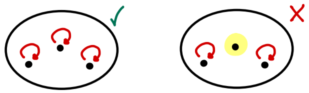
Relationen

Reflexiv

Alle Elemente stehen immer mit sich selbst in Beziehung.

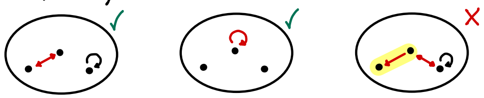
$x R x$



Symmetrisch

Zwei Elemente stehen immer wechselweise in Beziehung zueinander.

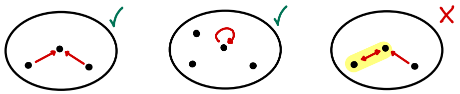
$x R y \Rightarrow y R x$



Anti-Symmetrisch

Zwei Elemente stehen niemals wechselweise in Beziehung zueinander, es sei denn es handelt sich um die gleichen Elemente.

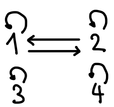
$x R y \land y R x \Rightarrow x = y$



Beispiel

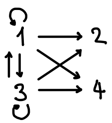
Menge $A = \{1,2,3,4\}$

$R_2 = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$



reflexiv, symmetrisch, nicht anti-symmetrisch, transitiv

$(x,y) \in R_2$, wenn $x+2y$ ungerade ist



nicht reflexiv, nicht symmetrisch, nicht anti-symmetrisch, transitiv

Äquivalenzklassen

Sei R eine Äquivalenzrelation auf Menge X und $x \in X$. Die Äquivalenzklasse $[x]_R$ von x bezüglich R, ist die Menge aller Elemente von X, die zu x in Relation R stehen.

$[x]_R := \{y \in X \mid x R y\}$ paarweise disjunkt, nicht leer, Vereinigung gibt X

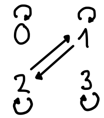
Repräsentanten

Faktormenge

Faktormenge $X/_R$ von X modulo R ist Menge aller Äquivalenzklassen.

$X/_R := \{[x]_R \mid x \in X\}$

z.B.



$A = \{0,1,2,3\}$, $R = \{(0,0), \underbrace{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)}_{\text{äquivalente Elemente}}, (3,3)\}$

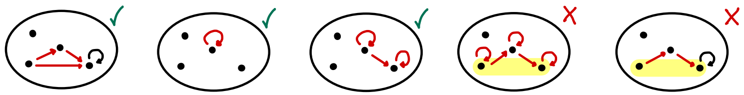
$[0]_R = \{0\}$, $[1]_R = \{1,2\}$, $[3]_R = \{3\}$

$A/_R = \{[0]_R, [1]_R, [3]_R\}$

Transitiv

Wenn es einen Pfeil von x nach y und y nach z gibt, gibt es einen Pfeil von x nach z. Die Elemente stehen immer in einer Dreiecksbeziehung zueinander.

$x R y \land y R z \Rightarrow x R z$



Äquivalenzrelationen

Identifizierung ähnlicher Relationen. Müssen reflexive, symmetrische und transitive Relationen sein. Ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf einer Menge X und gilt $x, y \in X$ mit $x \sim y$ dann gilt $[x]_\sim = [y]_\sim$

(!) Äquivalente Elemente repräsentieren stets dieselbe Äquivalenzklasse.

Wohldefiniert

$\sim$ Relation ist nicht wohldefiniert.

z.B. $\mathbb{Q} \to \mathbb{Z}$, $\frac{m}{n} \mapsto m$ nicht wohldefiniert

$f(5/4) = 5$, $f(10/8) = 10$ } $\frac{5}{4} = \frac{10}{8}$ ↯ Bild muss eindeutig sein

Lösung das wohldefiniert: z.B. fordern das Bruch vollständig gekürzt ist und n natürliche Zahl ist.

Beispiel Modulo Äquivalenzrelation

$x \equiv_5 y :\Leftrightarrow (x-y)$ ist ein Vielfaches von 5

└→ $x \equiv_5 y \ (\text{mod } 5) \Leftrightarrow x \sim y \Leftrightarrow \exists_{k \in \mathbb{Z}} : x - y = k \cdot 5$

z.B. $3 \equiv_5 8 \to 3 - 8 = -5$ ✓, $[3]_{\equiv_5} = [8]$

(!) Restklasse 3 von modulo 5 mit 8

Reflexivität : $x - x = 0 = 0 \cdot 5 \Rightarrow x \overset{\text{Relation}}{\sim} x$, da $0 \in \mathbb{Z}$

Symmetrie : $x \sim y \Rightarrow \exists_{k \in \mathbb{Z}} : x - y = k \cdot 5$

$\Rightarrow -(y-x) = k \cdot 5$

$\Rightarrow y - x = (-k) \cdot 5$

$\Rightarrow y \sim x, -k \in \mathbb{Z}$ weil $k \in \mathbb{Z}$

Transitivität : $x \sim y \Rightarrow \exists k_1 \in \mathbb{Z} : x - y = k_1 \cdot 5$

$\Rightarrow y = x - k_1 \cdot 5$

$y \sim z \Rightarrow \exists k_2 \in \mathbb{Z} : y - z = k_2 \cdot 5$

$\Rightarrow y = z + k_2 \cdot 5$

$\Rightarrow x - k_1 \cdot 5 = z + k_2 \cdot 5$

$\Rightarrow x - z = k_2 \cdot 5 + k_1 \cdot 5$

$\Rightarrow x - z = (k_2 + k_1) \cdot 5$, k_1 und $k_2 \in \mathbb{Z}$, also ist auch $k_1 + k_2 \in \mathbb{Z}$

$\mathbb{Z}/_{\equiv_5} = \{[0]_{\equiv_5}, [1]_{\equiv_5}, [2]_{\equiv_5}, [3]_{\equiv_5}, [4]_{\equiv_5}\}$

Binäre Relation

Relation zwischen zwei Elementen einer Menge.

$x R y$ für $x, y \in R$

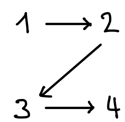
DAG (Directed Acyclic Graph)

Gerichteter, zyklenfreier (Keine Wiederholung) Graph mit mind. einer topologischen Sortierung. z.B. Hasse-Diagramm

Kreuzchentabelle / Digraph

z.B. $A = \{1,2,3,4\}$, $R = \{(1,2),(2,3),(3,4)\}$

	1	2	3	4
1		X		
2			X	
3				X
4				



Ordnungsrelation (Kleinste Ordnungsrelation → Präordnung)

Zusammenfassung von Relationsarten, mithilfe deren man Objekte vergleichen oder sortieren kann.

R-unvergleichbar: Zwei Elemente $x, y \in M$, falls weder $x R y$ noch $y R x$ gilt.

Beispiel 1: (3,5), (3,10), ... 3 teilt 5 nicht und 5 teilt 3 nicht, 3 teilt 10 nicht und 10 teilt 3 nicht

Beispiel 2: (z,u), (y,z), ... zwei Knoten haben keinen Pfeil direkten oder indirekten Pfeil

R-minimal: Ein Element $x \in X$ einer Teilmenge $X \subseteq M$, falls es kein anderes Element $y \in X$ mit $x R y$ gibt.

Beispiel 1: keine wegen Reflexivität, da jede Zahl sich selbst teilt, es gibt keine Zahl die nur andere teilt

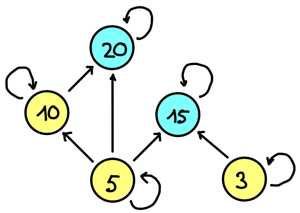
Beispiel 2: a, x keine Pfeile enden an diesen Knoten. Alle Pfeile dieser Knoten zeigen weg

R-maximal: Ein Element $x \in X$ einer Teilmenge $X \subseteq M$, falls es kein anderes Element $y \in X$ mit $y R x$ gibt.

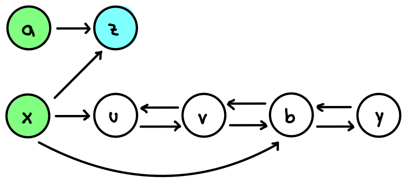
Beispiel 1: 15, 20 sind keine Teiler einer anderen Zahl in M

Beispiel 2: z auf diesen Knoten führen Pfeile hin, aber keine weg

Beispiel 1: "x teilt y", $| \subseteq M \times M$ mit $M = \{3, 5, 10, 15, 20\}$



Beispiel 2:



Ordnungstypen

Präordnung: R ist reflexiv und transitiv

z.B. Teilrelation | auf $\mathbb{Z}$, reflexiv, transitiv aber nicht anti-symmetrisch ($5 | -5$, $-5 | 5$ aber 5 ungleich -5)

Halb- / Partialordnung: R ist reflexiv, anti-symmetrisch und transitiv

z.B. Teilrelation | auf $\mathbb{N}$, da es R-unvergleichbare Elemente gibt.

A eine Menge von Mengen, dann ist Teilmengenrelation $\subseteq$ eine Halbordnung

Totale- / Lineareordnung: R ist eine Halbordnung und es existieren keine R-unvergleichbare Elemente

z.B. $\leqslant \mathbb{R}$ $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$ die Menge hat kein kleinstes Element und alle sind mit $\leqslant$ vergleichbar, $\leqslant \mathbb{Z}$

Wohlordnung: R ist eine Totaleordnung und jede Teilmenge von M hat mind. ein R-minimales Element

z.B. $\leqslant \mathbb{N}$

Abschlüsse

Transitiver-Abschluss: Kleinste (bezüglich $\subseteq$) transitive Relation, welche R als Teilmenge enthält. R^+

z.B. R gegeben durch zwei Tupel (a,b) und (b,c), R^+ enthält zusätzlich (a,c)

Reflexiv-Transitiver-Abschluss: Kleinste Relation, welche R^+ enthält und reflexiv ist. R^*

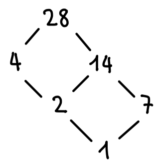
z.B. R^* enthält zusätzlich (a,a), (b,b), (c,c)

Hasse-Diagramm

Eine vereinfachte Darstellung einer Halbrelation.

- Pfeile werden weggelassen, Graph geht nach "oben"
- Verbindung zwischen zwei Punkten werden weggelassen, wenn es bereits eine "indirekte Verbindung" gibt
- Verbindung von einem Punkt zu sich selbst wird weggelassen

z.B. Teilbarkeitsrelation auf der Menge der Teilmengen von 28 $(\{1, 2, 4, 7, 14, 28\})$

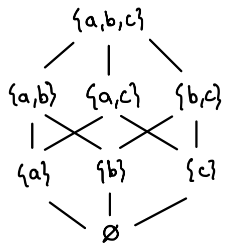


R-minimal: 1

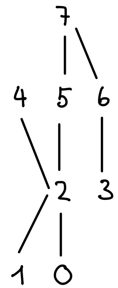
R-maximal: 28

R-unvergleichbar: (2,7), (4,14), ...

Teilmengenrelation $\subseteq$ auf der Menge $P(\{a,b,c\})$



Gegebenes Diagramm:

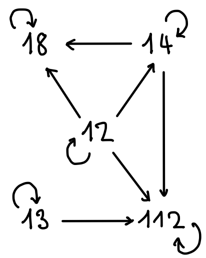


R-minimal: 0, 1, 3

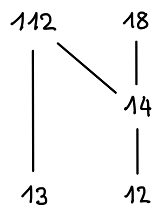
R-maximal: 4, 7

R-unvergleichbar: (1,0,3), (4,5,6), ...

Diagraph zu Hass-Diagramm:



12 → 112 entfernen weil indirekt über 14 ⇒



R-minimal: 13, 12

R-maximal: 112, 18

R: {(12,12), (13,13), (14,14), (18,18), (112,112), (13,112), (12,14), (14,112), (14,18), (12,112), (12,18)}