Übungsserie 12

Lösung

Aufgabe 1:

a) Spektrum $\sigma(\boldsymbol{A}) = \{1, 2, 3\}$, Determinante $\det A = 6$, Spur $\mathrm{tr}\boldsymbol{A} = 6$

b) $\sigma(\boldsymbol{A}) = \{a, a + \sqrt{5}, a - \sqrt{5}\}$, $\det A = a(a^2 - 5)$, $\mathrm{tr}\boldsymbol{A} = 3a$

Aufgabe 2:

a) $\lambda_{1,2} = \pm i$

- Eigenvektor/Eigenraum zu $\lambda_1 = +i$:

$$\boldsymbol{x_1} = \begin{pmatrix} -2-i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\mathrm{E}_{\lambda_1} = \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} = \mu \begin{pmatrix} -2-i \\ 1 \end{pmatrix}, \mu \in \mathbb{R}\}$$

- Eigenvektor/Eigenraum zu $\lambda_2 = -i$:

$$\boldsymbol{x_2} = \begin{pmatrix} -2+i \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{E}_{\lambda_2} = \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} = \mu \begin{pmatrix} -2+i \\ 1 \end{pmatrix}, \mu \in \mathbb{R}\}$$

Bemerkung: $\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_2^*$, da auch die zugehörigen Eigenwerte $\lambda_1 = \lambda_2^*$ zueinander komplex konjugiert sind.

b) $\lambda_{1,2} = -1$, $\lambda_3 = 2$

- Eigenvektoren zu $\lambda_{1,2} = -1$:

$$\boldsymbol{x_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Eigenvektoren zu $\lambda_3 = 2$:

$$\boldsymbol{x_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3:

a) Es gilt:

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

b) Die Eigenwerte sind die Diagonalelemente von D, also $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$. Die Eigenvektoren sind die Spalten von $\boldsymbol{T}$.

c) $\boldsymbol{D}$ ist nur eindeutig bis auf die Reihenfolge der Diagonalelemente (da die Eigenwerte von $\boldsymbol{A}$ eindeutig sind). Permutiert man die Diagonalelemente von $\boldsymbol{D}$, so müssen die Spalten von $\boldsymbol{T}$ derselben Permutation unterzogen werden.

$\boldsymbol{T}$ ist aber auch bei vorgegebenem $\boldsymbol{D}$ immer noch nicht eindeutig, denn die Spalten von $\boldsymbol{T}$ bleiben auch dann Eigenvektoren zu ihrem Eigenwert, wenn sie je mit einem beliebigen Faktor multipliziert werden.

Aufgabe 4:

Python-Code in den Übungen besprochen.

Aufgabe 5:

Python-Code in den Übungen besprochen. Nach 14 Iterationen ist $\lambda_{max} = 2.99985638$ und der Eigenvektor $v = (0.29816784, 0.59627983, 0.74534979)^T$. Die Resultate stimmen überein.