

Aufgabe 3:

$$A = \begin{pmatrix} 20 & 30 & 10 \\ 10 & 17 & 6 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 5720 \\ 3300 \\ 836 \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 0.4 & -0.75 & 0.25 \\ -0.2 & 0.5 & -0.5 \\ -0.1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\|b - \tilde{b}\|_{\infty} \leq 100$$

$$\text{geg.: } \|b - \tilde{b}\|_{\infty} \leq 100$$

$$\|A\|_{\infty} = 60$$

$$\|A^{-1}\|_{\infty} = 1.4$$

$$\|b\|_{\infty} = 5720$$

absoluter Fehler:

$$\|x - \tilde{x}\|_{\infty} \leq \|A^{-1}\|_{\infty} \cdot \|b - \tilde{b}\|_{\infty} \leq 1.4 \cdot 100 = \underline{\underline{140}}$$

Jede x Komp. kann bis zu 140 Einheiten abweichen.

relativer Fehler:

$$\|x - \tilde{x}\|_{\infty} \leq \|A\|_{\infty} \cdot \|A^{-1}\|_{\infty} \cdot \frac{\|b - \tilde{b}\|_{\infty}}{\|b\|_{\infty}}$$

$$\leq 60 \cdot 1.4 \cdot \frac{100}{5720} = 1.4685 \stackrel{!}{=} \underline{\underline{146.85\%}}$$

Das Problem ist schlecht konditioniert, da eine sehr starke Abweichung toleriert wird.

$$b) \quad \|A - \tilde{A}\|_{\infty} = \left\| \begin{pmatrix} 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 \end{pmatrix} \right\|_{\infty} = 0.3$$

Bedingung für Fehlerabschätz:

$$\text{cond}(A) \cdot \frac{\|A - \tilde{A}\|_{\infty}}{\|A\|_{\infty}} < 1 \quad \Rightarrow \quad 60 \cdot 1.4 \cdot \frac{0.3}{60} = 0.42 < 1 \quad \checkmark$$

↳ $\|A\|_{\infty} \cdot \|A^{-1}\|_{\infty}$

$$\begin{aligned} \frac{\|x - \tilde{x}\|_{\infty}}{\|x\|_{\infty}} &\leq \frac{\text{cond}(A)}{1 - \text{cond}(A) \cdot \frac{\|A - \tilde{A}\|_{\infty}}{\|A\|_{\infty}}} \cdot \left(\frac{\|A - \tilde{A}\|_{\infty}}{\|A\|_{\infty}} + \frac{\|b - \tilde{b}\|_{\infty}}{\|b\|_{\infty}} \right) \\ &\leq \frac{60 \cdot 1.4}{1 - 0.42} \cdot \left(\frac{0.3}{60} + \frac{100}{5720} \right) = 3.2561 \stackrel{!}{=} \underline{\underline{325.61\%}} \end{aligned}$$

$$c) \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} 19.9 & 29.9 & 9.9 \\ 9.9 & 16.9 & 5.9 \\ 1.9 & 2.9 & 1.9 \end{pmatrix} \quad \tilde{b} = \begin{pmatrix} 5820 \\ 3400 \\ 936 \end{pmatrix}$$

$$\hookrightarrow \text{Python} \quad \tilde{x} = \begin{pmatrix} 7.38 \\ 58.77 \\ 395.55 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} 22 \\ 88 \\ 264 \end{pmatrix} \longrightarrow \|x\|_{\infty} = 264$$

$$\text{absolut:} \quad \|x - \tilde{x}\|_{\infty} = \left\| \begin{pmatrix} 14.62 \\ 29.23 \\ -131.55 \end{pmatrix} \right\|_{\infty} = 131.55$$

$$\text{relativ:} \quad \frac{\|x - \tilde{x}\|_{\infty}}{\|x\|_{\infty}} = \frac{131.55}{264} = 0.4983 = 49.83\%$$

Der relative Fehler ist um einiges kleiner als das Worst-Case-Szenario von 325.61 %. Jedoch ist dieser Fehler immer noch sehr gross.