G. Boiger / F. De Lorenzi / M. Roos / J. Schumacher
Studiengang Informatik, 16. Juni 2020 (a)

Zürcher Hochschule
für Angewandte Wissenschaften

Semesterendprüfung NMIT 1 FS 2020

- **Dauer:** 120 Minuten
- **Hilfsmittel:** Gemäss Kursvereinbarung
- **Lösungsweg:** Der Lösungsweg muss vollständig (d.h. inklusive relevanter Zwischenschritte) angegeben und nachvollziehbar sein. Resultate ohne Zwischenschritte geben keine Punkte. Der MATLAB-Code muss vollständig und lauffähig sein.
- **Bewertung:** Es hat insgesamt 6 Aufgaben. Jede Aufgabe wird mit 10 Punkten gleich bewertet.
- **Abgabe:** Handschriftlichen Lösungen digitalisieren, vorzugsweise im PDF-Format. Matlab-Code (inkl. der aufgerufenen Unterfunktionen) und handschriftliche Lösungen geben Sie auf OLAT im gewohnten Verzeichnis unter Serien und Abgaben - Abgabe SEP - Upload SEP als *.zip Datei ab.

Aufgabe 1
Gleitpunktarithmetik und Maschinengenauigkeit:

a) (7 Punkte) Bestimmen Sie die Anzahl verschiedener Maschinenzahlen auf einem Rechner, der 15-stellige Gleitpunktzahlen mit 5-stelligen Exponenten sowie dazugehörige Vorzeichen im Dualsystem verwendet.

b) (3 Punkte) Geben Sie die Maschinengenauigkeit einer Rechenmaschine an, die mit 16-stelliger Dezimalarithmetik arbeitet.

Aufgabe 2
Gegeben ist die Funktion

$$y = f(x) = x \cdot \exp(x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

a) (5 Punkte) Bestimmen Sie die Konditionszahl K, und stellen Sie sie graphisch dar.

b) (5 Punkte) Bestimmen Sie alle x, für welche die Berechnung von y gut konditioniert ist (d.h. $K \leq 1$).

Aufgabe 3
Gegeben ist die Fixpunktiterationsvorschrift $x_{k+1} = F(x_k)$ mit

$$F(x) = \frac{1}{\cos(x + \frac{\pi}{4}) - 1} + 2$$

Gesucht ist ein Fixpunkt im Intervall $x \in [1, 2]$

a) (1 Punkt) Stellen Sie die Funktion F(x) und ihre Ableitung $\frac{dF(x)}{dx}$ im Intervall $x \in [0, \pi]$ graphisch dar.

b) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass die Voraussetzungen des Banach'schen Fixpunktsatzes erfüllt sind und geben Sie eine Lipschitzkonstante an.

c) (2 Punkte) Wie genau ist der Schätzwert $x_{j+1} = 1.3441$ ($x_j = 1.3376$) für den gesuchten Fixpunkt? Geben Sie die Antwort mit Hilfe der a posteriori Abschätzung!

d) (4 Punkte) Implementieren Sie eine MATLAB-Funktion, welche den Fixpunkt zu einer vorgegebenen Genauigkeit berechnet. Die Funktion hat die Parameter Handle zu $F(x)$, Startwert x_0, Genauigkeit ϵ, sowie die Lipschitzkonstante λ. Sie soll sowohl den berechneten Fixpunkt, als auch die Anzahl notwendiger Iterationen zurückgeben.

e) (1 Punkt) Geben Sie an, welche der folgenden Funktionen $f(x)$ den berechneten Fixpunkt als Nullstelle haben (mehrere Antworten möglich):

A) $f(x) = \frac{x-1}{x-2} - \cos(x + \frac{\pi}{4})$

B) $f(x) = \frac{1}{\cos(x+\frac{\pi}{4})-1} + 2$

C) $f(x) = x + (2 - \frac{1}{\cos(x+\frac{\pi}{4})-1})$

D) $f(x) = \cos(x + \frac{\pi}{4}) - \frac{1}{x-2} - 1$

Aufgabe 4
Sie messen den Gesamtwiderstand von 3 verschiedenen, in Serie geschalteten Widerstände. Daraus ergibt sich folgendes Gleichungssystem zur Bestimmung der jeweiligen Widerständen R_i :

$$\begin{aligned} 67 &= 1R_1 + 3R_2 + 7R_3 \\ 21 &= 1R_3 + 15R_1 \\ 44 &= 1R_2 + 6R_3 \end{aligned}$$

a) (3 Punkte) Konvertieren Sie die Gleichung in die Form: $y = Ax$ und zerlegen Sie die Matrix A zur Lösung mit dem Gauss-Seidel-Verfahren in die Form: $A = L + R + D$ Schreiben Sie alle Matrizen (A, L, R, D) auf das Blatt!

b) (5 Punkte) Implementieren Sie das Gauss-Seidel-Verfahren in MATLAB und berechnen Sie die ersten 5 Iterationsschritte mit dem Startvektor $\vec{x}_0 = \vec{0}$.
Geben Sie die Iterationsschritte entweder im MATLAB aus oder schreiben Sie diese auf das Blatt.

c) (2 Punkte) Was ist der Vorteil eines iterativen Lösungsverfahrens wie Gauss-Seidel gegenüber direkten Lösungsverfahren.

Aufgabe 5
Für ein Chilli-Festival werden BBQ-Saucen in den drei verschiedenen Schärfegraden sehr scharf (SS), scharf (S) und mild (M) benötigt, zudem sollen drei verschiedene Hersteller dem Publikum zur Blindverkostung vorgelegt werden können. Die entsprechenden Marketing Pakete der drei Hersteller reichen für die folgende Anzahl Portionen:

Blair's Extreme	SS 240	S 60	M 60
Mad Dog:	SS 120	S 180	M 90
Dave's Gourmet:	SS 80	S 170	M 500

Aus früheren Jahren weiss man, dass das Publikum die verschiedenen Schärfegrade ungefähr im Verhältnis 3/4/5 konsumiert und ca. 12'000 Portionen erwartet werden. Der Einfachheit halber rechnet das Komitee deshalb mit folgender Portionierung: SS 3080, S 4070, M 5030.

a) (1 Punkt) Stellen Sie das entsprechende Gleichungssystem auf.

b) (6 Punkte) Wie viele Marketing Pakete von den einzelnen Herstellern werden benötigt um den voraussichtlichen Bedarf abzudecken, ohne Überschuss zu generieren? Berechnen Sie die Lösung mit dem Gauss-Algorithmus.

c) (2 Punkte) Wie hoch ist der absolute und relative Fehler, wenn die Besucherzahlen die Erwartung um 5% übersteigt?

d) (1 Punkt) Was können Sie über die Konditionierung des Problems sagen?

MATLAB darf verwendet werden. Lösungen müssen nachvollziehbar mit allen relevanten Zwischenschritten dargestellt sein.

Aufgabe 6
Das nichtlineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 1 - x^2 &= y^2 \\ \frac{(x-2)^2}{a} + \frac{(y-1)^2}{b} &= 1, \end{aligned}$$

soll mit dem Newton-Verfahren mit $\mathbf{x}^{(0)} = (x^{(0)}, y^{(0)})^T = (2, -1)^T$ gelöst werden.

a) (5 Punkte) Führen Sie den ersten Iterationsschritt *manuell* aus und bestimmen Sie $\mathbf{x}^{(1)}$.

b) (3 Punkte) Bestimmen Sie die Näherungslösung mit MATLAB für $a = 2$ und $b = 4$ auf $\|\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)})\|_\infty < 10^{-8}$ genau.

c) (2 Punkte) Wie viele Lösungen besitzt das Gleichungssystem aus b) insgesamt? Begründen Sie Ihre Antwort, z.B. mit einem geeigneten Plot.