Kurvendiskussion

Fragenkatalog für die Kurvendiskussion

1. Definitionsbereich?
2. Symmetrieeigenschaften (gerade/ungerade), Periode?
3. Schnittpunkte mit Achsen, Polstellen?
4. Randpunkte bzw. Verhalten, wenn x gegen die Grenzen des Definitionsbereichs strebt?
5. Kandidaten für Extrema bestimmen und untersuchen
6. Wendepunkte suchen
7. Tabelle von Werten aufstellen (falls noch nötig)

Achtung: Meistens ist es nicht nötig, alle der obigen Schritte durchzuführen. Manchmal sind einige der Fragen auch praktisch unbeantwortbar (z.B. Nullstellen). Ein wichtiger Aspekt der Kurvendiskussion besteht darin, für eine gegebene Funktion jeweils die "passenden" Schritte zu finden, um mit möglichst wenig Rechenaufwand zu einer guten Skizze des Graphen zu kommen.

Beispiel $f(x) = \frac{-5x^2+5}{x^3} = -5x^{-1} + 5x^{-3}$

1. Definitionsbereich: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$
2. Symmetrieeigenschaften: ungerade (da alle Exponenten ungerade sind)
3. Nullstellen: $1, -1$ Schnittpunkt mit y-Achse: keine Polstellen: 0

   $\frac{-5x^2+5}{x^3} = 0 \Rightarrow x^2 = 1$
4. Verhalten für $x \to \infty$ und $x \to -\infty$:

   Polynom mit Zählergrad < Nennergrad $\Rightarrow$ Grenzwert $= 0$

   $f(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$, $f(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$
5. Kandidaten für Extrema:

   Bedingung: $f'(x) \stackrel{!}{=} 0$

   $f'(x) = (-5x^{-1} + 5x^{-3})$

   $= 5x^{-2} - 15x^{-4} \stackrel{!}{=} 0 \quad | \cdot x^4$

   $= 5x^2 - 15 = 0$

   $\Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow$ Kondition: $x_1 = \sqrt{3}$, $x_2 = -\sqrt{3}$

   $f''(x) = -10x^{-3} + 60x^{-5}$

   $f''(x_1) = f''(\sqrt{3}) > 0 \Rightarrow$ rel. Minimum bei x_1

   einsetzen ergibt: rel. Minimum in $(\sqrt{3}, f(\sqrt{3})) \approx (1.73, -1.92)$

   wegen Symmetrie: rel. Minimum bei $x_2 \approx (-1.73, 1.92)$

6. Kandidaten für Wendepunkte:

   Bedingung: $f''(x) \stackrel{!}{=} 0$

   $f''(x) = -10x^{-3} + 60x^{-5} \stackrel{!}{=} 0 \quad | \cdot x^5$

   $-10x^2 + 60 = 0$

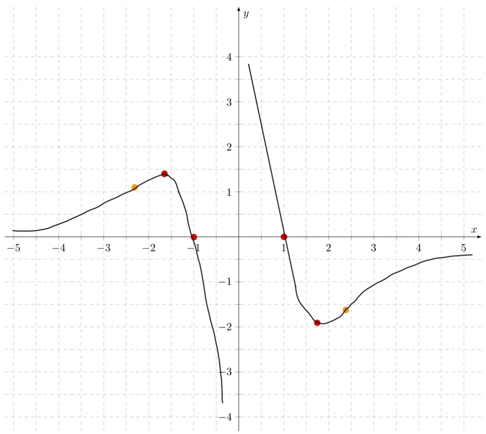
   $\Rightarrow x^2 = 6 \Rightarrow x_1 = \sqrt{6}, x_2 = -\sqrt{6}$

   $f'''(x) = 30x^{-4} - 300x^{-6}$

   einsetzen: $f'''(x_1) = f'''(\sqrt{6}) \neq 0 \Rightarrow$ Wendepunkt bei $x_1 = \sqrt{6} \approx 2.45$

   $(\sqrt{6}, f(\sqrt{6})) \approx (2.45, -1.75)$

   wegen Symmetrie: Wendepunkt in $(-2.45, 1.70)$

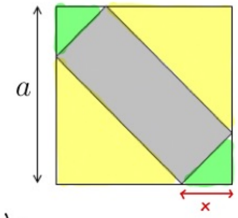


Hilfreiche Schritte beim Lösen von Extremwertaufgaben

1. Zielgrösse identifizieren.
2. Unabhängige Variable identifizieren.
3. Definitionsbereich bestimmen.
4. Zielgrösse als Funktion der unabhängigen Variablen ausdrücken; ev. eine qualitative Skizze des Graphen machen.
5. Relative Maxima resp. Minima bestimmen; Randpunkte auch berücksichtigen!
6. Untersuchen, welche der relativen Extrema auch absolute Extrema sind (inklusive – bei offenen und halboffenen Intervallen – Betrachtung der Funktion in der Nähe des Randes)
7. Die gesuchte Information aus den Berechnungen extrahieren.
   (Ev. nachschauen, nach welcher Grösse gefragt wurde: Extremal*stelle*? Extremal*wert*? Extremal*punkt*?)

Beispiel 1

Einem Quadrat der Seitenlänge a soll ein Rechteck mit grösstmöglichem Flächeninhalt einbeschrieben werden. Die Seiten des Rechtecks sollen parallel zu den Diagonalen des Quadrates sein.



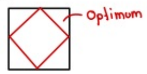
1. Zielgrösse: Flächeninhalt A des Rechtecks
2. Unabhängige Variable: Abstand x der Rechteck-Ecke zur Quadrat-Ecke
3. Definitionsbereich: $(0, a)$
4. Zielgrösse als Funktion der unabhängigen Variablen ausdrücken:

   $f(x) = (\text{Fläche Quadrat}) - \text{Dreiecksflächen} = a^2 - 2 \cdot \frac{(a-x)^2}{2} - 2x \cdot \frac{x^2}{2} = a^2 - (a-x)^2 - x^2 = a^2 - (a^2 - 2ax + x^2) - x^2$
   $= 2ax - 2x^2$
5. Relative Maxima bestimmen

   Bedingung: $f'(x) \stackrel{!}{=} 0$

   $f'(x) = 2a - 4x \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow x = \frac{a}{2}$

   $f''(x) = -4$, $f''(\frac{a}{2}) = -4 < 0 \Rightarrow$ rel. Maximum bei $a/2$



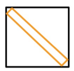
6. Verhalten am Rand

   $\lim_{x\to 0} f(x) = 2 \cdot a \cdot 0 = 2 \cdot 0^2 = 0$, $\lim_{x \to 2a} f(x) = 2a \cdot a - 2a^2 = 0$

7. Gesuchte Information

   Für $x = \frac{a}{2}$ bekommt man ein Rechteck mit maximalen Inhalt

Notiz:



Es gibt kein Minimum,
je kleiner x umso kleiner der Flächeninhalt