ЗАДАЧИ ПО АНАЛИТИЧНА ГЕОМЕТРИЯ

I ЧАСТ: Афинни операции с вектори

1 зад. В четириъгълника $ABCD$ точките M и N са средите съответно на страните AD и CB.

Да се докаже, че $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}\right)$

2 зад. В четириъгълника $ABCD$ точките M и N са средите съответно на диагоналите AC и DB.

Да се докаже, че $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}\right)$.

3 зад. Нека точките K, L, M и N са средите съответно на страните BC, CD, DE и EA на петоъгълника $ABCDE$, а точките *P* и Q са средите съответно на отсечките KM и LN. Докажете, че $\overrightarrow{QP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$.

4 зад. В успоредника $ABCD$ точките M и N са средите съответно на страните BC и CD. Точката *P* е такава, че $AMPN$ е успоредник. Докажете, че точката *P* принадлежи на правата *AC*.

5 зад. В триъгълник ABC CM е медиана. Нека точките *P* и Q са такива, че $\overrightarrow{CP} = \frac{3}{4}\overrightarrow{CM}$ и $\overrightarrow{CQ} = \frac{3}{5}\overrightarrow{CB}$. Докажете, че точките *A*, *P* и *Q* са колинеарни.

6 зад. В четириъгълника $ABCD$ точката *P* е средата на страната *AB*, а точката *Q* е средата на страната *CD*. Нека точките M и N са такива, че $AMQD$ и $NBCQ$ са успоредници. Докажете, че точката P е средата на отсечката MN .

7 зад. $ABCD$ е произволен четириъгълник, в който точка *M* е средата на *AB*, точка *K* е средата на *CD*, точка *O* е средата на *MK*. Докажете, че $4.\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$.

II ЧАСТ: Линейна зависимост и независимост на вектори.

1 зад. Даден е триъгълник *ABC*, за който $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$. Върху страните *AC* и *BC* са нанесени съответно точките *M* и *N* така, че *CM*:*MA* = 2:3 и *CN*:*NB* = 2:3.

a) Да се изразят векторите $\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{BM}, \overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{AB}$ чрез $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Да се покаже, че правите *MN* и *AB* са успоредни;
b) Да се докаже, че правите *AN* и *BM* имат точно една обща точка.

2 зад. Даден е успоредник *ABCD*, за който $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, точката $O = AC \cap BD$, а точката *P* е от страната *BC* такава, че *BP*:*PC* = 3:1.

a) Да се изразят векторите $\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OP}$ чрез $\vec{a}$ и $\vec{b}$;
b) Ако точката *Q* е от страната *AD* такава, че *AQ*:*QD* = 1:3, да се докаже, че точките *P*, *Q* и *O* са колинеарни.

3 зад. Даден е успоредник *ABCD*, за който $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, точката $O = AC \cap BD$. Точките *P* и *Q* са определени от равенствата: $\overrightarrow{DP} = \frac{1}{3}.\overrightarrow{DC}$ и $\overrightarrow{QB} = \frac{1}{3}.\overrightarrow{AB}$.

a) Да се изразят векторите $\overrightarrow{PQ}$ и $\overrightarrow{OQ}$ чрез $\vec{a}$ и $\vec{b}$;
b) Да се докаже, че точките *P*, *Q* и *O* са колинеарни;
c) Да се докаже подточка b), ако $\overrightarrow{DP} = \frac{1}{n}.\overrightarrow{DC}$ и $\overrightarrow{QB} = \frac{1}{n}.\overrightarrow{AB}$, $n \in \mathbb{R}^+$.

4 зад. Даден е успоредник *ABCD*, за който $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, точката $O = AC \cap BD$. Точките M и N са медицентровете съответно на триъгълник ABD и триъгълник ABC.

a) Да се изразят векторите $\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{BM}, \overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{AB}$ чрез $\vec{a}$ и $\vec{b}$;
b) Да се покаже, че правите *MN* и *AB* са успоредни.

5 зад. Даден е тетраедър *OABC*, за който $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ и $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$. Точките A_1, C_1 и O_1 са медицентровете съответно на триъгълниците: *BOC*, *AOB* и *ABC*.

a) Да се изразят медианите на тетраедъра $\overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{CC_1}, \overrightarrow{OO_1}$ чрез $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$;
b) Да се докаже, че векторите $\overrightarrow{AA_1}$ и $\overrightarrow{CC_1}$ са линейно независими;
c) Да се докаже, че векторите $\overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{CC_1}$ и $\overrightarrow{AC}$ са линейно зависими, т.е. четирите точки *A*, *C*, A_1 и C_1 лежат в една равнина. От двете подусловия b) и c) следва, че двете прави AA_1 и CC_1 се пресичат в единствена точка *M*;
d) Да се докаже, че намерената по-горе точка *M* лежи и на третата медиана OO_1 и да се намерят отношенията, в които т. *M* дели всяка от медианите.

5 зад. Даден е тетраедър *OABC*, за който $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ и $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$. Точките *M*, *N*, *P* и *Q* са медицентровете съответно на триъгълниците: *AOB*, *BOC*, *ABC* и *AOC*. Да се докаже, че следните прави са две по две успоредни: *MN* и *AC*, *MQ* и *BC*, *QN* и *AB*, *MP* и *OC*, *NP* и *OA*, *PQ* и *OB*.

III ЧАСТ: Скаларно произведение на два вектора

1 зад. Даден е триъгълник *ABC*, за който $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$. Нека $|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = 2, \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{3}$. Дадени са точките *F* и *D*, съответно от страните *AB* и *CB* на триъгълника, такива че: *AF*:*FB* = 1:3 и *CD*:*DB* = 1:3.

a) Да се изразят векторите $\overrightarrow{CF}$ и $\overrightarrow{AD}$ чрез $\vec{a}$ и $\vec{b}$;
b) Да се намерят дължините на векторите $\overrightarrow{CF}$ и $\overrightarrow{AD}$;
c) Да се намери косинусът на ъгъла между векторите $\overrightarrow{CF}$ и $\overrightarrow{AD}$.

2 зад. Даден е триъгълник *ABC*, за който $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$. Нека $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 3, \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \gamma$. Медианите AA_1 и BB_1 на триъгълника са взаимно перпендикулярни. Да се определи *cos* γ.

Упътване: Да се изразят векторите $\overrightarrow{AA_1}$ и $\overrightarrow{BB_1}$ чрез $\vec{a}$ и $\vec{b}$, и да се пресметне скаларното им произведение.

3 зад. Даден е триъгълник *ABC*, за който $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$. Нека $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = \sqrt{2}, \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{4}$. Отсечката *CH* е височина в триъгълника, т.$H \in AB$. Да се изрази вектора $\overrightarrow{CH}$ чрез $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

4 зад. Даден е тетраедър *OABC*, за който $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ и $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$. Нека $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 2, |\vec{c}| = 1$ и трите вектора са два по два перпендикулярни. Построена е височината *OH* на тетраедъра, т.$H \in (ABC)$ и $OH \perp (ABC)$. Да се изрази вектора $\overrightarrow{CH}$ чрез $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

5 зад. Спрямо ОКС *К = Oxy* са дадени точките: $A(2, -1), B(-1, 0)$ и $C(2, 3)$. Да се докаже, че трите точки образуват триъгълник. Да се намерят:

a) Координатите на медицентъра *M* на триъгълник *ABC* и разстоянието от т.*M* до върха *C*;
b) Координатите на петите на трите височини на триъгълника, спуснати от върховете *A*, *B* и *C*.

6 зад. Спрямо ОКС *К = Oxyz* са дадени точките: $A(1, -1, 2), B(2, 1, 1), C(1,1, 2)$ и $D(-3, 2, -1)$. Да се докаже, че четирите точки не лежат в една равнина. Да се намерят:

a) Да се намерят дължините на страните на триъгълник *ABC*;
b) Косинусите на ъглите на триъгълник *ABC*;
c) Координатите на медицентъра *G* на триъгълник ***ABD*** и дължината на вектора $\overrightarrow{CG}$;
d) Координатите на точката *H*: т.$H \in (ABC)$ и $DH \perp (ABC)$.

IV ЧАСТ: Векторно и смесено произведение на вектори

1 зад. Спрямо ОКС *К = Oxyz* са дадени векторите $\vec{a}(1, 0, 2), \vec{b}(2, -1, 3)$ и $\vec{c}(1, -1, 0)$. Да се намерят координатите на неизвестния вектор $\vec{x}$ от уравненията: $(\vec{a}\vec{b}\vec{x}) = 1, (\vec{b}\vec{c}\vec{x}) = 2, (\vec{c}\vec{a}\vec{x}) = 0$.

2 зад. Дадени са векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Нека $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 2, \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{2}$. Да се определи неизвестния вектор $\vec{p}$ от равенствата : $(\vec{a}\vec{p}) = -18, (\vec{b}\vec{p}) = 12, (\vec{a}\vec{b}\vec{p}) = -12$.

3 зад. Дадени са векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Нека $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$ и

$\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{3}, \sphericalangle(\vec{a}, \vec{c}) = \frac{\pi}{3}, \sphericalangle(\vec{c}, \vec{b}) = \frac{\pi}{3}$.

a) Да се пресметне смесеното произведение $(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$ и да се докаже, че трите вектора са линейно независими;

b) Нека *OABC* е тетраедър като: $\overrightarrow{OA} = (\vec{c} + \vec{b})$, $\overrightarrow{OB} = (\vec{c} + \vec{a})$ и $\overrightarrow{OC} = (\vec{a} + \vec{b})$. Да се намери обема на тетраедъра *OABC*.

4 зад. Дадени са векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Нека $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 1, \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{2\pi}{3}$. В триъгълника *OAB*

$\overrightarrow{OA} = (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{a}$, а $\overrightarrow{OB} = \vec{b} \times (\vec{a} \times \vec{b})$.

a) Да се намерят периметъра и лицето на триъгълника;

b) Ако т.*M* е медицентърът на триъгълник *OAB*, да се изрази вектора $\overrightarrow{OM}$ чрез $\vec{a}$ и $\vec{b}$, и да се пресметне дължината му.

5 зад. Дадени са векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$, като $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1, \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{3}$.

Нека $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = (\vec{a} \times \vec{b})$, $\overrightarrow{OC} = \vec{b} \times (\vec{a} \times \vec{b})$. Да се докаже, че векторите $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$ са линейно независими и да се намери обема на тетраедъра *OABC*.

6 зад. Спрямо ОКС *K = Oxyz* са дадени точките: $A(5, -2, 1), B(1, 1, -2), C(1,0,5)$и $D(1, 1,1)$.

a) Да се намери лицето на триъгълник *ABC*;

b) Да се намери обема на тетраедъра *ABCD*.

7 зад. Спрямо ОКС *K = Oxy* в равнината са дадени точките: $A(1, -1), B(-3, 2), C(5, 1)$. Да се намери лицето на триъгълник *ABC*.

ЗАДАЧИ ОТ ИЗПИТНИ ТЕМИ - I част

1 зад. Дадени са векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, за които $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 1, |\vec{c}| = 2$, $\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = \sphericalangle(\vec{a},\vec{c}) = \sphericalangle(\vec{c},\vec{b}) = \frac{\pi}{2}$. Нека $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ и $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$. Нека т.H е петата на височината през върха O на тетраедъра *OABC*. Да се изрази вектора $\overrightarrow{OH}$ като линейна комбинация на $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, и да се намери дължината му.

2 зад. Дадени са векторите $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$, за които $|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = 1, |\vec{c}| = 2$, $\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = \frac{\pi}{2}$, $\sphericalangle(\vec{c},\vec{b}) = \sphericalangle(\vec{a},\vec{c}) = \frac{2\pi}{3}$. Нека *OABC* е тетраедър, за който $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ и $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$.

a) Да се намери обема на тетраедъра *OABC*;

b) Нека точките *M*, *N* и *P* принадлежат съответно на отсечките *AB*, *BC* и *CA* като *AM:MB* = *BN:NC* = *CP:PA* = 1:2. Да се изразят векторите $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{NP}$ и $\overrightarrow{MP}$ като линейни комбинации на $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$. Да се пресметне $\cos\sphericalangle NMP$;

c) Нека точката *G* е медицентърът на ΔABC. Да се докаже, че т.*G* е медицентърът и на ΔMNP.

3 зад. Дадени са векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$, като $|\vec{a}| = |\vec{b}| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ и $\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = \frac{\pi}{2}$. Нека $\overrightarrow{OA} = 2\vec{a} - \vec{b}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{a} + \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{a} \times \vec{b}$.

a) Да се намери обема на тетраедъра *OABC*;

b) Ако точките A_1, B_1 и O_1 са средите на страните на триъгълник *OAB*, да се намерят обиколката и лицето на триъгълник $A_1B_1O_1$.

4 зад. Дадени са векторите $\overrightarrow{CA} = \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{a})$, $\overrightarrow{CB} = \vec{a} + \vec{b}$, $\overrightarrow{CD} = \vec{a} \times \vec{b}$, като $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$, $\angle(\vec{a},\vec{b}) = \frac{\pi}{3}$.

a) Нека точка *H* е петата на височината на Δ *ABC*, спусната от върха *A* към страната *BC*. Да се изрази $\overrightarrow{AH}$ като линейна комбинация на $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Да се намери дължината на $\overrightarrow{AH}$.

b) Да се намерят лицето на триъгълник *ABC* и обема на тетраедъра *ABCD*.

5 зад. Дадени са векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ като $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2, \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \alpha$.
$\overrightarrow{CA} = \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{a}), \overrightarrow{CB} = \vec{b}, \overrightarrow{CD} = \vec{a} \times \vec{b}$.

a) Нека точката *H* е петата на височината през върха *A* на триъгълник *ABC*. Да се изрази векторът $\overrightarrow{AH}$ като линейна комбинация на $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Да се намери $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$, ако $|\overrightarrow{AH}| = 1$.

b) При каква стойност на ъгъла α векторите $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CB}$ и $\overrightarrow{CD}$ са линейно независими?

c) При $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{6}$, да се намери обема на тетраедъра *ABCD*.

6 зад. Дадени са векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ като $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 3, \sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = \frac{\pi}{3}$. Даден е успоредника *ABCD*, за който $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$. Нека точката *M* е средата на страната *AB*, а точките *N*, *P* и *Q* са медицентровете съответно на ΔAMD, Δ *MCB* и ΔCDM.

a) Да се изразят векторите $\overrightarrow{NQ}, \overrightarrow{QP}$ и $\overrightarrow{PN}$ чрез $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и да се докаже, че правите *PN* и CD са успоредни;

b) Да се намерят лицето и обиколката на ΔNPQ;

c) Ако $\overrightarrow{AS} = \vec{a} \times \vec{b}$, да се намери обема на паралелепипеда с ръбове $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AS}$.

7 зад. Даден е тетраедър $OABC$, за който $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ и $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$. Точките M, N и P са медицентровете съответно на триъгълниците: AOB, BOC и AOC.

a) Да се изразят векторите $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{NP}$ и $\overrightarrow{PM}$ като линейни комбинации на $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$;

b) Да се докаже, че следните прави са две по две успоредни: MN и AC, PM и BC, NP и AB;

c) Ако $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$ и $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{3}$, да се намери периметъра на триъгълник MNP.

Задачи върху скаларно, векторно и смесено произведение на вектори.

1. В шестоъгълника $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ точките B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 и B_6 са среди съответно на страните $A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5, A_5A_6$ и A_6A_1. Докажете, че триъгълниците $B_1B_3B_5$ и $B_2B_4B_6$ имат общ медицентър.

2. Даден е успоредник $ABCD$, за който $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, точката $O = AC \cap BD$, а точките M и N са медицентровете съответно на $\triangle AOD$ и $\triangle AOB$.
    a. Да се изразят векторите $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{DB}$ чрез $\vec{a}$ и $\vec{b}$.
    b. Да се докаже, че векторите $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{DB}$ са колинеарни.

3. Дадени са векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и нека $\overrightarrow{d_1} = \overline{(\vec{a} \times \vec{b})} \times \vec{a}$ и $\overrightarrow{d_2} = b$. Да се докаже, че векторите $\overrightarrow{d_1}$ и $\overrightarrow{d_2}$ са колинеарни тогава и само тогава, когато a и b са ортогонални или колинеарни.

4. Нека a и b са вектори в пространството.
    a. Да се докаже, че векторите $a \times b$ и $((a \times b) \times b) \times b$ са колинеарни.
    b. Нека векторите a и b са единични и $\sphericalangle(a,b) = \dfrac{2\pi}{3}$, а точките O, P, Q, R са такива, че $\overrightarrow{OP} = (a \times b) \times b$, $\overrightarrow{OQ} = a \times b$, $\overrightarrow{OR} = b$. Да се намери обемът на тетраедъра $OPQR$

5. Дадени са векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, такива че $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 2$, $\measuredangle(\vec{a}, \vec{b}) = \measuredangle(\vec{b}, \vec{c}) = \dfrac{\pi}{3}$, $\measuredangle(\vec{a}, \vec{c}) = \dfrac{\pi}{2}$ и тройката $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ е положително ориентирана. Нека:
$$\overrightarrow{OA} = (\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{b} \times \vec{c}), \quad \overrightarrow{OB} = (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} + \vec{a}, \quad \overrightarrow{OC} = \vec{a} \times \vec{b}.$$
    a. Да се намери дължината на медианата през върха O в триъгълника OBC.
    b. Да се намери обема на тетраедъра $OABC$.

6. Дадени са векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, такива че $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$, $|\vec{c}| = 2$, $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \measuredangle(\vec{a}, \vec{c}) = \dfrac{\pi}{3}$, $\sphericalangle(\vec{b}, \vec{c}) = \dfrac{\pi}{2}$ и тройката $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ е положително ориентирана. Нека
$$\overrightarrow{OA} = (\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{b} \times \vec{c}), \quad \overrightarrow{OB} = (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{b}, \quad \overrightarrow{OC} = \vec{a} \times \vec{b}.$$
    a. Да се провери дали векторите $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OC}$ са колинеарни.
    b. Да се намери обема на паралелепипеда определен от векторите $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$.

7. В пространството са дадени векторите a и b, за които $|a|=2$, $|b|=1$, $\sphericalangle(a,b)=\dfrac{\pi}{3}$. Нека точките O, A, B, C са такива, че $\overrightarrow{OA}=(b\times a)\times b$, $\overrightarrow{OB}=2a+b$, $\overrightarrow{OC}=b\times a$.
   a. Да се докаже, че векторите $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$ са некомпланарни.
   b. Да се намери обемът на паралелепипеда с ръбове $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$.

8. В пространството са дадени векторите a и b, за които $|a|=1$, $|b|=2$, $\sphericalangle(a,b)=\dfrac{2\pi}{3}$. Нека точките O, A, B, C са такива, че $\overrightarrow{OA}=(a\times b)\times a$, $\overrightarrow{OB}=2b-a$, $\overrightarrow{OC}=a\times b$.
   a. Да се докаже, че векторите $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$ са некомпланарни.
   b. Да се намери обемът на паралелепипеда с ръбове $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$.

9. В пространството са дадени векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и точките A, B, C и O, за които

$$\left|\vec{a}\right|=\sqrt{2},\quad \left|\vec{b}\right|=2,\quad \sphericalangle\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\frac{\pi}{4},\qquad \overrightarrow{OA}=\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{b},\quad \overrightarrow{OB}=\vec{a}\times\vec{b},\quad \overrightarrow{OC}=\vec{b}+\vec{a}.\$$$

   a. Нека точката H е петата на височината през върха O на $\triangle OAC$. Да се изрази векторът $\overrightarrow{OH}$ като линейна комбинация на $\vec{a}$ и $\vec{b}$.
   b. Да се намери лицето на $\triangle OAC$.
   c. Да се намери обемът на тетраедъра $OABC$

10. Спрямо афинна координатна система в пространството точките A, B, C, D имат координати $A(1,-1,2)$ $B(2,1,1)$, $C(1,1,2)$, $D(-3,2,-1)$.
   a. Да се докаже, че четирите точки не лежат в една равнина.
   b. Ако координатната система е ортонормирана, да се намери лицето на триъгълника ABC

11. Нека a и b са два неколинеарни единични вектора и точките O, A, B, C са такива, че $\overrightarrow{OA}=b$, $\overrightarrow{OB}=(a\times b)\times(a+b)$, $\overrightarrow{OC}=[(a\times b)\times a]\times[(a\times b)\times b]$.
   a. Да се намери ъгълът $\sphericalangle(a,b)$ така, че векторът a да бъде колинеарен с медианата през върха B на триъгълника OAB.
   b. Ако $\sphericalangle(a,b)=\dfrac{\pi}{2}$, да се намери обемът на тетраедъра $OABC$.

12. Спрямо ОКС в пространството са дадени точките $A(0,2,4)$, $B(1,0,2)$, $C(-4,2,1)$, $D(-3,0,-3)$
   a. Да се намерят координатите на петата H на височината през върха C в $\triangle ABC$.
   b. Да се намери обема на тетраедъра $ABCD$

13. Спрямо афинна координатна система в пространството са дадени точките

$$A(0,2,-2),\quad B(-1,3,0),\quad C(-2,0,-2),\quad D(-4,3,3).$$

   a. Да се докаже, че точките A, B, C, D лежат в една равнина.
   b. Да се докаже, че правите AC и BD се пресичат в една точка.