

Проект по Небесна Механика

Боян Дончев

3ти курс ИС

ФН: 72029

10.06.2023г

Задача 1

Пресметнете координатите и скоростите на планетите в деня, в който сте родени.

В задачата на Кеплер орбитата на планетата зависи от 6 елемента, следователно необходимите параметри са:

- **a** - дължина на голямата полуос
- **e** - ексцентрицитет
- **i** - наклонение на плоскостта на орбитата
- θ – дължина на възела
- **g + θ** - дължина на перихелия
- **l** - средна аномалия, (**l**₀ е средната аномалия в момента **t**₀)

Първите шест от тези параметри са константи, а последният - средната аномалия **l** е линейна функция на времето **t**.

Съществува и допълнителен елемент, който ни е необходим - ексцентричната аномалия **u**. Затова параметърът **u** е уравнението на Кеплер

$$l = u - e \cdot \sin u$$

Сплеснатостта на елипсата се характеризира с ексцентрицитета **e**:

$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \in [0; 1)$$

Където **b** - дължина на малката полуос.

Връзката на елиптичните елементи с декартовите координати в R^3

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(i) & -\sin(i) \\ 0 & \sin(i) & \cos(i) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos(g) & -\sin(g) & 0 \\ \sin(g) & \cos(g) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Кеплеровите елементи и техните стойности са взети от следния сайт: https://ssd.jpl.nasa.gov/txt/aprx_pos_planets.pdf

	a [au, au/cty]	e [, /cty]	I [deg, deg/cty]	L [deg, deg/cty]	ϖ [deg, deg/cty]	Ω [deg, deg/cty]
Mercury	0.38709927 0.00000037	0.20563593 0.00001906	7.00497902 -0.00594749	252.25032350 149472.67411175	77.45779628 0.16047689	48.33076593 -0.12534081
Venus	0.72333566 0.00000390	0.00677672 -0.00004107	3.39467605 -0.00078890	181.97909950 58517.81538729	131.60246718 0.00268329	76.67984255 -0.27769418
EM Bary	1.00000261 0.00000562	0.01671123 -0.00004392	-0.00001531 -0.01294668	100.46457166 35999.37244981	102.93768193 0.32327364	0.0 0.0
Mars	1.52371034 0.00001847	0.09339410 0.00007882	1.84969142 -0.00813131	-4.55343205 19140.30268499	-23.94362959 0.44441088	49.55953891 -0.29257343
Jupiter	5.20288700 -0.00011607	0.04838624 -0.00013253	1.30439695 -0.00183714	34.39644051 3034.74612775	14.72847983 0.21252668	100.47390909 0.20469106
Saturn	9.53667594 -0.00125060	0.05386179 -0.00050991	2.48599187 0.00193609	49.95424423 1222.49362201	92.59887831 -0.41897216	113.66242448 -0.28867794
Uranus	19.18916464 -0.00196176	0.04725744 -0.00004397	0.77263783 -0.00242939	313.23810451 428.48202785	170.95427630 0.40805281	74.01692503 0.04240589
Neptune	30.06992276 0.00026291	0.00859048 0.00005105	1.77004347 0.00035372	-55.12002969 218.45945325	44.96476227 -0.32241464	131.78422574 -0.00508664
Pluto	39.48211675 -0.00031596	0.24882730 0.00005170	17.14001206 0.00004818	238.92903833 145.20780515	224.06891629 -0.04062942	110.30393684 -0.01183482

Следва да направим промяна на градусите на θ , $g + \theta$ в Радиани ($\times \pi$) 180

Също така, обръщаме i в градуси ($\times \pi$) . 180

Стойностите на μ (маса на планетата/маса на слънцето) за планетите са следните:

	μ
Меркурий	1/6023600
Венера	1/408523
Земя	1/328900,5
Марс	1/3098708
Юпитер	1/1047,34
Сатурн	1/3497,8
Уран	1/22902,9
Нептун	1/19402
Плутон	1/135000000

$$\gamma = 1 + \mu$$

$$n = \sqrt{\frac{\gamma}{a^3}}$$

Величината n наричаме средно движение.

Средното движение е моментът на преминаване през перихелия на планета (т.е. начало на епоха).

Преди малко говорихме за уравнението на Кеплер, сега ще го дефинираме. Уравнение на Кеплер наричаме връзката между средната и ексцентричната аномалия.

$l = u - e \cdot \sin(u)$ - уравнение на Кеплер.

Въвеждаме t - времето от рождената дата до 2000г. в години.

Моята рождена дата е **23^{ти} юни 2002г.**

\Rightarrow брой дни $(01.01.2000 - 23.06.2002) = 905$ дни

$\Rightarrow t = 905 / 365.25$

$\Rightarrow t = 2.4777549624 \Rightarrow t = t * 2\pi \Rightarrow t = 15.5681935745$

От решението на задачата на Кеплер в декартови координати:

$$l = \sqrt[3]{a} (T - T_0)$$

$$l = n[t - T_0], \quad l_0 = u - e \sin(u)$$

$$u = l + e \sin(l + e \sin(l + e \sin(l)))$$

$$r = Q a \left(\cos(u) - e; \sin(u) \sqrt{1 - e^2}; 0 \right)$$

$$v = Q \frac{\left(-\sin(u); \cos(u) \sqrt{1 - e^2}; 0 \right) a n}{1 - e \cos(u)}$$

Където Q е от Основна формула на сферичната тригонометрия (Теорема. Всяка матрица $Q \in SO(3, \mathbb{R})$ може да се представи аналитично във вида:

$$Q = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(i) & -\sin(i) \\ 0 & \sin(i) & \cos(i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(g) & -\sin(g) & 0 \\ \sin(g) & \cos(g) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

Ротация на ъгъл θ
около Oz

Ротация на ъгъл i
около Ox

Ротация на ъгъл g
около Oy

$$= \begin{pmatrix} \cos(\theta)\cos(g) - \sin(\theta)\sin(g)\cos(i) & -\cos(\theta)\sin(g) - \sin(\theta)\cos(g)\cos(i) & \sin(\theta)\sin(i) \\ \sin(\theta)\cos(g) + \cos(\theta)\sin(g)\cos(i) & -\sin(\theta)\sin(g) + \cos(\theta)\cos(g)\cos(i) & -\cos(\theta)\sin(i) \\ \sin(g)\sin(i) & \cos(g)\sin(i) & \cos(i) \end{pmatrix}$$

Където $\theta, g \in [0, 2\pi)$ и $i \in [0, \pi]$

Гореописаният алгоритъм се повтаря за всяка планета.

	R - разположение			V - скорост			R	V
Меркурий	0.34743974 834576075	-0.1702732 3635695188	-0.0457927 7664626934	0.40103217 14667302	1.54286469 68212838	0.08921657 279092124	0.38962075 42508626	1.59662702 9744051
Венера	-0.6998057 422310966	-0.1690421 112218607	0.03807606 4651612854	1.14787386 87378551	-1.1478738 687378551	-0.0312184 5956890345	0.72093903 9673476	1.17942240 05586595
Земя	0.04933884 0875216367	-1.0145423 708790275	0	0.98335307 88848022	0.04499797 168791775	0	1.01574137 62999656	0.98438208 80167653
Марс	-0.7410077 0048353	1.44825482 60283514	0.04853307 4132086636	-0.6935914 440937903	-0.3017697 1442100287	0.01072184 7720993886	1.62754106 32530936	0.75647142 03989436
Юпитер	-2.2167994 695518556	4.74245134 1865624	0.02999764 7149530043	-0.4030806 7854217405	-0.1655841 7398073338	0.00970761 5174014441	5.23506871 7505335	0.43587428 21953
Сатурн	1.74269626 63460102	8.87129364 0805169	-0.2237892 277177193	-0.3351506 8234631007	0.06198532 680378533	0.01224262 8459314286	9.04361226 2617689	0.34105431 029054906
Уран	16.6144229 044257	-11.131021 967165045	-0.2565219 7190544473	0.12550422 42153253	0.17926546 019686068	-0.0009605 8748128868	20.0001125 49750476	0.21883404 269855297
Нептун	19.0905013 88679932	-23.259194 292224482	0.03903258 552170744	0.13987791 100796224	0.11667701 688848699	-0.0056256 2628500605	30.0905115 59914876	0.18223886 50344548
Плутон	-7.1771738 8821646	-29.238849 588176713	5.20484987 6302495	0.18074338 32888469	-0.0741377 8158684353	-0.0443452 5896115574	30.5534386 3620859	0.20032744 00915898

Задача 2: Пресметнете елементите на Делоне и Поанкаре (от първи и втори вид) в деня, в който сте родени

Елементите на Делоне – $L, G, \Theta, l, g, \theta$ се изразяват чрез орбиталните елементи:

- a - дължина на голямата полуос,
- e - ексцентрицитет,
- i - наклонение на плоскостта на орбитата,
- l - средна аномалия, (l_0 е средната аномалия в момента t_0),
- $g + \theta$ - дължина на перихелия,
- θ - дължина на възела.

Както следва:

$(l, L), (G, g)$ и (Θ, θ) са спрегнати канонични променливи,

$$L = \mu \sqrt{\gamma a}$$

$$G = \mu \sqrt{\gamma a (1 - e^2)} \Rightarrow G = L \sqrt{1 - e^2}$$

$$\Theta = \mu \sqrt{\gamma a (1 - e^2)} \cos(i) \Rightarrow \Theta = G \cos(i)$$

Като при това l, g и θ съвпадат и в двата случая.

Елементите на Делоне – $L, G, \Theta, l, g, \theta$ са константи с хамилтони:

$$\hat{H} = - \frac{\mu^3 \gamma^2}{2L^2}$$

Обръщаме θ в **радиани** ($\cdot \frac{\pi}{180}$), а i в **градуси** ($\cdot \frac{\pi}{180}$)

T_0 е моментът на преминаване през перихелия на планета (начало на епоха).

$$l = \sqrt{\gamma} a^{-3/2} (t - T_0)$$

$l = u - e \sin(u)$ - уравнение на Кеплер.

$$\Rightarrow u = l + e \sin(l + e \sin(l + e \sin(l)))$$

$$n = \sqrt{\frac{\gamma}{a^3}}$$

Използваме t от предната задача $\Rightarrow t = 2.4777549624 \cdot 2\pi$

$$l = n(t - T_0)$$

И чрез $\lambda = l + g + \theta$ (дължина на епохата) ще можем да изразим елементите от двете системи на Поанкаре, и по-точно:

Първа система от шест елемента, характеризираща орбитите на планетите:

$$\begin{pmatrix} L & L - G & G - \Theta \\ l + g + \theta & -g - \theta & -\theta \end{pmatrix}$$

И втората:

$$\begin{pmatrix} L & \xi := \sqrt{2(L - G)} \cos(g + \theta) & p := \sqrt{2(G - \Theta)} \cos(\theta) \\ \lambda := l + g + \theta & \eta := -\sqrt{2(L - G)} \sin(g + \theta) & q := -\sqrt{2(G - \Theta)} \sin(\theta) \end{pmatrix}$$

Елементи на **Делоне**:

	L	G	Θ	l	g	θ	H
Меркурий	1.0327599 645358645 e-7	1.0108261 806348756 e-7	1.0032830 32927222e -7	67.716084 63836081	0.5083620 512283883	0.8435176 274888594	-2.1448799 365340414 e-7
Венера	0.0000020 813885814 792136	0.0000020 813511161 47556	0.0000020 777004949 727745	26.203155 428867678	0.9585871 850728457	1.3383010 17136732	-0.0000016 928413456 868637
Земя	0.0000030 404378230 359784	0.0000030 400486220 841744	0.0000030 400486220 841744	15.525031 58214117	1.7965895 72125403	0	-0.0000015 202212225 782584
Марс	3.9826245 669136e-7	3.9653643 049242864 e-7	3.9632996 666981347 e-7	8.6214328 18505946	-1.2828519 06800872	0.8649677 239958697	-1.0594722 542693761 e-7
Юпитер	0.0021787 365381276 294	0.0021762 251862628 65	0.0021756 615940182 857	1.6554189 89774784	-1.4965325 671225378	1.7535846 593562625	-0.0000918 599981837 2253
Сатурн	0.0008829 786852306 609	0.0008817 376695511 193	0.0008809 084895075 557	-0.2156031 022478411 6	-0.3676361 536400856 7	1.9837761 34401795	-0.0000149 945326070 74682
Уран	0.0001912 692590972 8544	0.0001910 578854049 5485	0.0001910 405426640 2633	2.6685322 587158864	1.6918872 702982632	1.2918228 99156123	-0.0000011 377481726 18885
Нептун	0.0002826 338562144 259	0.0002826 248117863 139	0.0002824 899630069 7725	-1.6523762 527166312	-1.5152948 565814768	2.3000647 01448207	-8.5709093 62150861e -7
Плутон	4.6544225 19979323e -8	4.5090185 10356052e -8	4.3087617 39389745e -8	0.3221271 046314455	1.9855738 235313491	1.9251505 24827305	-9.3807399 09676677e -11

Първа система на Поанкаре

	L	L-G	G- θ	l+g+ θ	-g - θ	- θ
Меркурий	1.032759964 5358645e-7	2.193378390 0988863e-9	7.543147707 653683e-10	69.06796431 707807	-1.35187967 87172476	-0.84351762 74888594
Венера	0.000002081 3885814792 136	3.746533165 7717465e-11	3.650621174 781423e-9	28.50004363 1077258	-2.29688820 22095776	-1.33830101 7136732
Земя	0.000003040 4378230359 784	3.892009518 039632e-10	0	17.32162115 4266573	-1.79658957 2125403	0
Марс	3.982624566 9136e-7	1.726026198 931339e-9	2.064638226 151652e-10	8.203548635 700944	0.417884182 80500217	-0.86496772 39958697
Юпитер	0.002178736 5381276294	0.000002511 3518647645 015	5.635922445 791988e-7	1.912471082 0085087	-0.25705209 22337247	-1.75358465 93562625
Сатурн	0.000882978 6852306609	0.000001241 0156795416 736	8.291800435 635422e-7	1.400536878 513868	-1.61613998 07617094	-1.98377613 4401795
Уран	0.000191269 2590972854 4	2.113736923 305945e-7	1.734274092 8516943e-8	5.652242428 170273	-2.98371016 9454386	-1.29182289 9156123
Нептун	0.000282633 8562144259	9.044428111 993057e-9	1.348487793 366329e-7	-0.86760640 78499008	-0.78476984 48667302	-2.30006470 1448207
Плутон	4.654422519 979323e-8	1.454040096 232704e-9	2.002567709 6630753e-9	4.232851452 9901	-3.91072434 8358654	-1.92515052 4827305

Втора система на Поанкаре

	L	ε	P	λ	η	q
Меркурий	1.032759964 5358645e-7	0.000014383 8822296685 47	0.000025823 0777890982 76	69.06796431 707807	-0.00006465 1842295489 14	-0.00002901 3758719423 377
Венера	0.000002081 3885814792 136	-0.00000574 7337200884 6694	0.000019687 6073879328 4	28.50004363 1077258	-0.00000647 2926572637 921	-0.00008314 8304041041 38
Земя	0.000003040 4378230359 784	-0.00000624 6206757936 5206	0	17.32162115 4266573	-0.00002719 1667928706 296	0
Марс	3.982624566 9136e-7	0.000053698 3519283223 6	0.000013181 2692459508 26	8.203548635 700944	0.000023844 0642098765 66	-0.00001546 5503105171 89
Юпитер	0.002178736 5381276294	0.002167503 240662887	-0.00019298 5581804644 6	1.912471082 0085087	-0.00056976 6119776249 8	-0.00104400 2420674358 4
Сатурн	0.000882978 6852306609	-0.00007141 2019453404 22	-0.00051683 5450914396 3	1.400536878 513868	-0.00157382 7081531174 5	-0.00117950 8882461339 1
Уран	0.000191269 2590972854 4	-0.00064210 3480197817 8	0.000051284 8124766563 1	5.652242428 170273	-0.00010222 7713361101 47	-0.00017904 0078938398 83
Нептун	0.000282633 8562144259	0.000095161 9339471765 3	-0.00034603 8275105881 2	-0.86760640 78499008	-0.00009504 2425008094 83	-0.00038724 0326974105 74
Плутон	4.654422519 979323e-8	-0.00003874 7076631630 085	-0.00002195 9325760991 11	4.232851452 9901	0.000037506 5893539787 76	-0.00005935 4219996970 92

Код:

Задача 1

```
function norm(vector) {
  let sumOfSquares = 0;
  for (let i = 0; i < vector.length; i++) {
    sumOfSquares += Math.pow(vector[i], 2);
  }
  return Math.sqrt(sumOfSquares);
}
```

```
function solvePlanet(a, e, i, L, w, Omega, miu, t) {
  let tita = Omega * Math.PI / 180;
  let g = (w - Omega) * Math.PI / 180;
  i = i * Math.PI / 180;
```

```

let Tita = [
  [Math.cos(tita), -Math.sin(tita), 0],
  [Math.sin(tita), Math.cos(tita), 0],
  [0, 0, 1]
];

let I = [
  [1, 0, 0],
  [0, Math.cos(i), -Math.sin(i)],
  [0, Math.sin(i), Math.cos(i)]
];

let G = [
  [Math.cos(g), -Math.sin(g), 0],
  [Math.sin(g), Math.cos(g), 0],
  [0, 0, 1]
];

let Q = multiplyMatrices(multiplyMatrices(Tita, I), G);

let gama = 1 + miu;
let n = Math.sqrt(gama / Math.pow(a, 3));
let to = ((w - L) / n) * Math.PI / 180;
let l = n * (t * 2 * Math.PI - to);
let u = l + e * Math.sin(l + e * Math.sin(l + e * Math.sin(l)));

let r = multiplyMatrixVector(Q, [a * (Math.cos(u) - e), a * Math.sin(u) *
Math.sqrt(1 - Math.pow(e, 2)), 0]);
let v = multiplyMatrixVector(Q, [-Math.sin(u), Math.cos(u) * Math.sqrt(1 -
Math.pow(e, 2)), 0]);
v = multiplyVectorScalar(v, a * n / (1 - e * Math.cos(u)));

console.log('V =', v);
console.log('R =', r);
console.log('Norm V =', norm(v));
console.log('Norm R =', norm(r));
}

function multiplyMatrices(m1, m2) {
  let result = [];
  for (let i = 0; i < m1.length; i++) {
    result[i] = [];
    for (let j = 0; j < m2[0].length; j++) {
      let sum = 0;
      for (let k = 0; k < m1[0].length; k++) {
        sum += m1[i][k] * m2[k][j];
      }
      result[i][j] = sum;
    }
  }
  return result;
}

function multiplyMatrixVector(matrix, vector) {
  let result = [];
  for (let i = 0; i < matrix.length; i++) {
    let sum = 0;
    for (let j = 0; j < vector.length; j++) {
      sum += matrix[i][j] * vector[j];
    }
    result.push(sum);
  }
  return result;
}

```

```

function multiplyVectorScalar(vector, scalar) {
  let result = [];
  for (let i = 0; i < vector.length; i++) {
    result.push(vector[i] * scalar);
  }
  return result;
}

let nasaData = [
  [0.387, 0.205, 7.004, 252.250, 77.457, 48.330, 1 / 6023600],
  [0.723, 0.006, 3.394, 181.979, 131.602, 76.679, 1 / 408523],
  [1, 0.016, 0, 100.464, 102.937, 0, 1 / 328900.5],
  [1.523, 0.093, 1.849, -4.553, -23.943, 49.559, 1 / 3098708],
  [5.202, 0.048, 1.304, 34.396, 14.728, 100.473, 1 / 1047.34],
  [9.536, 0.053, 2.485, 49.954, 92.598, 113.662, 1 / 3497.8],
  [19.189, 0.047, 0.772, 313.238, 170.954, 74.016, 1 / 22902.9],
  [30.069, 0.008, 1.770, -55.120, 44.964, 131.784, 1 / 19402],
  [39.482, 0.248, 17.140, 238.929, 224.068, 110.303, 1 / 135000000]
];

let time = 2.4777549624;

for (let i = 0; i < 9; i++) {
  console.log('Planet №', i + 1);
  solvePlanet(
    nasaData[i][0], nasaData[i][1], nasaData[i][2],
    nasaData[i][3], nasaData[i][4], nasaData[i][5],
    nasaData[i][6], time
  );
}

```

Задача 2

```

function findElements(a, e, i, L, w, Omega, myu, t) {
  i = i * Math.PI / 180;
  let n = Math.sqrt(1 / Math.pow(a, 3));
  let to = ((w - L) / n) * Math.PI / 180;

  let gamma = 1 + myu;
  let capL = myu * Math.sqrt(gamma * a);
  let capG = capL * Math.sqrt(1 - Math.pow(e, 2));
  let capTheta = capG * Math.cos(i);

  let l = n * (t * 2 * Math.PI - to);
  let g = (w - Omega) * Math.PI / 180;
  let theta = Omega * Math.PI / 180;
  let H = -myu * gamma / (2 * a);

  let FirstPoincare11 = capL;
  let FirstPoincare12 = capL - capG;
  let FirstPoincare13 = capG - capTheta;
  let FirstPoincare21 = l + g + theta;
  let FirstPoincare22 = -g - theta;
  let FirstPoincare23 = -theta;

  // L
  let SecondPoincare11 = FirstPoincare11;

  // 銀 - this is epsilon
  let SecondPoincare12 = Math.sqrt(2 * (capL - capG)) * Math.cos(g + theta);
}

```

```

// p
let SecondPoincare13 = Math.sqrt(2 * (capG - capTheta)) * Math.cos(theta);

//  $\lambda = l + g + \theta$  (this is lower theta)
let SecondPoincare21 = FirstPoincare21;

//  $\eta$ 
let SecondPoincare22 = -Math.sqrt(2 * (capL - capG)) * Math.sin(g + theta);

// q
let SecondPoincare23 = -Math.sqrt(2 * (capG - capTheta)) * Math.sin(theta);

console.log({capL, capG, capTheta, l, g, theta, H, FirstPoincare11,
FirstPoincare12, FirstPoincare13, FirstPoincare21, FirstPoincare22,
FirstPoincare23, SecondPoincare11, SecondPoincare12, SecondPoincare13,
SecondPoincare21, SecondPoincare22, SecondPoincare23})
}

let nasaData = [
  [0.387, 0.205, 7.004, 252.250, 77.457, 48.330, 1 / 6023600],
  [0.723, 0.006, 3.394, 181.979, 131.602, 76.679, 1 / 408523],
  [1, 0.016, 0, 100.464, 102.937, 0, 1 / 328900.5],
  [1.523, 0.093, 1.849, -4.553, -23.943, 49.559, 1 / 3098708],
  [5.202, 0.048, 1.304, 34.396, 14.728, 100.473, 1 / 1047.34],
  [9.536, 0.053, 2.485, 49.954, 92.598, 113.662, 1 / 3497.8],
  [19.189, 0.047, 0.772, 313.238, 170.954, 74.016, 1 / 22902.9],
  [30.069, 0.008, 1.770, -55.120, 44.964, 131.784, 1 / 19402],
  [39.482, 0.248, 17.140, 238.929, 224.068, 110.303, 1 / 135000000]
];

let time = 2.4777549624;

for (let i = 0; i < 9; i++) {
  console.log('Planet  $M_i$ ', i + 1);
  findElements(
    nasaData[i][0], nasaData[i][1], nasaData[i][2],
    nasaData[i][3], nasaData[i][4], nasaData[i][5],
    nasaData[i][6], time
  );
}

```