Extensión de los modelos multiplicativos

Boceto de Nota Técnica

Bayes Inference S.A.

Gran Vía, 39, 5ª planta
28013 Madrid (España)
Tel. (34) 915327440
Fax. (34) 915322636
www.bayesforecast.com
www.tol-project.org

Contenido

Resumen

Este documento tiene como objetivo reunir y documentar las ideas que han surgido al modelar el posicionamiento de los editores en la venta de prensa que pretenden realizar una extensión de los modelos multiplicativos.

Copyright	2008, ***Bayes Inference S.A.***
Título	Extensión de los modelos multiplicativos
Asunto	
Categoría	
Archivo	C:\users\vdebuen\prj\doc\Extensión de los modelos multiplicativos.doc
Edición	modelos multiplicativos
Claves	modelos multiplicativos
Distribución	Interna

1.Extensión de los modelos multiplicativos

1.1Introducción

Un análisis de las ventas sencillo viene dado por un modelo multiplicativo de la forma:

$$V_t = B_t + \alpha\ I_t\, B_t \tag{1}$$

donde V es la venta, B la venta base y $\alpha\ I_t$ es un efecto multiplicativo, que representa un incremento porcentual sobre la venta base debido a promociones, noticias u otras incidencias.

El análisis del modelo se simplifica tomando logaritmos sobre la aproximación siguiente:

$$V_t = B_t\left(1+\alpha\ I_t\right) \approx B_t \exp\left(\alpha\ I_t\right) \equiv B_t\, a\, E_t \tag{2}$$

que es válida cuando el efecto multiplicativo es pequeño frente a la unidad.

De este modo el modelo multiplicativo se convierte en uno aditivo de la forma:

$$\log V_t = \log B_t + \alpha\ I_t \tag{3}$$

1.2Modelo multiplicativo

En general, para el análisis de las ventas es necesario introducir distintos efectos multiplicativos de la forma:

$$V_t = B_t + \sum_i \alpha_i I_{i,t}\, B_t \tag{4}$$

De modo similar al caso de un efecto podemos aproximar este modelo cuando los efectos son pequeños frente a la unidad $|\ \alpha_i\ I_{i,t}\ | << 1$ de la forma:

$$V_t = B_t\left(1+\sum_i \alpha_i I_{i,t}\right) \approx B_t \prod_i \left(1+\alpha_i I_{i,t}\right) \approx B_t \prod_i \exp\left(\alpha_i I_{i,t}\right) \tag{5}$$

1.2.1Representación multiplicativa

De este modo podemos escribir el modelo en su *representación multiplicativa* del siguiente modo:

$$\boxed{V_t = B_t \prod_i \exp\left(\alpha_i I_{i,t}\right) = B_t \prod_i a_i E_{i,t}} \tag{6}$$

donde: $E_{i,t} \equiv \exp I_{i,t}$ y $a_i \equiv \exp \alpha_i$

1.2.2Representación aditiva o logarítmica

Si tomamos logaritmos podemos representar el modelo en su *representación aditiva o logarítmica*:

$$\log V_t = \sum_i \alpha_i I_{i,t} + \log B_t = \sum_i \alpha_i I_{i,t} + N_t \qquad (7)$$

donde: $N_t \equiv \log B_t$

1.2.3Ecuaciones del modelo multiplicativo

$$\log V_t = \sum_i \alpha_i I_{i,t} + N_t \qquad (8)$$

donde: $N_t = \Psi(B)\varepsilon_t$ y $\varepsilon_t \therefore N(0,\sigma^2)$

1.3Modelo multiplicativo con parámetros dinámicos

Una primera extensión del modelo multiplicativo es suponer que los parámetros α_i no son constantes en el tiempo y su valor en el tiempo evoluciona siguiendo una determinada estructura. En general supondremos que estos parámetros se pueden agrupar de modo que todos aquéllos que pertenecen al mismo grupo siguen una misma estructura:

$$\log V_t = \sum_i \alpha_{i,t} I_{i,t} + N_t \qquad (9)$$

donde: $\alpha_{i,t} = \alpha_i M_{f(i),t}$ (10)

de modo que i y j pertenecen al mismo grupo si $f(i) = f(j)$.

En general estos parámetros dinámicos $\alpha_{i,t}$ pueden tener una dependencia más compleja que la anterior (10) y seguir a su vez un modelo multiplicativo de la forma:

$$\alpha_{i,t} = \alpha_i M_{f(i),t} \prod_i b_i F_{i,t} \qquad (11)$$

tomando logaritmos encontramos:

$$\log \alpha_{i,t} = \log \alpha_i + \log M_{f(i),t} + \sum_i \beta_i J_{i,t} = \log \alpha_i + N_{f(i),t} + \sum_i \beta_i J_{i,t} \qquad (12)$$

donde: $N_{j,t} \equiv \log M_{j,t}$, $F_{i,t} \equiv \exp J_{i,t}$ y $b_i \equiv \exp \beta_i$.

1.3.1Ecuaciones del modelo multiplicativo con parámetros dinámicos

$$\log V_t = \sum_i \alpha_{i,t} I_{i,t} + N_t \tag{13}$$

donde: $N_t = \Psi(B)\varepsilon_t$ y $\varepsilon_t \therefore N(0,\sigma^2)$

$$\log \alpha_{i,t} = \log \alpha_i + \sum_i \beta_i J_{i,t} + N_{f(i),t} \tag{14}$$

donde: $N_{j,t} = \Psi_j(B)\varepsilon_t^j$ y $\varepsilon_t^j \therefore N(0,\sigma_j^2)$

1.4Modelo multiplicativo compuesto

Otra extensión del modelo multiplicativo puede encontrarse si imaginamos que los efectos multiplicativos no actúan sobre el total de la venta base (B) sino sólo en una parte. En general podemos admitir que los efectos pueden actuar sobre distintas ventas base parciales (B_j) no necesariamente disjuntas.

Si extendemos el modelo multiplicativo (4) teniendo en cuenta estos efectos multiplicativos podemos escribir el modelo multiplicativo compuesto como:

$$V_t = B_t + \sum_{i\in Q} \alpha_i I_{i,t} B_t + \sum_j \sum_{i\in Q_j} \alpha_i I_{i,t} B_{j,t} \tag{15}$$

Si denotamos con x la fracción de venta base que corresponde a cada venta base parcial, podemos reescribir la ecuación anterior como:

$$V_t = B_t \left(1 + \sum_{i\in Q} \alpha_i I_{i,t} + \sum_j \sum_{i\in Q_j} \alpha_i I_{i,t} x_{j,t} \right) \tag{16}$$

donde: $B_{j,t} = x_{j,t} B_t$

Intuitivamente esta ecuación nos recuerda a aquélla (9) del modelo multiplicativo con parámetros dinámicos. Veamos que efectivamente puede escribirse como aquélla de acuerdo al siguiente cambio:

$$V_t = B_t \left(1 + \sum_i \alpha_{i,t} I_{i,t} \right) \tag{17}$$

donde: $\alpha_{i,t} = \alpha_i$ si $i \in Q$ y $\alpha_{i,t} = \alpha_i x_{j,t}$ si $i \in Q_j$.

Si tomamos logaritmos y hacemos uso de la aproximación presentada anteriormente (5) encontramos que el modelo multiplicativo compuesto es un modelo multiplicativo de parámetros dinámicos:

$$\log V_t = \sum_i \alpha_{i,t} I_{i,t} + N_t \tag{18}$$

donde: $N_t \equiv \log B_t$