Folgen

Definition

Reele Folge a = Funktion (Abbildung) $a: \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R}$

- Jeder natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}^*$ wird eine reele Zahl a_n zugeordnet
- Folge = unendlich viele Objekte (reele Zahlen)

Darstellungen

Verbal : "Die Folge der positiven, geraden Zahlen"

Aufzählend : $2, 4, 6, 8, \ldots$

Explizit : $a_n = 2n,\ n \in \mathbb{N}^*$ ⓘ Bildungsgesetz

Implizit : $a_1 = 2,\ a_{n+1} = a_n + 2$ ⓘ Rekursionsformel

Arithmetische Folge

Konstante Differenz zwischen 2 Folgegliedern.

Explizit : $a_n = c + (n-1) \cdot d$

Implizit : $a_1 = c$

$a_{n+1} = a_n + d$

ⓘ d = konstante Differenz, c = Startwert

z.B. $5, 8, 11, 14, 17, \ldots$ $+3$ $\longrightarrow a_n = 5 + (n-1) \cdot 3$

$7, 0, -7, -14, \ldots$ -7 $\longrightarrow a_n = 7 + (n-1) \cdot (-7)$

Geometrische Folge

Konstanter Faktor zwischen 2 Folgegliedern.

Explizit : $a_n = c \cdot q^{n-1}$

Implizit : $a_1 = c$

$a_n = q \cdot a_n$

ⓘ q = konstanter Faktor, c = Startwert

z.B. $10, 1, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \ldots$ $\cdot \frac{1}{10}$ $\longrightarrow a_n = 10 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$

$-2, 2, -2, 2, \ldots$ $\cdot(-1)$ $\longrightarrow a_n = (-2) \cdot (-1)^{n-1}$

Grenzwerte

g = Grenzwert einer Folge

- Die Folgeglieder kommen ab einem gewissen n dem Wert g beliebig nahe

z.B. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$

Skizze : 0 … $1/8$, $1/4$, $1/2$, 1

Bezeichnung : $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$

z.B. $0.3, 0.33, 0.333, \ldots$

Skizze : 0.3, 0.33, 0.333 … $1/3$

Bezeichnung : $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \frac{1}{3}$

Reelle Zahl g = Grenzwert / Limes der Folge a_n wenn:

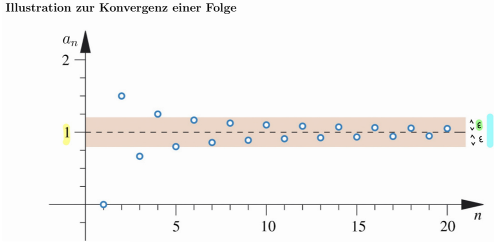
- Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert eine natürliche Zahl n_0
- Alle $n \geq n_0$ gilt stets $|a_n - g| < \varepsilon$

Folge mit Grenzwert : konvergent

Folge ohne Grenzwert : divergent

ⓘ Folge hat höchstens 1 Grenzwert

Illustration zur Konvergenz einer Folge



Schreibweise: $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = g$, $a_n \xrightarrow[n \to \infty]{} g$, $a_n \to g$ für $n \to \infty$

Rechnen mit Grenzwerten

Gegeben sind zwei konvergente Folgen a und b und eine Konstante c. Dann gilt: [2]

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} (c \cdot a_n) = c \cdot \lim\limits_{n\to\infty} a_n$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} (a_n) + \lim\limits_{n\to\infty} (b_n)$, $\quad \lim\limits_{n\to\infty} (a_n - b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} (a_n) - \lim\limits_{n\to\infty} (b_n)$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} (a_n) \cdot \lim\limits_{n\to\infty} (b_n)$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} (a_n)}{\lim\limits_{n\to\infty} (b_n)}$, falls $\lim\limits_{n\to\infty} (b_n) \neq 0$ und $b_n \neq 0$ für alle n.

Grenzwerte bei Polynome

Folgeglieder sind von der Form $a_n = \frac{g(n)}{h(n)}$, wobei $g(n)$ und $h(n)$ Polynome sind.

Fall 1 : Zählergrad < Nennergrad = 0

z.B. $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{3n^2 + 7n - 15}{n^3 - 2n^2 + n + 10} = 0$

Fall 2 : Zählergrad > Nennergrad = ∞ oder $-\infty$

z.B. $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{3n^4 - 7n + 1}{6n^3 - 2n^2 + 5} = \infty$

Fall 3 : Zählergrad = Nennergrad = $\frac{\text{führender Term}}{\text{führender Term}}$

z.B. $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{2n^3 + n^2 + 8n}{5n^3 + 4n^2 + 17} = \frac{2}{5}$

Spezielle Folge: $\left\langle \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{1}} \right\rangle$ strebt:

- Nicht gegen 1
- Nicht gegen ∞
- Sondern gegen $e \approx 2.718$ ⓘ Eulersche Zahl

Fibonacci-Folge

Implizit : $a_1 = 1,\ a_2 = 1,\ a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$

z.B. $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$

Harmonische Folge

Explizit : $a_n = \frac{1}{n}$

z.B. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$

Erweitern mit Binom

z.B. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n^2+4n} - \sqrt{n^2-3}$

erweitern mit a+b

$$= \frac{\left(\sqrt{n^2+4n} - \sqrt{n^2-3}\right)\cdot\left(\sqrt{n^2+4n} + \sqrt{n^2-3}\right)}{\sqrt{n^2+4n} + \sqrt{n^2-3}}$$

$$= \frac{(n^2+4n) - (n^2-3)}{\sqrt{n^2+4n} + \sqrt{n^2-3}}$$

$$= \frac{4n-3}{\sqrt{\cancel{n^2}+4n} + \sqrt{\cancel{n^2}-3}}$$

$$= \frac{\cancel{n}(4+\frac{3}{n})}{\cancel{n}\sqrt{1+\frac{4}{n}} + \cancel{n}\sqrt{1-\frac{3}{n^2}}}$$

mit n kürzen

$$= \frac{4+\frac{3}{n}}{\sqrt{1+\frac{4}{n}} + \sqrt{1-\frac{3}{n^2}}}$$

Fall 1
Zählergrad < Nennergrad
= 0

$$= \frac{4+0}{\sqrt{1+0} + \sqrt{1-0}}$$

$$= \frac{4}{1+1} = 2$$

Eulersche Zahl

z.B. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{5n}\right)^n$

$$= \left(1+\frac{1}{5n}\right)^{\frac{5n}{1}\cdot\frac{1}{5n}\cdot n}$$

$$= \left(\left(1+\frac{1}{5n}\right)^{\frac{5n}{1}}\right)^{\frac{1}{5n}\cdot\frac{n}{1}} \qquad \frac{1}{5n}\cdot\frac{n}{1} = \frac{1\cancel{n}}{5\cancel{n}} = \frac{1}{5}$$

$$= \left(\left(1+\frac{1}{5n}\right)^{\frac{5n}{1}}\right)^{\frac{1}{5}}$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{} e^{\frac{1}{5}}$$

z.B. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{9}{10n}\right)^{\frac{n}{8}}$

$$= \left(1+\frac{9}{10n}\right)^{\frac{10n}{9}\cdot\frac{9}{10n}\cdot\frac{n}{8}}$$

$$= \left(\left(1+\frac{9}{10n}\right)^{\frac{10n}{9}}\right)^{\frac{9}{10n}\cdot\frac{n}{8}} \qquad \frac{9}{10n}\cdot\frac{n}{8} = \frac{9\cancel{n}}{80\cancel{n}} = \frac{9}{80}$$

$$= \left(\left(1+\frac{9}{10n}\right)^{\frac{10n}{9}}\right)^{\frac{9}{80}}$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{} e^{\frac{9}{80}}$$

Hoch n

z.B. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^{n-1}+1}{2^{n+1}+8}$

$$\overset{:2^n}{=} \frac{2^{-1} + \frac{1}{2^n}}{2^{+1} + \frac{8}{2^n}}$$

Fall 1
Zählergrad < Nennergrad
= 0

$$= \frac{2^{-1} + 0}{2^{+1} + 0}$$

$$= \frac{0.5}{2} = \frac{1}{4} = 0.25$$

z.B. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}+2^n}{3^n+2}$

$$\overset{:3^n}{=} \frac{3^{+1} + \left(\frac{2}{3}\right)^n}{3 + \frac{2}{3^n}}$$

Fall 1
Zählergrad < Nennergrad
= 0

$$= \frac{3+0}{1+0}$$

$$= \frac{3}{1} = 3$$

Fälle

z.B. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{(3n+1)^2}$

$$= \frac{n^2+2n+1}{9n^2+6n+1}$$

$$= \frac{1}{9}$$