Ableitungen

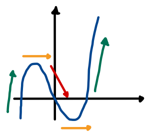
Ableitung $f'(x)$ einer Funktion $f(x)$ gibt die Steigung der Funktion an einem bestimmten Punkt an.

$f'(x)$: Ableitung von Funktion $f(x)$ an der Stelle x

$f'(x) > 0 \rightarrow$ Funktion steigt

$f'(x) < 0 \rightarrow$ Funktion fällt

$f'(x) = 0 \rightarrow$ Funktion hat Extrempunkt

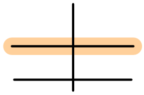


Ableitungsfunktion

Funktion $f(x) = x^k$ mit $k \neq 0 \longrightarrow f'(x) = k \cdot x^{k-1}$

Funktion $f(x) = c$ mit $c \in \mathbb{R} \longrightarrow f'(x) = 0$

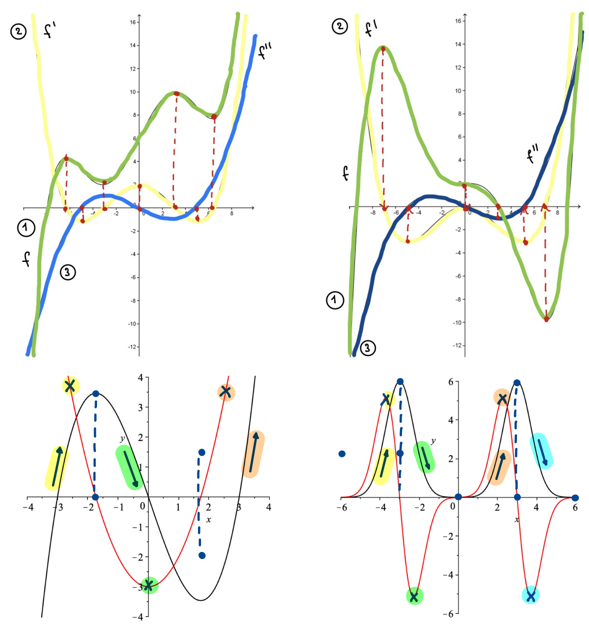
↳ Begründung: Steigung horizontale = 0



Weitere Ableitungen $\longrightarrow$ vorherige Ableitung ableiten

z.B. $f'(x) \longrightarrow f''(x)$, $f''(x) \longrightarrow f'''(x)$

Grafisch



(a) $f(x)$ und $f'(x)$ (b) $g(x)$ und $g'(x)$

Ableitungsregeln

Potenzregel

$f(x) = x^n \rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}$

z.B. $f(x) = x^2 \rightarrow f'(x) = 2x^{2-1} = 2x^1$

$f(x) = x^{-1} \rightarrow f'(x) = -1x^{-1-1} = -x^{-2}$

Faktorregel

$(c \cdot f)'(x) = c \cdot f'(x)$

z.B. $(4x^3)' = 4 \cdot (x^3)' = 4 \cdot 3 \cdot x^2 = 12x^2$

Produktregel

$(u \cdot v)'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$

z.B. $f(x) = ((3x^3 + x^2)(4x^2 + 1))$. Gesucht ist $f'(x)$.

$u = 3x^3 + x^2 \qquad u' = 9x^2 + 2x$

$v = 4x^2 + 1 \qquad v' = 8x$

$f'(x) = (9x^2 + 2x) \cdot (4x^2 + 1) + (3x^3 + x^2) \cdot (8x)$

$= 36x^4 + 9x^2 + 8x^2 + 2x + 24x^4 + 8x^3$

$= 60x^4 + 16x^3 + 9x^2 + 2x$

Quotientenregel

$$\left(\frac{u}{v}\right)'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{(v(x))^2}$$

z.B. $f(x) = \left(\frac{3x^2 - x}{2x^3 + 1}\right)$. Gesucht ist $f'(x)$.

$u = 3x^2 - x \qquad u' = 6x^1 - 1$

$v = 2x^3 + 1 \qquad v' = 6x^2$

$$f'(x) = \frac{(6x-1) \cdot (2x^3+1) - (3x^2 - x) \cdot (6x^2)}{(2x^3+1)^2}$$

z.B. $f(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$. Gesucht ist $f'(x)$.

$u = \cos(x) \qquad u' = -\sin(x)$

$v = \sin(x) \qquad v' = \cos(x)$

$$f'(x) = \frac{-\sin(x) \cdot \sin(x) - \cos(x) \cdot \cos(x)}{(\sin(x))^2}$$

$$= \frac{-\sin^2(x) - \cos^2(x)}{\sin^2(x)}$$

Summenregel

$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$

z.B $(7x^5 - 3x^3 + 5x^2 - 14x + 6)'$

$= (7x^5)' - (3x^3)' + (5x^2)' - (14x)' + (6)'$

$= 35x^4 - 9x^2 + 10x - 14$

Kettenregel

$(F \circ u)'(x) = F'(x) \cdot u'(x)$

$F(u)$: äussere Funktion

$u(x)$: innere Funktion

z.B. $f(x) = (x^3 + 4)^{-2}$

$u(x) = x^3 + 4 \qquad u'(x) = 3x^2$

$F(x) = u^{-2} \qquad F'(x) = -2u^{-3}$

$f'(x) = (-2u)^{-3} \cdot 3x^2$

$= -2(x^3 + 4)^{-3} \cdot 3x^2$

z.B. $y = (4x^2 - 2x + 1)^5$

$u(x) = 4x^2 - 2x + 1 \qquad u'(x) = 8x - 2$

$F(x) = u^5 \qquad F'(x) = 5u^4$

$y' = 5u^4 \cdot (8x - 2)$

$= 5(4x^2 - 2x + 1)^4 \cdot (8x - 2)$

z.B. $f(x) = \frac{10}{x^3 + 5}$

$u(x) = x^3 + 5 \qquad u(x)' = 3x^2$

$F(x) = \frac{10}{u} = 10u^{-1} \qquad F(x)' = -10u^{-2}$

$f'(x) = -10u^{-2} \cdot 3x^2$

$= -10(x^3 + 5)^{-2} \cdot 3x^2$

$= \frac{-10 \cdot 3x^2}{(x^3+5)^2}$

$= \frac{-30x^2}{(x^3+5)^2}$

$\frac{1}{x^1} = x^{-1}$

$\frac{1}{x^2} = x^{-2}$

$\frac{10}{x^1} = 10x^{-1}$

Mitternachtsformel

Eine Lösungsformel für quadratische Gleichungen der Form $ax^2 + bx + c = 0$.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

a : Zahl vor x^2

b : Zahl vor x

c : Zahl ohne x

Ableitung bestimmter Funktionen

$(\sin(x))' = \cos(x)$

$(\cos(x))' = -\sin(x)$

$(e^x)' = e^x$

$(a^x)' = a^x \cdot \ln(a)$

$(\ln(x))' = \frac{1}{x}$

$(\log_a(x))' = \frac{1}{x \cdot \ln(a)}$

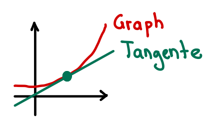
$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Tangente

Berührt den Graph an genau einer Stelle.

Gleiche Steigung und gleicher Funktionswert wie der Graph an der Berührstelle.

$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$



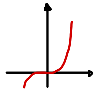
Differenzierbarkeit

Differenzierbar wenn die Ableitung an jeder Stelle definiert ist.

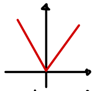
Funktion $f(x)$ an Stelle x_0 differenzierbar, wenn links- und rechsseitige Ableitung gleich.

$\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} < \infty$ = Steigung an x_0

z.B.



differenzierbar



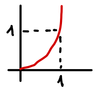
nicht differenzierbar

(!) Wenn der Graph einer Funktion einen Knick hat, ist es nicht differenzierbar.

Fixpunkte

Beim Fixpunkt einer Funktion stimmen x und y Wert in der Funktionskurve überein.

$x = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$



z.B. Fixpunkt: $f(x) = \sqrt{4x^2-1}$

$f(x) = x$

$\sqrt{4x^2-1} = x \quad |(\ )^2$

$4x^2 - 1 = x^2 \quad | -x^2$

$3x^2 - 1 = 0$

$x^2 = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad x_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

Kontrolle

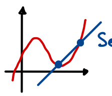
x_1 einsetzen: $\sqrt{4x_1^2-1} = \sqrt{1/3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ✓

x_2 einsetzen: $\sqrt{4x_2^2-1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \neq -\frac{1}{\sqrt{3}}$ ✗

$\Rightarrow$ nur $x_1 \ \frac{1}{\sqrt{3}}$ ist Lösung!

Sekante

Gerade, welche einen Graphen in zwei Punkten schneidet



$s = mx + b$ – y-Achsenabschnitt
\Steigung

z.B. $f(x) = x^2 + 1$, $P(0|-1)$, $Q(2|3)$

1. Steigung $m = \frac{(y_2-y_1)}{(x_2-x_1)} = \frac{(3-(-1))}{(2-0)} = 2$

2. y-Achsenabschnitt $s(x) = 2x + b$

$3 = 2 \cdot 2 + b$

$b = -1$

$\Rightarrow s(x) = 2x - 1$

Newton Verfahren

Nullstellen einer Funktion näherungsweise bestimmen

$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

Startwert bestimmen:

Wertetabelle → Vorzeichenwechsel

→ Intervall in dem Vorzeichenwechsel statt findet

→ Mitte des Intervalls

z.B. $f(x) = 5x^3 + 8x^2 - 1 \ \rightarrow \ f'(x) = 15x^2 + 16x$

Wertetabelle:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
f(x)	-64	-9	2	-1	12	71	206

Vorzeichenwechsel

Startwert $x_0 = 0.5$

$x_1 = 0.5 - \frac{5 \cdot 0.5^3 + 8 \cdot 0.5^2 - 1}{15 \cdot 0.5^2 + 16 \cdot 0.5} = 0.36170$

$x_2 = 0.36170 - \frac{5 \cdot 0.36170^3 + 8 \cdot 0.36170^2 - 1}{15 \cdot 0.36170 + 16 \cdot 0.36170} = 0.32515$

⋮

$x_4 = \ldots = 0.32245$

$x_5 = \ldots = 0.32245$

Näherungswert für eine Nullstelle der Funktion f

Linearisierung einer Funktion

Jede differenzierbare Funktion ≈ lineare Funktion, Beste Approximation ⇒ Tangente $(x_0, f(x_0))$

Funktionsgleichung für die Tangente von $f(x)$ an der Stelle x_0: $y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$

Quadratische Funktion

Bestimmen Sie eine quadratische Funktion, welche bei $x = -1$ Steigung 1, bei $x = 1$ Steigung 5 und bei $x = 1$ eine Nullstelle hat.

quadratische Funktion: $f(x) = ax^2+bx+c \longrightarrow f'(x) = 2ax+b$

Bedingungen: $x=-1$ Steigung 1 $\longrightarrow f'(-1)=1$

$x=1$ Steigung 5 $\longrightarrow f'(1)=5$

$x=1$ Nullstelle $\longrightarrow f(1)=0$

1. $f'(-1)$: $-2a+b = 1 \quad |-b,-1$

$-2a-1 = -b \quad |\cdot(-1)$

$2a+1 = b$, $2\cdot 1+1 = b$, $b=3$

2. $f'(1)$: $2a + 2a+1 = 5 \quad |-1$ } b einsetzen

$4a = 4 \quad |:4$

a einsetzen

$a=1$

3. $f(1)$: $\overset{a}{1}x^2+\overset{b}{3}x+c = 0$

$1+3+c = 0 \quad |-4$

$c=-4$

4. $f(x) = x^2+3x-4$

Waagrechte Tangente ohne Punkt

Bestimmen Sie jeweils die Punkte des Graphen der folgenden Funktionen mit waagerechter Tangente: z.B. $g(x) = 3(x+1)^2(x-2)$

1. g(x) ableiten

für u' Kettenregel anwenden

Produktregel: $u = 3(x+1)^2$ $\quad u' = 6x+6$ $\qquad$ Kettenregel: $u(x) = x+1$ $\quad u'(x)=1$

$v = x-2$ $\quad v' = 1$ $\qquad F(x) = 3u^2$ $\quad F'(x) = 6u$

$g'(x) = (6x+6)\cdot(x-2) + (3(x+1)^2)\cdot(1)$ $\qquad \Rightarrow 6u\cdot 1 = 6(x+1)\cdot 1 = 6x+6$

$= 6x^2-12x+6x-12+3(x^2+2x+1)$

$= 6x^2-6x-12+3x^2+6x+3$

$= 9x^2-9$

2. $g'(x)=0$ setzen ① Waagrechte Tangente → Steigung 0

$g'(x)$: $9(x^2-1)=0$

$9(x+1)(x-1)=0$

$x_1=-1$, $x_2=1$

3. Nullpunkte in g(x) einsetzen

$g(-1)$: $3((-1)+1)^2((-1)-2) = 0 \longrightarrow (x_1, g(x_1)) = (-1, 0)$

$g(1)$: $3(1+1)^2(1-2) = 12 \longrightarrow (x_2, g(x_2)) = (1,-12)$

Startwerte mit Newton-Schritt

Wir betrachten die Funktion $f(x) = xe^x$. Bestimmen Sie die Menge aller Startwerte, bei denen man nach einem Newton-Schritt den Wert $x = \frac{1}{2}$ erhält.

1. f(x) ableiten

$f'(x) = e^x + xe^x = (1+x)e^x$

2. f(x) und f'(x) in Newton-Formel einsetzen

$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = x_1 = x_0 - \frac{x_0\cdot e^{x_0}}{(1+x_0)e^{x_0}} = x_0 - \frac{x_0}{1+x_0}$

3. Nach $\frac12$ auflösen

$x - \frac{x}{1+x} = \frac12 \quad |\cdot(1+x)$

$x(1+x) - x = \frac{1+x}{2}$

$x^2 = \frac{1+x}{2} \quad |\cdot 2$

$2x^2 = 1+x \quad |-1-x$

$2x^2 - x - 1 = 0$

Mitternachtsformel: $x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$= \frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-(4\cdot 2\cdot -1)}}{2\cdot 2}$

$= \frac{1\pm\sqrt{1+4\cdot2\cdot1}}{2\cdot 2}$

$= \frac{1\pm 3}{4}$

$= -\frac12, 1$

⇒ Menge der Startwerte: $\{-\frac12, 1\}$

Waagrechte Tangente mit a und b

Welche Werte muss man für a und b einsetzen, so dass die Funktion $f(x) = a\ln(x) - \frac{b}{x} + x$ bei $x=1$ und $x=10$ jeweils eine horizontale Tangente hat?

1. f(x) ableiten

$f'(x) = a\cdot\frac1x + bx^{-2} + 1$ $\qquad -\frac{b}{x} = -b\cdot\frac1x = -b\cdot x^{-1}$

ableiten: $(-b x^{-1})' = b\cdot x^{-2}$

2. $f'(1) = a\cdot\frac11 + b\cdot\frac{1}{1^2}+1 = 0$

$= a+b+1 = 0 \quad |-b,-1$

$a = -b-1$, $a = -10-1$, $a=-11$

3. $f'(10) = (-b-1)\cdot\frac{1}{10} + b\cdot\frac{1}{10^2}+1 = 0 \quad |\cdot 100$ } a einsetzen

$= (-b-1)\cdot 10 + b + 100 = 0$

$= -10b - 10 + b + 100 = 0$

$= -9b + 90 = 0 \quad |-90, \cdot(-1)$

$9b = 90 \quad |:9$

b einsetzen

$b = 10$

Tangente mit Punkt und an Kurve

Bestimmen Sie die Tangenten an die Kurve $f(x) = x^2$, die durch den Punkt $(2,3)$ gehen.

x, y

TG: $y = f'(x_0)\cdot(x-x_0) + f(x_0)$

$f(x) = x^2$, $f'(x) = 2x$

1. x und y in TG einsetzen

$3 = 2x_0\cdot(2-x_0) + x_0^2 \quad |-3$

$0 = 4x_0 - 2x_0^2 + x_0^2 - 3$ } nach x_0 auflösen

$0 = -x_0^2+4x-3 \quad |\cdot(-1)$

$0 = x_0^2-4x+3$

$0 = (x-1)(x-3)$

$x_0 = 1$, $x_1 = 3$

2. x_0 und x_1 in TG einsetzen

$x_0 = 1 \longrightarrow y = 2(x-1)+1 = 2x-1$

$x_1 = 3 \longrightarrow y = 2(x-3)+9 = 6x-9$