Част 1

1. Смяна на координатите при смяна на афинната координатна система

Нека K = Oe1 . . . en и K` = O`e`1 . . . e`n са афинни координатни системи в n-мерното афинно пространство A, координатният вектор на O` спрямо K е s, а матрицата на прехода от базиса e = (e1, . . . , en) към базиса e` = (e`1 , . . . , e`n) е T. Нека координатните вектори на P ∈ A спрямо K и K` са съответно x, x` ∈ R n . Тогава x = s + T x` , тоест κK(P) = κK(O`) + TκK`(P).
ДОКАЗАТЕЛСТВО:
Имаме →OP = → OO` + → O`P. По дефиницията на координати координатният вектор спрямо e на →OP е координатният вектор спрямо K на P, тоест x, а координатният вектор спрямо e на → OO` е координатният вектор спрямо K на O` , тоест s. Аналогично координатният вектор спрямо e` на → O`P е координатният вектор спрямо K` на P, тоест x` . От Теорема 1 (Тоест e` = e.T, e.x = v = e` .x` ⇒ x = T x`) тогава следва, че координатният вектор спрямо e на → O`P е T x` . Тъй като от равенството →OP = → OO` + → O`P следва, че същото равенство е в сила за координатните вектори спрямо e на участващите вектори, получаваме x = s + T x` .
Същото доказателство, написано чрез координатните изображения, изглежда по следния начин: Тъй като κe : V → R n е линейно изображение, то κK(P) = κe →OP = κe → OO` + → O`P = κe → OO` + κe → O`P = κK(O`) + Tκe` → O`P = κK(O`) + TκK`(P).

Част 2

Дефиниции:

Афинна координатна система в крайномерно афинно пространство:

Нека A е n-мерно афинно пространство, моделирано върху линейното пространство V. Афинна координатна система К в A е двойка, състояща се от точка $O \in A$ и базис $e = (e_1,...,e_n)$ на V. Пишем $К = Oe_1...e_n$. Точката O се нарича начало на координатната система, а $e_1,...,e_n$ - координатни или базисни вектори.

Афинно подпространство: **

Нека A е афинно пространство, моделирано върху линейното пространство U. Непразното подмножество B на A се нарича афинно подпространство на A, ако $B = \{Q \in A : \overrightarrow{P_0Q} \in V\}$, където V е линейно подпространство на U и $P_0 \in A$, тоест ако за някое линейно подпространство V на U и някоя точка $P_0 \in A$ е изпълнено $Q \in B \Leftrightarrow \overrightarrow{P_0Q} \in V$.

Афинно пространство: **

Нека V е реално линейно пространство. Непразното множество A се нарича афинно пространство, моделирано върху V (или с направляващо пространство V), ако е зададено изображение $A \times A \to V$: $(P, Q) \mapsto \overrightarrow{PQ}$, което има свойствата:

1 $\forall P \in A$ и $\forall v \in V$ $\exists! Q \in A : \overrightarrow{PQ} = v$

2 $\forall P, Q, R \in A$ е в сила $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$

Елементите на A се наричат точки.
Размерност на A се нарича размерността на V.

Векторно произведение: **

Векторно произведение на векторите u и v е векторът $u \times v$, дефиниран по следния начин:

а) Ако u и v са колинеарни, то $u \times v = 0$.

б) Ако u и v не са колинеарни, то $u \times v$ е единственият вектор, който удовлетворява условията:

$|u \times v| = |u|.|v|.\sin\angle(u, v)$,

$u \times v$ е перпендикулярен на u и v,

$(u, v, u \times v)$ е положително ориентиран базис.

Координати и координатен вектор спрямо афинна координатна система в крайномерно афинно пространство:**?

--Определение 1 Афинна координатна система K в A е двойка, състояща се от точка O ∈ A и базис e = (e1, . . . , en) на V . Пишем K = Oe1 . . . en. Точката O се нарича начало на координатната система, а e1, . . . , en – координатни или базисни вектори.

--Нека К = 0.e_1...e_n е афинна координатна система в А и Р ∈ А. Координати на Р спрямо К се наричат координатите на вектора -->ОР спрямо базиса е= (e_1,...,e_n), тоест координатите на Р спрямо К са x_1,...x_n ⇔ -->ОР = $x_1.e_1$ + … + $x_n.e_n$. Пишем Р(x_1,...,x_n).

Криви от втора степен в равнина:**

Множеството от точки в реална равнина, чиито координати относно координатната система Оху удовлетворяват уравнението от вида:

f: $a_{11}.x^2$ + 2a_{12}xy + a_{22} y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0,

в което $a_{ij} \in \mathbb{R}$, i, j = 1, 2, 3 и поне един от коефициентите a_{11}, a_{12}, a_{22} е различен от нула, се нарича крива от втора степен.

Общи уравнения на <u>права в пространството: **</u> (не съществува общо уравнение на права в пространството.)

К = Oxyz АКС

l е права и се задава спрямо К с :

$$l: \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

Общо уравнение на <u>афинно подпространство: **</u>

Нека А е n-мерно афинно пространство, моделирано върху линейното пространство U, и К = $Oe_1...e_n$ е афинна координатна система в А. Нека в В е к-мерно афинно подпространство на А.

Общо уравнение на В спрямо К е уравнение на В спрямо К от вида Ax=b, където А е матрица $(n-k) \times n$, $b \in \mathbb{R}$ на степен n-k (и r(A) = n - k).

Общо уравнение на <u>права в равнината:**</u>

Общо уравнение на правата l спрямо K е ∀ уравнение на l спрямо K от вида:

$l : Ax + By + C = 0, (A,B) \neq (0, 0)$

Общо уравнение на <u>равнина:**</u>

Общо уравнение на равнина:

$a : Ax + By + Cz + D = 0, (A, B, C) \neq (0, 0, 0)$

Ориентация в афинно пространство:**

1. Ориентация в крайномерно афинно пространство е ориентация в направляващото линейно пространство.
2. Казваме, че крайномерно афинно пространство е ориентирано, ако е избрана едната от двете възможни ориентации (тоест, ако направляващото пространство е ориентирано). Избраната ориентация се нарича положителна, а другата - отрицателна.

Ориентация в РЛП: Ориентация в крайномерно РЛП е клас на еквивалентност относно релацията еднаква ориентираност на базиса

Отсечка в афинно пространство:**

Нека A е афинно пространство, моделирано върху линейното пространство U. Нека P_0 И P_1 са различни точки от A. Отворена отсечка с краища P_0 и P_1 е $\{P \in A : \exists \lambda \in (0, 1) : \rightarrow P0P = \lambda \rightarrow P0P1\}$.

Затворена отсечка с краища P0 И P1 е $\{P \in A : \exists \lambda \in [0, 1] : \rightarrow P_0P = \lambda \rightarrow P_0P_1\}$. Считаме, че отворената отсечка P_0P_0 е $\varnothing$, а затворената отсечка P_0P_0 е $\{P_0\}$

Отсечка - Затворена отсечка, с краища точките A и B е множеството, състоящо се от точките A и B и точките от затв. отсечка с краища A и B и точките от отв. отсечка.

Разстояние от точка до права в R^2, зададена с нормално уравнение:?? - теси

Нека P0 принадлежи на A и права l. Тогава |P0P1| където A принадлежи на l и P0P1 е перпендикуляр на l се нарича разстояние от т.P до права l в R^2 и се означава с d(P0P1)

Свободен вектор в геометричното пространство:**

Класовете на еквивалентност относно релацията равенство на свързани вектори се наричат свободни вектори. Ако v е свободен вектор и → AB ∈ v, то казваме, че → AB е представител на v.
Вместо → AB ∈ v ще пишем → AB = v (защото това е общоприетия начин на писане).

Скаларно произведение -** Скаларно произведение на векторите u и v е числото $\langle u, v \rangle \in R$, Дефинирано по следния начин:

1. Ако u = 0 или v = 0, то $\langle u, v \rangle = 0$.
2. Ако u ≠ 0 и v ≠ 0, то $\langle u, v \rangle = |u|.|v|.\cos\sphericalangle(u, v)$.

Свойства:

1. . $\langle v, u \rangle = \langle u, v \rangle$ -- (симетричност)
2. $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$ -- (адитивност по първия аргумент)
3. $\langle \lambda u, v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle$ за $\lambda \in R$ -- (хомогенност по първия аргумент)
4. $\langle u, ui \rangle > 0$ за u != 0 ----- (положителност)

Смесено произведение -** Смесено произведение на векторите u, v, w се нарича числото (u, v, w) = (u × v, w)
∊ R (тоест векторното произведение u × v, умножено скаларно с w).

Формулирайте:

Формулирайте теоремата за геометричната интерпретация на векторно произведение чрез лице:**

Ако векторите u и v са неколинеарни, то лицето на успоредника, построен върху u и v, е |u × v|, а лицето на триъгълника, построен върху u и v, е 1/2 |u × v|.

Формулирайте твърдението за геометричната интерпретация на смесеното произведение чрез обем:

Нека u, v, w са некомпланарни вектори. Тогава обемът на паралелепипеда, построен върху u, v, w е |<u, v, w>|, а този на тетраедъра е ⅙.|<u, v, w>|

Формулирайте твърдението за колинеарност на 2 вектора в геометричната равнина чрез координати:**

Нека векторите u и v в геометричната равнина имат спрямо даден базис координати u(x1, x2) и v(y1, y2). Тогава u и v са колинеарни ⇔ рангът на матрицата от координатите им
(x1 y1)
(x2 y2) е строго по-малък от 2 ⇔
det |x1 y1|
|x2 y2| = 0.

Формулирайте твърдението за колинеарност на 2 вектора в геометричното пространство чрез координати:**

Нека векторите u и v в геометричното пространство имат спрямо даден базис координати u(x1, x2, x3) и v(y1, y2, y3). Тогава u и v са колинеарни ⇔ рангът на матрицата от координатите им
(x1 y1)
(x2 y2) е строго по-малък от 2 ⇔
(x3 y3)

det |x2 y2| det |x3 y3| det |x1 y1|
|x3 y3| = 0, |x1 y1| = 0, |x2 y2| = 0.

Формулирайте твърдението за компланарност на 3 вектора в геометричното пространство чрез координати:**

Нека векторите u, v, w в геометричното пространство имат спрямо даден базис координати u(x1, x2, x3), v(y1, y2, y3), w(z1, z2, z3). Тогава u, v, w са компланарни ⇔ рангът на матрицата от координатите им $\begin{pmatrix} x1 & y1 & z1 \\ x2 & y2 & z2 \\ x3 & y3 & z3 \end{pmatrix}$ е строго по-малък от 3 ⇔ det $\begin{pmatrix} x1 & y1 & z1 \\ x2 & y2 & z2 \\ x3 & y3 & z3 \end{pmatrix}$ = 0.

Формулирайте твърдението за общото уравнение на равнина, зададена с точка и два вектора.

т.P_0 (x_0, y_0, z_0)
$\rightarrow V_1(a_1, b_1, c_1)$
$\rightarrow V_2(a_2, b_2, c_2)$

Тогава равнината π определена от т.P_0, $\rightarrow V_1$, $\rightarrow V_2$ има общо уравнение от вида:

$$\pi : \begin{vmatrix} x - x0 & y - y0 & z - z0 \\ a1 & b1 & c1 \\ a2 & b2 & c2 \end{vmatrix} = 0$$

Формулирайте теоремата за общо уравнение на права в геометричната равнина. ????

Права в 3-мерно афинно пространство (в частност, в геометричното пространство): n = 3, k = 1
Нека координатите са (x, y, z) вместо (x_1, x_2, x_3).

Теорема 1. Всяка права в 3-мерно афинно пространство A има общо уравнение спрямо K, тоест уравнение от вида:

$$\begin{cases} A1x + B1y + C1z + D1 = 0 \\ A2x + B2y + C2z + D2 = 0 \end{cases}$$

(и матрицата $\begin{pmatrix} A1 & B1 & C1 \\ A2 & B2 & C2 \end{pmatrix}$ има ранг 2).

Обратното: Всяка система от вида

$$\begin{cases} A1x + B1y + C1z + D1 = 0 \\ A2x + B2y + C2z + D2 = 0 \end{cases}$$

където рангът на матрицата на системата $\begin{pmatrix} A1 & B1 & C1 \\ A2 & B2 & C2 \end{pmatrix}$ е 2, е общо уравнение спрямо К на някоя права в А.

Формулирайте теорема за общото уравнение на права в геометричната равнина - с точка и вектор **

Нека т.P_0 и ненулев вектор $\rightarrow$ V имащ спрямо К коорд. т.P_0 (x_0, y_0), $\rightarrow$ V = (a, b). Тогава правата L определена от тях има спрямо К общо уравнение:

$$L: \begin{vmatrix} x - x0 & a \\ y - y0 & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x - x0 & y - y0 \\ a & b \end{vmatrix} = 0$$

Формулирайте теоремата на Питагор в евклидово линейно пространство.**

Нека U е евклидово линейно пространство.
Ако $u_1, \dots, u_k \in U$ е ортогонална система, то
$|u_1 + \dots + u_k|^2 = |u_1|^2 + \dots + |u_k|^2$.

Формулирайте условие за колинеарност на 2 вектора чрез векторно произведение.**

Векторите u, v са колинеарни ⇔ $u \times v = 0$.

Формулирайте условието за перпендикулярност на 2 вектора в геометричното пространство чрез скаларно произведение.**

Нека u и v са ненулеви вектори
Тогава $u \perp v \Leftrightarrow \langle u, v \rangle = 0$

Формулирайте теоремата за параметричните уравнения на права в геометричното пространство, зададена с точка и вектор.

Нека точката $P_0 \in A$ и ненулевият вектор $v \in V$ имат спрямо K координати $P_0(x_0, y_0)$, v(□, η). Тогава правата l, която минава през P0 и е колинеарна с v, има спрямо K параметричните уравнения

$$l : \begin{cases} x = x0 + \lambda\xi \\ y = y0 + \lambda\eta \end{cases} \quad \lambda \in R.$$

Формули за двойно векторно произведение

$(a \times b) \times c = \langle a, c\rangle b - \langle b, c\rangle a$

$a \times (b \times c) = \langle a, c\rangle b - \langle a, b\rangle c$

Част 3

1. Спрямо АКС К = Oxyz в пространството трите неколинеарни точки Po, P1, P2 имат координати Pi(xi,yi,zi), i = 0, 1, 2. Напишете параметричните уравнения на равнината, определена от трите точки.**

$$\pi : \begin{cases} x = x0 + \lambda 1(x1 - x0) + \lambda 2(x2 - x0) \\ y = y0 + \lambda 1(y1 - y0) + \lambda 2(y2 - y0) \\ z = z0 + \lambda 1(z1 - z0) + \lambda 2(z2 - z0) \end{cases} \quad , \lambda 1, \lambda 2 \in R$$

2.Спрямо АКС К = Oxyz в пространството равнината π има уравнение от вида Ax + By + Cz + D = 0. Напишете всички общи уравнение на π спрямо К.**

λ(Ax + By + Cz + D) = 0 , λ принадлежи R, λ != 0

3.Изображението L на равнината в себе си се задава спрямо дадена ортонормирана координатна система/АКС с уравнението y = s + Tx. Какви са НДУ върху вектора s принадлежащ на R^2/ R^3 и квадратната матрица T затова L да бъде метрична/афинна трансформация. ???

T е матрица на прехода от e към e'. s ∈ R1 е координатен вектор. p принадлежи A и координатния вектор на p спрямо к и к' са y, x принадлежи R1. Тогава НДУ е
2к(p) = 2k(o') + T^2 k(p), където 2k(o') = s.

Матрицата T е обратима -за афинна трансформация

Матрицата T е ортогонална- за метрична трансформация (т.е. еднаквост)

4.Нека u и v са ненулеви вектори в пространството. Напишете дефиниционната формула за скаларното им произведение.**

$<u, v> = |u|.|v|.\cos (u, v)$

5.Нека a и b са 2 базиса на линейното пространство V^3 на векторите в пространството. Напишете деф. условие за това a и b да са еднакво ориентирани.**

Кратък вариант: Детерминантата на матрицата на прехода да е положително число.

Дълъг вариант: Нека a = (a1...an) и b = (b1...bn) са два базиса на V и матрицата на прехода от a към b e T. Казваме, че a е еднакво ориентиран с b и пишем a ~ b, ако <u>**detT > 0**</u>.

6. Нека (l1,l2) е базис на лин.пространство V2 на векторите в R^2. Какво условие трябва да удовлетворяват ненулевите R числа λ1, λ2, за да бъдат базисите еднакво ориентирани ? **

$\lambda 1.\lambda 2 > 0$ $\lambda 1 > 0$ и $\lambda 2 > 0$ или $\lambda 1 < 0$ и $\lambda 2 < 0$

7. Спрямо АКС K = Oxyz в пространството правата l има общо уравнение l:Ax+By+Cz+D=0, а точките P1 и P2 имат координати Pi(xi, yi). Напишете НДУ чрез координатите на P1 и P2 за това двете точки да са от една и съща отворена полуравнина относно l.**

(Ax1 + By1 + Cz1 + D1) (Ax2 + By2 + Cz2 + D2) > 0

?

8. Спрямо АКС K = Oxyz в пространството равнината п има общо уравнение(стандартно), а точките P1 и P2 имат координати Pi(xi, yi). Напишете НДУ чрез координатите на P1 и P2 за това двете точки да са от едно и също отворено полупространство относно п. ??

P1 и P2 са от едно и също отворено полупространство спрямо B <=> F(x1)F(x2) > 0, където x1 и x2 са координатните вектори на P1 и P2, а F(x) = Ax + By + Cz + D.

9. Спрямо АКС K=Oxyz в пространството двете различни точки P0 и P1 имат координати Pi(xi,yi,zi). Напишете параметричното уравнение спрямо K на затворената отсечка P0P1.**

x = (1- λ) x^0 + λx^1
y = (1- λ) y^0 + yx^1 , λ ∈ [0, 1]
z = (1- λ) z^0 + zx^1

10. Спрямо АКС K = Oxy в равнината правата l има уравнение Ax+By+C = 0. Напишете всички нормални уравнения на l спрямо K.--?? (ПРЕГЛЕД, ИМА ГРЕШКА)

Нормални:

Ax + By + C / + - корен от A^2 + B^2 = 0

11. Напишете неравенство на триъгълника в евклидовото афинно/линейно пространство(различни са, но от едното минаваш на другото).**

| u→ + v→| ≤ | u→ | + | v→| **////** |PR| ≤ |PQ|+|QR|

12. Каква е размерността на афинните пространства, в които точките са хиперравнини ?**

dimA = 1

(Ако правите са хиперравнини при dimA=2,

Ако равнините са хиперравнини при dimA=3).

13. Нека K = O l1...ln е ОКС в евклидовото афинно пространство. Напишете формулата за разстоянието между точките P и Q чрез координатите им (x1...xn) и (y1...yn) спрямо K. **

$$|PQ| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2}$$

14. Нека A е n-мерно евклидово афинно пространство, моделирано върху линейното пространство U, K е ОКС в A и спрямо нея точката P0 принадлежаща на A и ненулевия вектор N принадлежащ на U имат координати Po(x1^0...xn^0), N(a1...an). Напишете общо уравнение спрямо К на хиперравнината в A, която минава през P0 и за която N е нормален вектор.**

$L\colon a_1(x_1 - x_1') + \dots + a_n(x_n - x_n') = 0$

15. Нека a и b са лъчи в геометричното пространство, които лежат на една и съща права. Напишете дефиниционното условие за това те да са еднопосочни.

--(a и b са еднопосочни, ако a > b или b < a)

Нека a и b са лъчи. Казваме, че **a** е **еднопосочен с b** и пишем $a \uparrow\uparrow b$, ако правите определени от a и b са успоредни (Считаме, че всяка права е успоредна на себе си!) и

1) ако правите определени от a и b съвпадат, то $a \supset b$ или $b \supset a$.

2) ако правите определени от a и b са различни и π е равнината определена от тях, а A и B са началата на a и b, то a и b лежат в една и съща полуравнина в π относно правата AB.

* Противопосочни - Казваме, че **a** и **b** са **противопосочни** и пишем $a \uparrow\downarrow b$, ако правите определени от a и b са успоредни, но a и b не са еднопосочни.

16. Спрямо АКС в R^3, точка P1 и P2 имат координати Pi(xi,yi,zi). Какви са координатите на вектора P1P2 спрямо K ? **

□

P1P2(x2 – x1, y2 – y1, z2 – z1)

17. Напишете формулата за смяна на координатите на точка в равнина при симетричност на КС, като при това изясните всички участващи във формулата означения.**

x = s + T x'

x - координати на точка M (произволна) спрямо K
s - координати на началото O` на K` спрямо K
T - матрица на прехода от K` в K
x` - координати на точка M спрямо K`

18. Спрямо ОКС в R^2 векторите u и v имат координати u(x1,x2) и v(y1,y2). Колко е <u,v> ? **

<u, v> = x1y1 + x2y2

19. Спрямо ОКС в R^2 правата l има уравнение Ax+By+C = 0. Напишете координатите спрямо K на един ненулев вектор, успореден на l .**

->V1(-B, A)|| l   ->v2(A,-B) || l

20. Дадено е че u и v са неколинеарни. Да се напише дефиниционната формула за дължината на векторното произведение.**

$|u \times v| = |u|.|v|.\sin\sphericalangle(u, v)$

21. Дадени са ОКС K=Oxyz и равнината п има уравнение Ax+By+Cz + D = 0. Напишете всички нормални уравнения на п спрямо К.**

$$Ax + By + Cz + D \,/\, + \left(\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \right) = 0$$

$$Ax + By + Cz + D \,/\, - \left(\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \right) = 0$$

22. Спрямо положителна ОКС К/ положително ортонормиран базис е на линейното пространство на векторите/ в геометричното пространство векторите u и v имат координати u(x1,x2,x3) и v(y1,y2,y3). Напишете координатите спрямо К/е на u x v . **

$$u \times v \left(\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \right)$$

$$u \times v \,(x_2y_3 - x_3y_2,\; x_3y_1 - x_1y_3,\; x_1y_2 - x_2y_1)$$

23. **Нека К е положително ортонормирана ОКС в пространството. Напишете формулата за смесено произведение (u,v,w) чрез дадените им координати(имат по три координати всеки вектор).**

$$\langle u, v, w\rangle = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

24. **Нека К е АКС в n-мерното афинно пространство А и координатните вектори на на точките P, Q принадлежащи на А спрямо нея са съответно x,y принадлежащи на R^n. Какъв е координатния вектор спрямо К на вектора PQ ?**

<u>$y - x$, тоест $\varkappa e(PQ\rightarrow) = \varkappa k(Q) - \varkappa k(P)$</u>

25. **Спрямо ОКС K = Oxyz в геометричното пространство правата l е зададена:**
$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$
$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$.
Напишете общи уравнения спрямо К на всички равнини, които съдържат l.

<u>$(\lambda A_1 + \mu A_2)x + (\lambda B_1 + \mu B_2)y + (\lambda C_1 + \mu C_2)z + (\lambda D_1 + \mu D_2) = 0$</u>

$\Lambda(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \mu(A_2x + B_2y + C_2z + D_2)$

26. **Напишете неравенството на Коши-Буняковски-Шварц (в евклидово линейно пространство).**

<u>$|\langle u, v\rangle| \le |u|.|v|$</u>

27. Напишете метричното канонично уравнение на елипса/хипербола/ парабола?

Елипса:

$x^2 / a^2 + y^2 / b^2 = 1$

Хипербола:

$x^2 / a^2 - y^2 / b^2 = 1$ или $y^2 / b^2 - x^2 / a^2 = 1$

Парабола:

$y^2 = 2px$ или $x^2 = 2py$

28. Спрямо АКС в равнината правата l има общо уравнение l : Ax + By + C = 0, а точките P1 и P2 имат координати P1(x1, y1) и P2(x2, y2). Напишете НДУ чрез координатите на P1 и P2 за това P1 и P2 да са от една и съща отворена полуравнина относно l.

$(x1, y1).(x2, y2) > 0$

29. Нека векторите u и v в геометричното пространство имат представители съответно OP и OQ. Напишете представител на вектора u – v.

□ □ □ □ □ □ □ □ □

u – v = u + (-v) = OP + QO = QO + OP = QP

30. Нека V е реално линейно пространство. Напишете явна формула на изображение V x V -> V : (P, Q) -> вектора PQ, с което V става афинно пространство, моделирано върху себе си.

V x V -> V : (P, Q) → PQ→ = Q - P

31. Напишете формулата за смяна на координатите на вектор, като при това изясните всички участващи във формулата означения.

v = Tv\`

v - координати на вектор v(произволен) спрямо K

T - матрица на прехода от K\` в K

v\` - координати на вектор v спрямо K\`

32. Нека a и b са 2 базиса на линейното пространство V^3 на векторите в пространството. Напишете деф. условие за това a и b да са противоположно ориентирани.

Детерминантата на матрицата на прехода да е отрицателно число.

33. Спрямо ОКС в R^2 правата l има уравнение Ax+By+C = 0. Напишете координатите спрямо К на един ненулев вектор, перпендикулярен на l .

v(A, B)   (A,B) != (0, 0)
Нормалният вектор на правата l

34. Колко са възможните ориентации в крайномерно реално линейно пространство ? **

2

35. Каква е размерността на хиперравнините в n-мерните афинни подпространство?

(n - 1)

36. Нека базисът e = (e1, e2, e3) на линейното пространство на векторите в пространството е ортонормиран и спрямо него векторите u и v имат координати u(x1, x2, x3) и v(y1, y2, y3). Тогава:

Нека обозначим ъгъла между векторите u и v с φ.
Тогава cos∢φ = x1.y1 + x2.y2 + x3.y3 / (√(x1^2 +x2^2 + x3^2) . √(y1^2 + y2^2 + y3^2))

Или още ∢φ = arccos x1.y1 + x2.y2 + x3.y3 / (√(x1^2 +x2^2 + x3^2) . √(y1^2 + y2^2 + y3^2))
** Същото важи и за n на брой координати*

37.* Нека имаме равнината π : a1x1 + …. anxn + b = 0. Тогава какви ще са координатите на вектора N, перпендикулярен за равнината π ? *(или правата l да е перпендикулярна на равнината π, тогава какви ще са координатите на вектора N, успореден на l)

N (a1, … an)

38. Нека V е реално линейно пространство. Тогава A = V е афинно пространство, моделирано върху V , с изображението:

$V \times V \to V : (P, Q) \to \overrightarrow{PQ} = Q - P.$

Част 4

1. Нека спрямо афинна коорд. Система K = Oxyz в пространството трите неколинеарни точки P_0, P_1, P_2 имат координати $P(x_1, y_1, z_1)$, i = 0, 1, 2. Кое от следните уравнения е общо уравнение на равнината, определена от P_0, P_1, P_2?

$$(a)\begin{vmatrix} x & x0 & x1 & x2 \\ y & y0 & y1 & y2 \\ z & z0 & z1 & z2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

* Последният ред е от 1-ци, вместо от 0

2. Конично сечение, което има ексцентрицитет 1, е

г) Парабола

*** ексцентрицитет 0 - окръжност**
*** ексцентрицитет по-голям от 0 и по-малък от 1 - Елипса**
*** ексцентрицитет по-голям от 1 - Хипербола**

3. Вярно ли е, че всеки две прави в проективната равнина имат обща точка?

а) Да

4. Нека в реалното проективно пространство е фиксирана проективна координатна система K. Едно изображение L на проективното пространство в себе си се нарича проективна трансформация, ако съществува:

а) ненулева

Квадратна матрица T от ред 4 с реални коефициенти, такава че, ако проективните координати на произволна точка P спрямо K са x, то проективните координати на L(P) спрямо K са Tx.

5. Два вектора u и v в геометричното простр. са колинеарни тогава и само тогава, когато:

а) u x v = 0

6. Ако спрямо афинна коорд. Система К в n-мерното афинно простр. А точките P, Q ∈ A имат коорд. Вектори съответно x, y ∈ R, то коорд. Вектор спрямо К на вектора → PQ е:

б) y - x

7. Нека К = Oe1...en и К’ = O’e₁’...e’ₙ са афинни координатни системи в n-мерното афинно пространство А, координатният вектор на O’ спрямо К е s, а матрицата на прехода от базиса e = (e1,...en) към базиса $e' = (e_1, \ldots, e'_n)$ е Т. Кое от равенствата

x = s + Tx’ и $x' = -T^{-1}s + T^{-1}x$

е изпълнено за координатните вектори x спрямо К и x' спрямо K' на произболна точка P ∈ A?

в) И двете

8. Нека Ax = b е съвместима линейна система с n неизвестни и нека рангът на А е r. Тогава афинното подпространство на $\mathbb{R}^n$, състоящо се от решенията на системата, има размерност:

б) n - r

9. Колко са векторите в геометричното пространство, които имат общ представител с противоположния си вектор?

в) Един

10. Три вектора в геометричното пространство са компланарни тогава и само тогава, когато са:

а) Линейно зависими

11. Спрямо даден базис на линейното пространство на векторите в геометричната равнина векторите u и v имат координати u(x1, x2), v(y1, y2). Тогава u и v са колинеарни ⇔ $\det\begin{vmatrix} x1 & y1 \\ x2 & y2 \end{vmatrix} e$

а) Равна на 0

12. Два ненулеви вектора u и v в геометричното пространство са перпендикулярни тогава и само тогава, когато:

а) <u, v> = 0

13. Нека (e1, e2) е базис на линейното пространство V2 на векторите в геометричната равнина. Тогава базисите (e1, e2) и (-e1, -e2) на V2 са:

а) Еднакво ориентирани

14. Нека A е евклидово афинно пространство, O, P, Q ∈ A, O ≠ P, O ≠ Q. Тогава:

б) □ POQ = arccos $\frac{<\vec{OP},\vec{OQ}>}{|OP|.|OQ|}$

15. Нека K е афинна координатна систем в n-мерното афинно пространство A, ..някакво множество и f, g : R^n → S. Нека подмножеството B на A има спрямо … уравнение B : $f(x_1,\ldots,x_n) = g(x_1,\ldots x_n)$. Кое от следните две твърдения е вярно
Ако $P(x_1,..,x_n) \in B$, то $f(x_1,\ldots,x_n) = g(x_1,..x_n)$.
Ако $P(x_1,..,x_n) = g(x_1,\ldots,x_n)$, то $P(x_1,\ldots,x_n) \in B$.

И двете

16. Нека спрямо афинна координатна система K = Oxyz в геометричното пространство двете различни точки P_0 и P_1 имат коорд.
$P_0(x_0, y_0, z_0)$, $P_1(x_1, y_1, z_1)$. Коя от двете тройки параметрични уравнения

$$\begin{aligned} x &= (1 - l)x_0 + l.x_1 \\ y &= (1 - l)y_0 + l.y_1 \\ z &= (1 - l)z_0 + l.z_1 \end{aligned} \quad \text{и} \quad \begin{aligned} x &= l.x_0 + (1 - l)x_1 \\ y &= l.y_0 + (1 - l)y_1 \\ z &= l.z_0 + (1 - l)z_1 \end{aligned}$$

Задава правата P_0P_1

а) Само първата

17. Нека спрямо афинна координатна система К = Oxyz в геом. Равнина правите l_1 и l_2 имат уравнение $l_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $l_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0$. Тогава l_1 и l_2 са пресекателни тогава и само тогава, когато:

а) Рангът на матрицата $\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix} e\, 2$

18. Нека V е линейно подпространство на евклидовото линейно пространство U, (e1,...,ek) е ортонормиран базис на V и u ϵ U. Тогава векторът $\sum_{i=1}^{k} < u, e_i > e_i$ е:

а) Ортогоналната проекция на u във V

19. Вярно ли е, че два свързани вектора са равни тогава и само тогава, когато дължините им са равни?

б) Не

20. Три вектора в геометричното пространство са компланарни тогава и само тогава, когато са:

а) Линейно зависими

21. Нека (e1, e2, e3) е базис на линейното пространство V3 на векторите в геометричното пространство. Тогава базисите (e1, e2, e3) и (-e1, e2, e3) на V3 са :

б) Противоположно ориентирани

22. Всеки четири вектора в пространството са

а) Линейно зависими

23. Нека спрямо афинна координатна система K в равнината векторите $u_1,\dots,u_k$ и v имат коорд. $u_i(x_i, y_i)$, $i = 1,\dots,k$, v(x, y), а $l_1,\dots,l_k \in$ R. Кое от следните две е твърдения е вярно?

Ако v = $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i$, то $x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i, y = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i y_i$

Ако $$x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i, y = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i y_i, \text{ то } v = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i$$

в) И двете

24. Спрямо положително ориентирана ортонормирана координатна система K в пространството векторите u и v имат коорд. u(x1, x2, x3) и v(y1, y2, y3). Тогава втората координата на u × v спрямо K е:

б) $x_3y_1 - x_1y_3$

* Спрямо първата координата е x2y3 - x3y2

* Спрямо третата координата е x1y2 - x2y1

25. За смесеното произведение на векторите u, v, w е в сила:

б) <u, v, w> = -<w, v, u>

* други възможни отговори *

* < u+v, w> = <u, w> + <v, w>

* <u x v, w> = <u, v, w>

26. Нека спрямо афинна координатна система K = Oxyz в пространството трите неколинеарни точки P0, P1, P2 имат координати Pi(xi, yi, zi), i = 0, 1, 2.

Коя от двете тройки параметрични уравнения

P0 P0P1 P0P2

$$\begin{cases} x = x_1 + \lambda(x_1 - x_0) + \mu(x_2 - x_0) \\ y = y_1 + \lambda(y_1 - y_0) + \mu(y_2 - y_0) \\ z = z_1 + \lambda(z_1 - z_0) + \mu(z_2 - z_0) \end{cases}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} x = x_1 + \lambda(x_1 - x_0) + \mu(x_2 - x_0) \\ y = y_1 + \lambda(y_1 - y_0) + \mu(y_2 - y_0) \\ z = z_1 + \lambda(z_1 - z_0) + \mu(z_2 - z_0) \end{cases}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Задава равнината, определена от P_0, P_1 и P_2 ?

г) Нито една от двете

27. Равнините Π и p, които спрямо афинна коорд. Система К = Oxyz в пространството имат уравнения:

Π : 236x + 678y - 21 = 0 и

p : 310x + 542y - 86 = 0

в) Се пресичат (когато 236/310 ≠ 678/542 ≠ 21/86)
* Успоредни са когато само свободният коефициент на уравненията им е различен
* Съвпадат, когато всичките им коефициенти са пропорционални (236/310 = 678/542 = 21/86)

28. По колко начина може да се зададе права в пространството чрез двойка уравнения спрямо дадена афинна координатна система?

в) Безбройно много

29. За всеки два вектора u и v в геометричното пространство е в сила :

б) $u \times v = - v \times u$

30. Кое от следните две твърдения е вярно във всяко афинно пространство?
Ако P, Q, R, S са точки, то → PQ= → RS тогава и само тогава, когато → PR = →QS .
Ако P, Q, R, S са точки и → PQ = → RS , то → PR = → QS

б) Само второто.

31. Нека (e1, e2) е базис на линейното пространство V2 на векторите в геометричната равнина. Тогава базисите
(e1, e2) и (-e1, -e2) на V2 са:

а) еднакво ориентирани.

32. Нека К = Oe1…..en и К' = O'e1'….. En' са афинни координатни системи на афинно пространство A, координатният вектор на O' спрямо К е s, а матрицата на прехода от базиса e = (e1…..en) към базиса e' = (e1'...en') е T. Нека координатните вектори на P∈A спрямо К и К' са съответно x, x' ∈ R^2. Тогава:

а) $x = s + T x'$

33. Нека V е линейно подпространсво на евклидовото линейно пространство U. Тогава:

б) $V \cap V^{\perp} = \{0\}$, ако $0 \in U$

$V \cap V^{\perp} = \varnothing$, ако $0 \notin U$

Нека V и W са подмножества на U.
Тогава:
1. $V^{\perp}$ е линейно подпространство на U.
2. Ако $V \subset W$, то $V^{\perp} \supset W^{\perp}$.
3. $V^{\perp} = l(V)^{\perp}$.
4. $(V^{\perp})^{\perp} \supset V$.
5. Ако V е крайномерно линейно подпространство на U, то $U = V \oplus V^{\perp}$.
6. Ако V е крайномерно линейно подпространство на U, то $(V^{\perp})^{\perp} = V$.
7. Ако U е крайномерно и V е линейно подпространство на U, то $\dim V^{\perp} = \dim U - \dim V$.
8. Ако V и W са линейни подпространства на U, то $(V + W)^{\perp} = V^{\perp}$ T $W^{\perp}$.

34. Спрямо афинна кординатна система и геометричното пространство, векторите u, v, w имат координати u(x1, x2, x3), v(y1, y2, y3), w(z1, z2, z3). Тогава u, v, w са компланарни ⇔

$$\det \begin{vmatrix} x1 & y1 & z1 \\ x2 & y2 & z2 \\ x3 & y3 & z3 \end{vmatrix} \text{ е :}$$

а) равна на 0.

35. Нека К и К’ са АКС в n-мерното евклидово линейно пространство А, К е ортонормирана и координатните вектори x спрямо К и x’ спрямо К’ на произволна точка Р принадлежаща на А са свързани с равенството x = s + Tx’, където s принадлежи на R^n, а Т е матрицата nxn. Какви са НДУ върху s и Т за това К’ да бъде ортонормирана.

Матрицата Т е ортогонална

36. Колко на брой класа криви от втора степен съществуват ?

9

37. Колко на брой метрични класове криви от втора степен съществуват ?

Безброй много

38. Колко афинни класа повърхнини от втора степен съществуват ?

17 не е 17, а 9

39. Колко на брой метрични класове повърхнини от втора степен съществуват ?

Безброй много

40. Нека имаме равнините π: $A_1x + B_1y + C_1z + D = 0$ и β:$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$. Кога двете равнини съвпадат?

Когато рангът на матрицата $\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix}$ е 1

41. Нека имаме равнините π: $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и β:$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$. Кога двете равнини са успоредни ?

Когато рангът на матрицата $\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}$ е 1

42. Нека имаме векторите PQ = u и QR = v и u = λv, λ ∈ □. Тогава кое от следни две е вярно?

$|PQ| = |\lambda|.|QR|$

43. Ако n = 3 и e = (e1, e2, e3) е базис и f = (e2, e3, e1) е базис, то двата базиса са:

еднакво ориентирани

44.Нека (e1, e2, e3) е базис на линейното пространство V3 на векторите в геометричното пространство.
Тогава базисите (e1, e2, e3) и (-e1, -e2, -e3) на V3 са :

б) Противоположно ориентирани

45.Нека (e1, e2, e3) е базис на линейното пространство V3 на векторите в геометричното пространство.
Тогава базисите (e1, e2, e3) и (-e1, -e2, e3) на V3 са :

Еднакво ориентирани
(Би трябвало да е така, защото : В частност, ако се смени знака на един от базисните вектори, то първоначалният базис е противоположно ориентиран на новополучения.)

46. Нека V е n-мерно реално линейно пространство, e = (e1, . . . , en) и e` = (e1` , . . . , en`) са базиси на V и T е матрицата на прехода от базиса e към базиса e`. Нека координатните вектори на v ∈ V спрямо e и e` са съответно x, x` ∈ R^n. Тогава:

x = T x`

47. През две различни точки в афинно пространство минава:

точно една права

48. През три различни точки в афинно пространство, които не лежат на една права, минава:

точно една равнина

49. През n точки в n-мерно афинно пространство, които не лежат в (n − 2)-мерно афинно подпространство, минава:

точно една хиперравнина

50. 0-мерните афинни подпространства са:

едноточковите подмножества

51. Ако $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS}$, то :

$\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{QS}$

52. Нека O, P, Q ∈ A, O ≠ P, O ≠ Q. Тогава:

$|PQ|^2 = |OP|^2 + |OQ|^2 - 2|OP||OQ| \cos\sphericalangle POQ$

53. Ако една матрица е ортогонална, то детерминантата й е:

det = +-1, но има и такива матрици, на които det = +-1, но не са ортогонални

54. Спрямо реална проективна координатна система в комплексната проективна равнина. Реалните прави q и q` се задават съответно с реалните матрици A и A`. Тогава q и q` са проективно еквивалентни ⇔ съществува реална обратима матрица T, за която:

A` = T^t AT

55. Всяка права в АКС има уравнение
Ax + By + C = 0, където :

(A, B) ≠ 0

56. Дадена е АКС К = Oxyz. Нека N(A, B) е нормален за правата е. Кога N`(-A, -B) също е нормален за е ?

В ОКС

57. Съществуват ли т.А и т.В, такива че векторите АВ и ВА да са представители на един и същи вектор ?

НЕ - Ако точките са различни

ДА - Ако точките съвпадат