Vollständige Induktion

Rekursive Definition

z.B. $a_n = 3n+7$ für alle $n \in \mathbb{N}$

1. $a_0 = 3\cdot 0+7 = 7$
2. $a_{n+1} = 3(n+1)+7$

$= 3n+3+7$

$= \underbrace{3n+7}_{a_n}+3$

$a_{n+1} = a_n + 3$, $a_0 = 7$

z.B. $c_n = (n-1)2^{n+1}+2$ für alle $n \in \mathbb{N}^*$

1. $c_1 = (1-1)2^{1+1}+2 = 2$
2. $c_{n+1} = ((n+1)-1)\cdot 2^{n+1+1}+2$

$c_{n+1} = ((n-1)+1)\cdot 2^{n+1}\cdot 2+2$

$c_{n+1} = 2((n-1)+1)\cdot 2^{n+1}+2$

$c_{n+1} = (2(n-1)+2)\cdot 2^{n+1}+2$

$c_{n+1} = 2(n-1)\cdot 2^{n+1} + 2\cdot 2^{n+1}+2$

$c_{n+1} = 2^{n+1}(n-1) + \underbrace{2^{n+1}(n-1)+2}_{c_n} + 2\cdot 2^{n+1}$ ⓘ $2x = x+x$

$c_{n+1} = 2^{n+1}(n-1) + c_n + 2\cdot 2^{n+1}$

$c_{n+1} = 2^{n+1}((n-1)+2)+c_n$

$c_{n+1} = 2^{n+1}(n+1)+c_n$, $c_1 = 2$

Summen

z.B. $\forall n \in \mathbb{N}: \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ / $q^0+q^1+q^2+\dots+q^3 = \frac{n(n+1)}{2}$

I.A. $n=0$: $q^0 = \frac{1-q^{0+1}}{1-q}$, $q^0 = \frac{1-q^1}{1-q}$, $1=1$ ✓

I.V. $\forall n \in \mathbb{N}: \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

I.S. $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \Rightarrow \sum_{k=0}^{n+1} q^k = \frac{1-q^{(n+1)+1}}{1-q} = \frac{1-q^{n+2}}{1-q}$

$\sum_{k=0}^{n+1} q^k = \sum_{k=0}^{n} q^k + q^{(n+1)} = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + q^{(n+1)}$

$= \frac{1-q^{n+1}+(1-q)\cdot q^{n+1}}{1-q}$

$= \frac{1-q^{n+1}+q^{n+1}-q^{n+2}}{1-q}$

$= \frac{1-q^{n+2}}{1-q}$

ⓘ n+1 für k einsetzen

Ungleichungen

z.B. $\forall n \in \mathbb{N}_{\geq 2}: 2^n > n+1$

I.A. $n=2$: $2^2 > 2+1 = 4 > 3$ ✓

I.V. $\forall n \in \mathbb{N}_{\geq 2}: 2^n > n+1$

I.S. $2^n > n+1 \Rightarrow 2^{n+1} > (n+1)+1$

2^{n+1}

$= 2^n\cdot 2^1$

$> \underbrace{(n+1)\cdot 2^1}_{2n+2}$

$= n+n+2 > n+2+0$

kein Einfluss mehr

es gilt $n \geq 2$

muss 2 gröser als 0 sein

Fakultät

z.B. $\forall n \in \mathbb{N}: \sum_{k=0}^{n} k\cdot k! = (n+1)!-1$

I.A. $n=0$: $\sum_{k=0}^{0} 0\cdot 0! = (0+1)!-1$, $0\cdot 1 = 1-1$ ✓

I.V. $\forall n \in \mathbb{N}: \sum_{k=0}^{n} k\cdot k! = (n+1)!-1$

$(n+2)!-1 = (n+2)\cdot \overbrace{(n+2-1)}^{(n+1)} \cdot \overbrace{(n+2-1-1)}^{n!}$

I.S. $\sum_{k=0}^{n} k\cdot k! = (n+1)!-1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{n+1} k\cdot k! = ((n+1)+1)!-1 = (n+2)\cdot(n+1)\cdot n!-1$

$\sum_{k=0}^{n+1} k\cdot k! = \sum_{k=0}^{n} k\cdot k! + (n+1)\cdot(n+1)! = (n+1)!-1 + (n+1)\cdot(n+1)!$

$= (n+1)\cdot n!-1+(n+1)\cdot(n+1)\cdot n!$

$= (n+1)\cdot n! - 1 + n(n+1)\cdot n! + (n+1)\cdot n!$

$= n!((n+1)+n(n+1)+(n+1))-1$

$= n!(2n+2+n^2+n)-1$

$= n!(3n+2+n^2)-1$

$= n!(n+2)(n+1)-1$

$= (n+2)(n+1)n!-1$

Rekursionsgleichung / Folgen

z.B. $a_n = b_n$ für alle $n \geq 1$

$a_1 = 3$, $a_n = 10\cdot a_{n-1}+3$, $b_n = \frac{10^n-1}{3}$

I.A. $n=1$: $a_1 = \frac{10^1-1}{3}$, $3 = 3$ ✓

I.V. $\forall n \in \mathbb{N}^*: 10\cdot a_{n-1}+3 = \frac{10^n-1}{3}$

I.S. $10\cdot a_{n-1}+3 = \frac{10^n-1}{3} \Rightarrow 10\cdot a_{(n+1)-1}+3 = \frac{10^{n+1}-1}{3}$

$a_{n+1} = 10a_n+3 = 10\cdot\frac{10^n-1}{3}+3$

$= \frac{10\cdot 10^n-10}{3}+3$

$= \frac{10\cdot 10^n-10+9}{3}$

$= \frac{10^{n+1}-1}{3}$

weil $a_n = b_n$, a_n durch b_n ersetzen

Gerade

z.B. $\forall n \in \mathbb{N}: (2a-1)^n-1$ ist eine gerade Zahl

I.A. $n=0$: $(2a-1)^0-1 = 0$ ist eine gerade Zahl ✓

I.V. $\forall n \in \mathbb{N}: (2a-1)^n-1$ ist eine gerade Zahl

I.S. $(2a-1)^n-1 \Rightarrow (2a-1)^{n+1}-1$

$(2a-1)^{n+1}-1$

$= (2a-1)^n\cdot(2a-1)^1-1$

$= 2a\cdot(2a-1)^n - \underbrace{(2a-1)^n-1}_{2k\,:\,k\in\mathbb{N}}$

$= 2a\cdot(2a-1)^n-2k$

$= \underbrace{2(a\cdot(2a-1)^n-k)}_{\text{Vielfaches von 2 daher durch 2 teilbar}}$

Teilbarkeit

z.B. $\forall n \in \mathbb{N}\ 5^n+7$ ist durch 4 teilbar

I.A. $n=0$: $5^0+7 = 8$ ist durch 4 teilbar ✓

I.V. $4 \mid 5^n+7$

I.S. $4 \mid 5^n+7 \Rightarrow 4 \mid 5^{n+1}+7$

$$
\begin{aligned}
5^{n+1}+7 &= 5^n \cdot 5 + 7 \\
&= 5^n \cdot (4+1) + 7 \\
&= 4 \cdot 5^n + \underbrace{5^n+7}_{4k:\, k \in \mathbb{N}} \\
&= 4 \cdot 5^n + 4k \\
&= \underbrace{4(5^n+k)}
\end{aligned}
$$

$5 = 4+1$ für Teilbarkeit

Vielfaches von 4 daher durch 4 teilbar

Rekursionsgleichung

z.B. $F(0)=1,\ F(n+1) = \sum_{i=0}^{n} F(i)$

$F(0) = 1$
$F(1) = F(0) = 1$
$F(2) = F(0)+F(1) = 2$
$F(3) = F(0)+F(1)+F(2) = 4$
$F(4) = F(0)+F(1)+F(2)+F(3) = 8$

$\forall n \in \mathbb{N}^* (F(n) = 2^{n-1})$

I.A. $n=1$: $F(1) = 2^0$ ✓

I.V. $\forall n \in \mathbb{N}^* (F(n) = 2^{n-1})$

I.S. $F(n) = 2^{n-1} \Rightarrow F(n+1) = 2^n$

$$
\begin{aligned}
F(n+1) &= \sum_{i=0}^{n} F(i) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} F(i) + F(n) \\
&= F(n) + F(n) \\
&= 2(F(n)) \\
&= 2 \cdot 2^{n-1} \\
&= 2^n
\end{aligned}
$$

z.B. $F(0)=1,\ F(n+1) = H(n),\ H(0) = 0,\ H(n+1) = F(n)$

$F(0) = 1$ $\quad H(0) = 0$
$F(1) = H(0) = 0$ $\quad H(1) = F(0) = 1$
$F(2) = H(1) = 1$ $\quad H(2) = F(1) = 0$
$F(3) = H(2) = 0$ $\quad H(3) = F(2) = 1$
$F(4) = H(3) = 1$

$\forall n \in \mathbb{N} (F(n) = 1 - H(n))$

I.A. $n=0$ $F(0) = 1 = 1 - H(0)$ ✓

I.V. $\forall n \in \mathbb{N} (F(n) = 1 - H(n))$

I.S. $F(n) = 1 - H(n) \Rightarrow F(n+1) = 1 - H(n+1)$

$$F(n+1) = H(n) = 1 - F(n) = 1 - H(n+1)$$

Für welche $n \in \mathbb{N}$ gilt $H(n) = 1$ und für welche $F(n) = 1$

$\forall k \in \mathbb{N} (F(2k) = H(2k+1) = 1)$

I.A. $k=0$: $F(0) = H(1) = 1$ ✓

I.V. $\forall k \in \mathbb{N} (F(2k) = H(2k+1) = 1)$

I.S. $F(2k) = H(2k+1) = 1 \Rightarrow F(2(k+1)) = H(2(k+1)+1) = 1$

$$
\begin{aligned}
F(2(k+1)) &= F((2k+1)+1) = H(2k+1) = 1 \\
&= F(2(k+1)) = H(2(k+1)+1)
\end{aligned}
$$