# Informationstheorie

Information ist etwas (Signal, Code, Wert, Symbol, ...), dass vor dem Eintreffen nicht schon bekannt ist.

## Auftretenswahrscheinlichkeit

$P(x_n) = \frac{k(x_n)}{K}$, K : Totale Anzahl Ereignisse, $k(x_n)$: Absolute Häufigkeit von $x_n$ in K Ereignissen

z.B. Wetterbericht über K Tage beobachtet: $w_0$ "schlecht" an 101 Tage, $w_1$ "gut" an 97 Tage, $w_2$ "wechselhaft" an 167 Tage

Zahl der Ereignisse (101, 97, 167) sind deren absolute Häufigkeit $k(x_n)$.

Summe der absoluten Häufigkeit $k(x_n)$ ergibt die Anzahl K : K = 101 + 97 + 167 = 365

Auftretenswahrscheinlichkeiten sind: $P(w_0) = \frac{101}{365} = 0.28$, $P(w_1) = \frac{97}{365} = 0.26$, $P(w_1) = \frac{167}{365} = 0.46$

## Informationsgehalt

Je seltener ein Ereignis eintritt, desto grösser ist der Informationsgehalt (Überraschungseffekt).

$$I(x_n)\,[\text{Bit}] = \log_2\left(\frac{1}{P(x_n)}\right) = -\log_2\left(P(x_n)\right)$$

z.B. Wie gross ist im Wetterbericht der Informationsgehalt $I(x_n)$

$I(w_0) = -\log_2(0.28) = 1.83$ Bit, $I(w_1) = -\log_2(0.26) = 1.94$ Bit, $I(w_2) = -\log_2(0.46) = 1.12$ Bit

## Entropie (Mittlerer Informationsgehalt)

Je grösser das Durcheinander der Symbole, je ungewisser der Zustand des Systems oder je höher die Anzahl der möglichen Zustände des Systems desto grösser die Entropie. Entropie liefert optimale Anzahl Bits pro Symbol.

$H\,[\text{Bit/Symbol}] = \sum_{n=0}^{N-1} P(x_n) \cdot I(x_n)$ N = Anzahl verschiedener Symbole, Erwartungswert $E\{S_k\} = \sum_{n=1}^{N} P(x_n) \cdot x_n$

Alle Symbole haben gleiche Auftretenswahrscheinlichkeit: $H_{max}\,[\text{Bit/Symbol}] = \log_2(N)$

z.B. 1111 0000

$$\left.\begin{aligned} x_1 = 1,\ P(x_1) = \frac{4}{8} = 0.5,\ I(x_1) = \log_2\left(\frac{1}{0.5}\right) = 1 \\ x_0 = 0,\ P(x_0) = \frac{4}{8} = 0.5,\ I(x_0) = \log_2\left(\frac{1}{0.5}\right) = 1 \end{aligned}\right\} N = 2$$

$$H = \sum_{n=0}^{2-1} P(x_n) \cdot I(x_n) = 0.5 \cdot 1 + 0.5 \cdot 1 = 1 \text{ Bit/Symbol}$$

$$H = \log_2(2) = 1 \text{ Bit/Symbol}$$

### Discrete Memoryless Source (DMS)

Discrete : Die Quelle liefert zeitlich einzelne Ereignisse

Memoryless : Symbole sind statisch unabhängig voneinander

## Binary Memoryless Source (BMS)

Es handelt sich um ein DMS, die aber nur 2 verschiedene Ereignisse erzeugt. Wenn p die Wahrscheinlichkeit des einen Symboles ist, folgt (1-p) für das andere Symbol.

Entropie: $H_b\,[\text{Bit/Symbol}] = p \cdot \log_2 \frac{1}{p} + (1-p) \cdot \log_2 \frac{1}{1-p}$