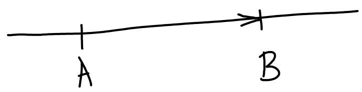
1) Насочена отсечка

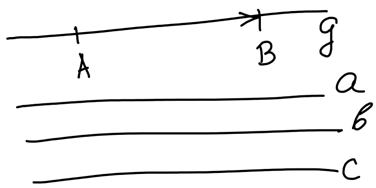


A - начало, B - край

$\vec{AB} \neq \vec{BA}$, $\vec{AA} = \vec{0}$

2) Елементи на $\vec{AB}$

2.1) Направление:



g - директриса на $\vec{AB}$

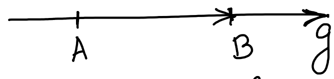
$\{\forall a \parallel g\}$

„$\parallel$" - направление

$a \parallel a$, $a \parallel в \Rightarrow в \parallel a$, $a \parallel в$ и $в \parallel c \Rightarrow a \parallel c$

„$\parallel$" - релация на еквивалентност

2.2) Посока на $\vec{AB}$



Посоката на движение върху g от началото A към края B.

g^+ - ос

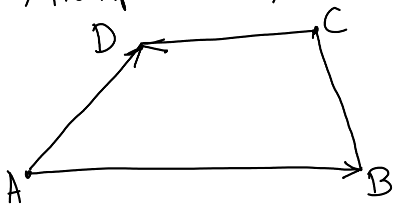
2.3) Дължина на $\vec{AB}$: $|\vec{AB}| \geq 0$

Разгл. $\vec{AB}$ и $\vec{AD}$

$\vec{AB} \nparallel \vec{AD}$ - неколинеарни ЛНЗ

3) Сравняване на насочени отсечки

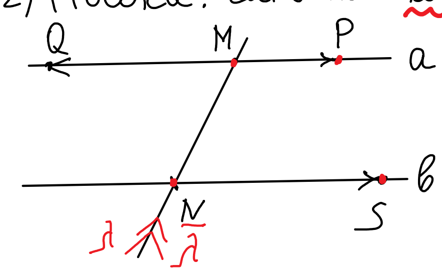
3.1) Направления



Разгл. $\vec{AB}$ и $\vec{CD}$

$\vec{AB} \parallel \vec{CD}$ - колинеарни от едно направление

3.2) Посоки: само на колинеарни нас. отсечки



$a \parallel в$ Разгл. $\vec{MP}$ и $\vec{NS}$

$P \in \vec{\lambda}$, $S \in \vec{\lambda}$

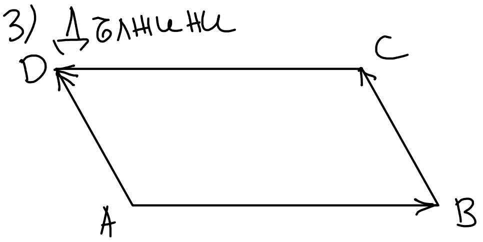
$\Rightarrow \vec{MP} \uparrow\uparrow \vec{NS}$ еднопосочни нас. отс.

„$\uparrow\uparrow$" е релация на еквивалентност

$\vec{MQ}$ и $\vec{NS}$ $Q \in \vec{\lambda}$, $S \in \vec{\lambda}$

$\Rightarrow \vec{MQ} \uparrow\downarrow \vec{NS}$ противопосочни

3.3) Дължини



Разгл. $\vec{AB}$ и $\vec{CD}$

1) $\vec{AB} \parallel \vec{CD}$;

2) $\vec{AB} \uparrow\downarrow \vec{CD}$

3) $|\vec{AB}| = |\vec{CD}|$

$\vec{AB} = -\vec{CD}$

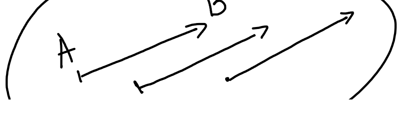
противоположни

Разгл. $\vec{AD}$ и $\vec{BC}$

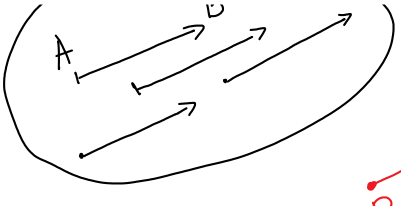
$\left.\begin{array}{l} \vec{AD} \uparrow\uparrow \vec{BC} \\ |\vec{AD}| = |\vec{BC}| \end{array}\right\}$

$\vec{AD} = \vec{BC}$

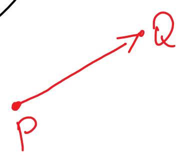
„=" е релация на еквивалентност



$\vec{a}$ - свободен вектор



$\vec{a}$ – свободен вектор



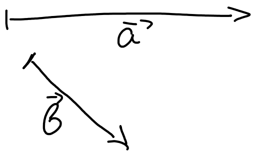
$\vec{PQ} \in \vec{a}$

$\vec{PQ} = \vec{a}$

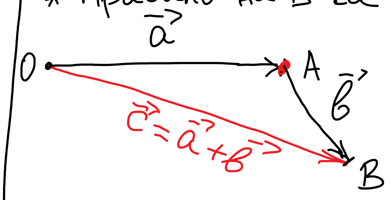
4) Афинни операции с вектори

4.1) Сбор на вектори

$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$



* Правило на Δ-ка

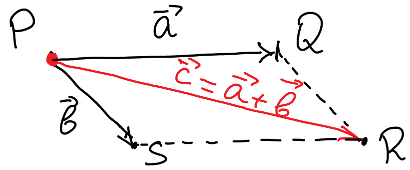


$\vec{OA} = \vec{a}$

$\vec{AB} = \vec{b}$

$\vec{OA} + \vec{AB} = \vec{OB}$

* Правило на успоредника



$\vec{PQ} + \vec{PS} = \vec{PR}$

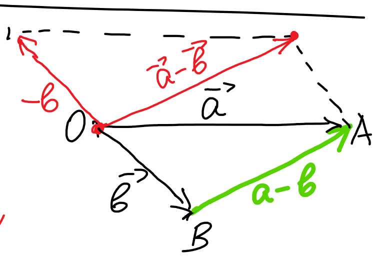
* Свойства:

1) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
2) $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$
3) $\exists!\ \vec{0}: \vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$
4) $\forall \vec{a}\ \exists! (-\vec{a}): \vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$

Разлика на вектори:

$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$

$\vec{OA} - \vec{OB} = \vec{BA}$



$\boxed{\vec{MN} = \vec{ON} - \vec{OM}}$

от края изваждаме началото

4.2) Умножение на вектор с число

$k \in \mathbb{R},\ \vec{a} \neq \vec{0} \Rightarrow k.\vec{a} = \vec{b}$ – вектор :

1) $\vec{b} \parallel \vec{a}$
2) $\vec{b} \uparrow\uparrow \vec{a}$, при $k>0$
$\vec{b} \uparrow\downarrow \vec{a}$, при $k<0$
$\vec{b} = \vec{0}$ при $k=0$
3) $|\vec{b}| = |k| . |\vec{a}|$

Свойства:

1) $\exists!\ 1 : 1.\vec{a} = \vec{a}$;
2) $n.(m.\vec{a}) = (n.m).\vec{a}$
3) $n.(\vec{a}+\vec{b}) = n.\vec{a} + n.\vec{b}$
4) $(n+m).\vec{a} = n.\vec{a} + m.\vec{a}$

Задачи:

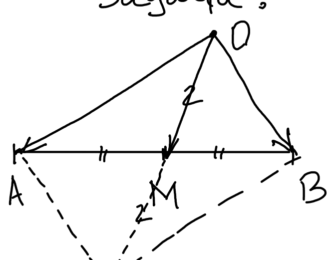
1 зад. (Основна)

$A \neq B$

т. M – средата на AB

т. O – произволна

?ие $\vec{OM} = \frac{1}{2}.(\vec{OA} + \vec{OB})$



Постр. успоредник OACB

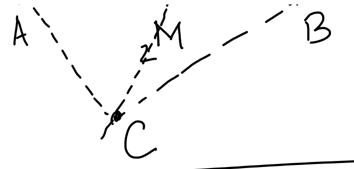
$\vec{OA} + \vec{OB} = \vec{OC} = 2.\vec{OM}$

$\vec{OM} = \frac{1}{2} . \vec{OC}$

т.О – произволна

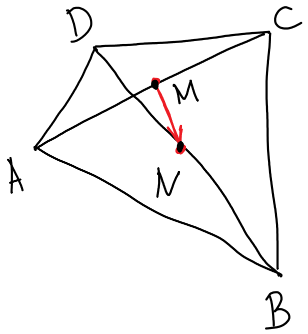
?, че $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\cdot(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$!

Д-во:



2 зад.
ABCD – четириъгълник
M – средата на AC
N – средата на BD

?, че $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}) = \frac{1}{2}\cdot(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB})$



Нека т.О е произволна
M е средата на AC, от Осн. зад.

$\Rightarrow \overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\cdot(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC})$

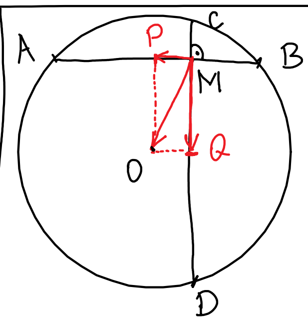
N е средата на BD

$\overrightarrow{ON} = \frac{1}{2}\cdot(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD})$

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\cdot(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC}) =$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\left[(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})+(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC})\right] =$$
$$= \frac{1}{2}\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD})$$

3 зад.
K(O) – окръжност
AB, CD – хорди
$AB \perp CD$
$AB \cap CD = M$ – вътрешна за K

?, че $2\cdot\overrightarrow{MO} = \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}$



Нека т.P е средата на AB, а т.Q е средата на CD
MPOQ – правоъгълник

$\overrightarrow{MO} = \overrightarrow{MP}+\overrightarrow{MQ}$

P е средата на AB $\xRightarrow{\text{осн.зад.}}$

$\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}\cdot(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB})$

$+$ Q е средата на CD $\Rightarrow$

$\overrightarrow{MQ} = \frac{1}{2}\cdot(\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD})$

$$\overrightarrow{MO} = \overrightarrow{MP}+\overrightarrow{MQ} = \frac{1}{2}\cdot(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD})$$

Опр.: Точката M наричаме медицентър на системата от точки $A_1, A_2, \dots, A_n$, ако:

! (1) $\overrightarrow{MA_1}+\overrightarrow{MA_2}+\dots+\overrightarrow{MA_n} = \vec{0}$

(2) $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{n}\cdot(\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\dots+\overrightarrow{OA_n})$, т.О – произволна

(1) $\Leftrightarrow$ (2)

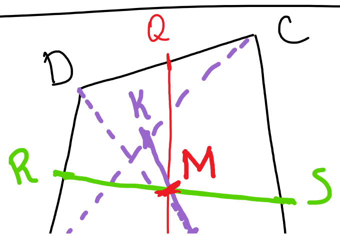
Д-во:

(1) $\overrightarrow{MA_1}+\dots+\overrightarrow{MA_n} = \vec{0}$

$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{MA_1} = \overrightarrow{OA_1}-\overrightarrow{OM}\\ \dots\\ \overrightarrow{MA_n} = \overrightarrow{OA_n}-\overrightarrow{OM}\end{array}\right\} + \Rightarrow (2)$

(2) $\overrightarrow{\underset{M}{\cancel{O}}M} = \frac{1}{n}\cdot(\overrightarrow{\underset{M}{\cancel{O}}A_1}+\dots+\overrightarrow{\underset{M}{\cancel{O}}A_n}) \Rightarrow (1)$

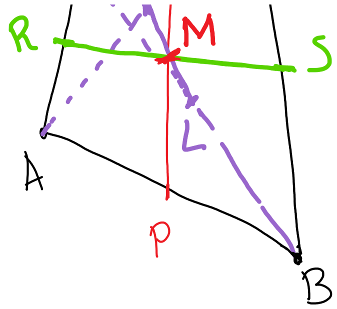
4 зад.
ABCD – четириъгълник
Да се определи положението на т.M:



Нека P и Q са средите съотв. на AB и CD

$\left.\begin{array}{l}\text{От осн. зад.} \Rightarrow \overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}\cdot(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB})\\ \text{От осн. зад.} \Rightarrow \overrightarrow{MQ} = \frac{1}{2}\cdot(\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD})\end{array}\right\} +$

Да се определи положението на т. M:
$\vec{MA}+\vec{MB}+\vec{MC}+\vec{MD}=\vec{0}$.



От осн. зад. => $\vec{MP}=\frac{1}{2}\cdot(\vec{MA}+\vec{MB})$
От осн. зад. => $\vec{MQ}=\frac{1}{2}\cdot(\vec{MC}+\vec{MD})$ +

$\vec{MP}+\vec{MQ}=\frac{1}{2}\cdot(\vec{MA}+\vec{MB}+\vec{MC}+\vec{MD})$

$\vec{MP}+\vec{MQ}=\vec{0} \Rightarrow \vec{MP}=-\vec{MQ} \Rightarrow$

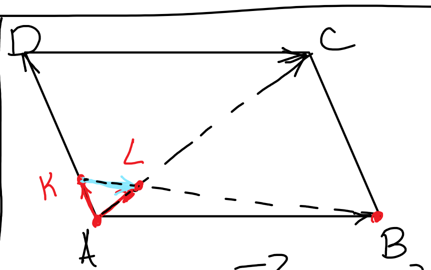
M е средата на PQ

M е средата на RS

M е средата на KL

5 зад.
ABCD – успоредник
т. K: $\vec{AK}=\frac{1}{5}\cdot\vec{AD}$
т. L: $\vec{AL}=\frac{1}{6}\cdot\vec{AC}$

?, че K, L и B лежат на 1 права.



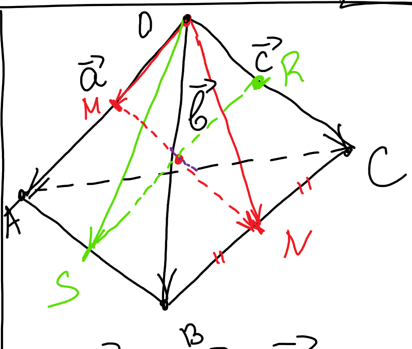
Ще док., че $\vec{KL}=x\cdot\vec{KB}$

$\vec{KL}=\vec{AL}-\vec{AK}$
$\vec{KB}=\vec{AB}-\vec{AK}$)
$\vec{AB}=?$
$\vec{AB}=\vec{DC}=\vec{AC}-\vec{AD}=6.\vec{AL}-5.\vec{AK}$
$\vec{KB}=6.\vec{AL}-5.\vec{AK}-\vec{AK}=6.(\vec{AL}-\vec{AK})=6.\vec{KL}$
$\vec{KB}=6.\vec{KL} \Rightarrow$ K, L, B лежат на 1 пр.

6 зад.
OABC – тетраедър (Δ пирамида)
$\vec{OA}=\vec{a}$, $\vec{OB}=\vec{b}$, $\vec{OC}=\vec{c}$
M, P, R са средите на OA, OB, OC
N, Q, S са средите на BC, AC, AB

а) Да се изразят $\vec{MN}$, $\vec{PQ}$ и $\vec{RS}$ чрез $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

б) ?, че отс. MN, PQ и RS имат обща среда;



а) $\vec{MN}=\vec{ON}-\vec{OM}$
$\vec{OM}=\frac{1}{2}\cdot\vec{OA}=\frac{\vec{a}}{2}$
$\vec{ON}=\frac{1}{2}(\vec{OB}+\vec{OC})=\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}$

$\vec{MN}=\frac{\vec{b}+\vec{c}-\vec{a}}{2}$ | $\vec{OQ}=\frac{\vec{a}+\vec{c}-\vec{b}}{2}$

$\vec{RS}=\vec{OS}-\vec{OR}$
$\vec{OS}=\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$
$\vec{OR}=\frac{1}{2}.\vec{c}$
$\vec{RS}=\frac{\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}}{2}$
$\vec{PQ}=\vec{OQ}-\vec{OP}$
$\vec{OQ}=\frac{\vec{a}+\vec{c}}{2}$, $\vec{OP}=\frac{\vec{b}}{2}$

б) Нека O_1 – средата на MN $\Rightarrow \vec{OO_1}=\frac{1}{2}(\vec{OM}+\vec{ON})$
O_2 – — II — — II — PQ => Упр.
O_3 – II — II — RS => Упр.

$\vec{OO_1}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\vec{a}}{2}+\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}\right)=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{4}$

$\vec{OO_2}=\vec{OO_3}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{4}=\vec{OO_1}$

$\vec{OO_1}=\vec{OO_2}=\vec{OO_3}$
$\Rightarrow O_1\equiv O_2\equiv O_3$