1. При хвърляне на 2 зара сумата от точките е по-вероятно да е:

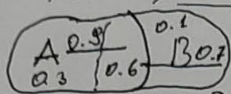
а) четна;

б) нечетна;

в) двете вероятности са равни.

2. Нека $P(A) = 0.9$, $P(B) = 0.7$. Каква е най-голямата възможна стойност на вероятността ~~$P(|\xi| \ge 6) = \xi$~~ $P(A \cup B) - P(A \cap B)$? $P(A\cup B) - P(A \cap B) =$

$= P(A) + P(B) - P(A\cap B) - P(A \cap B) = 0.9 + 0.7 - 2P(A\cap B) = 1.6 - 2\times 0.6 = 1.6 - 1.2 = \boxed{0.4}$

$\min P(A\cap B) = 0.6$ 

$|B \setminus A| = 0.1$ $|A \setminus B| = 0.3$ примерно за да може $|A\cap B| = 0.6$

3. Нека сл.в. ξ има очакване 0 и дисперсия 3. Коя е най-голямата стойност, която може да достигне вероятността $P(|\xi| > 6)$ съгласно неравенството на Чебишов.

$$P(|\xi - 0| > \overset{\varepsilon}{6}) \le \frac{D\xi}{\varepsilon^2} \Rightarrow P(|\xi| > 6) \le \frac{3}{6^2} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

4. При какво условие Биномното разпределение има за граница разпределението на Поасон при $n \to \infty$?

Когато $p \to 0$ т.че $pn \to \lambda$

5. Напишете пораждащата функция на геометричното и на Биномното разпределения.

Геометрично: $g(s) = \frac{sp}{1-sq}$

Биномно: ~~$g(s) = (p+qs)^n$~~ $g(s) = (ps+q)^n$

6. Намерете медианата на сл. в., имаща експоненциално разпределение с параметър 1.

$f(x) = e^{-x}$

Искаме $e^{-x} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \boxed{-\ln \frac{1}{2} = Me}$

7. Сл. В. ξ и η имат съвместна вероятностна плътност
$f(x,y)=c(x^2+xy), 0\le x\le 1, 0\le y\le 1$.

а) намерете константата c; $c = \frac{6}{5}$

б) намерете съвместната функция на разпределение и функциите на разпределение на ξ и η;

в) независими ли са ξ и η?

8. Нека $\xi \in N(2,5)$. Намерете разпределението на сл. в. $\xi/2+7.5$.

$$\frac{\xi}{2} \sim N\left(\frac{2}{2}, \frac{5}{2}\right) = N\left(1, \frac{5}{2}\right)$$

$$\frac{\xi}{2}+7.5 \sim N\left(1+7.5, \frac{5}{2}\right) = N\left(8.5, \frac{5}{2}\right) = N(8.5, 2{,}5)$$

9 $X_1, X_2..., X_n$ е независима извадка от популация $X \in Exp(\theta)$ (т.е. вероятностната и плътност е $f(x)=\theta^{-1}e^{-x/\theta}, x>0$). Неизместена ли е следната оценка за неизвестния параметър θ на популацията $\hat{\theta}=\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} X_i}$?

$$E\left(\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i}\right) \le E\left(\frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n}\right) = E(x_1+x_2+\dots+x_n)\cdot\frac{1}{n} = \frac{1}{n}(EX_1+\dots+EX_n) = \frac{1}{n}\cdot nEX = EX$$

$E\left(\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i}\right) \le EX$ | $E\left(\frac{x_1+\dots+x_n}{n}\right)$ е неизместена и $E\left(\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i}\right) < E\left(\frac{x_1+\dots+x_n}{n}\right) \Rightarrow E\left(\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i}\right)$ е изместено

10. Случайната величина X има дискретно равномерно разпределение върху числата 3,4,5,6,7, а случайната величина У има непрекъснато равномерно разпределение в интервала (3,7).

а) равни ли са EX и EУ? $EX = \frac{1}{5}(3+4+5+6+7) = \frac{25}{5} = 5$ $EY = \left(\frac{7+3}{2}\right) = 5 \Rightarrow \boxed{EX=EY}$

б) равни ли са DX и DУ? $DY = \frac{(7-3)^2}{12} = \frac{4^2}{12} = \frac{4}{3}$ $DX = \sum_n (x_n - EX)^2 p_n = \frac{4+1+1+4}{5} = 2 \Rightarrow \boxed{DX \neq DY}$

11. Напишете вероятностната плътност на Бета-разпределението

$\xi \sim B(a,b)$ тогава $f_\xi(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{a-1}(1-x)^{b-1}}{B(a,b)}, & 0<x<1 \\ 0, & x \notin (0,1) \end{cases}$

12. Дайте определение за извадка

Извадка наричаме случайния вектор $\vec{\Theta}(X_1,\dots,X_n)$ където n е обем на извадката. За $X_1,\dots,X_n$ има 3 условия:

1) $X_1,\dots,X_n$ са независими

2) $X_1,\dots,X_n$ имат същото разпределение като на популацията X (от където е извадката)

3) $X_1,\dots,X_n$ са дефинирани върху същото Ω както