

Aufgabe 3

$$A = \begin{pmatrix} 20 & 30 & 10 \\ 10 & 17 & 6 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 5720 \\ 3300 \\ 836 \end{pmatrix}$$

$$10\,000\,000 \Rightarrow 1000$$

Aussage: Fehler für jede Bevölkerungsgruppe maximal 0.1 Mio

$$100'000 \rightarrow 100$$

$$\|b - \tilde{b}\|_{\infty} \leq 100$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0.4 & -0.75 & 0.25 \\ -0.2 & 0.5 & -0.5 \\ -0.1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{geg: } \|b - \tilde{b}\| \leq 100$$

$$\|A\|_{\infty} = 60$$

$$\|A^{-1}\|_{\infty} = 1.4$$

$$\|b\|_{\infty} = 5720$$

Beispiel: $\tilde{b} = \begin{pmatrix} 5820 \\ 3400 \\ 736 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \hookrightarrow \|b - \tilde{b}\|_{\infty} &= \left\| \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \\ 100 \end{pmatrix} \right\|_{\infty} \\ &= 100 \end{aligned}$$

absoluter Fehler:

$$\|x - \tilde{x}\|_{\infty} \leq \|A^{-1}\|_{\infty} \cdot \|b - \tilde{b}\|_{\infty} \leq 1.4 \cdot 100 = 140$$

Jede x -Komponente kann bis zu 140 Einheiten abweichen

relativer Fehler:

$$\begin{aligned} \frac{\|x - \tilde{x}\|_{\infty}}{\|x\|_{\infty}} &\leq \|A\|_{\infty} \cdot \|A^{-1}\|_{\infty} \cdot \frac{\|b - \tilde{b}\|_{\infty}}{\|b\|_{\infty}} \\ &\leq 60 \cdot 1.4 \cdot \frac{100}{5720} = 1.4665 \approx 146.65\% \end{aligned}$$

Es ist schlecht konditioniert, da sehr starke Abweichungen toleriert werden.

- b) Aussage: Anzahl der Impfdosen pro Altersgruppe kann um maximal 100 Stück abweichen
 $\hookrightarrow 100 \rightarrow 0.1$

$$\|b - \tilde{b}\| \leq 100$$

$$\|A\|_{\infty} = 60$$

$$\|A^{-1}\|_{\infty} = 1.4$$

$$\|b\|_{\infty} = 5720$$

$$\|A - \tilde{A}\|_{\infty} = \left\| \begin{pmatrix} 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 \end{pmatrix} \right\|_{\infty} = 0.3$$

Bedingung für Fehlerabschätzung:

$$\|A\| \cdot \|A^{-1}\| \leftarrow \text{cond}(A) = \frac{\|A - \tilde{A}\|_{\infty}}{\|A\|_{\infty}} < 1$$

$$60 \cdot 1.4 \cdot \frac{0.3}{60} = 0.42 < 1 \quad \checkmark$$

$$\frac{\|x - \tilde{x}\|_{\infty}}{\|x\|_{\infty}} \leq \frac{\text{cond}(A)}{1 - \text{cond}(A)} \cdot \frac{\|A - \tilde{A}\|_{\infty}}{\|A\|_{\infty}} \cdot \begin{pmatrix} \|A - \tilde{A}\|_{\infty} & \|b - \tilde{b}\|_{\infty} \\ \|A\|_{\infty} & \|b\|_{\infty} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{60 \cdot 1.4}{1 - 0.42} \cdot \left(\frac{0.3}{60} + \frac{100}{5720} \right)$$

$$= 3.2561 \hat{=} 325.61\%$$

c) Aussage: Jede Altersgruppe 0.1 Mio grösser
 0.1 Mio \rightarrow 100

Impfdosen um 100 kleiner

$$A = \begin{pmatrix} 20 & 30 & 10 \\ 10 & 17 & 6 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 5720 \\ 3300 \\ 836 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 19.9 & 29.9 & 9.9 \\ 9.9 & 16.9 & 5.9 \\ 1.9 & 2.9 & 1.9 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{b} = \begin{pmatrix} 5820 \\ 3400 \\ 936 \end{pmatrix}$$

Python $\rightarrow \tilde{x} = \begin{pmatrix} 7.38 \\ 58.77 \\ 395.55 \end{pmatrix}$

$$x = \begin{pmatrix} 22 \\ 88 \\ 264 \end{pmatrix} \longrightarrow \|x\|_{\infty} = 264$$

absolut

$$\|x - \tilde{x}\|_{\infty} = \left\| \begin{pmatrix} 14.62 \\ 29.23 \\ -131.55 \end{pmatrix} \right\|_{\infty} = 131.55$$

relativ

$$\frac{\|x - \tilde{x}\|_{\infty}}{\|x\|_{\infty}} = \frac{131.55}{264} = 0.4983 = 49.83\%$$

worst case: 325.61%

Der relative Fehler ist bereits in einem nicht akzeptablen Rahmen, aber hat jedoch die "Worst Case" noch nicht ausgereizt.