Vektoren

Nullvektor: Anfangs- und Endpunkt stimmen überein ($\overrightarrow{PP} = \vec{0}$)

Ortsvektor: Anfangspunkt im Ursprung O ($\overrightarrow{OP} = \vec{p}$)

① Jeder Punkt hat eindeutigen Ortsvektor

Verbindungsvektor

Vektor der 2 beliebige Punkte P und Q miteinander verbindet

① Punkt P = Startpunkt (stumpf), Punkt Q = Endpunkt (spitz)

$P(x_p|y_p)$ und $Q(x_q|y_q)$, $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x_q \\ y_q \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix}$

z.B. $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 5-2 \\ 6-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ ① Es gilt: $\overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{QP}$

Skalarprodukt (inneres Produkt)

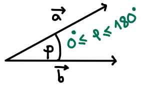
Multiplikation zweier Vektoren ergibt eine reelle Zahl (Skalar):

- $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0 \Leftrightarrow 0° \leq \varphi < 90°$, spitzer Winkel
- $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \varphi = 90°$, rechter Winkel ($\vec{a}, \vec{b}$ orthogonal)
- $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0 \Leftrightarrow 90° \leq \varphi < 180°$, stumpfer Winkel

① Schreibweise: $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $(\vec{a}, \vec{b})$, $\langle \vec{a} | \vec{b} \rangle$, $\vec{a}^T \vec{b}$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3 = |\vec{a}||\vec{b}|\cos(\varphi)$$

z.B. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = 2 \cdot 3 + (-4) \cdot 2 + 0 \cdot 5 = -2$



Berechnung Winkel φ

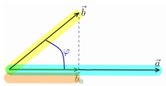
$\varphi = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}\right)$ ⚠ $\vec{a} \neq 0$ und $\vec{b} \neq 0$, TR auf DEG

z.B. $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{2 \cdot 1 + 1 \cdot 0}{\sqrt{2^2+1^2} \cdot \sqrt{1^2+0^2}} = \cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = 26.6°$

Projektion eines Vektors auf einen zweiten

Durch Projektion des Vektors $\vec{b}$ auf Vektor $\vec{a}$ entsteht $\vec{b_a}$

$\vec{b_a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|^2} \vec{a}$



z.B. Projektion $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$ auf $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ um $\vec{b_a}$ zu bestimmen

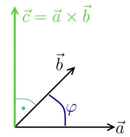
$$\vec{b_a} = \frac{\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}}{\sqrt{3^2+0^2+4^2}^2} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{40}{25} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.8 \\ 0 \\ 6.4 \end{pmatrix}$$

Vektorprodukt (äusseres Produkt / Kreuzprodukt)

Vektorielle Multiplikation zweier Vektoren in $\mathbb{R}^3$ erzeugt neuer Vektor.

① $\vec{a} \times \vec{a} = 0$, wenn $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \rightarrow \vec{a}$ und $\vec{b}$ = kollinear

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}}_{\vec{c}}$$



① $\vec{c}$ ist orthogonal zu $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ($\vec{c} \cdot \vec{a} = 0$, $\vec{c} \cdot \vec{b} = 0$)

$= \vec{n}$ Normalvektor

Rechenregeln:

Distributivgesetz: $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$

Anti-Kommutativgesetz: $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$

Assoziativgesetz: $\lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda \vec{b})$

z.B. $(5 \cdot \vec{e_2}) \times (-2 \cdot \vec{e_3}) = -10 \vec{e_1}$

z.B. $(3\vec{e_1} - 7\vec{e_3}) \times (\vec{e_2} + 2\vec{e_3})$

$= (3\vec{e_1}) \times (\vec{e_2}) + (3\vec{e_1}) \times (2\vec{e_3}) - (7\vec{e_3}) \times (\vec{e_2}) - \underbrace{(7\vec{e_3}) \times (2\vec{e_3})}_{\vec{0}}$

$= 3\vec{e_3} + 6\vec{e_2} - 7\vec{e_1}$

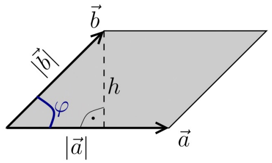
Fläche Parallelogramm / Dreieck

$A = |\vec{a} \times \vec{b}|$ ① Dreieck: $\frac{1}{2} A$

z.B. $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} -15 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix}$

$|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{(-15)^2 + 1^2 + 10^2} = 18.06$



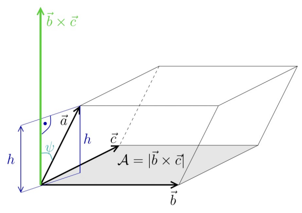
Volumen Parallelepiped

$V = |[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]| = |\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})|$ (Determinante)

z.B. $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}] = -31$

$|-31| = 31$



① Höhe $h = |\vec{a}||\cos(\psi)|$

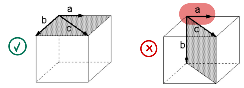
Betrag

Länge eines Vektors: $|\vec{a}| = \left|\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}\right| = \sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2}$

z.B. $P = (-4, 3)$

$\overline{OP} = |\overrightarrow{OP}| = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$

Komplanarität



Drei Vektoren liegen in der gleichen Ebene.

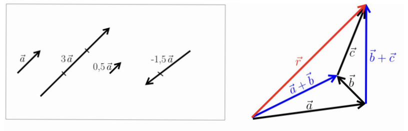
$[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}] = 0$ ① 3 vom Nullvektor verschiedene Vektoren in $\mathbb{R}^3$

Kollinear und Windschief

Kollinear (linear abhängig), wenn reele Zahl λ existiert $\vec{a} = \lambda \vec{b}$

① $\vec{a}$ Vielfaches von $\vec{b}$, Nullvektor zu jedem Vektor kollinear

λ existiert nicht $\rightarrow \vec{a}$ und $\vec{b}$ windschief und nicht kollinear



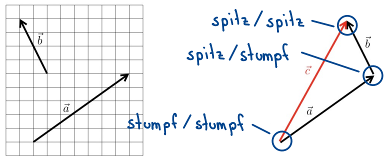
Kollineare Vektoren — Windschiefe Vektoren

Vektorsubstraktion / -addition

⚠ Nur Vektoren gleicher Dimension

$\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_a - x_b \\ y_a - y_b \end{pmatrix}$

$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_a + x_b \\ y_a + y_b \end{pmatrix}$



Einheitsvektor ($\vec{e}$)

= normierter Vektor

Vektor der Länge 1.

$\vec{n} = \vec{a}^0 = \frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a}$

z.B. $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$

$|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + (-2)^2 + 6^2} = 7$

$\vec{n} = \vec{a}^0 = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} \\ -\frac{2}{7} \\ \frac{6}{7} \end{pmatrix}$

Spatprodukt (gemischtes Produkt)

Skalarprodukt aus $\vec{a}$ mit Vektorprodukt $\vec{b} \times \vec{c}$ ergibt eine reelle Zahl (Skalar).

$$[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}] = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_y c_z - b_z c_y \\ b_z c_x - b_x c_z \\ b_x c_y - b_y c_x \end{pmatrix}$$

Skalarmultiplikation

$\lambda \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot x \\ \lambda \cdot y \\ \lambda \cdot z \end{pmatrix}$

Skalar Vektor

z.B. $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\lambda = 5$

$\lambda \cdot \vec{v} = 5 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}$

Linear Kombination

$\vec{v} = \lambda_1 \vec{a_1} + \lambda_2 \vec{a_2} + \ldots + \lambda_n \vec{a_n}$

z.B. $\vec{v} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 6 \end{pmatrix}$

Konvertierung von $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^3$

$\mathbb{R}^2$: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \mathbb{R}^3$: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$

0 hinzufügen

Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}^{m \times n} \quad \text{Zeile } (m), \quad \text{Spalte } (n)$$

z.B. $A = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 0 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ 3x2 Matrix

$a_{12} = 9, \; a_{21} = 0$

Multiplikation

⚠ Anzahl Spalten in A muss gleich Anzahl Zeilen in B sein

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ik} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mk} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{k1} & \cdots & b_{kj} & \cdots & b_{kp} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nj} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1j} & \cdots & c_{1p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & \cdots & c_{ij} & \cdots & c_{ip} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mj} & \cdots & c_{mp} \end{pmatrix}$$

Nicht kommutativ: $AB \neq BA$

ⓘ Diagonalmatrix nxn ist kommutativ

Weiteres Gesetz: $AI_n = A, \; I_m A = A$

z.B. $\underset{2\times 3}{\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix}} \cdot \underset{3\times 2}{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$

$= \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 4\cdot -2 + 2\cdot 0 & 1\cdot 1 + 4\cdot 3 + 2\cdot 1 \\ 4\cdot 1 + 0\cdot -2 + -3\cdot 0 & 4\cdot 1 + 0\cdot 3 + -3\cdot 1 \end{pmatrix} = \underset{2\times 2}{\begin{pmatrix} -7 & 15 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}}$

z.B. $\underset{3\times 1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}} \cdot \underset{1\times 3}{\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1\cdot 2 & 1\cdot -1 & 1\cdot 5 \\ 2\cdot 2 & 2\cdot -1 & 2\cdot 5 \\ 3\cdot 2 & 3\cdot -1 & 3\cdot 5 \end{pmatrix} = \underset{3\times 3}{\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 4 & -2 & 10 \\ 6 & -3 & 15 \end{pmatrix}}$

Matrizengleichung

$A \cdot X = B \;\longrightarrow\; X = A^{-1} \cdot B$

$X \cdot A = B \;\longrightarrow\; X = B \cdot A^{-1}$

$A \cdot X \cdot B = C \;\longrightarrow\; X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}$

} Dividieren von Matrix geht nicht; muss mit Inverse multiplizieren; muss auf gleicher Seite bleiben

$A \cdot X + B \cdot X = (A + B) \cdot X \;\longrightarrow$ X muss nach ausklammern auf gleicher Seite bleiben

$A \cdot X + 4 \cdot X = (A + 4E) \cdot X \;\longrightarrow$ Zahl wird bei ausklammern mit Einheitsmatrix (E) multipliziert

$X \cdot A^T + X = B \;\longrightarrow\; X(A^T + E) = B$

$A \cdot X + 4 \cdot X = C \;\longrightarrow\; (A + 4E) \cdot X = C \;\longrightarrow\; X = (A + 4E)^{-1} \cdot C$

Transponieren

Ein Zeilenvektor geht in ein Spaltenvektor über und umgekehrt.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mi} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \xrightarrow{[A^T]_{ij} = a_{ji}} A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1i} & a_{2i} & \cdots & a_{mi} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 5 \\ 7 & 6 & 0 \end{pmatrix}, \; B^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 1 & -2 & 6 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$

z.B. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}, \; A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & -8 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}, \; C^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 9 \end{pmatrix}$

Rechenregeln:

$(A+B)^T = A^T + B^T, \; (\lambda A)^T = \lambda A^T, \; (AB)^T = B^T A^T, \; (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

$(A^T)^T = A, \; A^T = A \longrightarrow$ symmetrisch, $-A^T = A \longrightarrow$ anti-symmetrisch

z.B. Matrizenausdruck: $(2A^T B)^T - B^T A$ vereinfachen

$= 2B^T (A^T)^T - B^T A$

$= 2B^T A - B^T A$

$= B^T A$

Transponieren und Skalarprodukt

Notation $\vec{a}^T \vec{b}$ für Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b}$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = \underset{n\times 1}{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}} \cdot \underset{n\times 1}{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}} \xrightarrow{\text{Lösung}} \vec{a}^T \vec{b} = \underset{1\times n}{\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}} \cdot \underset{n\times 1}{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}$

↳ nicht möglich Spalten A ≠ Zeilen B

↳ Spalten A = Zeilen B

Dreiecksmatrizen

Untere Dreiecksmatrix: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

Obere Dreiecksmatrix: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

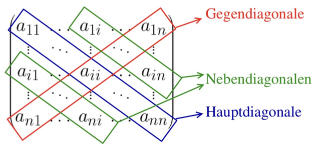
Symmetrische Matrizen

Spiegelsymmetrisch zur Hauptdiagonalen

z.B. $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 & -10 \\ 4 & 5 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 8 & 5 \\ -10 & -1 & 5 & 15 \end{pmatrix} \quad [a_{43}] = 5, \; [a_{34}] = 5$

Quadratische Matrix

nxn Matrix (m=n)



Diagonalmatrix

$a_{ij} = 0$ für alle $i \neq j$

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$

Einheitsmatrix (Identität)

Identische Werte auf der Hauptdiagonalen

$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ Notationen: I, E_n oder E

Addition/Subtraktion

ⓘ Matrizen müssen dieselbe Dimension haben

$C = A + B, \; c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ (elementarweise)

$C = A - B, \; c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$ (elementarweise)

z.B. $A + B = \underset{2\times 3}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}} + \underset{2\times 3}{\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ -3 & -5 & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

z.B. $A - B = \underset{2\times 3}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}} - \underset{2\times 3}{\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ -3 & -5 & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 6 & 8 & 5 \end{pmatrix}$

Skalare Multiplikation

Elementarweise Multiplikation mit einem reellen Skalar λ

z.B. $-3A = -3 \begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 15 & -9 \\ -12 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

Linearkombination

z.B. $2A - B = 2 \cdot \underset{2\times 3}{\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 9 & 7 \end{pmatrix}} - \underset{2\times 3}{\begin{pmatrix} 0 & 2 & 7 \\ -1 & 3 & -4 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 3 & 15 & 18 \end{pmatrix}$

Koeffizienten: 2 und -1

Gemeinsamer Faktor

Alle Elemente gemeinsamen Faktor → Faktor vor Matrix

z.B. $A = \begin{pmatrix} 5 & 10 & -20 \\ 0 & -5 & 30 \end{pmatrix}$

Gemeinsamer Faktor: 5, $5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & 6 \end{pmatrix}$

Potenz

$A^k := \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{k\text{-mal}} \in \mathbb{R}^{n\times n}$

Spezialfall: $D = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix} \longrightarrow D^k = \begin{pmatrix} a_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n^k \end{pmatrix}$

Nullmatrix O

Alle Elemente haben den Wert 0.

Ist für jede Dimension definiert.

Lineare Gleichungssysteme

Lineare Gleichung in einer Variable

Form: $ax = b$, wobei a / b reelle Konstanten

z.B. nicht linear: $2x + x^2 = 1$, $\sin(x) = 0.5$, $\sqrt{x} + \ln\left(\frac{1}{x}\right) = 3$, $e^{-4x} = 10$

Unlösbar (inkonsestent): LGS besitzt keine Lösung

Lösbar (konsestent): LGS hat mind. 1 Lösung

homogen: rechte Seite ist immer 0 $(b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0)$

inhomogen: rechte Seite ist nicht 0 (b_i, $i = 1 .. m$, nicht 0)

Triviale Lösung: Homogenes LGS immer Lösung: $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$

Rang vs. Lösbarkeit

lösbar $(r = rg(A|\vec{b}))$: $r < m \rightarrow$ muss rechte Seite $= 0$ für alle Zeilen $> r$

$r = n \rightarrow$ genau eine Lösung

$r < n \rightarrow \infty$ viele Lösungen ($n - r$ = freie Variablen)

unlösbar $(r < rg(A|\vec{b}))$: $r < m$ und rechte Seite $\neq 0$ für alle Zeilen $> r$

z.B.

$$\begin{array}{c} \\ 6 \end{array} \overbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)}^{3}$$

Hier gilt: $n = 3$, $m = 6$ und $r = 3$.

Das System hat $n - r = 0$ freie Variable. Da $r < m$, $b_4 = b_5 = b_6 = 0$ und $r = n$, besitzt das lineare Gleichungssystem genau eine Lösung, die lautet: $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ und $x_3 = 0$. ✓

$$\begin{array}{c} \\ 5 \end{array} \overbrace{\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 8 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)}^{4}$$

Hier gilt: $n = 4$, $m = 5$ und $r = 3$.

$r = 3$, Zeile 4,5 muss $= 0$ sein

Das System hat $n - r = 1$ freie Variable, welche x_4 ist. Da $r < m$ und $b_4 \neq 0$, besitzt das lineare Gleichungssystem keine Lösung. ✗

Gauss – Verfahren

Erweiterte Koeffizientenmatrix auf ZSF bringen:

(!) Matrix kann auf verschiedene ZSF gebracht werden

z.B.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 2 & 9 \\ 3 & 6 & -3 & 0 \\ 2 & 6 & -1 & 2 \end{array}\right) \overset{Z_1 \leftrightarrow Z_2}{\Rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 6 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 9 \\ 2 & 6 & -1 & 2 \end{array}\right) \overset{\frac{1}{3} \cdot Z_1}{\Rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 9 \\ 2 & 6 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\overset{Z_3 - 2 Z_1}{\Rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right) \overset{(-1) \cdot Z_2}{\Rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -9 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right) \overset{Z_3 - 2 Z_2}{\Rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -9 \\ 0 & 0 & 5 & 20 \end{array}\right)$$

$$\overset{\frac{1}{5} \cdot Z_3}{\Leftrightarrow} \overbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)}^{ZSF}. \quad \begin{cases} x = -2y + z = -2 \cdot -1 + 4 = 6 \\ y = -9 + 2z = -9 + 2 \cdot 4 = -1 \\ z = 4 \end{cases}$$

Inverse quadratische Matrix

z.B. Inverse von $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -7 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

1. Erweiterte Koeffizientenmatrix erstellen $(A | I_n)$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \frac{1}{2} & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -7 & 3 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

2. Erweiterte Koeffizientenmatrix auf reduzierte ZSF bringen mit Gauss-Jordan-Verfahren $(I_n | A^{-1})$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{6}{5} & -\frac{6}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{6}{5} & -\frac{11}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{8}{5} & -\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \end{array}\right)$$

3. Rang Matrix $A = n \rightarrow A^{-1}$ ablesen

Rang Matrix $A < n \rightarrow$ A besitzt keine Inverse

$rg(A) = 3$, $n = 3$ ✓

$$rg = n \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{6}{5} & -\frac{6}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{6}{5} & -\frac{11}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{8}{5} & -\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix} = -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 6 & 6 & 2 \\ 6 & 11 & 2 \\ 8 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Gauss – Jordan – Verfahren

Erweiterte Koeffizientenmatrix auf reduzierte ZSF bringen:

1. Gauss-Verfahren ausführen
2. Vielfache jeder Zeile zu darüber liegenden Zeilen addieren für führende Eins

(!) reduzierte ZSF ist eindeutig

z.B.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \overset{Z_2 + 2 Z_3}{\Rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \overset{Z_1 + Z_3}{\Rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

$$\overset{Z_1 - 2 Z_2}{\Rightarrow} \overbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)}^{\text{reduzierte ZSF}}. \quad \begin{cases} x = 6 \\ y = -1 \\ z = 4 \end{cases}$$

Rang der Koeffizientenmatrix

r = Anzahl der Nicht-Nullzeilen in ZSF (nicht erweiterte)

r = Rang des Gleichungssystems ($r = rg(A)$ / $rang(A)$)

(!) $r \geq 0$ und $r \leq \min(m, n)$

Anzahl führende Variablen $= r$

ZSF zu Parameterdarstellung

z.B. Gegeben: erweiterte Koeffizientenmatrix in ZSF

Gesucht: LGS Lösung in Parameterdarstellung

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 0 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

$4 - 2 = 2$ freie Variablen

$a = 2 - 4b - 7d = 2 - 4\lambda - 7\mu$

$b = \lambda \in \mathbb{R}$

$c = 0 + d = \mu$

$d = \mu \in \mathbb{R}$

freie Variable, ∞ Lösungen

wie viel Mal kommt λ in a, b, c, d vor?

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix} + \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} : \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\} \subseteq R^4$$

Inverse 2x2 Matrix

(!) Invertierbar wenn: $\det(A) = ad - bc \neq 0$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

z.B. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Keine / genau eine / unendlich viele Lösungen

z.B.

$$\left.\begin{array}{rcl} x + ay & = & 3 \\ (1-a)x - 2y & = & a^2 + 5 \end{array}\right]$$

auf ZSF

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & a & 3 \\ 1-a & -2 & a^2+5 \end{array}\right) \underset{Z_2 - (1-a)Z_1}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & a & 3 \\ 0 & a^2-a-2 & a^2+3a+2 \end{array}\right)$$

$a^2 - a - 2 = (a+1)(a-2)$, $a^3 + 3a + 2 = (a+1)(a+2)$

Unendlich viele Lösungen $(a = -1)$

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ $rg(A) = rg(A|\vec{c}) = 1 < n = 2$

Keine Lösung $(a = 2)$

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 12 \end{array}\right)$ $rg(A) = 1 \neq rg(A|\vec{c}) = 2$

Genau eine Lösung $(a \neq -1, 2)$

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & a & 3 \\ 0 & (a+1)(a-2) & (a+1)(a+2) \end{array}\right)$ $rg(A) = rg(A|\vec{c}) = n = 2$

Determinanten

Reelle Zahl, die aus Elementen einer nxn Matrix berechnet wird

$\det(A^T) = \det(A)$, $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$, $\det(AB) = \det(A)\cdot\det(B)$

$\det(A^k) = (\det(A))^k$, $\det(E) = 1$, nxn Matrix: $\det(\lambda A) = \lambda^n \cdot \det(A)$

Vertauschen 2 Zeilen (Spalten) $\longrightarrow$ Determinante ändert Vorzeichen

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \det(A) \longrightarrow \begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = cb - ad = -(ad - cb) = -\det(A)$

Determinante $= 0$, wenn mind. 1 Bedingung erfüllt:

- Alle Elemente einer Zeile (Spalte) $= 0$
- 2 Zeilen (Spalten) stimmen überein
- 1 Zeile (Spalte) als Linearkombination der übrigen Zeilen (Spalten) darstellbar

Determinante einer Dreiecksmatrix = Produkt der Hauptdiagonalelemente

z.B. $\begin{vmatrix} 4 & 8 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 12 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 4 \cdot 1 \cdot 12 \cdot (-3) = -144$

2x2 Determinante berechnen

$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

z.B. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$ $\det(A)$

$= |1 \cdot 6 - (-2)\cdot(-2)| = |6 - 4| = 2$

Volumen Spat

Determinante von 3x3 Matrix

Flächeninhalt Parallelogramm

Determinante von 2x2 Matrix

Äquivalente Aussagen

- $\det(A) = 0$ (abhängig)
- $\mathrm{rang}(A) < n$
- LGS keine eindeutige Lösung
- Matrix A nicht invertierbar

- $\det(A) \neq 0$ (unabhängig)
- $\mathrm{rang}(A) = n$
- LGS genau eine Lösung
- Matrix A invertierbar

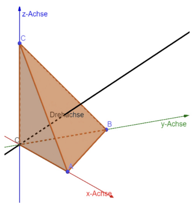
Koordinatendarstellung von Punkte A, B, C

$A = (1,0,0)$, $B = (0,1,0)$, $C = (0,0,1)$

$\overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} 1-0 \\ 0-0 \\ 0-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \vec{v}_1$, $\overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} 0-0 \\ 1-0 \\ 0-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \vec{v}_2$

$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, E: $1(x-0) + 1(y-0) + 1(z-1)$

$= x + y + z - 1 = 0$



3x3 Determinante berechnen

$$[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}] = \begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix} \begin{matrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \\ a_z & b_z \end{matrix}$$

$$= a_x b_y c_z + a_z b_x c_y + a_y b_z c_x - a_z b_y c_x - a_x b_z c_y - a_y b_x c_z$$
$$= a_x(b_y c_z - b_z c_y) + a_y(b_z c_x - b_x c_z) + a_z(b_x c_y - b_y c_x).$$

z.B. $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}] = \left[\begin{matrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & 1 \\ 5 & -2 & 2 \end{matrix}\right] \begin{matrix} 2 & -1 \\ 0 & 5 \\ 5 & -2 \end{matrix}$$

$= 2 \cdot 5 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 \cdot 5 + 2 \cdot 0 \cdot (-2)$

$- 5 \cdot 5 \cdot 2 - (-2) \cdot 1 \cdot 2 - 2 \cdot 0 \cdot (-1)$

$= 20 - 5 + 0 - 50 + 4 - 0 = -31$

n-reihige Determinante berechnen

Nach Zeile / Spalte mit meisten 0 entwickeln

$$\det(A_{11}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}$$

Unterdeterminante

$$\det(A_{21}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13}$$

$$\det(A_{31}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\det(A_{11}) - a_{21}\det(A_{21}) + a_{31}\det(A_{31})$$

! Vorzeichen nach Schachbrettregel:

+	−	+	−	+
−	+	−	+	−
+	−	+	−	+
−	+	−	+	−
+	−	+	−	+

z.B. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 \\ 0 & 12 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ Am meisten 0

$$\det(A) = -0 \cdot \det(A_{21}) + 12 \cdot \det(A_{22}) - 0 \cdot \det(A_{23}) + \det(A_{24})$$

$$= 12 \begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$ Am meisten 0

$$= 12\left(\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}\right)$$
$$+ \left(-\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}\right)$$

$$= 12(-1 - 4 - (-3 - 10) - (-6 + 5))$$
$$+ (-(4 + 6) + (2 + 2))$$

$$= 12(-5 + 13 + 1) + (-10 + 4) = 12 \cdot 9 - 6 = 108 - 6 = 102$$

Basiswechsel

- Basistransformation von B auf C
- nxn Matrix
- $({}_C T_B)^{-1} = {}_B T_C$
- B = alte Basis, C = neue Basis
- ${}_C T_B = {}_C\left((\vec{b}_1)_C \ \dots \ (\vec{b}_n)_C\right)_B$

$B \to C$ $({}_C T_B)$

Gauss-Jordan-Verfahren: $(\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_n \mid \vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n) \Rightarrow (I_n \mid {}_C T_B)$

z.B. ${}_C T_B$ von Basis B: $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ und Basis C: $\vec{c}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\vec{c}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$

$\left(\begin{matrix} 1 & 1 \\ -3 & -4 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{matrix}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} -3 & 7 \\ 2 & -5 \end{matrix}\right) \longrightarrow (\vec{b}_1)_C = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $(\vec{b}_2)_C = \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \end{pmatrix}$

${}_C T_B = {}_C\begin{pmatrix} -3 & 7 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}_B$

$S \to B$ $({}_B T_S)$ / $B \to S$ $({}_S T_B)$

${}_B T_S$ = Inverse von B: ${}_B(\vec{b}_1 \dots \vec{b}_n)_S^{-1}$

${}_S T_B = {}_S(\vec{b}_1 \dots \vec{b}_n)_B$

z.B. ${}_B T_S$ / ${}_S T_B$ von Standardbasis $S = (\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ und

Basis B: $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \longrightarrow \left(\begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{matrix}\right)$

${}_B T_S = \frac{1}{2}\, {}_B\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}_S$, ${}_S T_B = {}_S\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}_B$

Zusammenhang ${}_B A_B$ und ${}_S A_S$

${}_S A_S = {}_S T_B \ {}_B A_B \cdot {}_B T_S = {}_S T_B \cdot {}_B A_B \cdot {}_S T_B^{-1}$

z.B. ${}_S A_S$ von Basis B: $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und ${}_B A_B = {}_B\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}_B$

$\underbrace{{}_S\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_B \cdot {}_B\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}_B}_{{}_S\begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}_B} \cdot {}_B\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}_S$

${}_S\begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}_B \cdot {}_B\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}_S = {}_S\begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}_S$

Geraden

Parameterdarstellung/-gleichung ⓘ nicht eindeutig

Punkt P liegt genau auf g wenn: $\vec{OP} = \vec{OA} + \lambda\vec{v}$

$\lambda = 0 \to$ Punkt A

$\lambda > 0 \to$ Alle Punkte in Richtung von $\vec{v}$

$\lambda < 0 \to$ Alle Punkte in Gegenrichtung (von Punkt A)

z.B. Gerade g durch Punkte $A=(-1,3,-2)$, $B=(0,6,-4)$

$g: \vec{OA} + \lambda\vec{v}$ $\quad \vec{v} = \vec{AB} = \begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}$, $\vec{v} = \vec{BA} = \begin{pmatrix}-1\\-3\\2\end{pmatrix}$

$g: \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\3\\-2\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}$, $g: \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\6\\-4\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}-1\\-3\\2\end{pmatrix}$

Liegt Punkt $Q_1(1; 9; -6)$ auf g:

$\vec{OQ_1} = \vec{OA} + \lambda\vec{AB} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1\\9\\-6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\3\\-2\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}$ $\to \lambda = 2$ ✓ ✓

Koordinatendarstellung/-gleichung ⓘ nicht eindeutig

Beschreibt nur Gerade in Ebenen $\quad c = -\vec{n}\cdot\vec{OA}$

$\vec{n}\cdot\vec{OP} - \vec{n}\cdot\vec{OA} = 0 \Leftrightarrow ax + by + c = 0$ (Komponentenschreibweise)

c für parallele Verschiebung anpassen

z.B. Gerade g durch Punkt $A=(4;6)$ mit $\vec{n} = \begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$ orthogonal zu g

$g: 3x - y - (3\cdot 4 - 1\cdot 6) = 0$

$3x - y - 6 = 0$

Liegt Punkt $P(-1; -9)$ auf g? $\quad$ Punkt in x,y einsetzen

$3\cdot(-1) - (-9) - 6 = 0$ ✓

Parallel vs. identisch (Geraden in der Ebene)

Richtungsvektoren ($\vec{v_1}$ und $\vec{v_2}$) oder Normalvektoren ($\vec{n_1}$ und $\vec{n_2}$) kollinear

z.B. $g: \begin{pmatrix}14\\-1\\15\end{pmatrix} + \lambda\cdot\begin{pmatrix}-6\\4.5\\-9\end{pmatrix}$, $h: \begin{pmatrix}4\\6.5\\0\end{pmatrix} + \mu\cdot\begin{pmatrix}4\\-3\\6\end{pmatrix}$

$\vec{v_1} = k\vec{v_2} \Rightarrow \begin{pmatrix}-6\\4.5\\-9\end{pmatrix} = k\cdot\begin{pmatrix}4\\-3\\6\end{pmatrix}$ $\quad 4\cdot-1.5 = -6$ ✓, $-3\cdot-1.5 = 4.5$ ✓, $6\cdot-1.5 = -9$ ✓

$k=-1.5$ $(-6:4=k) \to$ kollinear $\to$ parallel/identisch

$\begin{pmatrix}14\\-1\\15\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\6.5\\0\end{pmatrix} + \mu\cdot\begin{pmatrix}4\\-3\\6\end{pmatrix}$ $\quad 4\cdot2.5+4 = 14$ ✓, $-3\cdot2.5+6.5 = -1$ ✓, $6\cdot2.5+0 = 15$ ✓ $\to$ identisch

$\mu = 2.5$ $((14-4):4 = \mu)$ $\quad$ wenn × $\to$ parallel

Schneidend (Geraden in der Ebene)

Richtungsvektoren ($\vec{v_1}$ und $\vec{v_2}$) oder Normalvektoren ($\vec{n_1}$ und $\vec{n_2}$) nicht kollinear

$\vec{v_1} = k\vec{v_2}$ (k darf nicht existieren)

$\det[\vec{A_1A_2}; \vec{v_1}; \vec{v_2}] = 0$

Schnittpunkt: $\vec{OA_1} + \lambda\vec{v_1} = \vec{OA_2} + \mu\vec{v_2}$

z.B. $g_1: \vec{OA_1} + \lambda\vec{v_1} = \begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$, $g_2: \vec{OA_2} + \mu\vec{v_2} = \begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$

$\vec{v_1} = k\vec{v_2} \Rightarrow \begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix} = k\cdot\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$ — x, y $\to$ in Ebene

k existiert nicht $\to$ nicht-kollinear $\to$ schneidend

Schnittpunkt:

$2 - \lambda = -2 + 5\mu$

$-3 + 2\lambda = 2 + 2\mu$ $\quad$ nach λ umstellen

$-\lambda = -4 + 5\mu \quad | \cdot -1$

$\lambda = 4 - 5\mu$ $\quad$ λ einsetzen

$-3 + 2(4 - 5\mu) = 2 + 2\mu$

$-3 + 8 - 10\mu = 2 + 2\mu$

$5 - 10\mu = 2 + 2\mu \quad | +10\mu, -2$

$3 = 12\mu \quad | :12$

$\frac{1}{4} = \mu$ $\quad$ μ in λ einsetzen

$\lambda = 4 - 5\cdot\frac{1}{4} = \frac{11}{4}$

$\Rightarrow g_1: \begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix} + \frac{11}{4}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix} \longrightarrow S(-\frac{3}{4}; \frac{5}{2})$

z.B. $g_1: \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$, $g_2: \begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$ — x, y, z $\to$ im Raum

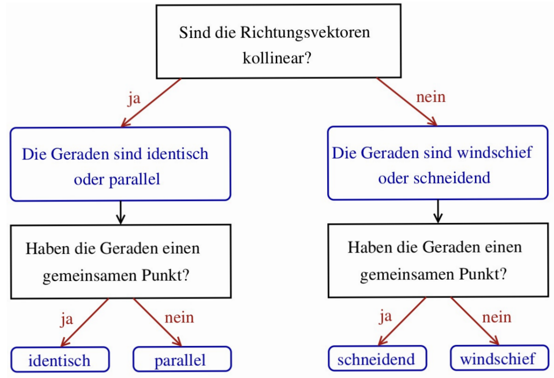
$\vec{v_1} = k\vec{v_2} \Rightarrow \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} = k\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$

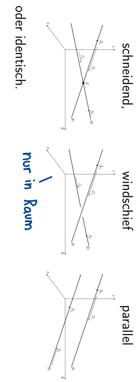
k existiert nicht $\to$ nicht-kollinear $\to$ schneidend oder windschief

$\det[\vec{A_1A_2}; \vec{v_1}; \vec{v_2}] = \left|\begin{matrix}1 & 2 & 1\\-1 & 1 & -1\\2 & 1 & 2\end{matrix}\right|\begin{matrix}1 & 2\\-1 & 1\\2 & 1\end{matrix}$

$= (1\cdot1\cdot2) + (2\cdot-1\cdot2) - (1\cdot-1\cdot1) - (2\cdot1\cdot1) - (1\cdot-1\cdot1) - (2\cdot-1\cdot2)$

$= 2 - 4 - 1 - 2 + 1 + 4 = 0 \to 0 =$ schneidend





Normalvektor

Vektor $\vec{n}$ senkrecht auf Gerade g ($\vec{v}$ und $\vec{n}$ orthogonal)

$\vec{v} = \begin{pmatrix}v_x\\v_y\end{pmatrix}$, $\vec{n} = \begin{pmatrix}-v_y\\v_x\end{pmatrix}$ und $\vec{n} = \begin{pmatrix}v_y\\-v_x\end{pmatrix}$

z.B. $g: \begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ $\quad \vec{v} = \begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$, $\vec{n} = \begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}$ und $\vec{n} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

z.B. Ebene E von g orthogonal geschnitten: $g: \begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}$ $\quad \vec{n} = \begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}$

z.B. Vektor $\vec{n}$ orthogonal zu Gerade g: $3x + 5y - 1 = 0$ $\quad \vec{n} = \begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$

z.B. Vektor $\vec{n}$ orthogonal zu Ebene E: $8x + 9y - z - 7 = 0$ $\quad \vec{n} = \begin{pmatrix}8\\9\\-1\end{pmatrix}$

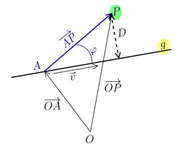
z.B. Vektor $\vec{n}$ orthogonal zu Ebene E: $\begin{pmatrix}-2\\-2\\-2\end{pmatrix} + \lambda\cdot\begin{pmatrix}2\\4\\3\end{pmatrix} + \mu\cdot\begin{pmatrix}4\\3\\4\end{pmatrix}$

Kreuzprodukt: $\begin{pmatrix}2\\4\\3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}4\\3\\4\end{pmatrix} = \begin{matrix}(4\cdot4)-(3\cdot3)\\(3\cdot4)-(2\cdot4)\\(2\cdot3)-(4\cdot4)\end{matrix} \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix}7\\4\\-10\end{pmatrix}$

Abstand eines Punktes von Gerade im Raum

Beliebiger Punkt $P(x_0; y_0; z_0)$ von Gerade in Parameterdarstellung $g: \vec{OA} + \lambda\vec{v}$

$$D = \frac{|\vec{v} \times \vec{AP}|}{|\vec{v}|}$$



z.B. Abstand Punkt $P(5; 3; -2)$ von Gerade $g: \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}2\\5\\2\end{pmatrix}$

$\vec{v} \times \vec{AP} = \begin{pmatrix}2\\5\\2\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}5-1\\3-0\\-2-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\5\\2\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}4\\3\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\cdot-3 - 2\cdot3\\2\cdot4 - -3\cdot2\\2\cdot3 - 5\cdot4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-21\\14\\-14\end{pmatrix}$

$|\vec{v} \times \vec{AP}| = \sqrt{(-21)^2 + 14^2 + (-14)^2} = \sqrt{833}$

$$D = \frac{|\vec{v} \times \vec{AP}|}{|\vec{v}|} = \frac{\sqrt{833}}{\sqrt{2^2+5^2+2^2}} \approx 5.02$$

Ebenen

Parameterdarstellung/-gleichung ⓘ nicht eindeutig

$\vec{OP} = \vec{OA} + \lambda\vec{v} + \mu\vec{w}$, λ und $\mu \in \mathbb{R}$

- Punkt A in Ebene frei wählbar
- Richtungsvektoren nicht kollinear und parallel zur Ebene

z.B. Ebene durch Punkt $A=(3;5;1)$ und $\vec{v}=\begin{pmatrix}2\\5\\1\end{pmatrix}$, $\vec{w}=\begin{pmatrix}5\\1\\3\end{pmatrix}$

Parametergleichung von E: $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\5\\1\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}2\\5\\1\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}5\\1\\3\end{pmatrix}$

Liegt Punkt $Q(15;12;8)$ auf Ebene: Ja

$15 = 3 + 2\lambda + 5\mu \rightarrow 15 = 3 + 2\cdot 1 + 5\cdot 2$ ✓

$12 = 5 + 5\lambda + \mu \rightarrow 12 = 5 + 5\cdot 1 + 2$ ✓

$8 = 1 + \lambda + 3\mu \rightarrow 7 - 3\mu = \lambda \rightarrow \lambda = 7 - 3\cdot 2 = 1$ ✓

$\rightarrow 15 = 3 + 2(7-3\mu) + 5\mu$

$15 = 17 - \mu \quad | -17, \cdot -1$

$2 = \mu$

Koordinatengleichung ⓘ nicht eindeutig

$\vec{n}\cdot\vec{AP} = 0 \Leftrightarrow \vec{n}\cdot(\vec{OP}-\vec{OA}) = 0$

$ax+by+cz+d=0$, $\vec{n}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$, $A=(a_x;\ a_y;\ a_z)$

wobei: $d = -\vec{n}\cdot\vec{OA} = -(a\cdot a_x + b\, a_y + c\cdot a_z)$

z.B. Ebene durch Punkt $A=(-2;5;-1)$, senkrecht zu $\vec{n}=\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}$

$\vec{n}\ (\vec{OP}-\vec{OA}) = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}\cdot\left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-2\\5\\-1\end{pmatrix}\right) = 0$

$= 3(x+2) - 2(y-5) + (z+1) = 0$

$= 3x + 6 - 2y + 10 + z + 1 = 0$

$= 3x - 2y + z + 17 = 0$

Gehört Punkt $Q_1\,(0;0;-17)$ zur Ebene?

$3\cdot 0 - 2\cdot 0 - 17 + 17 = 0$ ✓

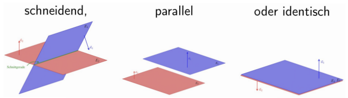
z.B. Normierte Ebene $2x - 6y + 3z + 4 = 0$

ⓘ Normiert wenn $|\vec{n}|=1$, dazu Gleichung mit Kehrwert von $|\vec{n}| \neq 0$ multiplizieren

$\vec{n}=\begin{pmatrix}2\\-6\\3\end{pmatrix}$, $|\vec{n}| = \sqrt{2^2+{-6}^2+3^2} = \sqrt{49} = 7$

E: $\frac{2}{7}x - \frac{6}{7}y + \frac{3}{7}z + \frac{4}{7} = 0$

Gegenseitige Lage von Ebenen im Raum



Normalvektoren ($\vec{n}_1$ und $\vec{n}_2$) kollinear:

- identisch: Punkt A_1 von E_1 erfüllt Koordinaten-/Parametergleichung von E_2
  parallel: ansonsten

nicht-kollinear $\rightarrow$ schneidend (Kein Schnittpunkt sondern Schnittgerade)

z.B. Schnittgerade Ebenen $E_1: 5x+2y+3z=0$ und $E_2: 10x+7y-12z-45=0$

$\rightarrow$ nicht kollinear $\rightarrow$ schneidend $\leftarrow$

Gauss-Jordan-Verfahren: z = freie Variable λ

$\left(\begin{array}{ccc|c}5&2&3&0\\10&7&-12&45\end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1&0&3&-6\\0&1&-6&15\end{array}\right)$

$x = -6 - 3z = x = -6 - 3\lambda$

$y = 15 + 6z = y = 15 + 6\lambda$

$z = \lambda \in \mathbb{R}$

Schnittgerade: $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6-3\lambda\\15+6\lambda\\\lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6\\15\\0\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}-3\\6\\1\end{pmatrix}$, mit $\lambda\in\mathbb{R}$

xy/xz/yz Ebene

xy-Ebene: $\vec{n}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ $z=0$, xz-Ebene: $\vec{n}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ $y=0$, yz-Ebene: $\vec{n}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ $x=0$

z.B. g: $\begin{pmatrix}1\\-3\\3\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix}$ Schnittpunkte bestimmen

xy-Ebene: $3-3\lambda = 0 \quad | +3\lambda$

$3 = 3\lambda \quad | :3$

$1 = \lambda$

$x = 1 + 1\cdot 1$, $y = -3 + 1\cdot 1$, $z = 3 + 1\cdot -3$ $\Rightarrow S(2;-2;0)$

xz-Ebene: $-3+\lambda = 0 \quad | -\lambda, \cdot -1$

$3 = \lambda$

$x = 1 + 3\cdot 1$, $y = -3 + 3\cdot 1$, $z = 3 + 3\cdot -3$ $\Rightarrow S(4;0;-6)$

yz-Ebene: $1+\lambda = 0 \quad | -1$

$\lambda = -1$

$x = 1 + -1\cdot 1$, $y = -3 + -1\cdot 1$, $z = 3 + -1\cdot -3$ $\Rightarrow S(0;-4;6)$

Durchstosspunkt

z.B. Schnittpunkt von Ebene $2x - 3y + 4z = 7$ und Gerade g: $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$

$2(1+2\lambda) - 3\lambda + 4(1+\lambda) = 7$

$= 5\lambda + 6 = 7 \rightarrow \lambda = 1/5 \rightarrow \vec{OD} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\frac{1}{5}\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} = S(1.4;\ 0.2;\ 1.2)$

Normalvektor

Auf der Ebene senkrecht stehender Vektor: $\vec{n} = \vec{v}\times\vec{w}$, $\vec{n} = \vec{n}\times\vec{n}$

Koordinatengleichung zu Parameterdarstellung

z.B. E: $2x - 4y + 6z = 16$ zu Parameterdarstellung

$\begin{array}{c}\\ \\ \end{array}\left[\begin{array}{ccc|c}x&y&z&\\2&-4&6&16\end{array}\right] \xrightarrow{:2} \left[\begin{array}{ccc|c}x&y&z&\\1&-2&3&8\end{array}\right]$

ⓘ mind. 1 Variable muss = 1 sein

$x = 8 + 2\lambda - 3\mu$, $y = \lambda \in \mathbb{R}$, $z = \mu \in \mathbb{R}$

$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\0\\0\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix}$

Parameterdarstellung zu Koordinatengleichung

z.B. E: $\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}$ zu Koordinatengleichung

$\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(0\cdot 0)-(1\cdot -2)\\(1\cdot 1)-(1\cdot 0)\\(1\cdot -2)-(0\cdot 1)\end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}$

E: $2x + 1y - 2z = d$

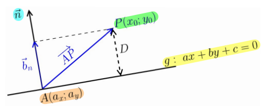
$d = ((2\cdot 1) + (1\cdot 1) + (-1\cdot -2)) = 5$

$\Rightarrow$ E: $2x + 1y - 2z - 5 = 0$

Abstand eines Punktes von Gerade in Ebene

Beliebiger Punkt $P(x_0;y_0)$ von Gerade $g: ax+by+c=0$:

$D = \frac{|\vec{AP}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|} = \frac{|a\cdot x_0 + b\cdot y_0 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$



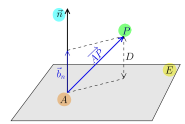
z.B. Abstand Punkt $P(5;-7)$ von Gerade $g: 3x+4y+15=0$

$D = \frac{|3\cdot 5 + 4\cdot(-7) + 15|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{|15-28+15|}{\sqrt{25}} = \frac{2}{5}$

Abstand eines Punktes von einer Ebene

Beliebiger Punkt $P(x_0;y_0;z_0)$ von Ebene $E: ax+by+cz+d=0$:

$D = \frac{|\vec{AP}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|} = \frac{|a\cdot x_0 + b\cdot y_0 + c\cdot z_0 + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$



z.B. Abstand Punkt $P(1;0;-2)$ von Ebene $-2x+y-3z-18=0$

$D = \frac{|-2\cdot 1 + 1\cdot 0 - 3\cdot(-2) - 18|}{\sqrt{(-2)^2+1^2+(-3)^2}} = \frac{|-14|}{\sqrt{14}} = \frac{14}{\sqrt{14}} = \sqrt{14} \approx 3.74$

Vektorräume

Nichtleere Menge V von Vektoren, mit folgenden Vorschriften:

- Addition: $\vec{a}$ und $\vec{b}$ in $V \rightarrow \vec{a}+\vec{b} \in V$
- Skalare Multiplikation: $\vec{a} \in V$ und Skalare $\lambda \in \mathbb{R} \longrightarrow \lambda \cdot \vec{a} \in V$
- Existenz Neutralelement $\vec{0}$: $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$ und 1: $1 \cdot \vec{a}=\vec{a}$

z.B. $\mathbb{Z}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| \, x,y \in \mathbb{Z} \right\} \rightarrow$ kein Vektorraum (weil $\mathbb{Z}$ verwendet)

Gegenbeispiel: $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} \notin \mathbb{Z}^2$ — nur +, - Zahlen ohne Bruch oder Komma

z.B. $p(x) = 2-3x+x^2 \in \mathbb{P}_2$, $q(x) = -1+4x-x^2 \in \mathbb{P}_2 \rightarrow$ kein Vektorraum

Gegenbeispiel: $p(x)+q(x) = 1+x \notin \mathbb{P}_2$

z.B. $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$ $a,b \in \mathbb{R}$ $\rightarrow$ kein Vektorraum (Nullmatrix nicht möglich)

z.B. $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ $a,b \in \mathbb{R}$ $\longrightarrow$ ist Vektorraum (Nullmatrix möglich)

$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a & 0 \\ 0 & b+b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}$ ✓, $\lambda \cdot \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a & 0 \\ 0 & \lambda b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}$ ✓

Lineare Hülle (Spann)

Menge aller Linearkombinationen der Vektoren $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$:

- $\mathrm{Lin}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n) / \mathrm{Span}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ ist Unterraum von V

z.B. $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ welche Vektoren liegen in $\mathrm{span}(\vec{a}, \vec{b})$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$? : $\vec{0}$ ist Element jedes Vektorraums ✓

$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$? : $\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 5 \\ -2 & 3 & 2 & 4 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -0.5 & 1 & 2.5 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{array}\right)$ $\begin{array}{l} x_1 = 1+0.5\lambda \\ x_2 = 2 \\ x_3 = \lambda \end{array}$ ✓ / $x_3 = \otimes$

Erzeugendensystem

Menge von Vektoren, mit welchen alle Vektoren eines Vektorraums erzeugt werden können. (Vektoren linear abhängig / unabhängig)

(!) Wenn rg(A) in ZSF < Anzahl Zeilen(m) → kein Erzeugendensystem

z.B. $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ von $\mathbb{R}^3$? $\longrightarrow$ ⊗ Braucht mind. 3 Vektoren

z.B. $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$ von $\mathbb{R}^3$?

$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

⊗ $\rightarrow \mathrm{rg}(A) = 2 < 3$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ von $\mathbb{R}^3$?

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

✓ $\rightarrow \mathrm{rg}(A) = 3 = 3$

Unterraum

Nichtleere Teilmenge von V, genau dann ein Unterraum U von V wenn:

- $\vec{a}+\vec{b} \in U$
- $\lambda\vec{a} \in U$

} Wenn erfüllt → $\vec{0}$ im Unterraum und $\mathbb{R}^2/\mathbb{R}^3$ durch Ursprung

⚠ $\vec{0} \notin U \rightarrow$ kein Unterraum

$\mathbb{R}^2/\mathbb{R}^3$ nicht durch Ursprung → kein Unterraum

} umgekehrt nicht ausschlaggebend

(!) Enthält mind. ganzen Raum V und Nullvektorraum $\{\vec{0}\}$

z.B. Ist $U = \left\{ \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| \, 2x_1+3x_2+x_3=0 \right\}$ ein Unterraum $\mathbb{R}^3$?

$\vec{a}+\vec{b} = 2(a_1+b_1)+3(a_2+b_2)+(a_3+b_3) = 0+0+0=0$ ✓

$\lambda\vec{a} = 2(\lambda a_1)+3(\lambda a_2)+\lambda a_3 = \lambda(2a_1+3a_2+a_3) = \lambda \cdot 0 = 0$ ✓

z.B. $\left\{ \begin{pmatrix} a \\ a+2 \end{pmatrix} \middle| \, a \in \mathbb{R} \right\} \rightarrow$ kein Unterraum von $\mathbb{R}^2$, weil kein $\vec{0}$

z.B. $U = \{ a+b\cdot x+c\cdot x^2+d\cdot x^3 \in \mathbb{P}_3[x] \mid a=0 \}$

$(0+bx+cx^2+dx^3)+(0+bx+cx^2+dx^3) = (2b)x+(2c)x^2+(2d)x^3 \in \mathbb{P}^3$ ✓

$\lambda \cdot (0+b\cdot x+c\cdot x^2+d\cdot x^3) = 0+(\lambda\cdot b)\cdot x+(\lambda\cdot c)\cdot x^2+(\lambda\cdot d)\cdot x^3 \in \mathbb{P}^3$ ✓

Lösungsmengen:

Homogenes LGS → Unterraum, Inhomogenes LGS → kein Unterraum

z.B. Homogenes LGS: $\begin{cases} x_1+2x_2=0 \\ 3x_1+6x_2=0 \end{cases} \longrightarrow$ Unterraum $\mathbb{R}^2$

Gauss-Verfahren: $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ $\begin{array}{l} x_1 = -2\lambda \\ x_2 = \lambda \end{array}$ — freie Variable

$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}$ $\quad U = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^2 \middle| \, \vec{x} = \lambda\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$

Dimension

Anzahl Vektoren einer Basis, heisst Dimension dim(V):

- Nullvektorraum $\{\vec{0}\}$ = Dimension 0
- $\dim(\mathbb{R}^n) = n$, $\dim(\mathbb{R}^{n\times n}) = n\cdot n \longrightarrow \dim(\mathbb{R}^{2\times 2}) = 4$
- dim(Ebene) = 2, dim(Gerade) = 1 (durch Ursprung)
- $\dim(\mathbb{P}_n) = n+1$ (Monombasis)

Äquivalente Aussagen (nxn Matrix):

- Vektoren $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ bilden Basis von $\mathbb{R}^n$
- $\mathrm{rg}(A) = n$, $\det(A) \neq 0$, A ist invertierbar
- LGS $A\vec{x} = \vec{b}$ hat eindeutige Lösung

z.B. $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -15 \\ 12 \end{pmatrix}$ Dimension von $\mathrm{Lin}(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$

$\left(\begin{array}{cc|c} 5 & -15 & 0 \\ -4 & 12 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ $\begin{array}{l} x = 3\lambda \\ y = \lambda \end{array} \longrightarrow \mathrm{Lin}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ — Basis

$\Rightarrow \dim\left(\mathrm{Lin}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right)\right) = 1$

Koordinatenvektor / Komponentendarstellung

Basis $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ von $\mathbb{R}^3$

z.B. Für $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ bezüglich B

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}_B$

z.B. Für $\vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ bezüglich S

$\vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}_B = 7 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_S - 3 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}_S + 1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}_S = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}_S$

Basis $B = \{1+x, x+x^2, 1+x^2\}$ von $\mathbb{P}_2[x]$

$\longrightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

z.B. Für $p(x) = 4-x+7x^2$ bezüglich B

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right) \longrightarrow p(x) = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}_B$

$p(x) = -2 \cdot (1+x) + 1 \cdot (x+x^2) + 6 \cdot (1+x^2)$

Linearkombination

z.B. $\vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix}$ von $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$, $\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & -1 \\ 3 & -5 & 6 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix} = 7 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$

z.B. In $\mathbb{Z}^2/5$ (Modulo 5) den Vektor $\begin{pmatrix} [1] \\ [1] \end{pmatrix}$ von $\begin{pmatrix} [2] \\ [0] \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} [3] \\ [4] \end{pmatrix}$

$[1] = [2]\cdot\lambda + [3]\cdot\mu \longrightarrow 3\cdot 4 = 12 + 2\cdot 2 = 16$, $\lambda = 2$

$[1] = [4]\cdot\mu \longrightarrow \mu = 4$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} [1] \\ [1] \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} [2] \\ [0] \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} [3] \\ [4] \end{pmatrix}$

Basis

(!) nicht eindeutig

"Erzeugendensystem" mit nur unabhängige Vektoren:

Standardbasis S $\mathbb{R}^3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Monombasis $M = \{x, x^1, x^2, \dots, x^n\}$

Lineare Abhängigkeit

ⓘ Nullvektor $\vec{0}$ ist immer linear abhängig

Nur kollinear / komplanar wenn linear abhängig

n Vektoren in $\mathbb{R}^n$:

$\det(A) \neq 0 \rightarrow$ unabhängig $\quad \det(A) = 0 \rightarrow$ abhängig

z.B. Polynome $p(x) = 1+x+x^2$, $q(x) = 2+2x^2$, $r(x) = x$ linear abhängig?

$$p = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\ q = \begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix},\ r = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \rightarrow \det\begin{pmatrix}1&2&0\\1&0&1\\1&2&0\end{pmatrix}\begin{matrix}1&2\\1&0\\1&2\end{matrix} = 0+2+0-0-2-0 = 0 \ ✓$$

Basis von $\mathbb{R}^3$? Anzahl Vektoren $= 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$, aber nicht unabhängig ⊗

n Vektoren in $\mathbb{R}^m$:

1. Erweiterte Koeffizientenmatrix bilden
2. Matrix mit Gauss-Verfahren auf ZSF bringen
3. ZSF keine Nullspalten / -zeilen $\rightarrow$ unabhängig
   ZSF hat Nullspalten / -zeilen $\rightarrow$ abhängig

z.B. Matrizen $A = \begin{pmatrix}3&1\\-2&-1\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}-9&2\\6&3\end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix}-2&-2\\3&0\end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix}0&0\\-5&2\end{pmatrix}$ abhängig?

$$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix}3&1\\-2&-1\end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix}-9&2\\6&3\end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix}-2&-2\\3&0\end{pmatrix} + \lambda_4 \cdot \begin{pmatrix}0&0\\-5&2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 3\lambda_1 - 9\lambda_2 - 2\lambda_3 &= 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 - 2\lambda_3 &= 0 \\ -2\lambda_1 + 6\lambda_2 + 3\lambda_3 - 5\lambda_4 &= 0 \\ -\lambda_1 + 3\lambda_2 + 2\lambda_4 &= 0 \end{aligned} \quad \left(\begin{array}{cccc|c}3&-9&-2&0&0\\1&2&-2&0&0\\-2&6&3&-5&0\\-1&3&0&2&0\end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c}1&-2&-2&0&0\\0&1&-4/3&0&0\\0&0&1&-3&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right)$$

$\rightarrow$ unendlich viele Lösungen, da Nullzeile ✓

Basis von $\mathbb{R}^{2\times2}$? Anzahl Vektoren $= 3 \neq \dim(\mathbb{R}^{2\times2}) = 4$ und nicht unabhängig ⊗

Lineare Abbildungen

Komposition

Für Verknüpfung von linearen Abbildungen

z.B. $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 : f(\vec{x}) = \begin{pmatrix}2x\\3y\end{pmatrix}$, $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : g(\vec{x}) = x - y$

Abbildungsmatrix A von f: $A(f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), f(\vec{e}_3)) = \begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&0\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times3}$

Abbildungsmatrix B von g: $B(g(\vec{e}_1), g(\vec{e}_2)) = \begin{pmatrix}1&-1\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times2}$

Abbildungsmatrix $C = B \cdot A$ von $g \circ f$: $\underbrace{\begin{pmatrix}1&-1\end{pmatrix}}_{1\times2} \underbrace{\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&0\end{pmatrix}}_{2\times3} = \underbrace{\begin{pmatrix}2&-3&0\end{pmatrix}}_{1\times3} \in \mathbb{R}^{1\times3}$

Darstellungs- / Abbildungsmatrix

Standardbasis: $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ Standardbasis von $\mathbb{R}^n$, $A\vec{x} = f(\vec{x})$

z.B. Abbildungsmatrix $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : \vec{x} \mapsto f(\vec{x}) = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}x_1 + 2x_2\\x_2\end{pmatrix}$ bezüglich Standardbasis

$$\left.\begin{aligned}\vec{a}_1 &= f(\vec{e}_1) = f\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1 + 2\cdot0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \\ \vec{a}_2 &= f(\vec{e}_2) = f\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0 + 2\cdot1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\end{aligned}\right\} A = (\vec{a}_1, \vec{a}_2) = \begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$$

Überprüfen $(A\vec{x} = f(\vec{x}))$: $\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1 + 2x_1\\x_2\end{pmatrix}$ ✓

Mehrere Basen: ${}_C A_B \quad f: V \rightarrow W$, Vektorraum V mit Basis B, Vektorraum W mit Basis C

z.B. Abbildungsmatrix ${}_C A_B$ $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}_{S_2} \mapsto \begin{pmatrix}-x_2\\2x_1\\x_2 - x_1\end{pmatrix}_{S_3}$ bezüglich Basen $B = \left(\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}_{S_2}, \begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}_{S_2}\right)$ von $\mathbb{R}^2$

und $C = \left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}_{S_3}, \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}_{S_3}, \begin{pmatrix}1\\-4\\0\end{pmatrix}_{S_3}\right)$ von $\mathbb{R}^3$ sowie das Bild $f(\vec{x})$ von $\vec{x} = \begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}_B$

1. Vektoren aus B in f einsetzen:

$$f(b_1) = f\left(\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}_S\right) = \begin{pmatrix}-5\\4\\3\end{pmatrix}_S, \quad f(b_2) = f\left(\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}_S\right) = \begin{pmatrix}-3\\-2\\4\end{pmatrix}_S$$

2. LGS mit C und Abbildungsmatrix bezüglich Basis B:

$$\left(\begin{array}{ccc|cc}1&0&1&-5&-3\\0&2&-4&4&-2\\1&1&0&3&4\end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|cc}1&0&0&-11&-11\\0&1&0&14&15\\0&0&1&6&8\end{array}\right) \rightarrow {}_C A_B = {}_C\begin{pmatrix}-11&-11\\14&15\\6&8\end{pmatrix}_B$$

3. Bild $f(\vec{x})$ von $\vec{x}$:

$$\underbrace{{}_C\begin{pmatrix}-11&-11\\14&15\\6&8\end{pmatrix}_B}_{3\times2} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}_B}_{2\times1} = \begin{pmatrix}-2\cdot-11 + 1\cdot-11\\-2\cdot14 + 1\cdot15\\-2\cdot6 + 1\cdot8\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}11\\-13\\-4\end{pmatrix}_C}_{3\times1}$$

z.B. Abbildungsmatrix ${}_S A_S$ $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}_S \mapsto \begin{pmatrix}x_1 - x_2\\x_1 + x_2\end{pmatrix}_S$ bezüglich Standardbasis von $\mathbb{R}^2$

$$f\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_S\right) = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}_S, \quad f\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}_S\right) = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}_S, \quad {}_S A_S = \begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}_S$$

ⓘ Nur für ${}_S A_S$ möglich, bei ${}_B A_B$ oberes Beispiel und C durch B ersetzen

Abbildungen Addition

z.B. $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : f(\vec{x}) = \begin{pmatrix}x-y\\2x\end{pmatrix}$, $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : g(\vec{x}) = \begin{pmatrix}4y\\0\end{pmatrix}$

Abbildungsmatrix A von f: $A(f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2)) = \begin{pmatrix}1&-1\\2&0\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times2}$

Abbildungsmatrix B von g: $B(g(\vec{e}_1), g(\vec{e}_2)) = \begin{pmatrix}0&4\\0&0\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times2}$

$f + g$: $\mathbb{R}^2 + \mathbb{R}^2 = (A + B)\vec{x} = \begin{pmatrix}1&3\\2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x + 3y\\2x\end{pmatrix}$

Koordinatenvektor

z.B. Basis $B = \left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}\right) \mathbb{R}^2$, Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix}-10\\2\end{pmatrix}$ $\vec{v}_B$?

$$\left(\begin{array}{cc|c}1&3&-10\\1&0&2\end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c}1&0&2\\0&1&-4\end{array}\right) \rightarrow \vec{v}_B = \begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix}$$

z.B. Polynom $p(x) = 5 + 9x + 3x^2$, Basis $B = (1, 1+2x, x+x^2) \mathbb{P}_2$, $\vec{p}_B$?

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&5\\0&2&1&9\\0&0&1&3\end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&2\\0&1&0&3\\0&0&1&3\end{array}\right) \rightarrow \vec{p}_B = \begin{pmatrix}2\\3\\3\end{pmatrix}$$

Lineare Abbildungen

Wenn für $f: V \to W$ (2 reelle Vektorräume) gilt:

- $f(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = f(\vec{x}_1) + f(\vec{x}_2)$ und $f(\lambda \vec{x}_1) = \lambda f(\vec{x}_1)$

(!) Vektor $f(\vec{x}) \in W$ heisst Bild von $\vec{x} \in V$

- $f(-\vec{x}) = -f(\vec{x})$

$f(\vec{0}_V) = \vec{0}_W$ (Nullvektor wird immer in Nullvektor abgebildet)

z.B. $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}$ lineare Abbildung?

Bed. 1: $f\left(\begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 + 2(x_2 + y_2) \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix}$

$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) + f\left(\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 + 2y_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + y_1 + 2y_2 \\ x_1 + y_2 \end{pmatrix}$ ✓

Bed. 2: $f\left(\begin{pmatrix} \lambda \cdot x_1 \\ \lambda \cdot x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \lambda \cdot x_1 + 2\lambda \cdot x_2 \\ \lambda \cdot x_2 \end{pmatrix}$

$\lambda \cdot f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot (x_1 + 2x_2) \\ \lambda \cdot x_2 \end{pmatrix}$ ✓

z.B. $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + 2 \\ x_2 \end{pmatrix}$ lineare Abbildung?

Bed. 1: $f\left(\begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 + 2 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix}$

$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) + f\left(\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 + 2 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 + 2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 + 4 \\ x_1 + y_2 \end{pmatrix}$ ✗

Bijektive lineare Abbildung

Sei $\dim(V) = \dim(W) = n$ und $f: V \to W$ mit $n \times n$ Matrix:

- f bijektiv, dann $f^{-1}: W \to V$ linear und bijektiv
- Darstellungsmatrix f^{-1} ist A^{-1}, Inverse zu A

Äquivalente Aussagen (f ist bijektiv):

- $\mathrm{Ker}(f) = \{\vec{0}\}$ (injektiv) und $\mathrm{Im}(f) = W$ (surjektiv)
- $\mathrm{rang}(A) = n$, A ist invertierbar, $\det(A) \neq 0$

z.B. $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2: f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x - y \\ 2x \end{pmatrix}$

Abbildungsmatrix A: $A = (f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2)) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

→ Spaltenvektoren linear unabhängig, $\dim(V) = \dim(W) = 2$

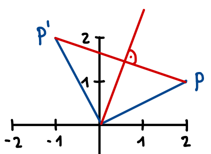
f ist bijektiv und Matrix A invertierbar

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = f^{-1}(\vec{x}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}y \\ -x + \frac{1}{2}y \end{pmatrix}$$

$\vec{n}$ von zwei Punkten

$P = (2,1)$ und $P' = (-1,2)$

$\vec{n} = \overrightarrow{PP'} = \begin{pmatrix} -1 - 2 \\ 2 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$



Kern und Bild

- $f: V \to W$, $\dim(V) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f))$

Kern:

- $\mathrm{Ker}(f)$ ist Unterraum von V
- $\dim(V) - \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(\mathrm{Ker}(f))$
- $\mathrm{Ker}(f) = \{\vec{x} \in V \mid f(\vec{x}) = \vec{0} \in W\}$ (alle Elemente, die $\vec{0}$ ergeben)

Bild (Spaltenraum):

- $\mathrm{Im}(f)$ ist Unterraum von V
- $\dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(V) - \dim(\mathrm{Ker}(f))$
- $\dim(\mathrm{Im}(f)) = \mathrm{rang}(A)$
- $\mathrm{Im}(f) = \{f(\vec{x}) \in W \mid \vec{x} \in V\}$ (alle Funktionswerte, die existieren können)

Ker(f) und Im(f) bestimmen:

1. Darstellungsmatrix
2. Homogenes LGS $A\vec{x} = \vec{0}$ → Gauss-Verfahren anwenden
3. $\mathrm{Ker}(f)$ = Lösungsmenge von $A\vec{x} = \vec{0}$, $\dim(\mathrm{Ker}(f))$ = Anzahl freie Variablen
4. $\mathrm{Im}(f)$ = Spaltenvektoren mit führender 1, $\dim(\mathrm{Im}(f))$ = Anzahl führende Variablen

z.B. $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 - 2x_2 \\ 2x_2 - x_1 \\ 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 \end{pmatrix}$

Abbildungsmatrix A: 2 führende Variablen, 2 freie Variablen

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} x_1 = 2(\lambda_1 + \lambda_2) \\ x_2 = \lambda_1 + \lambda_2 \\ x_3 = \lambda_1 \\ x_4 = \lambda_2 \end{array}$$

$$\mathrm{Ker}(A) = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 \mid \vec{x} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\right\} = \mathrm{Lin}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

$\dim(\mathrm{Im}(A)) = \dim(A) - \dim(\mathrm{Ker}(A)) \to 4 - 2 = 2$

$$\mathrm{Im}(A) = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 \mid \vec{x} = \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}\right\} = \mathrm{Lin}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

→ $\dim(\mathrm{Im}(A)) = 2 \neq \mathbb{R}^4$ und $\mathrm{Ker}(A) \neq \mathrm{Lin}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$

→ f nicht bijektiv

Geometrische Transformation Beispiel

z.B. $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ wie folgt definiert:

(1) Rotation um Ursprung um $\varphi_1 = -\pi/4$

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} \cos(-\pi/4) & -\sin(-\pi/4) \\ \sin(-\pi/4) & \cos(-\pi/4) \end{pmatrix}$$

(2) Scherung in x-Richtung um Winkel $\alpha = \pi/4$

Faktor = $\tan(\pi/4) = 1 \to A_x = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(3) Rotation um Ursprung um $\varphi_2 = -\varphi_1 = \pi/4$

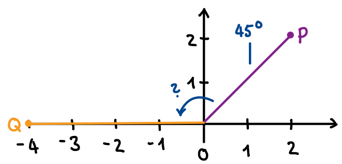
$$A_\varphi = \begin{pmatrix} \cos(\pi/4) & -\sin(\pi/4) \\ \sin(\pi/4) & \cos(\pi/4) \end{pmatrix}$$

Abbildungsmatrix von f: (3) · (2) · (1)

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \cos(\pi/4) & -\sin(\pi/4) \\ \sin(\pi/4) & \cos(\pi/4) \end{pmatrix}}_{(3)} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(-\pi/4) & -\sin(-\pi/4) \\ \sin(-\pi/4) & \cos(-\pi/4) \end{pmatrix}}_{(2)\ (1)}$$

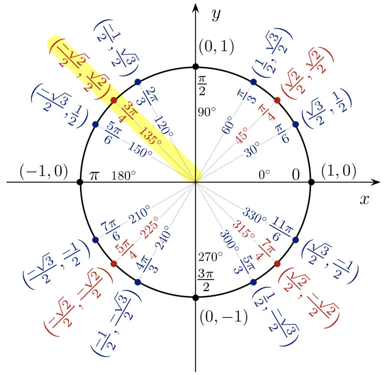
$$= \begin{pmatrix} \cos(\pi/4) & -\sin(\pi/4) \\ \sin(\pi/4) & \cos(\pi/4) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \cdot \cos(-\pi/4) \\ \sin(-\pi/4) & \cos(-\pi/4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 3/2 \end{pmatrix}$$

z.B. Drehstreckung von $P = (2;2)$ auf $Q = (-4;0)$ Drehwinkel?



Drehwinkel: $\varphi = \frac{3\pi}{4}$

Streckfaktor: $\frac{\sqrt{-4^2 + 0^2}}{\sqrt{2^2 + 2^2}} = \sqrt{2}$



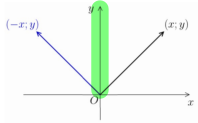
Geometrische Transformation

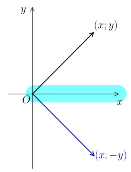
Spiegelung ! Invertierbar

y-Achse: $A_{s_y} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ x/y-Ebene: $A_{s_{xy}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

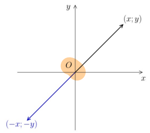
x-Achse: $A_{s_x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ x/z-Ebene: $A_{s_{xz}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

z-Achse: $A_{s_z} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y/z-Ebene: $A_{s_{yz}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$





Nullpunkt in Ebene $(f_{s_y} \circ f_{s_x})$: $A_{s_N} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

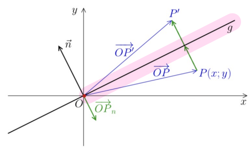


Ursprung

An Gerade in Ebene durch Nullpunkt: $A_{gE} = \frac{1}{|\vec{n}|^2} \begin{pmatrix} |\vec{n}|^2 - 2a^2 & -2ab & -2ac \\ -2ab & |\vec{n}|^2 - 2b^2 & -2bc \\ -2ac & -2bc & |\vec{n}|^2 - 2c^2 \end{pmatrix}$, $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

z.B. $y = x \Leftrightarrow -x + y = 0 \rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$A_g = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 - 2 \cdot (-1)^2 & -2 \cdot (-1) \cdot 1 \\ -2 \cdot (-1) \cdot 1 & 2 - 2 \cdot 1^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

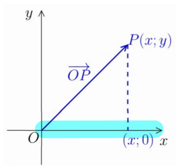


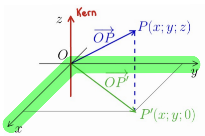
Orthogonale Projektion ! Nicht invertierbar

y-Achse: $A_{p_y} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ x/y-Ebene: $A_{p_{xy}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

x-Achse: $A_{p_x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ x/z-Ebene: $A_{p_{xz}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

z-Achse: $A_{p_z} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y/z-Ebene: $A_{p_{yz}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$



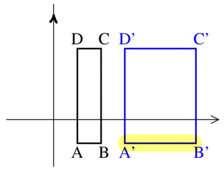


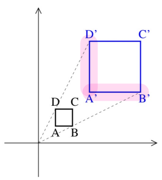
An Gerade in Ebene durch Nullpunkt: $A_{gE} = \frac{1}{|\vec{n}|^2} \begin{pmatrix} |\vec{n}|^2 - a^2 & -ab & -ac \\ -ab & |\vec{n}|^2 - b^2 & -bc \\ -ac & -bc & |\vec{n}|^2 - c^2 \end{pmatrix}$, $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

Streckung ! Invertierbar

Richtung: $x = \lambda_1$, $y = \lambda_2$, $z = \lambda_3$ (Standardwert = 1)

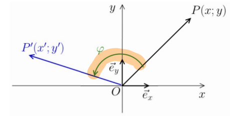
$A_{xyz} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$! Zentrische Streckung $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = k$ (gleicher Faktor)

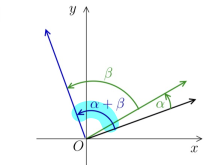




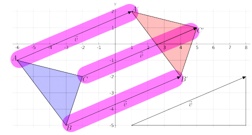
Drehung (Rotation) in Ebene ! Invertierbar

φ um Ursprung: $A_\varphi = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$





α und β um Ursprung: $A_\beta A_\alpha = A_{\alpha+\beta} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix}$



Translation $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ um Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, mit Rotation: $\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & a_1 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & a_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

TR → DEG

z.B. Punkt(3,2) um Winkel $\varphi = 30°$ drehen $A_{30°} = \begin{pmatrix} \cos(30°) & -\sin(30°) \\ \sin(30°) & \cos(30°) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1.6 \\ 3.2 \end{pmatrix}$

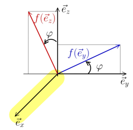
TR = RAD

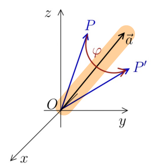
z.B. $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ Rotation um Ursprung Winkel $\varphi = \pi/6$ und Translation um Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$

Bild von Punkt $P(2;-2)$: $A \cdot \vec{r}(P) = \begin{pmatrix} \cos(\pi/6) & -\sin(\pi/6) & -4 \\ \sin(\pi/6) & \cos(\pi/6) & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.27 \\ 2.27 \\ 0 \end{pmatrix}$ $1 \rightarrow 0$ weil in $\mathbb{R}^2$

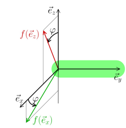
Drehung (Rotation) im Raum ! Invertierbar

Winkel φ um x-Achse: $A_{x,\varphi} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ 0 & \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$

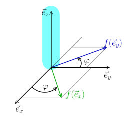




Winkel φ um y-Achse: $A_{y,\varphi} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & 0 & \sin(\varphi) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\varphi) & 0 & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$



Winkel φ um z-Achse: $A_{z,\varphi} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$



Winkel φ um Achse durch Ursprung mit Richtung von normierter Vektor $\vec{a}$

$$A_{\vec{a},\varphi} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) + a_1^2(1-\cos(\varphi)) & a_1 a_2(1-\cos(\varphi)) - a_3\sin(\varphi) & a_1 a_3(1-\cos(\varphi)) + a_2\sin(\varphi) \\ a_1 a_2(1-\cos(\varphi)) + a_3\sin(\varphi) & \cos(\varphi) + a_2^2(1-\cos(\varphi)) & a_2 a_3(1-\cos(\varphi)) - a_1\sin(\varphi) \\ a_1 a_3(1-\cos(\varphi)) - a_2\sin(\varphi) & a_2 a_3(1-\cos(\varphi)) + a_1\sin(\varphi) & \cos(\varphi) + a_3^2(1-\cos(\varphi)) \end{pmatrix}, \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \text{ mit } |\vec{a}| = 1$$

$(a_1)^2$ $(a_3)^2$

Scherung ! Invertierbar

Flächeninhalt nach Scherung gleich wie vorher

Richtung: $x = \lambda_1$, $y = \lambda_2$ (Standardwert = 0) $A_{xy} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 \\ \lambda_2 & 1 \end{pmatrix}$

λ = Faktor, wenn Winkel $\varphi \rightarrow \tan(\varphi)$