Simulación Gibbs de un polinomio MA de grado 1 basada en el método de Smith & Hocking

```
<< LinearAlgebra`Cholesky`
```

Introducción

Se presenta una aplicación particular para la simulación de polinomios MA de grado 1, del método de Smith & Hocking (*Algorithm AS 53: Wishart Variate Generator, 1972*) para la generación de muestras de una Wishart, el cual puede verse resumido en http://en.wikipedia.org/wiki/Wishart_distribution#Drawing_values_from_the_distribution.

En un proceso MA(1) de la forma $z_t = a_t - \theta_1 a_{t-1}$, la autocorrelación poblacional de primer orden es

$$\rho_1 = -\frac{\theta_1}{1+\theta_1^2}$$

de donde se puede despejar θ_1 en función de ρ_1

$$\theta_1 = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4\rho_1^2}}{2\rho_1}$$

Para que θ_1 sea un número real se precisa $1-4\rho_1^2 > 0$, o lo que es lo mismo

$$-\frac{1}{2} < \rho_1 < \frac{1}{2}$$

Si $\frac{1}{2} > \rho_1 > 0$ entonces se debe cumplir

$$0 < 1 - 2\rho_1 < \pm\sqrt{1-4\rho_1^2} < 1 + 2\rho_1$$

Si $-\frac{1}{2} < \rho_1 < 0$ entonces se debe cumplir

$$1 - 2\rho_1 > \pm\sqrt{1-4\rho_1^2} > 1 + 2\rho_1 > 0$$

En ambos casos se tiene

$$\pm\sqrt{1-4\rho_1^2} > 0$$

luego no cabe duda del signo del radical y θ_1 es una función biunívoca de ρ_1

$\theta_1 = \frac{-1+\sqrt{1-4\rho_1^2}}{2\rho_1}$

Simular el polinomio MA(1) es por tanto equivalente a simular la autocorrelación

Caso particular con longitud de serie 2

La matriz de covarianza muestral de un proceso MA(1) para una serie de longitud $m = 2$, es una matriz de Toeplitz definida por el vector de autocovarianzas muestrales (v_0, v_1), lo cual es en la práctica imposible pues no es posible calcularlas para una serie cn menos de 4 datos, pero peromite una mayor claridad expositiva

```
V = {{v0, v1},
   {v1, v0}};
Print["V = ", MatrixForm[V]]
```

$V = \begin{pmatrix} v_0 & v_1 \\ v_1 & v_0 \end{pmatrix}$

Su descomposición de Choleski nos da una matriz triangular inferior de la forma

```
S = Transpose[CholeskyDecomposition[V]];
Print["V = S S^T"]
Print["S = ", MatrixForm[S]]
```

$V = S\ S^T$

$S = \begin{pmatrix} \sqrt{v_0} & 0 \\ \frac{v_1}{\sqrt{v_0}} & \sqrt{v_0 - \frac{v_1^2}{v_0}} \end{pmatrix}$

```
LinkRead::linkep : An unexpected end of packet was received.

StringTake::take : Cannot take positions 15 through 13 in "V = S \(S\^T\)".

LinkRead::linkep : An unexpected end of packet was received.

LinkRead::linkep : An unexpected end of packet was received.

General::stop : Further output of LinkRead::linkep will be suppressed during this calculation.
```

Según el método de Smith & Hocking, existe una matriz triangular inferior

```
CC = {{c0, 0},
   {c10, c1}};
Print["C = ", MatrixForm[CC]]
```

$C = \begin{pmatrix} c_0 & 0 \\ c_{10} & c_1 \end{pmatrix}$

con distribución conocida celda a celda

$$c_0 \sim \sqrt{\frac{\chi_m^2}{m}}$$
$$c_1 \sim \sqrt{\frac{\chi_{m-1}^2}{m}}$$
$$c_{10} \sim N\left(0, \sqrt{\frac{1}{m}}\right)$$

tal que si L es la descomposición de Cholesky de la matriz de covarianza poblacional, a la que llamaremos $\Gamma = L\,L^T$, entonces, la matriz de covarianza muestral es una realización de la poblacional y adopta la forma

$$V = L\,C\,C^T\,L^T = S\,S^T$$

de donde se deduce que

$$L\,C = S$$

es decir

$$L = S\,C^{-1}$$

```
CInv = Inverse[CC];
L = S . CInv;
Print["C^-1 = ", MatrixForm[CInv]]
Print["L = S C^-1 = ", MatrixForm[L]]
```

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{c_0} & 0 \\ -\frac{c_{10}}{c_0\,c_1} & \frac{1}{c_1} \end{pmatrix}$$

$$L = S\;C^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{v_0}}{c_0} & 0 \\ \frac{v_1}{c_0\,\sqrt{v_0}} - \frac{c_{10}\,\sqrt{v_0-\frac{v_1^2}{v_0}}}{c_0\,c_1} & \frac{\sqrt{v_0-\frac{v_1^2}{v_0}}}{c_1} \end{pmatrix}$$

La matriz de covarianza poblacional será por tanto

```
Γ = L . Transpose[L];
Print["Γ = L L^T = ", MatrixForm[Γ], " = ", MatrixForm[{{γ0, γ1}, {γ1, γ0}}]]
```

$$\Gamma = L\;L^T = \begin{pmatrix} \frac{v_0}{c_0^2} & \frac{\sqrt{v_0}\left(\frac{v_1}{c_0\,\sqrt{v_0}} - \frac{c_{10}\,\sqrt{v_0-\frac{v_1^2}{v_0}}}{c_0\,c_1}\right)}{c_0} \\ \frac{\sqrt{v_0}\left(\frac{v_1}{c_0\,\sqrt{v_0}} - \frac{c_{10}\,\sqrt{v_0-\frac{v_1^2}{v_0}}}{c_0\,c_1}\right)}{c_0} & \frac{v_0-\frac{v_1^2}{v_0}}{c_1^2} + \left(\frac{v_1}{c_0\,\sqrt{v_0}} - \frac{c_{10}\,\sqrt{v_0-\frac{v_1^2}{v_0}}}{c_0\,c_1}\right)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 \\ \gamma_1 & \gamma_0 \end{pmatrix}$$

Además sabemos que también también es de Toeplitz, luego una de las celdas del factor de Smith & Hocking no se debe generar de forma aleatoria sino que viene determinada por las otras dos, de forma que se cumpla

$$\frac{v_0}{c_0^2} = \frac{v_0-\frac{v_1^2}{v_0}}{c_1^2} + \left(\frac{v_1}{c_0\,\sqrt{v_0}} - \frac{c_{10}\,\sqrt{v_0-\frac{v_1^2}{v_0}}}{c_0\,c_1}\right)^2$$

o lo que es lo mismo

$$\frac{v_1}{c_0\sqrt{v_0}} - \frac{c_{10}\sqrt{v_0-\frac{v_1^2}{v_0}}}{c_0\,c_1} = \pm\sqrt{\frac{v_0}{c_0^2} - \frac{v_0-\frac{v_1^2}{v_0}}{c_1^2}} = \pm\sqrt{v_0}\sqrt{\frac{1}{c_0^2} - \frac{1-\left(\frac{v_1}{v_0}\right)^2}{c_1^2}} = \pm\sqrt{v_0}\sqrt{\frac{1}{c_0^2} - \frac{1-r_1{}^2}{c_1^2}}$$

donde, por comodidad de expresión, se ha usado la autocorrelación muestral

$$r_1 = \frac{v_1}{v_0}$$

La matriz de covarianza poblacional se puede portanto generar a partir de tan sólo dos términos del factor Smith & Hocking

```
Γ = {{v0/c0^2, ± v0/c0 Sqrt[1/c0^2 - (1 - r1^2)/c1^2]}, {± v0/c0 Sqrt[1/c0^2 - (1 - r1^2)/c1^2], v0/c0^2}};
Print["Γ = ", MatrixForm[Γ], " = ", MatrixForm[{{γ0, γ1}, {γ1, γ0}}]]
```

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \frac{v_0}{c_0^2} & \pm\frac{v_0}{c_0}\sqrt{\frac{1}{c_0^2}-\frac{1-r_1^2}{c_1^2}} \\ \pm\frac{v_0}{c_0}\sqrt{\frac{1}{c_0^2}-\frac{1-r_1^2}{c_1^2}} & \frac{v_0}{c_0^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 \\ \gamma_1 & \gamma_0 \end{pmatrix}$$

La autocorrelación de primer orden es por lo tanto

$$\rho_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma_0} = \frac{\pm\frac{v_0}{c_0}\sqrt{\frac{1}{c_0^2}-\frac{1-r_1^2}{c_1^2}}}{\frac{v_0}{c_0^2}} = \pm c_0\sqrt{\frac{1}{c_0^2}-\frac{1-r_1^2}{c_1^2}} = \pm\sqrt{1-\frac{c_0^2}{c_1^2}\left(1-r_1^2\right)}$$

donde el signo se escogerá para que coincida con el de r_1

$$\rho_1 = \text{sign}(r_1)\sqrt{1-\frac{c_0^2}{c_1^2}\left(1-r_1^2\right)}$$

Para que sea un número real no nulo se debe cumplir

$$1-\frac{c_0^2}{c_1^2}\left(1-r_1^2\right) > 0$$

$$c_1^2 > \left(1-r_1^2\right)c_0^2$$

Recordemos que para que θ_1 sea un número real no nulo se precisa $1-4\rho_1^2>0$, o lo que es lo mismo

$$1-\frac{c_0^2}{c_1^2}\left(1-r_1^2\right) < \frac{1}{4}$$

$$c_1^2 < \frac{4}{3}\left(1-r_1^2\right)c_0^2$$

Es decir, primero se debe generar una chi-cuadrado libre

$$c_0^2 \sim \frac{1}{m}\chi_m^2$$

y luego una chi-cuadrado truncada

$c_1^2 \sim \frac{1}{m}\, \chi^2_{m-1}[(1 - r_1^2)\, c_0^2\, m,\ \frac{4}{3}\,(1 - r_1^2)\, c_0^2\, m]$

Esto es todo lo que se necesita para obtener uan simulación de un polinomio MA(1) para el caso m=2. A continuación se verá que es perfectamente extensible a cualquier longitud de la serie.

Extensión al caso de longitud arbitraria de la serie

Para una serie de longitud $m > 2$, la matriz de covarianza muestral de un proceso MA(1) es también una matriz de Toeplitz definida por el mismo vector de autocovarianzas de orden 2 (v_0, v_1)

$$V = \begin{pmatrix} v_0 & v_1 & 0 & 0 \\ v_1 & v_0 & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & v_1 \\ 0 & 0 & v_1 & v_0 \end{pmatrix}$$

Por las propiedades recursivas de construción, tanto de la descomposición de Choleski, como de la inversa de una matriz trinagular, el menor principal de orden dos tiene la misma forma para $m > 2$ que para $m = 2$ por lo que es válido todo lo dicho anteriormente, ya que la matriz de covarianzas poblacionales queda perfectamente definida por las dos primeras autocovarianzas las cuales sirven igualemente para obtener la autocrorrelación de orden 1, la cual define de forma biunívoca el polnomio MA(1)