Polynome

Eine bestimmte Art mehrgliedriger Terme.
z.B. $a+b+c$, $10x^5 - x + 3x^3 + 4$, $3x^2 - 8x + 2$

Definition

$y = f(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0$ mit $a_n \neq 0$

n : Grad der Polynomfunktion

$a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$: Koeffizienten

Definitionsbereich: $\mathbb{R}$

z.B. $\boxed{-4x^3} + \boxed{2x^2} + \boxed{3x} \boxed{-1}$

- Grad 3
- Koeffizienten (höchster Potenz $-4x^3$ auch als Leitkoeffizient bezeichnet)
- Glieder

Horner Schema

Effiziente Weise um ein Polynom auszurechnen. (Alternative zur Polynomdivision)

z.B. Zahl einsetzen : $6x^4 - x^3 + 2x^2 - 3 = f(x)$ $f(2) = ?$

	6	-1	2	0	-3
$x = 2$		12 (-1)	22 (+2)	48 (+0)	96 (-3)
	6 ·2	11 ·2	24 ·2	48 ·2	93

Ergebnis wenn 2 ins Polynom eingesetzt wird

z.B. Nullstellen einsetzen: $3x^3 - 15x + 12 = 0$, $x_0 = 1$

	3	0	-15	12
$x_0 = 1$		3	3	-12
	3	3	-12	0

Nullstelle
(wenn nicht 0 → x_0 nicht Nullstelle)

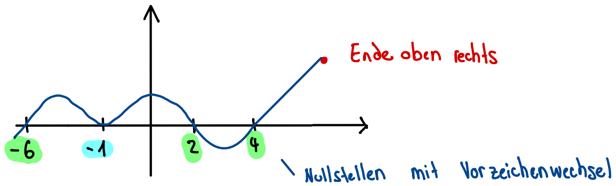
$q(x) = 3x^2 + 3x - 12$, $f(x) = (x-1)(3x^2 + 3x - 12)$

Nullstellen

Zahl einer Funktion, für die die Funktion den Wert 0 annimmt.

Nullstellen erraten: $-3, -2, -1, 1, 2, 3$ probieren

z.B. $2(x+1)^2\,(x-4)\,(x-2)\,(x+6)$



einfache Nullstelle : $-6, 2, 4$: Durchgang der x-Achse

doppelte Nullstelle : $-1, -1$: Weitergehen auf der gleichen Seite

Zerlegungssatz

Wenn x_0 eine Nullstelle der Polynomfunktion $f(x)$ ist:

existiert eine Polynomfunktion: $q(x) = f(x) = (x - x_0) \cdot q(x)$, z.B. $(x+1)(x-1)(x+3)(x-4)\ldots$

- $(x - x_0)$: Linearfaktor
- $q(x)$: 1. reduzierte Polynom (Grad von $q(x)$ ist 1 kleiner als $f(x)$)

z.B. Polynom $f(x) = 2x^5 + 4x^4 - 54x^3 - 16x^2 + 136x + 96$

$x_0 = 4$ → Nullstelle von $f(x)$ (erraten durch einsetzen)

Polynomdivision $f(x) : (x-4) = f(x) = (x-4)(2x^4 + 12x^3 - 6x^2 - 40x - 24)$

Polynomdivision

$\frac{x^3}{x} = x^2$ $\quad \frac{2x^2}{x} = 2x$ $\quad \frac{2x}{x} = 2$

z.B. $f_1(x) = (x^3 + x^2 + 1) : (x - 1) = x^2 + 2x + 2 + \frac{3}{x-1}$ → Asymptoten: $x^2 + 2x + 2$

$-(x^3 - x^2)$ → $x^2(x-1) = x^3 - x^2$

$\underline{-x^3 + x^2}$

$2x^2 + 1$

$-(2x^2 - 2x)$ → $2x(x-1) = 2x^2 - 2x$

$\underline{-2x^2 + 2x}$

$2x + 1$

$-(2x - 2)$ → $2(x-1) = 2x - 2$

$\underline{-2x + 2}$

3 → Falls Rest $\neq 0$ $\quad \frac{\text{Rest}}{\text{geteiltes Polynom}}$

Asymptote: Eine Gerade, an die sich der Graph der Funktion immer weiter annähert.

Arten von Polynomen

Nullpolynom

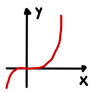
$f(x) = 0$ → Grad $-1 / -\infty$

z.B.

Monome

$f(x) = 3x^5$ → nur ein Glied

z.B.



Binome

Polynome mit zwei Glieder $(a+b,\ x^2 - 4,\ \frac{1}{3}y - z)$

z.B. $x^2 - x - 2$

1. Welche zwei Zahlen multiplizieren für -2 ?
2. Welche zwei Zahlen addieren für $-x$?

$= (x+1)(x-2)$

1. $1 \cdot -2 = -2$
2. $1 + (-2) = -1$

Polynom mit 2 Unbekannten

z.B. Gesuchte Werte für Parameter a und b bestimmen mit Hilfe eines Gleichungssystemes und zugehörigen Graph skizzieren. $p(x) = ax^2 + b$, $p(-2) = -16$, $p(8) = 14$

$$\left.\begin{array}{ll} (1)\ p(-2): & 4a + b = -16 \\ (2)\ p(8): & 64a + b = 14 \end{array}\right\}$$ Gleichungssystem aufstellen

$$\left.\begin{array}{ll} (1)\ 4a + b = -16 & \mid -4a \\ b = -16 - 4a & \end{array}\right\}$$ nach a oder b auflösen

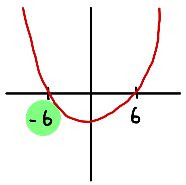
$$\left.\begin{array}{lll} \text{in (2)} & 64a - 16 - 4a = 14 & \mid +16 \\ & 60a = 30 & \mid :60 \\ & a = 0.5 & \end{array}\right\}$$ a oder b von (1) in (2) einsetzen

in b: $b = -16 - 4 \cdot 0.5 = -18$ } a oder b von (2) in (1) einsetzen

Parameter: $a = 0.5$, $b = -18$

Skizzieren:

$$\left.\begin{array}{ll} p(x) & = 0.5x^2 - 18 \\ & = 0.5(x^2 - 36) \\ & = 0.5(x+6)(x-6) \end{array}\right\}$$ a und b in p(x) einsetzen



Nullstellen: $x_0 = -6,\ x_1 = 6$ } Nullstellen bestimmen

Funktion in Linearfaktoren zerlegen

z.B. $y = f(x) = 3x^5 + 3x^4 - 36x^3 - 36x^2 + 81x + 81$

1. Nullstelle erraten durch pröbeln: $x_0 = -1$

	3	3	-36	-36	81	81
$x_0 = -1$		-3	0	36	0	-81
	3	0	-36	0	81	0

$q(x) = 3x^4 - 36x^2 + 81$

$f(x) = (x+1)\underbrace{(3x^4 - 36x^2 + 81)}$

2. Nullstelle erraten durch pröbeln: $x_0 = -3$

	3	0	-36	0	81
$x_0 = -3$		-9	27	27	-81
	3	-9	-9	27	0

$q(x) = 3x^3 - 9x^2 - 9x + 27$

$f(x) = (x+1)(x+3)\underbrace{(3x^3 - 9x^2 - 9x + 27)}$

3. Nullstelle erraten durch pröbeln: $x_0 = 3$

	3	-9	-9	27
$x_0 = 3$		9	0	-27
	3	0	-9	0

$q(x) = 3x^2 - 9$

$f(x) = (x+1)(x+3)(x-3)(3x^2 - 9)$

$= 3(x+1)(x+3)(x-3)\underbrace{(x^2 - 3)}$

4. Nullstelle bestimmen, dazu = 0 setzen:

$x^2 - 3 = 0 \quad \mid +3$

$x^2 = 3 \quad \mid \sqrt{\ }$

$x = \pm\sqrt{3}$

$f(x) = (x+1)(x+3)(x-3)(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$

Polynom Grad Bestimmung

f und g seien Polynome mit Grad 5 bzw. 3

z.B. $f + g = x^5 + x^3 = 5$

$f \cdot g = x^5 \cdot x^3 = x^8 = 8$

$3f + 2g = 3x^5 + 2x^3 = 5$

$f \circ g = (x^3)^5 = x^{15} = 15$

$g \circ (f \circ g) = ((x^3)^5)^3 = x^{45} = 45$