Mengen

Element

$y \in X$: y ist ein Element von X

$y \notin X$: y ist kein Element von X

z.B. $A = \{2,3,4,5,6,7\}, 3 \in A, 9 \notin A$

Teilmengen

$X \subseteq Y$: X ist eine Teilmenge von Y, jedes Element von X ist auch ein Element von Y. $(X \subseteq Y :\Leftrightarrow \forall x\,(x \in X \Rightarrow x \in Y))$

z.B. $\{1,2\} \subseteq \{1,2\}$ → alle echten Teilmengen sind auch Teilmengen

Ist $A \subseteq B$ so gilt: $A \cap B = A$, $A \cup B = B$, $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$, $A \cap \emptyset = \emptyset$, $A \cup \emptyset = A$, $A \cup B \setminus A = B$

$X \subsetneq Y$: X ist eine echte Teilmenge von Y, X ist nicht die gleiche Teilmenge wie Y. $(X \subsetneq Y :\Leftrightarrow X \subseteq Y \wedge X \neq Y)$

z.B. $\{1,2\} \subsetneq \{1,2,3\}$ → X enthält weniger Elemente als Y

(!) $\emptyset$ ist Teilmenge jeder Menge, aber $\emptyset$ ist nicht Element ($\in$) jeder Menge z.B. $\emptyset \notin \{2\}$

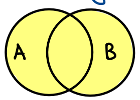
Vereinigung

$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ oder } x \in B\}$ (wobei)

Mehrere Mengen: $\bigcup_{j=1}^{n} A_j = A_1 \cup \ldots \cup A_n$

z.B. $A = \{1,2,3\}, B = \{2,3,4\}, A \cup B = \{1,2,3,4\}, \emptyset \cup A = A$

Venn-Diagramm

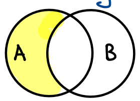


Komplement

Darstellung mit definierenden Eigenschaften

$A \setminus B := \{x \in A \mid x \notin B\} = A \cap \overline{B}$

$A = (A \setminus B) \cup B$



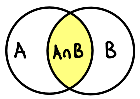
z.B. $A = \{1,2,3\}, B = \{2,3,4\}, A \setminus B = \{1\}$

$\mathbb{N} \setminus (\mathbb{N} \setminus \mathbb{Z})$, $\mathbb{N} \setminus \mathbb{Z} = \emptyset$ ($\mathbb{Z}$ beinhaltet alle $\mathbb{N}$), $\mathbb{N} \setminus \emptyset = \mathbb{N}$

Schnittmenge

$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ und } x \in B\}$ (wobei)

Mehrere Mengen: $\bigcap_{j=1}^{n} A_j = A_1 \cap \ldots \cap A_n$



z.B. $A = \{1,2,3\}, B = \{2,3,4\}, A \cap B = \{2,3\}, \emptyset \cap A = \emptyset$

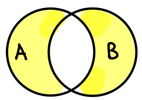
$\{3x \mid x \in \mathbb{N}\} \cap \{5x \mid x \in \mathbb{N}\}$ = alle $\mathbb{N}$ die ein Vielfaches von 15 sind $\{15x \mid x \in \mathbb{N}\}$

Symmetrische Differenz

$A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

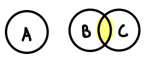
$= \{x \in A \cup B \mid (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \notin A \wedge x \in B)\}$

$= \{x \in A \cup B \mid x \in A \,\dot\vee\, x \in B\}$



Disjunkt

$X \cap Y = \emptyset$: Mengen haben keine gemeinsamen Elemente



nicht paarweise disjunkt $(A \cap B \cap C = \emptyset)$

paarweise disjunkt

Mächtigkeit

Die Anzahl der Elemente einer Menge A heisst Mächtigkeit $|A|$ der Menge.

(!) Anzahl bezieht sich nur auf 1. Level: $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$, $|A| = 3$

z.B. $A = \{1,3,5,7,9\}$, $|A| = 5$ / $A = \{1,2,2\}$, $|A| = 2$

$|A| = 2, |B| = 3 \rightarrow |A^3 \times B^2| = 2^3 \cdot 3^2 = 72$

Potenzmenge

Ist A eine beliebige Menge, dann bezeichnen wir mit $P(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$ die Potenzmenge von A, die genau die Teilmengen von A als Element enthält.

$\emptyset \in P(A)$: jede Potenzmenge enthält die leere Menge.

z.B. $P(\{\emptyset\}) = \{\emptyset\} \neq \emptyset$, $P(P(\emptyset)) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

$P(\{0,1,2\}) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}, \{0,2\}, \{1,2\}, \{0,1,2\}\}$

$P(\{a,\{c\}\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{\{c\}\}, \{a,\{c\}\}\}$

$P(P(\{a\})) = P(\{\emptyset,\{a\}\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{a\}\}, \{\emptyset,\{a\}\}\}$

(!) Schema: {leer}, {einzelne Werte}, {Kombinationen}, {ganze Menge}

Mächtigkeit der Potenzmenge: $|P(A)| = 2^{|A|}$

z.B. Mächtigkeit der Potenzmenge der Menge $A = \{a,b\}$

1. Mächtigkeit der Menge → $|A| = 2$
2. Mächtigkeit der Potenzmenge → $|P(A)| = 2^{|A|} = 2^2 = 4$

↳ $P(A) = \{\{\emptyset\}, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$

Tupel

Eine geordnete Zusammenfassung von Objekten heisst Tupel.

Reihenfolge ist relevant : $(1,2,3) \neq (2,1,3)$

(!) Bei Mengen ist die Reihenfolge irrelevant : $\{1,2,3\} = \{2,1,3\}$

Rechenregeln

Kommutivität : $A \cap B \Leftrightarrow B \cap A$

$A \cup B \Leftrightarrow B \cup A$

Assoziativität : $A \cup (B \cup C) \Leftrightarrow (A \cup B) \cup C$

$A \cap (B \cap C) \Leftrightarrow (A \cap B) \cap C$

Distributivität : $A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$A \cup (B \cap C) \Leftrightarrow (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Idempotenz : $A \cap A \Leftrightarrow A$

$A \cup A \Leftrightarrow A$

De-Morgan : $C \setminus (A \cap B) \Leftrightarrow (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$

$C \setminus (A \cup B) \Leftrightarrow (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$

Bindung : 1. $\setminus$, 2. $\cap$, 3. $\cup$, 4. $\subseteq$

Intervall

$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$

$]a,b[= (a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$

$]a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$

$[a,b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$

Falls Intervall nach links/rechts nicht begrenzt so schreibt man $-\infty$ bzw. ∞ für a bzw. b

$]-\infty, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$

Zahlen

$\mathbb{N}$: natürliche Zahlen $\{0,1,2,3,\ldots\}$

$\mathbb{Z}$: ganze Zahlen $\{\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\}$

$\mathbb{Q}$: rationale Zahlen $\{\ldots,-\frac{2}{1},-\frac{1}{2},-\frac{1}{1},0,\frac{1}{1},\frac{1}{2},\frac{2}{1},\ldots\}$

$\mathbb{R}$: reelle Zahlen $\sqrt{2}, \pi, e, \ldots$

Identische Mengen

Zwei Mengen X und Y sind gleich, wenn $X \subseteq Y$ und $Y \subseteq X$ gilt.

Kartesisches Produkt

Das kartesische Produkt $A \times B$ zweier Mengen A, B ist definiert als Menge aller geordneten Paare (a,b), $a \in A$, $b \in B$.

Es wird jedes Element aus A mit jedem Element aus B kombiniert.

Es beschreibt alle möglichen Kombinationen aus Elementen von A und B.

$\prod_{i=1}^{n} A_i$

z.B. $A = \{1,3\}$, $B = \{0,2\}$

$A \times B = \{(1,0),(1,2),(3,0),(3,2)\}$

$A^2 = \{(1,1),(1,3),(3,1),(3,3)\}$

$(B \times A) \times B \longrightarrow B \times A = \{(0,1),(0,3),(2,1),(2,3)\}$

$= \{((0,1),0),((0,1),2),((0,3),0),((0,3),2),$
$((2,1),0),((2,1),2),((2,3),0),((2,3),2)\}$

$A \times B \neq B \times A$ → Tupel haben eine innere Ordnung

$\{\emptyset\} \times \emptyset = \emptyset$, $\emptyset \times \{1\} = \emptyset$, $\{\emptyset\} \times \{1\} = \{(\emptyset,1)\}$, $\{\emptyset\} \times \{\emptyset\} = \{(\emptyset,\emptyset)\}$

Partitionen

Partition einer Menge ist die Zerlegung einer Menge in Teilmengen, sodass jedes Element der Menge in genau einer dieser Teilmengen enthalten ist.

Ein Element von P wird Block (Blöcke) genannt und erfüllen folgendes:

- Nichtleer und paarweise disjunkt
- Vereinigung der Teilmenge ergibt die Menge

z.B. Menge $A = \{1,2,3\}$

✓ Mögliche Partitionen: $P_1 = \{\{1\},\{2,3\}\}$ / $P_2 = \{\{1,2,3\}\}$ / $P_3 = \{\{1\},\{2\},\{3\}\}$

⊗ Keine Partition: $Q = \{\{1,2\},\{2,3\}\}$ von $A = \{1,2,3\}$

Abzählbar

Falls eine surjektive Funktion $F: \mathbb{N} \to X$ existiert

- Endliche Menge
- Jede Teilmenge einer endlichen Menge
- Kartesisches Produkt von abzählbaren Mengen
- Vereinigung ($\cup$) von abzählbaren Mengen

z.B. $\{1,2,3\}, \emptyset, \mathbb{P}, \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$

Überabzählbar

Menge die nicht abzählbar ist

- Menge aller unendlichen Binärsequenzen
- Intervalle z.B. $[0,1]$
- Potenzmengen z.B von $\mathbb{N}$ $P(\mathbb{N})$
- Menge aller Funktionen z.B. $F: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

z.B. $\mathbb{I}, \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, (0,1)$

Abzählbar / Überabzählbar Beweis

Sei $X \cup Y$ überabzählbar, können Sie etwas über die Abzählbarkeit von X und y sagen?

$X \cup Y$ überabzählbar $\Rightarrow$ X überabzählbar $\vee$ Y überabzählbar

Kontraposition:

X abzählbar $\wedge$ Y abzählbar $\Rightarrow$ $X \cup Y$ abzählbar

Mindestens eines muss überabzählbar sein.

Sei $X \setminus Y$ abzählbar und X überabzählbar, können Sie etwas über die Abzählbarkeit von Y sagen?

$X \setminus Y$ abzählbar $\wedge$ X überabzählbar $\Rightarrow$ Y überabzählbar

Kontraposition:

Y abzählbar $\Rightarrow$ $X \setminus Y$ überabzählbar $\vee$ X abzählbar

Y muss überabzählbar sein.