Оценката Ви ще е равна на 2 + броя точки, които получите. Време за работа: 3 часа. Успех.

Ще считаме, че навсякъде работим върху вероятностно пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. *Да припомним, че за* $A \subset \Omega$ *бележим* $\overline{A} = \Omega \setminus A$.

Задача 1. (1т) Три зара се хвърлят едновременно 5 пъти. Каква е вероятността броят на хвърлянията, при които се падат само нечетни точки да бъде четен? Да се намери средната стойност на този брой.

Задача 2. (0.8 т.) По случаен начин се избират две числа в интервала $[0, 1]$. Каква е вероятността сумата от квадратите им да бъде по-голяма от 1?

Задача 3. (1 т.) На състезание участват 25 отбора: 8 отбора в категория джипове, 10 в камиони и 7 в мотоциклети. Джиповете завършват състезанието с вероятност 0.9, камионите - с 0.7, а моторите - с 0.6. След състезанието на случаен принцип се избират три отбора от участвалите. Известно е, че един от избраните три отбора е завършил състезанието, а другите два - не са. Каква е вероятността избраните три отбора да са от различни категории?

Задача 4. (1.2 т.)

1. (0.4 т.) Нека $A, B \subset \Omega$ са събития. Припомнете кога наричаме A и B независими. Докажете, че ако A и B са независими, то $\overline{A}$ и B също са независими.

2. (0.4 т.) Нека $n > 1$ е естествено число и $A_1, \ldots, A_n$ са събития. Да припомним, че наричаме $A_1, \ldots, A_n$ независими в съвкупност, ако за всяко $\{i_1, \ldots, i_k\} \subset \{1, \ldots, n\}$

$$\mathbb{P}(A_{i_1})\mathbb{P}(A_{i_2}) \ldots \mathbb{P}(A_{i_k}) = \mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}) \,. \tag{1}$$

   Докажете, че ако $A_1, \ldots, A_n$ са независими в съвкупност, то $\overline{A_1}, \ldots, \overline{A_n}$ също са независими в съвкупност.

3. (0.4 т.) Нека X е случайна величина, която приема стойности в $\mathbb{N}$ и за $n \in \mathbb{N}$, $p_n := \mathbb{P}(X = n)$. Дефинирайте очакването $\mathbb{E}X$ и дисперсията DX на X. Докажете, че

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X \geq k) = \mathbb{E}X \,. \tag{2}$$