СЕМ

(7) $\underline{n}$ торпеда, вероятност за удар p

корабът има $\underline{m}$ отсека

каква е вероятността да се потопи кораба (поне 2 различни отсека са ударени)

Ще разгледаме допълнението $\rightarrow$ 0 и 1 отсека

0 отсека: $(1-p)^n$

1 отсек: $\underbrace{\binom{n}{1} p (1-p)^{n-1}}_{\text{точно 1 отсек 1 път}} + \underbrace{\binom{n}{2} p^2 (1-p)^{n-2}}_{\text{2 удара}} \cdot \underbrace{m}_{\text{кой отсек}} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{m^2}\right)}_{\text{вероятността да уцелим 1 отсек 2 пъти}}$

Общ вид: $\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} m \cdot \left(\frac{1}{m}\right)^k$

1 отсек: $\sum_{k=1}^{m} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} m \left(\frac{1}{m}\right)^k =$ съкращаване

$= m \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{p}{m}\right)^k (1-p)^{n-k} =$

$= m \left[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{p}{m}\right)^k (1-p)^{n-k} - \binom{n}{0} \left(\frac{p}{m}\right)^0 (1-p)^{n-0} \right] =$

$= m \left[\left(\frac{p}{m} + 1 - p\right)^n - (1-p)^n \right]$

Отг. $\boxed{1 - 0_{\text{отсека}} - 1_{\text{отсек}}}$

(8) $H_0 - \frac{1}{2}$ A – 120 успеха от 200 опита

$H_1 - \frac{2}{3}$

$P(H_0|A) \overset{?}{>} P(H_1|A)$

$\binom{200}{120}\left(\frac{1}{2}\right)^{120}\left(1-\frac{1}{2}\right)^{80}$ $\frac{1}{2}$ → $\frac{1}{2}$ е да се случи ~~хипотеза~~ H_0 или H_1 (равновероятни са)

$$P(H_0|A) = \frac{P(A|H_0)\cdot P(H_0)}{P(A)}$$

$$P(A) = P(A|H_0)P(H_0) + P(A|H_1)\cdot P(H_1)$$

$\binom{200}{120}\left(\frac{2}{3}\right)^{120}\left(\frac{1}{3}\right)^{80}$ $\quad = \frac{1}{2}$

$$P(H_1|A) = \frac{P(A|H_1)P(H_1)}{P(A)}$$

сравняваме ги

$$\frac{P(H_0|A)}{P(H_1|A)} = \frac{\frac{1}{2}\binom{200}{120}\left(\frac{1}{2}\right)^{200}}{\frac{1}{2}\binom{200}{120}\left(\frac{2}{3}\right)^{120}\left(\frac{1}{3}\right)^{80}} = \frac{3^{200}}{2^{320}} = \left(\frac{3^5}{2^8}\right)^{40} = \left(\frac{243}{258}\right)^{40} < 1$$

знаменателя е по-голям

⇙

H_1 е по-вероятна / по-добра

Дисперсия

$$DX = E\left((X-EX)^2\right)$$

$$DX = E\left(X^2 - 2\cdot X\cdot EX + (EX)^2\right) =$$

$$= E(X^2) - 2E(X\cdot EX) + (EX)^2 =$$

$$= E(X^2) - 2\,EX\cdot E(X) + (EX)^2$$

$$= E(X^2) - (EX)^2$$

$EX =$ const
$\downarrow$
изнаса отпред

$EX \equiv E(X)$

очакване 100 пъти монета $\times \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}\,100 = 50$ пъти ези

дисперсия - колко сме далеч от очакването

$X - EX$ разстоянието м/у това което сме наблюдавали X и очакването EX

$\sigma := \sqrt{DX}$ = standart deviation

стандартно отклонение

Ако $X \sim Bi(n,p)$

$DX = n\cdot p(1-p)$

(1) X_1, X_2

$X = X_1 + X_2$

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
p	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

$$EX_1 = 1\cdot\frac{1}{6} + 2\cdot\frac{1}{6} + \dots + 6\cdot\frac{1}{6} = \frac{1+2+\dots+6}{6} = \frac{7}{2}$$

$$EX_2 = \frac{7}{2}$$

$$EX = E(X_1+X_2) = EX_1 + EX_2 = \frac{7}{2} + \frac{7}{2} = 7$$

$$DX_1 = E(X_1^2) - (EX_1)^2 = \frac{1^2+2^2+3^2+\dots+6^2}{6} = \frac{91}{6}$$

$\hookrightarrow X_1^2 \Rightarrow$

X	1	4	9 ...
p	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	

т.е. х са на квадрат

$D(x_1 + x_2) = Dx_1 + Dx_2 =$

$= 2\left(\frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2\right)$

$\Downarrow$

вярно когато X_1 и X_2 са независими

$Dx_1 = E(x_1^2) - (Ex_1)^2 =$

$= \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{35}{12}$

б/ <u>за домашно</u>

в/ $\sigma = \sqrt{Dx_1} \approx 1,71$

$P(|X - EX| > k\sigma) < \frac{1}{k^2}$, $k>0$ неравенство на Марков

Нека X = сумата от 1000 хвърляния

$X = X_1 + \dots + X_{1000}$

X_i - i-то хвърляне

$DX_i = \frac{35}{12}$

$DX = Dx_1 + \dots + Dx_{1000} = 1000 \cdot \frac{35}{12} = \frac{35\,000}{12}$

$\sigma_X = \sqrt{DX} = \sqrt{1000} \cdot \sqrt{\frac{35}{12}} \approx 53$

$P(X > 3700) = P(X - 3500 > 200) =$

$= \frac{1}{2} P(|X - EX| > 200) = \frac{1}{2} P(|X - EX| \geq \overbrace{\underset{k}{4} \cdot \underset{\sigma}{53}}^{200}) \leq$

$\leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{16} \leq \frac{1}{32} \approx 3\%$

② а/ за вкъщи

б/ X – геометрично разпределение

$P(X=k) = (1-p)^{k-1} \cdot p \quad , k \geq 1 \quad = Ge(p)$

$EX = \frac{1}{p} \quad , \quad DX = \frac{1-p}{p^2}$

Геометрично 1

$X - Z = 1$

$X = Z + 1$

брой изтеглени черни до бяла

Z	0	1	2	...	k
Prob.	$\frac{5}{8}$				$(1-p)^k \cdot p$

Геометрично 2

$p = \frac{5}{8}$

$EZ = \frac{1}{p} - 1 \qquad DZ = \frac{1-p}{p^2}$

Опитът се повтаря 1000 пъти

Z_i – черни топки до първата бяла от i-ти опит

$EZ_i = \frac{3}{5} \qquad DZ_i = \frac{24}{25}$

$Y = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_{1000}$

$EY = \frac{3}{5} \cdot 1000 = 600$

$DY = DZ_1 + \dots + DZ_{1000} = 1000 \cdot \frac{24}{25} = 960$

$\sigma = \sqrt{DY} = 31$

$P(Y > 900) = P(Y - EY > 300) < P(|Y - EY| > \underset{\sigma}{31} \cdot \underset{k}{10}) \leq \frac{1}{10^2}$