Reihen

Summenfolge oder Reihe s der reelen Folge a:

$s_1 = a_1$

$s_2 = a_1 + a_2$

$s_3 = a_1 + a_2 + a_3$

$\vdots$

$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ (n-te Teilsumme)

Arithmetische Reihe

Konstante Differenz zwischen 2 Folgegliedern.

Summe von n Elementen : $S_n = n \cdot a_1 + \frac{n(n-1)}{2} \cdot d$

(!) d = konstante Differenz, a_1 = 1. Folgenelement, n = Anzahl Elemente

z.B. s_6 für die Folge $(a_n) = 3, 5, 7, 9, 11, \ldots$

$n = 6, \quad a_1 = 3, \quad d = 2$

$s_6 = 6 \cdot 3 + \frac{6(6-1)}{2} \cdot 2 = 48$

z.B. Summe aller dreistelligen Zahlen mit der Endziffer 6

gesuchte Summe: $106 + 116 + \ldots + 996$

arithmetische Reihe mit $n = 90$, $a_1 = 106$, $d = 10$

$\hookrightarrow 996 = 106 + (n-1) \cdot 10 \Rightarrow n = 90$

$s_{90} = 90 \cdot 106 + \frac{90(90-1)}{2} \cdot 10 = 49'590$

Geometrische Reihe

Konstanter Faktor zwischen 2 Folgegliedern.

Summe von n Elementen : $S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}$

Konstanter Faktor q : $q = \frac{a_n}{a_{n-1}}$

(!) q = konstanter Faktor, a_1 = 1. Folgenelement, n = Anzahl Elemente

z.B. s_4 für die Folge $(a_n) = 4, 2, 1, \frac{1}{2}, \ldots$

$n = 4, \quad a_1 = 4, \quad q = 0.5$

$s_4 = \frac{4 \cdot (0.5^4 - 1)}{0.5 - 1} = 7.5$

z.B. Wie viele Glieder der geometrischen Folge 4, 5, ... mind. addieren damit ihre Summe grösser als 1'000'000'000 ist.

$n = ?, \quad a_1 = 4, \quad q = 5/4 = 1.25$

$S_n = \frac{4 \cdot (1.25^n - 1)}{1.25 - 1} = 1'000'000'000$

$$
\begin{aligned}
&= 16(1.25^n - 1) &&= 1'000'000'000 && | :16 \\
&1.25^n - 1 &&= 62'500'000 && | +1 \\
&1.25^n &&= 62'500'001 && | :\ln_{1.25} \\
&n &&= 80.44 &&
\end{aligned}
$$

Mindestens 81 Glieder.

Grenzwerte mit Reihen

(!) Jede arithmetische Reihe divergiert (= hat keinen Grenzwert)

Geometrische Reihe:

Fall 1: $q > 1 \rightarrow \infty$ oder $-\infty$ = kein Grenzwert

Fall 2: $q \leq -1 \rightarrow$ springt zwischen negativ und positiven Werten = kein Grenzwert

Fall 3: $|q| < 1 \rightarrow$ Grenzwert $= \frac{a_1}{1-q}$

z.B. $1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \ldots$

$a_1 = 1, \quad q = \frac{2}{3}$

Fall 3: $\left|\frac{2}{3}\right| < 1 \rightarrow \frac{a_1}{1-q}$

$S_n = 1 \cdot \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 - \frac{2}{3}} \xrightarrow[n \to \infty]{} \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = 3$

Summe alle durch X teilbar

Wie gross ist die Summe aller durch 17 teilbaren vierstelligen Zahlen?

$n = ?\,,\quad a_1 = 1'003\,,\quad d = 17$

$$9996 = 1'003 + (n-1)\cdot 17$$
$$9996 = 1'003 + 17n - 17$$
$$9996 = 986 + 17n \qquad |-986$$
$$9010 = 17n \qquad |:17$$
$$n = 530$$

$$s_{530} = 530\cdot 1'003 + \frac{530(530-1)}{2}\cdot 17$$
$$= 2'914'735$$

Anzahl Glieder arithmetische Folge

Wieviele Glieder der arithmetischen Folge $(6, 12, \ldots)$ ergeben die Summe 1800?

$$1'800 = n\cdot 6 + \frac{n(n-1)}{2}\cdot 6 \qquad |\cdot 2$$
$$3'600 = 12n + n(n-1)\ 6$$
$$3'600 = 12n + 6n^2 - 6n$$
$$3'600 = 6n + 6n^2 \qquad |:6$$
$$600 = n + n^2 \qquad |-600$$
$$0 = n^2 + n + 600$$
$$0 = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4\cdot 1\cdot(-600)}}{2\cdot 1}$$

Mitternachtsformel

$x_1 = 24\,,\quad x_2 = -25 \longrightarrow$ Scheinlösung

Anzahl Glieder geometrische Folge

Wieviele Glieder der geometrischen Folge $(6, 12, \ldots)$ ergeben die Summe 6138?

$$6'138 = \frac{6(2^n - 1)}{2-1}$$
$$6'138 = 6(2^n - 1) \qquad |:6$$
$$1'023 = 2^n - 1 \qquad |+1$$
$$1'024 = 2^n \qquad |\log_2$$
$$n = 10$$

Unbekannte Parameter mit gegebenen Summen

Von einer arithmetischen Folge ist bekannt, dass $s_7 = 119$ und $s_{28} = 1946$ ist. Stellen Sie ein zugehöriges Gleichungssystem für a_1 und d auf und bestimmen Sie die entsprechenden Lösungen.

$s_7 = 119\,,\quad s_{28} = 1'946$

$$119 = 7\cdot a_1 + \frac{7\cdot 6}{2}\cdot d = 7\cdot a_1 + 21\cdot d$$
$$1'946 = 28\cdot a_1 + \frac{28\cdot 27}{2}\ d = 28\cdot a_1 + 378d$$
$$a_1 = \frac{21d - 119}{7} = 17 - 3d = 17 - 3\cdot 5 = 2$$
$$1'946 = 28\cdot(17 - 3d) + 378d$$
$$1'946 = 476 - 84d + 378d \qquad |-476$$
$$1'470 = 294d \qquad |:294$$
$$5 = d$$

Weitere Summen mit gegebenen Summen

Von einer geometrischen Folge kennt man $s_1 = 100$ und $s_2 = 20$. Berechnen Sie s_3 und s_{16}.

$s_1 = a_1 = 100\,,\quad s_2 = a_1 + a_2 = 20$

$$a_2 = s_2 - s_1 = 20 - 100 = -80\,,\quad q = a_2/a_1 = -80/100 = -0.8$$

$$s_3 = \frac{100\left(1-(-0.8)^3\right)}{1+0.8} = \frac{100(1+0.512)}{1.8} = \frac{151.2}{1.8} = 84$$

$$s_{16} = \frac{100\left(1-(-0.8)^{16}\right)}{1+0.8} = \frac{100(1-0.028)}{1.8} = \frac{97.18}{1.8} = 53.99$$

Summenwert endliche Summen

Arithmetisch: $\sum_{i=1}^{100}(3+4i)$

$$a_1 = 3+4 = 7$$
$$a_2 = 3+8 = 11$$
$$a_3 = 3+12 = 15$$

+4, +4

$n = 100,\ a_1 = 7,\ d = 4$

$$s_{100} = 100\cdot 7 + \frac{100\cdot 99}{2}\cdot 4$$
$$= 20'500$$

Geometrisch: $\sum_{\ell=1}^{10} 3\cdot 5^{\ell-1}$

$$a_1 = 3\cdot 5^0 = 3\cdot 1 = 3$$
$$a_2 = 3\cdot 5^1 = 15$$

$q = \frac{15}{3} = 5$

$n = 10,\ a_1 = 3,\ q = 5$

$$s_{10} = \frac{3(5^{10} - 1)}{5-1}$$
$$= 7'324'218$$

Minimal / Maximal Verteilung

Eine Summe von 6000 Franken wird so unter 17 Personen verteilt, dass

(a) jede Person 14 Franken mehr erhält als die vorangehende Person.

(b) jede Person 10% mehr erhält als die vorangehende Person.

Bestimmen Sie jeweils den kleinsten und den grössten Betrag.

a) Arithmetisch

$a_1 = ?\,,\quad d = 14\,,\quad n = 17$

$$6'000 = 17\cdot a_1 + \frac{17(17-1)}{2}\cdot 14 \qquad |-1904$$
$$4'096 = 17\cdot a_1 \qquad |:17$$

$240.94 = a_1$ (minimal Betrag)

$a_{17} = 240.94 + 16\cdot 14 = 464.94$ (maximal Betrag)

b) Geometrisch

$a_1 = ?\,,\quad q = 1.1\,,\quad n = 17$

$$6'000 = \frac{a_1(1-1.1^{17})}{1-1.1}$$
$$= \frac{a_1(-4.054)}{-0.1} \qquad |\cdot -0.1$$
$$-600 = a_1(-4.054) \qquad |: -4.054$$

$147.98 = a_1$ (minimal Betrag)

$a_{17} = 1.1^{16}\cdot 147.98 = 679.99$ (maximal Betrag)

Grenzwert unendliche Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} 3\left(\frac{4}{5}\right)^{k-1}$$

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= 3\left(\tfrac{4}{5}\right)^0 = 3 \\ a_2 &= 3\left(\tfrac{4}{5}\right)^1 = 2.4 \end{aligned}\right\}\ q = \frac{2.4}{3} = 0.8$$

$$\text{Grenzwert} = 3\cdot\frac{1-(0.8)^n}{1-0.8} \xrightarrow[n\to\infty]{} 3\cdot\frac{1}{1-0.8} = 15$$