СЕМ Упр

$$P(A \cap B \cap C) = P(A \mid B \cap C) \cdot P(B \mid C) \cdot P(C)$$

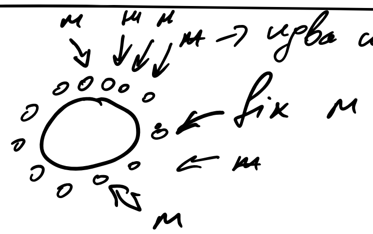
$$\frac{P(A \cap B \cap C)}{P(B \cap C)} \cdot \frac{P(B \cap C)}{P(C)} \cdot P.C$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2 \mid A_1) \cdot P(A_3 \mid A_2 \cap A_1) \ldots$$

$$\ldots P(A_n \mid A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1})$$

---

(5)



A_k - отдясно на A_k-човек да стои някой с обратен пол

$A_1 \cap A_2 \cap A_3 \ldots \cap A_{20}$ Ще я сметнем по горната ф-ла

$$P(A_1) \cdot P(A_2 \mid A_1) \cdot P(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \ldots P(A_{20} \mid A_1 \cap A_2 \cap \ldots A_{19})$$

$$1 \cdot \frac{10}{19} \cdot \frac{9}{18} \cdot \frac{9}{17} \cdot \frac{8}{16} \cdots \frac{1}{2} \cdot 1$$

$$= \frac{10!\,9!}{19!}$$

⑥ The birthday problem – 23

Какъв е шанса на n хора да не съвпадат

1 човек $\quad 1$

2 $\quad 1 \cdot \frac{364}{365}$

3 $\quad 1 \cdot \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365}$

...

$$\frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdot \frac{362}{365} \cdots \frac{(365-(n-1))}{365}$$

$$\frac{365!}{(365)^n \cdot (365-n)!}$$ – n-човека да имат различни рожденни дни

при $n > 23$ вероятността е $< 50\%$

---

① а) $\frac{1}{n!}$ → има само 1 правилно решение
→ може да се разбъркат по $n!$ начина

б) 0

в) $$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{\substack{i=1 \\ j=1 \\ i<j}}^{n,n} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \dots$$

$$\dots + (-1)^{n-1} P(A_1 \cap A_2 \dots \cap A_n)$$

A_i – i-тия човек си получава писмото

Търсим $P(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \dots \cap \overline{A_n}) = P(\overline{A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n}) = 1 - P(A_1 \cup \dots \cup A_n)$

→

1→ $\sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i \cap A_j) + \sum$

$\underbrace{n}_{\text{броя писма от умата}} \cdot \underbrace{\frac{(n-1)!}{n!}}_{\text{начина 1 да ще е на мястото}}$ $\quad \underbrace{\binom{n}{2}}_{\text{избирана 2 от n-те}} \frac{(n-2)!}{n!} \quad \underbrace{\binom{n}{3}}_{\text{брой на събираемите}} \underbrace{\frac{(n-3)!}{n!}}_{\text{вероятността}} \dots (-1)^{n-1} \cdot \frac{(n-n)!}{n!} =$

Общ вид на събираемите

$$= \underbrace{(-1)^{k-1}}_{\text{смяна на знак}} \underbrace{\binom{n}{k}}_{\text{колко събираеми има}} \cdot \underbrace{\frac{(n-k)!}{n!}}_{\text{по колко начина може да ги изберем}}$$

$$\frac{(-1)^{k-1}}{k!} = (-1)^{k-1} \cdot \frac{\cancel{n!}}{k!\cancel{(n-k)!}} \cdot \frac{\cancel{(n-k)!}}{\cancel{n!}}$$

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k!}$$

$$P(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3 \cap \dots \cap \bar{A}_n) = 1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \approx e^{-1}$$

Derangement

Хипотези – казваме, че $H_1, \dots, H_k$ са хипотези (разбиват Ω)

ако $H_i \cap H_j = \emptyset$, $i \neq j$ и $\bigcup_{i=1}^{k} H_i = \Omega$

$A \subseteq \Omega$. $P(A) = P(A \cap \Omega) = P\left(A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{k} H_i\right)\right) =$

Ф-ла за пълната вероятност

$$= P\left((A \cap H_1) \cup \dots \cup (A \cap H_k)\right) = \sum_{i=1}^{k} P(A \cap H_i) = \sum P(A \mid H_i) . P(H_i)$$

(5) 2 хипотези: H_1 - от ~~к~~ кутия сме издърпали дефектно

H_2 - —"— качествено

A - от втората да изтеглим дефектно

$$P(A) = \underbrace{P(A|H_1)}_{\frac{2}{11}} \cdot \underbrace{P(H_1)}_{\frac{1}{12}} + \underbrace{P(A|H_2)}_{\frac{1}{11}} \cdot \underbrace{P(H_2)}_{\frac{11}{12}} =$$

$$= \frac{2}{11} \cdot \frac{1}{12} + \frac{1}{11} \cdot \frac{11}{12}$$

---

(2) Разбиваме на хипотези

a) $$\frac{5}{20} + \frac{7}{20} \cdot \frac{5}{20} + \left(\frac{7}{20}\right)^2 \cdot \frac{5}{20} + \dots + \left(\frac{7}{20}\right)^k \frac{5}{20} + \dots =$$

първо бяла

$$= \frac{5}{20} \cdot \frac{1}{1-\frac{7}{20}} = \frac{5}{20} \cdot \frac{20}{13} = \frac{5}{13} = \frac{5}{\underbrace{5+8}}$$

може да се реши и с p

$$p = \frac{5}{20} + \frac{7}{20} p \Rightarrow p = \frac{5}{13}$$

теглене на червена = празен ход

няма нито 1 червена само избираме от бели и зелени

б) $$p = \frac{5}{20} + \frac{7}{20} \cdot \frac{5}{19} + \frac{7}{20} \cdot \frac{6}{19} \cdot \frac{5}{18} + \dots + \quad = \frac{5}{13}$$

---

(3) A да не познае нито веднъж $= \frac{1}{2}$

4 независими опита $\Rightarrow (1-p)^4 = \frac{1}{2} \Rightarrow 1-p = \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \Rightarrow p = 1 - \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$

друг подход: $\underbrace{\binom{4}{1}}_{\text{кой път ще хвърлим ези}} \underbrace{p}_{\text{колко пъти сме уцели}} \cdot \underbrace{(1-p)^3}_{\text{колко пъти не сме уцели}} + \binom{4}{2} p^2 (1-p)^2 + \binom{4}{3} p^3 (1-p)^1 + p^4 = \frac{1}{2}$

кой път ще хвърлим ези

колко пъти сме уцели ~~сме хвърлили ез~~

колко пъти не сме уцели

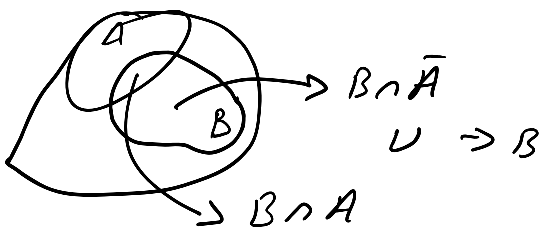
---

(4) $P(\overline{B} \mid \overline{A}) = \dfrac{P(\overline{B} \cap \overline{A})}{P(\overline{A})} = \dfrac{P(\overline{B \cup A})}{P(\overline{A})} = \dfrac{1 - P(A \cup B)}{1 - P(A)} =$

$$= \frac{1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)]}{1 - P(A)}$$

аналогично за $P(A \cap \overline{B})$

~~$P(B|A$~~ $P(B \cap \overline{A}) \Rightarrow \underline{(B \cap \overline{A}) \cup (B \cap A) = B}$



$$P(B \cap \overline{A}) + P(B \cap A) = P(B)$$

$$\boxed{P(B \cap \overline{A}) = P(B) - P(B \cap A)}$$

---

(6) ~~5~~ различни цифри

A = различни цифри

2 хипотези H_1 - отделяме нормален зар

H_2 - отделяме ненормалния $\overline{H_1}$

$$P(A) = \underbrace{P(A|H_1)}_{\frac{5 \cdot 4}{6^2}} \cdot \underbrace{P(H_1)}_{\frac{3}{4}} + \underbrace{P(A|H_2)}_{\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6^3}} \cdot \underbrace{P(H_2)}_{\frac{1}{4}}$$

(8) H_i – за I игра сме избрали i нови топки $i=\overline{0,3}$

A – събитието втората игра с 3 нови

$$P(A) = P(A|H_0).P(H_0) + P(A|H_1).P(H_1) + P(A|H_2).P(H_2) + P(A|H_3)P(H_3)$$

$$\frac{\binom{4}{3}\binom{3}{0}}{\binom{7}{3}} \quad \frac{\binom{4}{0}\binom{3}{3}}{\binom{7}{3}} \quad \frac{\binom{3}{3}\binom{4}{0}}{\binom{7}{3}} \quad \frac{\binom{4}{1}\binom{3}{2}}{\binom{7}{3}} \quad 0 \quad 0$$

2 нови – 1 нова

няма как да изберем 3 нови