Grenzwerte Funktionen

Endlich

Funktion $f(x)$ und Stelle x_0

- Grenzwert g = Wert, dem sich die Funktion $f(x)$ annähert, wenn x immer mehr gegen x_0 geht.
- Funktion $f(x)$ muss an der Stelle x_0 nicht zwingend definiert sein

Schreibweise: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = g$ / $f(x) \to g$ für $x \to x_0$

z.B. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{(x+1)\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}} = 1+1 = 2$

$\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^2-2x-3}{x^2+2x-15} = \lim\limits_{x \to 3} \frac{\cancel{(x-3)}(x+1)}{(x+5)\cancel{(x-3)}} = \lim\limits_{x \to 3} \frac{(x+1)}{(x+5)} = \frac{3+1}{3+5} = \frac{1}{2}$

Unendlich

Grenzwert von Funktion $f(x)$

- Wert, dem sich die Funktion $f(x)$ annähert, wenn x gegen unendlich geht.

Schreibweise: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = g$ / $f(x) \xrightarrow[x \to \infty]{} g$

z.B. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x}{1+x^2} = 0$ (Grad Zähler < Grad Nenner)

Rechnen mit Grenzwerten

Voraussetzung: Alle benötigten Grenzwerte existieren.

(1) $\lim\limits_{x \to x_0} (c \cdot f(x)) = c \cdot \left(\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \right)$ für $c \in \mathbb{R}$

(2a) $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) + \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$

(2b) $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) - g(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) - \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$

(3) $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \left(\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \right) \cdot \left(\lim\limits_{x \to x_0} g(x) \right)$

(4) $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}$ (Voraussetzung: $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) \neq 0$)

Endliche Grenzwerte

z.B. $\lim\limits_{x \to -3} \frac{x^2-9}{x+3}$

$= \frac{\cancel{(x+3)}(x-3)}{\cancel{x+3}} = x-3 = -3-3 = -6$

z.B. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{(x-2)^2-4}{x}$

$= \frac{\cancel{x}(x-4)}{\cancel{x}} = x-4 = 0-4 = -4$

z.B. $\lim\limits_{x \to -2} \frac{x^3+8}{x+2}$

$\frac{x^3}{x}$ $\quad \frac{-2x^2}{x}$

$(x^3+8):(x+2) = x^2 - 2x + \frac{4x+8}{x+2} = x^2-2x+4$

$-(x^3+2x^2) \longrightarrow x^2(x+2) = x^3+2x^2$

$-2x^2+8$

$-(-2x^2-4x) \longrightarrow -2x(x+2) = -2x^2-4x$

$4x+8$

Grenzwert: $(-2)^2 - 2 \cdot (-2) + 4 = 12$

z.B. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{-x^2-3x+10}{2x^2+x-10}$

$= \frac{-\cancel{(x-2)}(x+5)}{(2x+5)\cancel{(x-2)}} = \frac{-(x+5)}{2x+5} = \frac{-2-5}{4+5} = -\frac{7}{9}$

Unendliche Grenzwerte

z.B. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{-x^2-3x+10}{2x^2+x-10}$

gleicher Grad: $\frac{-x^2}{2x^2} = -\frac{1}{2}$