Integrationsmethoden

Integrationsregeln

Funktion $f(x)$ und $g(x)$, Stammfunktion $F(x)$ und $G(x)$, Konstante c

$c \cdot F(x)$ = Stammfunktion von $c \cdot f(x)$

$$\int_a^b c \cdot f(x)\,\partial x = c \int_a^b f(x)\,\partial x$$

$F(x) + G(x)$ = Stammfunktion von $f(x) + g(x)$

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,\partial x = \int_a^b f(x)\partial x + \int_a^b g(x)\partial x$$

Problem: Bis anhin keine Formel für Produkte und Quotienten

$$\int_a^b (f(x) \cdot g(x))\,\partial x \neq \left(\int_a^b f(x)\partial x\right) \cdot \left(\int_a^b g(x)\partial x\right), \quad \int_a^b \frac{f(x)}{g(x)}\,\partial x \neq \frac{\int_a^b f(x)\,\partial x}{\int_a^b g(x)\,\partial x}$$

Einsatzmuster

Substitution: $\int g(f(x)) \cdot f'(x)\,\partial x$, z.B. $\int e^{\cos(x)} \cdot \sin(x)$

Partielle Integration: $\int u \cdot v$, z.B. $\int x \cdot e^x\,\partial x$

u: nach Ableitung einfacher

v: nach Integration nicht komplizierter

Partialbruchzerlegung: $\frac{\text{Polynom}}{\text{Polynom}}$, z.B. $\int \frac{4x^2+x+17}{4x^3+6x+3}\,\partial x$

Integration durch Substitution

1. Substitutionsgleichung für x: $u = g(x)$
2. Substitutionsgleichung für ∂x: $\frac{\partial u}{\partial x} = g'(x) \Rightarrow \partial x = \frac{\partial u}{g'(x)}$
3. Integralsubstitution:
   - unbestimmt: ∂x und u einsetzen, Bruch kürzen
   - bestimmt: ∂x und u einsetzen, Grenzen mit u ergänzen, Bruch kürzen
4. Integration: Stammfunktion und ausrechnen (bestimmt)
5. Rücksubstitution (unbestimmt): u einsetzen

ⓘ Funktion $u(x)$ ist linear: $\int f(ax+b)\,\partial x = \frac{1}{a} \cdot F(ax+b)$

Integral Bemerkungen

$$0 = \int_a^a f(x)\,\partial x, \quad b<a: \int_a^b f(x)\,\partial x = -\int_b^a f(x)\,\partial x, \quad b \in [a,c]: \int_a^c f(x)\,\partial x = \int_a^b f(x)\,\partial x + \int_b^c f(x)\,\partial x$$

z.B. Unbestimmt: $\int \cos(x^2) \cdot x\,\partial x$

1. $u = x^2$
2. $\frac{\partial u}{\partial x} = u'(x) = 2x \Rightarrow \partial x = \frac{\partial u}{2x}$
3. $\int \cos(x^2) \cdot x\,\partial x = \int \cos(u) \cdot \cancel{x}\,\frac{\partial u}{2\cancel{x}} = \int \frac{1}{2} \cdot \cos(u)\,\partial u$
4. $\int \frac{1}{2} \cdot \cos(u)\,\partial u = \frac{1}{2} \int \cos(u)\,\partial u = \frac{1}{2}\sin(u) + c$ — Stammfunktion
5. $\frac{1}{2}\sin(u) + c = \underline{\underline{\frac{1}{2}\sin(x^2) + c}}$

z.B. Bestimmt: $\int_0^{\sqrt{\pi/2}} \cos(x^2) \cdot x\,\partial x$

1. $u = x^2$
2. $\frac{\partial u}{\partial x} = u'(x) = 2x \Rightarrow \partial x = \frac{\partial u}{2x}$
3. $\int_0^{\sqrt{\pi/2}} \cos(x^2) \cdot x\,\partial x = \int_{0^2}^{(\sqrt{\pi/2})^2} \cos(u) \cdot \cancel{x}\,\frac{\partial u}{2\cancel{x}} = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}\cos(u)\,\partial u$ ($^2 \longrightarrow$ wegen u)
4. $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}\cos(u)\,\partial u = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \cos(u)\,\partial u = \frac{1}{2}\left[\sin(u)\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}\left[1-0\right]_0^{\pi/2} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$

Stammfunktion; für u einsetzen; für u einsetzen

z.B. Linear: $\int \cos(5x+7)\,\partial x$

$f(u) = \cos(u) \longrightarrow F(u) = \sin(u)$

$a = 5$, $b = 7$

$$\int \cos(5x+7)\,\partial x = \underline{\underline{\frac{1}{5} \cdot \sin(5x+7)}}$$

Partielle Integration

⚠ Darf kein Bruch sein: $\int \frac{1+2x}{e^x}\,dx \to \int (1+2x)\cdot e^{-x}$

Unbestimmt: $\int u(x)\cdot v'(x)\,dx = u(x)\cdot v(x) - \int u'(x)\cdot v(x)\,dx$

z.B. Einmalige Anwendung: $\int (t-1)\cdot \sin(t)\,dt$

$u(t) = (t-1) \qquad v'(t) = \sin(t)$

$u'(t) = 1 \qquad v(t) = -\cos(t)$

$$\int (t-1)\cdot\sin(t)\,dt = (t-1)\cdot(-\cos(t)) - \int 1\cdot(-\cos(t))\,dt$$
$$= (t-1)\cdot(-\cos(t)) + \int \cos(t)\,dt$$
$$= \underline{\underline{(t-1)\cdot(-\cos(t)) + \sin(t) + c}}$$

z.B. Mehrfache Anwendung: $\int x^2\cdot e^{-x}\,dx$

$u(x) = x^2 \qquad v'(x) = e^{-x}$

$u'(x) = 2x \qquad v(x) = -e^{-x}$

$$\int x^2\cdot e^{-x}\,dx = x^2\cdot -e^{-x} - 2\int x\cdot(-e^{-x})\,dx$$

$u(x) = x \qquad v'(x) = -e^{-x}$

$u'(x) = 1 \qquad v(x) = e^{-x}$

$$\int x\cdot(-e^{-x})\,dx = x\cdot e^{-x} - \int 1\cdot e^{-x}\,dx = x\cdot e^{-x} - \int e^{-x}\,dx = x\cdot e^{-x} + e^{-x} + c$$

Einsetzen: $x^2\cdot -e^{-x} - 2(x\cdot e^{-x} + e^{-x} + c) = x^2\cdot -e^{-x} - 2x\cdot e^{-x} - 2e^{-x} + c$
$$= (-x^2 - 2x - 2)\,e^{-x} + c$$
$$= \underline{\underline{-(x^2+2x+2)\cdot e^{-x} + c}}$$

z.B. Versteckt: $\int \ln(x)\,dx = \int \ln(x)\cdot 1\,dx$

$u(x) = \ln(x) \qquad v'(x) = 1$

$u'(x) = \frac{1}{x} \qquad v(x) = x$

ln(x) ableiten, weil Stammfunktion für v schwerer ist.

$$\int \ln(x)\,dx = \ln(x)\cdot x - \int \frac{1}{x}\cdot x\,dx = \ln(x)\cdot x - \int 1\,dx = \underline{\underline{\ln(x)\cdot x - x + c}}$$

z.B. Rückführung: $\int e^x\cdot\cos(x)\,dx$

$u(x) = e^x \qquad v'(x) = \cos(x)$

$u'(x) = e^x \qquad v(x) = \sin(x)$

$$\int e^x\cdot\cos(x)\,dx = e^x\cdot\sin(x) - \int e^x\cdot\sin(x)\,dx$$

$u(x) = e^x \qquad v'(x) = \sin(x)$

$u'(x) = e^x \qquad v(x) = -\cos(x)$

$$\int e^x\cdot\sin(x)\,dx = e^x\cdot(-\cos(x)) - \int e^x\cdot(-\cos(x))\,dx = e^x\cdot(-\cos(x)) + \int e^x\cdot\cos(x)\,dx$$

Einsetzen: $e^x\cdot\sin(x) - \left(e^x\cdot(-\cos(x)) + \int e^x\cdot\cos(x)\,dx\right) = e^x\cdot\sin(x) + e^x\cdot\cos(x) - \int e^x\cdot\cos(x)\,dx$

Gleichung: $\int e^x\cdot\cos(x)\,dx = e^x\cdot\sin(x) + e^x\cdot\cos(x) - \int e^x\cdot\cos(x)\,dx \quad \Big| + \int e^x\cdot\cos(x)\,dx$

$$2\int e^x\cdot\cos(x)\,dx = e^x\cdot\sin(x) + e^x\cdot\cos(x) + c \quad |:2$$

$$\int e^x\cdot\cos(x)\,dx = \frac{e^x\cdot\sin(x) + e^x\cdot\cos(x)}{2} + c = \underline{\underline{\frac{e^x(\sin(x)+\cos(x))}{2} + c}}$$

Bestimmt: $\int_a^b u(x)\cdot v'(x)\,dx = \left[u(x)\cdot v(x)\right]_a^b - \int_a^b u'(x)\,v(x)\,dx$

z.B. Einmalige Anwendung: $\int_1^e x\cdot\ln(x)\,dx$

$u(x) = \ln(x) \qquad v'(x) = x$

$u'(x) = \frac{1}{x} \qquad v(x) = \frac{1}{2}x^2$

ln(x) ableiten, weil Stammfunktion für v schwerer ist.

$$\int_1^e x\cdot\ln(x)\,dx = \left[\ln(x)\cdot\tfrac{1}{2}x^2\right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{2}x^2\,dx$$
$$= \left[\ln(x)\cdot\tfrac{1}{2}x^2\right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{2\cancel{x}}\cdot x^{\cancel{2}}\,dx = \left[\ln(x)\cdot\tfrac{1}{2}x^2\right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{2}\cdot x\,dx$$

Stammfunktion

$$= \left[\ln(x)\cdot\tfrac{1}{2}x^2\right]_1^e - \left[\tfrac{1}{4}x^2\right]_1^e$$

$$= \left(\left(\ln(e)\cdot\tfrac{1}{2}e^2\right) - \left(\ln(1)\cdot\tfrac{1}{2}\right)\right) - \left(\left(\tfrac{1}{4}\cdot e^2\right) - \tfrac{1}{4}\right) = \underline{\underline{2.09726}}$$

Integration durch Partialbruchzerlegung

1. Nullstellen des Nenners $h(x)$ mit Multiplizitäten bestimmen
   i) Nullstellen erraten $(-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3)$
   ii) Hornerschema
   iii) Nullstellen des Polynoms bestimmen (einfache, doppelte, mehrfache)
2. Jede Nullstellen eine Summe von Brüchen zuordnen

   x_1 ist einfache Nullstelle : $\frac{A}{x-x_1}$

   x_1 ist doppelte Nullstelle : $\frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{(x-x_1)^2}$

   x_1 ist r-fache Nullstelle : $\frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{(x-x_1)^2} + \dots + \frac{A_r}{(x-x_1)^r}$

   ! $A_1, A_2, \dots, A_r$ sind (zunächst noch) reelle Konstanten
3. $f(x)$ mit der Summe aller Partialbrüche gleichsetzen
4. Bestimmung der Konstanten $A, A_1, A_2, \dots, A_r$
   i) Alle Partialbrüche auf einen gemeinsamen Nenner bringen
   ii) Lineares Gleichungssystem durch einsetzen von x Werten (Nullstellen)
   iii) Gleichungssystem lösen
5. Integration der Partialbrüche

   ① $\int \frac{1}{x-x_0}\,dx = \ln|x-x_0| + C$

   ② $\int \frac{1}{(x-x_0)^r}\,dx = \frac{1}{(1-r)(x-x_0)^{r-1}} + C$

z. B. Zählergrad ⩾ Nennergrad: $\int \frac{2x^3-14x^2+14x+30}{x^2-4}\,dx$

Zählergrad muss < Nennergrad sein für Partialbruchzerlegung

$\frac{2x^3}{x^2} = 2x \qquad \frac{-14x^2}{x^2} = -14$

Polynomdivision : $(2x^3-14x^2+14x+30) : (x^2-4) = 2x - 14 + \underbrace{\frac{22x-26}{x^2-4}}_{\text{Zählergrad < Nennergrad}}$ — $(x+2)(x-2)$

$-(2x^3 - 8x) \longrightarrow 2x(x^2-4) = 2x^3 - 8x$

$\underline{-2x^3 + 8x}$

$-14x^2 + 22x + 30 \longrightarrow$ "x^2 mal was gibt $-14x^2$?" (-14)

$-(-14x^2 + 56) \longrightarrow -14(x^2-4) = -14x^2 + 56$

$\underline{14x^2 - 56}$

$22x - 26 \longrightarrow$ Ende weil: "x^2 mal was gibt $22x$?" (nicht möglich)

1. Nullstellen vom Nenner: $x_1 = 2$, $x_2 = -2$
2. $x_1 = \frac{A}{x-2}$, $x_2 = \frac{B}{x+2}$
3. $f(x) = \frac{22x-26}{x^2-4} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2}$
4. i) $\frac{22x-26}{x^2-4} = \frac{A(x+2) + B(x-2)}{(x+2)(x-2)}$

   $22x - 26 = A(x+2) + B(x-2)$

   ii) $x = 2$: $22 \cdot 2 - 26 = A(2+2) + \underbrace{B(2-2)}_{0}$

   $18 = 4A \quad |:4$

   $4.5 = A$

   $x = -2$: $22 \cdot -2 - 26 = \underbrace{A(-2+2)}_{0} + B(-2-2)$

   $-70 = -4B \quad |:-4$

   $17.5 = B$

   iii) $A = 4.5$, $B = 17.5 \longrightarrow f(x) = \frac{4.5}{x-2} + \frac{17.5}{x+2}$

5. $\int f(x)\,dx = \int \frac{2x^3-14x^2+14x+30}{x^2-4}\,dx = \int 2x - 14 + \frac{4.5}{x-2} + \frac{17.5}{x+2}$

   $= \int 2x - 14 + 4.5\int \frac{1}{x-2} + 17.5\int \frac{1}{x+2}$

   $\frac{2}{2}x^2 - 14x = x^2 - 14x \longleftarrow$

   $= x^2 - 14x + \underbrace{4.5\ln|x-2|}_{①} + \underbrace{17.5\ln|x+2|}_{①} + C$

z.B. Zählergrad < Nennergrad : $\int \frac{x+1}{x^3-5x^2+8x-4}$

1. i) $x_1 = 1$

ii)
$$\begin{array}{c|cccc} & x^3 & x^2 & x & 1 \\ & 1 & -5 & 8 & -4 \\ x_1 = 1 & & 1 & -4 & 4 \\ \hline & 1 & -4 & 4 & 0 \end{array}$$

$p(x) = x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$

iii) $x_1 = 1$, $\underbrace{x_2 = 2,\ x_3 = 2}_{\text{doppelte Nullstelle}}$

2. $x_1 = \frac{A}{x-1}$, $x_2 = \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2}$

3. $f(x) = \frac{x+1}{x^3-5x^2+8x-4} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2}$

4. i) $\frac{x+1}{x^3-5x^2+8x-4} = \frac{A(x-2)^2 + B(x-1)(x-2) + C(x-1)}{(x-1)(x-2)^2}$

$x+1 = A(x-2)^2 + B(x-1)(x-2) + C(x-1)$

ii) $x = 1$: $1+1 = A(1-2)^2 + \underbrace{B(1-1)(1-2)}_{0} + \underbrace{C(1-1)}_{0}$

$2 = A$

$x = 2$: $2+1 = \underbrace{A(2-2)^2}_{0} + \underbrace{B(2-1)(2-2)}_{0} + C(2-1)$

$3 = C$

$x = 0$: $0+1 = A(0-2)^2 + B(0-1)(0-2) + C(0-1)$

$1 = 4A + 2B - C \quad | +C, -4A$

$1 + C - 4A = 2B \quad | :2$

$\frac{1+C-4A}{2} = B$

$\frac{1+3-4\cdot 2}{2} = \frac{4-8}{2} = -2 = B$

iii) $A = 2$, $B = -2$, $C = 3$ $\rightarrow$ $f(x) = \frac{2}{x-1} + \frac{-2}{x-2} + \frac{3}{(x-2)^2}$

5. $\int f(x)\,dx = \int \frac{x+1}{x^3-5x^2+8x-4}\,dx = \int \left(\frac{2}{x-1} + \frac{-2}{x-2} + \frac{3}{(x-2)^2} \right) dx$

$= 2\int \frac{1}{x-1}\,dx - 2\int \frac{1}{x-2} + 3\int \frac{1}{(x-2)^2}\,dx$

$\frac{1}{(1-2)\cdot(x-2)^{2-1}} = \frac{1}{-1\,(x-2)^1} = -\frac{1}{x-2}$

$= \underbrace{2\ln|x-1|}_{①} - \underbrace{2\ln|x-2|}_{①} - \underbrace{3\,\frac{1}{x-2}}_{②\text{ mit } r=2} + C$

Vermischte Methoden

z.B. $\int 3x \cdot \sin(2x)\,dx$

Partielle Integration:

$u(x) = 3x \qquad v'(x) = \sin(2x)$

$u'(x) = 3 \qquad v(x) = -\frac{1}{2}\cos(2x)$

Integration durch Substitution:

1. $u = 2x$
2. $dx = \frac{1}{2}\cdot du$
3. $\int \sin(u) \cdot \frac{1}{2} \cdot du$

   $\frac{1}{2}\int \sin(u)\cdot du$
4. $-\frac{1}{2}\cdot\cos(u) + c$
5. $-\frac{1}{2}\cdot\cos(2x) + c$

$= 3x \cdot -\frac{1}{2}\cos(2x) - \int 3 \cdot -\frac{1}{2}\cos(2x)\,dx$

$= -\frac{3}{2}x\cdot\cos(2x) + \frac{3}{2}\int \cos(2x)\,dx$

Integration durch Substitution

1. $u(x) = 2x$
2. $dx = \frac{1}{2}\cdot du$
3. $\int \cos(u)\cdot\frac{1}{2}\cdot du$

   $\frac{1}{2}\int \cos(u)\cdot du$
4. $\frac{1}{2}\sin(u) + C$
5. $\frac{1}{2}\sin(2x) + C$

$= -\frac{3}{2}x\cdot\cos(2x) + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sin(2x) + C$

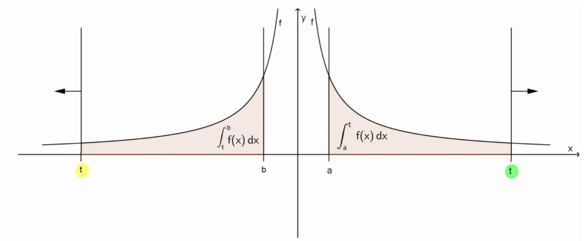
$= -\frac{3}{2}x\cdot\cos(2x) + \frac{3}{4}\cdot\sin(2x) + c$

Uneigentliche Integrale

Eigenschaft, dass Integrationsbereich ∞ gross ist oder eine Polstelle enthält.

Uneigentlicher Integrationsbereich ⓘ Existiert nur wenn es ein Grenzwert gibt

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,\partial x = \lim_{t\to-\infty}\int_{t}^{b} f(x)\,\partial x \qquad \int_{a}^{\infty} f(x)\,\partial x = \lim_{t\to\infty}\int_{a}^{t} f(x)\,\partial x$$



$$\int x^k\,\partial x = \frac{1}{x^{k+1}}\cdot x^{k+1} = \frac{x^{k+1}}{k+1}$$

z.B.

Obergrenze: $\int_{1}^{\infty}\frac{1}{x^2}\,\partial x = \int_{1}^{t}\frac{1}{x^2}\,\partial x = \int_{1}^{t} x^{-2}\,\partial x = \left[\frac{x^{-1}}{-1}\right]_1^t = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^t = -\frac{1}{t} + 1 \xrightarrow[t\to\infty]{} \underline{\underline{1}}$ ($\frac{1}{t}$: 0)

Untergrenze: $\int_{-\infty}^{0} e^x\,\partial x = \int_{t}^{0} e^x\,\partial x = \left[e^x\right]_t^0 = 1 - e^t \xrightarrow[t\to-\infty]{} \underline{\underline{1}}$ (e^t: 0)

Kein Integral: $\int_{1}^{\infty}\frac{1}{x}\,\partial x = \int_{1}^{t}\frac{1}{x}\,\partial x = \left[\ln|x|\right]_1^t = \ln(t) - \ln(1) \xrightarrow[t\to\infty]{} \infty$ ($\ln(t)$: ∞, $\ln(1)$: 0) Integral existiert nicht

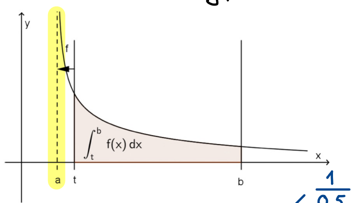
ⓘ $\int_{1}^{t} e^{-cx}\,\partial x = -\frac{1}{c}\cdot\left[e^{-cx}\right]_1^t$

Integrale über Polstellen der Funktion ⓘ Existiert nur wenn es ein Grenzwert gibt

Funktion f ist auf Intervall (a,b] definiert und stetig, aber $x \to a$ strebt gegen ∞

$$\int_{a}^{b} f(x)\,\partial x = \lim_{t\to a}\int_{t}^{b} f(x)\,\partial x$$

a: wenn in Funktion eingesetz → undefiniert



z.B. Integral: $\int_{0}^{1}\frac{1}{\sqrt{x}}\,\partial x = \int_{t}^{1}\frac{1}{\sqrt{x}}\,\partial x = \int_{t}^{1} x^{-0.5}\,\partial x = \left[2x^{0.5}\right]_t^1 = 2\sqrt{1} - 2\sqrt{t} \xrightarrow[t\to 0]{} \underline{\underline{2}}$ ($2x^{0.5}$: $\frac{1}{0.5}x^{0.5}$; $\sqrt{t}$: 0)

Kein Integral: $\int_{1}^{2}\frac{1}{(x-2)^2}\,\partial x = \int_{1}^{t}(x-2)^{-2}\,\partial x = \left[-(x-2)^{-1}\right]_1^t = -\left[\frac{1}{x-2}\right]_1^t = -\left(\frac{1}{t-2} - \frac{1}{-1}\right) = -\frac{1}{t-2} + 1 \xrightarrow[t\to 2]{} \infty$ ($\frac{1}{0} = \infty$)

Integral existiert nicht

c wählen damit Gleichung erfüllt

z.B. $f(x) = e^{-ax}$ für Parameter $a > 0$. Wie c wählen damit: $\int_{c}^{\infty} e^{-ax}\,\partial x = 1$ erfüllt?

$$-\frac{1}{a}\left[e^{-ax}\right]_c^t = -\frac{1}{a}\left(e^{-at} - e^{-ac}\right) \xrightarrow[t\to\infty]{} \frac{1}{a}e^{-ac}$$

$$\frac{1}{a}e^{-ac} = 1 \quad | \cdot a$$

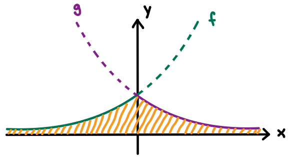
$$e^{-ac} = a \quad | \ln$$

$$-ac = \ln(a) \quad | : -a$$

$$\underline{\underline{c = -\frac{\ln(a)}{a}}}$$

Skizze und Fläche

z.B. $f(x) = e^{ax}$ und $g(x) = e^{-bx}$ für Parameter $a, b > 0$. Flächeninhalt von allen Punkten oberhalb x-Achse und unterhalb von Graphen $f(x)$ und $g(x)$.



f: $\int_{-\infty}^{0} e^{ax}\,\partial x$, F: $\frac{1}{a}\left[e^{ax}\right]_t^0 = \frac{1}{a}\cdot\left(e^0 - e^{at}\right) \xrightarrow[t\to-\infty]{} \frac{1}{a}$

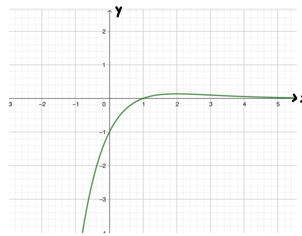
g: $\int_{0}^{\infty} e^{-bx}\,\partial x$, G: $-\frac{1}{b}\left[e^{-bx}\right]_0^t = -\frac{1}{b}\cdot\left(e^{-bt} - e^0\right) \xrightarrow[t\to\infty]{} \frac{1}{b}$

$$\Big\} \; \underline{\underline{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}}$$

Fläche mit Nullstelle

z.B. Fläche, welche Graph von $f(x) = (x-1)\cdot e^{-x}$ mit x-Achse über Intervall $[0, \infty]$ einschliesst

$f(x)$ hat bei $x = 1$ Nullstelle, Fläche somit: $\left|\int_{0}^{1} f(x)\,\partial x\right| + \left|\int_{1}^{\infty} f(x)\,\partial x\right|$



Stammfunktion f(x) mit partielle Integration:

$u(x) = x - 1$ $\quad v'(x) = e^{-x}$

$u'(x) = 1$ $\quad v(x) = -e^{-x}$

$$F(x) = \int (x-1)\cdot e^{-x}\,\partial x = (x-1)\cdot -e^{-x} - \int 1\cdot -e^{-x} = -x\cdot e^{-x}$$

$$\left|\int_{0}^{1} f(x)\,\partial x\right| = \left|F(1) - F(0)\right| = \left|-e^{-1} - 0\right| = e^{-1}$$

$$\left|\int_{1}^{\infty} f(x)\,\partial x\right| = \lim_{t\to\infty} F(t) - F(1) = \lim_{t\to\infty} -t\cdot e^{-t} + e^{-1} = 0 + e^{-1} = e^{-1}$$

$$\Big\} \; e^{-1} + e^{-1} = \underline{\underline{2e^{-1}}}$$

Differenzialgleichungen

Drückt eine Beziehung zwischen einer Grösse und ihrer Veränderung aus
- Ordnung Differenzialgleichung → Ordnung höchster Ableitung
- Allgemeine Lösung n-ter Ordnung nie eindeutig bestimmt → noch n unabhängige Parameter
- Partikuläre Lösung erfordert zusätzliche Werte:
  - Anfangsbedingungen: $y(x_0), y'(x_0), \dots y^{(n-1)}(x_0)$
  - Randbedingungen: $y(x_1), y(x_2), \dots, y(x_n)$

Gewöhnliche Differenzialgleichung 1 Ordnung

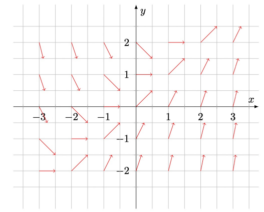
Durch gesuchte Funktion kann genau (nur) 1 Variable berechnet werden:
- $y' = F(x,y)$
- Lösungen sind Funktionen und als Graphen darstellbar

Funktion f ist Lösung von Differenzialgleichung → für jeden Punkt (x_0, y_0) auf Graph gilt:
- $f'(x_0) = F(x_0, y_0)$
- Lösungskurve geht durch (x_0, y_0) → Steigung (x_0, y_0) an diesem Punkt

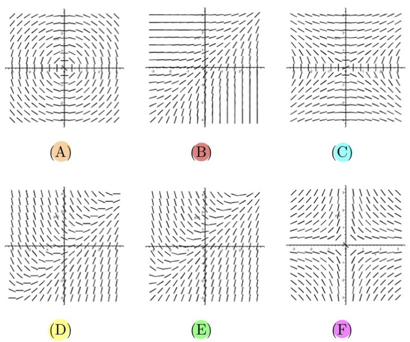
z.B. $y' = x - y + 1$

$f'(x_0, y_0)$	$x_0 = -3$	$x_0 = -2$	$x_0 = -1$	$x_0 = 0$	$x_0 = 1$	$x_0 = 2$	$x_0 = 3$
$y_0 = 2$	-4	-3	-2	-1	0	1	2
$y_0 = 1$	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y_0 = 0$	-2	-1	0	1	2	3	4
$y_0 = -1$	-1	0	1	2	3	4	5
$y_0 = -2$	0	1	2	3	4	5	6

Skizze des Richtungsfeldes:



z.B.
(a) $y' = x - y$
(b) $y' = x - y + 1$
(c) $2yy' = x$, $y' = \frac{x}{2y}$
(d) $yy' + x = 0$, $y' = -\frac{x}{y}$
(e) $y'x + y = 0$, $y' = -\frac{y}{x}$
(f) $y' = e^{x-y}$



Autonome Differenzialgleichung

Lässt sich in folgender Form schreiben: $y' = f(y)$ (ist separierbar)

z.B. $y' = y^2 + 6$ ✓

$y' = y^2 \sqrt{1 - \sin(y)} - \ln(y)$ ✓

$y' = x + y$ ⊗ (x kommt vor)

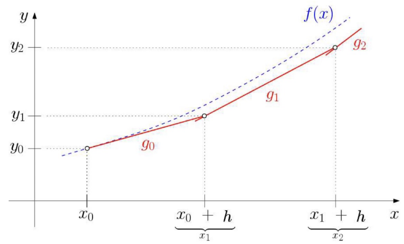
$y' = \frac{y}{x}$ ⊗ (x kommt vor)

Numerischer Lösungsansatz Euler-Schritte

An Punkt (x_0, y_0) starten und Tangente folgen

Formel: $x_{n+1} = x_n + h$

$y_{n+1} = y_n + h \cdot F(x_n, y_n)$



z.B. $y' = \underbrace{x + y}_{F(x,y)}$, $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, $h = 1$

Steigung Gerade	Berechnung	Beispiel
$g_0: m_0 = F(x_0, y_0) = x_0 + y_0$	$x_1 = x_0 + h$ $y_1 = y_0 + h \cdot F(x_0, y_0)$	$= 0 + 1 = 1$ $= 1 + 1 \cdot (0 + 1) = 2$
$g_1: m_1 = F(x_1, y_1) = x_1 + y_1$	$x_2 = x_1 + h$ $y_2 = y_1 + h \cdot F(x_1, y_1)$	$= 1 + 1 = 2$ $= 2 + 1 \cdot (1 + 2) = 5$
$g_2: m_2 = F(x_2, y_2) = x_2 + y_2$	$x_3 = x_2 + h$ $y_3 = y_2 + h \cdot F(x_2, y_2)$	$= 2 + 1 = 3$ $= 5 + 1(2 + 5) = 12$
etc	etc	etc

Die obigen Operationen nennt man *Euler-Schritte*. Der Abstand h zwischen den betrachteten x-Werten heisst *Schrittweite*.

z.B. $y' = 2^{x-y-2} + 0.5$, Anfangsbedingung $y(0) = 1$, 2 Euler-Schritte mit gleicher Schrittweite um Funktionswert bei $x = 0.8$ zu erhalten

$F(x,y) = 2^{x-y-2} + 0.5$, $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, $h = 0.4$

$x_1 = 0 + 0.4 = 0.4$

$y_1 = 1 + 0.4(2^{0-1-2} + 0.5) = 1.25$

$x_2 = 0.4 + 0.4 = 0.8$

$y_2 = 1.25 + 0.4(2^{0.4-1.25-2} + 0.5) = 1.51$

Separierbare Differenzialgleichung

Lässt sich in folgender Form schreiben: $y' = f(x) \cdot g(y)$

z.B. $y' = (x^2 + \sin(x)) \cdot (e^y - y + 7)$ ✓

$y' = x - y + 1$ ⊗ (keine Multiplikation)

Lösungsschritte:

1. $y' = \frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y)$
2. Trennung der Variablen: $\frac{dy}{g(y)} = f(x) \cdot dx$
3. Integration auf beiden Seiten der Gleichung (falls möglich): $\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\,dx$
4. Auflösen nach y (falls möglich)

z.B. $y' = \cos(x) \cdot (1+2y)$

1. $y' = \frac{dy}{dx} = \cos(x) \cdot (1+2y)$
2. $\frac{dy}{1+2y} = \cos(x)\,dx$
3. $\int \frac{1}{1+2y}\,dy = \int \cos(x)\,dx$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\ln|1+2y| + c = \sin(x) + c$

Substitution: $\int \frac{1}{1+2y}\,dy = \int (1+2y)^{-1}\,dy$

1. $u = 1+2y$
2. $\frac{du}{dy} = u'(x) = 2 \Rightarrow \frac{du}{2}$
3. $\int (1+2y)^{-1}\,dy = \int u^{-1}\frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int u^{-1}\,du$
4. $\frac{1}{2}\int u^{-1}\,du = \frac{1}{2}\ln|u| + c$

Stammfunktion

5. $\frac{1}{2}\ln|u| + c = \frac{1}{2}\ln|1+2y| + c$

4. $\ln|1+2y| + 2c_1 = 2\sin(x) + 2c_2 \quad |-2c, e$ $\quad 2c_1 - 2c_2 = c$

$|1+2y| = e^{2\sin(x)+c} = e^c \cdot e^{2\sin(x)} \quad | \,|\,|$

$1+2y = \underbrace{\pm e^c}_{c} \cdot e^{2\sin(x)} \quad |-1, :2$

$y = \frac{c \cdot e^{2\sin(x)}}{2} - \frac{1}{2} = e^{2\sin(x)} \cdot \frac{c}{2} - \frac{1}{2} = e^{2\sin(x)} \cdot c - \frac{1}{2}$ $\quad \frac{c}{2} = c$

z.B. $y' = k \cdot y$

1. $y' = \frac{dy}{dx} = k \cdot y$
2. $\frac{dy}{y} = k \cdot dx$
3. $\int \frac{dy}{y} = \int k\,dx \Rightarrow \ln|y| = kx + C$ $\quad$ Konstante $= 1 \cdot x^0 \cdot k$
4. $|y| = e^{kx+C} = e^C \cdot e^{kx} \quad |\,|\,| \to \pm$

$y = \underbrace{\pm e^C}_{C} \cdot e^{kx} = Ce^{kx}$

z.B. $y' \cdot y^2 = \sin(x)$

1. $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\sin(x)}{y^2}$
2. $y^2 \cdot dy = \sin(x) \cdot dx$
3. $\int y^2\,dy = \int \sin(x)\,dx \Rightarrow \frac{1}{3}y^3 = -\cos(x) + C$
4. $y^3 = 3(-\cos(x) + C) \quad |\sqrt[3]{\ }$

$y = (-3\cos(x) + 3C)^{\frac{1}{3}}$

z.B. $x + y \cdot y' = 0$, mit Anfangsbedingung $y(3) = -4$

1. $y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$
2. $y \cdot dy = -x\,dx$
3. $\int y\,dy = -\int x\,dx \Rightarrow \frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C$

(Kreisgleichung) $\Rightarrow y^2 = -x^2 + 2C$

4. $y = \pm\sqrt{-x^2 + 2C}$ (keine Funktion)

Einbezug Anfangsbedingung:

$y(3) = -4 \longrightarrow$ unterer Ast $\longrightarrow y = -\sqrt{-x^2 + 2C}$

einsetzen $x = 3$, $y = -4$ liefert: $-4 = -\sqrt{-3^2 + 2C} \quad |^2$

$16 = -9 + 2C \quad |+9, :2$

$12.5 = C$

$\Rightarrow y = -\sqrt{-x^2 + 25}$

z.B. $t\dot{y}y = 1 - t^2$

1. $\dot{y} = \frac{dy}{dt} = \frac{1-t^2}{t} \cdot \frac{1}{y}$
2. $y\,dy = \frac{1-t^2}{t}\,dt$
3. $\int y\,dy = \int \frac{1-t^2}{t}\,dt, \quad \int y\,dy = \overbrace{\int \frac{1}{t}\,dt - \int t\,dt}^{\text{Integrationsregel } F(x)+G(x)}$

$\Rightarrow \frac{y^2}{2} = \ln|t| - \frac{t^2}{2} + c$

4. $y = \pm\sqrt{2\ln|t| - t^2 + 2c}$

z.B. $x^2 y' + y = 0$

1. $y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x^2}$
2. $\frac{dy}{y} = -x^{-2}\,dx$
3. $\int \frac{1}{y}\,dy = -\int x^{-2}\,dx \Rightarrow \ln|y| = x^{-1} + c$
4. $y = \underbrace{\pm e^c}_{c} \cdot e^{1/x} = c\,e^{1/x}$

Lineare Differenzialgleichung

Lässt sich in folgender Form schreiben: $y' + f(x) \cdot y = g(x)$

- f und g Funktionen von y
- $g(x)$ = Störfunktion

(!) y und y' müssen in 1. Potenz sein, $f(x)$ und $g(x)$ egal

Homogen: Störglied $g(x) = 0 \rightarrow y_0' + f(x) \cdot y_0 = 0$

Inhomogen: Störglied $g(x) \neq 0 \rightarrow y' + f(x) \cdot y = g(x)$

z.B. $y' = xy \Rightarrow y' - x \cdot y = 0$ ✓

$xy' + 2y = e^x \Rightarrow y + \frac{2}{x} y = \frac{e^x}{x}$ ✓

$y' = (\tan(x) \cdot y) + 2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x) \Rightarrow y' - (\tan(x) \cdot y) = 2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)$ ✓

$y' = 1 - y^2$ ⊗ (y wird quadriert)

$yy' + x = 0$ ⊗ (Produkt von y und y')

Lösungsschritte:

1. Vergleichen mit Form $y' + f(x) \cdot y = g(x)$ und $f(x)$, $g(x)$ bestimmen
2. Stammfunktion $F(x)$ von $f(x)$ bestimmen
3. Homogene Lösung mit Formel $y_0 = C \cdot e^{-F(x)}$ bestimmen
4. C durch noch zu bestimmende Funktion $K(x)$ ersetzen: $y = K(x) \cdot e^{-F(x)}$
5. Funktion $K(x)$ mit Formel: $K(x) = \int g(x) \cdot e^{F(x)} \, dx$ bestimmen (C nicht vergessen)
6. $K(x)$ in Schritt 4 einsetzen

Homogen nur Schritt 1-3

z.B. Inhomogen: $y' + \frac{y}{1+x} = e^{2x}$, für $x > 0$

1. $f(x) = \frac{1}{1+x}$, $g(x) = e^{2x}$
2. $F(x) = \ln|1+x| = \ln(1+x)$ weil $x > 0$
3. $y_0 = C \cdot e^{-\ln(1+x)} = C \cdot \frac{1}{e^{\ln(1+x)}} = \frac{C}{(1+x)}$
4. $y = K(x) \cdot \frac{1}{1+x}$
5. $K(x) = \int e^{2x} \cdot e^{\ln(1+x)} dx = \int e^{2x} \cdot (1+x) \, dx$

Partielle Integration: $u(x) = 1+x$ $\quad v'(x) = e^{2x}$

$u'(x) = 1$ $\quad v(x) = \frac{1}{2} e^{2x}$

$$= (1+x)\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right) - \int 1 \cdot \left(\frac{1}{2}e^{2x}\right) dx$$

$$= (1+x)\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right) - \frac{1}{2}\int e^{2x} \, dx$$

$$= \frac{e^{2x}}{2} + \frac{x \cdot e^{2x}}{2} - \frac{1}{2} \int e^{2x} \, dx$$

$$= \frac{e^{2x}}{2} + \frac{x \cdot e^{2x}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{2x} + c$$

$$= \frac{1+x}{2} e^{2x} - \frac{1}{4} \cdot e^{2x} + c$$

6. $y = \left(\frac{1+x}{2} e^{2x} - \frac{1}{4} \cdot e^{2x} + c\right) \cdot \frac{1}{1+x} = \frac{\cancel{(1+x)} \cdot e^{2x}}{2\cancel{(1+x)}} - \frac{e^{2x}}{4(1+x)} + \frac{c}{1+x}$

$$= \frac{1}{2} e^{2x} - \frac{e^{2x}}{4(1+x)} + \frac{c}{1+x} = \frac{2e^{2x} + 2xe^{2x} - e^{2x} + 4c}{4+4x} = \frac{e^{2x} + 2xe^{2x} + 4c}{4+4x}$$

z.B. Inhomogen: $y' + \frac{y}{x} = \cos(x)$ für $x > 0$

1. $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = \cos(x)$
2. $F(x) = \ln|x| = \ln(x)$ weil $x > 0$
3. $y_0 = C \cdot e^{-\ln(x)} = \frac{C}{e^{\ln(x)}} = \frac{C}{x}$ $\quad e^{-x} = \frac{1}{e^x}$
4. $y = \frac{K(x)}{x}$ $\quad e^{\ln(x)} = x$
5. $K(x) = \int \cos(x) \cdot x \, dx = \underbrace{x \cdot \sin(x) + \cos(x) + C}_{\text{aus Papula}}$
6. $y = \frac{x \cdot \sin(x) + \cos(x) + C}{x}$

z.B. Homogen: $y'x + y = 0$

Umformen: $y' = -\frac{y}{x}$, $y' + \frac{y}{x} = 0$

1. $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = 0$
2. $F(x) = \ln|x|$
3. $y = C \cdot e^{-\ln|x|} = C \cdot \frac{1}{e^{\ln|x|}} = \frac{C}{e^{\ln|x|}} = \frac{C}{|x|}$

z.B. Inhomogen: $y' = 4y + e^{3x}$

1. $y' - 4y = e^{3x}$, $f(x) = -4$, $g(x) = e^{3x}$
2. $F(x) = -4x$
3. $y_0 = C \cdot e^{4x}$ $\rightarrow - -4x = 4x$
4. $y = K(x) \cdot e^{4x}$
5. $K(x) = \int e^{3x} \cdot e^{-4x} dx = \int e^{-x} dx = -e^{-x} + C$
6. $y = (-e^{-x} + C) \cdot e^{4x} = -e^{3x} + C \cdot e^{4x}$

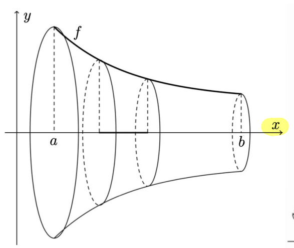
Anwendung Integralrechnung

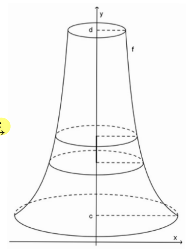
Mantelfläche Rotationskörper

Oberfläche eines Körpers ohne "Deckel" und "Boden"

x-Achse: $M = 2\pi \cdot \int_a^b y \cdot \sqrt{1+(y')^2}\,dx$

y-Achse: $M = 2\pi \cdot \int_a^b x \cdot \sqrt{1+(x')^2}\,dy$





z.B. x-Achse: $y = x^3$ mit Intervall $0 \le x \le 1$

$y' = 3x^2$

$M = 2\pi \cdot \int_0^1 x^3 \cdot \sqrt{1+9x^4}\,dx$

Substitution: 1. $u = 1+9x^4$

2. $\frac{du}{dx} = u'(x) = 36x^3 \quad = \frac{du}{36x^3}$

3. $2\pi \cdot \int_{1+9\cdot 0^4}^{1+9\cdot 1^4} \cancel{x^3} \cdot \sqrt{u}\,\frac{du}{36\cancel{x^3}}$

$= \frac{\pi}{18} \cdot \int_1^{10} u^{1/2}\,du$

$\Rightarrow \frac{\pi}{18}\left[\frac{1}{3/2} \cdot u^{3/2}\right]_1^{10} = \frac{\pi}{27}\left[u^{3/2}\right]_1^{10}$

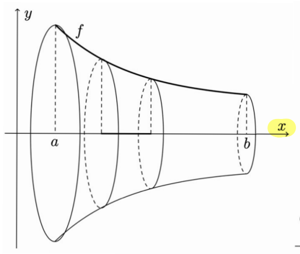
$= \frac{\pi}{27}(31.62-1) \approx \underline{\underline{3.56}}$

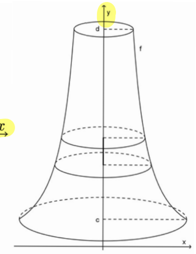
Volumen Rotationskörper

x-Achse: $V = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2\,dx$

y-Achse: $V = \pi \cdot \int_a^b (g(y))^2\,dy$

nach x aufgelöste Funktionsgleichung





z.B. x-Achse: $f(x) = x^2+1$, $a=-1$, $b=1$

$V = \pi \cdot \int_{-1}^1 (x^2+1)^2\,dx = \pi \cdot \int_{-1}^1 x^4+2x^2+1\,dx$

$= \pi \cdot \left[\frac15 x^5 + \frac23 x^3 + x\right]_{-1}^1$

$= \pi \cdot \left(\left(\frac15+\frac23+1\right)-\left(-\frac15-\frac23-1\right)\right) = \underline{\underline{\frac{56}{15}\pi}}$

z.B. y-Achse: $y = \sqrt{x}$ mit Intervall $0 \le y \le 5$

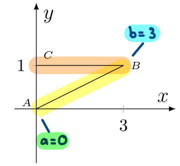
Umkehrfunktion: $y^2 = x \Rightarrow g(y) = y^2$

$V = \pi \cdot \int_0^5 (y^2)^2\,dy = \pi \cdot \int_0^5 y^4\,dy$

$= \pi \cdot \left[\frac15 y^5\right]_0^5$

$= \pi \cdot \left(\frac15 5^5\right) = \underline{\underline{625\pi}}$

z.B. x-Achse: Dreieck mit Eckpunkten $A=(0,0)$ $B=(3,1)$ $C=(0,1)$



AB: $y = \frac{x}{3}$

CB: $y = 1$

$a = 0$, $b = 3$

$V_{AB} = \pi \cdot \int_0^3 \left(\frac{x}{3}\right)^2 dx = \pi \cdot \int_0^3 \frac{x^2}{9} = \frac{\pi}{9}\int_0^3 x^2$

$= \frac{\pi}{9}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3 = \frac{\pi}{9} \cdot 9 = \pi$

$V_{CB} = \pi \cdot \int_0^3 (1)^2\,dx = \pi \cdot \int_0^3 1\,dx$

$= \pi\left[1\right]_0^3 = 3 \cdot \pi$

Gesuchtes Volumen $V = V_{CB} - V_{AB} = 3\pi - \pi = \underline{\underline{2\pi}}$

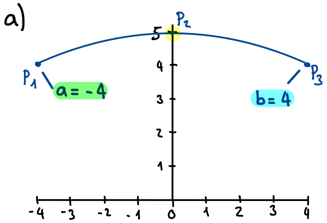
z.B. Im Intervall $I = [-4;4]$ wird die durch die drei Punkte $P_1 = (-4,4)$, $P_2 = (0,5)$ und $P_3 = (4,4)$ definierte Parabel um die x-Achse rotiert. Dadurch entsteht ein Fass.

(a) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung dieser Parabel.

Tipp: Scheitelpunktsform (d.h. $y = a(x-x_0)^2 + y_0$) verwenden, x_0, y_0 durch Ablesen einsetzen und danach a durch Einsetzen eines Punktes bestimmen.

(b) Berechnen Sie das Volumen des Fasses.

a)



Scheitelpunkt bei $(0,5) \rightarrow x_0 = 0,\ y_0 = 5$

Parabelgleichung: $y = ax^2+5$

$P_3 = (4,4)$ liegt auf Parabel $\rightarrow 4 = 16a+5 \quad |-5$

$-1 = 16a \quad |:16$

$-\frac{1}{16} = a$

Gesuchte Parabelgleichung: $y = -\frac{1}{16}x^2+5$

b) $V = \pi \cdot \int_{-4}^4 \left(-\frac{1}{16}x^2+5\right)^2 dx = \pi \cdot \int_{-4}^4 \left(\frac{x^2}{256} - \frac58 x^2 + 25\right) dx$

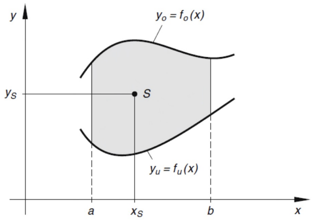
$= \pi \cdot \left[\frac{x^5}{1280} - \frac{5}{24}x^3 + 25x\right]_{-4}^4 = \underline{\underline{549.57}}$

Schwerpunkt Fläche zwischen 2 Kurven

$$A = \int_a^b (f_o(x) - f_u(x))\,dx$$

$$x_S = \frac{1}{A}\int_a^b x\cdot(f_o(x) - f_u(x))\,dx$$

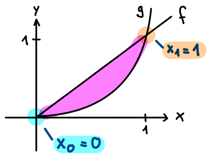
$$y_S = \frac{1}{2A}\int_a^b f_o^2(x) - f_u^2(x)\,dx$$



z.B. $f(x) = x$, $g(x) = x^2$

Schnittpunkt: $x - x^2 = 0$

$x_0 = 0$, $x_1 = 1$



Fläche: $A = \int_0^1 (x - x^2)\,dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

$$x_S = \frac{1}{A}\int_0^1 x\,(x - x^2)\,dx = \frac{1}{A}\int_0^1 x^2 - x^3\,dx$$

$$= \frac{6}{1}\cdot\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{6}{1}\cdot\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = \frac{6}{1}\cdot\frac{1}{12} = \frac{1}{2}$$

$$x_y = \frac{1}{2A}\int_0^1 x^2 - x^4\,dx$$

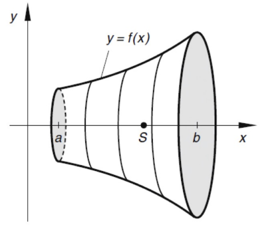
$$= \frac{3}{1}\cdot\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{3}{1}\cdot\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) = \frac{3}{1}\cdot\frac{2}{15} = \frac{2}{5}$$

$\Rightarrow S\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{5}\right)$

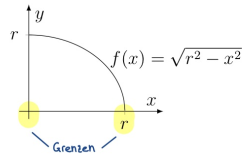
Schwerpunkt Rotationskörper

x-Achse: $x_S = \frac{\pi}{V}\int_a^b x\cdot f^2(x)\,dx$, $y_S = 0$

y-Achse: $y_S = \frac{\pi}{V}\int_a^b y\cdot f^2(y)\,dy$, $x_S = 0$



z.B. Lässt man den Graphen eines Viertelkreises mit Radius r (zugehörige Funktion: $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$) um die x-Achse rotieren, so entsteht eine Halbkugel mit Radius r.



Zeigen Sie mit Hilfe der Formel für den Schwerpunkt eines Rotationskörpers, dass die Schwerpunkts-Koordinaten $x_S = \frac{3r}{8}$ und $y_S = 0$ betragen.

Hinweis: Sie dürfen die Formel für das Kugelvolumen benutzen: $V_{\text{Kugel}} = \frac{4}{3}\pi r^3$.

V_{Kugel}: $\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{2}{3}\pi r^3$

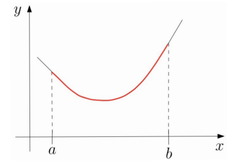
$$x_S = \frac{\cancel{\pi}}{\frac{2}{3}\cancel{\pi} r^3}\int_0^r x\cdot\left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 dx = \frac{3}{2r^3}\int_0^r x(r^2 - x^2)\,dx = \frac{3}{2r^3}\int_0^r xr^2 - x^3\,dx$$

$$= \frac{3}{2r^3}\left[\frac{x^2}{2}r^2 - \frac{x^4}{4}\right]_0^r = \frac{3}{2r^3}\left(\frac{r^4}{2} - \frac{r^4}{4}\right) = \frac{3}{2r^3}\cdot\frac{r^4}{4} = \frac{3r^{\cancel{4}}}{8\cancel{r^3}} = \frac{3r}{8}$$

$y_S = 0$ $\Rightarrow S\left(\frac{3r}{8}, 0\right)$

Bogenlänge

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2}\,dx$$



z.B. $y = x^{3/2}$ mit Intervall $0 \leq x \leq 5$

$y' = \frac{3}{2}x^{1/2}$

$$s = \int_0^5 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}x^{1/2}\right)^2}\,dx = \int_0^5 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\,dx$$

$$= \int_0^5 \left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{1/2} dx$$

Substitution:

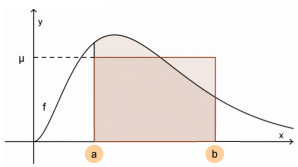
1. $u = 1 + \frac{9}{4}x$
2. $\frac{du}{dx} = u'(x) = \frac{9}{4} \Rightarrow dx = \frac{du}{9/4}$
3. $\int_{1+\frac{9}{4}\cdot 0}^{1+\frac{9}{4}\cdot 5} u^{1/2}\frac{du}{9/4} = \int_1^{12.25}\frac{1}{9/4}u^{1/2}\,du = \frac{4}{9}\int_1^{12.25}u^{1/2}\,du$ $\quad = \frac{4}{9}$
4. $\frac{4}{9}\cdot\left[\frac{1}{3/2}u^{3/2}\right]_1^{12.25} = \frac{4}{9}\cdot\frac{2}{3}\left[u^{3/2}\right]_1^{12.25} = \frac{8}{27}\left[u^{3/2}\right]_1^{12.25}$ $\quad \frac{2}{3}$

$$= \frac{8}{27}\left(12.25^{3/2} - 1\right) = 12.407$$

Mittelwert

Höhe jenes Rechtecks, dessen Flächeninhalt der Fläche unter der Kurve $x \in [a,b]$ entspricht

$$\mu = \frac{1}{b-a}\cdot\int_a^b f(x)\,dx$$



z.B. $f(x) = x^2 + 2$ auf Intervall $[2, 4]$

$$\mu = \frac{1}{4-2}\cdot\int_2^4 (x^2 + 2)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{1}{3}x^3 + 2x\right]_2^4$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{3}\cdot 4^3 + 8\right) - \left(\frac{1}{3}2^3 + 4\right)\right) = 11.\overline{3}$$

z.B. Taylor-Polynom von $f(x) = e^x\cdot\cos(x)$ vom Grad 3 um $x_0 = 0$

Papula: $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$, $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$

$$e^x\cdot\cos(x) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots\right)\cdot\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \ldots\right)$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} + \ldots$$

3. Grad: $p_3(x) = 1 + x - \frac{x^3}{3}$

$\int_0^{0.2} e^x\cdot\cos(x)\,dx$ approximieren: $\int_0^{0.2} 1 + x - \frac{x^3}{3} = \left[x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12}\right]_0^{0.2}$

$$= 0.2 + \frac{0.2^2}{2} - \frac{0.2^4}{12} = 0.2199$$

Taylor-Reihe

Wird verwendet um eine Funktion in der Nähe eines bestimmten Punktes zu approximieren, in dem diese als Potenzreihe dargestellt wird.

Definition

Betrachten Funktion f und eine Stelle x_0 in ihrem Definitionsbereich:

- Taylor-Polynom vom Grad n von f um x_0: $\quad p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$
- Taylor-Reihe von f um x_0: $\quad t_f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$

$$= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \dots$$

z.B Taylor-Polynom von $f(x) = \ln(x+10)$ vom Grad 4 um $x_0 = 0$

$$\begin{aligned}
f(x) &= \ln(x+10) & f(x_0) &= \ln(10)\\
f'(x) &= (x+10)^{-1} & f'(x_0) &= 0.1\\
f''(x) &= -(x+10)^{-2} & f''(x_0) &= -0.01\\
f'''(x) &= 2(x+10) & f'''(x_0) &= 0.002\\
f^{IV}(x) &= -6(x+10)^{-4} & f^{IV}(x_0) &= -0.0006
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow p_4(x) = \ln(10) + 0.1x - \frac{0.01}{2!}x^2 + \frac{0.002}{3!}x^3 - \frac{0.0006}{4!}x^4$$

$$= \ln(10) + \frac{1}{10}x - \frac{1}{200}x^2 + \frac{1}{3000}x^3 - \frac{1}{40'000}x^4$$

z.B. Taylor-Reihe von $g(x) = \cos(x)$ um $x_0 = 0$

x_0 einsetzen

$$\begin{aligned}
f(x) &= \cos(x) & f(x_0) &= 1\\
f'(x) &= -\sin(x) & f'(x_0) &= 0\\
f''(x) &= -\cos(x) & f''(x_0) &= -1\\
f'''(x) &= \sin(x) & f'''(x_0) &= 0\\
f^{IV}(x) &= \cos(x) & f^{IV}(x_0) &= 1
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow t_f(x) = \frac{1}{0!}\cdot(x-1)^0 + \frac{0}{1!}\cdot(x-0)^1 + \frac{-1}{2!}\cdot(x-0)^2 + \frac{0}{3!}\cdot(x-0)^3 + \frac{1}{4!}\cdot(x-0)^4$$

Fakultät $0! = 1$

$$= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots$$

z.B. Taylor-Reihe von $f(x) = \cos(\sqrt{x})$ um $x_0 = 0$

Einsetzen in Taylor-Reihe von oben:

$$\Rightarrow t_f(x) = 1 - \frac{(\sqrt{x})^2}{2!} + \frac{(\sqrt{x})^4}{4!} + \frac{(\sqrt{x})^6}{6!} + \dots$$

z.B. Taylor-Reihe von $f(x) = \cos^2(x)$ um $x_0 = 0$

Einsetzen in Taylor-Reihe von oben:

$$\Rightarrow t_f(x) = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots\right)^2$$

z.B Taylor-Reihe von $i(x) = \ln(x)$ um $x_0 = 1$

$$\begin{aligned}
f(x) &= \ln(x) & f(x_0) &= 0\\
f'(x) &= \frac{1}{x} = x^{-1} & f'(x_0) &= 1\\
f''(x) &= -x^{-2} & f''(x_0) &= -1\\
f'''(x) &= 2x^{-3} & f'''(x_0) &= 2\\
f^{IV}(x) &= -6x^{-4} & f^{IV}(x_0) &= -6
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow t_f(x) = 0 + 1\cdot(x-1)^1 - \frac{1}{2!}\cdot(x-1)^2 + \frac{2}{3!}\cdot(x-1)^3 - \frac{6}{4!}\cdot(x-1)^4$$

$$= (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2!} + \frac{2\,(x-1)^3}{3!} - \frac{6\,(x-1)^4}{4!}$$

$$= (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \dots$$

z.B. Taylor-Reihe von $f(x) = (x-1)\cdot\ln(x)$ um $x_0 = 1$

Einsetzen in Taylor-Reihe von oben:

$$\Rightarrow t_f(x) = (x-1)^2 - \frac{(x-1)^3}{2} + \frac{(x-1)^4}{3} - \frac{(x-1)^5}{4} + \dots$$

z.B Taylor-Polynom von $f(x) = (1+e^x)^2$ vom Grad 3 um $x_0 = 0$

$$\begin{aligned}
f(x) &= (1+e^x)^2 = 1 + 2e^x + e^{2x} & f(x_0) &= 4\\
f'(x) &= 2e^x + 2e^{2x} & f'(x_0) &= 4\\
f''(x) &= 2e^x + 4e^{2x} & f''(x_0) &= 6\\
f'''(x) &= 2e^x + 8e^{2x} & f'''(x_0) &= 10
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow p_4(x) = 4 + 4x + \frac{6}{2!}x^2 + \frac{10}{3!}x^3$$

$$= 4 + 4x + 3x^2 + \frac{5}{3}x^3$$

Konvergenz

Konvergenzbereich bezeichnet alle x-Werte, bei denen f(x) genau dem Wert der Taylor-Reihe entspricht.

Quotientenkriterium, Konvergenzradius, Konvergenzbereich

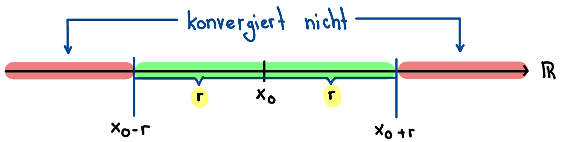
Für jede Potenzreihe $P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$ gibt es einen Konvergenzradius $r := \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|$, so dass:

- alle $x \in (x_0 - r,\ x_0 + r)$ zum Konvergenzbereich gehören (konvergiert)
- alle $x \in (-\infty,\ x_0 - r) \cup (x_0 + r,\ \infty)$ nicht zum Konvergenzbereich gehören (divergiert)

(!) Wenn Ausdruck gegen ∞, ist $r = \infty$ und alle $x \in \mathbb{R}$ gehören zum Konvergenzbereich

Wenn Konvergenzbereich aus ganz $\mathbb{R}$ besteht, ist Konvergenzradius $= \infty$

Illustration:



z.B. Konvergenzradius und Intervall von $P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ welche konvergieren

$P(x)$ umgeschrieben: $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (x-0)^k$

1. $(x-x_0)^k$ bestimmen
   $= (x-0)^k$ mit $x_0 = 0$
2. a_k (Faktor vor $(x-x_0)^k$) bestimmen
   $= \frac{1}{k!}$
3. a_{k+1} bestimmen
   $= \frac{1}{(k+1)!}$
4. a_k und a_{k+1} in $r := \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|$ einsetzen

$(k+1)! = (k+1) \cdot k!$

$$r = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{k!}}{\frac{1}{(k+1)!}} \right| = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{1}{k!} \cdot \frac{(k+1)!}{1} \right| = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{(k+1)!}{k!} \right| = \lim_{k\to\infty} |k+1| \to \infty$$

$\Rightarrow$ Konvergenzradius $= \infty$, Konvergenzbereich $= \mathbb{R}$

z.B. Konvergenzradius und Intervall von $P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (5^k \cdot \sqrt{k} \cdot (x+1)^k)$ welche konvergieren

1. $(x-x_0)^k$ bestimmen
   $= (x+1)^k$ mit $x_0 = -1$ (!) Wenn $+$ $(x+x_0)^k$ ist es $-x_0$
2. a_k (Faktor vor $(x-x_0)^k$) bestimmen
   $= 5^k \cdot \sqrt{k}$
3. a_{k+1} bestimmen
   $= 5^{k+1} \cdot \sqrt{k+1}$
4. a_k und a_{k+1} in $r := \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|$ einsetzen

$$r = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{5^k \cdot \sqrt{k}}{5^{k+1} \cdot \sqrt{k+1}} \right| = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{\cancel{5^k}}{\cancel{5^k}} \cdot \frac{\sqrt{k}}{5 \cdot \sqrt{k+1}} \right| = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{1}{5} \cdot \underbrace{\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k+1}}}_{=1} \right| = \frac{1}{5}$$

$\Rightarrow$ Konvergenzradius $= \frac{1}{5}$, Konvergenzbereich $= x \in (-1.2,\ -0.8)$

$x \in (x_0 - r,\ x_0 + r) = x \in (-1 - \frac{1}{5},\ -1 + \frac{1}{5})$

z.B. Konvergenzradius und Intervall von $P(x) = \frac{x}{1^5} + \frac{x^2}{2^5} + \frac{x^3}{3^5} + \frac{x^4}{4^5} + \dots$ welche konvergieren

1. $(x-x_0)^k$ bestimmen
   $= (x-0)^k$ mit $x_0 = 0$
2. a_k (Faktor vor $(x-x_0)^k$) bestimmen
   $a_1 = \frac{1}{1^5}$
   $a_2 = \frac{1}{2^5}$
   $a_3 = \frac{1}{3^5}$
   $a_k = \frac{1}{k^5}$
3. a_{k+1} bestimmen
   $= \frac{1}{(k+1)^5}$
4. a_k und a_{k+1} in $r := \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|$ einsetzen

$$r = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{1/k^5}{1/(k+1)^5} \right| = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{1}{k^5} \cdot \frac{(k+1)^5}{1} \right| = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{(k+1)^5}{k^5} \right| = 1$$

$= \left(\frac{\cancel{k}+1}{\cancel{k}}\right)^5 = 1^5 = 1$

$\Rightarrow$ Konvergenzradius $= 1$, Konvergenzbereich $= x \in (-1, 1)$

$x \in (x_0 - r,\ x_0 + r) = x \in (0 - 1,\ 0 + 1)$

Anwendung Taylor-Reihe

Bernoulli l'Hôpital

Grenzwert von Bruch $\frac{f(x)}{g(x)}$ bestimmen, bei dem bei $x \to x_0$ Zähler und Nenner zu $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ werden. Dann gilt:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

z.B. Grenzwert von $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)'}{x'} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{1} = \frac{1}{1} = 1$$

z.B. Integral $I = \int_0^{0.3} \sqrt{1+x^2}\, dx$ approximieren, indem zunächst Funktion $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ durch Taylor-Polynom vom Grad 2 um $x_0 = 0$ ersetzt und dann integriert wird.

$f(x) = (1+x^2)^{1/2}$, $f(0) = 1$

$f'(x) =$ Kettenregel: $u = 1+x^2$ $\quad u' = 2x$

$F = u^{1/2}$ $\quad F' = \frac{1}{2} \cdot u^{-1/2}$

$= \frac{1}{2} \cdot (1+x^2)^{-1/2} \cdot 2x = x(1+x^2)^{-1/2}$, $f'(0) = 0$

$f''(x) =$ Produktregel: $u = x$ $\quad u' = 1$

$F = (1+x^2)^{-1/2}$ $\quad F' = -\frac{1}{2} \cdot (1+x^2)^{-3/2} \cdot 2x$

$= 1 \cdot (1+x^2)^{-1/2} + x \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot (1+x^2)^{-3/2} \cdot 2x\right)$, $f''(0) = 1$

Kettenregel: $u = 1+x^2$ $\quad u' = 2x$

$F = u^{-1/2}$ $\quad F' = -\frac{1}{2} u^{-3/2}$

$\Rightarrow -\frac{1}{2} (1+x^2)^{-3/2} \cdot 2x$

Taylor-Reihe 2. Grad: $1 + \frac{1}{2} x^2$ $\quad \left(= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2} (x-x_0)^2 \right)$

Näherungswert für gesuchtes Integral: $\int_0^{0.3} \sqrt{1+x^2}\, dx \approx \int_0^{0.3} \left(1 + \frac{1}{2} x^2\right) dx$

$$= \left[1x + \frac{1/2}{3} x^3\right]_0^{0.3} = \left[x + \frac{1}{6} x^3\right]_0^{0.3} \approx 0.3045$$

z.B. Grenzwert von $\lim_{x\to\infty} \frac{x^k}{e^x}$ für ein fixes $k \in \mathbb{N}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^{k\,\prime}}{e^{x\,\prime}} = \lim_{x\to\infty} \frac{k \cdot x^{k-1}}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{k \cdot (k-1) \cdot x^{k-2}}{e^x} = \ldots = \lim_{x\to\infty} \frac{k!}{e^x} = 0$$

(!) e^x wächst schneller als k!

z.B. Grenzwert von $\lim_{x\to 0} x^2 \cdot \ln(x)$ $\longrightarrow$ Darstellung als Bruch: $\frac{\ln(x)}{x^{-2}}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x)'}{x^{-2\,\prime}} = \lim_{x\to 0} \frac{1/x}{-2x^{-3}} = \frac{x^{-1} \cdot x^3}{-2} = \frac{x^2}{-2} = 0$$

$\frac{1}{x^{-3}} = \frac{x^3}{1}$

z.B. Grenzwert von $\lim_{x\to\infty} \frac{e^{1/x^2} - 1}{\ln\left(\frac{x+1}{x+3}\right)}$

$f(x) := e^{1/x^2} - 1$, $f'(x) = -2x^{-3} \cdot e^{1/x^2}$

$g(x) := \ln\left(\frac{x+1}{x+3}\right) = \ln(x+1) - \ln(x+3)$, $g'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+3} = \frac{1 \cdot (x+3) - 1 \cdot (x+1)}{(x+1)(x+3)} = \frac{x+3-x+1}{(x+1)(x+3)} = \frac{2}{(x+1)(x+3)}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{-2x^{-3} \cdot e^{1/x^2}}{\frac{2}{(x+1)(x+3)}} = -2x^{-3} \cdot e^{1/x^2} \cdot \frac{(x+1)(x+3)}{2} = \frac{-\cancel{2}x^{-3} \cdot e^{1/x^2} \cdot (x+1) \cdot (x+3)}{\cancel{2}}$$

$$= -\frac{1}{x^3} \cdot e^{1/x^2} \cdot (x+1) \cdot (x+3) = -\frac{e^{1/x^2} \cdot (x+1) \cdot (x+3)}{x^3} = 0$$

$= e^{x^{-2}} \xrightarrow[x\to\infty]{} 1$

(!) x^3 wächst schneller als x^2

Grenzwerte bei Polynome

Folgeglieder sind von der Form $a_n = \frac{g(n)}{h(n)}$, wobei $g(n)$ und $h(n)$ Polynome sind.

Fall 1: Zählergrad < Nennergrad = 0

z.B. $\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2 + 7n - 15}{n^3 - 2n^2 + n + 10} = 0$

Fall 2: Zählergrad > Nennergrad = ∞ oder $-\infty$

z.B. $\lim_{n\to\infty} \frac{3n^4 - 7n + 1}{6n^3 - 2n^2 + 5} = \infty$

Fall 3: Zählergrad = Nennergrad = $\frac{\text{führender Term}}{\text{führender Term}}$

z.B. $\lim_{n\to\infty} \frac{2n^3 + n^2 + 8n}{5n^3 + 4n^2 + 17} = \frac{2}{5}$

Spezielle Folge: $\langle (1 + \frac{1}{n})^{\frac{n}{1}} \rangle = e \approx 2.718$

z.B. $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

Ableitungen

$f(x)$	$f'(x)$
x^n	$n \cdot x^{n-1}$
$\sqrt[2]{x} = x^{1/2}$	$\frac{1}{2} x^{-1/2} = \frac{x^{-1/2}}{2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
e^x	e^x
e^{2x}	$2 \cdot e^{2x}$ Exponent ableiten
e^{x^2}	$2x \cdot e^{x^2}$
e^{-x}	$-e^{-x}$
a^x	$a^x \cdot \ln(a)$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$ in Klammer ableiten
$\ln(x^2)$	$\frac{1}{x^2} \cdot 2x = \frac{2}{x}$
$20 \cdot \ln(3-x^4)$	$20 \cdot \frac{1}{3-x^4} \cdot -4x^3 = \frac{-80x^3}{3-x^4}$
$\log_a(x)$	$\frac{1}{x \cdot \ln(a)}$
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos(x)$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$

Stammfunktionen / Integrieren

$f(x)$	$F(x)$
x^n	$\frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1}$
$\frac{1}{x}$	$\ln(\lvert x \rvert)$
$\hookrightarrow \frac{1}{3+x}$ ✓, $\frac{1}{3+x^2}$ ✗ $\rightarrow$	nur wenn x nicht Mal gerechnet sonst Substitution
$\ln(x)$	$x \cdot \ln(x) - x$
a^x	$\frac{a^x}{\ln(a)}$
$\log_a(x)$	$\frac{1}{\ln(a)} \cdot (x \ln(x) - x)$
e^x	e^x
e^{-x}	$-e^{-x}$
e^{-cx}	$-\frac{1}{c} \cdot e^{-cx}$
$\tan(x)$	$-\ln\lvert\cos(x)\rvert$

Fakultät

$(n+1)! = (n+1) \cdot n!$

Brüche

$\frac{1}{x^1} = x^{-1}$

$\frac{1}{x^2} = x^{-2}$

$\frac{10}{x^1} = 10x^{-1}$

$\frac{a}{\frac{b}{c}} = a \cdot \frac{c}{b}$, $\frac{2}{\frac{6}{7}} = \frac{2}{1} \cdot \frac{7}{6} = 2 \cdot \frac{7}{6}$

$\frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{b \cdot c}$, $\frac{\frac{2}{3}}{4} = \frac{2}{3 \cdot 4} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$

$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$, $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{5}} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 4} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$

$\frac{a}{b} +/- \frac{c}{d} = \frac{ad +/- bc}{bd}$, $\frac{2}{5} + \frac{3}{8} = \frac{16+15}{40} = \frac{31}{40}$

$\frac{a}{b} +/- \frac{c}{b} = \frac{a +/- c}{b}$, $\frac{3}{8} - \frac{1}{8} = \frac{2}{8}$

$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$, $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{8} = \frac{6}{40} = \frac{3}{20}$

⚠ z.B. $\frac{2x+5}{2}$ nicht kürzbar, $\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}}$ schon $\rightarrow x$

Wurzel

$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$, $\sqrt[2]{2} \cdot \sqrt[2]{9} = \sqrt[2]{4 \cdot 9} = \sqrt{36}$

$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$, $\frac{\sqrt[2]{16}}{\sqrt[2]{4}} = \sqrt[2]{\frac{16}{4}} = \sqrt{4}$

$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$, $\sqrt[2]{\sqrt[2]{81}} = \sqrt[4]{81}$

$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$, $(\sqrt[2]{4})^2 = \sqrt[2]{4^2} = \sqrt[2]{16}$

$\sqrt{a^2} = a$, $\sqrt{2^2} = 2$

$\sqrt[2]{a} = a^{1/2}$, $\sqrt[2]{2} = 2^{1/2}$

ln und e

$e^{\ln(x)} = x$, $e^{-\ln(x)} = \frac{1}{x}$

$\ln(x \cdot y) = \ln(x) + \ln(y)$

$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$

e auflösen: $e^x = y \quad | \ln$

$x = \ln(y)$

ln auflösen: $\ln(x) = y \quad | e$

$x = e^y$

Potenzen

$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$

$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$

$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

$\cos^3(x) = (\cos(x))^3$

$\frac{a^k}{a^{k+1}} = \frac{\cancel{a^k}}{\cancel{a^k} \cdot a} = \frac{1}{a}$

Umformungen

$\sqrt{x} = 2 \quad | \, 1/2$

$x = 2^{1/2}$

$x^{-1} = 2 \quad | \cdot \frac{1}{-1}$

$x = 2^{-1}$

$= \frac{1}{2}$

$x^3 = 2 \quad | \cdot 1/3$

$x = 2^{1/3}$

$r \cdot h \cdot \sqrt{\frac{h^2 + r^2}{h^2}}$

$= r \cdot h \cdot \frac{\sqrt{h^2+r^2}}{\sqrt{h^2}}$

$= r \cdot \cancel{h} \cdot \frac{\sqrt{h^2+r^2}}{\cancel{h}}$

$= r \cdot \sqrt{h^2+r^2}$

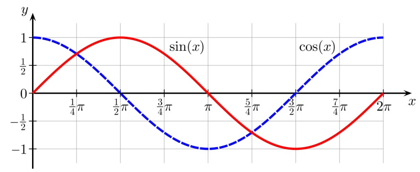
Mitternachtsformel

Lösungsformel für quadratische Gleichungen der Form:

$ax^2 + bx + c = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

sin/cos Kurve



Ableitungskreis sin/cos

$\sin(x) \xrightarrow{\text{abgeleitet}} \cos(x) \rightarrow -\sin(x) \rightarrow -\cos(x) \rightarrow \sin(x)$

$f(x) = \sin(10x)$ in Klammer ableiten

$f'(x) = 10 \cdot \cos(10x)$

$F(x) = \frac{1}{10} \cdot -\cos(10x)$ in Klammer ableiten

Ableitungsregeln

Potenzregel

$f(x) = x^n \rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}$

z.B. $f(x) = x^2 \rightarrow f'(x) = 2x^{2-1} = 2x^1$

$f(x) = x^{-1} \rightarrow f'(x) = -1x^{-1-1} = -x^{-2}$

Faktorregel

$(c \cdot f)'(x) = c \cdot f'(x)$

z.B. $(4x^3)' = 4 \cdot (x^3)' = 4 \cdot 3 \cdot x^2 = 12x^2$

Produktregel

$(u \cdot v)'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$

z.B. $f(x) = ((3x^3 + x^2)(4x^2 + 1))$. Gesucht ist $f'(x)$.

$u = 3x^3 + x^2 \qquad u' = 9x^2 + 2x$

$v = 4x^2 + 1 \qquad v' = 8x$

$f'(x) = (9x^2 + 2x) \cdot (4x^2 + 1) + (3x^3 + x^2) \cdot (8x)$

$= 36x^4 + 9x^2 + 8x^2 + 2x + 24x^4 + 8x^3$

$= 60x^4 + 16x^3 + 9x^2 + 2x$

Quotientenregel

$\left(\frac{u}{v}\right)'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{(v(x))^2}$

z.B. $f(x) = \left(\frac{3x^2 - x}{2x^3 + 1}\right)$. Gesucht ist $f'(x)$.

$u = 3x^2 - x \qquad u' = 6x^1 - 1$

$v = 2x^3 + 1 \qquad v' = 6x^2$

$f'(x) = \frac{(6x-1) \cdot (2x^3+1) - (3x^2-x) \cdot (6x^2)}{(2x^3+1)^2}$

z.B. $f(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$. Gesucht ist $f'(x)$.

$u = \cos(x) \qquad u' = -\sin(x)$

$v = \sin(x) \qquad v' = \cos(x)$

$f'(x) = \frac{-\sin(x) \cdot \sin(x) - \cos(x) \cdot \cos(x)}{(\sin(x))^2}$

$= \frac{-\sin^2(x) - \cos^2(x)}{\sin^2(x)}$

Summenregel

$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$

z.B $(7x^5 - 3x^3 + 5x^2 - 14x + 6)'$

$= (7x^5)' - (3x^3)' + (5x^2)' - (14x)' + (6)'$

$= 35x^4 - 9x^2 + 10x - 14$

Kettenregel

$(F \circ u)'(x) = F'(x) \cdot u'(x)$

$F(u)$: äussere Funktion

$u(x)$: innere Funktion

z.B. $f(x) = (x^3 + 4)^{-2}$

$u(x) = x^3 + 4 \qquad u'(x) = 3x^2$

$F(x) = u^{-2} \qquad F'(x) = -2u^{-3}$

$f'(x) = (-2u)^{-3} \cdot 3x^2$

$= -2(x^3 + 4)^{-3} \cdot 3x^2$

z.B. $y = (4x^2 - 2x + 1)^5$

$u(x) = 4x^2 - 2x + 1 \qquad u'(x) = 8x - 2$

$F(x) = u^5 \qquad F'(x) = 5u^4$

$y' = 5u^4 \cdot (8x - 2)$

$= 5(4x^2 - 2x + 1)^4 \cdot (8x - 2)$

z.B. $f(x) = \frac{10}{x^3 + 5}$

$u(x) = x^3 + 5 \qquad u(x)' = 3x^2$

$F(x) = \frac{10}{u} = 10u^{-1} \qquad F(x)' = -10u^{-2}$

$f'(x) = -10u^{-2} \cdot 3x^2$

$= -10(x^3 + 5)^{-2} \cdot 3x^2$

$= \frac{-10 \cdot 3x^2}{(x^3 + 5)^2}$

$= \frac{-30x^2}{(x^3 + 5)^2}$