

Übungsserie 9

Fassen Sie Ihre Lösungen in der ZIP-Datei *Name_S9.zip* zusammen. Laden Sie dieses File vor der nächsten Übungsstunde nächste Woche auf Moodle hoch.

Aufgabe 1 (40 Minuten):

Wie gross ist die Schrittweite h bzw. die Anzahl benötigter Subintervalle n , um das Integral

$$I = \int_1^2 \ln(x^2) dx$$

auf einen Fehler von maximal 10^{-5} genau berechnen zu können für die summierten Rechtecksregel, die summierte Trapezregel und die summierte Simpsonregel?

Aufgabe 2 (40 Minuten):

Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^\pi \cos(x^2) dx$$

manuell mit der Trapezregel $Tf(h)$ für die Schrittweiten $h_j = \frac{b-a}{2^j}$, ($j = 0, \dots, 4$) (Achtung: die erste Spalte enthält also fünf Werte) und extrapolieren Sie diese mittels Romberg-Extrapolation so weit wie möglich. Schreiben Sie die Summen für die T_{j0} komplett mit allen Summanden auf soweit nötig, also z.B.

$$T_{20} = h_2 \left(\frac{\cos(\dots) + \cos(\dots)}{2} + \cos(\dots) + \cos(\dots) + \cos(\dots) \right),$$

aber

$$T_{40} = h_4 \left(\frac{\cos(\dots) + \cos(\dots)}{2} + \cos(\dots) + \cos(\dots) + \dots + \cos(\dots) \right).$$

Aufgabe 3 (40 Minuten):

Implementieren Sie die Romberg-Extrapolation in einer Python Funktion `[T] = Name_S9_Aufg3(f, a, b, m)`, welches Ihnen das bestimmte Integral

$$\int_a^b f(x) dx$$

für eine vorgegebene Funktion f und ein gegebenes m auf dem Intervall $[a, b]$ für die Schrittweiten $h_j = \frac{b-a}{2^j}$, ($j = 0, \dots, m$) berechnet und anschliessend extrapoliert. Der letzte (genaueste) Wert wird als T zurückgegeben. Überprüfen Sie damit Ihre Resultate der Aufgabe 2.

Achtung: m definiert die Anzahl T_{j0} für die erste Spalte des Romberg-Algorithmus, während $n_j = 2^j$ die Anzahl der Summanden in der summierten Trapezregel bestimmt:

$$T_{j0} = h_j \left(\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n_j-1} f(x_i) \right) \text{ für } h_j = \frac{b-a}{2^j}, n_j = 2^j \text{ und } j = 0, \dots, m.$$