1 Les fonctions de Green.

1.1 Entrée en matière

(insister sur le faite que les CI changent la tête de Green. Surtout, faire une figure qui serait parlant.). Les fonctions de Green constituent une méthode assez général de résolution d'équations différentielles, ou de transformation d'équations différentielles en équations intégrales. Elles sont extrêmement utilisée en mécanique quantique, où on les appelle des propagateurs, et en théorie des processus stochastiques. Nous n'aborderons ce sujet que très légèrement ici, juste pour rappeler les grands principes de la méthode.

Supposons que nous voulons résoudre l'équation différentielle

$$a\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + cx = f(t) \tag{1.1}$$

avec des conditions initiales données $x(0) = x_0$ et $x'(0) = \tilde{x}_0$. Ceci est par exemple l'équation du mouvement d'une particule soumise à une force $f(t)$. a et b peuvent être fonction du temps. Pour résoudre cette équation différentielle, il nous faut trouver la solution de l'équation homogène, et lui ajouter une solution particulière. Nous cherchons justement une solution particulière.

Supposons que nous savons calculer la réponse de la particule à une force impulsionnelle (genre δ de Dirac) appliquée au temps t'. Saurions nous calculer la réponse de la particule à une force générale $f(t)$? La réponse est oui : la force $f(t)$ peut être vue comme une superposition d'impulsion appliquée à différents temps. Il suffit donc de superposer les réponses aux divers impulsions pour obtenir la réponse à la force $f(t)$. Plus exactement, on peut écrire

$$f(t) = \int_0^\infty f(t')\delta(t-t')dt' \tag{1.2}$$

ce qui veut dire que la force $f(t)$ est la superposition d'impulsions appliquées au temps t', *avec le poids* $f(t')$. Revenons à notre équation différentielle, et appelons $G_{t'}(t)$ la réponse à l'impulsion appliquée au temps t'. Comme mettre les indices est un peu lourd comme notation, nous noterons cette fonction plutôt $G(t,t')$. De par sa définition, elle doit satisfaire à

$$a\frac{d^2G(t,t')}{dt^2} + b\frac{dG(t,t')}{dt} + cG(t,t') = \delta(t-t')$$

Notez que toutes les dérivations sont faites par rapport à t. Multiplions les deux côtés de l'équation par $f(t')$. Comme $f(t')$ ne dépend pas de t, on peut la rentrer à l'intérieur de l'opérateur différentiel, et écrire :

$$a\frac{d^2[f(t')G(t,t')]}{dt^2} + b\frac{d[f(t')G(t,t')]}{dt} + cf(t')G(t,t') = \delta(t-t')f(t')$$

Intégrons maintenant les deux cotés par rapport à t'. Comme la dérivation est par rapport à t, nous pouvons, jetant par dessus bord la décence et l'exigence à priori de la convergence uniforme, échanger la dérivation et l'intégration.

$$a\frac{d^2}{dt^2}\int_0^\infty f(t')G(t,t')dt' + b\frac{d}{dt}\int_0^\infty f(t')G(t,t')dt' + c\int_0^\infty f(t')G(t,t')dt' = \int_0^\infty \delta(t-t')f(t')dt' \tag{1.3}$$

Nous remarquons, d'après (1.2), que la droite de l'équation ci-dessus est juste $f(t)$. Appelons

$$y(t) = \int_0^\infty f(t')G(t,t')dt' \tag{1.4}$$

et nous voyons donc, d'après (1.3), que $y(t)$ est solution de l'équation (1.1) ! Remarquez l'élégance, nous devons calculer une seule fois la fonction de green pour une équation différentielle. Ensuite, quelque soit le membre de droite, la solution s'obtient par une simple intégration. La solution générale de l'équation différentielle s'écrit maintenant

$$x(t) = C_1x_1(t) + C_2x_2(t) + y(t)$$

où C_1 et C_2 sont choisit pour satisfaire les conditions initiales. Nous avons occulté pas mal de point important. Voyons quelques exemple.

$$dx/dt + \alpha x = f(t)$$

La fonction de green est la solution de

$$dG(t,t')/dt + \alpha G(t,t') = \delta(t-t')$$

Prenons la TF des deux côtés de l'équation (par rapport à t bien sûr)

$$\tilde{G}(\omega,t') = \frac{\exp(-i\omega t')}{i\omega+\alpha}$$

$H(t)$étant la fonction de Heaviside, nulle pour $t<0$ et 1 pour $t>0$, comme vous vous souvenez, la TF de $H(t)\exp(-\alpha t)$ est justement $1/(i\omega+\alpha)$. Donc,

$$G(t,t') = H(t-t')\exp(-\alpha(t-t'))$$

Comme vous le remarquez, $G(t,t') = 0$ si $t' > t$. Cela est normal, puisque $G(t,t')$ est la réponse, au temps t, à une impulsion au temps t'. Si t' est *plus tard* que t, la réponse est nulle. Prenons maintenant plusieurs formes de f.

1. $f(t) = H(t)t$. Alors,

$$\begin{aligned}
y(t) &= \int_0^\infty H(t')t'H(t-t')\exp(-\alpha(t-t'))dt' \\
&= \int_0^\infty t'H(t-t')\exp(-\alpha(t-t'))dt' \\
&= \int_0^t t'\exp(-\alpha(t-t'))dt \\
&= (1/\alpha^2)(\exp(-\alpha t)-1) + (1/\alpha)t
\end{aligned}$$

2. $f(t) = H(t)\sin\beta t$. Alors, en suivant les même étapes,

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^t \sin(\beta t')\exp(-\alpha(t-t'))dt \\ &= \frac{1}{\alpha^2+\beta^2}\left[\beta e^{-\alpha t} + \beta\cos(\beta t) + \alpha\sin(\beta t)\right] \end{aligned}$$

Vous voyez ici comment on résout une fois l'équation différentielle pour la fonction de Green, et qu' ensuite, il suffit d'appliquer une intégration pour trouver la solution générale.

En langage opératoriel, on écrirai une équation différentielle comme

$$L[x] = f$$

où L est un opérateur différentiel (dans l'exemple ci-dessus $d/dt + \alpha$), c'est à dire qui transforme une fonction en une autre fonction. La solution de cette équation s'écrira

$$x = L^{-1}[f]$$

Trouver la fonction de Green revient à trouver l'opérateur L^{-1} et ce n'est pas un hasard donc qu'il comporte une intégration. Si on s'est donné une base, on peut représenter L par une matrice (infinie) et trouver la fonction de Green revient à inverser cette matrice.

Nous n'avons pas fini avec les fonctions de Green. Supposons que notre équation est un peu plus compliquée :

$$a\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + cx = f(t,x)$$

Le membre de droite comporte explicitement un terme *avec* x, comme par exemple $t.x^{1/2}$ ce qui rend la résolution de l'équation nettement plus ardue par les techniques classique. Mais cela ne change rien pour les fonctions de green. La solution s'écrira toujours

$$x(t) = C_1x_1(t) + C_2x_2(t) + \int_0^\infty f(t',x)G(t,t')dt' \tag{1.5}$$

Nous avons transformé une équation différentielle en une équation intégrale. A priori, nous n'avons pas gagné grand chose, ces dernières étant plus compliquées à résoudre que les premières. Mais souvent, et surtout en mécanique quantique, la forme (1.5) se traite bien par la technique des perturbations (objet du prochain chapitre), et c'est un grand avantage que de pouvoir en disposer. Nous en verrons des exemples plus bas.

1.2 Le potentiel électrostatique.

Nous avons peut être présenté les fonctions de Green comme quelque chose de compliqué, mais le lecteur peut remarquer qu'il utilise les fonctions de green depuis qu'il a appris l'électrostatique. Si l'on se rappelle, le potentiel électrostatique $\phi(\mathbf{r})$ créé par une charge *ponctuelle* unité en $\mathbf{r}'$ est

$$G(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \tag{1.6}$$

Si maintenant nous avons une distribution de charge $\rho(\mathbf{r}')$ dans l'espace, le potentiel crée par elle au point $\mathbf{r}$ vaut

$$\phi(\mathbf{r}) = \int G(\mathbf{r},\mathbf{r}')\rho(\mathbf{r}')d\mathbf{r}' \tag{1.7}$$

Nous utilisons cette formule depuis la première année du DEUG. Nous savons par ailleurs que le potentiel obéit à l'équation de Poisson

$$-\Delta\phi = \rho/\epsilon_0 \tag{1.8}$$

Nous oublierons dorénavant le facteur ϵ_0 pour alléger les notations.. Il n'est pas difficile, vue les équations (1.6-1.8) de suspecter que $G(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ est la fonction de Green de l'équation de Poisson, c'est à dire qu'elle obéit à

$$-\Delta G(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \tag{1.9}$$

Démontrons ce résultat. Jusque là, nous n'avions manipuler que des TF et des distributions à une dimension. Leurs généralisation à trois dimension n'est pas vraiment compliqué. Par exemple, la TF est définie par

$$\tilde{f}(\mathbf{q}) = \int f(\mathbf{r})\exp(-i\mathbf{q}.\mathbf{r})d\mathbf{r}$$

où $\mathbf{q}$ et $\mathbf{r}$ sont des vecteurs à trois dimension et $d\mathbf{r}$ désigne le volume infinitésimal $dxdydz$. En général, les vecteurs sont notés par des caractères gras droits, et leur norme par le même symbole mais non gras et en italique. Par exemple, $q = |\mathbf{q}|$. Les opérations sur les TF se généralise également assez facilement. Prenons la TF des deux cotés de (1.9) par rapport à $\mathbf{r}$:

$$\tilde{G}(\mathbf{q},\mathbf{r}') = \frac{e^{-i\mathbf{q}.\mathbf{r}'}}{q^2} \tag{1.10}$$

puisque le numérateur est la TF de la fonction δ translaté de $\mathbf{r}'$, et que la TF du laplacien d'une fonction est $-q^2$ fois la TF de la fonction (pouvez vous démontrez ce résultat ?). Il nous faut maintenant inverser la TF pour retrouver la fonction de Green :

$$\tilde{G}(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{e^{i\mathbf{q}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}}{q^2}d\mathbf{q} \tag{1.11}$$

Pour effectuer l'intégration, passons aux coordonnées sphériques, où nous prenons l'axe q_z parallèle à $(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$. Dans ce cas, $\mathbf{q}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = q|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|\cos\theta$ et $d\mathbf{q} = q^2\sin\theta dq d\theta d\phi$. L'intégrale (1.11) s'écrit alors

$$\tilde{G}(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{\infty} dq \sin\theta . e^{iq|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|\cos\theta}$$

Une première intégration sur ϕ ne mange pas de pain et nous sort un facteur 2π. Ensuite, en posant $u = \cos\theta$, le reste s'écrit

$$\tilde{G}(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{\infty} dq \int_{-1}^{+1} e^{iq|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|u}du$$

et en intégrant sur u, nous trouvons

$$\tilde{G}(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \frac{1}{2\pi^2}\int_0^\infty \frac{\sin q|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{q|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}dq$$

Un changement de variable évident nous donne

$$\tilde{G}(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \frac{1}{2\pi^2}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\int_0^\infty \frac{\sin q}{q}dq$$

Nous avons donc bien mis en évidence la dépendance en $1/|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$. L'intégrale maintenant n'est qu'une constante que nous pourrions calculer à l'aide de la théorie des fonctions analytique et vaut $\pi/2$. Ce qui nous donne exactement l'expression (1.6).

problème. Il n'est pas difficile de généraliser la technique ci-dessus et trouver la fonction de Green de l'opérateur $\Delta - \lambda^2$, où λ est un réel. En langage claire, résolvez

$$\Delta G(\mathbf{r},\mathbf{r}') - \lambda^2 G(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r},\mathbf{r}')$$

Ceci est extrêmement utilisé en mécanique quantique. Le lecteur y reconnaîtra peut être un semblant d'équation au valeur propre.

1.3 La propagation des ondes

Avant d'attaquer le problème de la fonction de Green de la corde vibrante, nous avons besoin de quelques résultats intermédiaire. Quelle est par exemple la TF de la fonction $f(t) = H(t)\sin(\omega_0 t)$? Cette question n'a pas de sens à priori, puisque la fonction sin n'est pas sommable (et ne tend surement pas vers zero quand $t \to \infty$). Mais nous pouvons calculer la TF de $H(t)\exp(-\nu t)\sin(\omega_0 t)$ et une fois la TF calculée, faire $\nu \to 0$. Cela nous donnera, et on laisse au lecteur le soin de le démontrer, que

$$\tilde{f}(\omega) = \frac{\omega_0}{-\omega^2 + \omega_0^2}$$

Quelle est maintenant la réponse d'un oscillateur (initialement au repos) à une force impulsionnelle ? Nous devons résoudre

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega_0^2 y = f_0\delta(t) \tag{1.12}$$

En faisant un aller–retour dans l'espace de Fourier, nous voyons que la solution est

$$y(t) = H(t)\frac{f_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)$$

Nous somme maintenant bien outillé pour calculer la réponse d'une corde vibrante (initialement au repos) à une force impulsionnelle. Nous notons $u(x,t)$ la hauteur de la corde à l'abscisse x et au temps t :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f_0\delta(x)\delta(t)$$

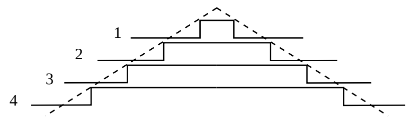

FIG. 1.1: La solution $u(x,t)$ en fonction de x pour les temps t_0, $2t_0$,...

En prenant la TF par rapport à la variable x, nous trouvons pour $\tilde{u}(q,t)$

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2} + c^2 q^2 \tilde{u} = f_0 \delta(t)$$

Mais cela est justement l'équation (1.12) que l'on vient de résoudre, et nous avons donc

$$\tilde{u}(q,t) = f_0 H(t) \frac{\sin(ct\,q)}{cq}$$

Il nous reste maintenant à inverser la TF, ce qui est facile si on se souvient de la TF de la fonction Porte $\Pi(x/a)$ rencontrée au chapitre 3 :

$$u(x,t) = \frac{f_0}{c} H(t) \Pi(\frac{x}{ct})$$

(Exercice : Est-ce tout cela dimensionnellement correct ?) Cette solution est représenté sur la figure 1.1 .

Il est évident que si au lieu d'appliquer la force f_0 en $x=0$ nous avions appliqué la force $f_{x'}$ en $x = x'$, la solution, qui est la fonction de Green de la propagation, s'écrit

$$G(x,t;x',0) = \frac{f_{x'}}{c} H(t) \Pi(\frac{x-x'}{ct})$$

Si la corde était initialement au repos et on y appliquait la force distribuée $f(x)\delta(x)$, la déformation de la corde est donnée par

$$\begin{aligned} u(x,t) &= c^{-1} H(t) \int_{-\infty}^{+\infty} f(x') \Pi(\frac{x-x'}{ct}) dx' \\ &= c^{-1} H(t) \int_{x-ct}^{x+ct} f(x') dx' \end{aligned}$$

L'influence d'un événement en x' (à l'instant $t = 0$) ne peut être ressenti en x à l'instant t que si cet événement était à l'intérieur du cône d'influence de ce dernier, c'est à dire que si $x - ct < x' < x + ct$. En terme moins mystique, une perturbation se propage à vitesse c.

1.4 Propagateur pour l'équation de Shrodinger.

1.5 Disposer d'une base propre.