Зад 1. k различни частици в n различни клетки
Намерете броя начини за разпределяне ако
а/ всяка клетка може да съдържа най-много една частица

$k > n$ – 0 начина (защото всички k частици трябва да се сложат в клетки)

$k \leq n$

1 частица n - места
2 частица $(n-1)$ места
⋮
k частица $(n-(k-1))$

$$n(n-1)\cdots(n-(k-1)) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

б/ клетките могат да съдържат произволен брой

$\underbrace{n}_{\text{1-частица}} \cdot n \cdot \ldots \cdot n = n^k$

всяка частица може да се разположи във всяка една клетка (n клетки)

Зад 2. к неразличими частици да се разположат в n клетки

а/ всяка клетка съдържа най-много 1 частица

$$\frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \binom{n}{k}$$ | ако $k>n$ - 0 начина

Избираме к-на брой клетки в които да сложим частици, тоест от n клетки избираме к → $\binom{n}{k}$

$$\frac{n!}{\underbrace{(n-k)!}\ \underbrace{k!}}$$

пермутации на к елемента защото реда няма значение

избираме к обекти подредени, след което делим на к! за да махнем реда

б/ клетките могат да съдържат произволен брой частици

$\frac{n^k}{k!}$ не става 1/не е цяло число винаги

пример 1,2,3 има 6 пермутации

1,2,1 има 3 пермутации

$\boxed{\text{Bars \& stars}}$

схемата с разделителите

пример $k=7,\ n=5$

␣ * | * ␣ * | * ␣ * | * | * ␣

възможно е 2+ разделителя на 1 празно място

→

Взимаме всичките обекти т.е. всички звезди и разделители т.е. $(n+k-1)$ и избираме ~~n~~ ~~n+k-1~~

$$\binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}$$

Зад $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$

$x_i \geq 1, n \in \mathbb{Z}$

ако $k > n$ то няма решение

нека $n=7, k=5$

звездите означават каква е стойността на даден x_i

$$\rightarrow \binom{n - 1}{k-1}$$

не е $n+1$ защото на 1 и последно или n място не може да имаме разделител

ако $x_i \geq 0$ то имаме отново $\binom{n+k-1}{k}$

3. 8/7!/ . 3!

_o_o_o_o_o_o_o_o_ на всеки слот може да се сложат 3мата т.е. 8 слота и 3мата могат да са разположени произволно → 3!

$\boxed{8!\ 3!}$

4. а/ $\underbrace{5}\ \underbrace{4}\ \underbrace{3}\ \underbrace{2} \to \underline{5.4.3.2}$

възможности

б/ $\underbrace{5}\ \underbrace{5}\ \underbrace{5}\ \underbrace{5} \to \underline{5^4}$

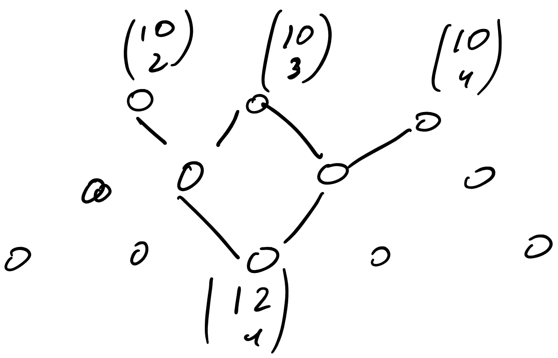
възможности

в/ $\underbrace{2}\ \underbrace{3}\ \underbrace{4}\ \underbrace{3} \to 2.3.4.3$

5. а/ $\binom{12}{4}$

б/ $\underbrace{\binom{10}{4}}_{\text{A и B не участват}} + \underbrace{\binom{10}{3}}_{\text{само A}} + \underbrace{\binom{10}{3}}_{\text{само B}}$ участва

в/ $\underbrace{\binom{10}{2}}_{\text{C и D}} + \underbrace{\binom{10}{4}}_{\text{без C и D}} = \underbrace{\binom{12}{4}}_{\text{всички}} - \underbrace{\binom{10}{3}}_{\text{не участва C}} - \underbrace{\binom{10}{3}}_{\text{не участва D}}$



триъгълника на паскал

6. а/ 2^5 за всяка точка има 2 възможности

б/ 2 възможности да не е само A празна
($\underline{A \text{ и } B}$ и $\underline{A \text{ и } C}$)

$\Rightarrow 2^5 - 2$

в/ $3 \cdot (2^5 - 2)$ точно 1 = точно A + точно B + точно C

г/ поне 1 е празна = точно 1 + точно 2

точно 2 = 3 възможности

$$3(2^5 - 2) + \underset{\binom{3}{2}}{\overset{\shortparallel}{3}}$$

д/ $\underset{\text{всички възможности}}{3^5} - \left[3(2^5 - 2) + 3\right]$

7. а/ $\underbrace{1 \cdot - - - -}_{n-1 \ \times 3 \text{ опции}} = 3^{n-1}$

б/ $\binom{n}{k}$ от n-те места избираме k където ще фиксираме 2 и другите позиции ги запълваме с $\underline{1}$, или $\underline{3}$

$$\binom{n}{k} \cdot 2^{n-k}$$

в/ имаме n-2 позиции

$$\underbrace{1 \; \ldots\ldots \; 1}_{n-2}$$

от n-2 избираме k-2

$$\binom{n-2}{k-2} \cdot 2^{(n-2)-(k-2)}$$

г/ $k_1 + k_2 + k_3 = n$

$$\binom{n}{k_1}\binom{n-k_1}{k_2}\binom{n-k_1-k_2}{k_3} = \frac{n!}{k_1!\,\cancel{(n-k_1)!}} \cdot \frac{\cancel{(n-k_1)}!}{k_2!\,\underbrace{(n-k_1-k_2)!}_{k_3!}} \cdot 1$$

$$\binom{k_3}{k_3}$$

$$= \frac{n!}{k_1!\,k_2!\,k_3!}$$

ж) разместваме всички цифри по $n!$ начина след това премахваме пермутациите на отделните цифри.

$$\to \frac{n!}{k_1!\,k_2!\,k_3!}$$

9.

$$2^{n \cdot k} - 2^{n} - 2^{k} + 1$$

празното множество

$$= (2^{n} - 1)(2^{k} - 1)$$

непразно множество на а и на в