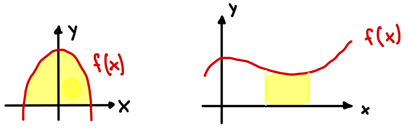
Integrale

Flächeninhalt zwischen der x-Achse und einer Funktion.



Definition: $\sum_{k=1}^{n} f(x_k) \cdot \Delta x = \int_a^b f(x)\,dx$

- Wahl x_k spielt keine Rolle
- Integralzeichen = Summenzeichen

Bemerkung: $0 = \int_a^a f(x)\,dx$

$b<a$: $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

$b \in [a,c]$: $\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$

Stammfunktion

Zur Bestimmung eines Integrals notwendig.

$f(x)$ = Funktion, $F(x)$ = Stammfunktion

$f(x) = x^n \longrightarrow F(x) = \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1}$

z.B. $f(x) = 8x^3$

$F(x) = \frac{8}{4}x^4 = 2x^4 + c$ abgeleitet wieder $f(x)$

z.B $f(x) = \frac{x^2}{3} - \frac{x}{4} = \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4}x$ $\quad \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} \quad \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}$

$F(x) = \frac{\frac{1}{3}}{3}x^3 - \frac{\frac{1}{4}}{2}x^2 = \frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{8}x^2 + c$

Beliebige Konstante nur bei unbestimmtem Integral

Unbestimmtes Integral

Bestimmung aller Stammfunktionen einer Funktion.

Keine Integrationsgrenze

$\int f(x)\,dx = F(x) + c$

Integrand, Differential, Integrationskonstante

z.B. $\int 4x^6\,dx$ Stammfunktion

$= \frac{4}{7}x^7 + c$

Integration von Polynomfunktionen

Stammfunktion: $f(x) = c \longrightarrow F(x) = c \cdot x$

$(n \in \mathbb{R},\ n \neq -1)$ $\quad f(x) = x^n \longrightarrow F(x) = \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1}$

$f(x) = \frac{1}{x} \longrightarrow F(x) = \ln(|x|)$

z.B. $f(x) = 2x^2 + 3x - 1$, berechne $\int_1^2 (2x^2 + 3x - 1)\,dx$

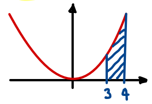
1. Stammfunktion bestimmen

   $F(x) = \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - x$

2. Integral ausrechnen

   $F(2) - F(1) = \left(\frac{2}{3}2^3 + \frac{3}{2}2^2 - 2\right) - \left(\frac{2}{3} + \frac{3}{2} - 1\right) = 8.167$

z.B. Inhalt Flächenstück zwischen $x=3$ und $x=4$ durch $f(x) = x^2$ und x-Achse begrenzt.



1. Integral bestimmen

   $\int_3^4 x^2\,dx$

2. Stammfunktion bestimmen

   $F(x) = \frac{1}{3}x^3$

3. Integral ausrechnen

   $F(4) - F(3) = \left(\frac{4^3}{3}\right) - \left(\frac{3^3}{3}\right) = 12.\overline{3}$

Integrationsregeln

Funktion $f(x)$ und $g(x)$, Stammfunktion $F(x)$ und $G(x)$, Konstante c

1. $c \cdot F(x)$ = Stammfunktion von $c \cdot f(x)$

   $\int_a^b c \cdot f(x)\,dx = c \int_a^b f(x)\,dx$

2. $F(x) + G(x)$ = Stammfunktion von $f(x) + g(x)$

   $\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

Achtung keine Formel für Produkte und Quotienten

$\int_a^b (f(x) \cdot g(x))\,dx \neq \left(\int_a^b f(x)\,dx\right) \cdot \left(\int_a^b g(x)\,dx\right)$

$\int_a^b \frac{f(x)}{g(x)}\,dx \neq \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx}$

Ableitungen ausgewählter Funktionen

Potenz- und Logarithmus-Funktionen

- $\int a^x\,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln(a)} + C$
- $\int \ln(x)\,\mathrm{d}x = x \cdot \ln(x) - x + C$
- $\int \log_a(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\ln(a)} \cdot (x \cdot \ln(x) - x) + C$

Trigonometrische Funktionen

- $\int \sin(x)\,\mathrm{d}x = -\cos(x) + C$
- $\int \cos(x)\,\mathrm{d}x = \sin(x) + C$
- $\int \tan(x)\,\mathrm{d}x = -\ln|\cos(x)| + C$
- $(\tan(x))' = 1+\tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$ resp. $\int \left(1 + \tan^2(x)\right)\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x = \tan(x) + C$
- $(\arcsin(x))' = (1 - x^2)^{-1/2}$ resp. $\int (1 - x^2)^{-1/2}\,\mathrm{d}x = \arcsin(x) + C$
- $(\arccos(x))' = -(1 - x^2)^{-1/2}$ resp. $\int -(1 - x^2)^{-1/2}\,\mathrm{d}x = \arccos(x) + C$
- $(\arctan(x))' = (1 + x^2)^{-1}$ resp. $\int (1 + x^2)^{-1}\,\mathrm{d}x = \arctan(x) + C$

Bestimmtes Integral

Bestimmung des Flächeninhaltes einer Funktion.

Zwei Integrationsgrenzen

$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

z.B. $\int_0^1 2x\,dx = [x^2]_0^1 = 1^2 - 0^2 = 1$

1. Stammfunktion $F(x)$ berechnen und in eckige Klammer schreiben
2. Integrationsgrenzen a und b in $F(x)$ einsetzen
3. $F(b)$ von $F(a)$ abziehen

Integral mit unbekannter Grenze

Für welche Werte von a ist die untenstehende Gleichung erfüllt?

$$\int_1^a 1 - \frac{4}{x^2}\,\mathrm{d}x = 0$$

1. Stammfunktion bestimmen

$$F(x) = 1x - 4x^{-2}$$
$$= 1x - \frac{4}{-1}x^{-1}$$
$$= 1x + 4x^{-1}$$
$$\left[x + \frac{4}{x}\right]_1^a$$

2. Integral ausrechnen

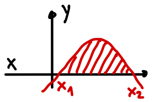
$$F(a) - F(1) = 0$$
$$\left(a + \frac{4}{a}\right) - \left(1 + \frac{4}{1}\right) = 0$$
$$\left(a + \frac{4}{a}\right) - 5 = 0 \quad | \cdot a$$
$$a^2 - 5a + 4 = 0$$
$$(a-1)(a-4) = 0$$
$$\Rightarrow a_1 = 1,\ a_2 = 4$$

Abgeschlossenes Flächenstück

Bestimmen Sie den Inhalt des *abgeschlossenen* Flächenstücks, das durch den Graph der Funktion $f(x) = -x^2 + 3x - 2$ und die x-Achse begrenzt wird.

1. Nullstellen bestimmen

$$0 = -x^2 + 3x - 2 \quad | + x^2 - 3x + 2$$
$$x^2 - 3x + 2 = 0$$
$$(x-1)(x-2)$$
$$x_1 = 1,\ x_2 = 2$$



2. Stammfunktion bestimmen

$$F(x) = \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 2x\right]_1^2$$

3. Integral ausrechnen

$$F(2) - F(1) = \frac{1}{6}$$

Mehrere Nullpunkte

Bestimmen Sie den gesamten Inhalt aller vom Graph der Funktion $f(x) = -3x^3 - 6x^2 + 24x$ und der x-Achse umschlossenen Flächenstücke.

1. Nullstellen bestimmen

$$-3x^3 - 6x^2 + 24x = 0$$
$$-3x(x^2 + 2x - 8) = 0$$
$$-3x(x-2)(x+4) = 0$$
$$x_1 = 0,\ x_2 = 2,\ x_3 = -4$$

2. Stammfunktion bestimmen

$$F(x) = -\frac{3}{4}x^4 - \frac{6}{3}x^3 + \frac{24}{2}x^2$$
$$= \left[-\frac{3}{4}x^4 - 2x^3 + 12x^2\right]_{-4,\,0}^{0,\,2}$$

3. Integral ausrechnen

$$|F(0) - F(-4)| = |-128|$$
$$|F(2) - F(0)| = |20|$$
$$|-128| + |20| = 148$$

Integral mit Parameter

Für jeden Wert des Parameters $t > 0$ beschreibt die Gleichung $f_t(x) = -t \cdot x^2 + 3$ eine Funktion. Wir betrachten das *abgeschlossene* Flächenstück, das durch den Graph von $f(x)$ und die x-Achse begrenzt wird. Wie muss man t wählen, damit sein Flächeninhalt 4 beträgt?

1. Nullstellen bestimmen

$$0 = -t \cdot x^2 + 3 \quad | + tx^2$$
$$tx^2 = 3 \quad | :t$$
$$x^2 = \frac{3}{t} \quad | \sqrt{\ }$$
$$x_1 = -\sqrt{\frac{3}{t}},\ x_2 = \sqrt{\frac{3}{t}}$$

2. Stammfunktion bestimmen

$$F(x) = \left[-\frac{t}{3}x^3 + 3x\right]_{-\sqrt{3/t}}^{\sqrt{3/t}}$$

3. Nach t auflösen

$$4 = \left|F(\sqrt{3/t}) - F(-\sqrt{3/t})\right|$$
$$= \left(-\frac{t}{3}\left(\sqrt{3/t}\right)^3 + 3\cdot\sqrt{\frac{3}{t}}\right) - \left(-\frac{t}{3}\cdot\left(-\sqrt{3/t}\right)^3 + 3\left(-\sqrt{3/t}\right)\right) \quad \left|\left(\sqrt{3/t}\right)^3 = \frac{3}{t}\cdot\sqrt{3/t}\right.$$
$$= \left(-\frac{t}{3}\cdot\frac{3}{t}\cdot\sqrt{3/t} + 3\cdot\sqrt{3/t}\right) - \left(\frac{t}{3}\cdot\sqrt{3/t}^{\,3} - 3\sqrt{3/t}\right) \quad \left| -\frac{t}{3}\cdot\frac{3}{t} = -1\right.$$
$$= \left(-\sqrt{3/t} + 3\cdot\sqrt{3/t}\right) - \left(\frac{t}{3}\cdot\frac{3}{t}\cdot\sqrt{3/t} - 3\sqrt{3/t}\right)$$
$$= \left(-\sqrt{3/t} + 3\cdot\sqrt{3/t}\right) - \left(\sqrt{3/t} - 3\sqrt{3/t}\right)$$
$$= 2\sqrt{3/t} + 2\sqrt{3/t}$$
$$4 = 4\sqrt{3/t} \quad | :4$$
$$1 = \sqrt{3/t} \quad | ^2$$
$$1 = 3/t \quad | \cdot t$$
$$t = 3$$

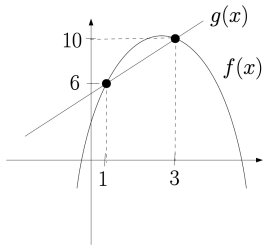
Schnittpunkt

Bestimmen Sie jeweils den Inhalt des abgeschlossenen Flächenstücks, welches vom Graph der Funktion $f(x)$ und vom Graph der Funktion $g(x)$ begrenzt wird.

z.B. $f(x) = -x^2 + 6x + 1$, $g(x) = 2x + 4$

1. Schnittpunkte von $f(x)$ und $g(x)$ bestimmen

$$-x^2 + 6x + 1 = 2x + 4 \quad | -2x - 4$$
$$-x^2 + 6x + 1 - 2x - 4 = 0$$
$$-x^2 + 4x - 3 = 0$$
$$x^2 - 4x + 3 = 0$$
$$(x-1)\cdot(x-3) = 0$$
$$x_1 = 1,\ x_2 = 3,\ (1,6),\ (3,10)$$



2. Stammfunktionen bestimmen

$$H(x) = (-x^2 + 6x + 1) - (2x + 4)$$
$$= -x^2 + 4x - 3$$
$$= -\frac{1}{3}x^3 + \frac{4}{2}x^2 - \frac{3}{1}x$$
$$H(x) = \left[-\frac{x^3}{3} + 2x^2 - 3x\right]_1^3$$

3. Integral ausrechnen $\quad H(3) - H(1) = \frac{4}{3}$

Punktsymmetrie

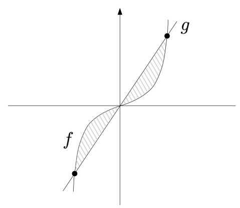
Wir betrachten die Graphen der Funktionen $f(x) = x^5$ und $g(x) = 2x$. Berechnen Sie den gesamten Inhalt aller umschlossenen Flächenstücke.

1. Schnittpunkte von $f(x)$ und $g(x)$ bestimmen

$$x^5 = 2x \quad | :x$$
$$x^4 = 2 \quad | \sqrt[4]{\ }$$
$$x = \pm\sqrt[4]{2} \qquad \boxed{\sqrt[b]{a^c} = a^{\frac{c}{b}}}$$
$$x_1 = 0,\ x_2 = -2^{1/4},\ x_3 = 2^{1/4}$$

2. Stammfunktionen bestimmen

$$H(x) = x^5 - 2x$$
$$= \frac{1}{6}x^6 - x^2$$
$$H(x) = \left[\frac{1}{6}x^6 - x^2\right]_{-2^{1/4},\,0}^{0,\,2^{1/4}}$$



3. Integral ausrechnen

$$|H(0) - H(-2^{1/4})| = |-0.943|$$
$$|H(2^{1/4}) - H(0)| = |-0.943|$$
$$|-0.943| + |-0.943| = 1.88$$