Übungsserie 10

Fassen Sie Ihre Lösungen in der ZIP-Datei *Name_S10.zip* zusammen. Laden Sie dieses File vor der nächsten Übungsstunde nächste Woche auf Moodle hoch.

Aufgabe 1 (60 Minuten):

Eine Boeing 737-200 setzt bei der Landung zum Zeitpunkt $t = 0\,$s bei der Koordinate $x_0 = 0\,\mathrm{m}$ mit der Geschwindigkeit $v_0 = 100$ m/s auf. Die Masse des Flugzeugs beträgt zum Zeitpunkt der Landung $m = 97'000$ kg und wird im Weiteren als konstant angenommen. Die durch Schubumkehr erzeugte Bremskraft ist gegeben durch $F = -5 \cdot \dot{x}^2 - 570000$ und daraus folgt als Bewegungsgleichung die DGL 2. Ordnung:

$$m \cdot \ddot{x} = -5 \cdot \dot{x}^2 - 570000,$$

wobei $x(t)$ die Ortsfunktion des Flugzeiges als Funktion der Zeit t ist, $\dot{x} = \frac{dx}{dt} = v(t)$ seine Geschwindigkeit und $\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = a(t)$ die Beschleunigung. Damit kann die DGL 2. Ordnung umgeschrieben werden in eine DGL 1. Ordnung:

$$m\frac{dv}{dt} = -5v^2 - 570000$$

a) Gesucht ist die Zeit t_E, die das Flugzeug braucht, um zum Stillstand zu kommen. Sie werden in den späteren Übungen Verfahren anwenden, um $v(t)$ und $x(t)$ direkt numerisch berechnen zu können. Bis es soweit ist, benutzen Sie hier das analytische Verfahren der Separation der Variablen, um ein Integral für die Zeit zu erhalten:

$$t_E = \int_0^{t_E} dt = ?$$

Berechnen Sie das erhaltene Integral numerisch mit einem Skript `Name_S10_Aufg2.py` mit der Romberg-Extrapolation (aus Serie 9, Aufgabe 3).

b) Benutzen Sie den Zusammenhang $\frac{dx}{dt} = v$ resp. $dx = dt \cdot v$ um aus a) analytisch auch das Integral für den Bremsweg x_E zu erhalten

$$x_E = \int_0^{x_E} dx = ?$$

und berechnen Sie auch dieses Integral mit der Romberg-Extrapolation.

Aufgabe 2[1] (60 Minuten):

Die Bewegungsgleichung einer vertikal steigenden Rakete lässt sich als DGL 2. Ordnung vereinfacht schreiben als

$$a(t) = \ddot{h}(t) = v_{\text{rel}} \cdot \frac{\mu}{m_{\text{A}} - \mu \cdot t} - g.$$

Dabei ist $a(t)$ wieder die Beschleunigung der Rakete, wobei wir die Ortskoordinate hier als $h(t)$ bezeichnen (Höhe über Meer in Metern), v_{rel} ist die relative Ausströmgeschwindigkeit des Treibstoffs, $\mu = \frac{dm}{dt}$ ist der Massenstrom (der beschreibt, wieviel Treibstoffmasse pro Zeiteinheit ausgestossen wird), m_{A} ist die Anfangsmasse der Rakete zu Beginn der Brennphase und $g = 9.81\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ die Fallbeschleunigung.

[1] Zur Herleitung der Raketengleichung siehe https://www.leifiphysik.de/mechanik/impulserhaltung-und-stoesse/grundwissen/raketenphysik

Wir nehmen an, dass g und die Ausströmgeschwindigkeit v_{rel}des Treibsstoffs während der gesamten Brennphase der Triebwerke konstant sind, der gesamte Treibstoff in der Brennphase $0 \leq t \leq t_{\mathrm{E}}$ ausgestossen wird (t_{E}bedeutet hier also das Ende der Brennphase) und der Massenstrom $\mu = \frac{dm}{dt}$ ebenfalls während der gesamten Brennphase der Triebwerke konstant ist mit

$$\mu = \frac{dm}{dt} = \frac{m_{\mathrm{A}} - m_{\mathrm{E}}}{t_{\mathrm{E}}}$$

wobei m_{E} die Masse der Rakete am Ende der Brennphase darstellt.

Für die Brennphase der ersten Stufe der dreistufigen Ariane 4 Rakete galt z.B. $v_{\mathrm{rel}} = 2600\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, $m_{\mathrm{A}} = 300'000\,\mathrm{kg}$, $m_{\mathrm{E}} = 80'000\,\mathrm{kg}$, $t_{\mathrm{E}} = 190\,\mathrm{s}$. Erstellen Sie ein Skript `Name_S10_Aufg2.py`,welches Ihnen die folgenden Aufgaben löst:

a) Plotten Sie $a(t)$ für $t \in [0, t_{\mathrm{E}}]$ und berechnen Sie numerisch mit der summierten Trapez-Regel mit Ihrer Funktion aus Serie 8 (Aufgabe 3a) mit einer ausreichend kleinen Schrittweite die Geschwindigkeit

$$v(t) = \int_0^t a(t)dt$$

und die Höhe

$$h(t) = \int_0^t v(t)dt.$$

Plotten Sie $v(t)$ und $h(t)$ in zwei separate Grafiken. Wie schnell und wie hoch ist die Rakete am Ende der ersten Brennphase, mit wievielen g beschleunigt sie zu dem Zeitpunkt?

b)Vergleichen Sie Ihre Lösung schliesslich grafisch mit den analytischen Lösungen

$$\begin{aligned}
v(t) &= v_{\mathrm{rel}} \cdot \ln\left(\frac{m_{\mathrm{A}}}{m_{\mathrm{A}} - \mu \cdot t}\right) - gt \\
h(t) &= -\frac{v_{\mathrm{rel}}\left(m_{\mathrm{A}} - \mu t\right)}{\mu} \cdot \ln\left(\frac{m_{\mathrm{A}}}{m_{\mathrm{A}} - \mu \cdot t}\right) + v_{\mathrm{rel}} \cdot t - \frac{1}{2}gt^2
\end{aligned}$$

indem Sie diese in die jeweils gleiche Grafik plotten.