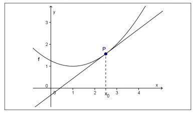
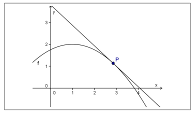
Kurvenpunkte

Geometrische Vorbetrachtung

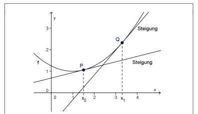
1. Ableitung : Veränderung der Funktion f = Steigung der Kurventangente

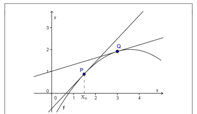
$f'(x_0) > 0$: f **wächst** beim Durchgang durch Punkt $P(x_0, y_0)$

$f'(x_0) < 0$: f **fällt** beim Durchgang durch Punkt $P(x_0, y_0)$

2. Ableitung : Veränderung der 1. Ableitung / Krümmungsverhalten von f



Zunahme der Tangentensteigung $f''(x_0) > 0$

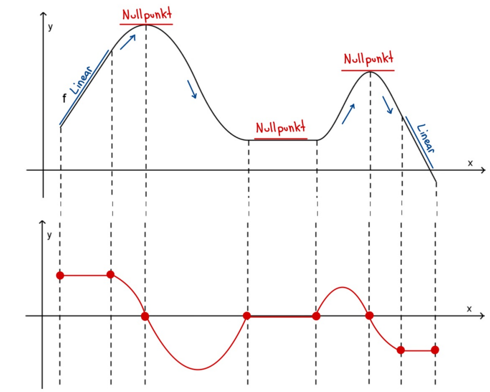


Abnahme der Tangentensteigung $f''(x_0) < 0$

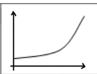
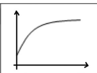
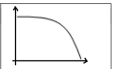
$f''(x_0) > 0$: **Zunahme** der Tangentensteigung, **f = Linkskrümmung**

$f''(x_0) < 0$: **Abnahme** der Tangentensteigung, **f = Rechtskrümmung**

z.B.



z.B.

Graph von f				
f wächst/fällt	☒ wächst ☐ fällt	☒ wächst ☐ fällt	☐ wächst ☒ fällt	☐ wächst ☒ fällt
Vorzeichen von f'	$f'(x) > 0$	$f'(x) > 0$	$f'(x) < 0$	$f'(x) < 0$
Krümmung von f	☐ rechts ☒ links	☒ rechts ☐ links	☐ rechts ☒ links	☒ rechts ☐ links
f' wächst/fällt	☒ wächst ☐ fällt	☐ wächst ☒ fällt	☒ wächst ☐ fällt	☐ wächst ☒ fällt
Vorzeichen von f''	$f''(x) > 0$	$f''(x) < 0$	$f''(x) > 0$	$f''(x) < 0$

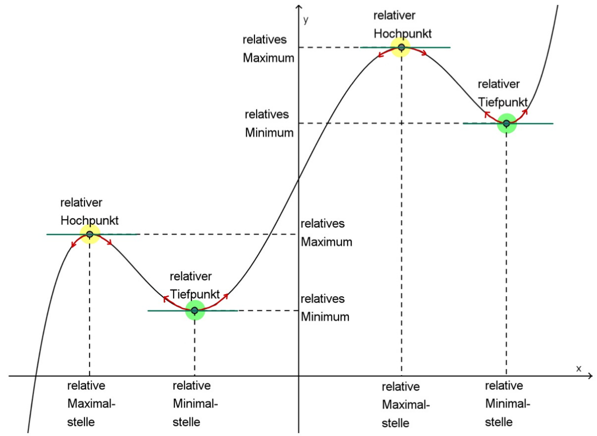
Relative Extrema

Funktion f an Stelle x_0 ein relatives Maximum wenn:

- $f(x) \leq f(x_0)$ für alle $x \in U$ (Umgebung)

Tangenten an Hoch-/Tiefpunkten sind horizontal (Steigung = 0)

	x_0 heisst ...	$f(x_0)$ heisst ...	(x_0, y_0) heisst ...
Maximum	(relative) Maximal*stelle*	(relatives) Maximum oder auch Maximalwert	(relativer) Hochpunkt
Minimum	(relative) Minimal*stelle*	(relatives) Minimum oder auch Minimalwert	(relativer) Tiefpunkt
Oberbegriff	(relative) Extremal*stelle*	(relatives) Extremum oder auch Extremalwert	(relativer) Extremalpunkt



Randpunkte :

Abgeschlossenes oder halboffenes Intervall

$[a, b)$: Randpunkt a

$(a, b]$: Randpunkt b

$[a, b]$: Randpunkt a, b

Punkte von Intervall, die keine Randpunkte sind = **innere Punkte** von I.

Kandidaten für relative Extrema:

1. **Innere Punkte** x_0 des Definitionsbereichs mit $f'(x_0) = 0$
2. **Randpunkte** des Definitionsbereichs

Bedingung für relative Extrema:

$\left.\begin{array}{l} f'(x_0) = 0 \text{ und } f''(x_0) < 0 \\ f'(x) \text{ bei } x_0 \text{ von } + \text{ zu } - \end{array}\right\}$ f an Stelle x_0 ein **relatives Maximum**

$\left.\begin{array}{l} f'(x_0) = 0 \text{ und } f''(x_0) > 0 \\ f'(x) \text{ bei } x_0 \text{ von } - \text{ zu } + \end{array}\right\}$ f an Stelle x_0 ein **relatives Minimum**

z.B. Extremstelle von $f(x) = x^2$

$f'(x) = 2x$

$2x = 0 \quad | :2$

$x = 0$ Kandidat für Extremstelle

$f''(x) = 2 \longrightarrow f''(0) = 2 > 0$

Relatives Minimum bei $x = 0$

z.B. Hoch-/Tiefpunkte von $f(x) = 2\sqrt{x} - x$,

Definitionsbereich $[0, 2]$

$f(x) = 2x^{0.5} - x$

$f'(x) = x^{-0.5} - 1 = \frac{1}{\sqrt{x}} - 1$

$\frac{1}{\sqrt{x}} - 1 = 0 \quad | +1$

$\frac{1}{\sqrt{x}} = 1 \quad | \cdot \sqrt{x}$

$1 = \sqrt{x} \quad | ^2$

$1 = x$ Kandidat für Extremstelle

$f''(x) = -0.5x^{-1.5} \longrightarrow f''(1) = -0.5 < 0$

Relatives Maximum bei $x = 1$

Maximumpunkt bei $(1, 1)$

$\hookrightarrow f(1) = 2 \cdot 1^{0.5} - 1 = 1$

Analyse der **Randpunkte**:

$f'(0) = 0^{-0.5} - 1 = -1 \leq 0$ monoton fallend

$f'(2) = 2^{-0.5} - 1 = -0.13 \leq 0$ monoton fallend

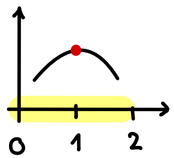
Relatives Minimum bei $x = 0$, $x = 2$

Minimumpunkt bei $(0, 0)$, $(2, 0.83)$

$f(0) = 2 \cdot 0^{0.5} - 0 = 0$

$f(2) = 2 \cdot 2^{0.5} - 2 = 0.83$

Skizze :



Monotonie

Ist $f'(x) \geq 0$, so wächst f monoton.

$f'(x)$ auf Intervall überall ≥ 0 = f ist in Interval monoton steigend

$f'(x)$ auf Intervall überall ≤ 0 = f ist in Interval monoton fallend

z.B. $f(x) = x^3 - 9x$

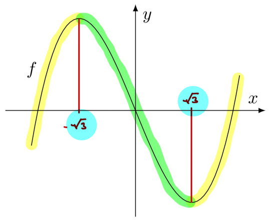
$$f'(x) = 3x^2 - 9$$
$$3x^2 - 9 = 0$$
$$x^2 = 3$$
$$x = \pm\sqrt{3}$$

Richtungsänderung bei $-\sqrt{3}, \sqrt{3}$

Monotone Abschnitte:

$(-\infty, -\sqrt{3})$, $(\sqrt{3}, \infty)$ } monotones Wachstum

$(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ } monotoner Abstieg

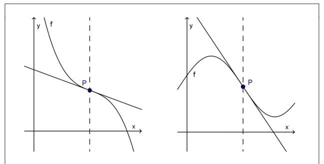


Wendepunkte und Sattelpunkte

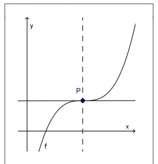
Punkte an denen sich das Krümmungsverhalten ändert.

- Wendepunkte: Linkskurve zu Rechtskurve oder umgekehrt
- Sattelpunkte: Wendepunkt mit horizontaler Tangente

Bedingung Wendepunkt: $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0$



Wendepunkte



Sattelpunkt

z.B. $f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + 2x^2 - 2x + 2$ und $x_0 = 1$ = Sattelpunkt

$f'(x_0) = 0$ (horizontale Tangente)

$f''(x_0) = 0$, $f'''(x_0) \neq 0$ } Wendepunkt

} Sattelpunkt

$f'(x) = -2x^2 + 4x - 2$, $f''(x) = -4x + 4$, $f'''(x) = -4$

einsetzen ergibt: $f'(1) = 0$

$f''(1) = 0$

$f'''(1) = -4 \neq 0 \Rightarrow$ Sattelpunkt bei $x_0 = 1$

Hoch-/Tief- und Wendepunkte

Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{3x^2-4}{x^3}$ sowie ihre Ableitungen

$f'(x) = \frac{-3x^2+12}{x^4}$ $\quad f''(x) = \frac{6x^2-48}{x^5}$ $\quad f'''(x) = \frac{-18x^2+240}{x^6}$

Gesucht sind alle relativen Hoch- und Tiefpunkte und alle Wendepunkte. Zeigen Sie jeweils, dass eine hinreichende Bedingung erfüllt ist.

$$f'(x) = (-3x^2+12) : x^4 = 0 \quad | \cdot x^4$$
$$-3x^2 + 12 = 0 \quad | -12$$
$$-3x^2 = -12 \quad | :-3$$
$$x^2 = 4 \quad | :\sqrt{}$$
$$x = \pm 2$$

$f''(2) = (6 \cdot 4 - 48) : 2^5 = -24 : 32 = -0.75 < 0$

Relatives Maximum bei $x = 2$

Maximumpunkt bei $(2, 1)$

↳ $f(2) = (3 \cdot 2^2 - 4) : 2^5 = 1$

$f''(-2) = (6 \cdot 4 - 48) : -2^5 = -24 : -32 = 0.75 > 0$

Relatives Minimum bei $x = -2$

Minimumpunkt bei $(-2, -1)$

↳ $f(-2) = (3 \cdot (-2)^2 - 4) : (-2)^5 = -1$

$$f''(x) = (6x^2 - 48) : x^5 = 0 \quad | \cdot x^5$$
$$6x^2 - 48 = 0 \quad | :6$$
$$x^2 = 8 \quad | :\sqrt{}$$
$$x = \pm 2 \cdot \sqrt{2} = \pm\sqrt{8}$$

Wendepunkte:

$f'''(\sqrt{8}) = -18 \cdot (\sqrt{8})^2 + 240 : (\sqrt{8})^6 = 0.1875 \neq 0$ ✓

$f'''(-\sqrt{8}) = -18 \cdot (-\sqrt{8})^2 + 240 : (-\sqrt{8})^6 = -0.1875 \neq 0$ ✓

$f(\sqrt{8}) = (3 \cdot \sqrt{8}^2 - 4) : \sqrt{8}^3 = 0.88$

$f(-\sqrt{8}) = (3 \cdot (-\sqrt{8})^2 - 4) : (-\sqrt{8})^3 = -0.88$

Wendepunkte: $(\sqrt{8}, 0.88)$, $(-\sqrt{8}, -0.88)$

Maximal Höhe und Zeitpunkt

Ein Ball wird senkrecht nach oben geworfen. Die Höhe h (in m) berechnet sich aus der Zeit (in s) nach der Formel

$$h(t) = 5 + 35t - 5t^2$$

Berechnen Sie die maximale Höhe und den Zeitpunkt, zu dem diese erreicht wird.

$$h'(t) = 35 - 10t$$
$$35 - 10t = 0$$
$$t = 3.5s$$

maximale Höhe: $h(3.5) = 66.25m$