СЕМ

② $p = 0{,}001$

$n = 5000$

Отг. $1 - \left[\binom{5000}{0} p^0 (1-p)^{5000} + \binom{5000}{1} p^1 (1-p)^{4999} \right]$

Поасоново разпределение

$X \sim P_o(\lambda)$:

$$P(X=k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \quad k = 0, 1, 2 \dots$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1$$

$$EX = \lambda$$

Брой случвания за интервал от време

$\lambda \to$ очакване

$\to$ среден брой случвания

– моделира позвъняванията в call center и т.н.

за определен интервал от време (непрекъснат), за независими събития

Ако искаме да дискретизираме: 30 дни / 1 месец

$$\underset{\text{за 1 месец}}{Po(10)} \approx Bi(\underset{\text{дни}}{30}, \tfrac{1}{3}) \approx Bi(\underset{\text{часа}}{720}, \tfrac{1}{72})$$

Th. Нека $\{p_n\}_{n\geq 1}$, ако $\lim\limits_{n\to\infty} n p_n = \lambda$ то $\forall k: \lim\limits_{n\to\infty} \binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} = \dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$

За зра зад:

$p = 0{,}001$

$n = 5000$

$np = 5$ -> може да апрокс. с ~~В.~~ $P_o(5)$

$$1 - \Bigg(\underbrace{\binom{5000}{0} p^0 (1-p)^{5000}}_{\frac{5^0 e^{-5}}{0!}} + \underbrace{\binom{5000}{1} p^1 (1-p)^{4999}}_{\frac{5^1 e^{-5}}{1!}} \Bigg)$$

$$(1-p)^{5000} = \left((1-p)^{\frac{1}{p}} \right)^{5000p} = e^{-5} \qquad p = 0{,}001$$

---

(4) 7 лампи, 3 дефектни | какъв е броя на изтеглените

избираме 4. | качествени лампи

$$P(X=k) = \frac{\binom{4}{k}\binom{3}{4-k}}{\binom{7}{4}}$$

хипергеометрично $Hyp(N, K, n)$

$$EX = n \cdot \frac{K}{N}$$

$\dfrac{\text{хубав брой}}{\text{общ брой}} \times$ брой изтеглени

$X \sim Hyp(N, K, n)$

$$P(X=k) = \frac{\binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

(5) $N_1 \sim Po(2)$ $\qquad P(N_3 < 4) = \sum_{k=0}^{3} \frac{6^k e^{-6}}{k!}$

$N_3 \sim Po(2.3)$

месеца

(6) $p = \binom{10}{9}(0.8)^9 \cdot 0.2 + \binom{10}{10}(0.8)^{10}$ за 1 седмица

имаме 20 седмици: Отг. p^{20}

(7) а/ $p = 0,2$ $\quad q = 0,3$ $\quad k \geq 1$

$(1-p)(1-q)$ – не е убит от 1 стреляне

$\underbrace{[(1-p)(1-q)]^{k-1}}_{\text{k пъти не го убиват}} (p \cdot q + p \cdot (1-q))$

$$\sum_{k=1}^{\infty} [(1-p)(1-q)]^{k-1} \cdot p = p \sum_{k=1}^{\infty} [(1-p)(1-q)]^{k-1} = \boxed{p \cdot \frac{1}{1-(1-p)(1-q)}}$$

б/ X – брой изстрели до убийство

$X \sim Ge(1 - \underbrace{(1-p)(1-q)}_{\text{вероятност да не бъде убит}}) \Rightarrow EX = \frac{1}{1-(1-p)(1-q)}$

(8) $A - \frac{2}{3}$, $B - \frac{1}{3}$

$ABABB \to \left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^3$ (нечетно)

$ABAA \to \left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^1$ (четно)

X - брой партии

$$P(X=2k)=$$

$$\underbrace{ABAB\ldots AB}_{2k-2}AA$$

$$=\left(\frac{2}{3}\right)^{k+1}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}+\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}\left(\frac{1}{3}\right)^{k+1}=$$

$$\underbrace{BABA\ldots BA}_{2k-2}BB$$

$$=\left(\frac{2}{9}\right)^{k-1}\left(\frac{4}{9}+\frac{1}{9}\right) \qquad k\geq 1$$

$$P(X=2k+1)=\left(\frac{2}{3}\right)^{k}\left(\frac{1}{3}\right)^{k+1}+\left(\frac{2}{3}\right)^{k+1}\left(\frac{1}{3}\right)^{k}$$

$$\underbrace{ABABAB\ldots AB}_{2k-2}B$$

$$=\left(\frac{2}{9}\right)^{k} \qquad k\geq 1$$

$$EX=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{5}{9}\right)\left(\frac{2}{9}\right)^{k-1}\cdot(2k)+\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2}{9}\right)^{k}(2k+1)}_{=\sum\left(\frac{2}{9}\right)^k 2k+\sum\left(\frac{2}{9}\right)}=$$

$$=\underbrace{2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{7}{9}\left(\frac{2}{9}\right)^{k-1}k}_{EZ,\ Z\sim Ge\left(\frac{7}{9}\right)}+\sum\left(\frac{2}{9}\right)^k=2\cdot\frac{9}{7}+\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{9}}=\frac{20}{7}$$

X, Y

$P(X=k, Y=l)$

$X \setminus Y$	k_1	k_2	...
l_1	P		
l_2			
⋮			

X, Y са независими сл. величини ако $\Leftrightarrow$

$\forall k, l \quad \{X=k\}, \{Y=l\}$ са независими

Ковариация - колко са зависими X, Y

Дисперсия - variance

ковариация - covariance

$$cov(X,Y) = E((X-EX)(Y-EY))$$

$$DX = cov(X,X)$$

ако са независими $cov(X,Y)=0$