2019 年全国硕士研究生入学统一考试数学(二)真题

一、选择题:1 ~8 小题,每小题 4 分,共 32 分. 下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的.

(1)当 $x\to 0$,$x-\tan x$ 与 x^k 是同阶无穷小,求 k(　　)

(A)1　　(B)2　　(C)3　　(D)4

(2)$y=x\sin x+2\cos x\left[x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{3}{2}\pi\right)\right]$的拐点坐标是(　　)

(A)$\left(\frac{\pi}{2},1\right)$　　(B) $(0,2)$

(C) $(\pi,-2)$　　(D)$\left(\frac{3}{2}\pi,-\frac{3}{2}\pi\right)$

(3)下列反常积分发散的是(　　)

(A) $\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx$　　(B) $\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx$

(C) $\int_0^{+\infty}\frac{\arctan x}{1+x^2}dx$　　(D) $\int_0^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}dx$

(4)已知微分方程 $y''+ay'+by=ce^x$的通解为 $y=(C_1+C_2x)e^{-x}+e^x$,则 a,b,c 依次为(　　)

(A)1,0,1　　(B)1,0,2　　(C)2,1,3　　(D)2,1,4

(5)已知平面区域 $D=\{(x,y)\mid |x|+|y|\leqslant\frac{\pi}{2}\}$,$I_1=\iint\limits_D\sqrt{x^2+y^2}dxdy$,$I_2=\iint\limits_D\sin\sqrt{x^2+y^2}dxdy$,

$I_3=\iint\limits_D\left(1-\cos\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy$,试比较 I_1,I_2,I_3的大小(　　)

(A)$I_3<I_2<I_1$　　(B)$I_1<I_2<I_3$

(C)$I_2<I_1<I_3$　　(D)$I_2<I_3<I_1$

(6)已知$f(x)$,$g(x)$二阶导数且在 $x=a$ 处连续,请问$f(x)$,$g(x)$相切于 a 且曲率相等是 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-g(x)}{(x-a)^2}=0$ 的什么条件?(　　)

(A)充分非必要条件　　(B)充分必要条件

(C)必要非充分条件　　(D)既非充分又非必要条件

(7)设 $\boldsymbol{A}$ 是四阶矩阵,$\boldsymbol{A}^*$是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵,若线性方程 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系中只有 2 个向量,则 $\boldsymbol{A}^*$的秩是(　　)

(A)0　　(B)1　　(C)2　　(D)3

(8)设 $\boldsymbol{A}$ 是三阶实对称矩阵,$\boldsymbol{E}$ 是三阶单位矩阵,若 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{E}$. 且$|\boldsymbol{A}|=4$,则二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}$ 规范形为(　　)

(A)$y_1^2+y_2^2+y_3^2$　　(B)$y_1^2+y_2^2-y_3^2$

(C)$y_1^2-y_2^2-y_3^2$　　(D) $-y_1^2-y_2^2-y_3^2$

二、填空题:9 ~14 小题,每小题 4 分,共 24 分.

(9)$\lim\limits_{x\to 0}(x+2^x)^{\frac{x}{2}}=$________.

(10)曲线$\begin{cases}x=t-\sin t\\y=1-\cos t\end{cases}$在$t=\frac{3}{2}\pi$对应点处切线在$y$轴上的截距为________.

(11)设函数$f(u)$可导,$z=yf(\frac{y^2}{x})$,则$2x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=$________.

(12)设函数$y=\ln\cos x(0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{6})$的弧长为________.

(13)已知函数$f(x)=x\int_1^x\frac{\sin t^2}{t}dt$,则$\int_0^1 f(x)dx=$________.

(14)已知矩阵$A=\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\-2&1&-1&1\\3&-2&2&-1\\0&0&3&4\end{pmatrix}$,$A_{ij}$表示$|A|$中$(i,j)$元的代数余子式,则

$A_{11}-A_{12}=$________.

三、解答题:15~23小题,共94分,解答应写出文字说明、证明过程或验算步骤.

(15)(本题满分10分)

已知$f(x)=\begin{cases}x^{2x},x>0,\\xe^x+1,x\leqslant 0,\end{cases}$求$f'(x)$,并求$f(x)$的极值.

(16)(本题满分10分)

求不定积分$\int\frac{3x+6}{(x+1)^2(x^2+x+1)}dx$.

(17)(本题满分 10 分)

$y=y(x)$是微分方程 $y'-xy=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}e^{\frac{x^2}{2}}$满足 $y(1)=\sqrt{e}$特解.

(Ⅰ)求 $y(x)$;

(Ⅱ)设平面区域 $D=\{(x,y)\}$,$D=\{(x,y)\mid 1\leqslant x\leqslant 2,0\leqslant y\leqslant y(x)\}$,求 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.

(18)(本题满分 10 分)

已知平面区域 D 满足 $|x|\leqslant y$,$(x^2+y^2)^3\leqslant y^4$,求 $\iint\limits_D \dfrac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(19)(本题满分 10 分)

设 n 是正整数,记 S_n 为 $y=e^{-x}\sin x(0\leqslant x\leqslant n\pi)$ 与 x 轴所围图形的面积,求 S_n,并求 $\lim\limits_{x\to\infty}S_n$.

(20)(本题满分 11 分)

已知函数 $u(x,y)$ 满足 $2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+3\frac{\partial u}{\partial y}=0$,求 a,b 的值,使得在变换 $u(x,y)=v(x,y)e^{ax+by}$ 之下,上述等式可化为函数 $v(x,y)$ 的不含一阶偏导数的等式.

(21)(本题满分 11 分)

已知函数$f(x,y)$在$[0,1]$上具有二阶导数,且$f(0)=0$,$f(1)=1$,$\int_0^1 f(x)\,dx=1$,证明:

(Ⅰ)存在$\xi\in(0,1)$,使得$f'(\xi)=0$;

(Ⅱ)存在$\eta\in(0,1)$,使得$f''(\eta)<-2$.

(22)(本题满分 11 分)

已知向量组(Ⅰ)$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\4\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\2\\a^2+3\end{pmatrix}$,(Ⅱ)$\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\a+3\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}0\\2\\1-a\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{\beta}_3=\begin{pmatrix}1\\3\\a^2+3\end{pmatrix}$,若向量组(Ⅰ)和向量组(Ⅱ)等价,求$a$的取值,并将$\boldsymbol{\beta}_3$用$\boldsymbol{\alpha}_1$,$\boldsymbol{\alpha}_2$,$\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示.

(23)(本题满分 11 分)

已知矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-2&-2&1\\2&x&-2\\0&0&-2\end{pmatrix}$与$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&-1&0\\0&0&y\end{pmatrix}$相似,

(Ⅰ)求x,y;

(Ⅱ)求可逆矩阵$\boldsymbol{P}$使得$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$.

2019年全国硕士研究生入学统一考试数学(二)参考答案

一、选择题

(1)C 【解析】因 $x-\tan x\sim-\frac{1}{3}x^3$,若要 $x-\tan x$ 与 x^k 是同阶无穷小,则 $k=3$,故选 C.

(2)B 【解析】$y'=\sin x+x\cos x-2\sin x, y''=-x\sin x$,令 $y''=0$ 得 $x=0,x=\pi$,又因为 $y'''=-\sin x-x\cos x$,将上述两点代入 $y'''(\pi)\neq0$,所以$(\pi,-2)$是拐点.

(3)D 【解析】对 A:$\int_0^{+\infty}xe^{-x}dx=\int_0^{+\infty}xd(-e^{-x})=-xe^{-x}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}e^{-x}dx=-e^{-x}\Big|_0^{+\infty}=1$;

对 B:$\int_0^{+\infty}xe^{-x^2}dx=-\frac{1}{2}e^{-x^2}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{2}$;

对 C:$\int_0^{+\infty}\frac{\arctan x}{1+x^2}dx=\frac{1}{2}(\arctan x)^2\Big|_0^{+\infty}=\frac{\pi^2}{8}$;

对 D:$\int_0^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}dx=\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_0^{+\infty}=+\infty$. 发散.

(4)D 【解析】由条件知特征根为 $\lambda_1=\lambda_2=-1$,特征方程为$(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)=\lambda^2+2\lambda+1=0$,故 $a=2,b=1$,而 $y^*=e^x$ 为特解,代入得 $c=4$,故选 D.

(5)A 【解析】因为 $\sin\sqrt{x^2+y^2}<\sqrt{x^2+y^2}$,$1-\cos\sqrt{x^2+y^2}<\sqrt{x^2+y^2}$,所以 $I_2<I_1,I_3<I_1$.

因为 $1-\cos\sqrt{x^2+y^2}=2\sin\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}\sin\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}$,

$\sin\sqrt{x^2+y^2}=2\sin\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}\cos\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}$,

因为 $x^2+y^2<\frac{\pi}{4}\quad\therefore\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}<\frac{\pi}{4}$,

所以 $\sin\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}<\cos\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}$,

所以 $1-\cos\sqrt{x^2+y^2}<\sin\sqrt{x^2+y^2}$,

所以 $I_3<I_2$,所以 $I_3<I_2<I_1$,故选 A.

(6)B 【解析】必要性:$f(x),g(x)$相切于 a,则 $f(a)=g(a),f'(a)=g'(a)$,

$P=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$,$y''(a)=\pm g''(a)$,

$\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-g(x)}{(x-a)^2}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)-g'(x)}{2(x-e)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f''(x)-g''(x)}{2}=\frac{f''(a)-g''(a)}{2}=\begin{cases}0\\2f''(a)\end{cases}$.

充分性:$0=\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-g(x)}{(x-a)^2}$,$\quad\therefore f(a)=g(a)$.

$=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)-g'(x)}{2(x-a)}$,$\quad\therefore f'(a)=g'(a)$.

$\lim\limits_{x\to a}\frac{f''(x)-g''(x)}{2}=\frac{f''(a)-g''(a)}{2}\quad\therefore f''(a)=g''(a)$.

$f(x)$与 $g(x)$相切于点 a,且曲率相等,故选 B.

(7)A 【解析】因为 $\boldsymbol{A}x=\boldsymbol{0}$ 的基础解系中只有 2 个向量,$\therefore 4-r(\boldsymbol{A})=2$,则 $r(\boldsymbol{A})=2$

$\therefore r(A^*)=0$，故选 A.

(8)C 【解析】设 λ 为 A 的特征值，由 $A^2+A=2E$ 得 $\lambda^2+\lambda=2$，

解得 $\lambda=-2$ 或 1，所以 A 的特征值是 1 或 -2.

又$\because |A|=4$，所以 A 的三个特征值为 $1,-2,-2$，$\therefore$ 二次型 x^TAx 的规范形为 $y_1^2-y_2^2-y_3^2$，故选 C.

二、填空题

(9)$4e^2$ 【解析】$\lim\limits_{x\to0}(x+2^x)^{\frac{x}{2}}=\lim\limits_{x\to0}(1+x+2^x-1)^{\frac{1}{x+2^x-1}\cdot\frac{2(x+2^x-1)}{x}}=\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{2(x+2^x-1)}{x}}$

$=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{2+2\cdot2^x\ln2}{1}}=e^{2+2\ln2}=4e^2$.

(10)$\frac{3}{2}\pi+2$ 【解析】当 $t=\frac{3}{2}\pi$ 时，$x=\frac{3}{2}\pi-\sin\frac{3}{2}\pi=\frac{3}{2}\pi+1$，$y=1-\cos\frac{3}{2}\pi=1$，

即为点$(\frac{3}{2}\pi+1,1)$.

$$k=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\sin\frac{1}{1-\cos t}\frac{dy}{dx}\bigg|_{t=\frac{3}{2}\pi}=\frac{-1}{1}=-1,$$

$$y-1=(x-\frac{3}{2}\pi-1)\Rightarrow y-1=-x+\frac{3}{2}\pi+1,$$

$$\Rightarrow y=-x+\frac{3}{2}\pi+2.$$

在 y 轴上的截距为 $\frac{3}{2}\pi+2$.

(11)$yf(\frac{y^2}{x})$ 【解析】$\frac{\partial z}{\partial x}=yf'(\frac{y^2}{x})(-\frac{y^2}{x^2})=-\frac{y^2}{x^2}f'(\frac{y^2}{x})$，

$$\frac{\partial z}{\partial y}=f(\frac{y^2}{x})+yf'(\frac{y^2}{x})(\frac{2y}{x})=f(\frac{y^2}{x})+\frac{(2y^2)}{x}f'(\frac{y^2}{x}),$$

所以 $2x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=yf(\frac{y^2}{x})$.

(12)$\frac{1}{2}\ln3$ 【解析】$y=\ln\cos x,0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{6}$.

$$=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sqrt{1+(\frac{-\sin x}{\cos x})^2}dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sqrt{\frac{1}{\cos^2x}}dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sec x dx=\ln(\sec x+\tan x)\bigg|_0^{\frac{\pi}{6}}=\ln(\frac{2}{\sqrt3}+\frac{\sqrt3}{3})=\ln\sqrt3=\frac{1}{2}\ln3.$$

(13)$\frac{1}{4}(\cos1-1)$ 【解析】$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1(x\int_1^x\frac{\sin t^2}{t}dt)dx$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1(\int_1^x\frac{\sin t^2}{t}dt)dx^2$$

$$=\frac{1}{2}(x^2\int_1^x\frac{\sin t^2}{t}dt\bigg|_0^1-\int_0^1x^2\cdot\frac{\sin x^2}{x}dx)$$

$$=\frac{1}{2}(-\int_0^1x\sin x^2\,dx)$$

$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int_0^1 \sin x^2 \mathrm{d}x^2 = -\frac{1}{4}(1-\cos x^2)\Big|_0^1 = \frac{1}{4}(\cos 1 - 1).$

(14) -4 【解析】

$$A_{11}-A_{12}=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -4.$$

三、解答题

(15) 解：当 $x>0$ 时，$f(x)=x^{2x}=e^{2x\ln x}$，$f'(x)=e^{2x\ln x}(2\ln x+2)=2x^{2x}(\ln x+1)$

当 $x<0$ 时，$f'(x)=e^x+xe^x=(x+1)e^x$

当 $x=0$ 时，$\lim\limits_{x\to0^-}f'(x) = \lim\limits_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{xe^x+1-1}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}e^x=1$

$\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{e^{2x\ln x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{2x\ln x}{x}=-\infty$

$\because \lim\limits_{x\to0^-}f'(x)\neq\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)$，故 $f'(0)$ 不存在.

$\therefore$ 有 $f(x)$ 在 $x=0$ 点不可导.

于是 $f'(x)=\begin{cases}2x^{2x}(\ln x+1), x>0\\ \text{不存在}, x=0\\ (x+1)e^x, x<0\end{cases}$

令 $f'(x)=0$ 得 $x_1=\frac{1}{e}$，$x_2=-1$，于是有下表

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,\frac{1}{e})$	$\frac{1}{e}$	$(\frac{1}{e},+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	不存在	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	极小值	↗	极大值	↘	极小值	↗

于是有 $f(x)$ 的极小值为 $f(-1)=1-\frac{1}{e}$，$f(\frac{1}{e})=e^{-\frac{2}{e}}$，极大值为 $f(0)=1$.

(16) 解：令 $\frac{3x+6}{(x-1^2)(x^2+x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+x+1}$

$=\frac{A(x-1)(x^2+x+1)+B(x^2+x+1)+(Cx+D)(x-1)^2}{(x-1)^2(x^2+x+1)}$

则 $3x+6=A(x-1)(x^2+x+1)+B(x^2+x+1)+(Cx+D)(x-1)^2$

令 $x=1$ 得 $9=3B$，$B=3$

令 $x=0$ 得 $6=-A+B+D$

令 $x=-1$ 得 $3=-2A+B+4(D-C)$

令 $x=2$ 得 $12=7A+7B+2C+D$

解得 $A=-2$，$B=3$，$C=2$，$D=1$

故原式 $= -2\dfrac{1}{x-1}dx + 3\dfrac{1}{(x-1)^2}dx + \dfrac{2x+1}{x^2+x+1}dx$

$= -2\ln|x-1| - \dfrac{3}{x-1} + \ln(x^2+x+1) + C.$

(17)解:(Ⅰ)$y' - xy = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}e^{\frac{x^2}{2}}$

通解 $y = e^{\int x dx}\left(\int \dfrac{1}{2\sqrt{x}}e^{\frac{x^2}{2}} \cdot e^{\int(-x)dx}dx + C\right)$

$= e^{\frac{x^2}{2}}\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x}}e^{\frac{x^2}{2}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}dx + C\right)$

$= e^{\frac{x^2}{2}}\left(\int \dfrac{1}{2\sqrt{x}}dx + C\right)$

$= e^{\frac{x^2}{2}}(\sqrt{x} + C)$

由 $f(1) = e = (C+1)\sqrt{e}$ 得 $C = 0$,

所以 $f(x) = \sqrt{x} \cdot e^{\frac{x^2}{2}}$

(Ⅱ)$V_x = \pi\int_1^2 (\sqrt{x} \cdot e^{\frac{x^2}{2}})^2 dx$

$= \pi\int_1^2 x \cdot e^{x^2} dx$

$= \dfrac{\pi}{2}\int_1^2 e^{x^2} dx^2 = \dfrac{\pi}{2}e^{x^2}\Big|_1^2 = \dfrac{\pi}{2}(e^4 - e).$

(18)解:$(x^2+y^2)^3 = y^4$ 的极坐标方程为 $r = \sin^2\theta$,由对称性:

$\iint\limits_D \dfrac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}d\sigma = \iint\limits_D \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}d\sigma$

$= \iint\limits_{D_1} \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}d\sigma = 2\iint\limits_D \dfrac{r\sin\theta}{r}r dr d\theta$

$= 2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{\sin^2\theta} r\sin\theta dr\right)d\theta = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^5\theta d\theta$

$= -\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2\theta)^2 d\cos\theta$

$= -\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - 2\cos^2\theta + \cos^4\theta) d\cos\theta$

$= -\left(\cos\theta - \dfrac{2}{3}\cos^3\theta + \dfrac{1}{5}\cos^5\theta\right)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$

$= \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{2\sqrt{2}}{8} + \dfrac{1}{5} \cdot \dfrac{4\sqrt{2}}{32}\right) = \dfrac{43}{120}\sqrt{2}.$

(19)解:设区间 $[k\pi, (k+1)\pi]$ $(k = 0, 1, 2, \cdots, n-1)$ 上所围的面积记为 u_k,则

$u_k = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-x}|\sin x|dx = (-1)^k\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-x}\sin x dx;$

记 $I = \int e^{-x}\sin x dx$,则

$$I=-\int e^{-x}\mathrm{d}\cos x=-(e^{-x}\cos x-\int \cos x\mathrm{d}e^{-x})$$

$$=-e^{-x}\cos x-\int e^{-x}\mathrm{d}\sin x=-e^{-x}\cos x-(e^{-x}\sin x-\int \sin x\mathrm{d}e^{-x})$$

$$=-e^{-x}(\cos x+\sin x)-I$$

所以 $I=-\frac{1}{2}e^{-x}(\cos x+\sin x)+C$;

因此 $u_k=(-1)^k(-\frac{1}{2})e^{-k}(\cos x+\sin x)\Big|_{k\pi}^{(k+1)\pi}=\frac{1}{2}(e^{-(k+1)\pi}+e^{-k\pi})$

(这里需要注意 $\cos k\pi=(-1)^k$)

因此 $S_n=\sum\limits_{k=0}^{n-1}u_k=\frac{1}{2}+\sum\limits_{k=1}^{n}e^{-k\pi}=\frac{1}{2}+\frac{e^{-\pi}-e^{-(n+1)\pi}}{1-e^{-\pi}}$;

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{2}+\lim_{n\to\infty}\frac{e^{-\pi}-e^{-(n+1)\pi}}{1-e^{-\pi}}=\frac{1}{2}+\frac{e^{-\pi}}{1-e^{-\pi}}=\frac{1}{2}+\frac{1}{e^{\pi}-1}.$$

(20)解:$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial \nu}{\partial x}e^{ax+by}+\nu(x,y)ae^{ax+by}$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial \nu}{\partial y}e^{ax+by}+\nu(x,y)ae^{ax+by}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 \nu}{\partial x^2}e^{ax+by}+\frac{\partial \nu}{\partial x}ae^{ax+by}+a[\frac{\partial \nu}{\partial x}e^{ax+by}+\nu(x,y)ae^{ax+by}]$$

$$=\frac{\partial^2 \nu}{\partial x^2}e^{ax+by}+\frac{\partial \nu}{\partial x}2ae^{ax+by}+\nu(x,y)a^2e^{ax+by}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 \nu}{\partial y^2}e^{ax+by}+\frac{\partial \nu}{\partial y}2be^{ax+by}+\nu(x,y)b^2e^{ax+by}$$

代入已知条件

$$2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+3\frac{\partial u}{\partial y}=0$$

得 $2(\frac{\partial^2 \nu}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 \nu}{\partial y^2})+4a\frac{\partial \nu}{\partial x}+(3-4b)\frac{\partial \nu}{\partial y}+(2a^2-2b^2+3b)\nu(x,y)=0$

根据已知条件,上式不含一阶偏导,故 $a=0,3-4b=0$

即 $a=0,b=\frac{3}{4}$.

(21)证明:(Ⅰ)设 $f(x)$ 在 ξ 处取得最大值,

则由条件 $f(0)=0,f(1)=1,\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=1$

可知 $f(\xi)>1$,于是 $0<\xi<1$,

由费马引理得 $f'(\xi)=0$.

(Ⅱ)若不存在 $\eta\in(0,1)$,使 $f(\eta)<-2$,

则对任何 $x\in(0,1)$,有 $f(x)\geqslant -2$,

由拉格朗日中值定理得:

$f(x)-f(\xi)=f(e)(x-\xi)$,C 介于 x 与 ξ 之间,

不妨设 $x<\xi,f'(x)\leqslant -2(x-\xi)$,

积分得 $\int_0^{\xi}f'(x)\mathrm{d}x\leqslant -2\int_0^{\xi}(x-\xi)\mathrm{d}x=\xi^2<1$,

于是$f(\xi)-f(0)<1$,即$f(\xi)<1$,

这与$f(\xi)>1$相矛盾,故存在$\eta\in(0,1)$,使$f''(\eta)<-2$.

(22)解:由等价的定义可知$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$都能由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示,则有

$\mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$

对$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$作初等行变换可得:

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&1&1&0&1\\1&0&2&1&2&3\\4&4&a^2+3&a+3&1-a&a^2+3\end{array}\right)$$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&1&1&0&1\\0&-1&1&0&2&2\\0&0&a^2-1&a-1&1-a&a^2-1\end{array}\right),$$

当$a=-1$时,有$\mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)<\mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$;

当$a=1$,则$\mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=2$

可知$a\neq1$且$a\neq-1$时,此时$\mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=3$

则由$a=1$或者$a\neq1$且$a\neq-1$时,$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示.

此时,要保证$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$可由$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$线性表示,

对$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$作初等行变换可得:

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&1&1&1&1\\1&2&3&1&0&2\\a+3&1-a&a^2+3&4&4&a^2+3\end{array}\right)$$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&1&1&1&1\\0&2&2&0&-1&1\\0&0&a^2-1&1-a&\frac{3}{2}(1-a)&\frac{2a^2-a-1}{2}\end{array}\right),$$

当$a=1$时,有$\mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=2$

可知当$a\neq1$且$a\neq-1$时,此时$\mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=3$

此时,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$可由$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$线性表示,

综上所述:当$a=-1$时,向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$与向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$可相互线性表示.

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_3)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&1&1\\0&-1&1&2\\0&0&a^2-1&a^2-1\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc:c}1&0&0&1\\0&1&0&-1\\0&0&1&1\end{array}\right)$$

当$a\neq1$时,则$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$.

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_3)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&1&1\\0&-1&1&2\\0&0&0&0\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc:c}1&0&2&3\\0&1&-1&-2\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

当$a=1$时,

基础解系为$k\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\-2\\0\end{pmatrix}(k\in R)$,则$\boldsymbol{\beta}_3=(3-2k)\boldsymbol{\alpha}_1+(k-2)\boldsymbol{\alpha}_2+k\boldsymbol{\alpha}_3$.

(23)(Ⅰ)$\because$ 相似矩阵有相同的特征值,因此有$\begin{cases}-2+x-2=2-1+y,\\ |A|=|B|,\end{cases}$

又$|A|=-2(4-2x)$,$|B|=-2y$,所以$x=3$,$y=-2$.

(Ⅱ)$|\lambda E-B|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & -1 & 0\\ 0 & x+1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda-2)=0$

$\lambda_1=-1,\lambda_2=-2,\lambda_3=2$

$\lambda=-1$ 时,$A+E=\begin{pmatrix}-1 & -2 & 1\\ 2 & 4 & -2\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ $\xi_1=(-2,1,0)^T$

$\lambda=-2$ 时,$A+2E=\begin{pmatrix}0 & -2 & 1\\ 2 & 5 & -2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}4 & 10 & 4\\ 0 & -10 & 5\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}4 & 0 & 1\\ 0 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ $\xi_2=(-1,2,4)^T$

$\lambda=2$ 时,$A-2E=\begin{pmatrix}-4 & -2 & 1\\ 2 & 1 & -2\\ 0 & 0 & -4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ $\xi_3=(-1,2,0)^T$

$P_1=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\begin{pmatrix}-2 & -1 & -1\\ 1 & 2 & 2\\ 0 & 4 & 0\end{pmatrix}$, $P_1^{-1}AP_1\begin{pmatrix}-1 & & \\ & -2 & \\ & & 2\end{pmatrix}$.

$\lambda_1=-1$ 时,$B+E=\begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ $x_1=(-1,3,0)^T$

$\lambda_2=-2$ 时,$B+2E=\begin{pmatrix}4 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ $x_2=(0,0,1)^T$

$\lambda_3=2$ 时,$B-2E=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & -4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ $x_3=(1,0,0)^T$

$P_2=(x_1,x_2,x_3)$ $\quad P_2^{-1}BP_2=\begin{pmatrix}-1 & & \\ & -2 & \\ & & 2\end{pmatrix}$

$B=P_2\begin{pmatrix}-1 & & \\ & -2 & \\ & & 2\end{pmatrix}P_2^{-1}$

$B=P_2P_1^{-1}(A_2)P_1P_2^{-1}$

故 $P=P_1P_2^{-1}$

$=\begin{pmatrix}-2 & -1 & -1\\ 1 & 2 & 2\\ 0 & 4 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 3 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -1 & -1\\ 2 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}$.