Semantik

$\mathbb{V}$: Menge aller Variablen
$\mathbb{A}$: Menge aller atomaren Formeln
$\mathbb{F}$: Menge aller aussagelogischen Formeln

Normalformen

Literale : atomare Formel (Variabeln / Konstanten $(\top, \bot)$)

Negationsnormalform (NNF) : Keine Implikationen $(\Rightarrow)$ und Negationen nur direkt beim Literal $(\neg p)$
z.B. $\neg F \vee G$

Disjunktivenormalform (DNF): Literale $L_{i,j}$
z.B. $(L_{1,1} \wedge L_{1,2} \wedge \dots) \vee (L_{2,1} \wedge L_{2,2} \wedge \dots) \vee (\dots)$

Konjunktivenormalform (KNF): Literale $L_{i,j}$
z.B. $(L_{1,1} \vee L_{1,2} \vee \dots) \wedge (L_{2,1} \vee L_{2,2} \vee \dots) \wedge (\dots)$

(!) DNF und KNF sind immer auch NNF.
DNF und KNF wenn alle Junktoren identisch sind oder nur eine Literale. $(p \vee (q \vee p_1))$ oder (p)

Teilformeln

echte Teilformel
(nur ein Teil der Formel, nicht die Ganze)

p_0	q	p_1	$q \vee p_1$	$p_0 \rightarrow (q \vee p_1)$
0	0	0	0	1
...	...	...	...	...

atomare Formel (Variablen) — unechte Teilformel

Konsequenz

F ist Konsequenz von G, falls F unter jeder Belegung wahr ist, unter der G wahr ist.

z.B. $\forall_B (\hat{B}(G) = \text{true} \Rightarrow B(F) = \text{true})$

Logisch äquivalent

F und G sind logisch äquivalent, wenn G und F unter jeder Belegung denselben Wahrheitswert annehmen.

$\forall_B (\hat{B}(G) = \text{true} \Leftrightarrow \hat{B}(F) = \text{true}) \Leftrightarrow F \equiv G$

Eigenschaften

Gültig / Wahr : Unter einer Belegung wahr $\rightarrow \hat{B}(A) = \text{true}$
Allgemeingültig : Alle Belegungen wahr $\rightarrow \forall \hat{B}(A) = \text{true}$
Unerfüllbar : Keine Belegung wahr $\rightarrow \forall \hat{B}(A) = \text{false}$
Erfüllbar : Mindestens eine Belegung wahr $\rightarrow \exists \hat{B}(A) = \text{true}$
Widerlegbar : Mindestens eine Belegung falsch $\rightarrow \exists \hat{B}(A) = \text{false}$

Umformung

NNF:
1. Implikation eliminieren mit $F \Rightarrow G = \neg F \vee G$
2. Negationen, welche nicht zu einem Literal gehören mit der De Morgan und Doppel Negation Regel eliminieren.

DNF/KNF:
1. Jede Formel in NNF kann mit der Distributivregel wahlweise in KNF oder DNF gebracht werden.

z.B.

$\neg(P \Leftrightarrow Q) \equiv \neg((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P))$ Äquivalenz
$\equiv \neg((\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee P))$ Kontraposition
$\equiv \neg(\neg P \vee Q) \vee \neg(\neg Q \vee P)$ De Morgan
$\equiv (P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge \neg P)$ De Morgan (in DNF)

Formel ist in DNF und NNF. Mit der Distributiv Regel erhält man den KNF.

$\equiv (P \vee (Q \wedge \neg P)) \wedge (\neg Q \vee (Q \wedge \neg P))$ Distributivität
$\equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee \neg P) \wedge (\neg Q \vee Q) \wedge (\neg Q \vee \neg P)$ Distributivität (in KNF)

Belegung

Eine Belegung B ist eine Zuordnung von Variablen zu Wahrheitswerten. $B : \mathbb{V} \rightarrow \{\text{true}, \text{false}\}$

z.B. $(p \vee q) \wedge \neg p$, Belegung $B(p) = \text{true}$, Belegung $B(q) = \text{false}$
↳ $p \vee q = \text{true}$, $\neg p = \text{false}$

Funktion $\hat{B}$ ordnet jeder aussagenlogischen Formel ihren Wahrheitswert bezüglich dessen Belegung B zu.

z.B. Funktion $\hat{B}((p \vee q) \wedge \neg p) = \text{false}$

Für beliebige Variablen v gilt: $\hat{B}(v) = B(v)$

$\hat{B}(\bot)$ = immer false
$\hat{B}(\top)$ = immer true
$\hat{B}(F \wedge G) = \text{and}(\hat{B}(F), \hat{B}(G))$
$\hat{B}(F \vee G) = \text{or}(\hat{B}(F), \hat{B}(G))$
$\hat{B}(\neg F) = \text{not}(\hat{B}(F))$

z.B. Von Belegung $B : \mathbb{V} \rightarrow \{\text{false}, \text{true}\}$ seien folgende Werte bekannt:

$B(p) = B(q) = B(r) = B(s) = \text{true}$
$B(u) = B(v) = \text{false}$

Bestimmung von $\hat{B}$

$p \rightarrow s$: $\hat{B}(p \rightarrow s) = \hat{B}(\neg p \vee s) = \text{or}(\hat{B}(\neg p), \hat{B}(s)) = \text{true}$
$(u \rightarrow r) \wedge s$: $\text{and}((\text{or}(\hat{B}(\neg u), \hat{B}(r)), \hat{B}(s)) = \text{true}$