HM2_Serie11

29 April 2024 14:03

Höhere Mathematik 2, Studiengang Informatik, ZHAW

Übungsserie 11

Fassen Sie Ihre Lösungen in der ZIP-Datei *Name_S11.zip* zusammen. Laden Sie dieses File vor der nächsten Übungsstunde nächste Woche auf Moodle hoch.

Aufgabe 1 (30 Minuten):

Schreiben Sie eine Funktion `Name_S11_Aufg1(f , xmin, xmax, ymin, ymax, hx, hy)`, welche Ihnen das Richtungsfeld der DGL $y'(x) = f(x, y(x))$ auf den Intervallen $[x_{min}, x_{max}]$ und $[y_{min}, y_{max}]$ plottet mit der Schrittweite h_x in $x-$Richtung und h_y in $y-$Richtung. Benutzen Sie dafür die Python-Funktionen `numpy.meshgrid()` und `numpy.quiver()`.

Gehen Sie dafür folgendermassen vor:

(i) Mit `np.meshgrid()` erzeugen Sie zuerst die Koordinaten des Punkterasters in derxy- Ebene, z.B. `[X,Y] = np.meshgrid(0:0.1:5,0:0.1:3)`

(ii) Mit Ihrer Funktion $f(x, y)$ berechnen Sie anschliessend für jeden dieser Punkte die Steigung, z.B. `Ydiff=f(X,Y)`.

(iii) Damit `np.quiver()` die entsprechenden Steigungsvektoren für jeden Punkt zeichnen kann, erwartet es für jeden Punkt in der (x, y)- Ebene neben den Koordinaten X und Y auch die $x-$Komponenten der jeweiligen Steigungsdreiecke und die entsprechenden $y-$Komponenten. Sie erhalten das gewünschte Resultat, wenn Sie für die $y-$Komponente des Steigungsdreiecks Ydiff übergeben und für die $x-$Komponente eine Matrix mit lauter Einsen.

Aufgabe 2 (45 Minuten):

Betrachten Sie die folgende DGL

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y}$$

auf dem Intervall $0 \leq x \leq 1.4$ mit $y(0) = 2$. Lösen Sie die DGL manuell mit

(a) dem Euler-Verfahren mit $h = 0.7$.

(b) dem Mittelpunkt-Verfahren mit $h = 0.7$.

(c) dem modifizierten Euler-Verfahren mit $h = 0.7$.

Die exakte Lösung der DGL ist $y(x) = \sqrt{\frac{2x^3}{3} + 4}$. Berechnen Sie für (a) - (c) jeweils den absoluten Fehler $\mid y(x_i) - y_i \mid$ für jedes x_i.

Aufgabe 3 (45 Minuten):

Schreiben Sie eine Funktion `[x, y_euler,y_mittelpunkt,y_modeuler] = Name_S11_Aufg3(f,a,b,n,y0)`, welche Ihnen das Anfangswertproblem $y'(x) = f(x, y(x))$, $y(a) = y_0$ auf dem Intervall $[a, b]$ mit n Schritten berechnet, sowohl mit dem Euler-Verfahren als auch mit dem Mittelpunkt-Verfahren und dem modifizierten Euler-Verfahren. Die Resultate werden in die Vektoren `y_euler, y_mittelpunkt, y_modeuler` geschrieben, `x` enthält die entsprechenden x_i-Werte. Ausserdem soll eine Grafik des Richtungsfeldes erzeugt (benutzen Sie dafür ihre Funktion aus Aufgabe 1) und die drei Lösungen eingezeichnet werden. Überprüfen Sie damit Ihre Resultate aus Aufgabe 2.

(2a) $x_{i+1} = x_i + h$ $\quad y(0) = 2$

$y_{i+1} = y_i + h \cdot \frac{x_i^2}{y_i}$

i	x_i	y_i	$\lvert y(x_i) - y_i \rvert$
0	0	2	0
1	0.7	2	0.0564
2	1.4	2.1715	0.2429

(2b)

i	x_i	y_i	$x_{\frac{h}{2}}$	$y_{\frac{h}{2}}$	x_{i+1}	y_{i+1}	$\lvert y(x_i) - y_i \rvert$
0	0	2	0.35	2	0.7	2.0429	0
1	0.7	2.0429	1.05	2.1268	1.4	2.4057	0.0135
2	1.4	2.4057	—	—	—	—	0.0086

(2c)

i	x_i	y_i	k_1	y_{i+1}^{E}	x_{i+1}	k_2	y_{i+1}	$\lvert y(x_i) - y_i \rvert$
0	0	2	0	2	0.7	0.24	2.0858	0
1	0.7	2.0858	0.2349	2.2502	1.4	0.87	2.4778	0.0293
2	1.4	2.4728	0.7926	3.0277	2.1	1.46	3.2601	0.0584