Статистика Консултация

Изход на и разреда

I Класическа вероятност и независимост на събитие

1.1. $A_1, A_2, \dots A_5$ – събития, като A_1 и A_k, $k=\overline{2,5}$ са независими

A_i и A_j, $(2 \le i < j \le 5)$ са несъвместими

Да се докаже че A_1 и $\bigcup_{k=2}^{5} A_k$ са независими

Д-во:
Да проверим дефиницията за независимост:

A_k, $k=\overline{1,5}$

$P(A_1 \cap A_k) = P(A_1 A_k) = P(A_1)P(A_k)$, $k=\overline{2,5}$

$A_i \cap A_j = A_i A_j = \emptyset$, $2 \le i < j \le 5$

$P\left(A_1 \cap \left(\bigcup_{k=2}^{5} A_k\right)\right) = 0$ $\quad A_1 \cap \left(\bigcup_{k=2}^{5} A_k\right) = \bigcup_{k=2}^{5} (A_1 \cap A_k) = \bigcup_{k=2}^{5} A_1 A_k$

$\rightarrow P(-\text{''}-) = P\left(\bigcup_{k=2}^{5} A_1 A_k\right)$

Трябва да докажем
$P\left(A_1 \cap \left(\bigcup_{k=2}^{5} A_k\right)\right) = P(A_1) P\left(\bigcup_{k=2}^{5} A_k\right)$

$A_1 A_i \subset A_i$

$A_1 A_j \subset A_j$ $\quad$ но $A_i \cap A_j = \emptyset$, $2 \le i < j \le 5$

$\rightarrow (A_1 A_j)(A_1 A_i) \subset A_i A_j = \emptyset$

$\rightarrow$

аксиома за адитивност

$$P(-\text{''}-) = P\left(\bigcup_{k=2}^{5} A_1A_k\right) = \sum_{k=2}^{5} P(A_1A_k) = \sum_{k=2}^{5} P(A_1)P(A_k) =$$

A_1, A_k - са независими

$$= P(A_1)\sum_{k=2}^{5} P(A_k) =$$

аксиомаза адитивност

$P(A\cup B) = P(A)+P(B), \forall A,B$ събития: $AB=\emptyset$

т.е. $P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k)$

прилагаме обратно аксиомата за адитивност

$$= P(A_1)P\left(\bigcup_{k=2}^{5} A_k\right) = P(A_1)P\left(\bigcup_{k=2}^{5} A_k\right) \to$$ независими са ✓

Необходимо е само решението т.е. $P(\ldots) = \ldots$

другото са пояснения

1.2. Дадени са събитията A, B - независими. Да се докаже че

а) $A, \overline{B}$ - независими

б) $\overline{A}, \overline{B}$ - независими

в) Да се докаже при произволен брой събития ($A_1, \ldots A_n$ - независими). Док. че $\overline{A_1}, \ldots, \overline{A_n}$ са независими.

$\longrightarrow$

D-во:

за а) трябва да докажем $P(A\overline{B}) = P(A)P(\overline{B})$

б) — " — $P(\overline{A}\overline{B}) = P(\overline{A})P(\overline{B})$

б) - а е база на индукция, трябва да се направи индуктивно предположение и цялата индукция ...

а)

аксиома за адитивност

$P(A) = P(A \cap B \cup A \cap \overline{B}) =$

$= P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}) \Rightarrow$

$\Rightarrow P(A\overline{B}) = P(A) - P(AB) =$

$= P(A) - P(A)P(B) =$

$= P(A)(1 - P(B)) =$

$= P(A)P(\overline{B})$ ✓

A - представяме по пълната група $\{B, \overline{B}\}$

$A = A\Omega = A \cap (B \cup \overline{B}) =$

$= A \cap B \cup A \cap \overline{B}$

$A \cap B \subset B$

$A \cap \overline{B} \subset \overline{B}$

$AB \cap A\overline{B} \subset B\overline{B} = \emptyset$

б)

A, B - независими

$A, \overline{B}$ - независими — а) върху $\overline{B}$

$\overline{A}, \overline{B}$ - независими — а) върху $\overline{A}$

$\underline{\text{ФА}}$ Формула на Бейс

2 На състезание се явяват 60 ученика. 9 клас - 10, 10 клас - 14, 11 клас - 20, 12 клас - 16. Вероятността за максимален брой точки 9 кл. $\to 0.05$, 10 кл. 0,14, 11 кл. $\to 0.13$, 12 кл. $\to 0.10$.
След състезанието на случаен принцип се избират 2 работи. Оказало се, че и двете работи са с макс брой точки
Каква е вероятността тези две работи да са на учениците
а/ от 9 клас
б/ от 10 и 11 клас по 1 работа

$A_{i,j}$ - от избраните работи $(i+j)$ точно i са с макс точки.
Ние разглеждаме $A_{2,0}$

$H_{k,l,m,n}$ - от избраните $i+j$ работи, точно k са на 9 кл.
l - 10 кл.
m - 11 кл
n - 12 кл.

$k+l+m+n = i+j$

а/ $H_{2,0,0,0}$, $A_{2,0}$ $\to P(H_{2,0,0,0} | A_{2,0})$

б/ $P(H_{0,1,1,0} | A_{2,0})$

а) $\{ H_{k,l,m,n} : \underset{k,l,m,n \geq 0}{k+l+m+n = 2} \}$

Тук разписваме всички възможни k,l,m,n

Прилагаме Бейс

$$P(H_{2,0,0,0} \mid A_{2,0}) = \frac{P(A_{2,0} \mid H_{2,0,0,0}) P(H_{2,0,0,0})}{\sum\limits_{\substack{k+l+m+n=2 \\ k,l,m,n \geq 0}} P(A_{2,0} \mid H_{k,l,m,n})}$$

$$P(H_{2,0,0,0}) = \frac{\binom{10}{2}}{\binom{60}{2}} \quad , \quad P(H_{1,1,0,0}) = \frac{\binom{10}{1}\binom{14}{1}}{\binom{60}{2}}$$

и т.н. (общо 10)

$$P(A_{2,0} \mid H_{2,0,0,0}) = (0{,}05)^2 \quad , \quad P(A_{2,0} \mid H_{1,1,0,0}) = 0{,}05 \times 0{,}14$$

и т.н. (общо 10)

След това заместваме в $P(\dots) = \frac{\dots}{\dots}$

б) – същия начин

$$P(H_{0,1,1,0} \mid A_{2,0}) = \frac{P(A_{2,0} \mid H_{0,1,1,0}) P(H_{0,1,1,0})}{\sum\limits_{\dots} P(A_{2,0} \mid H_{k,l,m,n})}$$

VII Биномно разпределение (и сл. величини)

3 Хвърляме m зара n пъти. Каква е вероятността броят на хвърлянията при които се падат само четни числа да бъде k. $0 \le k \le n$. Заровете са различими

Решение:

$$m \text{ зара} \to (a_1, a_2, \dots, a_m) \quad , a_i \in \{1, \dots, 6\} \quad i = \overline{1, m}$$

$$m \text{ зара} \xrightarrow{n \text{ пъти}} \left((a_1^1, \dots, a_m^1), (a_1^2, \dots, a_m^2), \dots (a_1^n, \dots a_m^n)\right)$$

$\mathcal{E}$ — 1 път хвърляме m зара

$$\mathcal{E}' - \underbrace{\mathcal{E} \times \mathcal{E} \times \dots \times \mathcal{E}}_{n}$$

A — при $\mathcal{E}$ се падат само четни числа
едно хвърляне

Схема на Бернули $(n, P(A))$
n-опита, P(A)

$$P(A) = \frac{3^m}{6^m} = \frac{1}{2^m} \to \text{Бернули}\left(n, \frac{1}{2^m}\right)$$

$X \in Bi\left(n, \frac{1}{2^m}\right)$, X е брой пъти настъпване на A в $\mathcal{E}'$

$$P(X = k) = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{2^m}\right)^k \cdot \left(1 - \frac{1}{2^m}\right)^{n-k}$$

от дефиницията за Бернули

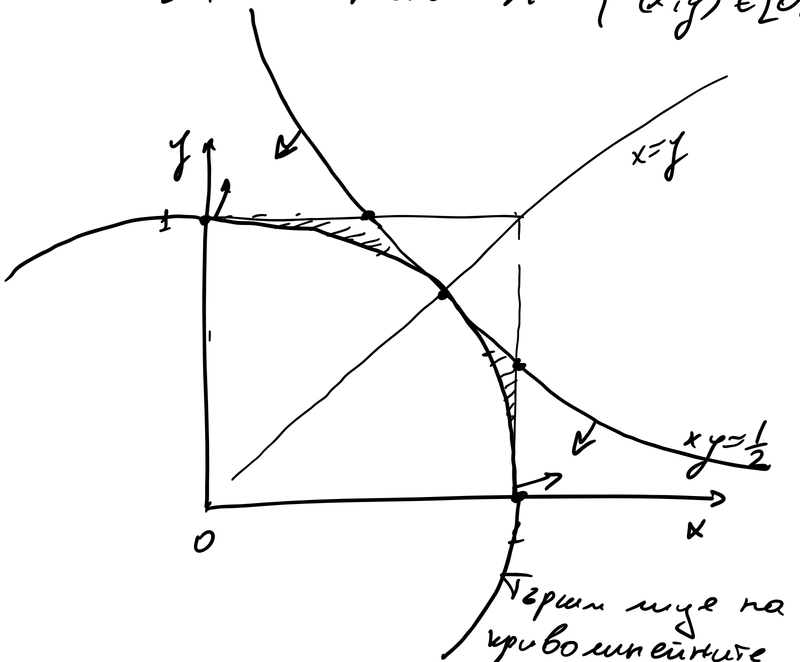
Бернули B_i

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

IV Геометрична вероятност

Задачите от записките и следващото:

4 По случаен начин се избират 2 числа x, y в интервала $[0,1]$. Нека $A = \{(x,y) \in [0,1]^2 \mid xy \le \frac{1}{2},\ x^2+y^2 \ge 1\}$



търсим лице на криволинейните триъгълници

$\Omega = [0,1]^2$

$xy \le \frac{1}{2} \to xy = \frac{1}{2} \to$

$\to x = \frac{1}{2y}$

$x=1 \to y = \frac{1}{2}$

$y=1 \to x = \frac{1}{2}$

$xy = \frac{1}{2} \cap \{x=1\} \to \begin{cases} x=1 \\ xy=\frac{1}{2} \end{cases}$

$xy = \frac{1}{2} \cap \{y=1\} \to \begin{cases} y=1 \\ xy=\frac{1}{2} \end{cases}$

$x^2+y^2=1$ - единичната окръжност

търсим пресечна точки на $x^2+y^2=1$ и $xy=\frac{1}{2}$

$H = xy = \frac{1}{2} \quad C = x^2+y^2=1$

$C \cap H : \begin{cases} x^2+y^2=1 \\ xy = \frac{1}{2} \to y = \frac{1}{2x} \end{cases} \Rightarrow (x,y) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \longrightarrow$

$x^2 + \frac{1}{4x^2} = 1$

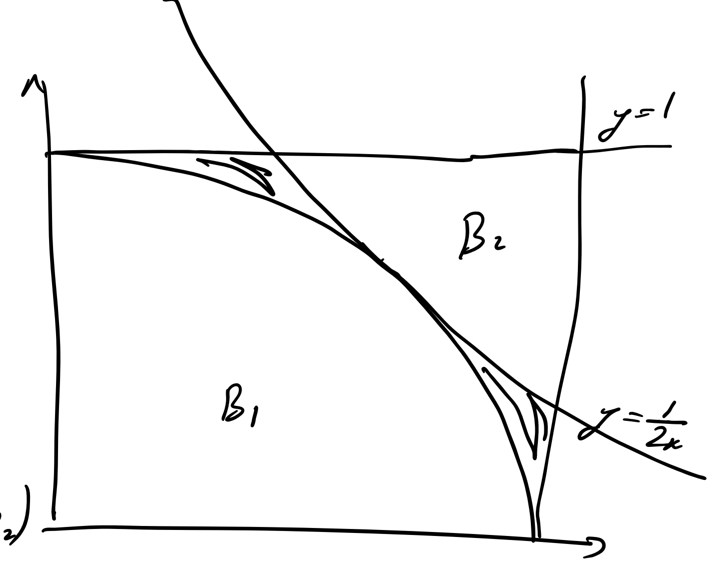
$4x^4 - 4x^2 + 1 = 0$

$(2x^2-1)^2 = 0 \to x_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

двоен корен $\to$ 1 точка $\to$ допират се там

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \mu(A) =$$

мярка на $\Omega = 1 \times 1 = 1$



$$\cancel{\mu(A)=1} \cdot \mu(A) = \mu(\Omega) - \mu(B_1) - \mu(B_2)$$

$$= 1 - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln 2 = \boxed{\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln 2}$$

$$B_2 \to \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(1 - \frac{1}{2x}\right) dx = \left(x - \frac{1}{2}\ln|x|\right)\Big|_{1/2}^{1} = 1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln 2$$