2018 年全国硕士研究生入学统一考试数学(二)真题

一、选择题:1 ~8 小题,每小题 4 分,共 32 分. 下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的.

(1) 若$\lim\limits_{x\to 0}(e^x+ax^2+bx)^{\frac{1}{x^2}}=1$,则(　　)

(A)$a=\frac{1}{2},\ b=-1$　　(B)$a=-\frac{1}{2},b=-1$

(C)$a=\frac{1}{2},\ b=1$　　(D)$a=-\frac{1}{2},\ b=1$

(2) 下列函数中,在 $x=0$ 处不可导的是(　　)

(A)$f(x)=|x|\sin|x|$　　(B)$f(x)=|x|\sin\sqrt{|x|}$

(C)$f(x)=\cos|x|$　　(D)$f(x)=\cos\sqrt{|x|}$

(3) 设函数$f(x)=\begin{cases}-1, & x<0,\\ 1, & x\geqslant 0,\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}2-ax, & x\leqslant -1,\\ x, & -1<x<0,\\ x-b, & x\geqslant 0.\end{cases}$若$f(x)+g(x)$ 在 R 上连续,

则(　　)

(A)$a=3,\ b=1$　　(B)$a=3,\ b=2$

(C)$a=-3,\ b=1$　　(D)$a=-3,\ b=2$

(4) 设函数$f(x)$ 在$[0,1]$ 上二阶可导,且$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0$,则(　　)

(A) 当$f'(x)<0$时,$f(\frac{1}{2})<0$　　(B) 当$f''(x)<0$时,$f(\frac{1}{2})<0$

(C) 当$f'(x)>0$时,$f(\frac{1}{2})<0$　　(D) 当$f''(x)>0$时,$f(\frac{1}{2})<0$

(5) 设 $M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1+x)^2}{1+x^2}\mathrm{d}x,\ N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+x}{e^x}\mathrm{d}x,\ K=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\sqrt{\cos x})\mathrm{d}x$,则(　　)

(A)$M>N>K$　　(B)$M>K>N$

(C)$K>M>N$　　(D)$K>N>M$

(6) $\int_{-1}^{0}\mathrm{d}x\int_{-x}^{2-x^2}(1-xy)\mathrm{d}y+\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^{2-x^2}(1-xy)\mathrm{d}y=$(　　)

(A) $\frac{5}{3}$　　(B) $\frac{5}{6}$　　(C) $\frac{7}{3}$　　(D) $\frac{7}{6}$

(7) 下列矩阵中,与矩阵$\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$相似的为(　　)

(A)$\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$　(B)$\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$　(C)$\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$　(D)$\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

(8) 设$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$为$n$阶矩阵,记$r(\boldsymbol{X})$为矩阵$\boldsymbol{X}$的秩,$(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$表示分块矩阵,则(　　)

(A)$r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{AB})=r(\boldsymbol{A})$　(B)$r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{BA})=r(\boldsymbol{A})$

(C)$r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=\max\{r(\boldsymbol{A}),r(\boldsymbol{B})\}$　(D)$r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})$

二、填空题:9 ~ 14 小题,每小题 4 分,共 24 分.

(9) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2[\arctan(x+1)-\arctan x]=$________.

(10) 曲线$y=x^2+2\ln x$在其拐点处的切线方程是________.

(11) $\int_5^{+\infty}\frac{1}{x^2-4x+3}\mathrm{d}x=$________.

(12) 曲线$\begin{cases}x=\cos^3 t,\\y=\sin^3 t\end{cases}$在$t=\frac{\pi}{4}$对应点处的曲率为________.

(13) 设函数$z=z(x,y)$由方程$\ln z+\mathrm{e}^{z-1}=xy$确定,则$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(2,\frac{1}{2})}=$________.

(14) 设$\boldsymbol{A}$为三阶矩阵,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$为线性无关的向量组.若$\boldsymbol{A\alpha}_1=2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$,$\boldsymbol{A\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3$,$\boldsymbol{A\alpha}_3=-\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$,则$\boldsymbol{A}$的实特征值为________.

三、解答题:15 ~ 23 小题,共 94 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 10 分)

求不定积分$\int\mathrm{e}^{2x}\arctan\sqrt{\mathrm{e}^x-1}\,\mathrm{d}x$.

(16)(本题满分 10 分)

已知连续函数 $f(x)$ 满足 $\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^x tf(x-t)\,\mathrm{d}t = ax^2$.

(Ⅰ)求 $f(x)$;

(Ⅱ)若 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上的平均值为 1,求 a 的值.

(17)(本题满分 10 分)

设平面区域 D 由曲线 $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ 与 x 轴围成.

计算二重积分 $\iint\limits_D (x + 2y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(18)（本题满分 10 分）

已知常数 $k \geqslant \ln 2-1$，证明：$(x-1)(x-\ln^2 x+2k\ln x-1) \geqslant 0$.

(19)（本题满分 10 分）

将长为 2m 的铁丝分成三段，依次围成圆、正方形与正三角形，三个图形的面积之和是否存在最小值？若存在，求出最小值.

(20)（本题满分 11 分）

已知曲线 L: $y=\frac{4}{9}x^2(x\geqslant 0)$，点 $O(0,0)$，点 $A(0,1)$，设 P 是 L 上的动点，S 是直线 OA 与直线 AP 及曲线 L 所围成图形的面积. 若 P 运动到点 $(3,4)$ 时沿 x 轴正向的速度是 4，求此时 S 关于时间 t 的变化率.

(21)（本题满分 11 分）

设数列 $\{x_n\}$ 满足：$x_1>0$，$x_n e^{x_{n+1}}=e^{x_n}-1(n=1,2,\cdots)$. 证明 $\{x_n\}$ 收敛，并求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

(22) 设实二次型$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1-x_2+x_3)^2+(x_2+x_3)^2+(x_1+ax_3)^2$,其中$a$是参数.

(Ⅰ) 求$f(x_1,x_2,x_3)=0$的解;

(Ⅱ) 求$f(x_1,x_2,x_3)$的规范形.

(23) (本题满分 11 分)

已知a是常数,且矩阵$A=\begin{pmatrix}1&2&a\\1&3&0\\2&7&-a\end{pmatrix}$可经初等列变换化为矩阵$B=\begin{pmatrix}1&a&2\\0&1&1\\-1&1&1\end{pmatrix}$.

(Ⅰ) 求a;

(Ⅱ) 求满足$AP=B$的可逆矩阵P.

2018 年全国硕士研究生入学统一考试数学(二) 参考答案

一、选择题

(1) B 【解析】由于$\lim\limits_{x\to0}(e^x+ax^2+bx)^{\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to0}\left[1+(e^x+ax^2+bx-1)\right]^{\frac{1}{e^x+ax^2+bx-1}\cdot\frac{e^x+ax^2+bx-1}{x^2}}$

$$=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x+ax^2+bx-1}{x^2}}=1,$$

则 $$\lim_{x\to0}\frac{e^x+ax^2+bx-1}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{e^x+2ax+b}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{e^x+2a}{2}=\lim_{x\to0}\frac{1+2a}{2}=0.$$

要使得极限$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x+2ax+b}{2x}$, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x+2a}{2}$存在,则成立

$$\begin{cases}1+b=0,\\ \dfrac{1}{2}+a=0,\end{cases}\text{解得}\begin{cases}a=-\dfrac{1}{2},\\ b=-1.\end{cases}$$

提示:对于极限$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x+ax^2+bx-1}{x^2}$,可将 e^x 展开成泰勒函数形式,进而求出 a,b.

由于 $$\lim_{x\to0}\frac{e^x+ax^2+bx-1}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{(\frac{1}{2}+a)x^2+(1+b)x+o(x^2)}{x^2}=0,$$

要使得上式极限存在,则$\begin{cases}1+b=0,\\ \dfrac{1}{2}+a=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=-\dfrac{1}{2},\\ b=-1.\end{cases}$

(2) D 【解析】本题考查导数的极限定义.

对于 D 选项:由定义得$f'_+(0)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\cos\sqrt{|x|}-1}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{-\frac{1}{2}|x|}{x}=-\dfrac{1}{2}$;

$$f'_-(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{\cos\sqrt{|x|}-1}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{-\frac{1}{2}|x|}{x}=\frac{1}{2},$$

由于$f'_+(0)\neq f'_-(0)$,因此$f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导.

(3) D 【解析】分段点为 $x=-1,x=0$. 当 $x\leqslant-1$ 时,$f(x)+g(x)=-1+2+ax=1-ax$;当 $-1<x<0$ 时,$f(x)+g(x)=-1+x$;当 $x\geqslant0$ 时,$f(x)+g(x)=1+x-b$.

综上知:$f(x)+g(x)=\begin{cases}1-ax, & x\leqslant-1,\\ -1+x, & -1<x<0,\\ 1+x-b, & x\geqslant0.\end{cases}$则

$$\lim_{x\to -1^-}[f(x)+g(x)]=1+a,\quad \lim_{x\to -1^+}[f(x)+g(x)]=-2;$$

$$\lim_{x\to 0^-}[f(x)+g(x)]=-1,\quad \lim_{x\to 0^+}[f(x)+g(x)]=1-b.$$

又$f(x)+g(x)$在R上连续,因此$\begin{cases}1+a=-2,\\1-b=-1,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=-3,\\b=2.\end{cases}$

(4) D 【解析】对于A选项:取$f(x)=-x+\frac{1}{2}$,此时$f'(x)=-1<0$,但$f(\frac{1}{2})=0$;

对于B、D选项:取$f(x)=a(x-\frac{1}{2})^2+b$,由$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0$,可得$b=-\frac{a}{12}$.

当$f''(x)=2a<0$时,$f(\frac{1}{2})=b>0$;当$f''(x)=2a>0$时,$f(\frac{1}{2})=b<0$;

对于C选项:取$f(x)=x-\frac{1}{2}$,此时$f'(x)=1>0$,但$f(\frac{1}{2})=0$. 故D选项正确.

提示:本题也可用泰勒公式展开求解.

对于A、C选项,令$f(x)=f(\frac{1}{2})+f'(\xi)(x-\frac{1}{2})$,$\xi\in(\frac{1}{2},x)$.

由于 $$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1[f(\frac{1}{2})+f'(\xi)(x-\frac{1}{2})]\mathrm{d}x=f(\frac{1}{2})+0=0,$$

可知无论$f'(x)>0$,还是$f'(x)<0$,都有$f(\frac{1}{2})=0$. 排除A、C选项.

对于B、D选项,令$f(x)=f(\frac{1}{2})+f'(\frac{1}{2})(x-\frac{1}{2})+\frac{f''(\xi)}{2}(x-\frac{1}{2})^2$,$\xi\in(\frac{1}{2},x)$.

由于 $$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1[f(\frac{1}{2})+f'(\frac{1}{2})(x-\frac{1}{2})+\frac{f''(\xi)}{2}(x-\frac{1}{2})^2]\mathrm{d}x$$

$$=f(\frac{1}{2})+\frac{f''(\xi)}{24}=0,$$

可知当$f''(x)<0$时,$f(\frac{1}{2})>0$;当$f''(x)>0$时,$f(\frac{1}{2})<0$. B选项错误,D选项正确.

(5) C 【解析】由于$M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+x^2+2x}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}1\mathrm{d}x=\pi$,而

$$\frac{1+x}{e^x}<1<1+\sqrt{\cos x},$$

由定积分的性质,可知

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+x}{e^x}\mathrm{d}x<\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}1\mathrm{d}x<\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\sqrt{\cos x})\mathrm{d}x.$$

即$K>M>N$. 故C选项正确.

(6) C 【解析】积分区域 D 可表示为

$D=\{(x,y)\mid -1\leqslant x\leqslant 0,\ -x\leqslant y\leqslant 2-x^2\}\cup\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,\ x\leqslant y\leqslant 2-x^2\}$.

D 关于 y 轴对称，而 xy 关于 x 为奇函数，因此

$$\int_{-1}^{0}\mathrm{d}x\int_{-x}^{2-x^2}(1-xy)\mathrm{d}y+\int_{0}^{1}\mathrm{d}x\int_{x}^{2-x^2}(1-xy)\mathrm{d}y$$

$$=2\int_{0}^{1}\mathrm{d}x\int_{x}^{2-x^2}1\mathrm{d}y=2\int_{0}^{1}(2-x^2-x)\mathrm{d}x$$

$$=2\left(2x-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\right)\Big|_0^1=\frac{7}{3}.$$

(7) A 【解析】本题考查矩阵相似的定义及相似矩阵的性质(相似矩阵的秩相等).

若存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$，则 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$. 从而可知

$$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}，且\ \mathrm{r}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}).$$

设题中所给矩阵为 A，各选项中的矩阵分别为 B_1,B_2,B_3,B_4. 经验证知

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}_1)=2,\ \mathrm{r}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}_2)=\mathrm{r}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}_3)=\mathrm{r}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}_4)=1.$$

因此 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}_1$，即 $\boldsymbol{A}$ 相似于 A 选项下的矩阵.

(8) A 【解析】解这道题的关键，要熟悉以下两个不等关系.

①$\mathrm{r}(\boldsymbol{AB})\leqslant\min\{\mathrm{r}(\boldsymbol{A}),\mathrm{r}(\boldsymbol{B})\}$； ②$\mathrm{r}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})\geqslant\max\{\mathrm{r}(\boldsymbol{A}),\mathrm{r}(\boldsymbol{B})\}$.

由 $\mathrm{r}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{B})=n$，可知 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{AB})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{B}))\leqslant\min\{\mathrm{r}(\boldsymbol{A}),\mathrm{r}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{B})\}=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$.

又 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{AB})\geqslant\max\{\mathrm{r}(\boldsymbol{A}),\mathrm{r}(\boldsymbol{AB})\}$，$\mathrm{r}(\boldsymbol{AB})\leqslant\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$，可知 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{AB})\geqslant\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$.

从而可得 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{AB})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$.

二、填空题

(9) 1 【解析】由拉格朗日中值定理，得

$$\arctan(x+1)-\arctan x=\frac{1}{1+\xi^2},\ \xi\in(x,x+1).$$

且当 $x\to+\infty$ 时，$\xi\to+\infty$. 因此原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{1+\xi^2}=1$.

(10) $y=4x-3$ 【解析】首先求得函数 $y=x^2+2\ln x$ 的定义域为 $(0,+\infty)$.

求一阶、二阶导，可得 $y'=2x+\dfrac{2}{x}$，$y''=2-\dfrac{2}{x^2}$.

令 $y''=0$，得 $x=1$. 当 $x>1$ 时，$y''>0$；当 $x<1$ 时，$y''<0$.

因此 $(1,1)$ 为曲线的拐点. 点 $(1,1)$ 处的切线斜率 $k=y'(1)=4$.

因此切线方程为 $y-1=4(x-1)$，即 $y=4x-3$.

(11) $\underset{\sim}{\dfrac{\ln 2}{2}}$ 【解析】$\displaystyle\int_5^{+\infty}\frac{1}{x^2-4x+3}dx=\int_5^{+\infty}\frac{1}{(x-1)(x-3)}dx$

$$=\frac{1}{2}\int_5^{+\infty}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-1}\right)dx=\frac{1}{2}\ln\frac{x-3}{x-1}\bigg|_5^{+\infty}=\frac{\ln 2}{2}.$$

(12) $\underset{\sim}{\dfrac{2}{3}}$ 【解析】$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy/dt}{dx/dt}=-\tan t$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)/dt}{dx/dt}=\dfrac{-\sec^2 t}{-3\cos^2 t\sin t}=\dfrac{1}{3\cos^4 t\sin t}$.

当 $t=\dfrac{\pi}{4}$ 时，$\dfrac{dy}{dx}\bigg|_{t=\frac{\pi}{4}}=-1$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}\bigg|_{t=\frac{\pi}{4}}=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$.

因此，曲线的曲率 $K=\dfrac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{2}{3}$.

(13) $\underset{\sim}{\dfrac{1}{4}}$ 【解析】将方程 $\ln z+e^{z-1}=xy$ 两边对 x 求偏导，得

$$\frac{1}{z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+e^{z-1}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=y.$$

当 $x=2,y=\dfrac{1}{2}$ 时，$z=1$，代入上式，可得 $\dfrac{\partial z}{\partial x}\bigg|_{(2,\frac{1}{2})}=\dfrac{1}{4}$.

(14) $\underset{\sim}{2}$ 【解析】由题可得 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}2&0&0\\1&1&-1\\1&2&1\end{pmatrix}$.

由于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，因此 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$ 为可逆矩阵. 则

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}2&0&0\\1&1&-1\\1&2&1\end{pmatrix}=\boldsymbol{B}.$$

因此 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，则矩阵 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 具有相同的特征值. 而

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix}\lambda-2&0&0\\-1&\lambda-1&1\\-1&-2&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-2)[(\lambda-1)^2+2]=0,$$

从而可知 $\boldsymbol{B}$ 的实特征值为 2，$\boldsymbol{A}$ 的实特征值为 2.

三、解答题

(15) **解**：$\displaystyle\int e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1}\,dx=\frac{1}{2}\int\arctan\sqrt{e^x-1}\,de^{2x}$

$$=\frac{1}{2}e^{2x}\cdot\arctan\sqrt{e^x-1}-\frac{1}{2}\int e^{2x}\cdot\frac{\frac{e^x}{2\sqrt{e^x-1}}}{1+(e^x-1)}dx$$

$$= \frac{1}{2}e^{2x} \cdot \arctan \sqrt{e^x - 1} - \frac{1}{4}\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x - 1}}dx$$

$$= \frac{1}{2}e^{2x} \cdot \arctan \sqrt{e^x - 1} - \frac{1}{4}\int \frac{e^x - 1 + 1}{\sqrt{e^x - 1}}de^x$$

$$= \frac{1}{2}e^{2x} \cdot \arctan \sqrt{e^x - 1} - \frac{1}{4}\int (\sqrt{e^x - 1} + \frac{1}{\sqrt{e^x - 1}})d(e^x - 1)$$

$$= \frac{1}{2}e^{2x} \cdot \arctan \sqrt{e^x - 1} - \frac{1}{4}\left[\frac{2}{3}(e^x - 1)^{\frac{3}{2}} + 2\sqrt{e^x - 1}\right] + C$$

$$= \frac{1}{2}e^{2x} \cdot \arctan \sqrt{e^x - 1} - \frac{1}{6}(e^x - 1)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}\sqrt{e^x - 1} + C.$$

提示:本题还可利用变量替换求解.令 $t = \sqrt{e^x - 1}$,化简过后,利用分部积分逐步求解.最后求得关于 t 的表达式后,记得将 $t = \sqrt{e^x - 1}$ 再代回去.(求解过程略)

(16)解:(Ⅰ)令 $u = x - t$,则 $t = x - u$,$dt = -du$.因此

$$\int_0^x tf(x - t)dt = \int_0^x (x - u)f(u)du = x\int_0^x f(u)du - \int_0^x uf(u)du.$$

从而 $\int_0^x f(t)dt + \int_0^x tf(x - t)dt = ax^2$ 可转化为

$$\int_0^x f(t)dt + x\int_0^x f(u)du - \int_0^x uf(u)du = ax^2.$$

将上式两边关于 x 求导,得

$$f(x) + \int_0^x f(u)du + xf(x) - xf(x) = 2ax.$$

即
$$f(x) + \int_0^x f(u)du = 2ax.$$

将上式两边关于 x 求导,得

$$f'(x) + f(x) = 2a.$$

由通解公式,可求得上述一阶非齐次线性微分方程的通解为

$$f(x) = e^{-\int 1dx}\left(\int 2ae^{\int 1dx}dx + C\right) = e^{-x}\left(C + 2a\int e^x dx\right)$$

$$= e^{-x}(2ae^x + C).$$

又 $f(0) = 0$,则可得 $C = -2a$.因此

$$f(x) = 2a(1 - e^{-x}).$$

(Ⅱ)由于 $\dfrac{\int_0^1 f(x)dx}{1} = 1$,则有

$$\int_0^1 2a(1-e^{-x})dx = (2ax+2ae^{-x})\Big|_0^1 = 2ae^{-1} = 1.$$

因此 $a = \frac{e}{2}$.

(17) 解:题中所给曲线是一条拱线,平面区域 D 可表示为

$$0 \leqslant x \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant y \leqslant y(x).$$

因此
$$\iint_D (x+2y)dxdy = \int_0^{2\pi}dx\int_0^{y(x)}(x+2y)dy = \int_0^{2\pi}(xy+y^2)\Big|_0^{y(x)}dx$$

$$= \int_0^{2\pi}[xy(x)+y^2(x)]dx.$$

下面利用换元法求解. 令 $x = t-\sin t$, $y(x) = 1-\cos t$,则

$$\iint_D (x+2y)dxdy = \int_0^{2\pi}[(t-\sin t)(1-\cos t)+(1-\cos t)^2]d(t-\sin t)$$

$$= \int_0^{2\pi}[(t-\sin t)(1-\cos t)^2+(1-\cos t)^3]dt$$

$$= \int_0^{2\pi}[t(1-\cos t)^2-\sin t(1-\cos t)^2+(1-\cos t)^3]dt.$$

而 $\int_0^{2\pi}t(1-\cos t)^2dt = \int_0^{2\pi}(t-2t\cos t+t\cos^2 t)dt$

$$= \left[\frac{1}{2}t^2-2(t\sin t+\cos t)+\frac{1}{4}(t^2+t\sin 2t+\frac{1}{2}\cos 2t)\right]\Big|_0^{2\pi} = 3\pi^2,$$

$$\int_0^{2\pi}\sin t(1-\cos t)^2dt = \int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2d(1-\cos t) = \frac{1}{3}(1-\cos t)^3\Big|_0^{2\pi} = 0,$$

$$\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^3dt = \int_0^{2\pi}(1-3\cos t+3\cos^2 t-\cos^3 t)dt$$

$$= \left[t-3\sin t+\frac{3}{2}(t+\frac{1}{2}\sin 2t)-(\sin t-\frac{1}{3}\sin^3 t)\right]\Big|_0^{2\pi} = 5\pi.$$

因此
$$\iint_D (x+2y)dxdy = 3\pi^2+5\pi.$$

(18) 证明:当 $x = 1$ 时;显然所证成立.

当 $x \neq 1$ 时,令 $f(x) = x-\ln^2 x+2k\ln x-1\ (x>0)$,求导得

$$f'(x) = \frac{x-2\ln x+2k}{x}.$$

令 $g(x) = x-2\ln x+2k$,求导得

$$g'(x) = 1-\frac{2}{x}.$$

令 $g'(x)=0$，得驻点 $x=2$.

① 当 $0<x<1$ 时，$g'(x)<0$，因此 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，则

$$g(x)>g(1)=1+2k\geqslant 1+2(\ln 2-1)=2\ln 2-1>0.$$

因此 $f'(x)>0$，$f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，故 $f(x)<f(1)=0$.

在 $(0,1)$ 上，由 $x-1<0$，$f(x)<0$，可得

$$(x-1)(x-\ln^2 x+2k\ln x-1)>0.$$

② 当 $x>1$ 时，可知当 $1<x<2$ 时，$g'(x)<0$；当 $x>2$ 时，$g'(x)>0$.

因此 $g(x)$ 在 $(1,2)$ 上单调递减，在 $(2,+\infty)$ 上单调递增，则

$$g(x)>g(2)=2-2\ln 2+2k\geqslant 2-2\ln 2+2(\ln 2-1)=0.$$

因此 $f'(x)>0$，$f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，故 $f(x)>f(1)=0$.

在 $(1,+\infty)$ 上，由 $x-1>0$，$f(x)>0$，可得

$$(x-1)(x-\ln^2 x+2k\ln x-1)>0.$$

综上所述：当 $x>0$ 时，不等式 $(x-1)(x-\ln^2 x+2k\ln x-1)\geqslant 0$ 恒成立.

(19) **解**：设分割后的三段铁丝的长分别为 x,y,z，则 $x+y+z=2$.

对应圆的面积为 $$S_1=\pi\cdot\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2=\frac{x^2}{4\pi}.$$

对应正方形的面积为 $$S_2=\left(\frac{y}{4}\right)^2=\frac{y^2}{16}.$$

对应正三角形的面积为 $$S_3=\frac{1}{2}\left(\frac{z}{3}\right)^2\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}z^2}{36}.$$

则三个图形的面积之和为 $S=S_1+S_2+S_3=\dfrac{x^2}{4\pi}+\dfrac{y^2}{16}+\dfrac{\sqrt{3}z^2}{36}$.

构造辅助函数 $L(x,y,z,\lambda)=\dfrac{x^2}{4\pi}+\dfrac{y^2}{16}+\dfrac{\sqrt{3}z^2}{36}+\lambda(x+y+z-2)$.

从而所求最值问题转化为求解多元函数的条件极值问题.

由 $\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial x}=\dfrac{x}{2\pi}+\lambda=0\\ \dfrac{\partial L}{\partial y}=\dfrac{2y}{16}+\lambda=0\\ \dfrac{\partial L}{\partial z}=\dfrac{2z}{12\sqrt{3}}+\lambda=0\\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda}=x+y+z-2=0\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x=-2\pi\lambda\\ y=-8\lambda\\ z=-6\sqrt{3}\lambda\\ \lambda=-\dfrac{1}{\pi+4+3\sqrt{3}}\end{cases}$.

从而得唯一驻点$(-2\pi\lambda,-8\lambda,-6\sqrt{3}\lambda)$.

由问题的实际背景可知,在该驻点处,S 取得最小值. 因此

$$S_{\min}=\frac{(-2\pi\lambda)^2}{4\pi}+\frac{(-8\lambda)^2}{16}+\frac{\sqrt{3}(-6\sqrt{3}\lambda)^2}{36}$$

$$=(\pi+4+3\sqrt{3})\lambda^2=\frac{1}{\pi+4+3\sqrt{3}}.$$

(20) **解**:设点 P 坐标为$\left(x(t),\frac{4}{9}x^2(t)\right)$,则所围图形的面积为

$$S(t)=S=\frac{1}{2}\left[1+\frac{4}{9}x^2(t)\right]x(t)-\frac{4}{9}\int_0^{x(t)}x^2\mathrm{d}x.$$

$$=\frac{x(t)}{2}+\frac{2}{9}x^3(t)-\frac{4}{27}x^3(t)=\frac{x(t)}{2}+\frac{2}{27}x^3(t).$$

其中,前者为直线 AP 与直线 $x=x(t)$ 及 x 轴、y 轴所围梯形的面积,后者为曲线 $y=\frac{4}{9}x^2$ 与直线 $x=x(t)$ 及 x 轴所围曲面图形的面积. S 为两者之差.

则 S 关于时间 t 的变化率为 $S'(t)=\frac{x'(t)}{2}+\frac{2}{9}x^2(t)x'(t)$.

又已知当 $x(t)=3$ 时,$x'(t)=4$,代入上式,可得 $S'(t)|_{x=3}=10$.

(21) **证明**:设$f(x)=e^x-1-x(x>0)$,则有

$f'(x)=e^x-1>0$,因此$f(x)>f(0)=0$, $\frac{e^x-1}{x}>1$.

从而 $e^{x_2}=\frac{e^{x_1}-1}{x_1}>1$,可知 $x_2>0$.

猜想 $x_n>0$,现用数学归纳法证明.

当 $n=1$ 时,$x_1>0$,成立;

假设当 $n=k(k=2,3,\cdots)$ 时,有 $x_k>0$,则 $n=k+1$ 时,有

$e^{x_{k+1}}=\frac{e^{x_k}-1}{x_k}>1$,因此 $x_{k+1}>0$.

从而得知无论 n 取任何自然数,都有 $x_n>0$,即数列$\{x_n\}$ 有下界.

又 $x_{n+1}-x_n=\ln\frac{e^{x_n}-1}{x_n}-\ln e^{x_n}=\ln\frac{e^{x_n}-1}{x_ne^{x_n}}$,设 $g(x)=e^x-1-xe^x$.

当 $x>0$ 时,$g'(x)=e^x-e^x-xe^x=-xe^x<0$.

因此 $g(x)$ 单调递减,$g(x)<g(0)=0$,即有 $e^x-1<xe^x$,

因此 $x_{n+1}-x_n=\ln\dfrac{e^{x_n}-1}{x_n e^{x_n}}<\ln 1=0$,可知数列$\{x_n\}$单调递减.

由单调有界准则可知数列$\{x_n\}$收敛.

设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$,则有 $Ae^A=e^A-1(A\geqslant 0)$. 可知 $A=0$ 是该方程的解.

因为当 $x>0$ 时,$g(x)=e^x-1-xe^x<g(0)=0$.

因此 $A=0$ 是方程 $Ae^A=e^A-1$ 唯一的解. 故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

(22) 解:(Ⅰ) 由$f(x_1,x_2,x_3)=0$得

$$\begin{cases}x_1-x_2+x_3=0,\\ x_2+x_3=0,\\ x_1+ax_3=0,\end{cases}\quad 即\begin{cases}x_1=-2x_3,\\ x_2=-x_3,\\ (a-2)x_3=0.\end{cases}$$

当 $a\neq 2$ 时,方程组有唯一解:$x_1=x_2=x_3=0$.

当 $a=2$ 时,方程组有无穷解:令 $x_1=1$,可得解 $\boldsymbol{x}=k\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix},k\in R$.

(Ⅱ) 当 $a\neq 2$ 时,做非退化的线性变换$\begin{cases}y_1=x_1-x_2+x_3,\\ y_2=x_2+x_3,\\ y_3=x_1+ax_3.\end{cases}$

此时$f(x_1,x_2,x_3)$的规范形为 $f=y_1^2+y_2^2+y_3^2$.

当 $a=2$ 时,做非退化的线性变换$\begin{cases}y_1=x_1-x_2+x_3,\\ y_2=x_2+x_3,\\ y_3=x_3.\end{cases}$

则
$$\begin{aligned}f(x_1,x_2,x_3)&=y_1^2+y_2^2+(y_1+y_2)^2=2y_1^2+2y_2^2+2y_1y_2\\&=2(y_1+\frac{1}{2}y_2)^2+\frac{3}{2}y_2^2.\end{aligned}$$

令 $z_1=[\sqrt{2}(y_1+\frac{1}{2}y_2)]^2$, $z_2=(\frac{\sqrt{6}}{2}y_2)^2$,

则$f(x_1,x_2,x_3)$的规范形为 $f=z_1^2+z_2^2$.

(23) 解:(Ⅰ) 由题意知,$|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$,且 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})$. 由于

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1&2&a\\1&3&0\\2&7&-a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&a\\1&3&0\\3&9&0\end{vmatrix}=a\begin{vmatrix}1&3\\3&9\end{vmatrix}=0,$$

$$|\boldsymbol{B}| = \begin{vmatrix} 1 & a & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & a+1 & 3 \end{vmatrix} = 2 - a,$$

因此可得 $a = 2$.

（Ⅱ）求满足 $\boldsymbol{AP} = \boldsymbol{B}$ 的可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，即求方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{B}$ 的解.

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) = \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 7 & -2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 6 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

令 $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3)$，$\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$，$\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3)$，

则可得方程组 $\boldsymbol{Ax}_1 = \boldsymbol{\beta}_1$ 的基础解系为 $(-6,2,1)^{\mathrm{T}}$，特解为 $(3,-1,0)^{\mathrm{T}}$；

得方程组 $\boldsymbol{Ax}_2 = \boldsymbol{\beta}_2$ 的基础解系为 $(-6,2,1)^{\mathrm{T}}$，特解为 $(4,-1,0)^{\mathrm{T}}$；

得方程组 $\boldsymbol{Ax}_3 = \boldsymbol{\beta}_3$ 的基础解系为 $(-6,2,1)^{\mathrm{T}}$，特解为 $(4,-1,0)^{\mathrm{T}}$.

从而可知三个非齐次方程组的通解为

$$\boldsymbol{\xi}_1 = \boldsymbol{x}_1 = k_1(-6,2,1)^{\mathrm{T}} + (3,-1,0)^{\mathrm{T}};$$

$$\boldsymbol{\xi}_2 = \boldsymbol{x}_2 = k_2(-6,2,1)^{\mathrm{T}} + (4,-1,0)^{\mathrm{T}};$$

$$\boldsymbol{\xi}_3 = \boldsymbol{x}_3 = k_3(-6,2,1)^{\mathrm{T}} + (4,-1,0)^{\mathrm{T}}.$$

因此
$$\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3) = \begin{pmatrix} -6k_1+3 & -6k_2+4 & -6k_3+4 \\ 2k_1-1 & 2k_2-1 & 2k_3-1 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{pmatrix}.$$

由 $\boldsymbol{P}$ 为可逆矩阵，即 $|\boldsymbol{P}| \neq 0$，可知 $k_2 \neq k_3$. 因此

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} -6k_1+3 & -6k_2+4 & -6k_3+4 \\ 2k_1-1 & 2k_2-1 & 2k_3-1 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{pmatrix}, k_1,k_2,k_3 \text{ 为任意常数，且 } k_2 \neq k_3.$$