2017 年全国硕士研究生入学统一考试数学(二)真题

一、选择题:1 ~8 小题,每小题 4 分,共 32 分. 下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的.

(1)若函数$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos\sqrt{x}}{ax}, & x>0,\\ b, & x\leqslant 0\end{cases}$在 $x=0$ 处连续,则(　　)

(A)$ab=\dfrac{1}{2}$　　(B)$ab=-\dfrac{1}{2}$

(C)$ab=0$　　(D)$ab=2$

(2)设二阶可导函数$f(x)$满足$f(1)=f(-1)=1,f(0)=-1$,且$f''(x)>0$,则(　　)

(A) $\int_{-1}^{1}f(x)dx>0$　　(B) $\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x<0$

(C) $\int_{-1}^{0}f(x)\mathrm{d}x>\int_{0}^{1}f(x)\mathrm{d}x$　　(D) $\int_{-1}^{0}f(x)\mathrm{d}x<\int_{0}^{1}f(x)\mathrm{d}x$

(3)设数列$\{x_n\}$收敛,则(　　)

(A)当 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin x_n=0$ 时,$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$　　(B)当 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+\sqrt{|x_n|})=0$ 时,$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$

(C)当 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+x_n^2)=0$ 时,$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$　　(D)当 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+\sin x_n)=0$ 时,$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$

(4)微分方程 $y''-4y'+8y=\mathrm{e}^{2x}(1+\cos2x)$的特解可设为 $y^*=$(　　)

(A)$A\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{2x}(B\cos2x+C\sin2x)$　　(B)$Ax\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{2x}(B\cos2x+C\sin2x)$

(C)$A\mathrm{e}^{2x}+x\mathrm{e}^{2x}(B\cos2x+C\sin2x)$　　(D)$Ax\mathrm{e}^{2x}+x\mathrm{e}^{2x}(B\cos2x+C\sin2x)$

(5)设$f(x,y)$具有一阶偏导数,且对任意的(x,y),都有$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}>0,\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}<0$,则(　　)

(A)$f(0,0)>f(1,1)$　　(B)$f(0,0)<f(1,1)$

(C)$f(0,1)>f(1,0)$　　(D)$f(0,1)<f(1,0)$

(6)甲、乙两人赛跑,计时开始时,甲在乙前方 10(单位:m)处. 图中,实线表示甲的速度曲线 $v=v_1(t)$(单位:m/s),虚线表示乙的速度曲线 $v=v_2(t)$,三块阴影部分面积的数值依次为

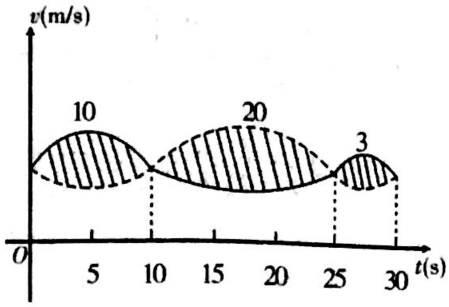
10,20,3. 计时开始后乙追上甲的时刻记为 t_0(单位:s),则(   )

(A) $t_0=10$

(B) $15<t_0<20$

(C) $t_0=25$

(D) $t_0>25$



(7)设 A 为三阶矩阵,$P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 为可逆矩阵,使得 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$,则 $A(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)=$(   )

(A) $\alpha_1+\alpha_2$　　(B) $\alpha_2+2\alpha_3$

(C) $\alpha_2+\alpha_3$　　(D) $\alpha_1+2\alpha_2$

(8)已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&1\\0&0&1\end{pmatrix}$,$B=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$,$C=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$,则(   )

(A) A 与 C 相似,B 与 C 相似　　(B) A 与 C 相似,B 与 C 不相似

(C) A 与 C 不相似,B 与 C 相似　　(D) A 与 C 不相似,B 与 C 不相似

二、填空题:9 ~ 14 小题,每小题 4 分,共 24 分.

(9)曲线 $y=x(1+\arcsin\frac{2}{x})$ 的斜渐近线方程为________.

(10)设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=t+e^t\\y=\sin t\end{cases}$ 确定,则 $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0}=$________.

(11) $\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{(1+x)^2}dx=$________.

(12)设函数 $f(x,y)$ 具有一阶连续偏导数,且 $df(x,y)=ye^ydx+x(1+y)e^ydy$,$f(0,0)=0$,则 $f(x,y)=$________.

(13) $\int_0^1dy\int_y^1\frac{\tan x}{x}dx=$________.

(14)设矩阵 $A=\begin{pmatrix}4&1&-2\\1&2&a\\3&1&-1\end{pmatrix}$ 的一个特征向量为 $\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$,则 $a=$ ________.

三、解答题:15 ~23 小题,共 94 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 10 分)

求 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\int_0^x\sqrt{x-t}\,\mathrm{e}^t\mathrm{d}t}{\sqrt{x^3}}$.

(16)(本题满分 10 分)

设函数 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数,$y=f(\mathrm{e}^x,\cos x)$,求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$,$\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}$.

(17)(本题满分 10 分)

求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$.

(18)(本题满分 10 分)

已知函数 $y(x)$ 由方程 $x^3+y^3-3x+3y-2=0$ 确定,求 $y(x)$ 的极值.

(19)(本题满分 10 分)

设函数$f(x)$在区间$[0,1]$上具有二阶导数,且$f(1)>0$,$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x}<0$. 证明:

(Ⅰ)方程$f(x)=0$在区间$(0,1)$内至少存在一个实根;

(Ⅱ)方程$f(x)f''(x)+[f'(x)]^2=0$在区间$(0,1)$内至少存在两个不同实根.

(20)(本题满分 11 分)

已知平面区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 2y\}$,计算二重积分 $\iint\limits_D (x+1)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(21)(本题满分 11 分)

设 $y(x)$ 是区间 $(0,\frac{3}{2})$ 内的可导函数,且 $y(1)=0$,点 P 是曲线 $L:y=y(x)$ 上的任意一点,L 在点 P 处的切线与 y 轴相交于点 $(0,Y_P)$,法线与 x 轴相交于点 $(X_p,0)$. 若 $X_p=Y_p$,求 L 上点的坐标 (x,y) 满足的方程.

(22)(本题满分 11 分)

设三阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$ 有 3 个不同的特征值，且 $\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$.

(Ⅰ)证明：$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=2$；

(Ⅱ)若 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，求方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解.

(23)(本题满分 11 分)

设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2-x_2^2+ax_3^2+2x_1x_2-8x_1x_3+2x_2x_3$ 在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 下的标准形为 $\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2$,求 a 的值及一个正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$.

2017 年全国硕士研究生入学统一考试数学(二)参考答案

一、选择题

(1)A 【解析】$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1-\cos\sqrt{x}}{ax}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\frac{1}{2}x}{ax}=\dfrac{1}{2a}$, $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}b=b$.

由于$f(x)$在$x=0$处连续,因此$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=f(0)$,即$\dfrac{1}{2a}=b$,从而$ab=\dfrac{1}{2}$.

(2)B 【解析】$f(x)$为偶函数时满足题设条件,此时$\int_{-1}^{0}f(x)\mathrm{d}x=\int_{0}^{1}f(x)\mathrm{d}x$,排除 C,D 选项. 取

$f(x)=2x^2-1$,显然满足题设条件,则$\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}(2x^2-1)\mathrm{d}x=-\dfrac{2}{3}<0$, 故选 B.

(3)D 【解析】设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,对于 A 选项,由$\lim\limits_{n\to\infty}\sin x_n=\sin(\lim\limits_{n\to\infty}x_n)=\sin a=0$,可得$a=k\pi$,此时$a$为不定值,故 A 选项错误;同理可得 B、C 选项错误. 从而可知 D 选项正确.

对于 D 选项,由$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+\sin x_n)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n+\sin(\lim\limits_{n\to\infty}x_n)=a+\sin a=0$,可解得$a=0$.

(4)C 【解析】齐次方程$y''-4y'+8y=0$对应的特征方程为:$\lambda^2-4\lambda+8=0$,解得$\lambda_{1,2}=2\pm2i$.

由于自由项$f(x)=\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{2x}\cos2x$,因此可设方程$y''-4y'+8y=\mathrm{e}^{2x}$的特解为$y_1^*=A\mathrm{e}^{2x}$,设方程$y''-4y'+8y=\mathrm{e}^{2x}\cos2x$的特解为$y_2^*=x\mathrm{e}^{2x}(B\cos2x+C\sin2x)$. 从而原方程的特解可设为

$$y^*=y_1^*+y_2^*=A\mathrm{e}^{2x}+x\mathrm{e}^{2x}(B\cos2x+C\sin2x).$$

(5)D 【解析】由于$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}>0,\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}<0$,可知$f(x,y)$关于$x$单调递增,关于$y$单调递减. 因此成立$f(0,1)<f(1,1)<f(1,0)$. 故 D 选项正确.

(6)C 【解析】从 0 到t_0这段时间内,甲乙的位移分别为$\int_0^{t_0}v_1(t)\mathrm{d}t,\int_0^{t_0}v_2(t)\mathrm{d}t$. 当乙追上甲时,

则有$\int_0^{t_0}[v_2(t)\mathrm{d}t-v_1(t)]\mathrm{d}t=10$. 由图可知,当$t_0=25$时满足.

(7)B 【解析】由$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0&&\\&1&\\&&2\end{pmatrix}$,可得$\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}0&&\\&1&\\&&2\end{pmatrix}$,即

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}0&&\\&1&\\&&2\end{pmatrix}=(0,\boldsymbol{\alpha}_2,2\boldsymbol{\alpha}_3).$$

因此 $$A(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)=A\boldsymbol{\alpha}_1+A\boldsymbol{\alpha}_2+A\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3.$$

(8)B 【解析】由 $|\lambda E-A|=0$，可知 A 的特征值为 2,2,1. 因为 $3-\mathrm{r}(2E-A)=2$，所以 A 可相似对角化，且 $A\sim C$. 由 $|\lambda E-B|=0$，可知 B 的特征值为 2,2,1. 因为 $3-\mathrm{r}(2E-B)=1$，所以 B 不可相似对角化，但 C 显然可相似对角化，因此 B 与 C 不相似. 故 B 选项正确.

二、填空题

(9) $y=x+2$ 【解析】由于 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\arcsin\dfrac{2}{x}\right)=1=a$,

$$\lim_{x\to\infty}(y-ax)=\lim_{x\to\infty}x\arcsin\frac{2}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\arcsin\frac{2}{x}}{\frac{1}{x}}=2=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{x}}{\frac{1}{x}}=2=b,$$

因此斜渐近线为 $y=x+2$.

(10) $-\dfrac{1}{8}$ 【解析】由于 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\cos t$, $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=1+\mathrm{e}^t$，因此 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\cos t}{1+\mathrm{e}^t}$.

从而 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\left(\dfrac{\cos t}{1+\mathrm{e}^t}\right)'\cdot\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\dfrac{-\sin t(1+\mathrm{e}^t)-\mathrm{e}^t\cos t}{(1+\mathrm{e}^t)^3}$, $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=0}=-\dfrac{1}{8}$.

(11) 1 【解析】
$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{(1+x)^2}\mathrm{d}x&=-\int_0^{+\infty}\ln(1+x)\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{1+x}\right)\\&=-\left.\frac{\ln(1+x)}{1+x}\right|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x)^2}\mathrm{d}x\\&=-\left.\frac{1}{1+x}\right|_0^{+\infty}=1.\end{aligned}$$

(12) $xy\mathrm{e}^y$ 【解析】$f'_x=y\mathrm{e}^y$, $f'_y=x(1+y)\mathrm{e}^y$. 由于 $f(x,y)=\int y\mathrm{e}^y\mathrm{d}x=xy\mathrm{e}^y+c(y)$，因此 $f'_y=x\mathrm{e}^y+xy\mathrm{e}^y+c'(y)=x\mathrm{e}^y+xy\mathrm{e}^y$，则 $c'(y)=0$，得 $c(y)=C$. 又 $f(0,0)=0$，可得 $C=0$. 因此 $f(x,y)=xy\mathrm{e}^y$.

(13) $-\ln\cos1$ 【解析】交换积分次序求解.

$$\int_0^1\mathrm{d}y\int_y^1\frac{\tan x}{x}\mathrm{d}x=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\frac{\tan x}{x}\mathrm{d}y=\int_0^1\tan x\,\mathrm{d}x=-\ln\cos x\Big|_0^1=-\ln\cos1.$$

(14) -1 【解析】设 $\boldsymbol{\alpha}=(1,1,2)^{\mathrm{T}}$，由题设知 $A\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$，故有

$$\begin{pmatrix}4&1&-2\\1&2&a\\3&1&-1\end{pmatrix}(1,1,2)^{\mathrm{T}}=\lambda(1,1,2)^{\mathrm{T}},\ \text{即}\begin{pmatrix}1\\3+2a\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda\\\lambda\\2\lambda\end{pmatrix}.$$

从而可得 $\lambda=1$, $a=-1$.

三、解答题

(15)解：令 $x-t=u$，则 $t=x-u$，$\mathrm{d}t=-\mathrm{d}u$，从而

$$\int_0^x \sqrt{x-t}\,\mathrm{e}^t\mathrm{d}t=-\int_x^0 \sqrt{u}\,\mathrm{e}^{x-u}\mathrm{d}u=\mathrm{e}^x\int_0^x \sqrt{u}\,\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u.$$

因此

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^x \sqrt{x-t}\,\mathrm{e}^t\mathrm{d}t}{\sqrt{x^3}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\mathrm{e}^x\int_0^x \sqrt{u}\,\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u}{x^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}\,\mathrm{e}^{-x}}{\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}}=\frac{2}{3}.$$

(16)解：由 $y=f(\mathrm{e}^x,\cos x)$，可得 $y(0)=f(1,1)$，且

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=f_1'\mathrm{e}^x+f_2'(-\sin x),$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=f_{11}''\mathrm{e}^{2x}+f_{12}''\mathrm{e}^x(-\sin x)+f_{21}''\mathrm{e}^x(-\sin x)+f_{22}''\sin^2x+f_1'\mathrm{e}^x-f_2'\cos x.$$

因此 $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=f_1'(1,1)$，$\left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}=f_{11}''(1,1)+f_1'(1,1)-f_2'(1,1)$.

(17)解：

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n\frac{k}{n^2}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n\frac{1}{n}\cdot\frac{k}{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 x\ln(1+x)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}x^2\ln(1+x)\Big|_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{x^2}{1+x}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{2}\int_0^1\left[(x-1)+\frac{1}{1+x}\right]\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\ln 2-\left[\frac{1}{4}(x-1)^2+\frac{1}{2}\ln(1+x)\right]\Big|_0^1=\frac{1}{4}.$$

(18)解：将方程 $x^3+y^3-3x+3y-2=0$ 两边关于 x 分别求一阶导、二阶导可得：

$$3x^2+3y^2y'-3+3y'=0, \qquad ①$$

$$6x+6y(y')^2+3y^2y''+3y''=0. \qquad ②$$

对于①式，令 $y'=0$，得 $x=\pm1$，代入原方程中，可得 $\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$，$\begin{cases}x=-1\\y=0\end{cases}$.

将 $x=1,y=1$ 及 $y'(1)=0$ 代入②，可得 $y''(1)=-1<0$.

因此 $x=1$ 是极大值点，极大值为 $y(1)=1$.

将 $x=-1,y=0$ 及 $y'(-1)=0$ 代入②，可得 $y''(-1)=2>0$.

因此 $x=-1$ 是极小值点，极小值为 $y(-1)=0$.

(19)**证明**:(Ⅰ)由于 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x}<0$,根据极限的保号性可知$\exists\delta>0$,对$\forall x\in(0,\delta)$,有$\dfrac{f(x)}{x}<0$,

即$f(x)<0$. 其中δ是任意小的正数,可取$0<\delta<1$. 从而$\exists x_0\in(0,\delta)$,使得$f(x_0)<0$.

又$f(x)$在$[0,1]$上具有二阶导数,因此$f(x)$在$[0,1]$上连续. 由$f(x_0)<0$,$f(1)>0$,根据零点定理,可知至少存在一点$\xi\in(x_0,1)$,使得$f(\xi)=0$,即方程$f(x)$在区间$(0,1)$内至少存在一个实根,问题得证.

(Ⅱ)令$F(x)=f(x)f'(x)$,则$F'(x)=f(x)f''(x)+[f'(x)]^2$.

由于$f(x)$连续,且$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x}$存在,而分母趋于零,则$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=f(0)=0$.

又由(Ⅰ)知$f(\xi)=0$,由罗尔定理,可知$\exists\eta\in(0,\xi)$,使$f'(\eta)=0$.

从而 $F(0)=f(0)f'(0)=0$, $F(\eta)=f(\eta)f'(\eta)=0$, $F(\xi)=f(\xi)f'(\xi)=0$.

由罗尔定理知存在$\eta_1\in(0,\eta)$,使$F'(\eta_1)=0$,存在$\eta_2\in(\eta,\xi)$,使$F'(\eta_2)=0$.

因此,可知η_1和η_2是方程$f(x)f''(x)+[f'(x)]^2=0$的两个不同的实根,问题得证.

(20)**解**:平面区域D是以$(0,1)$为圆心,1为半径的圆域,且区域D关于y轴对称.

由于
$$\iint\limits_D(x+1)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y+2\iint\limits_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_D 1\cdot\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

而
$$2\iint\limits_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0,\quad \iint\limits_D 1\cdot\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi,\quad \iint\limits_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint\limits_{D_1}x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

其中,D_1为圆域的右半边. 在极坐标系下,D_1可表示为$0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}$,$0\leqslant r\leqslant 2\sin\theta$.

因此
$$\begin{aligned}\iint\limits_{D_1}x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta}r^3\cos^2\theta\mathrm{d}r=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\theta\cos^2\theta\mathrm{d}\theta\\&=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2\theta(1-\cos 2\theta)\mathrm{d}\theta\\&=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 4\theta)\mathrm{d}\theta-\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2\theta\mathrm{d}(\sin 2\theta)\\&=\frac{1}{4}\left(\theta-\frac{1}{4}\sin 4\theta\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{12}\sin^3 2\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{8}.\end{aligned}$$

从而
$$\iint\limits_D(x+1)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\cdot\frac{\pi}{8}+\pi=\frac{5\pi}{4}.$$

(21)**解**:点 $P(x,y)$ 处的切线方程为 $Y-y=y'(X-x)$. 令 $X=0$,得 $Y_p=y-y'x$.

点 $P(x,y)$ 处的法线方程为 $Y-y=-\frac{1}{y'}(X-x)$. 令 $Y=0$,得 $X_p=x+yy'$.

由于 $X_p=Y_p$,可得 $y-xy'=x+yy'$,即$(\frac{y}{x}+1)y'=\frac{y}{x}-1$.

令$\frac{y}{x}=u$,则 $y=ux$, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$. 因此$(\frac{y}{x}+1)y'=\frac{y}{x}-1$ 可转变为

$$(u+1)(u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x})=u-1.$$

上述方程为分离变量微分方程,分离变量可得 $\frac{1+u}{1+u^2}\mathrm{d}u=-\frac{1}{x}\mathrm{d}x$.

两边积分得 $\arctan u+\frac{1}{2}\ln(1+u^2)=-\ln|x|+C$,即 $\arctan\frac{y}{x}+\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)=C$.

又 $y(1)=0$,可得 $C=0$. 因此直线 L 上点的坐标(x,y)在区间$(0,\frac{3}{2})$上满足的方程为

$$2\arctan\frac{y}{x}+\ln(x^2+y^2)=0.$$

(22)**解**:(Ⅰ)证明:由 $\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$,可得 $\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3=0$,可知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关.

因此可知 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})\leqslant 2$,且$|\boldsymbol{A}|=0$,即 $\boldsymbol{A}$ 的特征值中必有 0.

又 $\boldsymbol{A}$ 有三个不同的特征值,因此另外两个特征值非 0,从而 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})\geqslant 2$.

因此 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=2$,问题得证.

(Ⅱ)由(Ⅰ)$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=2$,得 $3-\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=1$,可知 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系只有 1 个解向量.

由 $\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}$,可得$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}$,则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系为$\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$.

又 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$,则方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 的一个特解为$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

因此方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解为 $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$, k 为任意常数.

(23)**解**:设二次型$f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$,其中$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1&-4\\1&-1&1\\-4&1&a\end{pmatrix}$.

由于二次型$f(x_1,x_2,x_3)$经正交变换后,得到的标准形为$\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2$,可知$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=2$.

因此可得$|\boldsymbol{A}|=0$,即$\begin{vmatrix}2&1&-4\\1&-1&1\\-4&1&a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&3&-6\\1&-1&1\\0&-3&a+4\end{vmatrix}=6-3a=0$.

解得$a=2$.

当$a=2$时,二次型矩阵$\boldsymbol{A}$为实对称矩阵,且其特征多项式为

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-1&4\\-1&\lambda+1&-1\\4&-1&\lambda-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&\lambda^2-\lambda-3&6-\lambda\\-1&\lambda+1&-1\\0&4\lambda+3&\lambda-6\end{vmatrix}=\lambda(\lambda+3)(\lambda-6).$$

解得特征值为$\lambda_{1,2,3}=-3,0,6$.

由$(-3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,可得$\boldsymbol{A}$的属于特征值$-3$的特征向量为$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,1)^{\mathrm{T}}$;

由$(0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,可得$\boldsymbol{A}$的属于特征值0的特征向量为$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,2,1)^{\mathrm{T}}$;

由$(6\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,可得$\boldsymbol{A}$的属于特征值6的特征向量为$\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,0,1)^{\mathrm{T}}$.

由于实对称矩阵A的不同特征值对应的特征向量是正交的,则将$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$单位化可得

$$\boldsymbol{\beta}_1=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\beta}_2=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\beta}_3=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1)^{\mathrm{T}}.$$

因此所求正交矩阵$\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{2}{\sqrt{6}}&0\\\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$.