Aufgabe 1:

a) $f(x) = 230x^4 + 18x^3 + 9x^2 - 221x - 9$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{230x^4 + 18x^3 + 9x^2 - 9}{221} = x$$

$$x_{n+1} = F(x_n) = \frac{230x_n^4 + 18x_n^3 + 9x_n^2 - 9}{221}$$

Für den ersten Startwert wählen wir $x_0 = 0$.

n	x_n
0	0
1	-0.040724
2	-0.040659
3	-0.040659

$\Rightarrow$ Die Nullstelle liegt bei $x = -0.040659$.

Für den zweiten Startwert wählen wir $x_0 = 1$.

n	x_n
0	1
1	1.1221
2	1.77599
3	10.897799
4	1478.9015 $\rightsquigarrow$ divergiert gegen $+\infty$

$$F'(x) = \frac{4 \cdot 230 \cdot x_n^3 + 3 \cdot 18x_n^2 + 18x_n}{221}$$

$$F'(1) = \frac{4 \cdot 230 + 3 \cdot 18 + 18}{221} = \frac{992}{221} > 1$$

Die NsT in $[0,1]$ ist nicht mit dieser FP-Iteration erkennbar, da $F'(1) > 1$ und es sich somit um einen abstossenden FP handelt.

b) Wir müssen zeigen, dass gilt:

1) $F: [a,b] \to [a,b]$

2) $\alpha \leq |F'(x_0)| \quad \forall x \in [-0.5, 0.5]$

1: $a = -0.5$, $b = 0.5$

Da das Minimum bei $x = 0$ liegt und das Maximum bei $x = 0.5$, reicht es zu zeigen, dass diese beiden Punkte in $[-0.5, 0.5]$ liegt.

$f(0) = -0.040724$

$f(0.5) = 0.0447$

$\Rightarrow$ Punkt 1 ist erfüllt

2: Da die maximale Steigung bei $x = 0.5$ liegt, folgt:

$\alpha = F'(0.5) = 0.622172$

$\Rightarrow$ Da $0 < \alpha < 1$ gilt auch Punkt 2.

c) a-priori Abschätzung: $|x_n - \bar{x}| \leq \dfrac{\alpha^n}{1-\alpha} |x_1 - x_0| \leq 10^{-9}$

$$\frac{0.6222^n}{0.3778} \cdot |-0.0407 - 0| \leq 10^{-9}$$

$$0.6222^n \leq \frac{0.3778 \cdot 10^{-9}}{0.0407} = 9.2826 \cdot 10^{-9}$$

$$\Rightarrow \quad n \geq \frac{\log(9.2826 \cdot 10^{-9})}{\log(0.6222)} = 38.978$$

$\Rightarrow \quad n = 39$

Nach 39 Iterationen ist die Fehlerabschätzung kleiner als 10^{-9}.