СЕМ Упр.

① а/

y \ x	2	3	4
1	3/10	2/10	1/10
2	0	2/10	1/10
3	0	0	1/10

съвместно разпределение $\binom{5}{3} = 10$

б/ маргинално разпределение

X: $\frac{3}{10}$ $\frac{4}{10}$ $\frac{3}{10}$ събираме отгоре

Y: $\frac{6}{10}$ $\frac{3}{10}$ $\frac{1}{10}$ събираме отдясно

в/ X и Y са независими ако $\forall k,l : P(X=k, Y=l) = P(X=k) \cdot P(Y=l)$

X \ Y	2
1	$\frac{3}{10}$

→ $\frac{6}{10}$

$\frac{3}{10}$

→ $\frac{6}{10} \cdot \frac{3}{10} \neq \frac{3}{10}$

$P(Y=1)$ $P(X=2)$ $P(X=2, Y=1)$

не са равни, т.е. зависими са

г/ ковариация

$cov(X,Y) = E(XY) - EX \cdot EY$

$EX = 2 \cdot \frac{3}{10} + \frac{3 \cdot 4}{10} + 4 \cdot \frac{3}{10} = 3$

$EY = 1 \cdot \frac{6}{10} + 2 \cdot \frac{3}{10} + 3 \cdot \frac{1}{10} = \frac{3}{2}$

$E(XY) = 2 \cdot 1 \cdot \frac{3}{10} + 3 \cdot 1 \cdot \frac{2}{10} + 4 \cdot 1 \cdot \frac{1}{10} + 0 + 3 \cdot 2 \cdot \frac{2}{10} + 4 \cdot 2 \cdot \frac{1}{10}$

X, Y, клетка $+ 0 + 0 + 4 \cdot 3 \cdot \frac{1}{10}$

$$corr(X,Y) = \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{DX \cdot DY}} \qquad DX = E(X^2) - (EX)^2$$

Ако X, Y са независими то $corr(X,Y) = 0$

но обратното не е вярно

Ако $corr(X,Y) = 1$ то $X = aY + b$, $a > 0$ $b \in \mathbb{R}$

—"— $= -1$ —"— $a < 0$ —"—

91 разпределение, очакване, дисперсия

$$Z = X - 2Y$$

$X - 2Y = \{0, 1, 2, -1, 0, -2\}$ според таблицата

разпределение:

$P(X-2Y=0) = \frac{3}{10} + \frac{1}{10}$ (2 пъти)

$P(X-2Y=1) = \frac{2}{10}$ (1 път)

$P(X-2Y=-1) = \frac{2}{10}$

$P(X-2Y=2) = \frac{1}{10}$

$P(X-2Y=-2) = \frac{1}{10}$

Очакване:

$EZ = EX - 2EY = 3 - 2 \cdot \frac{3}{2} = 0$

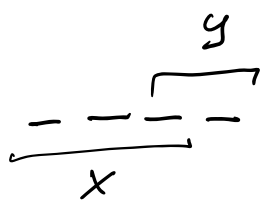
Дисперсия.

$T = aX + bY$

$DT = a^2 DX + b^2 DY + 2\,cov(X,Y) \cdot ab$

$DZ = DX + 4DY - 4\,cov(X,Y)$

Зад. 2.



y \ x	0	1	2	3
0	1/16	2/16	1/16	0
1	1/16	3/16	3/16	1/16
2	0	1/16	2/16	1/16

0 ред
1 ред
2 ред

а/ $Z = (X \mid Y=1)$

$P(Z=0) = P(X=0 \mid Y=1) =$

$= \dfrac{P(X=0,\ Y=1)}{P(Y=1)} = \dfrac{\frac{1}{16}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{8}$

$P(Z=1) = \dfrac{A[1,1]}{sum(A[1\text{-ред}])}$

б/ (0,0) (1,1) (2,2)

$P(X=Y) = \frac{1}{16} + \frac{3}{16} + \frac{2}{16} = \frac{6}{16}$

$P(X>1 \mid Y=1) = \dfrac{P(X>1 \cap Y=1)}{P(Y=1)} = \dfrac{\frac{3}{16}+\frac{1}{16}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$

$= sum(A[1\text{-ред}])$

$P(X+Y>2 \mid X=2) = P(Y \geq 1 \mid X=2) = \dfrac{P(Y \geq 1 \cap X=2)}{P(X=2)} = \dfrac{5/16}{6/16} = 5/6$

г/ разпределението

$Z = E(X \mid Y)$

$E(X \mid Y=0) = 1 \cdot \frac{2}{4} + 2 \cdot \frac{1}{4} = 1$

$P(Z=1) = P(Y=0) = \frac{1}{4}$

$(X \mid Y=0)$	0	1	2	3
P	1/4	1/2	1/4	0

$E(X \mid Y=1) = 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} =$

$= \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$

$(X \mid Y=1)$	0	1	2	3
P	1/8	3/8	3/8	1/8

$P(Z=\frac{3}{2}) = P(Y=1) = \frac{1}{2}$ ... $E(X \mid Y=2) = \ldots$

Зад. 3 ν_5 – брой топки в бели кутии

ν_2 – червени

ν_3 – зелени

а) $P(\nu_5 = 1, \nu_2 = 1, \nu_3 = 2) = \frac{4!}{2!1!1!} \left(\frac{2}{9}\right)^1 \left(\frac{4}{9}\right)^1 \left(\frac{3}{9}\right)^2$

Полиномно разпределение

$\nu_1 \dots \nu_e$, $k_1 + \dots + k_e = n$

$P(\nu_1 = k_1, \dots, \nu_e = k_e) = \frac{n!}{k_1! \dots k_e!} \cdot p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_e^{k_e}$

p_i - вероятността за изкор тип i

$\sum p_i = 1$

б) $P(\nu_5 = 2, \nu_3 = 1, \nu_2 = 1) + P(\nu_5 = 2, \nu_3 = 0, \nu_2 = 2) + P(\nu_5 = 2, \nu_3 = 2, \nu_2 = 0)$

но може и с биномно: топка, 2 успеха

$\binom{4}{2} \left(\frac{2}{9}\right)^2 \left(1 - \frac{2}{9}\right)^2$

в) $\binom{4}{3} \left(\frac{2}{9}\right)^3 \left(1 - \frac{2}{9}\right)^1 + \binom{4}{4} \left(\frac{2}{9}\right)^4 \left(1 - \frac{2}{9}\right)^0$