$$Df(x_1, \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} \dfrac{df_1}{dx_1} & \dfrac{df_1}{dx_2} & \cdots \\ \dfrac{df_2}{dx_1} & \ddots & \\ \vdots & & \ddots \end{pmatrix}$$

a) $f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 5x_1 x_2 \\ x_1^2 x_2^2 + x_1 + 2x_2 \end{pmatrix}$ $\qquad x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Jacobi: 2x2

$$Df(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 5x_2 & 5x_1 \\ 2x_1 x_2^2 + 1 & 2x_1^2 x_2 + 2 \end{pmatrix}$$

$$Df(1, 2) = \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 9 & 6 \end{pmatrix}$$

b) $f(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} \ln(x_1^2 + x_2^2) + x_3^2 \\ \exp(x_2^2 + x_3^2) + x_1^2 \\ \dfrac{1}{x_3^2 + x_1^2} + x_2^2 \end{pmatrix}$

$$Df(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{x_1^2 + x_2^2} \cdot 2x_1 & \dfrac{1}{x_1^2 + x_2^2} \cdot 2x_2 & 2x_3 \\ 2x_1 & 2x_2 \cdot e^{x_2^2 + x_3^2} & 2x_3 \cdot e^{x_2^2 + x_3^2} \\ \dfrac{-2x_1}{(x_3^2 + x_1^2)^2} & 2x_2 & \dfrac{-2x_3}{(x_3^2 + x_1^2)^2} \end{pmatrix}$$

$\dfrac{1}{5 + x^2} = (5 + x^2)^{-1}$ $\Rightarrow$ $-1(5 + x^2)^{-2} \cdot 2x$ $=$ $\dfrac{-2x}{(5 + x^2)^2}$

$$Df(1,2,3) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{x_1^2 + x_2^2} \cdot 2x_1 & \dfrac{1}{x_1^2 + x_2^2} \cdot 2x_2 & 2x_3 \\[4mm] 2x_1 & 2x_2 \cdot e^{x_2^2 + x_3^2} & 2x_3 \cdot e^{x_2^2 + x_3^2} \\[4mm] \dfrac{-2x_1}{(x_3^2 + x_1^2)^2} & 2x_2 & \dfrac{-2x_3}{(x_3^2 + x_1^2)^2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0.4 & 0.8 & 6 \\[2mm] 2 & 4 \cdot e^{13} & 6 \cdot e^{13} \\[2mm] -0.02 & 4 & -\dfrac{3}{50} \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2

f,x

$f.\text{jacobian}(x)$

Aufgabe 3   Linearisierung

$$g(x) = f(x^{(0)}) + Df(x^{(0)})(x - x^{(0)})$$