Hm2_Serie09

15 April 2024 14:00

Höhere Mathematik 2, Studiengang Informatik, ZHAW

Übungsserie 9

Fassen Sie Ihre Lösungen in der ZIP-Datei *Name_S9.zip* zusammen. Laden Sie dieses File vor der nächsten Übungsstunde nächste Woche auf Moodle hoch.

Aufgabe 1 (40 Minuten):

Wie gross ist die Schrittweite h bzw. die Anzahl benötigter Subintervalle n, um das Integral

$$I = \int_1^2 \ln(x^2)dx$$

auf einen Fehler von maximal 10^{-5} genau berechnen zu können für die summierten Rechtecksregel, die summierte Trapezregel und die summierte Simpsonregel ?

Aufgabe 2 (40 Minuten):

Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^\pi \cos(x^2)dx$$

manuell mit der Trapezregel $Tf(h)$ für die Schrittweiten $h_j = \frac{b-a}{2^j}$, $(j = 0, ..., 4)$ (Achtung: die erste Spalte enthält also fünf Werte) und extrapolieren Sie diese mittels Romberg-Extrapolation so weit wie möglich. Schreiben Sie die Summen für die T_{j0} komplett mit allen Summanden auf soweit nötig, also z.B.

$$T_{20} = h_2 \left(\frac{\cos(...) + \cos(...)}{2} + \cos(...) + \cos(...) + \cos(...) \right),$$

aber

$$T_{40} = h_4 \left(\frac{\cos(...) + \cos(...)}{2} + \cos(...) + \cos(...) + ... + \cos(...) \right).$$

Aufgabe 3 (40 Minuten):

Implementieren Sie die Romberg-Extrapolation in einer Python Funktion `[T] = Name_S9_Aufg3(f, a, b, m)`, welches Ihnen das bestimmte Integral

$$\int_a^b f(x)dx$$

für eine vorgegebene Funktion f und ein gegebenes m auf dem Intervall $[a, b]$ für die Schrittweiten $h_j = \frac{b-a}{2^j}$, $(j = 0, ..., m)$ berechnet und anschliessend extrapoliert. Der letzte (genaueste) Wert wird als T zurückgegeben. Überprüfen Sie damit Ihre Resultate der Aufgabe 2.

Achtung: m definiert die Anzahl T_{j0} für die erste Spalte des Romberg-Algorithmus, während $n_j = 2^j$ die Anzahl der Summanden in der summierten Trapezregel bestimmt:

$$T_{j0} = h_j \left(\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n_j - 1} f(x_i) \right) \text{ für } h_j = \frac{b-a}{2^j},\ n_j = 2^j \text{ und } j = 0, ..., m.$$

1

1

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - Rf(h) \right| \leq \frac{h^2}{24}(b-a) \max_{x\in[a,b]} |f''(x)| \leq 10^{-5}$$

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - Tf(h) \right| \leq \frac{h^2}{12}(b-a) \max_{x\in[a,b]} |f''(x)| \leq 10^{-5}$$

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - Sf(h) \right| \leq \frac{h^4}{2880}(b-a) \max_{x\in[a,b]} |f^{(4)}(x)| \leq 10^{-5}$$

$f(x) = \ln(x^2)$

$f'(x) = 2x^{-1}$

$f''(x) = \frac{-2}{x^2}$ Plotten für max $\max_{x\in[1,2]} |f''(x)| = \max \left| \frac{-2}{x^2} \right| = 2$

$f'''(x) = \frac{4}{x^3}$ $\max_{x\in[1,2]} |f''''(x)| = \max \left| \frac{-12}{x^4} \right| = 12$

$f''''(x) = \frac{-12}{x^4}$

$\frac{h^2}{\ldots}(b-a) \cdot \max \ldots \leq 10^{-5} \leq \frac{h^2}{\ldots}(2-1) \cdot 2 = \sqrt{10^{-5} \cdot 12} \rightarrow \underline{h = 0.01095}$

$h = \frac{b-a}{\ldots} \rightarrow n = 92$

$$\frac{h^2}{24}(b-a)\cdot \max_{x\in[a,b]} \le 10^{-5} \le \frac{h^2}{24}(2-1)\cdot 2 = \sqrt{10^{-5}\cdot 12} \to \underline{h = 0.01095}$$

$$h = \frac{b-a}{n} \to \underline{\underline{n = 92}}$$

$$\frac{h^2}{12}(b-a)\cdot \max_{x\in[a,b]} \le 10^{-5} \le \frac{h^2}{12}(2-1)\cdot 2 = \sqrt{10^{-5}\cdot 6} \to \underline{h = 0.0077}$$

$$h = \frac{b-a}{n} \to n = \underline{\underline{130}}$$

$$\frac{h^4}{2880}(b-a)\cdot \max_{x\in[a,b]} \le 10^{-5} \le \frac{h^4}{2880}(2-1)\cdot 12 = \sqrt[4]{10^{-5}\cdot 120} \to h = \underline{\underline{0.1861}}$$

$$h = \frac{b-a}{n} \to n = \underline{\underline{6}}$$

(2) $\int_0^{\pi} \cos(x^2)\,dx$

T00

$j=0,\ h_0 = \frac{b-a}{2^0} = b-a = \pi - 0,\ n_0 = 2^j = 1$

$T00 = Tf(\pi) = h_0\left(\frac{f(0)+f(\pi)}{2}\right) = \underline{0.1529}$

T10

$j=1,\ h_1 = \frac{b-a}{2^1} = \frac{\pi}{2},\ n_1 = 2^1 = 2$

$T10 = Tf\left(\frac{\pi}{2}\right) = h_1\cdot\left(\frac{f(0)+f(\pi)}{2} + f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = \underline{-1.1507}$

T20

$j=2,\ h_2 = \frac{b-a}{2^2} = \frac{\pi}{4},\ n_2 = 2^2 = 4$

$T20 = Tf\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}\cdot\left(\frac{f(0)+f(\pi)}{2} + f\left(\frac{\pi}{4}\right) + f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) = \underline{0.6500}$

$x_i = a + ih_j$

T30

$j=3,\ h_3 = \frac{b-a}{2^3} = \frac{\pi}{8},\ n_3 = 2^3 = 8$

$T30 = Tf\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\pi}{8}\cdot\left(\frac{f(0)+f(\pi)}{2} + \sum_{i=1}^{n_j-1} f(x_i)\right) = \underline{0.6026}$

T40

$j=4,\ h_4 = \frac{b-a}{2^4} = \frac{\pi}{16},\ n = 16$

$T40 = Tf\left(\frac{\pi}{16}\right) = \frac{\pi}{16}\cdot\left(\frac{f(0)+f(\pi)}{2} + \sum_{i=1}^{n_j-1} f(x_i)\right) = \underline{0.5745}$

T00 0.1529	T01 -1.5852	T02 1.4392	T03 0.5284	T04 $\underline{\underline{0.5641}}$
T10 -1.1507	T11 1.2502	T12 0.5427	T13 0.5640	
T20 0.6500	T21 0.5868	T13 0.5637		
T30 0.6026	T31 0.5601			
T40 0.5745				

$$\left(\frac{256\cdot 0.5640 - 0.5284}{255}\right)$$