Gebrochenrationale Funktionen

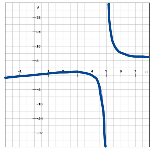
Nullstellen und Definitionslücken

Gebrochenrationale Funktion : $f(x) = \frac{p_1(x)}{p_2(x)}$

(!) p_1, p_2 sind Polynome

- Nullstellen von $f(x)$: Nullstellen von $p_1(x)$, die nicht von $p_2(x)$ sind.
- Definitionslücken von $f(x)$: Nullstellen von $p_2(x)$.
  - Hebbare Definitionslücken: Nullstellen von $p_1(x)$ und $p_2(x)$.
  - Polstelle: Nur Nullstellen von $p_2(x)$ (nach kürzen).

z.B. $\frac{x^3-6x^2+8x}{x^2-7x+10}$



$p_1(x) = x^3-6x^2+8x = x(x-2)(x-4)$, Nullstellen : 0, 2, 4

$p_2(x) = x^2-7x+10 = (x-2)(x-5)$, Nullstellen : 2, 5

Nullstellen von $f(x)$: 0, 4

Definitionslücken von $f(x)$: 2 (hebbar), 5 (Polstelle)

Hebbare Definitionslücken stopfen

Bei x_0 stopfen mit $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

z.B. $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} \frac{x(x-2)(x-4)}{(x-2)(x-5)} = \lim\limits_{x \to 2} \frac{x(x-4)}{x-5}$

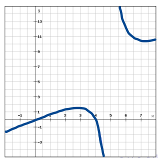
2 einsetzen $= \frac{2(2-4)}{2-5} = \frac{4}{3}$

Vorzeichenwechsel

Der Graph springt an dieser Stelle über die x-Achse.

Passiert bei allen Nullstellen und Polstellen x_0, bei denen $(x-x_0)$ einen ungeraden Exponenten hat.

z.B. $\frac{x(x-2)(x-4)}{(x-2)(x-5)}$



Vorzeichenwechsel bei 0, 4, 5

Asymptote

Alternative Darstellung einer gebrochenrationale Funktion :

$f(x) = p(x) + \frac{g(x)}{h(x)}$

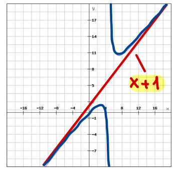
$p(x)$: Polynom

$\frac{g(x)}{h(x)}$: "echt gebrochen" rationale Funktion (Zählergrad < Nennergrad)

Darstellung erhält man durch Polynomdivision.

$f(x)$ nähert sich asymptotisch immer mehr der Funktion $p(x)$ an.

z.B. $f(x) = \frac{x^3-6x^2+8x}{x^2-7x+10} = x+1 + \frac{5}{x-5}$

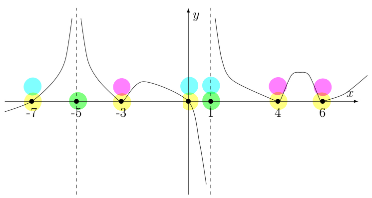


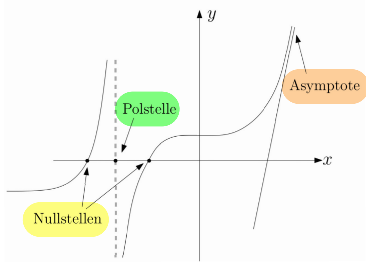
$f(x)$ nähert sich asymptotisch immer mehr der Funktion $x+1$ an.

Von Skizze zu f(x)

1. Alle Nullstellen und Polstellen identifizieren
2. Nullstellen in Zähler (x +/- ...)
3. Polstellen in Nenner (x +/- ...)
4. Exponent bestimmen, falls Vorzeichenwechsel ungerade, ansonsten gerade

z.B.





Nullstellen mit Vorzeichenwechsel: −7, 0

Nullstellen ohne Vorzeichenwechsel: −3, 4, 6

Polstellen mit Vorzeichenwechsel: 1

Polstellen ohne Vorzeichenwechsel: −5

$f(x) = k \cdot \frac{x \cdot (x+7) \cdot (x+3)^2 (x-4)^2 \cdot (x-6)^2}{(x-1) \cdot (x+5)^2}$

$k = 1 \longrightarrow f(7)$ gibt positiven Wert und laut Graph muss Wert positiv sein.

$f(x) = 1 \cdot \frac{x \cdot (x+7) \cdot (x+3)^2 (x-4)^2 \cdot (x-6)^2}{(x-1) \cdot (x+5)^2}$

Polynom + echt gebrochenrationale Funktion

$f_2(x) = \frac{x^3+x^2+1}{x^2-1}$ Gleichung der Asymptote angeben.

$\frac{x^3}{x^2} = x \qquad \frac{x^2}{x^2} = 1$

$f_2(x) = (x^3+x^2+1) : (x^2-1) = x + 1 + \frac{x+2}{x^2-1}$ → Asymptoten: x+1

$-(x^3-x)$ → $x(x^2-1) = x^3-x$

$-x^3+x$

x^2+x+1

$-(x^2-1)$ → $1(x^2-1) = x^2-1$

$x+2$

Nullstellen, Definitionslücken bestimmen und stopfen

$f_1(x) = \frac{x^2+4x+3}{x^3-2x^2-15x}$

$p_1(x) = x^2+4x+3 = (x+3)\cdot(x+1)$, Nullstellen: $-3, -1$

$p_2(x) = x^3-2x-15x = x(x+3)\cdot(x-5)$, Nullstellen: $0, -3, 5$

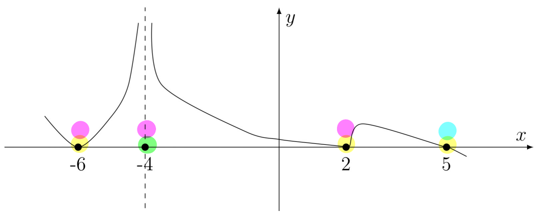
Nullstellen von f(x): -1

Definitionslücken von f(x): -3 (hebbar), $0, 5$ (Polstelle)

Vorzeichenwechsel: $-1, 0, 5$

Stopfen von $x = -3$: $\lim\limits_{x \to -3} \frac{(x+1)\cdot\cancel{(x+3)}}{x\cdot\cancel{(x+3)}\cdot(x-5)} = \frac{(-3+1)}{-3\cdot(-3-5)} = -\frac{1}{12}$

Von Skizze zu f(x)



Nullstellen mit Vorzeichenwechsel: 5

Nullstellen ohne Vorzeichenwechsel: $-6, 2$

Polstellen ohne Vorzeichenwechsel: -4

$f(x) = k \cdot \frac{(x+6)^2(x-2)^2(x-5)}{(x+4)^2}$

$k = -1$ → f(6) gibt positiven Wert, laut Graph muss der Wert aber negativ sein.

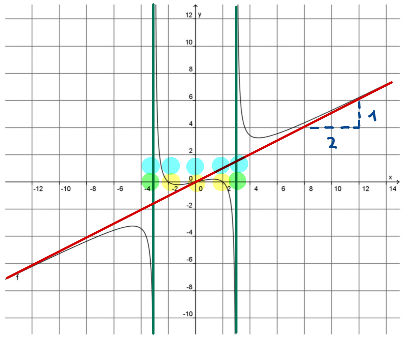
$f(x) = -1 \cdot \frac{(x+6)^2(x-2)^2(x-5)}{(x+4)^2}$

beliebieg erweitern: $-1 \cdot \frac{(x+6)^4(x-2)^2(x-5)}{(x+4)^2}$

(!) Exponenten können beliebig erweitert werden müssen jedoch positiv/negativ bleiben.

Von Skizze zu f(x) und Asymptote

Polstellen



Asymptote (nähert sich an Linie an, welche nicht zur Polstelle führt)

Nullstellen mit Vorzeichenwechsel: $-2, 0, 2$

Polstellen mit Vorzeichenwechsel: $-3, 3$

$f(x) = k \cdot \frac{(x+2)(x-2)x}{(x+3)(x-3)}$

$k = \frac{1}{2} = 0.5$ → Steigung im Koordinatensystem ablesen

$f(x) = 0.5 \cdot \frac{(x+2)(x-2)x}{(x+3)(x-3)}$