HO GENT

| Academiejaar 2023-2024 – 1e examenperiode | Reeks Voorbeeld |
|---|---|
| Departement: IT en Digitale Innovatie<br>Opleiding, afstudeerrichting en jaar: Toegepaste informatica, 2TI<br>Naam van het opleidingsonderdeel: Mathematics for Machine Learning<br>dOLOD/Deelexamen:<br>Campus: Aalst, Schoonmeersen<br>Lector(en): Stijn Lievens en Koen Mertens | Examendatum:<br>Aanvangsuur examen: |
| **Voornaam en naam student:** | |
| Studentennummer: | |
| Lector bij wie de student de onderwijsactiviteit volgde: | Lesgroep: |
| **Behaald resultaat: _____ op 100** | |

☒Tijdens het examen mogen GEEN hulpmiddelen gebruikt worden
Algemene richtlijnen:

- Vul het bovenstaande kader in. Vul op elke bladzijde je naam en voornaam in.
- Voor studenten met Individuele Onderwijs- en ExamenMaatregelen: schrijf IOEM op elke bladzijde.
- Controleer of deze examenbundel alle pagina's bevat, zo niet verwittig de docent of de toezichter zodat je een nieuw exemplaar krijgt.
- Je mag geen enkele vorm van communicatie -ook niet draadloos of online- gebruiken tijdens de examens (chatten, mailen, Messenger, . . . ). GSM's en dergelijke moeten **uitgeschakeld** zijn (niet op stand-by, trillen, . . . ). GSM's, smartphones, smartwatches enz. mogen tijdens de examens ook NIET gebruikt worden om de tijd te raadplegen. Het niet volgen van deze gedragscode wordt gesanctioneerd als "onregelmatigheden bij een examen"

| Vraag: | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | Totaal |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Punten: | 16 | 16 | 22 | 12 | 18 | 10 | 6 | 100 |
| Score: | | | | | | | | |

Voornaam en naam:

**Vraag 1** .../**16**

Gegeven de volgende vectoren in $\mathbb{R}^4$:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

(4pt) (a) Bepaal $\|\mathbf{u}\|$ en $\|\mathbf{v}\|$:

(2pt) (b) Bepaal $\mathbf{u} + \mathbf{v}$:

Voornaam en naam:

(2pt) (c) Bepaal het inwendig product $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$:

(2pt) (d) Beschouw $\mathbf{u}$ en $\mathbf{v}$ als matrices met één kolom en bereken het matrix product $\mathbf{uv}$ of schrijf "niet gedefinieerd" wanneer dit matrix product niet bestaat.

(2pt) (e) Beschouw $\mathbf{u}$ en $\mathbf{v}$ als matrices met één kolom en bereken het matrix product $\mathbf{u}^\mathrm{T}\mathbf{v}$ of schrijf "niet gedefinieerd" wanneer dit matrix product niet bestaat.

(2pt) (f) Bepaal de cosinus van de hoek ingesloten door de vectoren $\mathbf{u}$ en $\mathbf{v}$. Toon je werkwijze. Vereenvoudig waar mogelijk.

(2pt) (g) Bepaal de orthogonale projectie van $\mathbf{u}$ op de richting van $\mathbf{v}$.

HO GENT

Voornaam en naam:

**Vraag 2** .../**16**

Beschouw de volgende matrix:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

(4pt) (a) Bepaal $(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}$. Toon je werkwijze.

(4pt) (b) Bepaal de projectiematrix $\mathbf{P}$ waarmee men loodrecht kan projecteren op de vectorruimte opgespannen door de kolommen van $\mathbf{A}$. Toon je werkwijze.

Voornaam en naam:

(4pt) (c) Projecteer

$$\mathbf{b_1} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

op de kolomruimte van $\mathbf{A}$.

Wat merk je? Verklaar je antwoord.

(4pt) (d) Duid de uitspraken aan die geldig zijn voor *elke* projectiematrix $\mathbf{P}$.

A. De projectiematrix is idempotent: $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$.
B. De projectiematrix is inverteerbaar.
C. De projectiematrix is een vierkante matrix.
D. De projectiematrix is een symmetrische matrix.

Voornaam en naam:

**Vraag 3** .../**22**

Beschouw het volgende stelsel lineaire vergelijkingen:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 3y + 4x - z = 6 \\ 3z + 3x + 2y = 4. \end{cases} \tag{1}$$

(4pt) (a) Geef de coëfficiëntenmatrix $\mathbf{A}$ en het rechterlid $\mathbf{b}$ zodat

$$\mathbf{A}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{b}.$$

(4pt) (b) Transformeer de coëfficiëntenmatrix naar een bovendriehoeksmatrix door elementaire rij-operaties uit te voeren. Geef aan welke rij-operaties je uitvoert in elke stap. Toon je werkwijze. Geef in elke stap ook aan welke de elementaire matrices $\mathbf{E_{i,j}}$ zijn die rijoperaties voorstellen en wat het resultaat is van de rij-operaties in elke stap. Werk verder totdat rechts als resultaat de matrix $\mathbf{U}$, een bovendriehoeksmatrix verschijnt. Geef je antwoord in de vorm zoals het voorbeeld hieronder. Bv., de eerste stap met spil op de eerste rij en eerste kolom zou er zo kunnen uitzien:

$R_2 \leftarrow R_2 + R_1$ en

$R_3 \leftarrow R_3 - R_1$

$$\mathbf{E_{3,1}E_{2,1}A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \text{rij 1 herberekend} \\ \text{rij 2 herberekend} \\ \text{rij 3 herberekend} \end{bmatrix}$$

Stap 1: (Gebruik element op rij 1 kolom 1 als spil)

(2pt) (c) Stap 2: (Gebruik element op rij 2 kolom 2 als spil)

(3pt) (d) Bepaal nu de inverse van elk van de de elementaire matrices $\mathbf{E_{i,j}}$ die je zonet nodig had om de bovendriehoeksmatrix $\mathbf{U}$ te bekomen.
**Hint**: het is niet nodig om hier lange berekeningen te maken.

(3pt) (e) Bepaal nu de matrix $\mathbf{L}$, zodat $\mathbf{LU} = \mathbf{A}$.

HO GENT

Voornaam en naam:

(3pt) (f) We weten dat $\mathbf{LU} = \mathbf{A}$ en $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. Stel $\mathbf{y} = \mathbf{Ux}$ zodat $\mathbf{Ly} = \mathbf{b}$. Los $\mathbf{Ly} = \mathbf{b}$ op naar $\mathbf{y}$ met voorwaartse substitutie. Geef $\mathbf{y}$:

(3pt) (g) Wetende dat $\mathbf{y} = \mathbf{Ux}$, los op naar $\mathbf{x}$ met achterwaartse substitutie aangezien $\mathbf{U}$ een bovendriehoeksmatrix is. Geef $\mathbf{x}$:

HO GENT

Voornaam en naam:

**Vraag 4** **.../12**

Pas de methode van Gram-Schmidt toe op de volgende drie vectoren:

$$\mathbf{a_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad \mathbf{a_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ter info: de methode van Gram-Schmidt start met het bepalen van vectoren $\mathbf{e_i}$ op de volgende manier:

- Start met $\mathbf{e_1} = \mathbf{a_1}$
- Vervolgens construeren we $\mathbf{e_2}$ t.e.m. $\mathbf{e_m}$ in deze volgorde a.d.h.v. de volgende formule:

$$\mathbf{e_i} = \mathbf{a_i} - \frac{\mathbf{e_1} \cdot \mathbf{a_i}}{\mathbf{e_1} \cdot \mathbf{e_1}}\mathbf{e_1} - \frac{\mathbf{e_2} \cdot \mathbf{a_i}}{\mathbf{e_2} \cdot \mathbf{e_2}}\mathbf{e_2} - \cdots - \frac{\mathbf{e_{i-1}} \cdot \mathbf{a_i}}{\mathbf{e_{i-1}} \cdot \mathbf{e_{i-1}}}\mathbf{e_{i-1}}.$$

(2pt) (a) Geef $\mathbf{e_1}$:

(3pt) (b) Bereken $\mathbf{e_2}$:

Voornaam en naam:

(4pt) (c) Bereken $\mathbf{e_3}$:

(3pt) (d) Vervolgens normaliseer je de vectoren $\mathbf{e_i}$ (met $i \in \{1, 2, 3\}$). Geef de matrix $\mathbf{Q}$ bestaande uit de genormaliseerde vectoren $\mathbf{q_i}$. Anders gezegd, geef

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} | & | & | \\ \mathbf{q_1} & \mathbf{q_2} & \mathbf{q_3} \\ | & | & | \end{bmatrix}$$

HO GENT

Voornaam en naam:

**Vraag 5** .../**18**

Beschouw een matrix $\mathbf{A}$ met de volgende SVD:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \sqrt{2} & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{6}/6 & \sqrt{3}/3 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{6}/3 & -\sqrt{3}/3 & 0 \\ \sqrt{6}/6 & \sqrt{3}/3 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{6}/6 & \sqrt{3}/2 & \sqrt{3}/6 \\ -\sqrt{3}/3 & 0 & \sqrt{6}/3 \\ \sqrt{2}/2 & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \tag{2}$$

(2pt) (a) Welk soort matrices zijn de eerste en derde matrix in deze decompositie? Wat zijn de kenmerken of is de definitie van dit soort matrices?

(2pt) (b) Geef de singuliere waarden verschillend van $0$ van $\mathbf{A}$.

(2pt) (c) Geef de eerste rechtse singuliere vector van $\mathbf{A}$. Schrijf je antwoord als een kolomvector.

Voornaam en naam:

(4pt) (d) De pseudoinverse van $\mathbf{A}$ is $\mathbf{A}^+$ met

$$\mathbf{A}^+ = \mathbf{V}\mathbf{\Sigma}^+\mathbf{U}^T \tag{3}$$

Geef $\mathbf{\Sigma}^+$:

(4pt) (e) Geef de werkwijze om de matrix van rang 1 te berekenen die de matrix $\mathbf{A}$ het beste benadert in de Frobeniusnorm. Uitrekenen hoeft niet.

(2pt) (f) (Dit deel hangt niet af van voorgaande delen) Duid alle matrices aan die rang $1$ hebben:

A. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

B. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

C. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

D. $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & -3 & -6 \end{bmatrix}$

(2pt) (g) (Dit deel hangt niet af van voorgaande delen). Duid alle vergelijkingen aan die voldaan zijn wanneer de kolommen van een matrix $\mathbf{B}$ (die niet noodzakelijk vierkant is) bestaan uit orthonormale vectoren.

A. $\mathbf{B}\mathbf{B}^T =$ eenheidsmatrix

B. $\mathbf{B}\mathbf{B}^T =$ matrix volledig gevuld met enen

C. $\mathbf{B}^T\mathbf{B} =$ eenheidsmatrix

D. $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{B} =$ eenheidsmatrix

**Vraag 6** …/**10**

Bereken de afgeleide functie van de volgende functies m.b.v. rekenregels voor afgeleiden.

(2pt) (a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto f(x) = \cos(x)\sin(x)$

(2pt) (b) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto f(x) = x(x+1)^4$

(2pt) (c) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto f(x) = \ln^2(x^2+1)$

(2pt) (d) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto f(x) = \exp(\ln(\cos^2(x)))$

(2pt) (e) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto f(x) = \dfrac{1}{(1+2^x)^2}$

**Vraag 7** **.../6**

Beschouw de functie

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto (x-1)^2 + 2(y-2)^2$$

(2pt) (a) Deze functie heeft een globaal minimum in $(x,y) = \dots$

HO GENT

Voornaam en naam:

(2pt) (b) Geef de gradiënt van deze functie: $\nabla f(x,y) = \cdots$:

(2pt) (c) We starten in het punt $(x_0, y_0) = (3, 4)$ en we passen één stap toe van gradient descent met stapgrootte $\alpha = 0.5$. Waar belanden we?