

Оценката Ви ще е равна на 2 + броя точки, които получите. Време за работа: 4 часа. Успех.
Ще считаме, че навсякъде работим върху вероятностно пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Задача 1. (2 т.)

1. (0.5 т.) Теглим 2 карти от стандартно тесте с 52 карти. Нека X е броят на изтеглените аса, а Y на изтеглените купи. Намерете съвместното разпределение и корелацията на X и Y .
2. (1 т.) Нека случайната величина X е цената на даден актив, а случайната величина Y - средният лихвен процент по депозитите (и двете за ден и в безмерни единици). Нека съвместната им плътност е $f_{X,Y}(x,y) = c(x^2 + e^y x)$ за $0 < x, y < 1$ и 0 извън тази област, като c е някаква константа. Намерете константата c и ковариацията на X и Y . Колко е очакването на цената на актива, ако лихвеният процент е 0.5?
3. (0.5 т.) Нека X е случайна величина с плътност $f_X(x) = \frac{1}{4}xe^{-x/2}$ за $x \geq 0$ и 0 иначе. Намерете плътността на случайната величина $Y = -2X + 2$.

Задача 2. (0.5 т.)

По официални данни, историческата средна температура в София през януари е -0.5°C . Нека случайната величина X = "средна температура през януари в София в градуси по Целзий". Да приемем, че тя има нормално разпределение. Обикновено оценка за дисперсията се прави също от данни, но като задача ние ще разгледаме друг (непрепоръчителен) метод.

Да кажем, че даден човек разглежда температура над 20°C градуса като изключителна аномалия - вероятността ѝ е 1 процент. Каква оценка води това разсъждение за дисперсията на X ? Каква е вероятността в такъв случай температурата да падне под -15°C градуса?

Задача 3. (1.5 т.) Точка A попада случайно в окръжност $k(O, 1)$ с център O и радиус 1. Нека случайната величина X е равна на $|OA|$. Можете ли да предположите колко са модата и медианата? Аргументирайте се. Колко бихте очаквали да е $\mathbb{E}X$? (Мода на дискретно разпределение наричаме стойността с най-голяма вероятност. В непрекъснатия случай, по аналогия, се интересуваме от стойността, която максимизира f_X . Наричаме а медиана на разпределението на X , ако $\mathbb{P}(X \leq a) = \mathbb{P}(X \geq a) = 1/2$.)

1. (0.75 т.) Намерете функцията на разпределение, плътността, очакването и дисперсията на X .
2. (0.75 т.) Нека сега разгледаме 3 точки, A_1, A_2 и A_3 , които попадат случайно и независимо една от друга в същата окръжност. Колко е очакването на разстоянието до най-близката до центъра? А до най-отдалечената? (Бонус: Намерете очакваното разстояние до средната точка. Би ли трябвало то да е равно на $\mathbb{E}X$?)