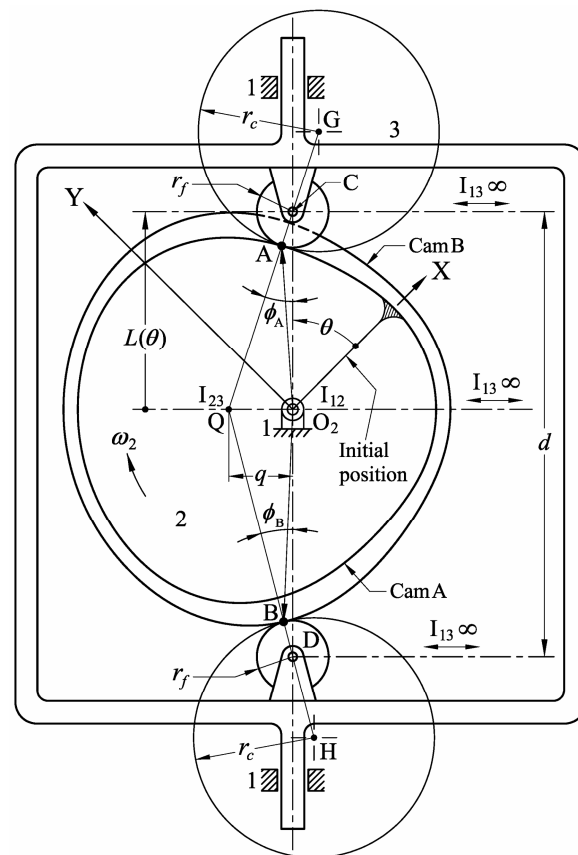


圖 4 平移式徑向滾子型從動件共軛凸輪機構及其瞬心



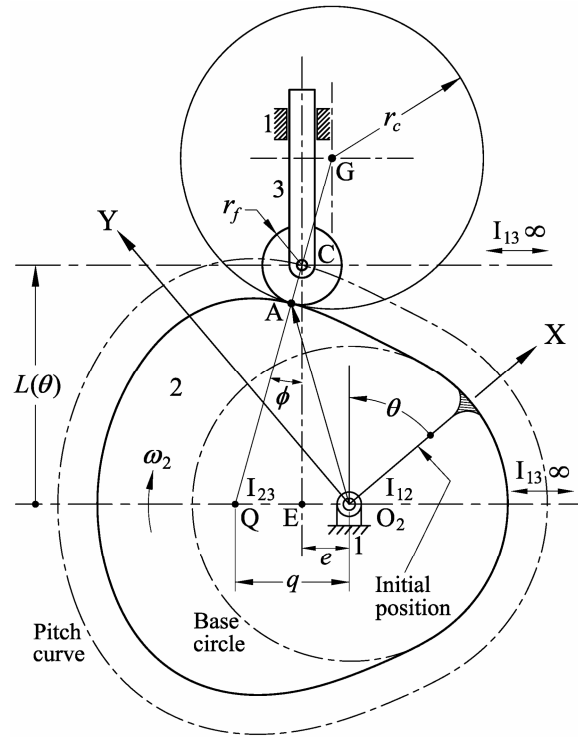


圖 5 平移式偏位滾子型從動件凸輪機構及其瞬心

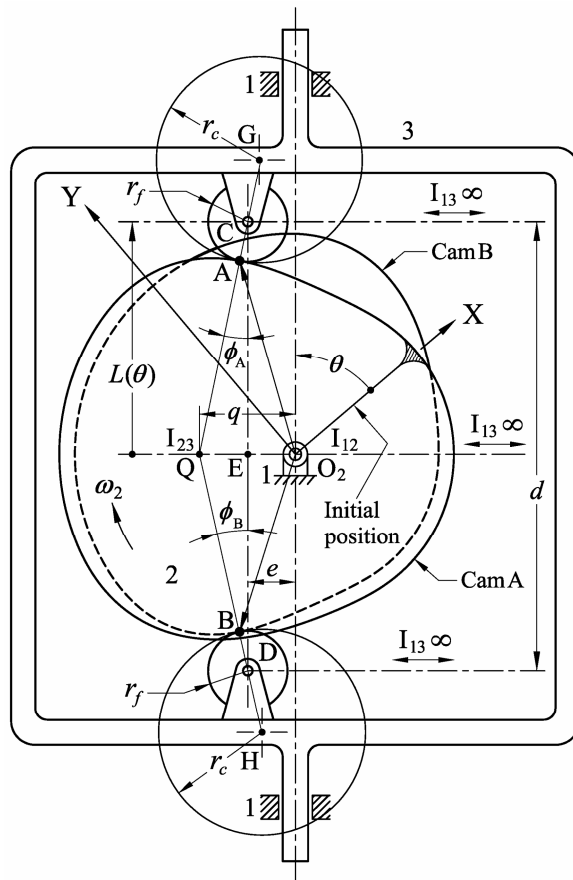


圖 6 平移式偏位滾子型從動件共軛凸輪機構及其瞬心

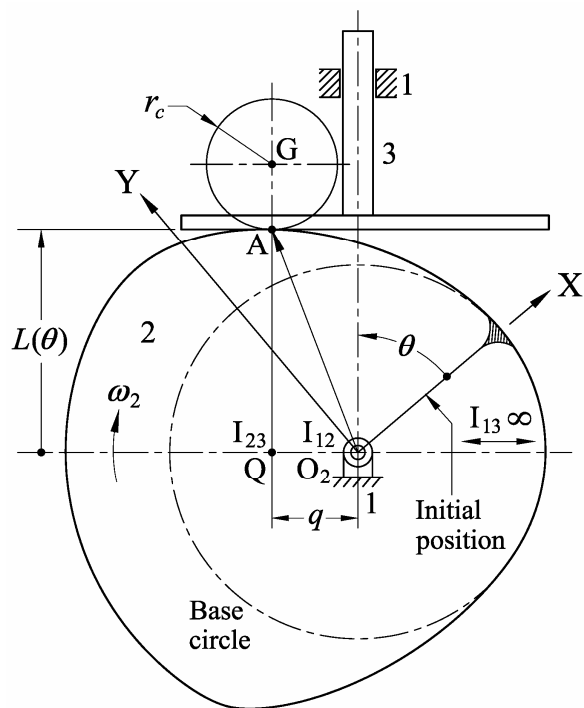


圖 7 平移式平面型從動件凸輪機構及其瞬心

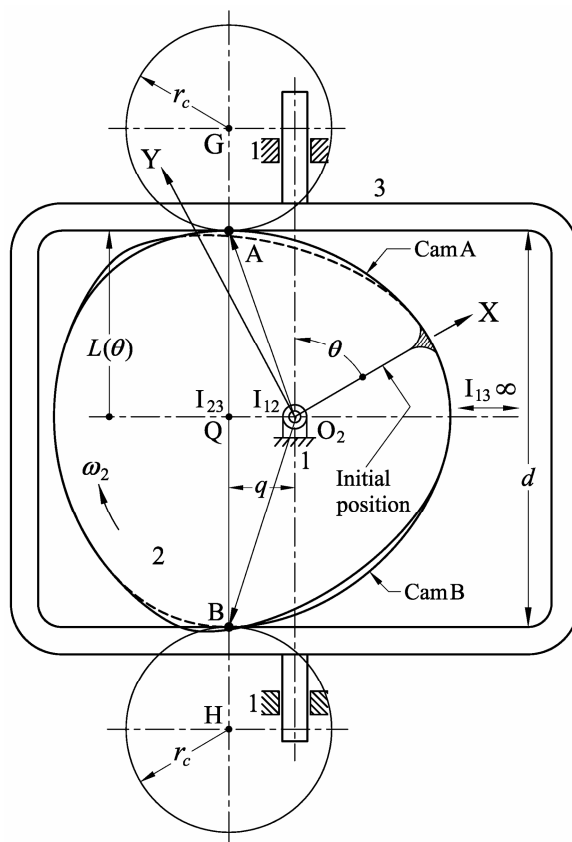


圖 8 平移式平面型從動件共軛凸輪機構及其瞬心

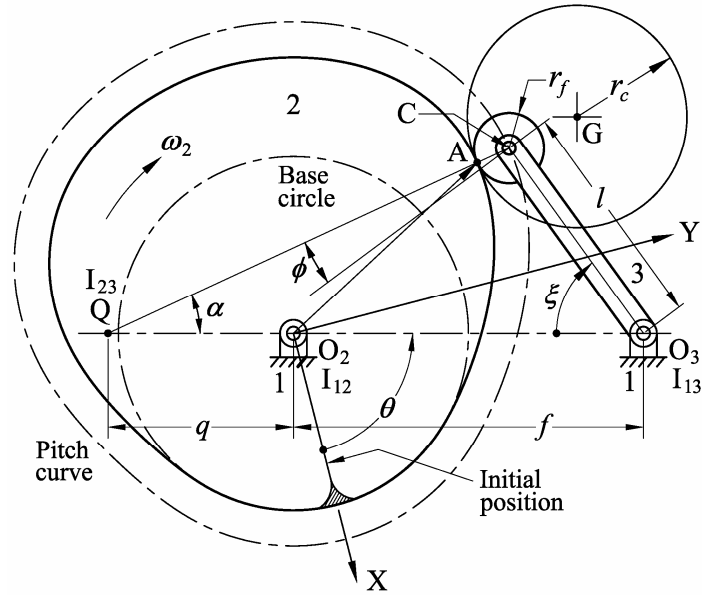


圖 9 搖擺式滾子型從動件凸輪機構及其瞬心

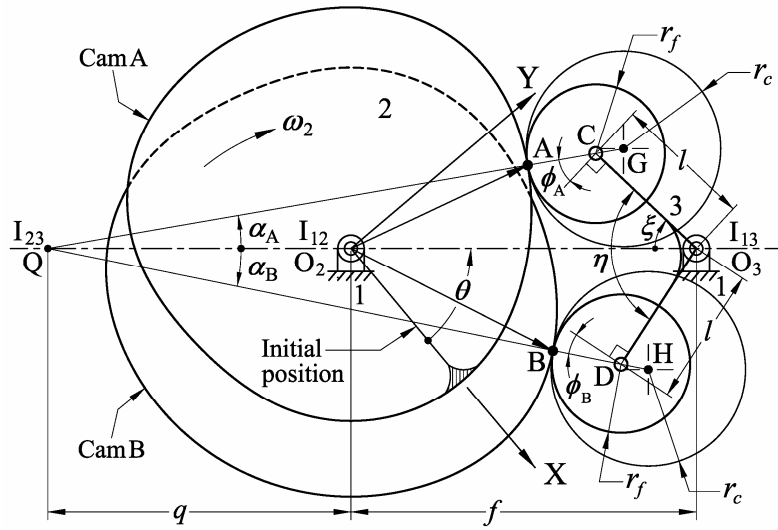


圖 10 搖擺式滾子型從動件共軛凸輪機構及其瞬心

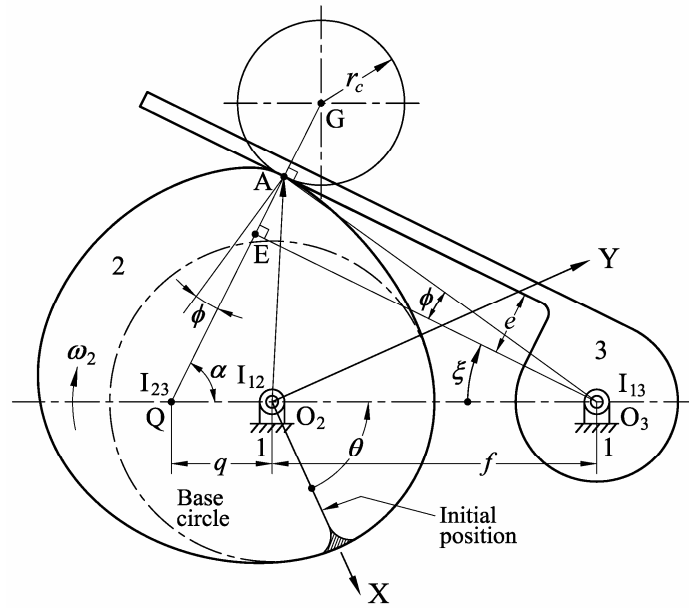


圖 11 搖擺式平面型從動件凸輪機構及其瞬心

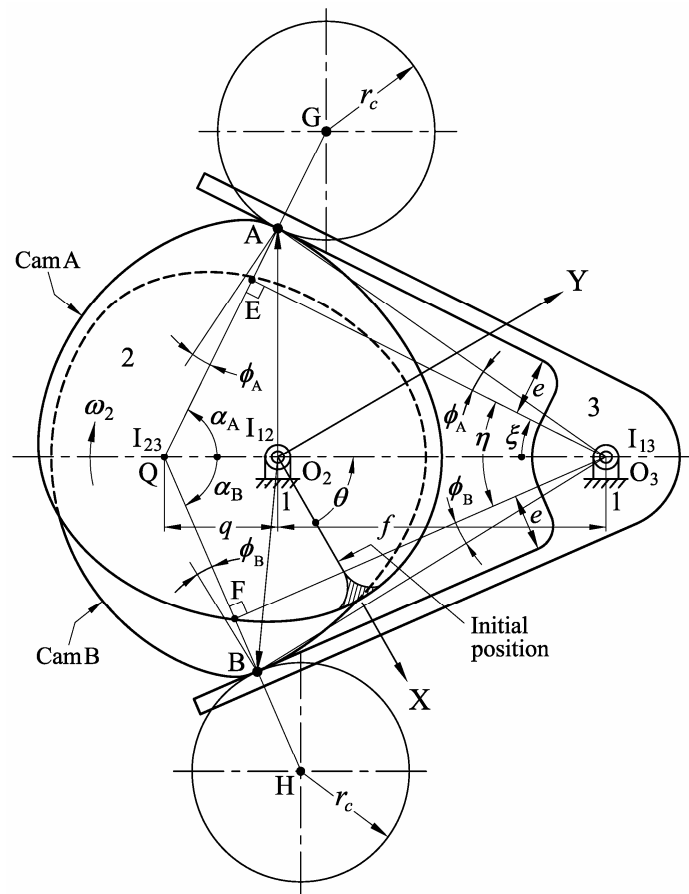


圖 12 搖擺式平面型從動件共軛凸輪機構及其瞬心