Част IV

Два вектора u и v в геометричното пространство са колинеарни тогава и само тогава, когато u x v = 0

***

Ако спрямо афинна координатна система K и n-мерното афинно пространство A точките P, Q ∈ A имат координатни вектори съответно x, y ∈ R^n, то координатния вектор спрямо K на вектора PQ е y – x.

***

Нека K = Oe1…en и K' = O'e1'…en' са афинни координатни системи в n-мерното афинно пространство A, координатният вектор на O' спрямо K е s, а матрицата на прехода от базиса e = (e1,…,en) към базика e' = (e1',…,en') е T. Кое от равенствата

$$x = s + Tx' \text{ и } x' = -T^{-1}s + T^{-1}x$$

е изпълнено за координатните вектори x спрямо K и x' спрямо K' на произволна точка P∈ A?

A) Само първото
B) Само второто
C) И двете
D) Нито едно от двете

***

Нека Ax = b е съвместима линейна система с n неизвестни и нека рангът на A е r. Тогава афинното подпространство на R^n, състоящо се от решенията на системата има размер:

A) r
B) n – r

***

Нека спрямо афинна координатна система K = Oxyz в геометричното пространство двете различни точки P_0 и P_1 имат координати $P_0(x_0, y_0, z_0)$, $P_1(x_1, y_1, z_1)$. Коя от двете тройки параметрични уравнения:

$$\begin{cases} x = (1-\lambda)x_0 + \lambda x_1 \\ y = (1-\lambda)y_0 + \lambda y_1, \quad \lambda \in R \\ z = (1-\lambda)z_0 + \lambda z_1 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = \lambda x_0 + (1-\lambda)x_1 \\ y = \lambda y_0 + (1-\lambda)y_1, \quad \lambda \in R \\ z = \lambda z_0 + (1-\lambda)z_1 \end{cases}$$

Задава правата P_0P_1?

A) Само първата
B) Само втората
C) И двете
D) Нито една от двете

***

Нека K е афинна координатна система в n-мерното афинно пространство A, S е някакво множество и f, g : R^n -> S. Нека подмножеството B на A има спрямо K уравнение B:f(x1,…,xn) = g(x1,…,xn). Кое то следните две твърдения е вярно?

Ако P(x1,…,xn) ∈ B, то f(x1,…,xn) = g(x1,…,xn).
Ако f(x1,…,xn) = g(x1,…,xn), то P(x1,…,xn) ∈ B.

A) Само първото
B) Само второто
C) И двете
D) Нито едно от двете

***

Да се провери!: Нека спрямо афинна координатна система K = Oxy в геометричната равнина правите l1, l2 имат уравнения $l_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $l_2:A_2x + B_2y + C_2 = 0$. Тогава l_1 и l_2 са пресекателни тогава и само тогава, когата:

A) Рангът на матрицата $\begin{pmatrix} A1 & B1 \\ A2 & B2 \end{pmatrix}$ е 2
B) Рангът на матрицата $\begin{pmatrix} A1 & B1 & C1 \\ A2 & B2 & C2 \end{pmatrix}$ е 2

***

Вярно ли е, че два свързани вектора са равни тогава и само тогава, когато дължините им са равни? – не – ако отсечките са еднакви и лъчите - еднопосочни

***

Три вектора в геометричното пространство са компланарни тогава и само тогава когато са линейно зависими.

***

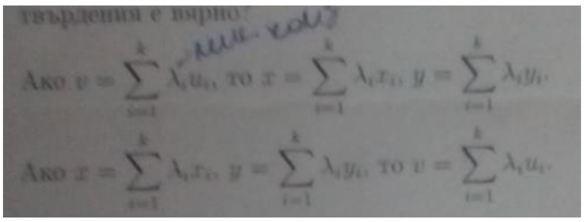
Спрямо афинна координатна система в геометричната равнина векторите u и v имат координати u(x1, x2), v(y1, y2). Тогава u и v са колинеарни ⇔ $det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}$ е равна на 0.
(допълнение: и матрицата е строго по-малка от 2)

***

Всеки четири вектора в пространството са линейно зависими.

***

Не съм сигурна!!: Нека спрямо афинна координатна система K в равнината векторите u1,…,uk и v имат координати ui(xi, yi), i=1,…,k, v(x, y), а λ1,…, λk ∈ R . Кое от следните две твърдения е вярно?


твърдения е вярно?

Ако $v = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i$, то $x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i$, $y = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i y_i$.

Ако $x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i$, $y = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i y_i$, то $v = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i$.

И двете дали не е нито едно от двете – виж 2 стр.

***

Спрямо положително ориентирана ортогонална координатна система K в пространството векторите u и v имат координати u(x_1, x_2, x_3) и v(y_1, y_2, y_3). Тогава втората координата на u x v спрямо K е:

A) $x_1y_3 - x_3y_1$
B) $x_3y_1 - x_1y_3$

***

За смесеното произведение на векторите u, v, w е в сила <u, v, w> = -<w, v, u>

***

Няка спрямо афинна координатна система K = Oxyz в пространстовот трите неколинеарни точки P0, P1, P2 имат координати Pi(xi, yi, zi), i=0,1,2. Кое от двете тройки параметрични уравнение

$$\begin{cases} x = x_1 + \lambda(x_1 - x_0) + \mu(x_2 - x_0) \\ y = y_1 + \lambda(y_1 - y_0) + \mu(y_2 - y_0) \\ z = z_1 + \lambda(z_1 - z_0) + \mu(z_2 - z_0) \end{cases} , \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad \text{и}$$

$$\begin{cases} x = x_2 + \lambda(x_1 - x_0) + \mu(x_2 - x_0) \\ y = y_2 + \lambda(y_1 - y_0) + \mu(y_2 - y_0) \\ z = z_2 + \lambda(z_1 - z_0) + \mu(z_2 - z_0) \end{cases} , \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Задава равнината, определена от P0, P1 и P2? Нито една от двете – в началото трябва да е с индекс 0 – x0 + …, y0 + …, z0 + … (39 стр)

***

Да се провери!: Равнините π и ρ, които спрямо афинна координатна система K = Oxyz в пространството имат уравнения $\pi: 236x + 678y - 21 = 0$ и $\rho: 310x + 542y - 86 = 0$,

A) съвпадат – кратни коорд.
B) са успоредни – различават се само по посл. Коеф.
C) се пресичат – като се сложат в система образуват права

***

Да се провери!: По колко начина може да се зададе права в пространството чрез двойка уравнения спрямо дадена афинна координатна система? – безбройно много

***

Нека спрямо афинна координатна система K = Oxyz в простр. 3-те неколинеарни точки P0, P1, P2 имат координати P: (xi, yi, zi), i=0,1,2. Кое от следните уравнения е общо уравнение на равнината, определена от P0, P1, P2?

A) $\begin{vmatrix} x & x_0 & x_1 & x_2 \\ y & y_0 & y_1 & y_2 \\ z & z_0 & z_1 & z_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$

B) $\begin{vmatrix} x & x_0 & x_1 & x_2 \\ y & y_0 & y_1 & y_2 \\ z & z_0 & z_1 & z_2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ (стр 46)

Съществуват ли т.А и т.В, такива че $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BA}$ са представители на един и същи свободен вектор?

A) Не
B) Да – ако А съвпада с В

***

Кое от следните две твърдения е вярно във всяко афинно пространство?
Ако P, Q, R, S са точки, то $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS}$ тогава и само тогава, когато $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{QS}$.
Ако P, Q, R, S са точки и $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS}$, то $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{QS}$.

И двете са верни

***

Нека (e1, e2, e3) е базис на линейното пространство V3 на векторите в геометричното пространство. Тогава базисите (e1, e2, e3) и (-e1, -e2, -e3) на V3 са противоположвжно ориентирани.

***

Да се провери!: Ако $\overrightarrow{OA} = u, \overrightarrow{OB} = v, \lambda \in \mathbb{R}$ и $v = \lambda u$, то е вярно, че $|OB|=|\lambda|.|OA|$

***

Всяка права в равнината спряко афинната координатна система K = Oxyz има уравнение Ax + By + X = 0, където (A,B) ≠ 0

***

Дадена е афинна координатна система K = Oxyz и 2 прави

l1 : A1x + B1y + C1 = 0, l2: A2x + B2y + C2 = 0. Тогава l1 ∩ l2, когато $r\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix} = 2$

***

Дадена е афинна координатна система K = Oxy. Нека N(A, B) е номален вектор за правата e. Кога N'(-A, -B) също е нормален за e? – в ОКС

***

За всеки два вектора u и v в геометричното пространство е в сила:

A) u x v = v x u -> не се сменя знака ми размяна на векторно произведение <u,v> = <v,u>
B) u x v = -v x u

***

Нека K = Oe1…en и K' = O'e1'…en' са афинни координатни системи в n-мерното афинно пространство A, координатният вектор на O' спрямо K е s, а матрицата на прехода от базисът e = (e1,…,en) към базиса e' = (e1',…,en') е T. Нека координатните вектори на P ∈ A спрямо K и K' са съответно x, x' ∈ R^n. Тогава:

A) x = s + Tx'
B) x' = s + Tx -> това ще е вярно ако е $x' = -T^{-1}s + T^{-1}x$

***

Нека V е линейно подпространство на евклидовото линейно пространство U. Тогава:

A) $V \cap V^{\perp} = \emptyset$, би трябвало да е това, защото скаларното произведение е > 0
B) $V \cap V^{\perp} = \{0\}$

***

Нека K е афинна координатна система в n-мерното евклидово афинно пространство A и спрямо нея точките P и Q имат координати P(x1,...,xn), Q(y1,...,yn). Формулата за разстоянието $|PQ| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i - x_i)^2}$

A) При произволна афинна координатна система K
B) Само когато K е ортономирана

***

Част II и III

Смесено произведение – Смесено произведение на векторите u, v, w се нарича числото <u, v, w> = <uxv, w> ∈ R (тоест векториното произведение на uxv, умножено скаларно с w)

***

Спрямо афинна координатна система в геометричната равнина правата l има общо уравнение Ax + By + C = 0, а точките P0 и P1 имат координати P0(x0, y0) и P1(x1, y1). Напишете необходимото и достатъчно условие чрез координатите на двете точки за това те да са от една и съща отворена полуравнина относно l.

L(x0, y0).L(x1, y1) > 0

***

Напишете неравенството на триъгълника в евклидово афинно пространсто. **|u + v| <= |u| + |v|**

***

Нека K = Oe1…en е ортономирана координатна система в евклидово афинно пространство. Напишете формулата за разстоянието между точките P и Q чрез координатите им (x1,…,xn) и (y1,…,yn) спремо K.

$$Q(x_1, \dots, x_n), P(y_1, \dots, y_n) => \overrightarrow{QP}(y_1 - x_1, \dots, y_n - x_n)$$

$$|\overrightarrow{QP}| = \sqrt{< \overrightarrow{QP}, \overrightarrow{QP} >} = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + \dots + (y_n - x_n)^2}$$

***

Не съм сигурна!: Спрямо положително ориентирана ортономирана координатна система K в геометричното пространство векторите u и v имат координати u(x_1, x_2, x_3) и v(y_1, y_2, y_3). Напишете координатите спрямо K на u x v.

$$u \times v = \left(\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right)$$

***

Нека A е n-мерно евклидово афинно пространство, моделирано върху линейното пространство U, K е ортономирана координатна система в A и спрямо нея точката P_0 ∈ A и ненулевия вектор N ∈ U имат координати $P_0(x_1^0,\dots,x_n^0)$, N(a_1,…,a_n). Напишете общо уравнение спрямо K на хиперравнината в A, която минава през P_0 и за която N е нормален вектор.

$$a_1(x_1 - x_1^0) + \dots + a_n(x_n - x_n^0) = 0$$

***

Свободен вектор в геометричното пространство

Класовете на еквивалентност относно релацията равенство на свързан вектор се наричат свободни вектори.
Ако v е свободен вектор и $\overrightarrow{AB} \in v$, то казваме, че $\overrightarrow{AB}$ е представител на v.

***

Векторно произведение

Векторното произведение на векторите u и v е векторът u x v, дефиниран по следния начин:

A) Ако u и v са колинерани, то u x v = 0;
B) Ако u и v не са колинеарни, то u x v е единственият вектор, който удовлетоварява условията:
|u x v| = |u||v|.sin<(u,v),
u x v е перпендикулярен на u и vm
(u, v, u x v) е положително ориентиран базис (казва се още дясна тройка)

***

Афинно пространство – Нека V е реално линейно пространство. Непразното множество A се нарича афинно пространство, моделирано върху V, ако е зададено изображение A x A -> V: (P, Q) ↦ $\overrightarrow{PQ}$, което има свойствата:

1. $\forall P \in A$ и $\forall v \in V\ \exists!\ Q \in A: \overrightarrow{PQ} = v$
2. $\forall P, Q, R \in A$ е в сила $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$ (Правило на триъгълника за събиране на вектори).

Елементите на A се наричат точки.
Размерност на A се нарича размерност на V.

***

Афинна координатна система в крайномерно афинно пространство

Нека A е n-мерно афинно пространтво, моделирано върху линейното пространство V. Афинна координатна система K в A е двойка, състояща се от точка O ∈ A и базис e = (e1,…,en) на V. Пишем K = Oe1…en. Точката O се нарича начало на координатната система, а e1,…,en – координати или базисни вектори

***

Афинно подпространство – Нека A е афинно пространство, моделирано върху линейнотопространство U. Непразното подмножество B на A се нарича афинно подпространство на A, ако съществува линейно подпространство V на U, такова че: За всяка точка P ∈ B е в сила Q ∈ B ⇔ $\overrightarrow{PQ}$ ∈ V, т.е. B = {Q ∈ A: $\overrightarrow{PQ}$ ∈ V }

***

Координати и координатен вектор спрямо афинна кординатна система в крайномерно афинно пространство.

Нека K = $Oe_1…e_n$ е афинна координатна система в A и P ∈ A.
Координати на P спрямо K се наричат координатите на векотра $\overrightarrow{OP}$ спрямо базиса e = (e_1,…,e_n), т.н. координатите на P спрямо K са x_1,…,x_n ⇔$\overrightarrow{OP} = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$. Пишем P($x_1$,…,$x_n$).

Векторът $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} = \varkappa(\overrightarrow{OP}) \in \mathbb{R}^n$ се нарича координатен вектор на P спрямо K.

***

Координатно изображение - $\varkappa_K: A \to \mathbb{R}^n: P \mapsto x,\ $ т. е. $\varkappa_K(P) = \varkappa_e(\overrightarrow{OP})$- координатно изображение съответно на координатната система K.

Формулирайте условеието за перпендикулярност на два вектора в геометрично пространство чрез скаларно произведение - $a \perp b \Leftrightarrow < a, b > = 0$

***

Формулирайте условието за колинеарност на два вектора чрез векторното произведение

Ако u и v са колинеарни, то u x v = 0.

***

Формулирайте твърдението за геометричната интерпретация на смесеното произведение чрез обем –

***

Общо уравнение на афинно подпространство

Нека А е n-мерно афинно пространсто, моделирано върху линейното пространство U, и K = Oe1…en е афинна координатна система в А.
Опр.: Нека В е k-мерното афинно подпространство на А. Общо уравнение на В спрямо К е уравнение на W спрямо К от вида Ax = b (или Ax –b = 0), ккккъдето А е матрица (n - k) x n, b ∈ R^{n-k} (и r(A) = n - k) (Общо у-ние е линейна система с n – k у-ния, която задача В)

Теорема:

1. Подмножеството В на А е k-мерно афинно подпорсотранство на А ⇔ В има спрямо К уравнение от вида Ax = b, където рангът на матрицата А е r(A) = n – k.
   При това, ако В е k-мерно афинно подпространство на А, то А може да се вземе с n-k реда и следователно В има общо уравнение спряко К.
2. Обратното: Ако броят на редовете на А е равен на r(A), то линейната система Ax = b с n неизвестни е съвместима и е общо уравнение спрямо К на някое k-мерно афинно подпространво В на А, където k = n – r(A).

***

Формулирайте теоремата за общото уравнение на права в геометричната равнина – Нека k-мерното афинно подпространство В на А има спрямо К общо уравнение Ax = b. Тогава всевъзможните общи уравнения на В спрямо К са уравненията от вида TAx = Tb, където Т е обратнима квадратна матрица от ред n – k.

***

Отсечка в афинно пространство –

Общо уравнение на права в равнина – Ax + By + C = 0

Общо уравнение на равнина – Ax + By + Cz + D = 0

Смесено произведение – Смесено произведение на векторите u, v, w се нарича числото <u,v,w> = <uxv, w> ∈ R (т.е. векторното произведение uxv, умножено с w).

***

Част III

Нека u и v са ненулеви вектори в геометричното пространство. Напишете дефиниционната формула за скаларното им произведение. **<u, v> = |u||v|cos<(u, v)**

***

Да се провери!: **Формулирайте твърдението за общото уравнение на равнина, зададена с точки и два вектрова.**

т. P0(x0, y0, z0)

v1, v2 – вектори

v1(a1, b1, c1)
v2(a2, б2, б2)

Тогава равнината π определена от т. P0, v1, v2 има общо уравнение от вида

$$\pi\colon \begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0$$

***

Нека a и b са два базиса на линейното пространство V_3 на векторите в пространството. Напишете дефиниционното условие за това a и b да са еднакво ориентирани.

T – матрица на прехода; необходимо и достатъчно условие е det T > 0

***

Спрямо афинна координатна система K = Oxyz в постранството двете различни точки P_0 и P1 имат координати $P_0(x_0, y_0, z_0)$, $P1(x_1, y_1, z_1)$. Напишете параметрични уравнения спрямо K на затворената отсечка P_0P_1.

$$\overrightarrow{P_0P_1}\colon \begin{cases} x = x_0 + \lambda(x_1 - x_0) \\ y = y_0 + \lambda(y_1 - y_0) \end{cases}, \quad \lambda \in [0,1]$$

***

Спрямо афинна координатна система в равнината правата l има общо уравнение l: Ax + By + C = 0, а точките P1 и P2 иииимат координати P1(x1, y1) и P2(x2, y2). Напишете необходимото и достатъчно условие чрез координатите на P1 и P2 за това P1 и P2 да са от една и съща отворена полуравнина относно l.

L(x1, y1).L(x2, y2) > 0

***

Спрямо ортономирана координатна система K = Oxy в равнината правата l има уравнение Ax + By + C = 0. Напишете всички нормални уравнения на l спрямо K.

$\frac{Ax+By+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} = 0$ на права

$\frac{Ax+By+Cz+D}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = 0$ на равнина

Не съм сигурна за +-.

***

Нека векторите u и v в геометричното пространство имат представители съответно $\overrightarrow{OP}$ и $\overrightarrow{OQ}$. Напишете представител на вектора u – v.

$$u - v = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{QO} = \overrightarrow{QP}$$

***

Да се провери!: Нека K и K‘ са афинни координатни системи в n-мерното евклидово афинно пространство A, K е ортономирана и координантните вектори x спрямо K и x’ спрямо K’ на произволна точка P ∈ A са свързани с равенството x = s + Tx’, където s $\in R^n$, а T е матрица n x n. Какви са необходимите и достатъчни условия върху s и T за това K‘ също да бъде ортономирана?

x’ = s +Tx
T.T^t = E => T – ортогонална

***

Нека K е положително ориентирана ортогонална координатна система в геометричното пространство. Напишете формулата за смесеното произведение <u,v,w> на векторите u, v, w чрез координатите им (x1, x2, x3), (y1, y2, y3), (z1, z2, z3) спрямо K.

$$< u, v, w > = \begin{vmatrix} x1 & x2 & x3 \\ y1 & y2 & y3 \\ z1 & z2 & z3 \end{vmatrix}$$

***

Нека a и b са лъчи в геометричното пространство, които лежат на една и съща права. Напишете дефиниционното условие за това a и b да са еднопосочни.

Казваме, че a е еднопосочен с b и пишем $a \upuparrows b$, ако правите определени от a и b да успосредни и:

a) Ако правите определени от a и b съвпадат, то $a \supset b$ или $b \supset a$.
b) Ако правите определени от a и b са различни и ПИ е равнината определена от тях, а A и B са началата на a и b, то a и b лежат в една и съща полуравнина в ПИ относно правата AB.

***

Нека K е афинна координатна система в n-мерното афинно пространство A и координатните вектори на точките P, Q ∈ A спрямо нея са съответно x, y ∈ R^n. Какъв е координатният вектор спрямо K на вектора $\overrightarrow{PQ}$?

Векторът $z = \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^n$ се нарича координатен вектор на $\overrightarrow{PQ}$ спрямо K.

***

Никак не съм сигурна!: Каква е размерността на афинните пространства, в които точките са хиперравнини?

n – 1 или строго по-малка от k

***

Спрямо афинна координатна система K = Oxyz в геометричното пространсво нека l е зададена с уравненията

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

Напишете общите уравнения спрямо K на всички равнини, които съдържат l.

$\lambda_1(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \lambda_2(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$, ккъдето $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2, (\lambda_1, \lambda_2) \neq 0$

***

Напишете твърдението на Коши-Бунаковски-Шварц в евклидовото линейно пространство.

Теорема 1 (неравенство на Коши-Буняковски-Шварц) *Нека $u, v \in U$. Тогава*

$$|\langle u, v\rangle| \leq |u||v|$$

$u = \Leftrightarrow$ u и v са линейно зависими.
(Еквивалентни формулировки:
$\langle u, v\rangle^2 \leq |u|^2|v|^2, \quad \langle u, v\rangle^2 \leq \langle u, u\rangle\langle v, v\rangle, \quad -|u||v| \leq \langle u, v\rangle \leq |u||v|.)$