Aufgabe mit Lösung Prüfung Kapitel 4 (circa 20 Minuten)

Betrachten Sie das lineare Gleichungssystem $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ mit

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2+\varepsilon & 5 \\ 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

und

$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

wobei ε eine reelle Zahl ist.

(a) (5 Punkte) Berechnen Sie **manuell** die LR−Zerlegung **ohne Zeilenvertauschung** der Matrix $\boldsymbol{A}$ für ein allgemeines ε.

Solution: LU decomposition without pivoting

$$\boldsymbol{A_1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \varepsilon & 3 \\ 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}; \lambda_{1,2} = 2$$

$$\boldsymbol{A_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \varepsilon & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}; \lambda_{1,3} = 4$$

$$\boldsymbol{A_3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \varepsilon & 3 \\ 0 & 0 & 4 - \frac{6}{\varepsilon} \end{pmatrix}; \lambda_{2,3} = 2/\varepsilon$$

$$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \varepsilon & 3 \\ 0 & 0 & 4 - \frac{6}{\varepsilon} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & \frac{2}{\varepsilon} & 1 \end{pmatrix}$$

(Check: $\boldsymbol{LR} = \boldsymbol{A}$.)

(b) (2 Punkte) Bestimmen Sie mit Hilfe der Matrizen $\boldsymbol{L}$ und $\boldsymbol{R}$ aus (a) die Lösung von $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ für $\varepsilon = 2^{-52}$ (Maschinengenauigkeit). Schreiben Sie dazu ein Python-Skript und verwenden Sie numpy.linalg.solve().

Solution: we solve first $\boldsymbol{Ly} = \boldsymbol{b}$

$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1.80143985e+16 \end{pmatrix}$$

and then $\boldsymbol{R x_1} = \boldsymbol{y}$.

$$\boldsymbol{x_1} = \begin{pmatrix} 2.66666667 \\ -1 \\ -0.66666667 \end{pmatrix}$$

(c) (3 Punkte) Lösen Sie nun das lin. Gleichungssystem $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ für $\varepsilon = 2^{-52}$ direkt mit numpy.linalg.solve(). Weshalb erhalten Sie nicht das gleiche Resultat wie bei b)? Begründen Sie!

Solution: we solve further $\boldsymbol{A x_2} = \boldsymbol{b}$.

$$\boldsymbol{x_2} = \begin{pmatrix} 2.33333 \\ -0.66666 \\ -0.66666 \end{pmatrix}$$

Because $2 + eps = 2$, the solution is the same as for $eps = 0$.