Funktionen

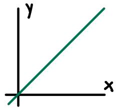
Definitionsbereich D: Wertebereich der einsetzbaren Elemente

Wertebereich W: Wertebereich aller Ergebnisse, wenn alle Zahlen aus D in die Funktion eingesetzt werden

z.B. $\frac{30}{x} = \frac{30}{2} = 15$

Funktion: $y = f(x)$, y: Output, x: Input, f: Logik

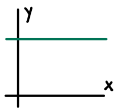
Identitätsfunktion



Jede reele Zahl ($\mathbb{R}$) auf sich selbst abbilden.

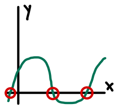
z.B. $f(x) = x \Leftrightarrow f(2) = 2$

Konstante Funktion



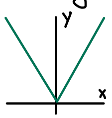
Für alle eingesetzten Variablen, wird der gleiche Funktionswert zurückgegeben. z.B. $f(x) = 3$

Nullstellen einer Funktion



Wenn der Funktionswert 0 ist, schneidet die Funktion an der Nullstelle der x-Achse. z.B. $x_0 \in D$ mit $f(x_0) = 0$

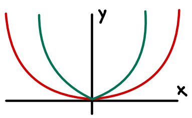
Betragsfunktion



$f(x) = |x|$

z.B. $f(-x) = |-x| = |x| \Rightarrow$ gerade

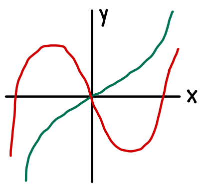
Symmetrien



Gerade wenn nur gerade Exponenten

z.B. $f(-x) = f(x)$, $f(x) = x^2$, $f(x) = x^6 + x^4 + 7$

Achsensymmetrisch bezüglich y-Achse



Ungerade wenn nur ungerade Exponenten

z.B. $f(-x) = -f(x)$, $f(x) = x^3$, $f(x) = x^7 + x^5 + 3x$

Punktsymmetrisch bezüglich dem Nullpunkt

Operationen mit Funktionen

$f: D \to \mathbb{R}$ mit $x \to f(x)$, $g: D \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto g(x)$

$f+g: D \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f(x) + g(x)$

$f-g: D \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f(x) - g(x)$

$f \cdot g: D \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f(x) \cdot g(x)$

$\frac{f}{g}: D \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$! Falls $g(x) \neq 0$ für alle $x \in D$

$c \cdot f(x): D \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto c \cdot f(x)$! Für ein festes $c \in \mathbb{R}$

z.B. $f(x) = -3x + 4$ und $g(x) = x^2$

$(f+g)(x) = (-3x+4) + x^2 = x^2 - 3x + 4$, $(f+g)(2) = (-3 \cdot 2 + 4) \cdot 2^2 = 2$

$(f \cdot g)(x) = (-3x+4) \cdot x^2 = -3x^2$, $(f \cdot g)(2) = (-3 \cdot 2 + 4) \cdot 2^2 = -8$

Komposition

$(g \circ f)(x) = g(f(x))$

z.B. $f(x) = 3x + 7$, $g(x) = \sqrt{x}$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{3x+7}$

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 3\sqrt{x} + 7$

$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = (3x+7) \cdot \sqrt{x}$

Summenzeichen

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

n: Endwert
k=1: Startwert
k: Laufvariable
a_k: Funktion (Summand) abhängig von k

z.B. $\sum_{k=1}^{4} 4 \cdot k = 4 + 8 + 12 + 16 = 40$

↳ $4 \cdot 1 = 4$, $4 \cdot 2 = 8$, $4 \cdot 3 = 12$, $4 \cdot 4 = 16$ } 4 Mal addieren

Doppelsumme

z.B. $\sum_{k=0}^{2} \sum_{i=3}^{5} (k \cdot i - i^2) = \sum_{k=0}^{2} \left(\sum_{i=3}^{5} (k \cdot i - i^2) \right)$

$= \sum_{k=0}^{2} \left((k \cdot 3 - 3^2) + (k \cdot 4 - 4^2) + (k \cdot 5 - 5^2) \right)$

$= \sum_{k=0}^{2} (12k - 50) = (12 \cdot 0 - 50) + (12 \cdot 1 - 50) + (12 \cdot 2 - 50)$

$= -144$

z.B. $\sum_{i=1}^{3} \left(\sum_{j=1}^{4} i \cdot (j-2) \right)$

$$\left.\begin{aligned} 1 \cdot (1-2) &= -1 \\ 1 \cdot (2-2) &= 0 \\ 1 \cdot (3-2) &= 1 \\ 1 \cdot (4-2) &= 2 \end{aligned}\right\} -1+0+1+2 = 2 \quad = \quad \left.\begin{aligned} 1 \cdot 2 &= 2 \\ 2 \cdot 2 &= 4 \\ 3 \cdot 2 &= 6 \end{aligned}\right\} 2+4+6 = 12$$

Rechenregeln

Vorziehen konstanter Faktoren:

$$\sum_{k=s}^{n} (c \cdot a_k) = c \cdot \sum_{k=s}^{n} a_k$$

Addition von Summen gleicher Länge:

$$\sum_{k=s}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=s}^{n} a_k + \sum_{k=s}^{n} b_k$$

Aufspalten einer Summe:

$$\sum_{k=s}^{n} a_k = \sum_{k=s}^{m} a_k + \sum_{k=m+1}^{n} a_k \quad (s < m < n)$$

Laufvariable kann beliebig benannt werden:

$$\sum_{k=s}^{n} a_k = \sum_{r=s}^{n} a_r = \sum_{i=s}^{n} a_i$$

Achtung:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \cdot b_k \neq \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot \sum_{k=1}^{n} b_k, \quad \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \neq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k \right)^2$$

Arithmetische Summenformel

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Summe der Quadratzahlen

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Umkehrfunktion

Für eine Funktion f gibt es eine Umkehrfunktion g/f^{-1}, wenn f injektiv ($x_1 \neq x_2 \rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$) ist.

$f: D \mapsto W$, $g/f^{-1}: W \mapsto D$

z.B. $y = f(x) = \frac{3}{2x-5}$ mit $D = \mathbb{R} \setminus \{2.5\}$

1. Nach x auflösen:

$$y = \frac{3}{2x-5} \quad | \cdot (2x-5)$$

$$y(2x-5) = 3$$

$$2xy - 5y = 3 \quad | + 5y$$

$$2xy = 3 + 5y \quad | : 2y$$

$$x = \frac{3+5y}{2y}$$

2. Name der Variablen vertauschen:

$$y = \frac{3+5x}{2x} = g(x) = \frac{3+5x}{2x}$$

Polynome

Eine bestimmte Art mehrgliedriger Terme.
z.B. $a+b+c$, $10x^5-x+3x^3+4$, $3x^2-8x+2$

Definition

$y = f(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0$ mit $a_n \neq 0$

n : Grad der Polynomfunktion

$a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$: Koeffizienten

Definitionsbereich: $\mathbb{R}$

z.B $\boxed{-4x^3} + \boxed{2x^2} + \boxed{3x} \boxed{-1}$

- Grad 3
- Koeffizienten (höchster Potenz $-4x^3$ auch als Leitkoeffizient bezeichnet)
- Glieder

Horner Schema

Effiziente Weise um ein Polynom auszurechnen. (Alternative zur Polynomdivision)

z.B. Zahl einsetzen : $6x^4 - x^3 + 2x^2 - 3 = f(x)$ $\quad f(2) = ?$

	6	-1	2	0	-3
$x=2$		12	22	48	96
		-1	+2	+0	-3
	6	11	24	48	93
	·2	·2	·2	·2	

Ergebnis wenn 2 ins Polynom eingesetzt wird

z.B. Nullstellen einsetzen : $3x^3 - 15x + 12 = 0$, $x_0 = 1$

	3	0	-15	12
$x_0 = 1$		3	3	-12
	3	3	-12	0

Nullstelle
(wenn nicht 0 → x_0 nicht Nullstelle)

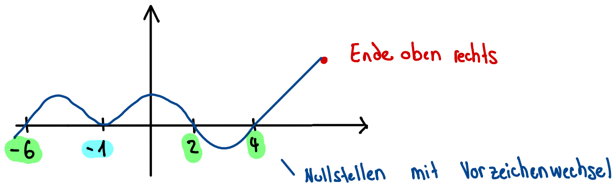
$q(x) = 3x^2 + 3x - 12$, $f(x) = (x-1)(3x^2+3x-12)$

Nullstellen

Zahl einer Funktion, für die die Funktion den Wert 0 annimmt.

Nullstellen erraten : $-3, -2, -1, 1, 2, 3$ probieren

z.B. $2(x+1)^2 (x-4)(x-2)(x+6)$



einfache Nullstelle : $-6, 2, 4$: Durchgang der x-Achse

doppelte Nullstelle : $-1, -1$: Weitergehen auf der gleichen Seite

Zerlegungssatz

Wenn x_0 eine Nullstelle der Polynomfunktion $f(x)$ ist:

existiert eine Polynomfunktion: $q(x) = f(x) = (x - x_0) \cdot q(x)$, z.B. $(x+1)(x-1)(x+3)(x-4) \ldots$

- $(x - x_0)$: Linearfaktor
- $q(x)$: 1. reduzierte Polynom (Grad von $q(x)$ ist 1 kleiner als $f(x)$)

z.B. Polynom $f(x) = 2x^5 + 4x^4 - 54x^3 - 16x^2 + 136x + 96$

$x_0 = 4$ ⟶ Nullstelle von $f(x)$ (erraten durch einsetzen)

Polynomdivision $f(x) : (x-4) = f(x) = (x-4)(2x^4 + 12x^3 - 6x^2 - 40x - 24)$

Polynomdivision

$\frac{x^3}{x} = x^2$ $\quad \frac{2x^2}{x} = 2x$ $\quad \frac{2x}{x} = 2$

z.B. $f_1(x) = (x^3 + x^2 + 1) : (x-1) = x^2 + 2x + 2 + \frac{3}{x-1}$ ⟶ Asymptoten: $x^2 + 2x + 2$

$-(x^3 - x^2)$ → $x^2(x-1) = x^3 - x^2$

$\underline{-x^3 + x^2}$

$2x^2 + 1$

$-(2x^2 - 2x)$ → $2x(x-1) = 2x^2 - 2x$

$\underline{-2x^2 + 2x}$

$2x + 1$

$-(2x - 2)$ → $2(x-1) = 2x - 2$

$\underline{-2x + 2}$

3 → Falls Rest $\neq 0$ $\quad \frac{\text{Rest}}{\text{geteiltes Polynom}}$

Asymptote: Eine Gerade, an die sich der Graph der Funktion immer weiter annähert.

Arten von Polynomen

Nullpolynom

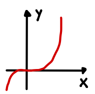
$f(x) = 0$ → Grad -1 / $-\infty$

z.B.

Monome

$f(x) = 3x^5$ → nur ein Glied

z.B.



Binome

Polynome mit zwei Glieder ($a+b$, x^2-4, $\frac{1}{3}y - z$)

z.B. $x^2 - x - 2$

1. Welche zwei Zahlen multiplizieren für -2 ?
2. Welche zwei Zahlen addieren für $-x$?

$= (x+1)(x-2)$

1. $1 \cdot -2 = -2$
2. $1 + (-2) = -1$

Polynom mit 2 Unbekannten

z.B. Gesuchte Werte für Parameter a und b bestimmen mit Hilfe eines Gleichungssystemes und zugehörigen Graph skizzieren. $p(x) = ax^2 + b$, $p(-2) = -16$, $p(8) = 14$

$$\left.\begin{array}{ll} (1)\ p(-2): & 4a + b = -16 \\ (2)\ p(8): & 64a + b = 14 \end{array}\right\}$$ Gleichungssystem aufstellen

$$\left.\begin{array}{ll} (1)\ 4a + b = -16 & \mid -4a \\ b = -16 - 4a & \end{array}\right\}$$ nach a oder b auflösen

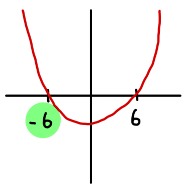
$$\left.\begin{array}{lll} \text{in } (2) & 64a - 16 - 4a = 14 & \mid +16 \\ & 60a = 30 & \mid :60 \\ & a = 0.5 & \end{array}\right\}$$ a oder b von (1) in (2) einsetzen

in b: $b = -16 - 4 \cdot 0.5 = -18$ } a oder b von (2) in (1) einsetzen

Parameter: $a = 0.5$, $b = -18$

Skizzieren:

$$\left.\begin{array}{l} p(x) = 0.5x^2 - 18 \\ \quad = 0.5(x^2 - 36) \\ \quad = 0.5(x+6)(x-6) \end{array}\right\}$$ a und b in p(x) einsetzen



Nullstellen: $x_0 = -6,\ x_1 = 6$ } Nullstellen bestimmen

Funktion in Linearfaktoren zerlegen

z.B. $y = f(x) = 3x^5 + 3x^4 - 36x^3 - 36x^2 + 81x + 81$

1. Nullstelle erraten durch pröbeln: $x_0 = -1$

	3	3	-36	-36	81	81
$x_0 = -1$		-3	0	36	0	-81
	3	0	-36	0	81	0

$q(x) = 3x^4 - 36x^2 + 81$

$f(x) = (x+1)\underbrace{(3x^4 - 36x^2 + 81)}$

2. Nullstelle erraten durch pröbeln: $x_0 = -3$

	3	0	-36	0	81
$x_0 = -3$		-9	27	27	-81
	3	-9	-9	27	0

$q(x) = 3x^3 - 9x^2 - 9x + 27$

$f(x) = (x+1)(x+3)\underbrace{(3x^3 - 9x^2 - 9x + 27)}$

3. Nullstelle erraten durch pröbeln: $x_0 = 3$

	3	-9	-9	27
$x_0 = 3$		9	0	-27
	3	0	-9	0

$q(x) = 3x^2 - 9$

$f(x) = (x+1)(x+3)(x-3)(3x^2 - 9)$

$= 3(x+1)(x+3)(x-3)\underbrace{(x^2 - 3)}$

4. Nullstelle bestimmen, dazu = 0 setzen:

$x^2 - 3 = 0 \quad \mid +3$

$x^2 = 3 \quad \mid \sqrt{\ }$

$x = \pm\sqrt{3}$

$f(x) = (x+1)(x+3)(x-3)(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$

Polynom Grad Bestimmung

f und g seien Polynome mit Grad 5 bzw. 3

z.B. $f + g = x^5 + x^3 = 5$

$f \cdot g = x^5 \cdot x^3 = x^8 = 8$

$3f + 2g = 3x^5 + 2x^3 = 5$

$f \circ g = (x^3)^5 = x^{15} = 15$

$g \circ (f \circ g) = ((x^3)^5)^3 = x^{45} = 45$

Ableitungen

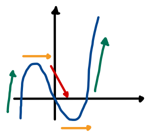
Ableitung $f'(x)$ einer Funktion $f(x)$ gibt die Steigung der Funktion an einem bestimmten Punkt an.

$f'(x)$: Ableitung von Funktion $f(x)$ an der Stelle x

$f'(x) > 0 \rightarrow$ Funktion steigt

$f'(x) < 0 \rightarrow$ Funktion fällt

$f'(x) = 0 \rightarrow$ Funktion hat Extrempunkt

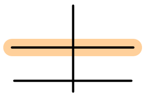


Ableitungsfunktion

Funktion $f(x) = x^k$ mit $k \neq 0 \longrightarrow f'(x) = k \cdot x^{k-1}$

Funktion $f(x) = c$ mit $c \in \mathbb{R} \longrightarrow f'(x) = 0$

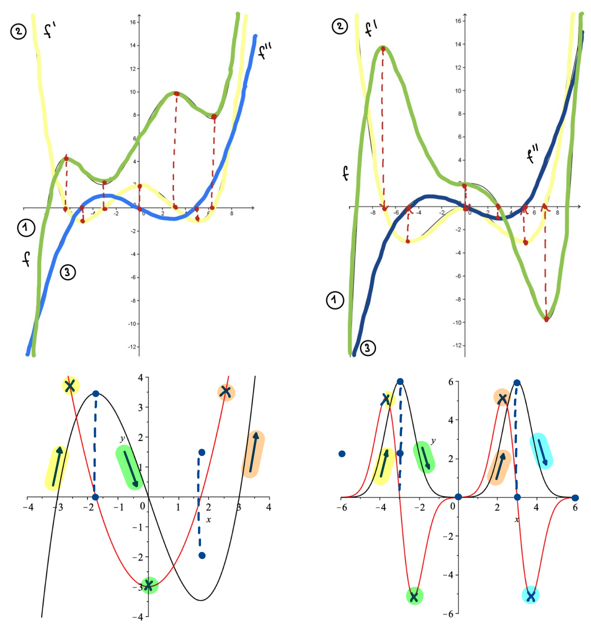
↳ Begründung: Steigung horizontale = 0



Weitere Ableitungen $\longrightarrow$ vorherige Ableitung ableiten

z.B. $f'(x) \longrightarrow f''(x)$, $f''(x) \longrightarrow f'''(x)$

Grafisch



(a) $f(x)$ und $f'(x)$ (b) $g(x)$ und $g'(x)$

Ableitungsregeln

Potenzregel

$f(x) = x^n \rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}$

z.B. $f(x) = x^2 \rightarrow f'(x) = 2x^{2-1} = 2x^1$

$f(x) = x^{-1} \rightarrow f'(x) = -1x^{-1-1} = -x^{-2}$

Faktorregel

$(c \cdot f)'(x) = c \cdot f'(x)$

z.B. $(4x^3)' = 4 \cdot (x^3)' = 4 \cdot 3 \cdot x^2 = 12x^2$

Produktregel

$(u \cdot v)'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$

z.B. $f(x) = ((3x^3 + x^2)(4x^2 + 1))$. Gesucht ist $f'(x)$.

$u = 3x^3 + x^2 \qquad u' = 9x^2 + 2x$

$v = 4x^2 + 1 \qquad v' = 8x$

$f'(x) = (9x^2 + 2x) \cdot (4x^2 + 1) + (3x^3 + x^2) \cdot (8x)$

$= 36x^4 + 9x^2 + 8x^2 + 2x + 24x^4 + 8x^3$

$= 60x^4 + 16x^3 + 9x^2 + 2x$

Quotientenregel

$$\left(\frac{u}{v}\right)'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{(v(x))^2}$$

z.B. $f(x) = \left(\dfrac{3x^2 - x}{2x^3 + 1}\right)$. Gesucht ist $f'(x)$.

$u = 3x^2 - x \qquad u' = 6x^1 - 1$

$v = 2x^3 + 1 \qquad v' = 6x^2$

$$f'(x) = \frac{(6x - 1) \cdot (2x^3 + 1) - (3x^2 - x) \cdot (6x^2)}{(2x^3 + 1)^2}$$

z.B. $f(x) = \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$. Gesucht ist $f'(x)$.

$u = \cos(x) \qquad u' = -\sin(x)$

$v = \sin(x) \qquad v' = \cos(x)$

$$f'(x) = \frac{-\sin(x) \cdot \sin(x) - \cos(x) \cdot \cos(x)}{(\sin(x))^2}$$

$$= \frac{-\sin^2(x) - \cos^2(x)}{\sin^2(x)}$$

Summenregel

$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$

z.B $(7x^5 - 3x^3 + 5x^2 - 14x + 6)'$

$= (7x^5)' - (3x^3)' + (5x^2)' - (14x)' + (6)'$

$= 35x^4 - 9x^2 + 10x - 14$

Kettenregel

$(F \circ u)'(x) = F'(x) \cdot u'(x)$

$F(u)$: äussere Funktion

$u(x)$: innere Funktion

z.B. $f(x) = (x^3 + 4)^{-2}$

$u(x) = x^3 + 4 \qquad u'(x) = 3x^2$

$F(x) = u^{-2} \qquad F'(x) = -2u^{-3}$

$f'(x) = (-2u)^{-3} \cdot 3x^2$

$= -2(x^3 + 4)^{-3} \cdot 3x^2$

z.B. $y = (4x^2 - 2x + 1)^5$

$u(x) = 4x^2 - 2x + 1 \qquad u'(x) = 8x - 2$

$F(x) = u^5 \qquad F'(x) = 5u^4$

$y' = 5u^4 \cdot (8x - 2)$

$= 5(4x^2 - 2x + 1)^4 \cdot (8x - 2)$

z.B. $f(x) = \dfrac{10}{x^3 + 5}$

$u(x) = x^3 + 5 \qquad u(x)' = 3x^2$

$F(x) = \dfrac{10}{u} = 10u^{-1} \qquad F(x)' = -10u^{-2}$

$f'(x) = -10u^{-2} \cdot 3x^2$

$= -10(x^3 + 5)^{-2} \cdot 3x^2$

$= \dfrac{-10 \cdot 3x^2}{(x^3 + 5)^2}$

$= \dfrac{-30x^2}{(x^3 + 5)^2}$

$\dfrac{1}{x^1} = x^{-1}$

$\dfrac{1}{x^2} = x^{-2}$

$\dfrac{10}{x^1} = 10x^{-1}$

Mitternachtsformel

Eine Lösungsformel für quadratische Gleichungen der Form $ax^2 + bx + c = 0$.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

a : Zahl vor x^2

b : Zahl vor x

c : Zahl ohne x

Ableitung bestimmter Funktionen

$(\sin(x))' = \cos(x)$

$(\cos(x))' = -\sin(x)$

$(e^x)' = e^x$

$(a^x)' = a^x \cdot \ln(a)$

$(\ln(x))' = \dfrac{1}{x}$

$(\log_a(x))' = \dfrac{1}{x \cdot \ln(a)}$

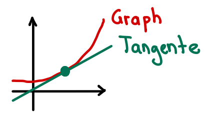
$(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Tangente

Berührt den Graph an genau einer Stelle.

Gleiche Steigung und gleicher Funktionswert wie der Graph an der Berührstelle.

$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$



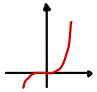
Differenzierbarkeit

Differenzierbar wenn die Ableitung an jeder Stelle definiert ist.

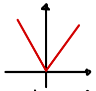
Funktion $f(x)$ an Stelle x_0 differenzierbar, wenn links- und rechsseitige Ableitung gleich.

$\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} < \infty$ = Steigung an x_0

z.B.



differenzierbar



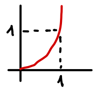
nicht differenzierbar

(!) Wenn der Graph einer Funktion einen Knick hat, ist es nicht differenzierbar.

Fixpunkte

Beim Fixpunkt einer Funktion stimmen x und y Wert in der Funktionskurve überein.

$x = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$



z.B. Fixpunkt: $f(x) = \sqrt{4x^2-1}$

$f(x) = x$

$\sqrt{4x^2-1} = x \quad | (\ )^2$

$4x^2 - 1 = x^2 \quad | -x^2$

$3x^2 - 1 = 0$

$x^2 = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}, \; x_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

Kontrolle

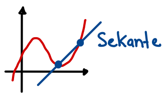
x_1 einsetzen: $\sqrt{4x_1^2-1} = \sqrt{1/3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ✓

x_2 einsetzen: $\sqrt{4x_2^2-1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \neq -\frac{1}{\sqrt{3}}$ ⊗

$\Rightarrow$ nur $x_1 \; \frac{1}{\sqrt{3}}$ ist Lösung!

Sekante

Gerade, welche einen Graphen in zwei Punkten schneidet



$s = mx + b$ — y-Achsenabschnitt

m: Steigung

z.B. $f(x) = x^2 + 1$, $P(0|-1)$, $Q(2|3)$

1. Steigung $m = \frac{(y_2-y_1)}{(x_2-x_1)} = \frac{(3-(-1))}{(2-0)} = 2$

2. y-Achsenabschnitt $s(x) = 2x + b$

$3 = 2 \cdot 2 + b$

$b = -1$

$\Rightarrow s(x) = 2x - 1$

Newton Verfahren

Nullstellen einer Funktion näherungsweise bestimmen

$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

Startwert bestimmen:

Wertetabelle → Vorzeichenwechsel

→ Intervall in dem Vorzeichenwechsel statt findet

→ Mitte des Intervalls

z.B. $f(x) = 5x^3 + 8x^2 - 1 \;\rightarrow\; f'(x) = 15x^2 + 16x$

Wertetabelle:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
f(x)	-64	-9	2	-1	12	71	206

Vorzeichenwechsel

Startwert $x_0 = 0.5$

$x_1 = 0.5 - \frac{5 \cdot 0.5^3 + 8 \cdot 0.5^2 - 1}{15 \cdot 0.5^2 + 16 \cdot 0.5} = 0.36170$

$x_2 = 0.36170 - \frac{5 \cdot 0.36170^3 + 8 \cdot 0.36170^2 - 1}{15 \cdot 0.36170 + 16 \cdot 0.36170} = 0.32515$

⋮

$x_4 = \ldots = 0.32245$ } Näherungswert für eine Nullstelle

$x_5 = \ldots = 0.32245$ } der Funktion f

Linearisierung einer Funktion

Jede differenzierbare Funktion ≈ lineare Funktion, Beste Approximation ⇒ Tangente $(x_0, f(x_0))$

Funktionsgleichung für die Tangente von $f(x)$ an der Stelle x_0: $y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$

Quadratische Funktion

Bestimmen Sie eine quadratische Funktion, welche bei $x = -1$ Steigung 1, bei $x = 1$ Steigung 5 und bei $x = 1$ eine Nullstelle hat.

quadratische Funktion: $f(x) = ax^2 + bx + c \longrightarrow f'(x) = 2ax + b$

Bedingungen: $x = -1$ Steigung 1 $\longrightarrow f'(-1) = 1$

$x = 1$ Steigung 5 $\longrightarrow f'(1) = 5$

$x = 1$ Nullstelle $\longrightarrow f(1) = 0$

1. $f'(-1)$: $-2a + b = 1 \quad |-b, -1$

$-2a - 1 = -b \quad |\cdot(-1)$

$2a + 1 = b$, $2\cdot 1 + 1 = b$, $b = 3$

2. $f'(1)$: $2a + 2a + 1 = 5 \quad |-1$ } b einsetzen

$4a = 4 \quad |:4$

a einsetzen

$a = 1$

3. $f(1)$: $\overset{a}{1}x^2 + \overset{b}{3}x + c = 0$

$1 + 3 + c = 0 \quad |-4$

$c = -4$

4. $f(x) = x^2 + 3x - 4$

Waagrechte Tangente ohne Punkt

Bestimmen Sie jeweils die Punkte des Graphen der folgenden Funktionen mit waagerechter Tangente: z.B. $g(x) = 3(x+1)^2(x-2)$

1. g(x) ableiten

für u' Kettenregel anwenden

Produktregel: $u = 3(x+1)^2$ $\quad u' = 6x+6$

$v = x-2$ $\quad v' = 1$

Kettenregel: $u(x) = x+1$ $\quad u'(x) = 1$

$F(x) = 3u^2$ $\quad F'(x) = 6u$

$\Rightarrow 6u \cdot 1 = 6(x+1)\cdot 1 = 6x+6$

$g'(x) = (6x+6)\cdot(x-2) + (3(x+1)^2)\cdot(1)$

$= 6x^2 - 12x + 6x - 12 + 3(x^2 + 2x + 1)$

$= 6x^2 - 6x - 12 + 3x^2 + 6x + 3$

$= 9x^2 - 9$

2. $g'(x) = 0$ setzen ! Waagrechte Tangente $\longrightarrow$ Steigung 0

$g'(x)$: $9(x^2 - 1) = 0$

$9(x+1)(x-1) = 0$

$x_1 = -1$, $x_2 = 1$

3. Nullpunkte in g(x) einsetzen

$g(-1)$: $3((-1)+1)^2((-1)-2) = 0 \longrightarrow (x_1, g(x_1)) = (-1, 0)$

$g(1)$: $3(1+1)^2(1-2) = -12 \longrightarrow (x_2, g(x_2)) = (1, -12)$

Startwerte mit Newton-Schritt

Wir betrachten die Funktion $f(x) = xe^x$. Bestimmen Sie die Menge aller Startwerte, bei denen man nach einem Newton-Schritt den Wert $x = \frac{1}{2}$ erhält.

1. f(x) ableiten

$f'(x) = e^x + xe^x = (1+x)e^x$

2. f(x) und f'(x) in Newton-Formel einsetzen

$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = x_1 = x_0 - \frac{x_0 \cdot e^{x_0}}{(1+x_0)e^{x_0}} = x_0 - \frac{x_0}{1+x_0}$

3. Nach $\frac{1}{2}$ auflösen

$x - \frac{x}{1+x} = \frac{1}{2} \quad |\cdot(1+x)$

$x(1+x) - x = \frac{1+x}{2}$

$x^2 = \frac{1+x}{2} \quad |\cdot 2$

$2x^2 = 1 + x \quad |-1-x$

$2x^2 - x - 1 = 0$

Mitternachtsformel: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$= \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - (4\cdot 2\cdot -1)}}{2\cdot 2}$

$= \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4\cdot 2\cdot 1}}{2\cdot 2}$

$= \frac{1 \pm 3}{4}$

$= -\frac{1}{2}, 1$

$\Rightarrow$ Menge der Startwerte: $\{-\frac{1}{2}, 1\}$

Waagrechte Tangente mit a und b

Welche Werte muss man für a und b einsetzen, so dass die Funktion $f(x) = a\ln(x) - \frac{b}{x} + x$ bei $x = 1$ und $x = 10$ jeweils eine horizontale Tangente hat?

1. f(x) ableiten

$f'(x) = a \cdot \frac{1}{x} + bx^{-2} + 1$

$-\frac{b}{x} = -b \cdot \frac{1}{x} = -b \cdot x^{-1}$

ableiten: $(-b\, x^{-1})' = b \cdot x^{-2}$

2. $f'(1) = a \cdot \frac{1}{1} + b \cdot \frac{1}{1^2} + 1 = 0$

$= a + b + 1 = 0 \quad |-b, -1$

$a = -b - 1$, $a = -10 - 1$, $a = -11$

3. $f'(10) = (-b-1)\cdot\frac{1}{10} + b \cdot \frac{1}{10^2} + 1 = 0 \quad |\cdot 100$ } a einsetzen

$= (-b-1)\cdot 10 + b + 100 = 0$

$= -10b - 10 + b + 100 = 0$

$= -9b + 90 = 0 \quad |-90, \cdot(-1)$

$9b = 90 \quad |:9$

b einsetzen

$b = 10$

Tangente mit Punkt und an Kurve

Bestimmen Sie die Tangenten an die Kurve $f(x) = x^2$, die durch den Punkt $(\overset{x}{2}, \overset{y}{3})$ gehen.

TG: $y = f'(x_0)\cdot(x - x_0) + f(x_0)$

$f(x) = x^2$, $f'(x) = 2x$

1. x und y in TG einsetzen

$3 = 2x_0 \cdot (2 - x_0) + x_0^2 \quad |-3$

$0 = 4x_0 - 2x_0^2 + x_0^2 - 3$ } nach x_0 auflösen

$0 = -x_0^2 + 4x - 3 \quad |\cdot(-1)$

$0 = x_0^2 - 4x + 3$

$0 = (x-1)(x-3)$

$x_0 = 1$, $x_1 = 3$

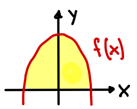
2. x_0 und x_1 in TG einsetzen

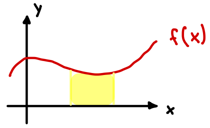
$x_0 = 1 \longrightarrow y = 2(x-1) + 1 = 2x - 1$

$x_1 = 3 \longrightarrow y = 2(x-3) + 9 = 6x - 9$

Integrale

Flächeninhalt zwischen der x-Achse und einer Funktion.





Definition: $\sum_{k=1}^{n} f(x_k) \cdot \Delta x = \int_a^b f(x)\,dx$

- Wahl x_k spielt keine Rolle
- Integralzeichen = Summenzeichen

Bemerkung: $0 = \int_a^a f(x)\,dx$

$b<a$: $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

$b \in [a,c]$: $\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$

Integrationsregeln

Funktion f(x) und g(x), Stammfunktion F(x) und G(x), Konstante c

1. $c \cdot F(x)$ = Stammfunktion von $c \cdot f(x)$

$\int_a^b c \cdot f(x)\,dx = c \int_a^b f(x)\,dx$

2. $F(x) + G(x)$ = Stammfunktion von $f(x) + g(x)$

$\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

Achtung keine Formel für Produkte und Quotienten

$\int_a^b (f(x) \cdot g(x))\,dx \neq \left(\int_a^b f(x)\,dx\right) \cdot \left(\int_a^b g(x)\,dx\right)$

$\int_a^b \frac{f(x)}{g(x)}\,dx \neq \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx}$

Stammfunktion

Zur Bestimmung eines Integrals notwendig.

f(x) = Funktion, F(x) = Stammfunktion

$f(x) = x^n \longrightarrow F(x) = \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1}$

z.B. $f(x) = 8x^3$

$F(x) = \frac{8}{4}x^4 = 2x^4 + c$ abgeleitet wieder f(x)

z.B $f(x) = \frac{x^2}{3} - \frac{x}{4} = \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4}x$ $\quad \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \quad \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}$

$F(x) = \frac{\frac{1}{3}}{3}x^3 - \frac{\frac{1}{4}}{2}x^2 = \frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{8}x^2 + c$

Beliebige Konstante nur bei unbestimmtem Integral

Unbestimmtes Integral

Bestimmung aller Stammfunktionen einer Funktion.

Keine Integrationsgrenze

$\int f(x)\,dx = F(x) + c$

Integrand — Differential — Integrationskonstante

z.B. $\int 4x^6\,dx$ Stammfunktion

$= \frac{4}{7}x^7 + c$

Ableitungen ausgewählter Funktionen

Potenz- und Logarithmus-Funktionen

- $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + C$
- $\int \ln(x)\,dx = x \cdot \ln(x) - x + C$
- $\int \log_a(x)\,dx = \frac{1}{\ln(a)} \cdot (x \cdot \ln(x) - x) + C$

Trigonometrische Funktionen

- $\int \sin(x)\,dx = -\cos(x) + C$
- $\int \cos(x)\,dx = \sin(x) + C$
- $\int \tan(x)\,dx = -\ln|\cos(x)| + C$
- $(\tan(x))' = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$ resp. $\int (1+\tan^2(x))\,dx = \int \frac{1}{\cos^2(x)}\,dx = \tan(x) + C$
- $(\arcsin(x))' = (1-x^2)^{-1/2}$ resp. $\int (1-x^2)^{-1/2}\,dx = \arcsin(x) + C$
- $(\arccos(x))' = -(1-x^2)^{-1/2}$ resp. $\int -(1-x^2)^{-1/2}\,dx = \arccos(x) + C$
- $(\arctan(x))' = (1+x^2)^{-1}$ resp. $\int (1+x^2)^{-1}\,dx = \arctan(x) + C$

Integration von Polynomfunktionen

Stammfunktion: $f(x) = c \longrightarrow F(x) = c \cdot x$

$(n \in \mathbb{R},\ n \neq -1)$ $\quad f(x) = x^n \longrightarrow F(x) = \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1}$

$f(x) = \frac{1}{x} \longrightarrow F(x) = \ln(|x|)$

z.B. $f(x) = 2x^2 + 3x - 1$, berechne $\int_1^2 (2x^2 + 3x - 1)\,dx$

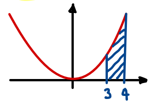
1. Stammfunktion bestimmen

$F(x) = \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - x$

2. Integral ausrechnen

$F(2) - F(1) = \left(\frac{2}{3}2^3 + \frac{3}{2}2^2 - 2\right) - \left(\frac{2}{3} + \frac{3}{2} - 1\right) = 8.1\overline{6}$

z.B. Inhalt Flächenstück zwischen x = 3 und x = 4 durch $f(x) = x^2$ und x-Achse begrenzt.



1. Integral bestimmen

$\int_3^4 x^2\,dx$

2. Stammfunktion bestimmen

$F(x) = \frac{1}{3}x^3$

3. Integral ausrechnen

$F(4) - F(3) = \left(\frac{4^3}{3}\right) - \left(\frac{3^3}{3}\right) = 12.\overline{3}$

Bestimmtes Integral

Bestimmung des Flächeninhaltes einer Funktion.

Zwei Integrationsgrenzen

$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

z.B. $\int_0^1 2x\,dx = [x^2]_0^1 = 1^2 - 0^2 = 1$

1. Stammfunktion F(x) berechnen und in eckige Klammer schreiben
2. Integrationsgrenzen a und b in F(x) einsetzen
3. F(b) von F(a) abziehen

Integral mit unbekannter Grenze

Für welche Werte von a ist die untenstehende Gleichung erfüllt?

$$\int_1^a 1-\frac{4}{x^2}\,\mathrm{d}x = 0$$

1. Stammfunktion bestimmen

$$F(x) = 1x - 4x^{-2}$$
$$= 1x - \frac{4}{-1}x^{-1}$$
$$= 1x + 4x^{-1}$$
$$\left[x + \frac{4}{x}\right]_1^a$$

2. Integral ausrechnen

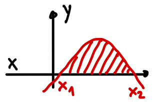
$$F(a) - F(1) = 0$$
$$\left(a + \frac{4}{a}\right) - \left(1 + \frac{4}{1}\right) = 0$$
$$\left(a + \frac{4}{a}\right) - 5 = 0 \quad |\cdot a$$
$$a^2 - 5a + 4 = 0$$
$$(a-1)(a-4) = 0$$
$$\Rightarrow a_1 = 1,\ a_2 = 4$$

Abgeschlossenes Flächenstück

Bestimmen Sie den Inhalt des *abgeschlossenen* Flächenstücks, das durch den Graph der Funktion $f(x) = -x^2 + 3x - 2$ und die x-Achse begrenzt wird.

1. Nullstellen bestimmen

$$0 = -x^2 + 3x - 2 \quad | + x^2 - 3x + 2$$
$$x^2 - 3x + 2 = 0$$
$$(x-1)(x-2)$$
$$x_1 = 1,\ x_2 = 2$$



2. Stammfunktion bestimmen

$$F(x) = \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 2x\right]_1^2$$

3. Integral ausrechnen

$$F(2) - F(1) = \frac{1}{6}$$

Mehrere Nullpunkte

Bestimmen Sie den gesamten Inhalt aller vom Graph der Funktion $f(x) = -3x^3 - 6x^2 + 24x$ und der x-Achse umschlossenen Flächenstücke.

1. Nullstellen bestimmen

$$-3x^3 - 6x^2 + 24x = 0$$
$$-3x(x^2 + 2x - 8) = 0$$
$$-3x(x-2)(x+4) = 0$$
$$x_1 = 0,\ x_2 = 2,\ x_3 = -4$$

2. Stammfunktion bestimmen

$$F(x) = -\frac{3}{4}x^4 - \frac{6}{3}x^3 + \frac{24}{2}x^2$$
$$= \left[-\frac{3}{4}x^4 - 2x^3 + 12x^2\right]_{-4,\,0}^{0,\,2}$$

3. Integral ausrechnen

$$|F(0) - F(-4)| = |-128|$$
$$|F(2) - F(0)| = |20|$$
$$|-128| + |20| = 148$$

Integral mit Parameter

Für jeden Wert des Parameters $t > 0$ beschreibt die Gleichung $f_t(x) = -t \cdot x^2 + 3$ eine Funktion. Wir betrachten das *abgeschlossene* Flächenstück, das durch den Graph von $f(x)$ und die x-Achse begrenzt wird. Wie muss man t wählen, damit sein Flächeninhalt 4 beträgt?

1. Nullstellen bestimmen

$$0 = -t \cdot x^2 + 3 \quad | + tx^2$$
$$tx^2 = 3 \quad |:t$$
$$x^2 = \frac{3}{t} \quad |\sqrt{\ }$$
$$x_1 = -\sqrt{\frac{3}{t}},\ x_2 = \sqrt{\frac{3}{t}}$$

2. Stammfunktion bestimmen

$$F(x) = \left[-\frac{t}{3}x^3 + 3x\right]_{-\sqrt{3/t}}^{\sqrt{3/t}}$$

3. Nach t auflösen

$$4 = \left|F(\sqrt{3/t}) - F(-\sqrt{3/t})\right|$$
$$= \left(-\frac{t}{3}\left(\sqrt{3/t}\right)^3 + 3\cdot\sqrt{\frac{3}{t}}\right) - \left(-\frac{t}{3}\cdot\left(-\sqrt{3/t}\right)^3 + 3\left(-\sqrt{3/t}\right)\right) \quad \left|\left(\sqrt{3/t}\right)^3 = \frac{3}{t}\cdot\sqrt{3/t}\right.$$
$$= \left(-\frac{t}{3}\cdot\frac{3}{t}\cdot\sqrt{3/t} + 3\cdot\sqrt{3/t}\right) - \left(\frac{t}{3}\cdot\sqrt{3/t}^{\,3} - 3\sqrt{3/t}\right) \quad \left|-\frac{t}{3}\cdot\frac{3}{t} = -1\right.$$
$$= \left(-\sqrt{3/t} + 3\cdot\sqrt{3/t}\right) - \left(\frac{t}{3}\cdot\frac{3}{t}\cdot\sqrt{3/t} - 3\sqrt{3/t}\right)$$
$$= \left(-\sqrt{3/t} + 3\cdot\sqrt{3/t}\right) - \left(\sqrt{3/t} - 3\sqrt{3/t}\right)$$
$$= 2\sqrt{3/t} + 2\sqrt{3/t}$$
$$4 = 4\sqrt{3/t} \quad |:4$$
$$1 = \sqrt{3/t} \quad |^2$$
$$1 = 3/t \quad |\cdot t$$
$$t = 3$$

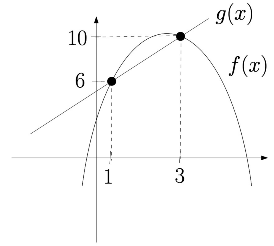
Schnittpunkt

Bestimmen Sie jeweils den Inhalt des abgeschlossenen Flächenstücks, welches vom Graph der Funktion $f(x)$ und vom Graph der Funktion $g(x)$ begrenzt wird.

z.B. $f(x) = -x^2 + 6x + 1$, $g(x) = 2x + 4$

1. Schnittpunkte von f(x) und g(x) bestimmen

$$-x^2 + 6x + 1 = 2x + 4 \quad | -2x - 4$$
$$-x^2 + 6x + 1 - 2x - 4 = 0$$
$$-x^2 + 4x - 3 = 0$$
$$x^2 - 4x + 3 = 0$$
$$(x-1)\cdot(x-3) = 0$$
$$x_1 = 1,\ x_2 = 3,\ (1,6),\ (3,10)$$



2. Stammfunktionen bestimmen

$$H(x) = (-x^2 + 6x + 1) - (2x + 4)$$
$$= -x^2 + 4x - 3$$
$$= -\frac{1}{3}x^3 + \frac{4}{2}x^2 - \frac{3}{1}x$$
$$H(x) = \left[-\frac{x^3}{3} + 2x^2 - 3x\right]_1^3$$

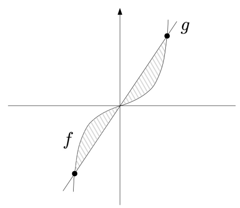
3. Integral ausrechnen $H(3) - H(1) = \frac{4}{3}$

Punktsymmetrie

Wir betrachten die Graphen der Funktionen $f(x) = x^5$ und $g(x) = 2x$. Berechnen Sie den gesamten Inhalt aller umschlossenen Flächenstücke.

1. Schnittpunkte von f(x) und g(x) bestimmen

$$x^5 = 2x \quad |:x$$
$$x^4 = 2 \quad |\sqrt[4]{\ }$$
$$x = \pm\sqrt[4]{2} \quad \boxed{\sqrt[b]{a^c} = a^{\frac{c}{b}}}$$
$$x_1 = 0,\ x_2 = -2^{1/4},\ x_3 = 2^{1/4}$$



2. Stammfunktionen bestimmen

$$H(x) = x^5 - 2x$$
$$= \frac{1}{6}x^6 - x^2$$
$$H(x) = \left[\frac{1}{6}x^6 - x^2\right]_{-2^{1/4},\,0}^{0,\,2^{1/4}}$$

3. Integral ausrechnen

$$|H(0) - H(-2^{1/4})| = |-0.943|$$
$$|H(2^{1/4}) - H(0)| = |-0.943|$$
$$|-0.943| + |-0.943| = 1.88$$

Folgen

Definition

Reele Folge a = Funktion (Abbildung) $a: \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R}$

- Jeder natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}^*$ wird eine reele Zahl a_n zugeordnet
- Folge = unendlich viele Objekte (reele Zahlen)

Darstellungen

Verbal : "Die Folge der positiven, geraden Zahlen"

Aufzählend : $2, 4, 6, 8, \dots$

Explizit : $a_n = 2n, \; n \in \mathbb{N}^*$ (!) Bildungsgesetz

Implizit : $a_1 = 2, \; a_{n+1} = a_n + 2$ (!) Rekursionsformel

Arithmetische Folge

Konstante Differenz zwischen 2 Folgegliedern.

Explizit : $a_n = c + (n-1) \cdot d$

Implizit : $a_1 = c$

$a_{n+1} = a_n + d$

(!) d = konstante Differenz, c = Startwert

z.B. $5, 8, 11, 14, 17, \dots$ $+3$ $\longrightarrow a_n = 5 + (n-1) \cdot 3$

$7, 0, -7, -14, \dots$ -7 $\longrightarrow a_n = 7 + (n-1) \cdot (-7)$

Geometrische Folge

Konstanter Faktor zwischen 2 Folgegliedern.

Explizit : $a_n = c \cdot q^{n-1}$

Implizit : $a_1 = c$

$a_n = q \cdot a_n$

(!) q = konstanter Faktor, c = Startwert

z.B. $10, 1, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \dots$ $\cdot \frac{1}{10}$ $\longrightarrow a_n = 10 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$

$-2, 2, -2, 2, \dots$ $\cdot(-1)$ $\longrightarrow a_n = (-2) \cdot (-1)^{n-1}$

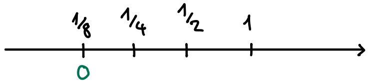
Grenzwerte

g = Grenzwert einer Folge

- Die Folgeglieder kommen ab einem gewissen n dem Wert g beliebig nahe

z.B. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$

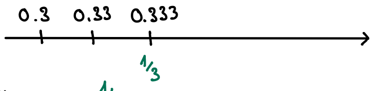
Skizze :



Bezeichnung : $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$

z.B. $0.3, 0.33, 0.333, \dots$

Skizze :



Bezeichnung : $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \frac{1}{3}$

Reelle Zahl g = Grenzwert / Limes der Folge a_n wenn:

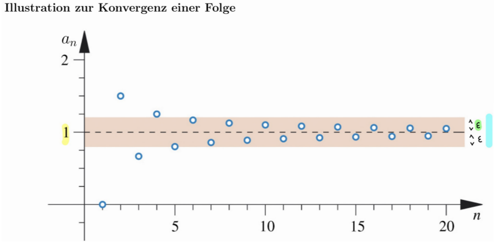
- Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert eine natürliche Zahl n_0
- Alle $n \geq n_0$ gilt stets $|a_n - g| < \varepsilon$

Folge mit Grenzwert : konvergent

Folge ohne Grenzwert : divergent

(!) Folge hat höchstens 1 Grenzwert

Illustration zur Konvergenz einer Folge



Schreibweise: $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = g, \quad a_n \xrightarrow[n \to \infty]{} g, \quad a_n \to g$ für $n \to \infty$

Rechnen mit Grenzwerten

Gegeben sind zwei konvergente Folgen a und b und eine Konstante c. Dann gilt:[2]

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} (c \cdot a_n) = c \cdot \lim\limits_{n\to\infty} a_n$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} (a_n) + \lim\limits_{n\to\infty} (b_n)$, $\quad \lim\limits_{n\to\infty} (a_n - b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} (a_n) - \lim\limits_{n\to\infty} (b_n)$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} (a_n) \cdot \lim\limits_{n\to\infty} (b_n)$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} (a_n)}{\lim\limits_{n\to\infty} (b_n)}$, $\quad$ falls $\lim\limits_{n\to\infty} (b_n) \neq 0$ und $b_n \neq 0$ für alle n.

Grenzwerte bei Polynome

Folgeglieder sind von der Form $a_n = \frac{g(n)}{h(n)}$, wobei $g(n)$ und $h(n)$ Polynome sind.

Fall 1 : Zählergrad < Nennergrad = 0

z.B. $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{3n^2 + 7n - 15}{n^3 - 2n^2 + n + 10} = 0$

Fall 2 : Zählergrad > Nennergrad = ∞ oder $-\infty$

z.B. $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{3n^4 - 7n + 1}{6n^3 - 2n^2 + 5} = \infty$

Fall 3 : Zählergrad = Nennergrad = $\frac{\text{führender Term}}{\text{führender Term}}$

z.B. $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{2n^3 + n^2 + 8n}{5n^3 + 4n^2 + 17} = \frac{2}{5}$

Spezielle Folge: $\left\langle \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{1}} \right\rangle$ strebt:

- Nicht gegen 1
- Nicht gegen ∞
- Sondern gegen $e \approx 2.718$ (!) Eulersche Zahl

Fibonacci-Folge

Implizit : $a_1 = 1, \; a_2 = 1, \; a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$

z.B. $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots$

Harmonische Folge

Explizit : $a_n = \frac{1}{n}$

z.B. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$

Erweitern mit Binom

z.B. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n^2+4n} - \sqrt{n^2-3}$

erweitern mit a+b

$$= \frac{\left(\sqrt{n^2+4n} - \sqrt{n^2-3}\right)\cdot\left(\sqrt{n^2+4n} + \sqrt{n^2-3}\right)}{\sqrt{n^2+4n} + \sqrt{n^2-3}}$$

$$= \frac{(n^2+4n) - (n^2-3)}{\sqrt{n^2+4n} + \sqrt{n^2-3}}$$

$$= \frac{4n-3}{\sqrt{\cancel{n^2}+4n} + \sqrt{\cancel{n^2}-3}}$$

$$= \frac{\cancel{n}(4+\frac{3}{n})}{\cancel{n}\sqrt{1+\frac{4}{n}} + \cancel{n}\sqrt{1-\frac{3}{n^2}}}$$

mit n kürzen

$$= \frac{4+\frac{3}{n}}{\sqrt{1+\frac{4}{n}} + \sqrt{1-\frac{3}{n^2}}}$$

Fall 1
Zählergrad < Nennergrad
= 0

$$= \frac{4+0}{\sqrt{1+0} + \sqrt{1-0}}$$

$$= \frac{4}{1+1} = 2$$

Eulersche Zahl

z.B. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{5n}\right)^n$

$$= \left(1+\frac{1}{5n}\right)^{\frac{5n}{1}\cdot\frac{1}{5n}\cdot n}$$

$$= \left(\left(1+\frac{1}{5n}\right)^{\frac{5n}{1}}\right)^{\frac{1}{5n}\cdot\frac{n}{1}} \qquad \frac{1}{5n}\cdot\frac{n}{1} = \frac{1\cancel{n}}{5\cancel{n}} = \frac{1}{5}$$

$$= \left(\left(1+\frac{1}{5n}\right)^{\frac{5n}{1}}\right)^{\frac{1}{5}}$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{} e^{\frac{1}{5}}$$

z.B. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{9}{10n}\right)^{\frac{n}{8}}$

$$= \left(1+\frac{9}{10n}\right)^{\frac{10n}{9}\cdot\frac{9}{10n}\cdot\frac{n}{8}}$$

$$= \left(\left(1+\frac{9}{10n}\right)^{\frac{10n}{9}}\right)^{\frac{9}{10n}\cdot\frac{n}{8}} \qquad \frac{9}{10n}\cdot\frac{n}{8} = \frac{9\cancel{n}}{80\cancel{n}} = \frac{9}{80}$$

$$= \left(\left(1+\frac{9}{10n}\right)^{\frac{10n}{9}}\right)^{\frac{9}{80}}$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{} e^{\frac{9}{80}}$$

Hoch n

z.B. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^{n-1}+1}{2^{n+1}+8}$

$$\overset{:2^n}{=} \frac{2^{-1}+\frac{1}{2^n}}{2^{+1}+\frac{8}{2^n}}$$

Fall 1
Zählergrad < Nennergrad
= 0

$$= \frac{2^{-1}+0}{2^{+1}+0}$$

$$= \frac{0.5}{2} = \frac{1}{4} = 0.25$$

z.B. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}+2^n}{3^n+2}$

$$\overset{:3^n}{=} \frac{3^{+1}+\left(\frac{2}{3}\right)^n}{3+\frac{2}{3^n}}$$

Fall 1
Zählergrad < Nennergrad
= 0

$$= \frac{3+0}{1+0}$$

$$= \frac{3}{1} = 3$$

Fälle

z.B. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{(3n+1)^2}$

$$= \frac{n^2+2n+1}{9n^2+6n+1}$$

$$= \frac{1}{9}$$

Reihen

Summenfolge oder Reihe s der reelen Folge a:

$s_1 = a_1$

$s_2 = a_1 + a_2$

$s_3 = a_1 + a_2 + a_3$

$\vdots$

$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ (n-te Teilsumme)

Arithmetische Reihe

Konstante Differenz zwischen 2 Folgegliedern.

Summe von n Elementen : $s_n = n \cdot a_1 + \frac{n(n-1)}{2} \cdot d$

(!) d = konstante Differenz, a_1 = 1. Folgenelement, n = Anzahl Elemente

z.B. s_6 für die Folge $(a_n) = 3, 5, 7, 9, 11, \ldots$

$n = 6, \quad a_1 = 3, \quad d = 2$

$s_6 = 6 \cdot 3 + \frac{6(6-1)}{2} \cdot 2 = 48$

z.B. Summe aller dreistelligen Zahlen mit der Endziffer 6

gesuchte Summe: $106 + 116 + \ldots + 996$

arithmetische Reihe mit $n = 90$, $a_1 = 106$, $d = 10$

$\hookrightarrow 996 = 106 + (n-1) \cdot 10 \Rightarrow n = 90$

$s_{90} = 90 \cdot 106 + \frac{90(90-1)}{2} \cdot 10 = 49'590$

Geometrische Reihe

Konstanter Faktor zwischen 2 Folgegliedern.

Summe von n Elementen : $s_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q-1} = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$

Konstanter Faktor q : $q = \frac{a_n}{a_{n-1}}$

(!) q = konstanter Faktor, a_1 = 1. Folgenelement, n = Anzahl Elemente

z.B. s_4 für die Folge $(a_n) = 4, 2, 1, \frac{1}{2}, \ldots$

$n = 4, \quad a_1 = 4, \quad q = 0.5$

$s_4 = \frac{4 \cdot (0.5^4 - 1)}{0.5 - 1} = 7.5$

z.B. Wie viele Glieder der geometrischen Folge 4, 5, ... mind. addieren damit ihre Summe grösser als 1'000'000'000 ist.

$n = ?, \quad a_1 = 4, \quad q = 5/4 = 1.25$

$s_n = \frac{4 \cdot (1.25^n - 1)}{1.25 - 1} = 1'000'000'000$

$$\begin{aligned} &= 16(1.25^n - 1) = 1'000'000'000 && \mid :16 \\ 1.25^n - 1 &= 62'500'000 && \mid +1 \\ 1.25^n &= 62'500'001 && \mid : \ln_{1.25} \\ n &= 80.44 && \end{aligned}$$

Mindestens 81 Glieder.

Grenzwerte mit Reihen

(!) Jede arithmetische Reihe divergiert (= hat keinen Grenzwert)

Geometrische Reihe:

Fall 1: $q > 1 \rightarrow \infty$ oder $-\infty$ = kein Grenzwert

Fall 2: $q \leq -1 \rightarrow$ springt zwischen negativ und positiven Werten = kein Grenzwert

Fall 3: $|q| < 1 \rightarrow$ Grenzwert $= \frac{a_1}{1-q}$

z.B. $1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \ldots$

$a_1 = 1, \quad q = \frac{2}{3}$

Fall 3: $\left|\frac{2}{3}\right| < 1 \rightarrow \frac{a_1}{1-q}$

$s_n = 1 \cdot \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 - \frac{2}{3}} \xrightarrow[n \to \infty]{} \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = 3$

Summe alle durch X teilbar

Wie gross ist die Summe aller durch 17 teilbaren vierstelligen Zahlen?

$n = ?\ ,\quad a_1 = 1'003,\quad d = 17$

$$
\begin{aligned}
9996 &= 1'003 + (n-1)\cdot 17 \\
9996 &= 1'003 + 17n - 17 \\
9996 &= 986 + 17n && \mid -986 \\
9010 &= 17n && \mid :17 \\
n &= 530
\end{aligned}
$$

$$s_{530} = 530 \cdot 1'003 + \frac{530(530-1)}{2} \cdot 17$$
$$= 2'914'735$$

Anzahl Glieder arithmetische Folge

Wieviele Glieder der arithmetischen Folge $(6, 12, \ldots)$ ergeben die Summe 1800?

$$1'800 = n \cdot 6 + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 6 \qquad \mid \cdot 2$$

$$
\begin{aligned}
3'600 &= 12n + n(n-1)\ 6 \\
3'600 &= 12n + 6n^2 - 6n \\
3'600 &= 6n + 6n^2 && \mid :6 \\
600 &= n + n^2 && \mid -600 \\
0 &= n^2 + n + 600 \\
0 &= \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-600)}}{2 \cdot 1}
\end{aligned}
$$

Mitternachtsformel

$x_1 = 24,\quad x_2 = -25 \longrightarrow$ Scheinlösung

Anzahl Glieder geometrische Folge

Wieviele Glieder der geometrischen Folge $(6, 12, \ldots)$ ergeben die Summe 6138?

$$6'138 = \frac{6(2^n - 1)}{2-1}$$

$$
\begin{aligned}
6'138 &= 6(2^n - 1) && \mid :6 \\
1'023 &= 2^n - 1 && \mid +1 \\
1'024 &= 2^n && \mid \log_2 \\
n &= 10
\end{aligned}
$$

Unbekannte Parameter mit gegebenen Summen

Von einer arithmetischen Folge ist bekannt, dass $s_7 = 119$ und $s_{28} = 1946$ ist. Stellen Sie ein zugehöriges Gleichungssystem für a_1 und d auf und bestimmen Sie die entsprechenden Lösungen.

$s_7 = 119,\quad s_{28} = 1'946$

$$119 = 7 \cdot a_1 + \frac{7 \cdot 6}{2} \cdot d = 7 \cdot a_1 + 21 \cdot d$$

$$1'946 = 28 \cdot a_1 + \frac{28 \cdot 27}{2}\ d = 28 \cdot a_1 + 378d$$

$$a_1 = \frac{21d - 119}{7} = 17 - 3d = 17 - 3 \cdot 5 = 2$$

$$
\begin{aligned}
1'946 &= 28 \cdot (17 - 3d) + 378d \\
1'946 &= 476 - 84d + 378d && \mid -476 \\
1'470 &= 294d && \mid :294 \\
5 &= d
\end{aligned}
$$

Weitere Summen mit gegebenen Summen

Von einer geometrischen Folge kennt man $s_1 = 100$ und $s_2 = 20$. Berechnen Sie s_3 und s_{16}.

$s_1 = a_1 = 100,\quad s_2 = a_1 + a_2 = 20$

$a_2 = s_2 - s_1 = 20 - 100 = -80,\quad q = a_2/a_1 = -80/100 = -0.8$

$$s_3 = \frac{100\left(1 - (-0.8)^3\right)}{1 + 0.8} = \frac{100(1 + 0.512)}{1.8} = \frac{151.2}{1.8} = 84$$

$$s_{16} = \frac{100\left(1 - (-0.8)^{16}\right)}{1 + 0.8} = \frac{100(1 - 0.028)}{1.8} = \frac{97.18}{1.8} = 53.99$$

Summenwert endliche Summen

Arithmetisch: $\sum_{i=1}^{100} (3 + 4i)$

$$
\begin{aligned}
a_1 &= 3 + 4 = 7 \\
a_2 &= 3 + 8 = 11 \\
a_3 &= 3 + 12 = 15
\end{aligned}
$$

$+4$ $+4$

$n = 100,\quad a_1 = 7,\quad d = 4$

$$s_{100} = 100 \cdot 7 + \frac{100 \cdot 99}{2} \cdot 4$$
$$= 20'500$$

Geometrisch: $\sum_{\ell=1}^{10} 3 \cdot 5^{\ell-1}$

$$
\begin{aligned}
a_1 &= 3 \cdot 5^0 = 3 \cdot 1 = 3 \\
a_2 &= 3 \cdot 5^1 = 15
\end{aligned}
\quad q = \frac{15}{3} = 5
$$

$n = 10,\quad a_1 = 3,\quad q = 5$

$$s_{10} = \frac{3(5^{10} - 1)}{5 - 1}$$
$$= 7'324'218$$

Minimal / Maximal Verteilung

Eine Summe von 6000 Franken wird so unter 17 Personen verteilt, dass

(a) jede Person 14 Franken mehr erhält als die vorangehende Person.

(b) jede Person 10% mehr erhält als die vorangehende Person.

Bestimmen Sie jeweils den kleinsten und den grössten Betrag.

a) Arithmetisch

$a_1 = ?,\quad d = 14,\quad n = 17$

$$
\begin{aligned}
6'000 &= 17 \cdot a_1 + \frac{17(17-1)}{2} \cdot 14 && \mid -1904 \\
4'096 &= 17 \cdot a_1 && \mid :17
\end{aligned}
$$

$240.94 = a_1$ (minimal Betrag)

$a_{17} = 240.94 + 16 \cdot 14 = 464.94$ (maximal Betrag)

b) Geometrisch

$a_1 = ?,\quad q = 1.1,\quad n = 17$

$$
\begin{aligned}
6'000 &= \frac{a_1\left(1 - 1.1^{17}\right)}{1 - 1.1} \\
&= \frac{a_1(-4.054)}{-0.1} && \mid \cdot -0.1 \\
-600 &= a_1(-4.054) && \mid : -4.054
\end{aligned}
$$

$147.98 = a_1$ (minimal Betrag)

$a_{17} = 1.1^{16} \cdot 147.98 = 679.99$ (maximal Betrag)

Grenzwert unendliche Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} 3\left(\frac{4}{5}\right)^{k-1}$$

$$
\left.
\begin{aligned}
a_1 &= 3\left(\tfrac{4}{5}\right)^0 = 3 \\
a_2 &= 3\left(\tfrac{4}{5}\right)^1 = 2.4
\end{aligned}
\right\} q = \frac{2.4}{3} = 0.8
$$

$$\text{Grenzwert} = 3 \cdot \frac{1 - (0.8)^n}{1 - 0.8} \xrightarrow[n \to \infty]{} 3 \cdot \frac{1}{1 - 0.8} = 15$$

Grenzwerte Funktionen

Endlich

Funktion $f(x)$ und Stelle x_0

- Grenzwert g = Wert, dem sich die Funktion $f(x)$ annähert, wenn x immer mehr gegen x_0 geht.
- Funktion $f(x)$ muss an der Stelle x_0 nicht zwingend definiert sein

Schreibweise: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = g$ / $f(x) \to g$ für $x \to x_0$

z.B. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{(x+1)\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}} = 1+1 = 2$

$\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^2-2x-3}{x^2+2x-15} = \lim\limits_{x \to 3} \frac{\cancel{(x-3)}(x+1)}{(x+5)\cancel{(x-3)}} = \lim\limits_{x \to 3} \frac{(x+1)}{(x+5)} = \frac{3+1}{3+5} = \frac{1}{2}$

Unendlich

Grenzwert von Funktion $f(x)$

- Wert, dem sich die Funktion $f(x)$ annähert, wenn x gegen unendlich geht.

Schreibweise: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = g$ / $f(x) \xrightarrow[x \to \infty]{} g$

z.B. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x}{1+x^2} = 0$ (Grad Zähler < Grad Nenner)

Rechnen mit Grenzwerten

Voraussetzung: Alle benötigten Grenzwerte existieren.

(1) $\lim\limits_{x \to x_0} (c \cdot f(x)) = c \cdot \left(\lim\limits_{x \to x_0} f(x)\right)$ für $c \in \mathbb{R}$

(2a) $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) + \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$

(2b) $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) - g(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) - \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$

(3) $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \left(\lim\limits_{x \to x_0} f(x)\right) \cdot \left(\lim\limits_{x \to x_0} g(x)\right)$

(4) $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}$ (Voraussetzung: $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) \neq 0$)

Endliche Grenzwerte

z.B. $\lim\limits_{x \to -3} \frac{x^2-9}{x+3}$

$= \frac{\cancel{(x+3)}(x-3)}{\cancel{x+3}} = x-3 = -3-3 = -6$

z.B. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{(x-2)^2-4}{x}$

$= \frac{\cancel{x}(x-4)}{\cancel{x}} = x-4 = 0-4 = -4$

z.B. $\lim\limits_{x \to -2} \frac{x^3+8}{x+2}$

$\frac{x^3}{x}$ $\frac{-2x^2}{x}$

$(x^3+8) : (x+2) = x^2 - 2x + \frac{4x+8}{x+2} = x^2-2x+4$

$\underline{-(x^3+2x^2)}$ $\longrightarrow$ $x^2(x+2) = x^3+2x^2$

$-2x^2+8$

$\underline{-(-2x^2-4x)}$ $\longrightarrow$ $-2x(x+2) = -2x^2-4x$

$4x+8$

Grenzwert: $(-2)^2 - 2 \cdot (-2) + 4 = 12$

z.B. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{-x^2-3x+10}{2x^2+x-10}$

$= \frac{-\cancel{(x-2)}(x+5)}{(2x+5)\cancel{(x-2)}} = \frac{-(x+5)}{2x+5} = \frac{-2-5}{4+5} = -\frac{7}{9}$

Unendliche Grenzwerte

z.B. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{-x^2-3x+10}{2x^2+x-10}$

gleicher Grad: $\frac{-x^2}{2x^2} = -\frac{1}{2}$

Gebrochenrationale Funktionen

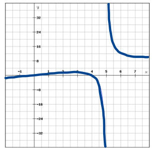
Nullstellen und Definitionslücken

Gebrochenrationale Funktion: $f(x) = \frac{p_1(x)}{p_2(x)}$

(!) p_1, p_2 sind Polynome

- **Nullstellen von $f(x)$**: Nullstellen von $p_1(x)$, die nicht von $p_2(x)$ sind.
- Definitionslücken von $f(x)$: Nullstellen von $p_2(x)$.
  - **Hebbare Definitionslücken**: Nullstellen von $p_1(x)$ und $p_2(x)$.
  - **Polstelle**: Nur Nullstellen von $p_2(x)$ (nach kürzen).

z.B. $\frac{x^3-6x^2+8x}{x^2-7x+10}$



$p_1(x) = x^3-6x^2+8x = x(x-2)(x-4)$, Nullstellen: $0, 2, 4$

$p_2(x) = x^2-7x+10 = (x-2)(x-5)$, Nullstellen: $2, 5$

Nullstellen von $f(x)$: $0, 4$

Definitionslücken von $f(x)$: 2 (hebbar), 5 (Polstelle)

Hebbare Definitionslücken stopfen

Bei x_0 stopfen mit $\lim_{x \to x_0} f(x)$.

z.B. $\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{x(x-2)(x-4)}{(x-2)(x-5)} = \lim_{x\to 2} \frac{x(x-4)}{x-5}$

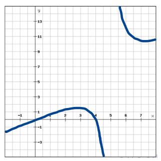
2 einsetzen $= \frac{2(2-4)}{2-5} = \frac{4}{3}$

Vorzeichenwechsel

Der Graph springt an dieser Stelle über die x-Achse.

Passiert bei allen Nullstellen und Polstellen x_0, bei denen $(x-x_0)$ einen ungeraden Exponenten hat.

z.B. $\frac{x(x-2)(x-4)}{(x-2)(x-5)}$



Vorzeichenwechsel bei $0, 4, 5$

Asymptote

Alternative Darstellung einer gebrochenrationale Funktion:

$f(x) = p(x) + \frac{g(x)}{h(x)}$

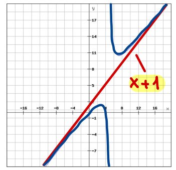
$p(x)$: Polynom

$\frac{g(x)}{h(x)}$: "echt gebrochen" rationale Funktion (Zählergrad < Nennergrad)

Darstellung erhält man durch Polynomdivision.

$f(x)$ nähert sich asymptotisch immer mehr der Funktion $p(x)$ an.

z.B. $f(x) = \frac{x^3-6x^2+8x}{x^2-7x+10} = x+1 + \frac{5}{x-5}$

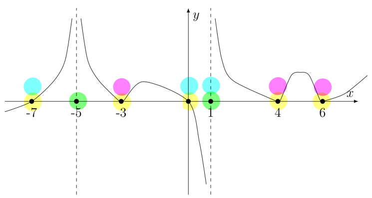


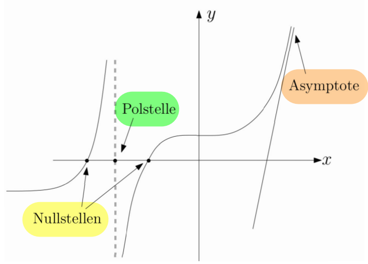
$f(x)$ nähert sich asymptotisch immer mehr der Funktion $x+1$ an.

Von Skizze zu f(x)

1. Alle Nullstellen und Polstellen identifizieren
2. Nullstellen in Zähler $(x +/- \dots)$
3. Polstellen in Nenner $(x +/- \dots)$
4. Exponent bestimmen, falls Vorzeichenwechsel ungerade, ansonsten gerade

z.B.





Nullstellen mit Vorzeichenwechsel:	$-7, 0$	Polstellen mit Vorzeichenwechsel:	1
Nullstellen ohne Vorzeichenwechsel:	$-3, 4, 6$	Polstellen ohne Vorzeichenwechsel:	-5

$$f(x) = k \cdot \frac{x \cdot (x+7) \cdot (x+3)^2 \cdot (x-4)^2 \cdot (x-6)^2}{(x-1) \cdot (x+5)^2}$$

$k = 1 \longrightarrow f(7)$ gibt positiven Wert und laut Graph muss Wert positiv sein.

$$f(x) = 1 \cdot \frac{x \cdot (x+7) \cdot (x+3)^2 \cdot (x-4)^2 \cdot (x-6)^2}{(x-1) \cdot (x+5)^2}$$

Polynom + echt gebrochenrationale Funktion

$f_2(x) = \frac{x^3+x^2+1}{x^2-1}$ Gleichung der Asymptote angeben.

$\frac{x^3}{x^2} = x \qquad \frac{x^2}{x^2} = 1$

$f_2(x) = (x^3+x^2+1) : (x^2-1) = x + 1 + \frac{x+2}{x^2-1}$ ⟶ Asymptoten: $x+1$

$-(x^3-x)$ ⟶ $x(x^2-1) = x^3-x$

$\underline{-x^3+x}$

x^2+x+1

$\underline{-(x^2-1)}$ ⟶ $1(x^2-1) = x^2-1$

$x+2$

Nullstellen, Definitionslücken bestimmen und stopfen

$f_1(x) = \frac{x^2+4x+3}{x^3-2x^2-15x}$

$p_1(x) = x^2+4x+3 = (x+3)\cdot(x+1)$, Nullstellen: $-3, -1$

$p_2(x) = x^3-2x-15x = x(x+3)\cdot(x-5)$, Nullstellen: $0, -3, 5$

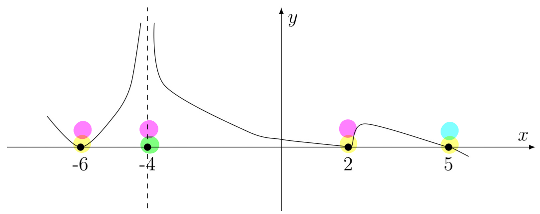
Nullstellen von $f(x)$: -1

Definitionslücken von $f(x)$: -3 (hebbar), $0, 5$ (Polstelle)

Vorzeichenwechsel: $-1, 0, 5$

Stopfen von $x = -3$: $\lim\limits_{x \to -3} \frac{(x+1)\cdot\cancel{(x+3)}}{x\cdot\cancel{(x+3)}\cdot(x-5)} = \frac{(-3+1)}{-3\cdot(-3-5)} = -\frac{1}{12}$

Von Skizze zu f(x)



Nullstellen mit Vorzeichenwechsel: 5

Nullstellen ohne Vorzeichenwechsel: -6, 2

Polstellen ohne Vorzeichenwechsel: -4

$f(x) = k \cdot \frac{(x+6)^2(x-2)^2(x-5)}{(x+4)^2}$

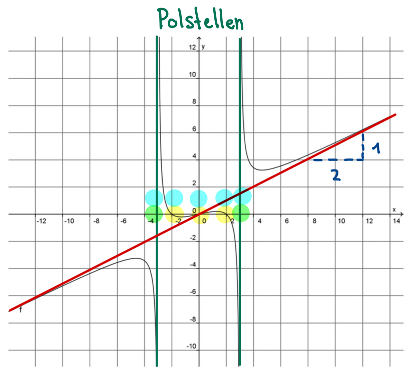
$k = -1$ ⟶ $f(6)$ gibt positiven Wert, laut Graph muss der Wert aber negativ sein.

$f(x) = -1 \cdot \frac{(x+6)^2(x-2)^2(x-5)}{(x+4)^2}$

beliebieg erweitern: $-1 \cdot \frac{(x+6)^4(x-2)^2(x-5)}{(x+4)^2}$

(!) Exponenten können beliebig erweitert werden müssen jedoch positiv/negativ bleiben.

Von Skizze zu f(x) und Asymptote



Asymptote (nähert sich an Linie an, welche nicht zur Polstelle führt)

Nullstellen mit Vorzeichenwechsel: -2, 0, 2

Polstellen mit Vorzeichenwechsel: -3, 3

$f(x) = k \cdot \frac{(x+2)(x-2)x}{(x+3)(x-3)}$

$k = \frac{1}{2} = 0.5$ ⟶ Steigung im Koordinatensystem ablesen

$f(x) = 0.5 \cdot \frac{(x+2)(x-2)x}{(x+3)(x-3)}$

Stetigkeit

Funktion $f(x)$ ist stetig an Stelle x_0 wenn:

- Grenzwert $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ existiert und $= f(x_0)$

Stetig = jede Stelle des Definitionsbereichs ist stetig
(Graph lässt sich in einem Zug ohne Absetzen zeichnen)

Funktionen mit stetigem Definitionsbereich:

- Polynome
- rationale Funktionen
- $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\tan(x)$
- Exponential- und Logarithmusfunktion
- Potenzfunktionen, Wurzelfunktionen

z.B. $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2a, & x < -1 \\ -x^2 + 5, & -1 \leq x \leq 1 \\ x^3 - 3bx, & x > 1 \end{cases}$ Parameter a,b bestimmen

$f_1(-1) = f_2(-1)$

$-1^2 + 2a = -(-1)^2 + 5$

$1 + 2a = -1 + 5 \quad | -1, :2$

$a = \frac{3}{2} = 1.5$

$f_2(1) = f_3(1)$

$-(1)^2 + 5 = 1^3 - 3 \cdot 1 \cdot b$

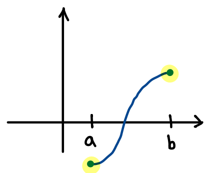
$-1 + 5 = 1 - 3b \quad | -1, :-3$

$-1 = b$

Nullstelle bestimmen mit Stetigkeit

Falls eine Funktion $f(x)$ auf einem Intervall $[a, b]$ stetig ist, und $f(a)$ und $f(b)$ verschiedene Vorzeichen haben, dann hat f in $[a, b]$ mindestens eine Nullstelle.

Verbindet man zwei Punkte auf verschiedenen Seiten der x-Achse miteinander, so überschreitet man irgendwan die x-Achse



Parameter a,b bestimmen

z.B. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x < -1 \\ ax + b, & -1 \leq x \leq 1 \\ \frac{x^2+x+2}{x+1}, & x > 1 \end{cases}$

$f_1(-1) = f_2(-1)$

$-\frac{1}{1} = a \cdot 1 + b$

$-1 = -1a + b \quad | -b, \cdot -1$

$1 + b = a = 1 + 0.5 = 1.5$

$f_2(1) = f_3(1)$

$a \cdot 1 + b = \frac{1^2 + 1 + 2}{1 + 1}$

$1 + b + b = 2 \quad | -1$

$2b = 1 \quad | :2$

$b = 0.5$

Parameter a,k mit Grenzwert bestimmen

z.B. $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{a \cdot n^9 \cdot (n^k - 2)}{5 (n^k)^3} = 17$

$= \frac{a \cdot n^{9+k} - 2an^9}{5n^{3k}} = 17$

3. Fall Zählergrad = Nennergrad damit Grenzwert 17 existieren kann

$9 + k = 3k$

$k - 3k = -9$

$-2k = -9$

$k = 4.5$

$\frac{a}{5} = 17 \quad | \cdot 5$

$a = 5 \cdot 17 = 85$

Differenzierbar

z.B. $f(x) = \begin{cases} 2, & x < 1 \\ ax^2 + bx + c, & 1 \leq x \leq 2 \\ 2x + d, & x > 2 \end{cases}$

$f_1'(x) = 0$, $f_2'(x) = 2ax + b$, $f_3'(x) = 2$

$f_1(1) = f_2(1)$: $2 = a + b + c$

$f_1'(1) = f_2'(1)$: $0 = 2a + b$

$f_2(2) = f_3(2)$: $4a + 2b + c = 4 + d$

$f_2'(2) = f_3'(2)$: $4a + b = 2$

a und b:

$2a + b = 0$

$a = -\frac{b}{2}$

$a = -\frac{2 - 4a}{2} \quad | \cdot 2$

$2a = -2 + 4a \quad | -4a$

$-2a = -2 \quad | :-2$

$a = 1$

$4a + b = 2$

$b = 2 - 4a$

$b = 2 - 4 \cdot 1$

$b = -2$

c und d:

$2 = 1 + (-2) + c \quad | +1$

$3 = c$

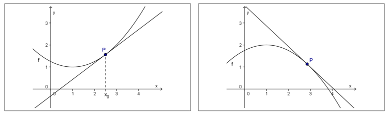
$4 + (-4) + 3 - 4 = d$

$-1 = d$

Kurvenpunkte

Geometrische Vorbetrachtung

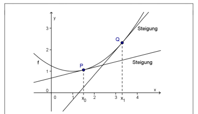
1. Ableitung : Veränderung der Funktion f = Steigung der Kurventangente



$f'(x_0) > 0$: f wächst beim Durchgang durch Punkt $P(x_0, y_0)$

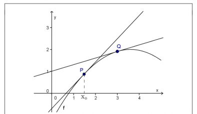
$f'(x_0) < 0$: f fällt beim Durchgang durch Punkt $P(x_0, y_0)$

2. Ableitung : Veränderung der 1. Ableitung / Krümmungsverhalten von f



Zunahme der **Tangentensteigung**

$f''(x_0) > 0$



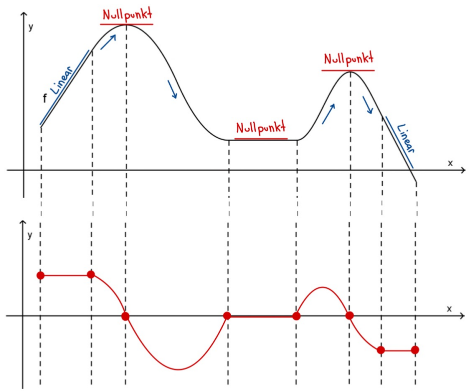
Abnahme der **Tangentensteigung**

$f''(x_0) < 0$

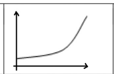
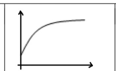
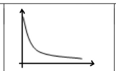
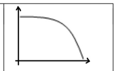
$f''(x_0) > 0$: Zunahme der Tangentensteigung , f = Linkskrümmung

$f''(x_0) < 0$: Abnahme der Tangentensteigung , f = Rechtskrümmung

z.B.



z.B.

Graph von f				
f **wächst/fällt**	☒ wächst ☐ fällt	☒ wächst ☐ fällt	☐ wächst ☒ fällt	☐ wächst ☒ fällt
Vorzeichen von f'	$f'(x) > 0$	$f'(x) > 0$	$f'(x) < 0$	$f'(x) < 0$
Krümmung von f	☐ rechts ☒ links	☒ rechts ☐ links	☐ rechts ☒ links	☒ rechts ☐ links
f' **wächst/fällt**	☒ wächst ☐ fällt	☐ wächst ☒ fällt	☒ wächst ☐ fällt	☐ wächst ☒ fällt
Vorzeichen von f''	$f''(x) > 0$	$f''(x) < 0$	$f''(x) > 0$	$f''(x) < 0$

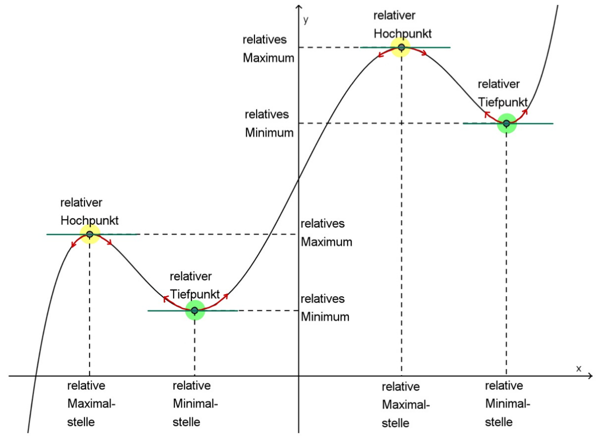
Relative Extrema

Funktion f an Stelle x_0 ein relatives Maximum wenn:

- $f(x) \leqslant f(x_0)$ für alle $x \in U$ (Umgebung)

Tangenten an Hoch-/Tiefpunkten sind horizontal (Steigung = 0)

	x_0 heisst …	$f(x_0)$ heisst …	(x_0, y_0) heisst …
Maximum	(relative) Maximal*stelle*	(relatives) Maximum oder auch Maximalwert	(relativer) Hochpunkt
Minimum	(relative) Minimal*stelle*	(relatives) Minimum oder auch Minimalwert	(relativer) Tiefpunkt
Oberbegriff	(relative) Extremal*stelle*	(relatives) Extremum oder auch Extremalwert	(relativer) Extremalpunkt



Randpunkte :

Abgeschlossenes oder halboffenes Intervall

$[a, b)$: Randpunkt a

$(a, b]$: Randpunkt b

$[a, b]$: Randpunkt a, b

Punkte von Intervall, die keine Randpunkte sind = innere Punkte von I.

Kandidaten für relative Extrema:

1. Innere Punkte x_0 des Definitionsbereichs mit $f'(x_0) = 0$
2. Randpunkte des Definitionsbereichs

Bedingung für relative Extrema:

$f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$
$f'(x)$ bei x_0 von + zu −
} f an Stelle x_0 ein relatives Maximum

$f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$
$f'(x)$ bei x_0 von − zu +
} f an Stelle x_0 ein relatives Minimum

z.B. Extremstelle von $f(x) = x^2$

$f'(x) = 2x$

$2x = 0 \quad | :2$

$x = 0$ Kandidat für Extremstelle

$f''(x) = 2 \longrightarrow f''(0) = 2 > 0$

Relatives Minimum bei $x = 0$

z.B. Hoch-/Tiefpunkte von $f(x) = 2\sqrt{x} - x$,

Definitionsbereich $[0, 2]$

$f(x) = 2x^{0.5} - x$

$f'(x) = x^{-0.5} - 1 = \frac{1}{\sqrt{x}} - 1$

$\frac{1}{\sqrt{x}} - 1 = 0 \quad | +1$

$\frac{1}{\sqrt{x}} = 1 \quad | \cdot \sqrt{x}$

$1 = \sqrt{x} \quad | ^2$

$1 = x$ Kandidat für Extremstelle

$f''(x) = -0.5x^{-1.5} \longrightarrow f''(1) = -0.5 < 0$

Relatives Maximum bei $x = 1$

Maximumpunkt bei $(1, 1)$

$\hookrightarrow f(1) = 2 \cdot 1^{0.5} - 1 = 1$

Analyse der Randpunkte:

$f'(0) = 0^{-0.5} - 1 = -1 \leqslant 0$ monoton fallend

$f'(2) = 2^{-0.5} - 1 = -0.13 \leqslant 0$ monoton fallend

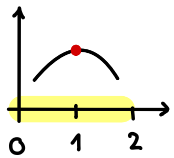
Relatives Minimum bei $x = 0$, $x = 2$

Minimumpunkt bei $(0, 0)$, $(2, 0.83)$

$f(0) = 2 \cdot 0^{0.5} - 0 = 0$

$f(2) = 2 \cdot 2^{0.5} - 2 = 0.83$

Skizze :



Monotonie

Ist $f'(x) \geq 0$, so wächst f monoton.

$f'(x)$ auf Intervall überall ≥ 0 = f ist in Interval monoton steigend

$f'(x)$ auf Intervall überall ≤ 0 = f ist in Interval monoton fallend

z.B. $f(x) = x^3 - 9x$

$f'(x) = 3x^2 - 9$

$3x^2 - 9 = 0$

$x^2 = 3$

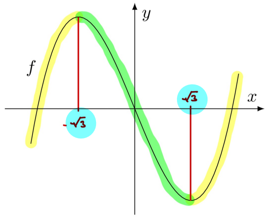
$x = \pm\sqrt{3}$

Richtungsänderung bei $-\sqrt{3}, \sqrt{3}$

Monotone Abschnitte:

$(-\infty, -\sqrt{3})$, $(\sqrt{3}, \infty)$ } monotones Wachstum

$(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ } monotoner Abstieg

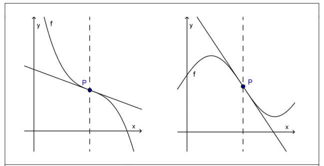


Wendepunkte und Sattelpunkte

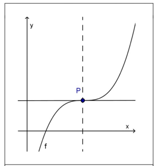
Punkte an denen sich das Krümmungsverhalten ändert.

- **Wendepunkte**: Linkskurve zu Rechtskurve oder umgekehrt
- **Sattelpunkte**: Wendepunkt mit horizontaler Tangente

Bedingung Wendepunkt: $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0$



Wendepunkte



Sattelpunkt

z.B. $f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + 2x^2 - 2x + 2$ und $x_0 = 1$ = Sattelpunkt

$f'(x_0) = 0$ (horizontale Tangente)

$\left.\begin{array}{l} f''(x_0) = 0 \\ f'''(x_0) \neq 0 \end{array}\right\}$ Wendepunkt } Sattelpunkt

$f'(x) = -2x^2 + 4x - 2$, $f''(x) = -4x + 4$, $f'''(x) = -4$

einsetzen ergibt: $f'(1) = 0$

$f''(1) = 0$

$f'''(1) = -4 \neq 0$ $\Rightarrow$ Sattelpunkt bei $x_0 = 1$

Hoch-/Tief- und Wendepunkte

Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{3x^2-4}{x^3}$ sowie ihre Ableitungen

$f'(x) = \frac{-3x^2+12}{x^4}$ $\quad f''(x) = \frac{6x^2-48}{x^5}$ $\quad f'''(x) = \frac{-18x^2+240}{x^6}$

Gesucht sind alle relativen Hoch- und Tiefpunkte und alle Wendepunkte. Zeigen Sie jeweils, dass eine hinreichende Bedingung erfüllt ist.

$f'(x) = (-3x^2 + 12) : x^4 = 0 \quad | \cdot x^4$

$-3x^2 + 12 = 0 \quad | -12$

$-3x^2 = -12 \quad | : -3$

$x^2 = 4 \quad | : \sqrt{\ }$

$x = \pm 2$

$f''(2) = (6 \cdot 4 - 48) : 2^5 = -24 : 32 = -0.75 < 0$

Relatives Maximum bei $x = 2$

Maximumpunkt bei $(2, 1)$

↳ $f(2) = (3 \cdot 2^2 - 4) : 2^5 = 1$

$f''(-2) = (6 \cdot 4 - 48) : -2^5 = -24 : -32 = 0.75 > 0$

Relatives Minimum bei $x = -2$

Minimumpunkt bei $(-2, -1)$

↳ $f(-2) = (3 \cdot (-2)^2 - 4) : (-2)^5 = -1$

$f''(x) = (6x^2 - 48) : x^5 = 0 \quad | \cdot x^5$

$6x^2 - 48 = 0 \quad | : 6$

$x^2 = 8 \quad | : \sqrt{\ }$

$x = \pm 2 \cdot \sqrt{2} = \pm\sqrt{8}$

Wendepunkte:

$f'''(\sqrt{8}) = -18 \cdot (\sqrt{8})^2 + 240 : (\sqrt{8})^6 = 0.1875 \neq 0$ ✓

$f'''(-\sqrt{8}) = -18 \cdot (-\sqrt{8})^2 + 240 : (-\sqrt{8})^6 = -0.1875 \neq 0$ ✓

$f(\sqrt{8}) = (3 \cdot \sqrt{8}^2 - 4) : \sqrt{8}^3 = 0.88$

$f(-\sqrt{8}) = (3 \cdot (-\sqrt{8})^2 - 4) : (-\sqrt{8})^3 = -0.88$

Wendepunkte: $(\sqrt{8}, 0.88)$, $(-\sqrt{8}, -0.88)$

Maximal Höhe und Zeitpunkt

Ein Ball wird senkrecht nach oben geworfen. Die Höhe h (in m) berechnet sich aus der Zeit (in s) nach der Formel

$$h(t) = 5 + 35t - 5t^2$$

Berechnen Sie die maximale Höhe und den Zeitpunkt, zu dem diese erreicht wird.

$h'(t) = 35 - 10t$

$35 - 10t = 0$

$t = 3.5s$

maximale Höhe: $h(3.5) = 66.25m$

Kurvendiskussion

Fragenkatalog für die Kurvendiskussion

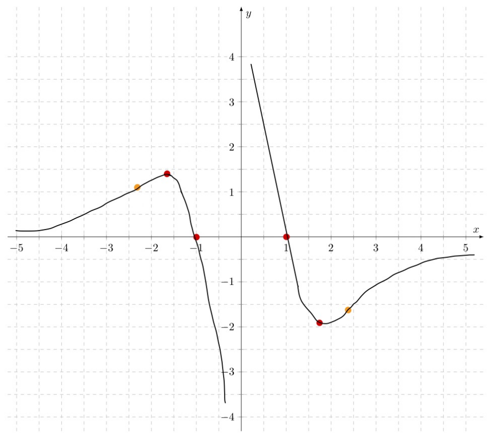
1. Definitionsbereich?
2. Symmetrieeigenschaften (gerade/ungerade), Periode?
3. Schnittpunkte mit Achsen, Polstellen?
4. Randpunkte bzw. Verhalten, wenn x gegen die Grenzen des Definitionsbereichs strebt?
5. Kandidaten für Extrema bestimmen und untersuchen
6. Wendepunkte suchen
7. Tabelle von Werten aufstellen (falls noch nötig)

Achtung: Meistens ist es nicht nötig, alle der obigen Schritte durchzuführen. Manchmal sind einige der Fragen auch praktisch unbeantwortbar (z.B. Nullstellen). Ein wichtiger Aspekt der Kurvendiskussion besteht darin, für eine gegebene Funktion jeweils die "passenden" Schritte zu finden, um mit möglichst wenig Rechenaufwand zu einer guten Skizze des Graphen zu kommen.

Beispiel $f(x) = \frac{-5x^2+5}{x^3} = -5x^{-1} + 5x^{-3}$

1. Definitionsbereich: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$
2. Symmetrieeigenschaften: ungerade (da alle Exponenten ungerade sind)
3. Nullstellen: $1, -1$ Schnittpunkt mit y-Achse: keine Polstellen: 0
   $\hookrightarrow \frac{-5x^2+5}{x^3} = 0 \Rightarrow x^2 = 1$
4. Verhalten für $x \to \infty$ und $x \to -\infty$:
   Polynom mit Zählergrad < Nennergrad $\Rightarrow$ Grenzwert $= 0$
   $f(x) \underset{x\to\infty}{\to} 0$, $f(x) \underset{x\to-\infty}{\to} 0$
5. Kandidaten für Extrema:
   Bedingung: $f'(x) \overset{!}{=} 0$
   $f'(x) = (-5x^{-1} + 5x^{-3})$
   $= 5x^{-2} - 15x^{-4} \overset{!}{=} 0 \quad | \cdot x^4$
   $= 5x^2 - 15 = 0$
   $\Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow$ Kondition: $x_1 = \sqrt{3}$, $x_2 = -\sqrt{3}$
   $f''(x) = -10x^{-3} + 60x^{-5}$
   $f''(x_1) = f''(\sqrt{3}) > 0 \Rightarrow$ rel. Minimum bei x_1
   einsetzen ergibt: rel. Minimum in $(\sqrt{3}, f(\sqrt{3})) \approx (1.73, -1.92)$
   wegen Symmetrie: rel. Minimum bei $x_2 \approx (-1.73, 1.92)$

6. Kandidaten für Wendepunkte:
   Bedingung: $f''(x) \overset{!}{=} 0$
   $f''(x) = -10x^{-3} + 60x^{-5} \overset{!}{=} 0 \quad | \cdot x^5$
   $-10x^2 + 60 = 0$
   $\Rightarrow x^2 = 6 \Rightarrow x_1 = \sqrt{6}$, $x_2 = -\sqrt{6}$
   $f'''(x) = 30x^{-4} - 300x^{-6}$
   einsetzen: $f'''(x_1) = f'''(\sqrt{6}) \neq 0 \Rightarrow$ Wendepunkt bei $x_1 = \sqrt{6} \approx 2.45$
   $(\sqrt{6}, f(\sqrt{6})) \approx (2.45, -1.75)$
   wegen Symmetrie: Wendepunkt in $(-2.45, 1.70)$

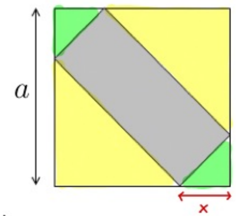


Hilfreiche Schritte beim Lösen von Extremwertaufgaben

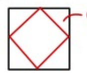
1. Zielgrösse identifizieren.
2. Unabhängige Variable identifizieren.
3. Definitionsbereich bestimmen.
4. Zielgrösse als Funktion der unabhängigen Variablen ausdrücken; ev. eine qualitative Skizze des Graphen machen.
5. Relative Maxima resp. Minima bestimmen; Randpunkte auch berücksichtigen!
6. Untersuchen, welche der relativen Extrema auch absolute Extrema sind (inklusive – bei offenen und halboffenen Intervallen – Betrachtung der Funktion in der Nähe des Randes)
7. Die gesuchte Information aus den Berechnungen extrahieren.
   (Ev. nachschauen, nach welcher Grösse gefragt wurde: Extremal*stelle*? Extremal*wert*? Extremal*punkt*?)

Beispiel 1

Einem Quadrat der Seitenlänge a soll ein Rechteck mit grösstmöglichem Flächeninhalt einbeschrieben werden. Die Seiten des Rechtecks sollen parallel zu den Diagonalen des Quadrates sein.



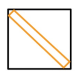
1. Zielgrösse: Flächeninhalt A des Rechtecks
2. Unabhängige Variable: Abstand x der Rechteck-Ecke zur Quadrat-Ecke
3. Definitionsbereich: $(0, a)$
4. Zielgrösse als Funktion der unabhängigen Variablen ausdrücken:
   $f(x) = (\text{Fläche Quadrat}) - \text{Dreiecksflächen} = a^2 - 2 \cdot \frac{(a-x)^2}{2} - 2x \cdot \frac{x^2}{2} = a^2 - (a-x)^2 - x^2 = a^2 - (a^2 - 2ax + x^2) - x^2$
   $= 2ax - 2x^2$
5. Relative Maxima bestimmen
   Bedingung: $f'(x) \overset{!}{=} 0$
   $f'(x) = 2a - 4x \overset{!}{=} 0 \Rightarrow x = \frac{a}{2}$
   $f''(x) = -4$, $f''(\frac{a}{2}) = -4 < 0 \Rightarrow$ rel. Maximum bei $a/2$



6. Verhalten am Rand
   $\lim_{x\to 0} f(x) = 2 \cdot a \cdot 0 = 2 \cdot 0^2 = 0$, $\lim_{x\to 2a} f(x) = 2a \cdot a - 2a^2 = 0$

7. Gesuchte Information
   Für $x = \frac{a}{2}$ bekommt man ein Rechteck mit maximalen Inhalt

Notiz:



Es gibt kein Minimum, je kleiner x umso kleiner der Flächeninhalt