

Übungsserie 12

Abgabe: gemäss Angaben Dozent

Die Serie wird während den Übungen der letzten zwei Wochen zusammen gelöst und die Lösungen besprochen.

Aufgabe 1:

Berechnen Sie das Spektrum und daraus die Determinante und Spur der folgenden Matrizen

$$a) \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad b) \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 2 \\ 0 & 2 & a \end{pmatrix}$$

Zur Erinnerung: die Determinante einer 3×3 Matrix \mathbf{B} berechnet sich z.B. als

$$\begin{aligned} \det \mathbf{B} &= \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} = b_{11} \begin{vmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} - b_{12} \begin{vmatrix} b_{21} & b_{23} \\ b_{31} & b_{33} \end{vmatrix} + b_{13} \begin{vmatrix} b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{vmatrix} \\ &= b_{11}(b_{22}b_{33} - b_{23}b_{32}) - b_{12}(b_{21}b_{33} - b_{23}b_{31}) + b_{13}(b_{21}b_{32} - b_{22}b_{31}) \end{aligned}$$

Aufgabe 2 (vgl. Bsp. 4.22 & Aufg. 4.12):

a) Berechnen Sie die Eigenwerte, die Eigenvektoren und Eigenräume der Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

sowie den Rang der jeweiligen Koeffizientenmatrix $\text{Rg}(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_n)$

b) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3¹:

Es sei

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 7 & -5 & 9 \\ 6 & -6 & 9 \end{pmatrix}$$

a) Zeigen Sie, dass die Matrix diagonalisierbar ist mit

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{T}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -5 & 6 & -7 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

¹aus [12]

b) Verwenden Sie die Diagonalisierbarkeit, um die Eigenwerte und Eigenvektoren von A anzugeben.

c) Sind zu einer diagonalisierbaren Matrix A die zugehörigen Matrizen T und D mit

$$D = T^{-1}AT$$

eindeutig bestimmbar? Begründen Sie.

Tipp: Multiplizieren Sie die Spalten von T mit unterschiedlichen Faktoren und berechnen Sie $\tilde{D} = \tilde{T}^{-1}A\tilde{T}$ erneut.

Aufgabe 4:

a) Implementieren Sie das **QR**-Verfahren in Python in die Funktion `[Ak,Pk] = Name_S12_Aufg4(A,k)`. Dabei ist $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und A_k und P_k die Matrizen aus dem **QR**-Verfahren nach der k -ten Iteration gemäss Skript. Verwenden Sie für die benötigte **QR**-Zerlegung die Python Funktion `np.linalg.qr()`. Überprüfen Sie, dass Ihre Funktion das gleiche Resultat ergibt wie in Bsp. 4.24 im Skript für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Wenden Sie Ihre Funktion jetzt auf die symmetrische Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 5 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 6 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

an. Überprüfen Sie, dass P_k orthogonal ist. Welches sind die Eigenwerte und die Eigenvektoren von A ? Schreiben Sie das als Kommentar in Ihr Skript.

c) Überprüfen Sie Ihr Resultat aus b) mit der Python-Funktion `np.linalg.eig()`. Lesen Sie die Eigenschaften dieser Funktion im Numpy-Manual nach. Was ist der Vorteil der Funktion `np.linalg.eig()` im Vergleich zu Ihrer eigenen Funktion? Schreiben Sie Ihren Kommentar in Ihr Skript.

Aufgabe 5 (vgl. Bsp. 4.25):

Bestimmen Sie mit einem Python-Skript `Name_S12_Aufg5.py` den betragsmässig grössten Eigenwert und einen zugehörigen Eigenvektor der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

mit der Vektoriteration (von-Mises Iteration) und dem Startvektor $x = (1,0,0)^T$. Brechen Sie die Iteration ab, wenn $\|x_{k+1} - x_k\|_2 < 1e-4$. Wie viele Male müssen Sie iterieren? Überprüfen Sie auch hier Ihr Resultat mit `np.linalg.eig()`. Stimmen die Resultate überein?