Logik

Junktorenregeln

Doppel Negation: $\neg\neg A \Leftrightarrow A$

Kommutativität: $A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$

$A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$

Assoziativität: $(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$

$(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$

$(A \wedge (B \wedge C)) \vee (A \wedge C) \Leftrightarrow A \wedge ((B \wedge C) \vee C)$

Distributivität: $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

$A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

$A \wedge ((B \wedge C) \vee (B \wedge D)) \Leftrightarrow (A \wedge (B \wedge C)) \vee (A \wedge (B \wedge D))$

$A \vee ((B \vee C) \wedge (B \vee D)) \Leftrightarrow (A \vee (B \vee C)) \wedge (A \vee (B \vee D))$

$(A \vee B) \wedge (C \vee D) \Leftrightarrow (A \wedge C) \vee (A \wedge D) \vee (B \wedge C) \vee (B \wedge D)$

$(A \wedge B) \vee (C \wedge D) \Leftrightarrow (A \vee C) \wedge (A \vee D) \wedge (B \vee C) \wedge (B \vee D)$

$(A \wedge \neg B) \vee (\neg B \vee A) \Leftrightarrow (A \vee (\neg B \vee A)) \wedge (\neg B \vee (\neg B \vee A))$

De Morgan: $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$

$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$

$(A \wedge \neg B) \Leftrightarrow \neg(\neg A \vee B)$

Kontraposition: $A \Rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B$

$\Leftrightarrow \neg B \Rightarrow \neg A$

Äquivalenz: $A \Leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$

$\Leftrightarrow (\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A)$

Idempotenz: $A \wedge A \Leftrightarrow A$

$A \vee A \Leftrightarrow A$

Absorption: $A \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow A$

$A \vee (A \wedge B) \Leftrightarrow A$

Tautologie (T): $A \vee A$ ist immer wahr

Wiederspruch ($\perp$): $A \wedge \neg A$ ist immer falsch

Bindung: 1. $\neg$, 2. $\wedge$, 3. $\vee$, 4. $\Rightarrow$

Quantoren

All-Quantor: $\forall_x \rightarrow$ "für alle..."

$\neg\forall_x \rightarrow$ "nicht für alle..."

Existenz-Quantor: $\exists_x \rightarrow$ "es gibt mindestens ein..."

$\neg\exists_x \rightarrow$ "es gibt kein..."

Quantorenregeln

Quantoren binden stärker als Junktoren

Vertauschregel: $\exists_x\, A(x) \Leftrightarrow \neg\forall_x \neg A(x)$

$\forall_x\, A(x) \Leftrightarrow \neg\exists_x \neg A(x)$

$\forall_x \in M\, A(x) \Leftrightarrow \forall_x (x \in M\; A(x))$

$\exists_x \in M\, A(x) \Leftrightarrow \exists_x (x \in M\; A(x))$

Negation: $\neg\exists_x \in M\, A(x) \Leftrightarrow \forall_x \in M\, \neg A(x)$

$\neg\forall_x \in M A(x) \Leftrightarrow \exists_x \in M\, \neg A(x)$

Junktoren

Zeichen	Prädikat	Bezeichnung	Beschreibung
$\neg$	$\neg A$	Negation	nicht A
$\wedge$	$A \wedge B$	Konjunktion	A und B
$\vee$	$A \vee B$	Disjunktion	A oder B
$\Rightarrow$	$A \Rightarrow B$	Implikation	wenn A dann B
$\Leftrightarrow$	$A \Leftrightarrow B$	Äquivalenz	A gleich B

Implikation

A	B	$A \Rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Wahrheitstafel

z.B. $(P \vee \neg Q) \wedge \neg P$

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$P \vee \neg Q$	$(P \vee \neg Q) \wedge \neg P$
1	1	0	0	1	0
1	0	0	1	1	0
0	1	1	0	0	0
0	0	1	1	1	1

Beispiele

P Menge aller Prüfungen und E(x) Prädikat "x ist einfach"

Alle Prüfungen sind einfach: $\forall_x \in P\; E(x)$

Eine Prüfung ist einfach: $\exists_x \in P\; E(x)$

Keine Prüfung ist einfach: $\neg\exists_x \in P\; E(x)$ } äquivalent

Alle Prüfungen sind nicht einfach: $\forall_x \in P\; \neg E(x)$ }

Nur eine Prüfung ist einfach: $(\exists_x \in P\; E(x)) \wedge (\forall_{x,y} \in P\, (E(x) \wedge E(y) \Rightarrow x = y))$

Nur eine Prüfung ist nicht einfach: $(\exists_x \in P \neg E(x)) \wedge (\forall_{x,y} \in P\, (\neg E(x) \wedge \neg E(y) \Rightarrow x = y))$

Nicht alle Prüfungen sind einfach: $\neg\forall_x \in P\; E(x)$ } äquivalent

Eine Prüfung ist nicht einfach: $\exists_x \in P\; \neg E(x)$ }

Es gibt mind. 3 Elemente mit P(x): $\exists_{x,y,z}\, (P(x) \wedge P(y) \wedge P(z) \wedge x \neq y \wedge x \neq z \wedge y \neq z)$

Es gibt max. 2 Elemente mit P(x): $\forall_{x,y,z}\, P(x) \wedge P(y) \wedge P(z) \Rightarrow (x = y \vee x = z \vee y = z)$

Prädikat

Eine Ausdruck, welcher unbekannte Variablen enthält. Bei Belegung geht der Ausdruck in eine Aussage über. Nach einer Belegung handelt es sich um ein 0-stelliges Prädikat.

Aussage

Ein "sprachliches Gebilde", welchem "wahr" oder "falsch" zugeordnet werden kann. Darf keine unbekannten Variablen aufweisen, falls schon, müssen diese in einem Quantor vorkommen.

z.B. $\forall_x \exists_y\, P(x,y)$ ✓, $\forall_x\, P(x,y)$ ⊗, "x ist ungerade" ⊗, "es gibt ein x mit P(x)" ✓ (Existenz-Quantor $\exists_x$)