Funktionen

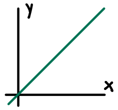
Definitionsbereich D: Wertebereich der einsetzbaren Elemente

Wertebereich W: Wertebereich aller Ergebnisse, wenn alle Zahlen aus D in die Funktion eingesetzt werden

z.B. $\frac{30}{x} = \frac{30}{2} = 15$

Funktion: $y = f(x)$, y: Output, x: Input, f: Logik

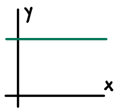
Identitätsfunktion



Jede reele Zahl ($\mathbb{R}$) auf sich selbst abbilden.

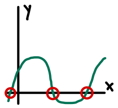
z.B. $f(x) = x \Leftrightarrow f(2) = 2$

Konstante Funktion



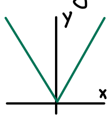
Für alle eingesetzen Variablen, wird der gleiche Funktionswert zurückgegeben. z.B. $f(x) = 3$

Nullstellen einer Funktion



Wenn der Funktionswert 0 ist, schneidet die Funktion an der Nullstelle der x-Achse. z.B. $x_0 \in D$ mit $f(x_0) = 0$

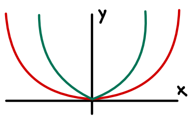
Betragsfunktion



$f(x) = |x|$

z.B. $f(-x) = |-x| = |x| \Rightarrow$ gerade

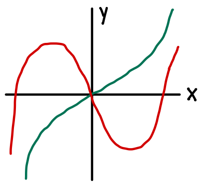
Symmetrien



Gerade wenn nur gerade Exponenten

z.B. $f(-x) = f(x)$, $f(x) = x^2$, $f(x) = x^6 + x^4 + 7$

Achsensymmetrisch bezüglich y-Achse



Ungerade wenn nur ungerade Exponenten

z.B. $f(-x) = -f(x)$, $f(x) = x^3$, $f(x) = x^7 + x^5 + 3x$

Punktsymmetrisch bezüglich dem Nullpunkt

Operationen mit Funktionen

$f: D \to \mathbb{R}$ mit $x \to f(x)$, $g: D \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto g(x)$

$f+g: D \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f(x) + g(x)$

$f-g: D \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f(x) - g(x)$

$f\cdot g: D \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f(x) \cdot g(x)$

$\frac{f}{g}: D \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$ ⓘ Falls $g(x) \neq 0$ für alle $x \in D$

$c \cdot f(x): D \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto c \cdot f(x)$ ⓘ Für ein festes $c \in \mathbb{R}$

z.B. $f(x) = -3x + 4$ und $g(x) = x^2$

$(f+g)(x) = (-3x+4) + x^2 = x^2 - 3x + 4$, $(f+g)(2) = (-3\cdot 2 + 4)\cdot 2^2 = 2$

$(f\cdot g)(x) = (-3x+4)\cdot x^2 = -3x^2$, $(f\cdot g)(2) = (-3\cdot 2 + 4)\cdot 2^2 = -8$

Komposition

$(g \circ f)(x) = g(f(x))$

z.B. $f(x) = 3x+7$, $g(x) = \sqrt{x}$

$(g\circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{3x+7}$

$(f\circ g)(x) = f(g(x)) = 3\sqrt{x} + 7$

$(f\cdot g)(x) = f(x)\cdot g(x) = (3x+7)\cdot\sqrt{x}$

Summenzeichen

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

n: Endwert; k=1: Startwert; k: Laufvariable; a_k: Funktion (Summand) abhängig von k

z.B. $\sum_{k=1}^{4} 4\cdot k = 4 + 8 + 12 + 16 = 40$

$\hookrightarrow 4\cdot 1 = 4$, $4\cdot 2 = 8$, $4\cdot 3 = 12$, $4 \cdot 4 = 16$ } 4 Mal addieren

Doppelsumme

z.B. $\sum_{k=0}^{2}\sum_{i=3}^{5}(k\cdot i - i^2) = \sum_{k=0}^{2}\left(\sum_{i=3}^{5}(k\cdot i - i^2)\right)$

$= \sum_{k=0}^{2}\left((k\cdot 3 - 3^2) + (k\cdot 4 - 4^2) + (k\cdot 5 - 5^2)\right)$

$= \sum_{k=0}^{2}(12k - 50) = (12\cdot 0 - 50) + (12\cdot 1 - 50) + (12\cdot 2 - 50)$

$= -144$

z.B. $\sum_{i=1}^{3}\left(\sum_{j=1}^{4} i\cdot(j-2)\right)$

$1\cdot(1-2) = -1$
$1\cdot(2-2) = 0$
$1\cdot(3-2) = 1$
$1\cdot(4-2) = 2$
} $-1+0+1+2 = 2$ =
$1\cdot 2 = 2$
$2\cdot 2 = 4$
$3\cdot 2 = 6$
} $2+4+6 = 12$

Rechenregeln

Vorziehen konstanter Faktoren:

$$\sum_{k=s}^{n}(c\cdot a_k) = c\cdot\sum_{k=s}^{n} a_k$$

Addition von Summen gleicher Länge:

$$\sum_{k=s}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=s}^{n} a_k + \sum_{k=s}^{n} b_k$$

Aufspalten einer Summe:

$$\sum_{k=s}^{n} a_k = \sum_{k=s}^{m} a_k + \sum_{k=m+1}^{n} a_k \quad (s < m < n)$$

Laufvariable kann beliebig bennant werden:

$$\sum_{k=s}^{n} a_k = \sum_{r=s}^{n} a_r = \sum_{i=s}^{n} a_i$$

Achtung:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k\cdot b_k \neq \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot \sum_{k=1}^{n} b_k, \quad \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \neq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2$$

Arithmetische Summenformel

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Summe der Quadratzahlen

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Umkehrfunktion

Für eine Funktion f gibt es eine Umkehrfunktion g / f^{-1}, wenn f injektiv ($x_1 \neq x_2 \rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$) ist.

$f: D \mapsto W$, $g/f^{-1}: W \mapsto D$

z.B. $y = f(x) = \frac{3}{2x-5}$ mit $D = \mathbb{R} \setminus \{2.5\}$

1. Nach x auflösen:

$$
\begin{aligned}
y &= \frac{3}{2x-5} && | \cdot (2x-5) \\
y(2x-5) &= 3 \\
2xy - 5y &= 3 && | + 5y \\
2xy &= 3 + 5y && | : 2y \\
x &= \frac{3+5y}{2y}
\end{aligned}
$$

2. Name der Variablen vertauschen:

$$y = \frac{3+5x}{2x} = g(x) = \frac{3+5x}{2x}$$