2015 年全国硕士研究生入学统一考试数学(二)真题

一、选择题:1 ~ 8 小题,每小题 4 分,共 32 分. 下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的.

(1) 下列反常积分中收敛的是(　　)

(A) $\int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$　　(B) $\int_2^{+\infty} \frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x$　　(C) $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x$　　(D) $\int_2^{+\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$

(2) 函数 $f(x) = \lim\limits_{t\to 0}\left(1 + \frac{\sin t}{x}\right)^{\frac{x^2}{t}}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内(　　)

(A) 连续　　(B) 有可去间断点

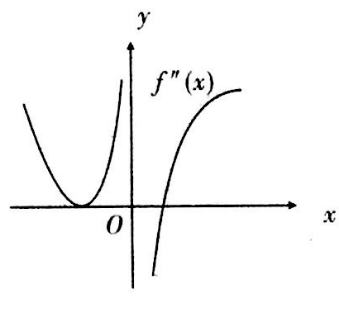
(C) 有跳跃间断点　　(D) 有无穷间断点

(3) 设函数 $f(x) = \begin{cases} x^\alpha \cos\frac{1}{x^\beta}, & x > 0, \\ 0, & x \leqslant 0 \end{cases}$ $(\alpha > 0, \beta > 0)$,若 $f'(x)$ 在 $x = 0$ 处连续,则(　　)

(A) $\alpha - \beta > 1$　　(B) $0 < \alpha - \beta \leqslant 1$

(C) $\alpha - \beta > 2$　　(D) $0 < \alpha - \beta \leqslant 2$

(4) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续,其二阶导数 $f''(x)$ 的图形如图所示,则曲线 $y = f(x)$ 的拐点的个数为(　　)



(A) 0　　(B) 1

(C) 2　　(D) 3

(5) 设函数 $f(u,v)$ 满足 $f\left(x + y, \frac{y}{x}\right) = x^2 - y^2$,则 $\left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{\substack{u=1\\v=1}}$ 与 $\left.\frac{\partial f}{\partial v}\right|_{\substack{u=1\\v=1}}$ 依次是(　　)

(A) $\frac{1}{2}, 0$　　(B) $0, \frac{1}{2}$　　(C) $-\frac{1}{2}, 0$　　(D) $0, -\frac{1}{2}$

(6) 设 D 是第一象限中由曲线 $2xy = 1, 4xy = 1$ 与直线 $y = x, y = \sqrt{3}x$ 围成的平面区域,函数

$f(x,y)$ 在 D 上连续,则 $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=($　　$)$

(A) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{2\sin 2\theta}}^{\frac{1}{\sin 2\theta}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r$

(B) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r$

(C) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{2\sin 2\theta}}^{\frac{1}{\sin 2\theta}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)\mathrm{d}r$

(D) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)\mathrm{d}r$

(7) 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&a\\1&4&a^2\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\d\\d^2\end{pmatrix}$,若集合 $\Omega=\{1,2\}$,则线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解的充分必要条件为(　　)

(A) $a\notin\Omega,d\notin\Omega$

(B) $a\notin\Omega,d\in\Omega$

(C) $a\in\Omega,d\notin\Omega$

(D) $a\in\Omega,d\in\Omega$

(8) 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Py}$ 下的标准形为 $2y_1^2+y_2^2-y_3^2$,其中 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$,若 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{e}_1,-\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_2)$,则 $f=(x_1,x_2,x_3)$ 在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Qy}$ 下的标准形为(　　)

(A) $2y_1^2-y_2^2+y_3^2$

(B) $2y_1^2+y_2^2-y_3^2$

(C) $2y_1^2-y_2^2-y_3^2$

(D) $2y_1^2+y_2^2+y_3^2$

二、填空题:9 ~ 14 小题,每小题 4 分,共 24 分.

(9) 已知 $\begin{cases}x=\arctan t,\\y=3t+t^3\end{cases}$,则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=1}=$ ________.

(10) 函数 $f(x)=x^2 2^x$ 在 $x=0$ 处的 n 阶导数 $f^{(n)}(0)=$ ________.

(11) 设函数 $f(x)$ 连续,$\varphi(x)=\int_0^{x^2}xf(t)\mathrm{d}t$.若 $\varphi(1)=1,\varphi'(1)=5$,则 $f(1)=$ ________.

(12) 设函数 $y=y(x)$ 是微分方程 $y''+y'-2y=0$ 的解,且在 $x=0$ 处 $y(x)$ 取得极值 3,则 $y(x)=$ ________.

(13) 若函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $\mathrm{e}^{x+2y+3z}+xyz=1$ 确定,则 $\left.\mathrm{d}z\right|_{(0,0)}=$ ________.

(14) 若三阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $2,-2,1$,$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$,其中 $\boldsymbol{E}$ 为三阶单位矩阵,则行列式 $|\boldsymbol{B}|=$ ________.

三、解答题:15 ~ 23 小题,共 94 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 10 分)

设函数$f(x)=x+a\ln(1+x)+bx\sin x$,$g(x)=kx^3$,若$f(x)$与$g(x)$在$x\to 0$时是等价无穷小,求$a,b,k$的值.

(16)(本题满分 10 分)

设$A>0$,D是由曲线段$y=A\sin x\left(0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$及直线$y=0$,$x=\frac{\pi}{2}$所围成的平面区域,$V_1$,$V_2$分别表示$D$绕$x$轴与绕$y$轴旋转所成旋转体的体积.若$V_1=V_2$,求$A$的值.

(17)（本题满分 11 分）

已知函数 $f(x,y)$ 满足

$$f''_{xy}(x,y)=2(y+1)e^{x},\quad f'_{x}(x,0)=(x+1)e^{x},\quad f(0,y)=y^{2}+2y,$$

求 $f(x,y)$ 的极值.

(18)（本题满分 10 分）

计算二重积分 $\iint\limits_{D} x(x+y)\,dx\,dy$，其中 $D=\{(x,y)\mid x^{2}+y^{2}\leqslant 2,y\geqslant x^{2}\}$.

(19)（本题满分 11 分）

已知函数$f(x) = \int_x^1 \sqrt{1+t^2}\mathrm{d}t + \int_1^{x^2} \sqrt{1+t}\mathrm{d}t$,求$f(x)$零点的个数.

(20)（本题满分 10 分）

已知高温物体置于低温介质中,任一时刻该物体温度对时间的变化率与该时刻物体和介质的温差成正比,现将一初始温度为 120℃ 的物体在 20℃ 的恒温介质中冷却,30min 后该物体温度降至 30℃,若要将该物体的温度继续降至 21℃,还需冷却多长时间?

(21)（本题满分 10 分）

已知函数$f(x)$在区间$[a,+\infty)$上具有二阶导数，$f(a)=0$，$f'(x)>0$，$f''(x)>0$. 设$b>a$，曲线$y=f(x)$在点$(b,f(b))$处的切线与x轴的交点是$(x_0,0)$，证明$a<x_0<b$.

（22）（本题满分 11 分）

设矩阵 $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & -1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$，且 $A^3=\mathbf{0}$.

（Ⅰ）求 a 的值；

（Ⅱ）若矩阵 X 满足 $X-XA^2-AX+AXA^2=E$，其中 E 为三阶单位矩阵，求 X.

(23)（本题满分 11 分）

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & 2 & -3\\ -1 & 3 & -3\\ 1 & -2 & a\end{pmatrix}$ 相似于矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 0 & b & 0\\ 0 & 3 & 1\end{pmatrix}$.

（Ⅰ）求 a,b 的值;

（Ⅱ）求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 为对角矩阵.

2015 年全国硕士研究生入学统一考试数学(二) 参考答案

一、选择题

(1) D 【解析】A 选项，$\int_2^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=2\sqrt{x}\Big|_2^{+\infty}=+\infty$，发散；

B 选项，$\int_2^{+\infty}\frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x=\int_2^{+\infty}\ln x\mathrm{d}(\ln x)=\frac{1}{2}\ln^2x\Big|_2^{+\infty}=+\infty$，发散；

C 选项，$\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x=\int_2^{+\infty}\frac{1}{\ln x}\mathrm{d}(\ln x)=\ln(\ln x)\Big|_2^{+\infty}=+\infty$，发散；

D 选项，$\int_2^{+\infty}\frac{x}{\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x=-\int_2^{+\infty}x\mathrm{d}(\mathrm{e}^{-x})=-(x+1)\mathrm{e}^{-x}\Big|_2^{+\infty}=3\mathrm{e}^{-2}$，收敛. 故 D 选项正确.

(2) B 【解析】$f(x)=\lim\limits_{t\to0}\left(1+\frac{\sin t}{x}\right)^{\frac{x^2}{t}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{t\to0}\frac{\sin t}{x}\cdot\frac{x^2}{t}}=\mathrm{e}^x$，且 $x\neq0$，因此 $x=0$ 是 $f(x)$ 的间断点.

而 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=1$，可知 $x=0$ 是第一类间断点中的可去间断点.

(3) A 【解析】当 $x\leqslant0$ 时，$f'(x)=0$，则 $f'(0)=0$，$f'_-(0)=0$.

由于 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续，则 $f'_-(0)=f'_+(0)=f'(0)=0$.

因此当 $x>0$ 时，$f'_+(0)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x^\alpha\cos\frac{1}{x^\beta}-0}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}x^{\alpha-1}\cos\frac{1}{x^\beta}=0$.

由于 $\cos\frac{1}{x^\beta}$ 是有界函数，要使上述极限存在，则有 $\alpha-1>0$.

又 $x>0$ 时，$f'(x)=\alpha x^{\alpha-1}\cos\frac{1}{x^\beta}+\beta x^{\alpha-\beta-1}\sin\frac{1}{x^\beta}$.

可知 $f'_+(0)=\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(\alpha x^{\alpha-1}\cos\frac{1}{x^\beta}+\beta x^{\alpha-\beta-1}\sin\frac{1}{x^\beta}\right)=\lim\limits_{x\to0^+}\beta x^{\alpha-\beta-1}\sin\frac{1}{x^\beta}=0$.

由于 $\sin\frac{1}{x^\beta}$ 是有界函数，要使上述极限存在，则有 $\alpha-\beta-1>0$. 故 A 选项正确.

(4) C 【解析】观察图像可知，存在两点，在这两点两侧，二阶导数异号，因此拐点个数为两个.

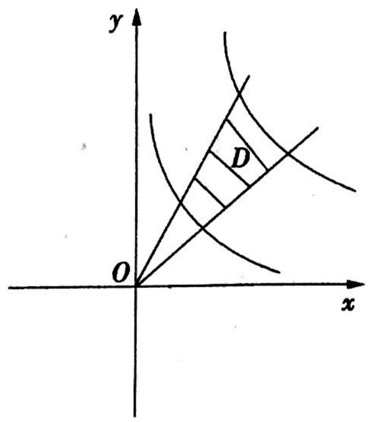
(5) D 【解析】此题考查二元复合函数偏导的求解.

令 $u=x+y,v=\frac{y}{x}$，则 $x=\frac{u}{1+v},y=\frac{uv}{1+v}$，从而 $f(x+y,\frac{y}{x})=x^2-y^2$ 变为

$f(u,v)=\left(\frac{u}{1+v}\right)^2-\left(\frac{uv}{1+v}\right)^2=\frac{u^2(1-v)}{1+v}$. 故 $\frac{\partial f}{\partial u}=\frac{2u(1-v)}{1+v}$，$\frac{\partial f}{\partial v}=-\frac{2u^2}{(1+v)^2}$.

因而 $\frac{\partial f}{\partial u}\Big|_{\substack{u=1\\v=1}}=0$，$\frac{\partial f}{\partial v}\Big|_{\substack{u=1\\v=1}}=-\frac{1}{2}$.

(6) B 【解析】由图可知,将直角坐标系下的二重积分转化为极坐标系下的二次积分,区域 D 可表示为



$$\frac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{3},\ \frac{1}{\sqrt{2\sin2\theta}}\leqslant r\leqslant\frac{1}{\sqrt{\sin2\theta}}.$$

因此 $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin2\theta}}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,r\mathrm{d}r.$

(7) D 【解析】$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&a&d\\1&4&a^2&d^2\end{pmatrix}$

$$\to\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&a-1&d-1\\0&0&(a-1)(a-2)&(d-1)(d-2)\end{pmatrix}.$$

要使得方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解,必有 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})<3$.

故 $a=1$ 或 $a=2$,同时 $d=1$ 或 $d=2$,即 a,d 同时属于 Ω.

(8) A 【解析】由 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Py}$,故 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP})\boldsymbol{y}=2y_1^2+y_2^2-y_3^2$,且

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}.$$

由已知可得 $\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}=\boldsymbol{PB}$,因此 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP})\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$

所以 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AQ})\boldsymbol{y}=2y_1^2-y_2^2+y_3^2.$

二、填空题

(9) 48 【解析】$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\div\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{3+3t^2}{\frac{1}{1+t^2}}=3(1+t^2)^2.$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[3(1+t^2)^2]=\frac{\mathrm{d}[3(1+t^2)^2]}{\mathrm{d}t}\div\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{12t(1+t^2)}{\frac{1}{1+t^2}}=12t(1+t^2)^2.$$

因此 $\left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=1}=48.$

(10) $n(n-1)(\ln2)^{n-2}$ 【解析】解法一 利用莱布尼茨公式(求函数乘积的高阶导数)求解.

$$f^{(n)}(x)=\sum_{k=0}^{n}C_k^2(x^2)^{(k)}(2^x)^{(n-k)}.$$

注意到$(x^2)^{(k)}\Big|_{x=0}=0(k\neq 2)$,则有

$$f^{(n)}(0)=C_n^2 2(2^x)^{(n-2)}\Big|_{x=0}=\frac{n(n-1)}{2}2(\ln 2)^{n-2}=n(n-1)(\ln 2)^{n-2}(n\geqslant 2).$$

又$f'(0)=0$,因此$f^{(n)}(0)=n(n-1)(\ln 2)^{n-2}(n=1,2,3\cdots)$.

解法二　利用泰勒展开公式求解.

$$f(x)=x^2 2^x=x^2 e^{x\ln x}=x^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x\ln 2)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\ln 2)^n}{n!}x^{n+2}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(\ln 2)^{n-2}}{(n-2)!}x^n.$$

由逐项求导公式,可得$f^{(n)}(0)=\dfrac{(\ln 2)^{n-2}}{(n-2)!}\cdot n!=n(n-1)(\ln 2)^{n-2}(n\geqslant 2)$.

又$f'(0)=0$,因此$f^{(n)}(0)=n(n-1)(\ln 2)^{n-2}(n=1,2,3\cdots)$.

(11) 2　**【解析】**由于$\varphi(x)=x\int_0^{x^2}f(t)\mathrm{d}t$,则$\varphi'(x)=\int_0^{x^2}f(t)\mathrm{d}t+2x^2f(x^2)$.

因此$\varphi(1)=\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t=1,\varphi'(1)=1+2f(1)=5$,则$f(1)=2$.

(12) $e^{-2x}+2e^x$　**【解析】**由题意知:$y(0)=3,y'(0)=0$.

齐次微分方程所对应的特征方程为$\lambda^2+\lambda-2=0$,解得$\lambda_1=1,\lambda_2=-2$.

所以微分方程的通解为$y(x)=C_1e^x+C_2e^{-2x}$.将$y(0)=3,y'(0)=0$代入,

得$C_1=2,C_2=1$.因此$y(x)=2e^x+e^{-2x}$.

(13) $-\dfrac{1}{3}(\mathrm{d}x+2\mathrm{d}y)$　**【解析】解法一**　将方程两端分别关于x,y求偏导,可得

$$(3e^{x+2y+3z}+xy)\frac{\partial z}{\partial x}=-yz-e^{x+2y+3z},\quad (3e^{x+2y+3z}+xy)\frac{\partial z}{\partial y}=-xz-2e^{x+2y+3z}.$$

当$x=0,y=0$时,$z=0$.则有$\dfrac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(0,0)}=-\dfrac{1}{3},\dfrac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(0,0)}=-\dfrac{2}{3}$.

因此$\mathrm{d}z\Big|_{(0,0)}=-\dfrac{1}{3}\mathrm{d}x-\dfrac{2}{3}\mathrm{d}y=-\dfrac{1}{3}(\mathrm{d}x+2\mathrm{d}y)$.

解法二　直接对方程两端取微分,可得

$$\mathrm{d}(e^{x+2y+3z}+xyz)=e^{x+2y+3z}\mathrm{d}(x+2y+3z)+\mathrm{d}(xyz)=0.$$

即
$$e^{x+2y+3z}(\mathrm{d}x+2\mathrm{d}y+3\mathrm{d}z)+yz\mathrm{d}x+xz\mathrm{d}y+xy\mathrm{d}z.$$

当$x=0,y=0$时,$z=0$.则有$\mathrm{d}x+2\mathrm{d}y+3\mathrm{d}z=0$.

因此 $\mathrm{d}z\Big|_{(0,0)}=-\frac{1}{3}\mathrm{d}x-\frac{2}{3}\mathrm{d}y=-\frac{1}{3}(\mathrm{d}x+2\mathrm{d}y)$.

(14) 21 【解析】由于 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值为 $2,-2,1$,可知 $\boldsymbol{B}$ 的所有特征值为 $3,7,1$.

因此 $|\boldsymbol{B}|=3\times7\times1=21$.

提示:本题可以这样理解,把 $\boldsymbol{A}$ 看作主对角线上元素分别为 $2,-2,1$ 的对角化矩阵,则 $\boldsymbol{B}$ 是主对角线上元素分别为 $3,7,1$ 的对角化矩阵. 因此 $|\boldsymbol{B}|=3\times7\times1=21$.

三、解答题

(15) 解:当 $x\to0$ 时,$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)$,$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)$,则

$$f(x)=x+a\ln(1+x)+bx\sin x=(1+a)x+(b-\frac{a}{2})x^2+\frac{a}{3}x^3+o(x^3).$$

又 $x\to0$ 时,$f(x)$ 与 $g(x)$ 是等价无穷小,则有

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to0}\frac{(1+a)x+(b-\frac{a}{2})x^2+\frac{a}{3}x^3+o(x^3)}{kx^3}=1.$$

从而可知 $\begin{cases}1+a=0\\ b-\frac{a}{2}=0\\ \frac{a}{3k}=1\end{cases}$,解得 $\begin{cases}a=-1\\ b=-\frac{1}{2}\\ k=-\frac{1}{3}\end{cases}$.

(16) 解:由旋转体的体积公式,得

$$V_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\pi f^2(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\pi(A\sin x)^2\mathrm{d}x=\pi A^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos2x}{2}\mathrm{d}x=\frac{\pi^2A^2}{4}.$$

$$V_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\pi xf(x)\mathrm{d}x=-2\pi A\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\mathrm{d}\cos x=-2\pi A(x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\mathrm{d}x)=2\pi A.$$

由于 $V_1=V_2$,即 $\frac{\pi^2A^2}{4}=2\pi A$,解得 $A=\frac{8}{\pi}$.

(17) 解:$f''_{xy}(x,y)=2(y+1)\mathrm{e}^x$ 两边对 y 积分,得

$$f'_x(x,y)=2(\frac{1}{2}y^2+y)\mathrm{e}^x+\varphi(x)=(y^2+2y)\mathrm{e}^x+\varphi(x).$$

由 $f'_x(x,0)=(x+1)\mathrm{e}^x$,可得 $\varphi(x)=\mathrm{e}^x(x+1)$. 则

$$f'_x(x,y) = (y^2+2y)e^x + e^x(1+x).$$

将上式两边关于 x 积分,得

$$\begin{aligned} f(x,y) &= (y^2+2y)e^x + \int e^x(1+x)dx \\ &= (y^2+2y)e^x + \int (1+x)de^x \\ &= (y^2+2y)e^x + (1+x)e^x - \int e^x dx \\ &= (y^2+2y)e^x + (1+x)e^x - e^x + C \\ &= (y^2+2y)e^x + xe^x + C. \end{aligned}$$

由 $f(0,y) = y^2+2y$,可得 $C=0$. 因此

$$f(x,y) = (y^2+2y)e^x + xe^x.$$

令 $\begin{cases} f'_x = (y^2+2y)e^x + e^x + xe^x = 0 \\ f'_y = (2y+2)e^x = 0 \end{cases}$,解得唯一驻点 $(0,-1)$.

又 $f''_{xx} = (y^2+2y)e^x + 2e^x + xe^x$, $f''_{xy} = 2(y+1)e^x$, $f''_{yy} = 2e^x$,

则在 $(0,-1)$ 处,

$$A = f''_{xx}\Big|_{(0,-1)} = 1,\quad B = f''_{xy}\Big|_{(0,-1)} = 0,\quad C = f''_{yy}\Big|_{(0,-1)} = 2.$$

由于 $AC - B^2 = 2 > 0$, $A > 0$,

因此 $f(x,y)$ 在点 $(0,-1)$ 处取得极小值,极小值为 $f(0,-1) = -1$.

(18) **解**:由区域 D 的图形特征可知,区域 D 关于 y 轴对称,因此 $\iint\limits_D xy\,dxdy = 0$.

则

$$\begin{aligned} \iint\limits_D x(x+y)dxdy &= \iint\limits_D x^2dxdy + \iint\limits_D xydxdy = \iint\limits_D x^2dxdy \\ &= 2\int_0^1 dx\int_{x^2}^{\sqrt{2-x^2}} x^2dy \\ &= 2\int_0^1 x^2(\sqrt{2-x^2} - x^2)dx \\ &= 2\int_0^1 x^2\sqrt{2-x^2}dx - \frac{2}{5}. \end{aligned}$$

令 $x=\sqrt{2}\sin t$,则 $dx=\sqrt{2}\cos t dt$,且 $x=0$ 时,$t=0$;$x=1$ 时,$t=\frac{\pi}{4}$. 则

$$2\int_0^1 x^2\sqrt{2-x^2}dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}}2\sin^2 t\cdot 2\cos^2 t dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}}2\sin^2 2t dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1-\cos 4t)dt=\frac{\pi}{4}.$$

因此
$$\iint_D x(x+y)dxdy=\frac{\pi}{4}-\frac{2}{5}.$$

(19) **解**:对 $f(x)$ 求导,可得

$$f'(x)=-\sqrt{1+x^2}+2x\sqrt{1+x^2}=(2x-1)\sqrt{1+x^2}.$$

令 $f'(x)=0$,得驻点为 $x=\frac{1}{2}$.

当 $x<\frac{1}{2}$ 时,$f'(x)<0$;当 $x>\frac{1}{2}$ 时,$f'(x)>0$,

因此,$f(x)$ 在 $(-\infty,\frac{1}{2})$ 上单调递减,在 $(\frac{1}{2},+\infty)$ 上单调递增.

由 $f(1)=0$,可知 $x=1$ 是 $f(x)$ 的零点,且 $f(\frac{1}{2})<0$.

又 $f(-1)=\int_{-1}^{1}\sqrt{1+t^2}dt=2\int_0^1\sqrt{1+t^2}dt>0$,

可知在 $(\frac{1}{2},+\infty)$ 上,$f(x)$ 存在唯一零点.

综上所述:$f(x)$ 在 $(-\infty,\frac{1}{2})$ 及 $(\frac{1}{2},+\infty)$ 上各有一个零点,零点个数为 2.

(20) **解**:设 t(单位:h) 时刻该物体温度为 $x(t)$,比例常数为 $k(>0)$,介质温度为 m,则

$$\frac{dx}{dt}=-k(x-m).$$

求解上述微分方程,可得 $x(t)=Ce^{-kt}+m$.

由题设条件知 $x(0)=120, m=20$,可得 $C=100$,则 $x(t)=100e^{-kt}+20$.

又 $x(\frac{1}{2})=30$,可得 $k=2\ln 10$,则 $x(t)=\frac{1}{100^{t-1}}+20$.

当 $x=21$ 时,$t=1$. 因此要降至 21℃,还需要冷却 30min.

(21) **证明**:点$(b,f(b))$处的切线方程为$y-f(b)=f'(b)(x-b)$.

令$y=0$,得$x_0=b-\dfrac{f(b)}{f'(b)}$.

由于$f'(x)>0$,可知$f(x)$在$[a,+\infty)$上单调递增.

又$f(a)=0$, $b>a$, 可知$f(b)>0$, $f'(b)>0$.

因此$x_0=b-\dfrac{f(b)}{f'(b)}<b$.

又$x_0-a=b-a-\dfrac{f(b)}{f'(b)}$,且在区间$[a,b]$上,由拉格朗日中值定理得

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi),\ \xi\in(a,b).$$

则有$x_0-a=b-a-\dfrac{f(b)}{f'(b)}=\dfrac{f(b)}{f'(\xi)}-\dfrac{f(b)}{f'(b)}=f(b)\dfrac{f'(b)-f'(\xi)}{f'(b)f'(\xi)}$.

由于$f''(x)>0$,可知$f'(x)$在$[a,+\infty)$上单调递增.

因此$f'(b)>f'(\xi)$,继而可得$x_0>a$.

综上所述:$a<x_0<b$,结论得证.

(22) **解**:(Ⅰ)由$\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{0}$,可知$|\boldsymbol{A}|=0$,即

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & -1 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 1-a^2 & a \\ 1 & a & -1 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 1-a^2 & a \\ 1 & a \end{vmatrix}=a^3=0.$$

从而可得$a=0$.

(Ⅱ)由于$\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{X}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^2)-\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^2)$

$$=(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^2)=\boldsymbol{E},$$

可得$\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^2)^{-1}=[(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^2)(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})]^{-1}$

$$=(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A})^{-1}.$$

而$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$,且

$$(E-A^2-A,E)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}0&-1&1&1&0&0\\-1&1&1&0&1&0\\-1&-1&2&0&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&-1&0&-1&0\\0&-1&1&1&0&0\\-1&-1&2&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&-1&0&-1&0\\0&1&-1&-1&0&0\\0&-2&1&0&-1&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&-1&0&-1&0\\0&1&-1&-1&0&0\\0&0&-1&-2&-1&1\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&0&2&0&-1\\0&1&0&1&1&-1\\0&0&1&2&1&-1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&3&1&-2\\0&1&0&1&1&-1\\0&0&1&2&1&-1\end{array}\right).$$

从而可得 $X=\begin{pmatrix}3&1&-2\\1&1&-1\\2&1&-1\end{pmatrix}$.

(23) **解**:(Ⅰ) 由于 $A\sim B$,可知 $\mathrm{tr}(A)=\mathrm{tr}(B)$,且 $|A|=|B|$.

因此 $\begin{cases}3+a=1+b+1,\\2a-b=3\end{cases}$,解得 $\begin{cases}a=4,\\b=5.\end{cases}$

(Ⅱ) 由(Ⅰ)知,$A=\begin{pmatrix}0&2&-3\\-1&3&-3\\1&-2&4\end{pmatrix}$,$B=\begin{pmatrix}1&-2&0\\0&5&0\\0&3&1\end{pmatrix}$.

由于 $A\sim B$,可知 $|\lambda E-A|=|\lambda E-B|=(\lambda-1)^2(\lambda-5)$.

从而可得 A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=5$.

当 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 时,$(E-C)x=0$ 的基础解系为 $\xi_1=(2,1,0)^T$;$\xi_2=(-3,0,1)^T$.

当 $\lambda=5$ 时,$(5E-C)x=0$ 的基础解系为 $\xi_3=(-1,-1,1)^T$.

令 $P=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\begin{pmatrix}2&-3&-1\\1&0&-1\\0&1&1\end{pmatrix}$,则有 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&5\end{pmatrix}$.

故 P 为所求可逆矩阵.