HM2_Serie08

08 April 2024 14:00

Höhere Mathematik 2, Studiengang Informatik, ZHAW

Übungsserie 8

Fassen Sie Ihre Lösungen in der ZIP-Datei *Name_S8.zip* zusammen. Laden Sie dieses File vor der nächsten Übungsstunde nächste Woche auf Moodle hoch.

Aufgabe 1 (ca. 30 Minuten):

Beweisen Sie, dass ausgehend von der Trapezregel für ein Intervall $[a, b]$

$$Tf = \frac{f(a) + f(b)}{2} \cdot (b - a)$$

a) die summierte Trapezregel in der Form gilt

$$Tf(h) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{y_i + y_{i+1}}{2} \cdot (x_{i+1} - x_i),$$

wenn eine tabellierte, nicht äquidistante Wertetabelle $(x_i, y_i)_{0 \leq i \leq n}$ vorliegt mit $x_0 = a$, $x_n = b$ und $y_i = f(x_i)$.

b) die summierte Trapezregel in der Form gilt

$$Tf(h) = h \left(\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right),$$

wenn das Intervall $[a, b]$ aufgespalten wird in n äquidistante Subintervalle, wobei $x_i = a + ih$ und $h = (b - a)/n$ und $i = 0, ..., n$ (also $x_0 = a$ und $x_n = b$)

Aufgabe 2 (ca. 50 Min.):

Ein Teilchen der Masse m, das sich durch eine Flüssigkeit bewegt, wird durch den Widerstand R der Flüssigkeit abgebremst. Der Widerstand ist dabei eine Funktion der Geschwindigkeit, $R = R(v)$, d.h. je grösser die Geschwindigkeit, desto grösser ist der Widerstand und umgekehrt. Die Beziehung zwischen dem Widerstand R und der Zeit t ist durch die folgende Gleichung gegeben:

$$t = \int_{v(t_0)}^{v(t)} \frac{m}{R(v)} dv$$

Angenommen, es sei für eine spezielle Flüssigkeit $R(v) = -v\sqrt{v}$, wobei R in [N] (Newton) und v in [m/s] gegeben sind. Approximieren Sie für m =10 kg und $v(0)$ =20 m/s die Zeit, die das Teilchen benötigt, um seine Geschwindigkeit auf v =5 m/s zu verlangsamen. Führen Sie die Herleitung manuell durch (Zahlenwerte berechnen Sie natürlich z.B. mit Python).

(a) Verwenden Sie die summierte Rechtecksregel mit $n = 5$

(b) Verwenden Sie die summierte Trapezregel mit $n = 5$

(c) Verwenden Sie die summierte Simpsonregel mit $n = 5$

Geben Sie für (a) - (c) immer auch an, wie gross der tatsächliche absolute Fehler der Näherung ist. Berechnen Sie dazu den exakten Wert des Integrals.

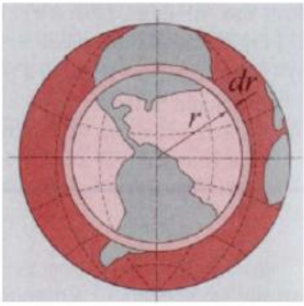
Aufgabe 3 (40 Minuten):.

Die Dichte ρ der Erde variiert mit dem Radius r gemäss der folgenden Tabelle, in der die Abstände in r nicht äquidistant sind (aus [9]):

r (km)	0	800	1200	1400	2000	3000	3400	3600	4000	5000	5500	6370
ρ (kg/m^3)	13000	12900	12700	12000	11650	10600	9900	5500	5300	4750	4500	3300

Berechnen Sie die Masse m der Erde mit folgendem Integral

$$m = \int_0^{6370} \rho \cdot 4\pi r^2 dr,$$



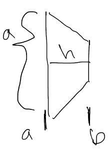
in dem sie die beiden folgenden Teilaufgaben lösen:

a) Schreiben Sie zuerst eine Funktion `[Tf_neq] = Name_S8_Aufg3a(x,y)`, welche Ihnen für eine tabellierte, nicht äquidistante Wertetabelle $(x_i, y_i)_{0\leq i\leq n}$ in den Vektoren `x` und `y` das entsprechende bestimmte Integral `Tf_neq` mittels der summierten Trapezregel für nicht äquidistante x-Werte löst gemäss Aufgabe 1b):

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx \approx Tf_{neq} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{y_i + y_{i+1}}{2} \cdot (x_{i+1} - x_i)$$

b) Schreiben Sie ein Skript `Name_S8_Aufg3b.m`, welches Ihnen mit Funktion aus a) die Erdmasse berechnet. Beachten sie dabei, dass r im km gegeben ist, ρ aber in kg/m^3. Vergleichen Sie Ihr Resultat für die Erdmasse mit einem Refernzwert aus der Literatur. Berechnen Sie den absoluten und den relativen Fehler Ihrer Integration im Vergleich mit dem Literaturwert.

1a) $\frac{a+c}{2} \cdot h \to \frac{f(x_i)+f(x_{i+1})}{2} \cdot (x_{i+1} - x_i)$



$= \frac{y_i + y_{i+1}}{2} \cdot (x_{i+1} - x_i)$

aufsummieren

$Tf(h) \sum_{i=0}^{n-1} \frac{y_i + y_{i+1}}{2} (x_{i+1} - x_i)$

$\Downarrow$ falls nicht äquidistant

b) $Tf = h\left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right)$

$Tf(\dots) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{y_i + y_{i+1}}{2} \underbrace{(x_{i+1} - x_i)}_{h}$

$= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{y_i + y_{i+1}}{2} \cdot h$

$= h \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2}$

$= h \cdot \left(\underbrace{\frac{f(x_0)}{2} + \frac{f(x_1)}{2}}_{i=0} + \underbrace{\frac{f(x_1)}{2} + \frac{f(x_2)}{2}}_{i=1} + \dots + \underbrace{\frac{f(x_{n-1})}{2} + \frac{f(x_n)}{2}}_{i=n-1} \right)$

$= h \cdot \left(\frac{f(x_0)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\cancel{2} \cdot f(x_i)}{\cancel{2}} + \frac{f(x_n)}{2} \right)$

$= h \cdot \left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right)$

$$= h \cdot \left(\frac{f(x_0)}{2} + \sum_{i=1} \frac{\cancel{2} \cdot f(x_i)}{\cancel{2}} + \frac{f(x_n)}{2} \right)$$

$$= h \cdot \left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right)$$

2) $$t = \int_{v(t_0)}^{v(t)} \frac{m}{R(v)} \, dv$$

$$\int_{20}^{5} \frac{m}{-v\sqrt{v}} \, dv \qquad \Big|_{20}^{5}$$

a) $n=5 \quad h = \frac{b-a}{5} = \frac{5-20}{5} = -3 \qquad x_i = a + i \cdot h = 20 - 3i$

$f(v) = -10 v^{-\frac{3}{2}}$

$$Rf = h\left(\sum_{i=0}^{n-1} f(\underbrace{a + i \cdot h}_{x_i} + \frac{h}{2}) \right)$$

$$= -3\left(\sum_{i=0}^{4} f(20 - 3i - 1.5) \right)$$

$$= \underline{\underline{4.38231}}$$

$$|S^{exakt} - Rf| = \underline{\underline{0.8982}}$$

b) $$Tf = h\left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + 2\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{x_{k-1}+x_k}{2}\right) + \frac{1}{2} f(b) \right)$$

$$= \underline{4.658178}$$

$$|S^{exakt} - Tf| = \underline{\underline{0.1860}}$$

c) $$Sf = \frac{h}{3}\left(\frac{1}{2} f(a) + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + 2 \cdot \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right) + \frac{1}{2} f(b) \right)$$

$$= \underline{\underline{4.4742}}$$

$$|S^{exakt} - Sf| = \underline{\underline{0.0021}}$$