Estudiando el libro “Complex variables and applications” de J. W. Brown y R. V. Churchill

Ernesto López

16 de agosto de 2022

Índice general

Prefacio

El presente documento consiste en apuntes sobre el libro “Complex variables and applications” [1].

Capítulo 1

Números complejos

1.1. Algunas propiedades algebraicas

La *fórmula binomial* es válida para números complejos. Si z_1 y z_2 son dos números complejos distintos de cero, se cumple que[1]

$$(z_1 + z_2)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z_1^k z_2^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z_1^{n-k} z_2^k, \qquad \text{con} \qquad n = 1,\, 2,\, \ldots, \tag{1.1}$$

donde

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

1.2. Regiones en el plano complejo

Esta sección trata sobre conjuntos de número complejos. El concepto mas básico es el de *entorno* ϵ

$$|z - z_0| < \epsilon$$

de un punto z_0, que consiste en todos los puntos z que se encuentran dentro de la circunferencia de radio ϵ centrada en z_0 pero no sobre ella. Ocasionalmente es necesario considerar el *entorno reducido*

$$0 < |z - z_0| < \epsilon,$$

que es el entono ϵ de z_0 pero sin considerar el punto z_0.

Se dice que un punto z_0 es un *punto interior* de un conjunto S si existe algún entorno de z_0 que contiene solo puntos de S y se dice que z_0 es un *punto exterior* de S si existe un entorno de él que no contiene puntos de S. Si z_0 no cumple ninguna de estas condiciones se dice que es un *punto de la frontera* de S. Por lo tanto, un punto de la frontera es un punto cuyos entornos contienen al menos un punto de S y un punto que no es de S. El conjunto de todos los puntos de la frontera se llama *frontera* de S. Por ejemplo, la circunferencia $|z| = 1$ es la frontera de cada un de los conjuntos

$$|z| < 1 \qquad \text{y} \qquad |z| \leq 1. \tag{1.2}$$

Un conjunto es *abierto* si no contiene ninguno de los puntos de su frontera. Se puede probar que un conjunto es abierto si y solo si todos sus puntos son interiores. Un conjunto es *cerrado* si contiene todos los puntos de su frontera, y la *clausura* de un conjunto S es el conjunto cerrado que consiste en todos los puntos de S y los de la frontera de S. Observar que el primer conjunto en 1.2 es abierto y el segundo conjunto es su clausura.

Algunos conjuntos no son abiertos ni cerrados. Un conjunto S no es abierto si existe algún punto de su frontera contenido en él y un conjunto S no es cerrado si existe algún punto de la frontera no

[1] La prueba puede encontrarse en `https://en.wikipedia.org/wiki/Binomial_theorem`, por ejemplo.

contenido en el. Por ejemplo, el disco perforado $0 < |z| < 1$ no es un conjunto abierto ni cerrado. Por otro lado, el conjunto de todos los números complejos es abierto y cerrado ya que no tiene puntos de la frontera.

Un conjunto S es *acotado* si cada punto de S está dentro de algún círculo $|z| \leq R$. En caso contrario es *no acotado*. Ambos conjuntos en 1.2 son acotados, y la mitad del plano complejo $\mathrm{Re}\, z \geq 0$ es un conjunto no acotado.

Capítulo 2

Funciones analíticas

2.1. Funciones y mapeos

Sea S un conjunto de números complejos. Una función f es una regla que asigna a cada número complejo z en S un número complejo w. El número w se llama *valor* de f en z y se denota como $f(z)$. De esta forma, $w = f(z)$. El conjunto S se llama dominio de f.

Supóngase que $u + iv$ es el valor de la función en $z = x + iy$, es decir,

$$u + iv = f(x + iy).$$

Cada uno de los números reales u y v dependen de las variables reales x y y, por lo que $f(z)$ puede expresarse como dos funciones reales con variables reales x y y, es decir,

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y).$$

Si la función v es siempre nula, el valor de $f(z)$ es real, y f es una función real de variable compleja.

Si se emplean las coordenadas polares r y θ en lugar de x y y, entonces

$$u + iv = f(re^{i\theta}),$$

donde $w = u + iv$ y $z = re^{i\theta}$. En ese caso, se puede escribir

$$f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta).$$

A diferencia de las funciones reales con variable real, no hay una representación gráfica conveniente de una función compleja debido a que los números z y w se encuentran en un plano en lugar de una recta. Sin embargo, es posible exhibir información sobre la función indicando pares de correspondencia entre puntos $z = (x, y)$ y $w = (u, v)$. Cuando una función es pensada de esta forma, se suele llamar *mapeo* o *transformación*. La *imagen* de un punto z en el dominio S es el punto $w = f(z)$, y el conjunto de imágenes de todos los puntos de un conjunto T contenido en S se llama imagen de T. La imagen del dominio completo S se llama *rango* de f. La *imagen inversa* de un punto w es el conjunto de puntos z en el dominio de f que tienen a w como imagen. La imagen inversa de un punto puede ser un único punto, muchos puntos, o ninguno. El último caso ocurre cuando w no está en el rango de f. Términos como *traslación*, *rotación* o *reflexión* se emplean para describir las características de algunos mapeos.

2.2. El mapeo $w = z^2$

El mapeo $w = z^2$ consiste en la transformación

$$u = x^2 - y^2, \qquad v = 2xy \tag{2.1}$$

del plano xy en el plano uv. Este mapeo transforma ciertas hipérbolas del plano xy en rectas en el plano uv, como se explicará a continuación.

Previamente, se recuerda que

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{2.2}$$

es la ecuación de una hipérbola[1] con

- eje mayor: la recta $y = 0$
- centro: el origen de coordenadas
- vértices: $(\pm a,\, 0)$
- focos: $(\pm c,\, 0)$, donde $c^2 = a^2 + b^2$.
- asíntotas: las rectas $y = \pm(b/a)x$.

En el caso en que $a = b$ la hipérbola se dice *rectangular* debido a que las asíntotas se intersectan formando ángulos rectos. Si los ejes de coordenadas se rotan un ángulo θ en sentido horario formando el nuevo eje de coordenadas $x'y'$, las coordenadas de un punto $(x,\, y)$ en función de las coordenadas en el nuevo eje son[2]

$$x = x' \cos\theta - y' \operatorname{sen}\theta, \qquad\qquad y = -x' \operatorname{sen}\theta + y' \cos\theta.$$

En particular, si el ángulo de rotación es $\theta = -\pi/4$, que implica una rotación de $\pi/4$ radianes en sentido horario como se muestra en la figura 2.1, se cumple que

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(x' + y'\right), \qquad\qquad y = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-x' + y'\right),$$

por lo que en el nuevo eje de coordenadas, la ecuación de una hipérbola rectangular es

$$\frac{(x' + y')^2}{2a^2} + \frac{(-x' + y')^2}{2a^2} = 1,$$

que operando, se reduce a

$$\frac{2x'y'}{a^2} = 1. \tag{2.3}$$

Como se muestra en la figura 2.1, esta es la ecuación de una hipérbola rectangular contenida en el primer

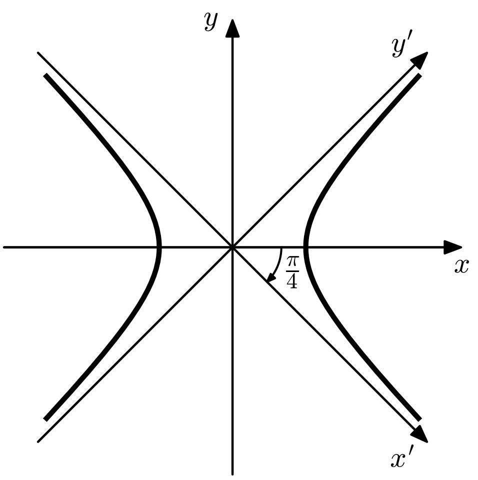

Figura 2.1: La rotación del eje de coordenadas xy de una hipérbola rectangular dada por la ecuación 2.2 un ángulo de $\pi/4$ radianes produce una hipérbola rectangular dada por la ecuación 2.3 contenida en el primer y tercer cuadrante en el nuevo eje de coordenadas $x'y'$.

y tercer cuadrante con

- eje mayor: la recta $y = x$

[1] Ver `https://en.wikipedia.org/wiki/Hyperbola`, por ejemplo.
[2] Ver `https://en.wikipedia.org/wiki/Rotation_of_axes`, por ejemplo.

- centro: el origen de coordenadas
- vértices: $(\sqrt{a},\, \sqrt{a})$ y $(-\sqrt{a},\, -\sqrt{a})$
- asíntotas: los ejes de coordenadas.

Retornando a la transformación $w = z^2$ y teniendo en cuenta estas consideraciones, de la ecuación 2.1 se observa que cada rama de la hipérbola rectangular

$$x^2 - y^2 = c_1 \qquad \text{con} \qquad c_1 > 0, \tag{2.4}$$

se mapea de forma uno a uno en la recta vertical $u = c_1$. Efectivamente, la primera ecuación en 2.1 indica que $u = c_1$ cuando $(x,\, y)$ es un punto de cualquier rama de la hipérbola. Además, los puntos con $x = \sqrt{y^2 + c_1}$ corresponden a la rama derecha y los puntos con $x = -\sqrt{y^2 + c_1}$ corresponden a la rama izquierda. Cuando por ejemplo un punto pertenece a la rama derecha, la segunda ecuación en 2.1 indica que $v = 2y\sqrt{y^2 + c_1}$, y por lo tanto, la imagen de la rama derecha puede expresarse paramétricamente como

$$u = c_1, \qquad v = 2y\sqrt{y^2 + c_1} \qquad \text{con} \qquad -\infty < y < \infty.$$

Esto muestra que la imagen de un punto $(x,\, y)$ en la rama derecha se mueve hacia arriba en la recta vertical a medida que $(x,\, y)$ se mueve hacia arriba en dicha rama. Análogamente, el par de ecuaciones

$$u = c_1, \qquad v = -2y\sqrt{y^2 + c_1} \qquad \text{con} \qquad -\infty < y < \infty,$$

es la representación paramétrica de la imagen de la rama izquierda de la hipérbola, y muestra que la imagen de un punto que se mueve hacia abajo por toda la rama izquierda es un punto que se mueve hacia arriba por toda la recta $u = c_1$. Esto se ilustra en la figura 2.2.

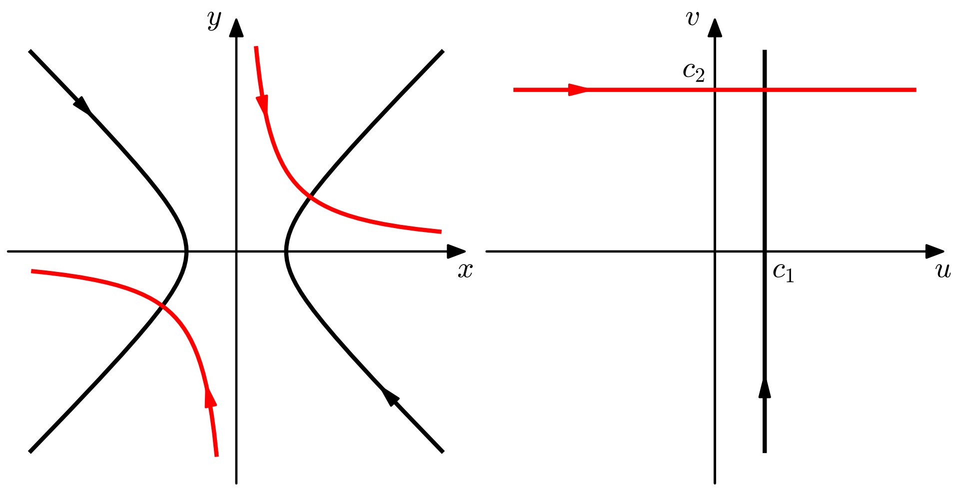

Figura 2.2: Transformación $w = z^2$. Las hipérbolas rectangulares $x^2 - y^2 = c_1$ en el plano xy se mapean en rectas verticales $u = c_1$ en el plano uv y las hipérbolas rectangulares $2xy = c_2$ se mapean en rectas horizontales $v = c_2$.

Por otro lado, cada rama de la hipérbola

$$2xy = c_2 \qquad \text{con} \qquad c_2 > 0,$$

se transforma en la recta $v = c_2$. Para verificarlo, se observa de la segunda ecuación de 2.1 que $v = c_2$ cuando $(x,\, y)$ es un punto de cualquiera de las ramas. Supóngase que el punto $(x,\, y)$ pertenece a la rama del primer cuadrante. Como $y = c_2/(2x)$, la primera ecuación en 2.1 revela que la imagen de la rama tiene la representación paramétrica

$$u = x^2 - \frac{c_2^2}{4x^2}, \qquad v = c_2 \qquad \text{con} \qquad 0 < x < \infty.$$

Observando que

$$\lim_{x \to 0^+} u = -\infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to \infty} u = \infty,$$

como u es continua en x, es claro que a medida que (x, y) se mueve hacia abajo en la rama del primer cuadrante, su imagen se mueve hacia la derecha sobre toda la recta $v = c_2$. Además, la rama del tercer cuadrante tiene la representación paramétrica

$$u = \frac{c_2^2}{4y^2} - y^2, \qquad v = c_2 \qquad \text{con} \qquad -\infty < y < 0.$$

Como

$$\lim_{y \to -\infty} u = -\infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{y \to 0^-} u = \infty,$$

y u es continua en y, se concluye que la imagen de un punto (x, y) que se mueve hacia arriba en por toda la rama del tercer cuadrante se mueve hacia la derecha por toda la recta $v = c_2$, como se muestra en la figura 2.2.

2.2.1. Ejercicios

A continuación se incluyen algunos ejercicios de la sección 14.

Ejercicio 5

Encontrar el dominio en el plano z cuya imagen bajo la transformación $w = z^2$ es el dominio cuadrado en el plano w delimitado por las rectas $u = 1$, $u = 2$, $v = 1$ y $v = 2$.

Solución Según lo discutido en la sección 2.2, el mapeo $w = z^2$ transforma la hipérbola $x^2 - y^2 = c$ del plano z en la recta vertical $u = c$ del plano w y la hipérbola $2xy = c$ del plano z en la recta horizontal $v = c$ del plano w, como se muestra en la figura 2.2. Por lo tanto, el cuadrado del plano w es la imagen de la región delimitada por las hipérbolas

$$x^2 - y^2 = 1, \qquad x^2 - y^2 = 2, \qquad 2xy = 1 \qquad \text{y} \qquad 2xy = 2,$$

que se muestra en la figura 2.3.

Ejercicio 6

Encontrar y graficar, mostrando las orientaciones correspondientes, las imágenes de las hipérbolas

$$x^2 - y^2 = c_1, \qquad c_1 < 0 \qquad \text{y} \qquad 2xy = c_2, \qquad c_2 < 0$$

bajo la transformación $w = z^2$.

Solución Se parte observando que

$$x^2 - y^2 = c_1, \qquad c_1 < 0$$

es una hipérbola rectangular con eje mayor la recta $x = 0$ y vértices en $(0, \pm\sqrt{-c_1})$, como se muestra en la figura 2.4. Esto es porque su ecuación se puede escribir como $y^2 - x^2 = c_1'$ donde $c_1' = -c_1 > 0$, por lo que su gráfica es como la hipérbola de la ecuación 2.4 pero intercambiando los ejes de coordenadas. La primera ecuación en 2.1 indica que cada rama de la hipérbola se transforma en la recta vertical $u = c_1$. En particular, los puntos con $y = \sqrt{x^2 - c_1}$ corresponden a la rama superior y los puntos con $y = -\sqrt{x^2 - c_1}$ corresponden a la rama inferior. Cuando un punto pertenece a la rama superior, la

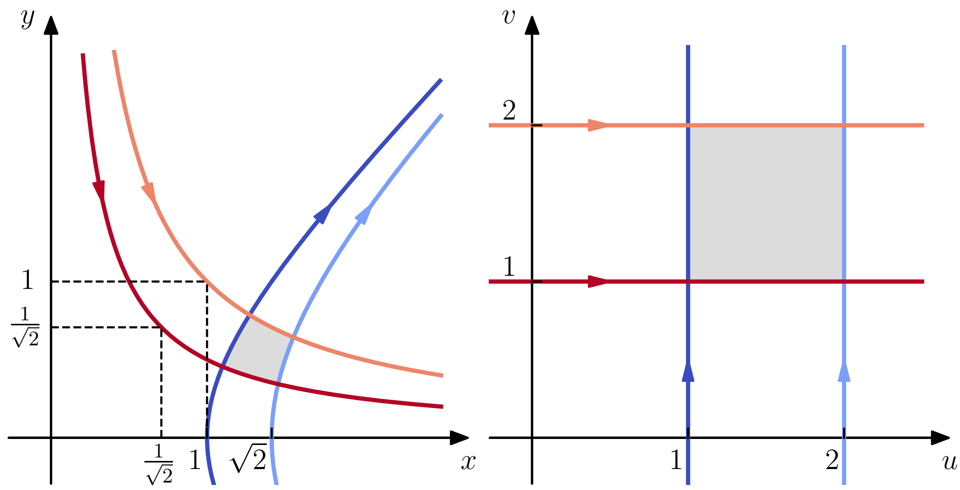

Figura 2.3: Ejercicio 5. En la transformación $w = z^2$ el cuadrado en el plano w es la imagen de la región delimitada por las hipérbolas en el plano z.

segunda ecuación en 2.1 indica que $v = 2x\sqrt{x^2 - c_1}$, y por lo tanto, la imagen de la rama superior puede expresarse paramétricamente como

$$u = c_1, \qquad v = 2x\sqrt{x^2 - c_1} \qquad \text{con} \qquad -\infty < x < \infty.$$

Esto muestra que la imagen de un punto (x, y) en la rama superior se mueve hacia arriba en la recta vertical a medida que (x, y) se mueve hacia la derecha en dicha rama. Análogamente, la representación paramétrica de un punto en la rama inferior es

$$u = c_1, \qquad v = -2x\sqrt{x^2 - c_1} \qquad \text{con} \qquad -\infty < x < \infty$$

y muestra que a medida que x crece, v decrece. Por lo tanto, un punto (x, y) en la rama inferior que se mueve a la izquierda tiene como imagen un punto que se mueve hacia arriba en la recta vertical $u = c_1$. Esto se ilustra en la figura 2.4.

Por otro lado,

$$2xy = c_2, \qquad c_2 < 0$$

es una hipérbola rectangular cuyas ramas están en el segundo y cuarto cuadrante, y la segunda ecuación en 2.1 indica que un punto en cualquier rama se transforma en un punto en la recta horizontal $v = c_2$. La representación paramétrica de la rama del segundo cuadrante es

$$u = x^2 - \frac{c_2^2}{4x^2}, \qquad v = c_2 \qquad \text{con} \qquad -\infty < x < 0.$$

Observando que

$$\lim_{x \to -\infty} u = \infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to 0^-} u = -\infty,$$

como u es continua en x, es claro que a medida que (x, y) se mueve hacia abajo en la rama del segundo cuadrante, su imagen se mueve hacia la derecha sobre toda la recta $v = c_2$. La representación paramétrica de la rama del cuarto cuadrante es

$$u = x^2 - \frac{c_2^2}{4x^2}, \qquad v = c_2 \qquad \text{con} \qquad 0 < x < \infty,$$

y como

$$\lim_{x \to 0^+} u = -\infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to \infty} u = \infty,$$

la imagen de un punto que se mueve hacia arriba en la rama del cuarto cuadrante es un punto que se mueve hacia la derecha en la recta $v = c_2$, como se muestra en la figura 2.4.

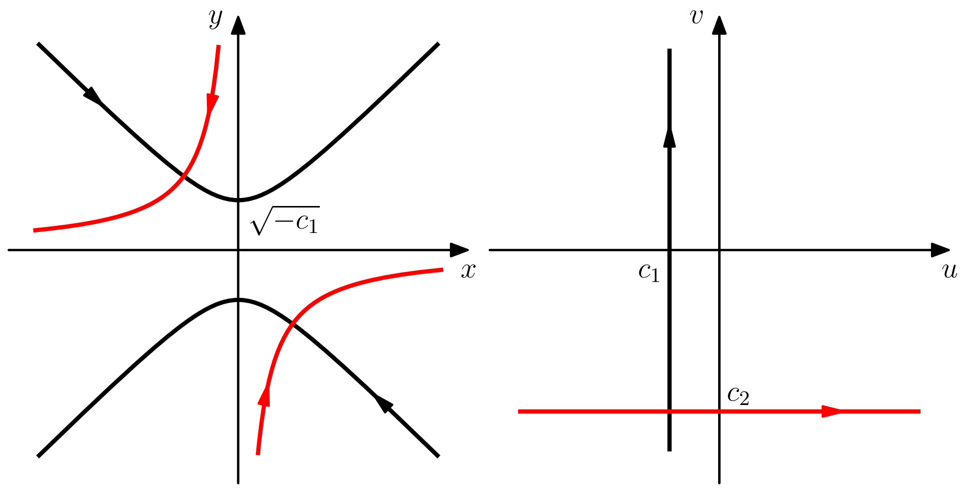

Figura 2.4: Ejercicio 6. Imágenes de las hipérbolas rectangulares $x^2 - y^2 = c_1$ con $c_1 < 0$ y $2xy = c_2$ con $c_2 < 0$ bajo la transformación $w = z^2$.

Ejercicio 9

Una interpretación de una función $x = f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$ es la de un *campo vectorial* en el dominio de definición de f. La función asigna un vector w con componentes $u(x, y)$ y $v(x, y)$ a cada punto z donde está definida. Indicar gráficamente los campos vectoriales representados por

$$(a)\ w = iz \qquad\qquad (b)\ w = \frac{z}{|z|}.$$

Solución

(a) Expresando z en coordenadas polares, $z = re^{i\theta}$, y considerando que $i = e^{i\pi/2}$, la transformación es

$$w = iz = r\exp\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right).$$

Se observa que la transformación no altera el módulo y adiciona a la fase una magnitud de $\pi/2$ radianes. Esto consiste en una rotación de $\pi/2$ radianes en sentido antihorario del vector z. El campo vectorial asociado a la transformación se muestra en la figura 2.5.

(b) La transformación $w = z/|z|$ no altera la fase por tratarse únicamente de la división del vector z entre un número real y es tal que $|w| = 1$ para todo $z \neq 0$. El campo vectorial se muestra en la figura 2.5.

2.3. Límites

Sea una función f definida en todos los puntos z de un entorno reducido de un punto z_0. La afirmación de que $f(z)$ tiene límite w_0 cuando z se aproxima a z_0, o

$$\lim_{z\to z_0} f(w) = w_0, \tag{2.5}$$

significa que el punto $w = f(z)$ puede hacerse arbitrariamente cercano a w_0 si se elige el punto z suficientemente cercano a z_0 pero distinto de él. A continuación se expresa la definición formal.

La afirmación de la ecuación 2.5 significa que para cada número positivo ϵ, existe un número positivo δ tal que

$$|f(z) - w_0| < \epsilon \qquad \text{para todo } z \text{ tal que} \qquad 0 < |z - z_0| < \delta. \tag{2.6}$$

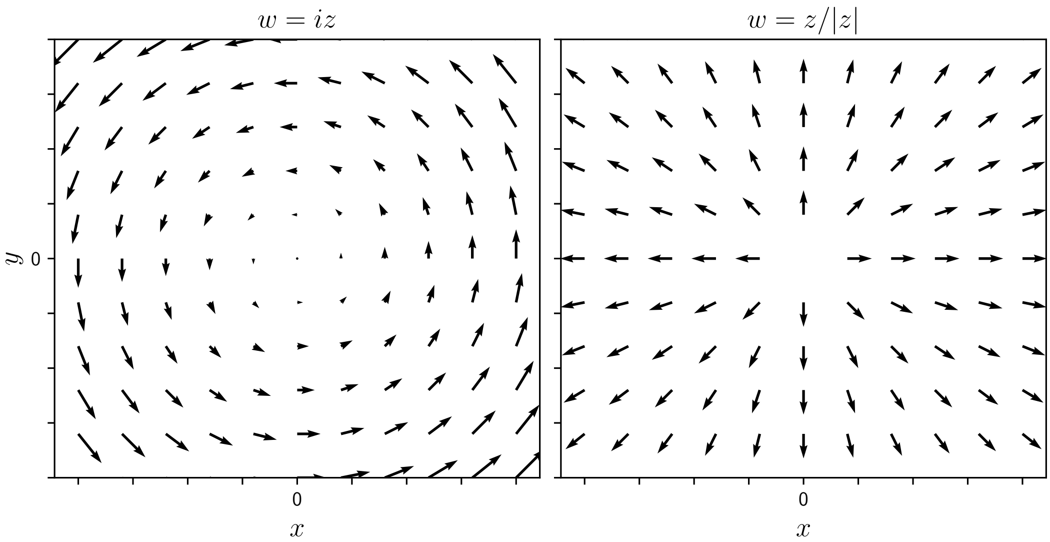

Figura 2.5: Ejercicio 9. Campos vectoriales asociados a las transformaciones $w = iz$ y $w = z/|z|$.

Geométricamente, la definición indica que para cada entorno de w_0 de radio ϵ, $|w - w_0| < \epsilon$, existe un entorno reducido de z_0 de radio δ, $0 < |z - z_0| < \delta$, tal que cada punto z en él tiene su imagen w en el entorno de radio ϵ de w_0. Observar que si bien todos los puntos del entorno reducido $0 < |z - z_0| < \delta$ deben ser considerados, sus imágenes no tienen porque abarcar el entorno $|w_0 - w| < \epsilon$ completo. Notar además que una vez que se encontró un valor de δ que cumpla la condición, puede ser sustituido por cualquier número positivo menor, como $\delta/2$ por ejemplo.

Teorema: unicidad del límite. Cuando el límite de una función $f(z)$ existe en el punto z_0, es único.

La definición 2.6 requiere que f esté definida en todos los puntos del entorno reducido de z_0. Dicho entorno reducido siempre existe si z_0 es un punto interior de la región en donde f está definida. La definición de límite puede extenderse al caso en que z_0 es un punto de la frontera de la región de definición de f acordando que la primera inecuación en 2.6 debe satisfacerse únicamente para los puntos z que pertenecen a intersección de la región de definición de f con entorno reducido.

Si el limite 2.5 existe, la notación $z \to z_0$ implica que z se aproxima a z_0 de forma arbitraria y no en una dirección en particular.

2.4. Teoremas sobre límites

El estudio sobre límites puede abreviarse estableciendo una conexión entre el límite de funciones de variable compleja y el límite de funciones reales de dos variables reales. Como los límites del último tipo se estudian en cálculo, sus definiciones y propiedades pueden emplearse libremente.

Teorema 1. Supóngase que

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \qquad \text{con} \qquad z = x + iy,$$

y

$$z_0 = x_0 + iy_0, \qquad w_0 = u_0 + iv_0.$$

Si

$$\lim_{(x,\,y)\to(x_0,\,y_0)} u(x, y) = u_0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{(x,\,y)\to(x_0,\,y_0)} v(x, y) = v_0$$

se cumple que

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0.$$

Lo recíproco también es cierto.

Teorema 2. Supóngase que

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{z \to z_0} F(z) = W_0.$$

Entonces, se cumple que

$$\lim_{z \to z_0} [f(z) + F(z)] = w_0 + W_0, \qquad \lim_{z \to z_0} f(z)F(z) = w_0 W_0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{F(z)} = \frac{w_0}{W_0}, \tag{2.7}$$

donde en el último límite se debe imponer la condición adicional de que $W_0 \neq 0$.

2.5. Límites que involucran el punto en el infinito

En ocasiones es conveniente incluir en el plano complejo el *punto en el infinito*, denotado como ∞, y emplear límites que lo involucran. El plano complejo en conjunto con este punto se denomina *plano complejo extendido*. Para visualizar el punto en el infinito, se puede pensar en el plano complejo como pasando por el ecuador de una esfera unidad centrada en el origen, como se muestra en la figura **??**. A cada punto z en el plano complejo le corresponde exactamente un punto P en la superficie de la esfera. El punto P es el punto donde la recta que pasa por z y el polo norte N intersecta la esfera. De forma similar, a cada punto P de la esfera, excepto al polo norte N, le corresponde exactamente un punto z en el plano complejo. Si se asigna al polo norte N de la esfera el punto en el infinito, se obtiene una correspondencia uno a uno entre puntos de la esfera y puntos del plano complejo extendido. La esfera se conoce como *esfera de Riemann* y la correspondencia se llama *proyección estereográfica*.

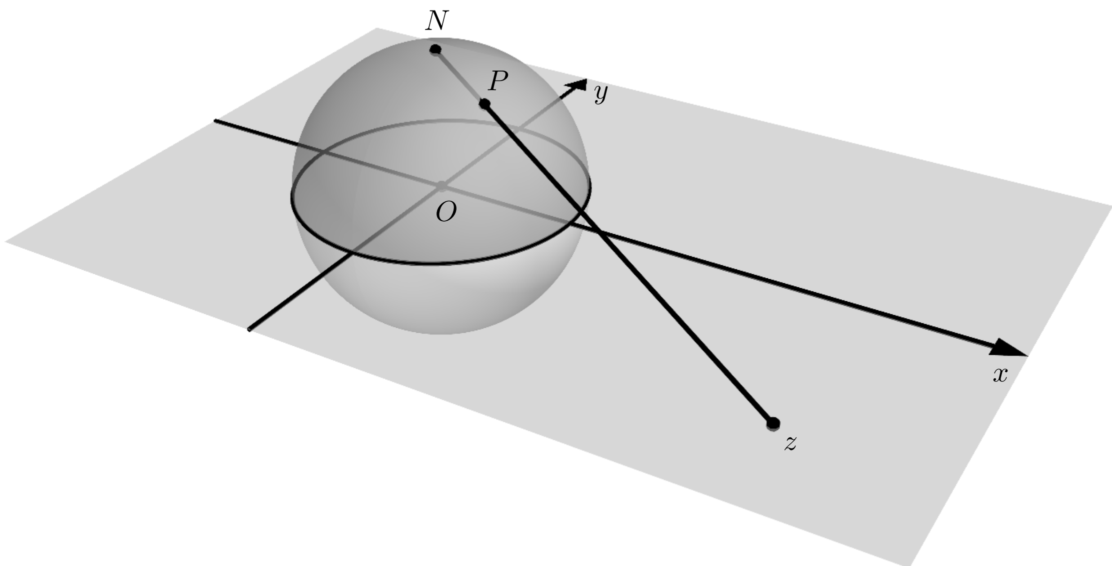

Figura 2.6: Proyección estereográfica.

Observar que el exterior del círculo unidad centrado en el origen en el plano complejo, corresponde al hemisferio norte con el ecuador y el polo norte N omitidos. Además, para cada número pequeño positivo ϵ, los puntos en el plano complejo exteriores a la circunferencia $|z| = 1/\epsilon$ corresponden a puntos en la esfera cercanos a N. Por lo tanto, al conjunto $|z| > 1/\epsilon$ se le llama *entorno de* ∞.

Como convención, al referirse a un punto z, se asumirá que se trata de un punto del *plano finito*. Por lo tanto, cuando haya que referirse al punto en el infinito, se hará explícitamente.

Teniendo en cuenta estas consideraciones, ya es posible darle un significado a la afirmación

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = w_0$$

cuando z_0 o w_0, o posiblemente ambos números, son reemplazados por el punto en el infinito. Para hacerlo, en la definición del límite dada por la ecuación 2.6 simplemente se reemplaza el entorno correspondiente de z_0 o w_0 por un entorno de ∞. La prueba del siguiente teorema ilustra como se hace.

Teorema. Si z_0 y w_0 son puntos en el pano z y w respectivamente, entonces,

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty \qquad \text{si} \qquad \lim_{z\to z_0} \frac{1}{f(z)} = 0$$

y

$$\lim_{z\to \infty} f(z) = w_0 \qquad \text{si} \qquad \lim_{z\to 0} f\left(\frac{1}{z}\right) = w_0.$$

Además,

$$\lim_{z\to \infty} f(z) = \infty \qquad \text{si} \qquad \lim_{z\to 0} \frac{1}{f(1/z)} = 0.$$

Se incluye a continuación la prueba solo de la primera afirmación. Asumiendo que se cumple el segundo límite en la primera afirmación, la definición de límite 2.6 indica que para todo número ϵ positivo, existe un número δ positivo tal que

$$\left|\frac{1}{f(z)} - 0\right| < \epsilon \qquad \text{si se cumple que} \qquad 0 < |z - z_0| < \delta.$$

Como esto puede escribirse como

$$|f(z)| > \frac{1}{\epsilon} \qquad \text{si se cumple que} \qquad 0 < |z - z_0| < \delta,$$

se obtiene el primer límite de la primera afirmación, ya que la expresión indica que $f(z)$ se encuentra en un entorno de ∞.

2.6. Continuidad

Una función f es *continua* en el punto z_0 si se cumplen las siguientes tres condiciones:

1. $\lim_{z\to z_0} f(z)$ existe.
2. $f(z_0)$ existe.
3. $\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$.

Observar que la afirmación 3. contiene las afirmaciones 1. y 2., ya que la existencia de los valores en ambos lados de la igualdad de la ecuación es necesaria. La afirmación 3. indica que para todo numero ϵ positivo existe un número δ positivo tal que

$$|f(z) - f(z_0)| < \epsilon \qquad \text{si se cumple que} \qquad |z - z_0| < \delta. \tag{2.8}$$

Una función de variable compleja se dice continua en una región R si es continua en cada punto de R.

Si dos funciones son continuas en un punto, su suma y su producto también son continuas en ese punto, y su cociente es una función continua si el denominador no es cero en ese punto. Esto es consecuencia de la ecuación 2.7.

A continuación se incluyen otras propiedades de funciones continuas como teoremas, cuya verificación no es tan inmediata.

Teorema 1. La composición de funciones continuas es una función continua.

Sea $w = f(z)$ una función definida para todo z en el entorno $|z - z_0| < \delta$ del punto z_0, y sea $W = g(w)$ una función cuyo dominio de definición contiene la imagen de dicho entorno bajo f. De esta forma, la composición $W = g[f(z)]$ está definida para todo el entorno $|z - z_0| < \delta$. Si f es continua en z_0 y g es continua en el punto $f(z_0)$ del plano w, se cumple que $g[f(z)]$ es continua en z_0.

Teorema 2. Si una función $f(z)$ es continua y no nula en el punto z_0, entonces $f(z) \neq 0$ en algún entorno de ese punto.

Teorema 3. Sea
$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y).$$
Si las funciones componentes u y v son continuas en el punto $z_0 = (x_0, y_0)$, también los es f. Recíprocamente, si f es continua en el punto z_0, también los son u y v en ese punto.

Teorema 4. Si una función f es continua en una región R cerrada y acotada, existe un número M no negativo tal que
$$|f(z)| \leq M \qquad \text{para todos los puntos } z \text{ en } R,$$
y la igualdad se cumple para al menos un punto z de R.

2.6.1. Ejercicios

Ejercicio 1

Emplear la definición de límite dada por la ecuación 2.6 para probar que

$$(a)\ \lim_{z\to z_0} \operatorname{Re} z = \operatorname{Re} z_0; \qquad (b)\ \lim_{z\to z_0} \overline{z} = \overline{z_0}; \qquad (c)\ \lim_{z\to z_0} \frac{\overline{z}^2}{z} = 0.$$

Solución

(a) Hay que probar que para todo número ϵ positivo, existe un número δ positivo tal que

$$|\operatorname{Re} z - \operatorname{Re} z_0| < \epsilon \qquad \text{si se cumple que} \qquad 0 < |z - z_0| < \delta. \tag{2.9}$$

Sea $z = x + iy$ y $z_0 = x_0 + iy_0$. De esta forma,

$$|\operatorname{Re} z - \operatorname{Re} z_0| = |x - x_0|.$$

Por otro lado,

$$|z - z_0| = |(x + iy) - (x_0 + iy_0)| = |(x - x_0) + i(y - y_0)| \geq |x - x_0|$$

Combinando los resultados, se tiene que

$$|\operatorname{Re} z - \operatorname{Re} z_0| = |x - x_0| \leq |z - z_0|.$$

Por lo tanto, eligiendo $\delta = \epsilon$ se cumple 2.9 para todo $\epsilon > 0$.

(b) Hay que probar que para todo $\epsilon > 0$, existe δ tal que

$$|\overline{z} - \overline{z_0}| < \epsilon \qquad \text{si se cumple que} \qquad 0 < |z - z_0| < \delta. \tag{2.10}$$

Como
$$|\overline{z} - \overline{z_0}| = |\overline{(z - z_0)}| = |z - z_0|,$$
eligiendo $\delta = \epsilon$, se cumple la ecuación 2.10 para todo $\epsilon > 0$.

(c) Hay que probar que para todo $\epsilon > 0$, existe δ tal que

$$\left|\frac{\overline{z}^2}{z} - 0\right| < \epsilon \qquad \text{si se cumple que} \qquad 0 < |z - 0| < \delta. \tag{2.11}$$

Observando que

$$\left|\frac{\overline{z}^2}{z} - 0\right| = \left|\frac{\overline{z}^2}{z}\right| = \frac{|\overline{z}|^2}{|z|} = \frac{|z|^2}{|z|} = |z|,$$

eligiendo $\delta = \epsilon$, se cumple la ecuación 2.11 para todo $\epsilon > 0$.

Ejercicio 2

Sean las constantes complejas a, b y c. Emplear la definición de límite dada por la ecuación 2.6 para probar que

$$(a)\ \lim_{z\to z_0}(az + b) = az_0 + b; \qquad (b)\ \lim_{z\to z_0}(z^2 + c) = z_0^2 + c;$$
$$(c)\ \lim_{z\to 1-i} x + i(2x + y) = 1 + i, \qquad \text{con} \qquad z = x + iy.$$

Solución

(a) Sea $\epsilon > 0$ y supóngase que $|z - z_0| < \delta$. Si $a = 0$, se cumple que

$$|(az + b) - (az_0 + b)| = |b - b| = 0 < \epsilon.$$

Si $a \neq 0$,

$$|(az + b) - (az_0 + b)| = |a||z - z_0| < |a|\delta.$$

Por lo tanto, eligiendo $\delta = \epsilon/|a|$, se cumple que

$$|(az + b) - (az_0 + b)| < \epsilon \qquad \text{si se cumple que} \qquad 0 < |z - z_0| < \delta = \frac{\epsilon}{|a|}.$$

(b) Sea $\epsilon > 0$ y supóngase que $|z - z_0| < \delta$. Se observa que

$$\begin{aligned}|(z^2 + c) - (z_0^2 + c)| &= |z^2 - z_0^2|\\ &= |z + z_0||z - z_0|\\ &= |z - z_0 + 2z_0||z - z_0|\\ &\leq (|z - z_0| + 2|z_0|)|z - z_0|\\ &< (\delta + 2|z_0|)\delta.\end{aligned}$$

Por lo tanto, eligiendo δ tal que $(\delta + 2|z_0|)\delta = \epsilon$, es decir, $\delta = \sqrt{|z_0|^2 + \epsilon} - |z_0|$, se cumple que

$$|(z^2 + c) - (z_0^2 + c)| < \epsilon \qquad \text{si se cumple que} \qquad 0 < |z - z_0| < \delta.$$

A continuación se resolverá el problema de forma alternativa para obtener un resultado mas simple. El método es clásico en las pruebas *epsilon-delta*. Se parte igual que antes planteando la condición $|f(z) - w_0| < \epsilon$, que en este caso es

$$|(z^2 + c) - (z_0^2 + c)| = |z^2 - z_0^2| = |z + z_0||z - z_0| < \epsilon, \tag{2.12}$$

y al despejar el término $|z - z_0|$, la condición queda

$$|z - z_0| < \frac{\epsilon}{|z + z_0|}. \tag{2.13}$$

De esta forma, podría establecerse $\delta = \epsilon/|z + z_0|$, pero δ debe depender solo de ϵ y no de otras variables, por lo que hay que eliminar el factor $|z + z_0|$. Para hacerlo, se considera que el concepto de límite se aplica solo cuando z es suficientemente cercano a z_0, por lo que se restringirá al caso en que z diste a los sumo 1 de z_0, es decir, $|z - z_0| < 1$. Así, el término $|z + z_0|$ cumple que

$$|z + z_0| = |z - z_0 + 2z_0| \leq |z - z_0| + 2|z_0| < 1 + 2|z_0|,$$

donde la última desigualdad proviene de la condición $|z - z_0| < 1$. Se obtuvo que

$$|z + z_0| < 1 + 2|z_0|. \tag{2.14}$$

Ahora, el lado derecho de la ecuación 2.13 es mínimo cuando de denominador es máximo, por lo que sustituyendo el resultado de la ecuación 2.14 resulta en

$$|z - z_0| < \frac{\epsilon}{1 + 2|z_0|}.$$

Como se tienen las dos condiciones

$$|z - z_0| < 1 \qquad \text{y} \qquad |z - z_0| < \frac{\epsilon}{1 + 2|z_0|},$$

se elige

$$\delta = \text{mín}\left\{1,\ \frac{\epsilon}{1 + 2|z_0|}\right\}.$$

Finalmente, se verificará que con esta elección de δ, se satisface la condición 2.12.

- Se considera el caso en que $\delta = 1$ y por lo tanto

  $$1 < \frac{\epsilon}{1 + 2|z_0|}, \qquad \text{es decir} \qquad 1 + 2|z_0| < \epsilon.$$

  La condición $|z - z_0| < \delta$ es en este caso $|z - z_0| < 1$, por lo que multiplicando por $|z + z_0|$ a ambos lados de la inecuación, se tiene que

  $$|z - z_0||z + z_0| < |z + z_0| \overset{(a)}{<} 1 + 2|z_0| < \epsilon,$$

  donde en (a) se empleó la ecuación 2.14. Esto indica que se cumple que $|f(z) - w_0| < \epsilon$ si $|z - z_0| < \delta$, como se requiere.
- Sea ahora

  $$\delta = \frac{\epsilon}{1 + 2|z_0|}.$$

  La condición $|z - z_0| < \delta$ es en este caso

  $$|z - z_0| < \frac{\epsilon}{1 + 2|z_0|},$$

  y al multiplicar por $|z + z_0|$ a ambos lados de la inecuación se obtiene que

  $$|z - z_0||z + z_0| < \frac{\epsilon}{1 + 2|z_0|}|z + z_0| \overset{(a)}{<} \frac{\epsilon}{1 + 2|z_0|}(1 + 2|z_0|) = \epsilon,$$

  donde en (a) se empleó la ecuación 2.14.

(c) Sea $z = x + iy$. Hay que probar que para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|[x + i(2x + y)] - (1 + i)| < \epsilon \qquad \text{si se cumple que} \qquad 0 < |(x + iy) - (1 - i)| < \delta. \tag{2.15}$$

Por un lado se tiene que

$$|(x + iy) - (1 - i)| = |(x - 1) + i(y - 1)|,$$

y por lo tanto, asumiendo que

$$|(x + iy) - (1 - i)| < \delta \qquad \text{se cumple que} \qquad |x - 1| < \delta \qquad \text{y} \qquad |y + 1| < \delta. \tag{2.16}$$

Por otro lado, se observa que

$$
\begin{aligned}
|[x + i(2x + y)] - (1 + i)| &= |(x - 1) + i(2x + y - 1)| \\
&\leq |x - 1| + |2x + y - 1| \\
&= |x - 1| + |2x - 2 + y + 1| \\
&\leq |x - 1| + 2|x - 1| + |y + 1| \\
&\overset{(a)}{<} \delta + 2\delta + \delta \\
&= 4\delta,
\end{aligned}
$$

donde en (a) se asumió que se cumple la condición de la ecuación 2.16. Por lo tanto, eligiendo $\delta = \epsilon/4$, se cumple 2.15.

Ejercicio 3

Sea n un entero positivo y sean $P(z)$ y $Q(z)$ polinomios, con $Q(z_0) \neq 0$. Emplear los resultados del teorema que conduce a la ecuación 2.7 para encontrar

$$
(a)\ \lim_{z \to z_0} \frac{1}{z^n}; \qquad (b)\ \lim_{z \to i} \frac{iz^3 - 1}{z + i}; \qquad (c)\ \lim_{z \to z_0} \frac{P(z)}{Q(z)}.
$$

Solución

(a) $\displaystyle \lim_{z \to z_0} \frac{1}{z^n} = \frac{1}{\displaystyle\lim_{z \to z_0} z^n} = \frac{1}{z_0^n}$

(b) $\displaystyle \lim_{z \to i} \frac{iz^3 - 1}{z + i} = \frac{\displaystyle\lim_{z \to i} iz^3 - 1}{\displaystyle\lim_{z \to i} z + i} = \frac{i(i^3) - 1}{i + i} = \frac{1 - 1}{2i} = 0.$

(c) $\displaystyle \lim_{z \to z_0} \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{\displaystyle\lim_{z \to z_0} P(z)}{\displaystyle\lim_{z \to z_0} Q(z)} = \frac{P(z_0)}{Q(z_0)}.$

Ejercicio 4

Emplear inducción matemática y el resultado de la ecuación 2.7 para mostrar que

$$
\lim_{z \to z_0} z^n = z_0^n, \tag{2.17}
$$

donde n es un entero positivo.

Solución Se considera primero el *caso base* en que $n = 1$. Consiste en probar que

$$
\lim_{z - z_0} z = z_0,
$$

lo que es directo: es fácil ver que alcanza con elegir $\delta = \epsilon$ en la definición de límite dada por la ecuación 2.6. El *paso inductivo* consiste en mostrar que si la ecuación 2.17 se cumple para $n = k$, se cumple para $n = k + 1$, es decir,

$$
\lim_{z \to z_0} z^k = z_0^k \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{z \to z_0} z^{k+1} = z_0^{k+1}.
$$

Como

$$
\lim_{z \to z_0} z^{k+1} = \lim_{z \to z_0} z^k z \overset{(a)}{=} \left(\lim_{z \to z_0} z^k \right) \left(\lim_{z \to z_0} z \right) \overset{(b)}{=} z_0^k z_0 = z_0^{k+1},
$$

donde en (a) se empleó el resultado de la ecuación 2.6 y en (b) se empleó el caso base y la hipótesis de inducción, concluyendo la prueba.

Ejercicio 5

Mostrar que la función
$$f(z) = \left(\frac{z}{\bar{z}}\right)^2$$
tiene valor 1 en todos los puntos no nulos de los ejes real e imaginario, donde $z = (x,\, 0)$ y $z = (0,\, y)$ respectivamente, pero tiene valor -1 en todos los puntos no nulos de la recta $y = x$, donde $z = (x,\, x)$. Esto muestra que el límite de $f(z)$ cuando z tiende a 0 no existe. Observar que no es suficiente considerar únicamente los puntos no nulos $z = (x,\, 0)$ y $z = (0,\, y)$ por ejemplo.

Solución Con $z = x + iy$,
$$f(z) = \left(\frac{z}{\bar{z}}\right)^2 = \left(\frac{x+iy}{x-iy}\right)^2.$$
En el caso en que $z = (x,\, 0)$, se tiene que
$$f(z) = \left(\frac{x+i0}{x-i0}\right)^2 = 1.$$
En el caso en que $z = (0,\, y)$, se cumple que
$$f(z) = \left(\frac{0+iy}{0-iy}\right)^2 = 1.$$
Pero si $z = (x,\, x)$,
$$f(z) = \left(\frac{x+ix}{x-ix}\right)^2 = \frac{x^2 - x^2 + 2ix^2}{x^2 - x^2 - 2ix^2} = -1.$$
Como $f(z)$ tiene valor 1 en todos los puntos del eje real e imaginario exceptuando el origen y tiene valor -1 en la recta $y = x$ exceptuando el origen, el límite de $f(z)$ cuando z tiende a 0 no puede existir.

Ejercicio 6

Probar la afirmación
$$\lim_{z\to z_0} [f(z) + F(z)] = w_0 + W_0$$
de la ecuación 2.7 mediante:

(a) el teorema 1 de la sección 2.4 y empleando propiedades del límite de funciones reales de dos variables reales.

(b) la definición 2.6 del límite.

Solución

(a) Hay que probar que si
$$\text{si} \quad \begin{array}{l} \lim\limits_{z\to z_0} f(z) = w_0 \\ \lim\limits_{z\to z_0} F(z) = W_0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \lim_{z\to z_0} [f(z) + F(z)] = w_0 + W_0.$$
Sea $z = x + iy$ y
$$f(z) = u(x,\, y) + iv(x,\, y), \qquad F(z) = U(x,\, y) + iV(x,\, y)$$
$$z_0 = x_0 + iy_0, \qquad w_0 = u_0 + iv_0, \qquad W_0 = U_0 + iV_0.$$
Por el teorema 1 de la sección 2.4 se cumple que
$$\lim_{z\to z_0} f(z) = w_0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{(x,\,y)\to(x_0,\,y_0)} u(x,\, y) = u_0 \quad \text{y} \quad \lim_{(x,\,y)\to(x_0,\,y_0)} v(x,\, y) = v_0$$
$$\lim_{z\to z_0} F(z) = W_0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{(x,\,y)\to(x_0,\,y_0)} U(x,\, y) = U_0 \quad \text{y} \quad \lim_{(x,\,y)\to(x_0,\,y_0)} V(x,\, y) = V_0$$

y por la ley del límite de la suma de funciones reales se cumple que

$$\lim_{(x,\,y)\to(x_0,\,y_0)}[u(x,\,y)+U(x,\,y)]=u_0+U_0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{(x,\,y)\to(x_0,\,y_0)}[v(x,\,y)+V(x,\,y)]=v_0+V_0. \tag{2.18}$$

Por otro lado, se tiene que

$$\begin{aligned} f(z)+F(z) &= [u(x,\,y)+iv(x,\,y)]+[U(x,\,y)+iV(x,\,y)] \\ &= [u(x,\,y)+U(x,\,y)]+i[v(x,\,y)+V(x,\,y)], \end{aligned}$$

y por lo tanto,

$$\begin{aligned} \lim_{z\to z_0} f(z)+F(z) &= \lim_{(x,\,y)\to(x_0,\,y_0)} \{[u(x,\,y)+U(x,\,y)]+i[v(x,\,y)+V(x,\,y)]\} \\ &\overset{(a)}{=} [u_0+U_0]+i[v_0+V_0] \\ &= [u_0+iv_0]+[U_0+iV_0] \\ &= w_0+iW_0. \end{aligned}$$

donde en (a) se empleó el teorema 1 de la sección 2.4 y el resultado de la ecuación 2.18, concluyendo la prueba.

(b) Considerando la definición 2.6 del límite, hay que probar que para todo $\epsilon>0$, existe $\delta>0$ tal que si $0<|z-z_0|<\delta$, se cumple que $|[f(z)+F(z)]-[w_0+W_0]|<\epsilon$. Aplicando la definición de límite a la hipótesis, se sabe que

$$\begin{aligned} &\lim_{z\to z_0} f(z)=w_0 &&\Rightarrow &&|f(z)-w_0|<\frac{\epsilon}{2} &&\text{para todo } z \text{ tal que} \quad 0<|z-z_0|<\delta_1 \\ &\lim_{z\to z_0} F(z)=W_0 &&\Rightarrow &&|F(z)-W_0|<\frac{\epsilon}{2} &&\text{para todo } z \text{ tal que} \quad 0<|z-z_0|<\delta_2. \end{aligned}$$

Como

$$|[f(z)+F(z)]-[w_0+W_0]|=|[f(z)-w_0]+[F(z)-W_0]|\leq|f(z)-w_0|+|F(z)-W_0|,$$

eligiendo $\delta=\min\{\delta_1,\,\delta_2\}$, se cumple que

$$|[f(z)+F(z)]-[w_0+W_0]|\leq|f(z)-w_0|+|F(z)-W_0|<\frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon,$$

que es lo que se quería demostrar.

Ejercicio 7

Emplear la definición 2.6 de límite para mostrar que

$$\text{si} \qquad \lim_{z\to z_0} f(z)=w_0 \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{z\to z_0}|f(z)|=|w_0|.$$

Solución Se probará primero la desigualdad

$$||z_1|-|z_2||\leq|z_1-z_2|, \tag{2.19}$$

referida como *desigualdad triangular inversa*[3]. Para hacerlo, se observa que

$$\begin{aligned} |z_1|&=|(z_1-z_2)+z_2|\leq|z_1-z_2|+|z_2| &&\Rightarrow &&|z_1|-|z_2|\leq|z_1-z_2| \\ |z_2|&=|(z_2-z_1)+z_1|\leq|z_2-z_1|+|z_1| &&\Rightarrow &&|z_1|-|z_2|\geq-|z_1-z_2|. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$-|z_1-z_2|\leq|z_1|-|z_2|\leq|z_1-z_2| \qquad \Rightarrow \qquad ||z_1|-|z_2||\leq|z_1-z_2|,$$

[3]Ver `https://en.wikipedia.org/wiki/Triangle_inequality#Reverse_triangle_inequality`, por ejemplo.

concluyendo la prueba.

Comenzando con el ejercicio, hay que mostrar que para cada número positivo ϵ, existe un número positivo δ tal que

$$||f(z)| - |w_0|| < \epsilon \qquad \text{para todo } z \text{ tal que} \qquad 0 < |z - z_0| < \delta,$$

sabiendo que existe un número positivo δ_2 tal que

$$|f(z) - w_0| < \epsilon \qquad \text{para todo } z \text{ tal que} \qquad 0 < |z - z_0| < \delta_1.$$

De la ecuación 2.19 y la hipótesis se deduce que

$$||f(z)| - |w_0|| \leq |f(z) - w_0| < \epsilon,$$

si $\delta = \delta_1$.

Ejercicio 8

Definiendo $\Delta z = z - z_0$, mostrar que

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \lim_{\Delta z \to 0} f(z_0 + \Delta z) = w_0.$$

Solución Empleando la definición 2.6 de límite hay que probar que para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$|f(z) - w_0| < \epsilon \qquad \text{para todo } z \text{ tal que} \qquad 0 < |z - z_0| < \delta_1,$$

si y solo si existe δ_2 tal que

$$|f(z_0 + \Delta z) - w_0| < \epsilon \qquad \text{para todo } \Delta z \text{ tal que} \qquad 0 < |\Delta z - 0| < \delta_2.$$

La demostración es inmediata sustituyendo $\Delta z = z - z_0$ y tomando $\delta = \delta_1 = \delta_2$.

Ejercicio 9

Mostrar que

$$\lim_{z \to z_0} f(z)g(z) = 0 \qquad \text{si} \qquad \lim_{z \to z_0} f(z) = 0$$

y si existe un número positivo M tal que $|g(z)| \leq M$ para todo z en algún entorno de z_0.

Solución Empleando la definición 2.6 de límite hay que probar que para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$|f(z)g(z) - 0| < \epsilon \qquad \text{para todo } z \text{ tal que} \qquad 0 < |z - z_0| < \delta.$$

Pero por hipótesis se sabe que existe δ_1 tal que

$$|g(z)| \leq M \qquad \text{para todo } z \text{ tal que} \qquad 0 < |z - z_0| < \delta_1$$

y además que para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta_2 > 0$ tal que

$$|f(z) - 0| < \frac{\epsilon}{M} \qquad \text{para todo } z \text{ tal que} \qquad 0 < |z - z_0| < \delta_2.$$

Por lo tanto

$$|f(z)g(z) - 0| = |f(z)||g(z)| < \frac{\epsilon}{M} M = \epsilon$$

si se elige $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Esto concluye la prueba.

Ejercicio 10

Empleando el teorema de la sección 2.5, mostrar que

$$(a) \ \lim_{z \to \infty} \frac{4z^2}{(z-1)^2} = 4; \qquad (b) \ \lim_{z \to 1} \frac{1}{(z-1)^3} = \infty; \qquad (c) \ \lim_{z \to \infty} \frac{z^2+1}{z-1} = \infty.$$

Solución

$$(a)\ \lim_{z\to\infty} \frac{4z^2}{(z-1)^2} = \lim_{z\to 0} \frac{4\left(\dfrac{1}{z}\right)^2}{\left(\dfrac{1}{z}-1\right)^2} = \lim_{z\to 0} \frac{4}{(1-z)^2} = 4$$

$$(b)\ \lim_{z\to 1}(z-1)^3 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \lim_{z\to 1} \frac{1}{(z-1)^3} = \infty.$$

$$(c)\ \lim_{z\to 0} \frac{\dfrac{1}{z}-1}{\left(\dfrac{1}{z}\right)^2+1} = \lim_{z\to 0} \frac{1-z}{\dfrac{1+z^2}{z}} = \lim_{z\to 0} \frac{z(1-z)}{1+z^2} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \lim_{z\to\infty} \frac{z^2+1}{z-1} = \infty.$$

Ejercicio 11

Empleando el teorema de la sección 2.5, mostrar que si

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \qquad \text{con} \qquad ad-bc \neq 0,$$

(a) $\displaystyle\lim_{z\to\infty} T(z) = \infty$ si $c = 0$; $\qquad$ (b) $\displaystyle\lim_{z\to\infty} T(z) = \frac{a}{c}$ y $\displaystyle\lim_{z\to -d/c} T(z) = \infty$ si $c \neq 0$.

Solución

(a) Hay que probar que si $c = 0$, se cumple que

$$\lim_{z\to 0} \frac{1}{T\left(\dfrac{1}{z}\right)} = 0.$$

Efectivamente,

$$\lim_{z\to 0} \frac{d}{a\left(\dfrac{1}{z}\right)+b} = \lim_{z\to 0} \frac{dz}{a+bz} = 0.$$

(b) Para mostrar la primera igualdad, se observa que

$$\lim_{z\to 0} \frac{a\left(\dfrac{1}{z}\right)+b}{c\left(\dfrac{1}{z}\right)+d} = \lim_{z\to 0} \frac{a+bz}{c+dz} = \frac{a}{c} \qquad \Leftrightarrow \qquad \lim_{z\to\infty} T(z) = \frac{a}{c}.$$

Para probar la segunda igualdad, se ve que

$$\lim_{z\to -d/c} \frac{cz+d}{az+b} = \frac{c\left(-\dfrac{d}{c}\right)+d}{a\left(-\dfrac{d}{c}\right)+b} = \frac{-cd+cd}{-ad+bc} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \lim_{z\to -d/c} T(z) = \infty.$$

Ejercicio 12

Indicar porqué los límites que involucran el punto en el infinito son únicos.

Solución Pendiente.

Ejercicio 13

Mostrar que un conjunto S es no acotado si y solo si cada entorno del punto en el infinito contiene al menos un punto en S.

Solución Partiendo por las definiciones, por un lado, el concepto de conjunto no acotado fue dado en la sección 1.2 e indica que

$$S \text{ no acotado: para todo } R > 0 \text{ existe } z_R \in S \text{ tal que } |z_R| > R.$$

Por otro lado, el hecho de que cada entorno del punto en el infinito contiene al menos un punto en S se puede expresar como (ver la sección 2.5)

$$\text{para todo } \epsilon > 0 \text{ existe } z_\epsilon \in S \text{ tal que } |z_\epsilon| > \frac{1}{\epsilon}.$$

El teorema directo implica mostrar que si para todo $R > 0$ existe $z_R \in S$ tal que $|z_R| > R$, se cumple que para todo $\epsilon > 0$, existe algún $z \in S$ tal que $|z| > 1/\epsilon$. Por lo tanto, dado $\epsilon > 0$, si se elige $R \geq 1/\epsilon$, por hipótesis se sabe que

$$\text{existe } z_R \in S \text{ tal que } |z_R| > R \geq \frac{1}{\epsilon},$$

que indica que todo entorno ϵ de infinito contiene algún punto de S.

El recíproco implica mostrar que si para todo $\epsilon > 0$ existe $z_\epsilon \in S$ tal que $|z_\epsilon| > 1/\epsilon$ se cumple que para todo $R > 0$ existe $z_R \in S$ tal que $|z_R| > R$. Por lo tanto, dado $R > 0$, si se elige $\epsilon \geq 1/R$ por hipótesis se cumple que

$$\text{existe } z_\epsilon \in S \text{ tal que } |z_\epsilon| > \frac{1}{\epsilon} \geq R,$$

que indica que el conjunto S es no acotado.

2.7. Derivadas

Sea f una función cuyo dominio de definición contiene un entorno $|z - z_0| < \epsilon$ del punto z_0. La *derivada* de f en el punto z_0 es el límite

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \tag{2.20}$$

y la función f se dice *diferenciable* en z_0 cuando $f'(z_0)$ existe. Expresando la variable z en la definición de la ecuación 2.20 en términos de la nueva variable compleja

$$\Delta z = z - z_0, \qquad z \neq z_0,$$

la definición se puede expresar como

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}. \tag{2.21}$$

Como f está definida en un entorno de z_0, el número $f(z_0 + \Delta z)$ está siempre definido para Δz suficientemente pequeño.

Cuando la derivada se expresa como en la ecuación 2.21, usualmente se elimina el subíndice en z_0 y se define el número

$$\Delta w = f(z + \Delta z) - f(z),$$

que denota el cambio en el valor $w = f(z)$ de f correspondiente a un cambio Δz en el punto en donde f es evaluada. Por lo tanto, si se escribe dw/dz para $f'(z)$, la ecuación 2.21 queda

$$\frac{dw}{dz} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}. \tag{2.22}$$

Ejemplo Se considera la función de valor real $f(z) = |z|^2$. De esta forma

$$\begin{aligned}\frac{\Delta w}{\Delta z} &= \frac{|z+\Delta z|^2 - |z|^2}{\Delta z}\\ &= \frac{(z+\Delta z)\overline{(z+\Delta z)} - z\overline{z}}{\Delta z}\\ &= \frac{(z+\Delta z)(\overline{z}+\overline{\Delta z}) - z\overline{z}}{\Delta z}\\ &= \frac{z\overline{z} + z\overline{\Delta z} + \Delta z\overline{z} + \Delta z\overline{\Delta z} - z\overline{z}}{\Delta z},\end{aligned}$$

resultando en

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = z\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} + \overline{z} + \overline{\Delta z}. \tag{2.23}$$

Si el límite de $\Delta w/\Delta z$ existe, puede encontrarse permitiendo a $\Delta z = (\Delta x,\, \Delta y)$ aproximarse al origen $(0,\, 0)$ por cualquier lado. En particular, si Δz se aproxima al origen por el eje real $(\Delta x,\, 0)$,

$$\overline{\Delta z} = \overline{\Delta x + i0} = \Delta x - i0 = \Delta z$$

y por lo tanto,

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = z + \overline{z} + \Delta z.$$

resultando en que

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z} = z + \overline{z}.$$

Sin embargo, cuando Δz se aproxima al origen $(0,\, 0)$ por el eje vertical $(0,\, \Delta y)$, como

$$\overline{\Delta z} = \overline{0 + i\Delta y} = 0 - i\Delta y = -\Delta z,$$

se tiene que

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = -z + \overline{z} - \Delta z.$$

resultando en que

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z} = -z + \overline{z}.$$

Si el límite de $\Delta w/\Delta z$ existe cuando Δz tiende a cero, por la unicidad del límite, se debe cumplir que

$$z + \overline{z} = -z + \overline{z} \qquad \Leftrightarrow \qquad z = 0.$$

Esto indica que dw/dz no puede existir si $z \neq 0$.

Para mostrar que dw/dz efectivamente existe si $z = 0$, se observa que en ese caso la ecuación 2.23 se reduce a

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \overline{\Delta z}.$$

Se concluye que dw/dz solo existe en $z = 0$ y su valor es 0.

Este ejemplo ilustra los tres siguientes hechos, de los cuales los dos primeros pueden resultar sorprendentes:

(a) Una función $f(z) = u(x,\, y) + iv(x,\, y)$ puede ser diferenciable en un punto $z = (x,\, y)$ y no serlo en ningún lado mas en un entorno de ese punto.

(b) Como $u(x,\, y) = x^2 + y^2$ y $v(x,\, y) = 0$ si $f(z) = |z|^2$, puede verse que los componentes real e imaginario de una función de variable compleja pueden tener derivadas parciales continuas de todos los ordenes en el punto $z = (x,\, y)$ y aún así, la función en z puede no ser diferenciable en ese punto.

(*c*) Como los componentes $u(x,\, y) = x^2 + y^2$ y $v(x,\, y) = 0$ son continuos en todo el plano complejo, es evidente que la continuidad de una función de variable compleja en un punto no implica la existencia de la derivada en ese punto. Mas precisamente, los componentes

$$u(x,\, y) = x^2 + y^2 \qquad \text{y} \qquad v(x,\, y) = 0$$

de $f(z) = |z|^2$ son continuos en cada punto de $z = (x,\, y)$ pero $f'(z)$ no existe en ese punto, exceptuando el origen $(0,\, 0)$. Es sin embargo cierto que *la existencia de la derivada de una función en un punto implica la continuidad de la función en ese punto*. Para ver esto, asúmase que existe $f'(z_0)$. De esta forma,

$$\lim_{z \to z_0} [f(z) - f(z_0)] = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \lim_{z \to z_0} (z - z_0) = f'(z_0) \times 0 = 0,$$

y por lo tanto, se cumple que

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0),$$

que es la condición de continuidad indicada en la sección 2.6.

2.8. Reglas de diferenciación

La definición de derivada dada en la sección 2.7 es formalmente la misma definición dada en cálculo para variables reales sustituyendo z por x. Por lo tanto, las reglas de diferenciación indicadas a continuación pueden deducirse a partir de la definición 2.20 empleando lo mismos pasos que en cálculo.

Sea c una constante compleja y f una función cuya derivada en el punto z existe. Se puede mostrar que

$$\frac{d}{dz} c = 0, \qquad \frac{d}{dz} z = 1, \qquad \frac{d}{dz}[cf(z)] = cf'(z).$$

Además, si n es un entero positivo,

$$\frac{d}{dz} z^n = nz^{n-1}. \tag{2.24}$$

Esta regla también es válida si n es un entero negativo siempre que $z \neq 0$.

Si la derivada de las dos funciones f y g existen en el punto z, se cumple que

$$\frac{d}{dz}[f(z) + g(z)] = f'(z) + g'(z) \qquad \text{y} \qquad \frac{d}{dz}[f(z)g(z)] = f'(z)g(z) + f(z)g'(z),$$

y además, si $g'(z) \neq 0$,

$$\frac{d}{dz}\left[\frac{f(z)}{g(z)}\right] = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{[g(z)]^2}$$

Regla de la cadena Hay también una regla de la cadena para diferenciar funciones compuestas. Supóngase que f tiene derivada en z_0 y que g tiene derivada en $f(z_0)$. Entonces, se cumple que la función $F(z) = g[f(z)]$ tiene derivada en z_0, y es

$$F'(z) = g'[f(z_0)]f'(z_0). \tag{2.25}$$

Si se escribe $w = f(z)$ y $W = g(w)$, de forma tal que $W = F(z)$, la regla de la cadena queda

$$\frac{dW}{dz} = \frac{dW}{dw}\frac{dw}{dz}.$$

Para comenzar la deducción de la ecuación 2.25, sea un punto z_0 específico en el cual $f'(z_0)$ existe. Sea $w_0 = f(z_0)$ y asúmase que $g'(w_0)$ existe. Por definición entonces,

$$g'(w_0) = \lim_{w \to w_0} \frac{g(w) - g(w_0)}{w - w_0}. \tag{2.26}$$

Por lo tanto, hay algún entorno ϵ $|w - w_0| < \epsilon$ de w_0 tal que para todos los puntos w de dicho entorno, puede definirse la función

$$\Phi(w) = \frac{g(w) - g(w_0)}{w - w_0} - g'(w_0), \qquad \text{para} \qquad w \neq w_0, \tag{2.27}$$

con la imposición adicional de que $\Phi(w_0) = 0$. Observar que de la ecuación 2.26 se cumple que

$$\lim_{w \to w_0} \Phi(w) = \lim_{w \to w_0} \left[\frac{g(w) - g(w_0)}{w - w_0} - g'(w_0) \right] = g'(w_0) - g'(w_0) = 0,$$

y como se definió que $\Phi(w_0) = 0$, $\Phi(w)$ es continua en w_0 (ver la sección 2.6).

Continuando, la ecuación 2.27 puede expresarse como

$$g(w) - g(w_0) = [g'(w_0) + \Phi(w)](w - w_0), \qquad \text{para} \qquad |w - w_0| < \epsilon, \tag{2.28}$$

que es válida incluso para $w = w_0$. Como $f'(z_0)$ existe, f es continua en z_0, y por lo tanto, puede elegirse un número positivo δ tal que el punto $f(z)$ esté en del entorno ϵ $|w - w_0|$ de w_0 si z está en el entorno δ $|z - z_0| < \delta$ de z_0, como indica la definición de continuidad 2.8. De esta forma, es legítimo reemplazar w por $f(z)$ en la ecuación 2.28 cuando z es algún punto del entorno $|z - z_0| < \delta$. Con dicha sustitución y con $w_0 = f(z_0)$, la ecuación 2.28 queda

$$g[f(z)] - g[f(z_0)] = \{g'[f(w_0)] + \Phi[f(z)]\}[f(z) - f(z_0)], \qquad \text{para} \qquad |z - z_0| < \delta$$

y dividiendo ambos lados de la igualdad entre $z - z_0$ se obtiene que

$$\frac{g[f(z)] - g[f(z_0)]}{z - z_0} = \{g'[f(z_0)] + \Phi[f(z)]\}\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}, \qquad \text{para} \qquad 0 < |z - z_0| < \delta, \tag{2.29}$$

donde se debió excluir el punto $z = z_0$ para evitar la división entre cero. Como ya se mencionó, f es continua en z_0 y Φ es continua en $w_0 = f(z_0)$. Por lo tanto, la composición $\Phi[f(z)]$ es continua en z_0, y como además $\Phi(\mathbf{w}_0) = 0$, se cumple que

$$\lim_{z \to z_0} \Phi[f(z)] = 0.$$

Teniendo en cuenta este resultado, tomando el límite de z teniendo a s_0 en la ecuación 2.29, se tiene que

$$\begin{aligned} \lim_{z \to z_0} \frac{g[f(z)] - g[f(z_0)]}{z - z_0} &= \{g'[f(z_0)] + \lim_{z \to z_0} \Phi[f(z)]\} \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \\ &= g'[f(z_0)]f'(z_0), \end{aligned}$$

que es lo que se quería demostrar.

2.8.1. Ejercicios

Ejercicio 1

Emplear la definición de derivada dada por la ecuación 2.22 para probar que

$$\frac{dw}{dz} = 2z \qquad \text{cuando} \qquad w = z^2.$$

Solución Como

$$\Delta w = f(z + \Delta x) - f(z)$$

en este caso se tiene que

$$\Delta w = (z + \Delta z)^2 - z^2 = z^2 + 2z\Delta z + (\Delta z)^2 - z^2 = \Delta z(2z + \Delta z),$$

y la aplicación de la ecuación 2.22 resulta en

$$\frac{dw}{dz} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta z(2z + \Delta z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} (2z + \Delta z) = 2z.$$

Ejercicio 2

Emplear los resultados de la sección 2.8 para calcular $f'(z)$ cuando

(a) $f(z) = 3z^2 - 2z + 4$;

(b) $f(z) = (2z^2 + i)^5$;

(c) $f(z) = \dfrac{z-1}{2z+1}$ con $z \neq \dfrac{1}{2}$;

(d) $f(z) = \dfrac{(1+z^2)^4}{z^2}$ con $z \neq 0$.

Solución

(a) $f'(z) = 6z - 2$

(b) $f'(z) = 5(2z^2 + i)^4 4z = 20z(2z^2 + i)^4$

(c) $f'(z) = \dfrac{1 \times (2z+1) - (z-1) \times 2}{(2z+1)^2} = \dfrac{2z+1-2z+2}{(2z+1)^2} = \dfrac{3}{(2z+1)^2}$

(d)

$$
\begin{aligned}
f'(z) &= \frac{4(1+z^2)^3 \times 2z \times z^2 - (1+z^2)^4 \times 2z}{z^4} \\
&= \frac{2(1+z^2)^3 \left[4z^2 - (1+z^2)\right]}{z^3} \\
&= \frac{2(1+z^2)^3(3z^2-1)}{z^3}.
\end{aligned}
$$

Ejercicio 3

Empleando los resultados de la sección 2.8 mostrar que

(a) un polinomio

$$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n, \qquad \text{con} \qquad a_n \neq 0$$

de grado n $(n \geq 1)$ es diferenciable en todo el plano, y la derivada es

$$P'(z) = a_1 + 2a_2 z + \cdots + n a_n z^{n-1};$$

(b) los coeficientes del polinomio de la parte (a) pueden escribirse como

$$a_0 = P(0), \qquad a_1 = \frac{P'(0)}{1!}, \qquad a_2 = \frac{P''(0)}{2!}, \qquad \ldots, \qquad a_n = \frac{P^{(n)}(0)}{n!}.$$

Solución

(a) Una función es diferenciable en un punto z_0 si existe el límite de la ecuación 2.20. Para probar que un polinomio es diferenciable en todo el plano, hay que probar que dicho límite existe para todo z_0. Se probará que el límite existe para la función z^n. Si esto es cierto, por las reglas de la derivada del producto por una constante y de la suma (ver la sección 2.8), también es cierto para un polinomio.

Sea la función $f(z) = z^n$. Se probará que

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{z^n - z_0^n}{z - z_0}$$

existe para todo z_0 y se obtendrá su valor de dos formas. Una forma de hacerlo es considerando la identidad

$$z^n - z_0^n = (z - z_0)(z^{n-1} + z^{n-2} z_0 + \cdots + z z_0^{n-2} + z_0^{n-1}) = (z - z_0) \sum_{k=0}^{n-1} z^{n-1-k} z_0^k.$$

Para verificar este resultado, se parte desarrollando el lado derecho de la identidad,

$$\begin{aligned}(z-z_0)\sum_{k=0}^{n-1} z^{n-1-k}z_0^k &= \sum_{k=0}^{n-1} z^{n-k}z_0^k - \sum_{k=0}^{n-1} z^{n-1-k}z_0^{k+1}\\ &\overset{(a)}{=} \sum_{k=0}^{n-1} z^{n-k}z_0^k - \sum_{m=1}^{n} z^{n-m}z_0^m\\ &\overset{(b)}{=} z^n - z_0^n,\end{aligned}$$

donde en (a) se realizó el cambio de variable $m = k+1$ en la segunda sumatoria y en (b) se observó que todos los términos de las sumatorias se cancelan excepto el correspondiente a $k = 0$ y a $m = n$. Con esta identidad, se tiene que

$$\begin{aligned}f'(z_0) &= \lim_{z\to z_0} \frac{z^n - z_0^n}{z - z_0}\\ &= \lim_{z\to z_0} \frac{(z-z_0)\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} z^{n-1-k}z_0^k}{z-z_0}\\ &= \lim_{z\to z_0} \sum_{k=0}^{n-1} z^{n-1-k}z_0^k\\ &= \sum_{k=0}^{n-1} z_0^{n-1-k}z_0^k\\ &= \sum_{k=0}^{n-1} z_0^{n-1}\\ &= nz_0^{n-1}.\end{aligned}$$

Como $n \geq 1$, se concluye que el límite de la definición de la derivada existe para todo z_0 y es

$$(z_0^n)' = nz_0^{n-1}.$$

En el ejercicio 6 de esta sección, se realiza el mismo cálculo de otras dos formas.

Se obtuvo que si $f(z) = z^n$, $f'(z) = nz^{n-1}$. Por lo tanto, se concluye que la derivada de

$$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$$

es

$$P'(z) = a_1 + 2a_2 z + \cdots + na_n z^{n-1}.$$

(b) Derivando sucesivamente, se observa que

$$\begin{aligned}P'(z) &= a_1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 \cdots + na_n z^{n-1}\\ P''(z) &= 2a_2 + 3\times 2\times a_3 z^2 \cdots + n(n-1)a_n z^{n-2}\end{aligned}$$

y en general, se cumple que

$$\begin{aligned}P^{(k)}(z) &= k(k-1)\ldots 1\times a_k + (k+1)k\ldots 2\times a_{k+1}z + \cdots + n(n-1)\ldots[n-(k-1)]a_n z^{n-k}\\ &= k!a_k + \frac{(k+1)!}{1!}a_{k+1}z + \frac{(k+2)!}{2!}a_{k+2}z^2 + \cdots + \frac{n!}{(n-k)!}a_n z^{n-k}.\end{aligned}$$

Evaluando en $z = 0$ se cumple que

$$P^{(k)}(0) = k!a_k,$$

y por lo tanto,

$$a_k = \frac{P^{(k)}(0)}{k!},$$

que es lo que se quería mostrar.

Ejercicio 4

Supóngase que $f(z_0) = g(z_0) = 0$ y que existe $f'(z_0)$ y $g'(z_0)$ con $g'(z_0) \neq 0$. Emplear la definición de la derivada dada por la ecuación 2.20 para mostrar que

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}.$$

Solución El resultado que se pide mostrar se llama regla de l'Hôpital.[4] De la definición de derivada, se obtiene inmediatamente que

$$\frac{f'(z_0)}{g'(z_0)} = \frac{\displaystyle\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}}{\displaystyle\lim_{z \to z_0} \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0}} = \lim_{z \to z_0} \frac{\dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}}{\dfrac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0}} = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)},$$

donde en la última igualdad se tuvo en cuenta que $f(z_0) = g(z_0) = 0$.

Ejercicio 5

Demostrar la expresión de la derivada de las suma de funciones de la sección 2.8.

Solución Hay que mostrar que

$$\frac{d}{dz}[f(z) + g(z)] = f'(z) + g'(z).$$

Para hacerlo, se parte observando que

$$\Delta w = [f(z + \Delta z) + g(z + \Delta z)] - [f(z) + g(z)] = [f(z + \Delta z) - f(z)] + [g(z + \Delta z) - g(z)].$$

Por lo tanto,

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} + \frac{g(z + \Delta z) - g(z)}{\Delta z}$$

y

$$\frac{dw}{dz} = \lim_{z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} + \lim_{z \to 0} \frac{g(z + \Delta z) - g(z)}{\Delta z} = f'(z) + g'(z)$$

Ejercicio 6

Deducir la expresión de la derivada de z^n cuando n es un entero positivo mediante

(a) inducción matemática y la regla de la derivada del producto de dos funciones indicado en la sección 2.8;

(b) la definición de derivada de la ecuación 2.22 y la fórmula binomial dada por la ecuación 1.1.

Solución Hay que mostrar que

$$\frac{d}{dz} z^n = n z^{n-1}.$$

(a) Para mostrar el resultado por inducción se parte por verificar que se cumple paso base con $n = 1$. Efectivamente,

$$\frac{d}{dz} z^1 = 1 \times z^0 = 1,$$

brinda el resultado correcto. El paso inductivo consiste en probar que el resultado se cumple para $n + 1$,

$$\frac{d}{dz} z^{n+1} = (n + 1) z^n,$$

[4]Ver https://en.wikipedia.org/wiki/L'Hôpital's_rule, por ejemplo.

asumiendo que se cumple para n. Para hacerlo, se observa que

$$\frac{d}{dz}z^{n+1} \overset{(a)}{=} \frac{d}{dz}(z^n z) \overset{(b)}{=} \left(\frac{d}{dz}z^n\right)z + z^n\frac{d}{dz}z = nz^{n-1}z + z^n = nz^n + z^n = (n+1)z^n,$$

donde en (a) se consideró que $z^{n+1} = z^n z$ y en (b) se empleó la regla de la derivada del producto de dos funciones.

(b) Otra forma de obtener el resultado es a partir de la ecuación 2.22,

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(z+\Delta z)^n - z^n}{\Delta z}$$

y considerando el teorema del binomio dado por la ecuación 1.1. De esta forma,

$$\begin{aligned}
(z+\Delta z)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^{n-k}(\Delta z)^k \\
&= \binom{n}{0} z^n(\Delta z)^0 + \binom{n}{1} z^{n-1}(\Delta z)^1 + \binom{n}{2} z^{n-2}(\Delta z)^2 + \cdots + \binom{n}{n} z^0(\Delta z)^n \\
&= z^n + nz^{n-1}\Delta z + \frac{n!}{2!(n-2)!}z^{n-2}(\Delta z)^2 + \cdots + (\Delta z)^n,
\end{aligned}$$

y por lo tanto,

$$\begin{aligned}
f'(z) &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(z+\Delta z)^n - z^n}{\Delta z} \\
&= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{1}{\Delta z}\left[z^n + nz^{n-1}\Delta z + \frac{n!}{2!(n-2)!}z^{n-2}(\Delta z)^2 + \cdots + (\Delta z)^n - z^n\right] \\
&= \lim_{\Delta z \to 0} \left[nz^{n-1} + \frac{n!}{2!(n-2)!}z^{n-2}\Delta z + \cdots + (\Delta z)^{n-1}\right] \\
&= nz^{n-1}.
\end{aligned}$$

Ejercicio 7

Probar que la ecuación 2.24 de la derivada de z^n es válida también si n es un entero negativo $(n = -1, -2, \ldots)$, asumiendo que $z \neq 0$.

Solución Sea n un entero negativo y defínase el entero positivo $m = -n$. De esta forma

$$f(z) = z^n = z^{-m} = \frac{1}{z^m}.$$

Aplicando la regla de la derivada del cociente a la última expresión, se tiene que

$$f'(z) = \frac{(1)' \times z^m - 1 \times (z^m)'}{(z^m)^2} \overset{(a)}{=} \frac{-mz^{m-1}}{z^{2m}} = -mz^{m-1}z^{-2m} = -mz^{m-1-2m} = -mz^{-m-1},$$

donde en (a) se aplicó el resultado de la ecuación 2.24, que se sabe que se cumple si m es un entero positivo (ver los ejercicios 3 y 6). Finalmente, reemplazando $n = -m$ se concluye que

$$f'(z) = nz^{n-1}.$$

Ejercicio 8

Mostrar que $f'(z)$ no existe en ningún punto z cuando

(a) $f(z) = \operatorname{Re} z$; $\quad$ (b) $f(z) = \operatorname{Im} z$.

Solución

(*a*) En este caso se tiene que

$$\frac{\Delta w}{\Delta z}=\frac{\operatorname{Re}(z+\Delta z)-\operatorname{Re} z}{\Delta z}=\frac{\operatorname{Re} z+\operatorname{Re}\Delta z-\operatorname{Re} z}{\Delta z}=\frac{\operatorname{Re}\Delta z}{\Delta z}.$$

Notar que la expresión solo depende de Δz y no depende de z, el punto en donde se quiere calcular la derivada. Si Δz se acerca a $(0,\,0)$ por la recta horizontal $\Delta z=\Delta x+i0$, se cumple que

$$\frac{\Delta w}{\Delta z}=\frac{\operatorname{Re}\Delta z}{\Delta z}=\frac{\Delta x}{\Delta x}=1.$$

Por otro lado, si Δz se acerca a $(0,\,0)$ por la recta vertical $\Delta z=0+i\Delta y$, se cumple que

$$\frac{\Delta w}{\Delta z}=\frac{\operatorname{Re}\Delta z}{\Delta z}=\frac{0}{i\Delta y}=0.$$

Por la unicidad del límite se concluye que dw/dz no existe para ningún punto z del plano complejo.

(*b*) Ahora,

$$\frac{\Delta w}{\Delta z}=\frac{\operatorname{Im}(z+\Delta z)-\operatorname{Im} z}{\Delta z}=\frac{\operatorname{Im} z+\operatorname{Im}\Delta z-\operatorname{Im} z}{\Delta z}=\frac{\operatorname{Im}\Delta z}{\Delta z}.$$

Si Δz se acerca a $(0,\,0)$ por la recta horizontal $\Delta z=\Delta x+i0$, se cumple que

$$\frac{\Delta w}{\Delta z}=\frac{\operatorname{Im}\Delta z}{\Delta z}=\frac{0}{\Delta x}=0.$$

Por otro lado, si Δz se acerca a $(0,\,0)$ por la recta vertical $\Delta z=0+i\Delta y$, se cumple que

$$\frac{\Delta w}{\Delta z}=\frac{\operatorname{Im}\Delta z}{\Delta z}=\frac{\Delta y}{i\Delta y}=-i.$$

Como los valores son distintos en ambas direcciones, el límite no existe para ningún z.

Ejercicio 9

Sea la función

$$f(z)=\begin{cases}\dfrac{\overline{z}^2}{z} & \text{si } z\neq 0\\ 0 & \text{si } z=0.\end{cases}$$

Mostrar que si $z=0$, $\Delta w/\Delta z=1$ en cada punto no nulo del eje real e imaginario en el plano Δz o $\Delta x\Delta y$. Luego mostrar que $\Delta w/\Delta z=-1$ en cada punto no nulo $(\Delta x,\,\Delta y)$ de la recta $\Delta y=\Delta x$ de ese plano. De estas observaciones, concluir que $f'(0)$ no existe. Notar que para obtener este resultado no es suficiente considerar únicamente aproximaciones horizontales y verticales al origen en el plano Δz (ver también el ejercicio 5 de la sección 2.6).

Solución Para $z=0$ se tiene que

$$\Delta w=f(z+\Delta z)-f(z)\overset{(a)}{=}f(\Delta z)-f(0)\overset{(b)}{=}f(\Delta z)=\frac{\overline{\Delta z}^2}{\Delta z},$$

donde en (*a*) se consideró el caso en que $z=0$ y en (*b*) que $f(0)=0$. Por lo tanto,

$$\frac{\Delta w}{\Delta z}=\frac{\overline{\Delta z}^2}{\Delta z^2}.$$

Al aproximarse al origen en el plano Δz por la recta horizontal $\Delta z=\Delta x+i0$, se cumple que $\overline{\Delta z}=\Delta z$ y por lo tanto,

$$\frac{\Delta w}{\Delta z}=\frac{\overline{\Delta z}^2}{\Delta z^2}=\frac{\Delta z^2}{\Delta z^2}=1.$$

Al aproximarse al origen en el plano Δz por la recta vertical $\Delta z = 0 + i\Delta y$, se cumple que $\overline{\Delta z} = -i\Delta y = -\Delta z$ y por lo tanto,

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\overline{\Delta z}^2}{\Delta z^2} = \frac{(-\Delta z)^2}{\Delta z^2} = \frac{\Delta z^2}{\Delta z^2} = 1.$$

Notar que el valor es el mismo al aproximarse al origen tanto por una recta horizontal como una recta vertical.

Se considera ahora el caso en que se tiende al origen por la recta $\Delta y = \Delta x$ en el plano Δz. De esta forma, se cumple que

$$\Delta z = \Delta x + i\Delta x = \Delta x(1+i) \qquad \text{y} \qquad \overline{\Delta z} = \Delta x - i\Delta x = \Delta x(1-i),$$

y por lo tanto

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\overline{\Delta z}^2}{\Delta z^2} = \frac{\Delta x^2(1-i)^2}{\Delta x^2(1+i)^2} = \frac{-2i}{2i} = -1.$$

Como el valor al tender al origen por la recta $\Delta y = \Delta x$ es distinto al valor al tender por la recta horizontal o vertical, por la unicidad del límite se concluye que no existe $f'(0)$.

Ejercicio 10

Con la ayuda de la fórmula binomial dada por la ecuación 1.1, señalar porque cada una de las funciones

$$P_n(z) = \frac{1}{n!2^n}\frac{d^n}{dz^n}(z^2-1)^n, \qquad \text{para} \qquad n = 0,\,1,\,2,\,\dots, \tag{2.30}$$

es un polinomio de grado n. Se emplea la convención de que la derivada de orden cero de una función es la propia función. Estos polinomios se llaman *polinomios de Legendre*.

Solución Para mostrar que la ecuación 2.30 es un polinomio de grado n se desarrollará la ecuación para los ordenes $n = 0$, 1 y 2 y luego se desarrollará para el caso general.

- $n = 0$:
$$P_0(z) = \frac{1}{0!2^0}\frac{d^0}{dz^0}(z^2-1)^0 = 1.$$
- $n = 1$:
$$P_1(z) = \frac{1}{2}\frac{d}{dz}(z^2-1) = \frac{1}{2}2z = z.$$
- $n = 2$:
$$P_2(z) = \frac{1}{2!2^2}\frac{d^2}{dz^2}(z^2-1)^2 = \frac{1}{8}\frac{d^2}{dz^2}(z^4-2z^2+1),$$
  y como
$$\frac{d}{dz}(z^4-2z^2+1) = 4z^3-4z \qquad \text{y} \qquad \frac{d^2}{dz^2}(z^4-2z^2+1) = \frac{d}{dz}(4z^3-4z) = 12z^2-4 = 4(3z^2-1)$$
  se concluye que
$$P_2(z) = \frac{1}{2}(3z^2-1).$$

Se obtuvo que para $n = 0$, 1 y 2, $P_n(z)$ es un polinomio de grado n. Se mostrará a continuación el caso general. Se parte expresando el término $(z^2-1)^n$ empleando el teorema del binomio dado por la ecuación 1.1 como

$$(z^2-1)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}z^{2n-2k}(-1)^k.$$

Además,

$$\frac{d^n}{dz^n}(z^2-1)^n = \frac{d^n}{dz^n}\left[\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}z^{2n-2k}(-1)^k\right] = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{d^n}{dz^n}z^{2n-2k}. \tag{2.31}$$

Hay que calcular

$$\frac{d^n}{dz^n} z^{2n-2k} \qquad \text{para} \qquad k = 0,\, 1,\, \ldots,\, n,$$

para lo cual hay que distinguir dos casos. Como la derivada n-ésima de z^m es nula si $n > m$, se tiene que

$$\frac{d^n}{dz^n} z^{2n-2k} = 0 \qquad \text{si} \qquad 2n - 2k < n \qquad \Leftrightarrow \qquad 2k > n \qquad \Leftrightarrow \qquad k > \frac{n}{2}.$$

Para el caso en que $2n - 2k \geq n$, o $k \leq n/2$, se observa que la derivada primera es

$$\frac{d}{dz} z^{2n-2k} = (2n - 2k) z^{2n-2k-1},$$

la derivada segunda es

$$\frac{d^2}{dz^2} z^{2n-2k} = (2n - 2k)(2n - 2k - 1) z^{2n-2k-2},$$

y así sucesivamente, hasta obtener que la derivada n-ésima es

$$\begin{aligned}
\frac{d^n}{dz^n} z^{2n-2k} &= (2n - 2k)(2n - 2k - 1) \ldots [2n - 2k - (n - 1)] z^{2n-2k-n} \\
&= \frac{(2n - 2k)!}{(2n - 2k - n)!} z^{n-2k} \\
&= \frac{(2n - 2k)!}{(n - 2k)!} z^{n-2k}.
\end{aligned}$$

Sustituyendo estos resultados en la ecuación 2.31, se obtiene que

$$\frac{d^n}{dz^n} (z^2 - 1)^n = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{(2n - 2k)!}{(n - 2k)!} z^{n-2k},$$

donde la notación $\lfloor n/2 \rfloor$ indica el mayor entero menor o igual a $n/2$. Luego, la sustitución de este resultado en la ecuación 2.30 resulta en

$$P_n(z) = \frac{1}{n! 2^n} \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{(2n - 2k)!}{(n - 2k)!} z^{n-2k}.$$

Finalmente, observando que

$$\binom{2n - 2k}{n} = \frac{(2n - 2k)!}{n!(2n - 2k - n)!} = \frac{(2n - 2k)!}{n!(n - 2k)!},$$

la expresión anterior puede escribirse como

$$P_n(z) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{2n - 2k}{n} z^{n-2k}.$$

Se observa que se trata de un polinomio con términos de grado $n - 2k$ con $k = 0,\, 1,\, \ldots,\, \lfloor n/2 \rfloor$. El término de mayor grado ocurre cuando $k = 0$ y por lo tanto se trata de un polinomio de grado n.

2.9. Ecuaciones de Cauchy-Riemann

En esta sección se obtiene un par de ecuaciones que las derivadas parciales de primer orden de las funciones componentes u y v de una función

$$f(z) = u(x,\, y) + iv(x,\, y)$$

deben cumplir en un punto $z_0 = (x_0,\, y_0)$ cunado la derivada de f existe en ese punto.

Comenzando con la hipótesis de que existe $f'(z_0)$, sean

$$z_0 = x_0 + iy_0 \qquad \text{y} \qquad \Delta z = \Delta x + i\Delta y.$$

De esta forma,

$$\begin{aligned}\Delta w &= f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)\\ &= [u(x_0 + \Delta x,\, y_0 + \Delta y) + iv(x_0 + \Delta x,\, y_0 + \Delta y)] - [u(x_0,\, y_0) + iv(x_0,\, y_0)],\end{aligned}$$

y por lo tanto,

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{u(x_0 + \Delta x,\, y_0 + \Delta y) - u(x_0,\, y_0)}{\Delta x + i\Delta y} + i\frac{v(x_0 + \Delta x,\, y_0 + \Delta y) - v(x_0,\, y_0)}{\Delta x + i\Delta y}. \tag{2.32}$$

Como la derivada existe en z_0, la ecuación 2.32 es válida cuando $(\Delta x,\, \Delta y)$ tiende a (0, 0) por cualquier dirección.

Dirección horizontal En particular, eligiendo $\Delta y = 0$ y permitiendo que $(\Delta x,\, 0)$ tienda a (0, 0) horizontalmente, por el teorema 1 de la sección 2.4, se tiene que

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x_0 + \Delta x,\, y_0) - u(x_0,\, y_0)}{\Delta x} + i \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x_0 + \Delta x,\, y_0) - v(x_0,\, y_0)}{\Delta x},$$

es decir,

$$f'(z_0) = u_x(x_0,\, y_0) + iv_x(x_0,\, y_0). \tag{2.33}$$

Dirección vertical Eligiendo $\Delta x = 0$ y haciendo que $(0,\, \Delta y)$ tienda a (0, 0) de forma vertical en la ecuación 2.32, por el mismo argumento que antes se tiene que

$$\begin{aligned}f'(z_0) &= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(x_0,\, y_0 + \Delta y) - u(x_0,\, y_0)}{i\Delta y} + i \lim_{\Delta y \to 0} \frac{v(x_0,\, y_0 + \Delta y) - v(x_0,\, y_0)}{i\Delta y}\\ &= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{v(x_0,\, y_0 + \Delta y) - v(x_0,\, y_0)}{\Delta y} - i \lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(x_0,\, y_0 + \Delta y) - u(x_0,\, y_0)}{\Delta y},\end{aligned}$$

resultando en que

$$f'(z_0) = v_y(x_0,\, y_0) - iu_y(x_0,\, y_0). \tag{2.34}$$

Las ecuaciones 2.33 y 2.34 no solo dan $f'(z_0)$ en función de las derivadas parciales de las funciones componentes, si no que además proveen condiciones necesarias para la existencia de $f'(z_0)$. Para obtener dichas condiciones alcanza con igualar las partes reales y las partes imaginarias de las ecuaciones 2.33 y 2.34 , resultando que para la existencia de $f'(z_0)$ se requiere que

$$u_x(x_0,\, y_0) = v_y(x_0,\, y_0) \qquad \text{y} \qquad u_y(x_0,\, y_0) = -v_x(x_0,\, y_0). \tag{2.35}$$

Estas ecuaciones se llaman ecuaciones de Cauchy-Riemann. El resultado anterior se resume en el siguiente teorema.

Teorema Sea la función

$$f(z) = u(x,\, y) + iv(x,\, y)$$

y supóngase que $f'(z)$ existe en un punto $z_0 = x_0 + iy_0$. Entonces, las derivadas parciales de u y v deben existir en el punto $(x_0,\, y_0)$ y deben satisfacer las ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$u_x = v_y \qquad \text{y} \qquad u_y = -v_x.$$

en ese punto. Además, $f'(z_0)$ puede escribirse como

$$f'(z_0) = u_x + iv_x,$$

donde las derivadas parciales se evalúan en $(x_0,\, y_0)$.

Algunas consideraciones sobre las ecuaciones de Cauchy-Riemann son las siguientes:

- Como las ecuaciones de Cauchy-Riemann son condiciones necesarias para la existencia de la derivada de una función f en un punto z_0, pueden ser empleadas para encontrar puntos en donde f no tiene derivada.
- Por tratarse de condiciones necesarias, hay funciones f cuyas funciones componentes satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en un punto z_0, y sin embargo, la derivada de f no existe en z_0.

2.10. Condiciones suficientes para diferenciabilidad

Como se mencionó, el cumplimiento de las ecuaciones de Cauchy-Riemann en un punto $z_0 = (x_0,\, y_0)$ no es condición suficiente de la existencia de la derivada de una función $f(z)$ en ese punto. Sin embargo, imponiendo algunas condiciones de continuidad se obtiene el siguiente útil teorema.

Teorema Sea la función

$$f(z) = u(x,\, y) + iv(x,\, y)$$

definida en algún entorno ϵ de un punto $z_0 = x_0 + iy_0$, y supóngase que

(a) las derivadas parciales de primer orden de las funciones u y v existen en todo el entorno;

(b) esas derivadas parciales son continuas en $(x_0,\, y_0)$ y satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$u_x = v_y, \qquad u_y = -v_x$$

en $(x_0,\, y_0)$.

Entonces, existe $f'(z_0)$ y su valor es

$$f'(z_0) = u_x + iv_x, \tag{2.36}$$

cuando el lado derecho se evalúa en $(x_0,\, y_0)$.

Previo a la demostración se consideran algunos conceptos y resultados de cálculo. Lo incluido a continuación está basado en la sección 2.6 de [2] y en la sección 14.4 de [3].

Sea $w = f(x,\, y)$ una función real de dos variables reales, y supóngase que x cambia de x_0 a $x_0 + \Delta x$ y y cambia de y_0 a $y_0 + \Delta y$. El correspondiente cambio en w es

$$\Delta w = f(x_0 + \Delta x,\, y_0 + \Delta y) - f(x_0,\, y_0).$$

Definición: si $w = f(x,\, y)$, entonces f es *diferenciable* en $(x_0,\, y_0)$ si Δw puede expresarse en la forma

$$\Delta w = f_x(x_0,\, y_0)\Delta x + f_y(x_0,\, y_0)\Delta y + \epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y$$

donde $\epsilon_1 \to 0$ y $\epsilon_2 \to 0$ con $(\Delta x,\, \Delta y) \to (0,\, 0)$.

Usualmente es difícil emplear esta definición para verificar si una función es diferenciable, pero el siguiente teorema brinda un condición suficiente conveniente de diferenciabilidad.

Teorema: si las derivadas parciales f_x y f_y existen en un entorno de $(x_0,\, y_0)$ y son continuas en $(x_0,\, y_0)$, entonces f es diferenciable en $(x_0,\, y_0)$.

Recurrir a las referencias indicadas previamente por la demostración del teorema.

Para probar el teorema, se asume que se cumplen las condiciones (a) y (b) de la hipótesis, y sea $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$, donde $0 < |\Delta z| < \epsilon$, y sea también

$$\begin{aligned}\Delta w &= f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)\\ &= [u(x_0 + \Delta x,\, y_0 + \Delta y) + iv(x_0 + \Delta x,\, y_0 + \Delta y)] - [u(x_0,\, y_0) + iv(x_0,\, y_0)]\\ &= [u(x_0 + \Delta x,\, y_0 + \Delta y) - u(x_0,\, y_0)] + i[v(x_0 + \Delta x,\, y_0 + \Delta y) - v(x_0,\, y_0)],\end{aligned}$$

es decir,
$$\Delta w = \Delta u + i\Delta v, \tag{2.37}$$
donde
$$\Delta u = u(x_0 + \Delta x,\, y_0 + \Delta y) - u(x_0,\, y_0) \qquad \text{y} \qquad \Delta v = v(x_0 + \Delta x,\, y_0 + \Delta y) - v(x_0,\, y_0)$$
Las hipótesis de que las derivadas parciales de primer orden de u y v existen en el entorno ϵ y son continuas en el punto $(x_0,\, y_0)$ implican que u y v son diferenciables en $(x_0,\, y_0)$, y por la definición de diferenciabilidad, se cumple que
$$\Delta u = u_x(x_0,\, y_0)\Delta x + u_y(x_0,\, y_0)\Delta y + \epsilon_1\Delta x + \epsilon_2\Delta y$$
y
$$\Delta v = v_x(x_0,\, y_0)\Delta x + v_y(x_0,\, y_0)\Delta y + \epsilon_3\Delta x + \epsilon_4\Delta y,$$
donde ϵ_1, ϵ_2, ϵ_3 y ϵ_4 tienden a cero cuando $(\Delta x,\, \Delta y)$ tiende a $(0,\, 0)$. Sustituyendo estas expresiones en la ecuación 2.37, se obtiene que
$$\begin{aligned}
\Delta w &= [u_x(x_0,\, y_0)\Delta x + u_y(x_0,\, y_0)\Delta y + \epsilon_1\Delta x + \epsilon_2\Delta y] + i[v_x(x_0,\, y_0)\Delta x + v_y(x_0,\, y_0)\Delta y + \epsilon_3\Delta x + \epsilon_4\Delta y]\\
&\overset{(a)}{=} [u_x(x_0,\, y_0)\Delta x - v_x(x_0,\, y_0)\Delta y + \epsilon_1\Delta x + \epsilon_2\Delta y] + i[v_x(x_0,\, y_0)\Delta x + u_x(x_0,\, y_0)\Delta y + \epsilon_3\Delta x + \epsilon_4\Delta y]\\
&= u_x(x_0,\, y_0)(\Delta x + i\Delta y) + iv_x(x_0,\, y_0)(\Delta x + i\Delta y) + (\epsilon_1 + i\epsilon_3)\Delta x + (\epsilon_2 + i\epsilon_4)\Delta y,
\end{aligned}$$
donde en (a) se empló la hipótesis de que las derivadas parciales satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann por lo que se sustituyó $u_y(x_0,\, y_0)$ por $-v_x(x_0,\, y_0)$ y $v_y(x_0,\, y_0)$ por $u_x(x_0,\, y_0)$. Luego, al dividir entre Δz se tiene que
$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = u_x(x_0,\, y_0) + iv_x(x_0,\, y_0) + (\epsilon_1 + i\epsilon_3)\frac{\Delta x}{\Delta z} + (\epsilon_2 + i\epsilon_4)\frac{\Delta y}{\Delta z}. \tag{2.38}$$
Observando que $|\Delta x| \leq |\Delta z|$ y $|\Delta y| \leq |\Delta z|$, se cumple que
$$\left|\frac{\Delta x}{\Delta z}\right| \leq 1 \qquad \text{y} \qquad \left|\frac{\Delta y}{\Delta z}\right| \leq 1,$$
y por lo tanto,
$$\left|(\epsilon_1 + i\epsilon_3)\frac{\Delta x}{\Delta z}\right| \leq |\epsilon_1 + i\epsilon_3| \leq |\epsilon_1| + |\epsilon_3|$$
y
$$\left|(\epsilon_2 + i\epsilon_4)\frac{\Delta y}{\Delta z}\right| \leq |\epsilon_2 + i\epsilon_4| \leq |\epsilon_2| + |\epsilon_4|.$$
Esto significa que los dos últimos sumandos de la ecuación 2.38 tienden a cero cuando la variable $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ tiende a cero. Por lo tanto,
$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = u_x(x_0,\, y_0) + iv_x(x_0,\, y_0),$$
que es lo que se quería demostrar.

Ejemplo Se considera la función
$$f(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y) = e^x \cos y + ie^x \operatorname{sen} y,$$
donde $z + x + iy$ y y se toma en radianes al evaluar $\cos y$ y $\operatorname{sen} y$. Los componentes son
$$u(x,\, y) = e^x \cos y \qquad \text{y} \qquad v(x,\, y) = e^x \operatorname{sen} y,$$
y sus derivadas parciales son
$$\begin{aligned}
u_x(x,\, y) &= e^x \cos y & u_y(x,\, y) &= -e^x \operatorname{sen} y\\
v_y(x,\, y) &= e^x \cos y & v_x(x,\, y) &= e^x \operatorname{sen} y.
\end{aligned}$$
Como $u_x = v_y$ y $u_y = -v_x$ en todos lados y esas derivadas parciales son continuas en todos lados, las condiciones del teorema anterior se cumplen en todos los puntos del plano complejo. Por lo tanto, $f'(z)$ existe en todos lados, y
$$f'(z) = u_x + iv_x = e^x \cos y + ie^x \operatorname{sen} y.$$
Observar que $f'(z) = f(z)$ para todo z.

2.11. Coordenadas polares

Asumiendo que $z_0 = 0$, en esta sección se aplica la transformación de coordenadas

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$$

para replantear el teorema de la sección 2.10 de las condiciones suficientes de diferenciabilidad en coordenadas polares.

Dependiendo de si se escribe

$$z = x + iy \qquad \text{o} \qquad z = re^{i\theta} \qquad \text{con} \qquad z \neq 0,$$

cuando $w = f(z)$, los componentes real e imaginario de $w = u + iv$ se expresan en terminos de las variables x y y o r y θ. Supóngase que las derivadas parciales de primer orden de u y y respecto a x y y existen en un entorno de un punto z_0 y son continuas en z_0. Las derivadas parciales de primer orden de u y v respecto a r y θ también tienen esas propiedades, y la regla de la cadena para diferenciar funciones reales de dos variables reales puede emplearse para expresarlas en términos de las derivadas de primer orden respecto a x y y. Mas precisamente, como[5]

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta},$$

se tiene que

$$u_r = u_x\cos\theta + u_y\,\mathrm{sen}\,\theta, \qquad u_\theta = -u_x r\,\mathrm{sen}\,\theta + u_y r\cos\theta. \tag{2.39}$$

De forma similar,

$$v_r = v_x\cos\theta + v_y\,\mathrm{sen}\,\theta, \qquad v_\theta = -v_x r\,\mathrm{sen}\,\theta + v_y r\cos\theta. \tag{2.40}$$

Si además las derivadas parciales de u y v respecto a x y y satisfacen las ecuaciones 2.35 de Cauchy-Riemann

$$u_x = v_y \qquad \text{y} \qquad u_y = -v_x$$

en z_0, las ecuaciones 2.40 quedan

$$v_r = -u_y\cos\theta + u_x\,\mathrm{sen}\,\theta, \qquad v_\theta = u_y r\,\mathrm{sen}\,\theta + u_x r\cos\theta.$$

De esta última ecuación y de la ecuación 2.39, es claro que

$$ru_r = v_\theta \qquad \text{y} \qquad u_\theta = -rv_r. \tag{2.41}$$

en z_0.

Si, por otro lado, se cumplen las ecuaciones 2.41 en z_0 es directo mostrar que las ecuaciones 2.35 se cumplen en ese punto, como se hace en el Ejercicio 5 de la sección 2.11.1. Las ecuaciones 2.41 son la ecuaciones de Cauchy-Riemann para los componentes real e imaginario en coordenadas polares.

A partir de las ecuaciones 2.41 y la expresión de $f'(z_0)$ obtenida en el Ejercicio 6 de la sección 2.11.1, se replantea el teorema de la sección 2.10 cuando los componentes se expresan en las coordenadas polares r y θ.

Teorema Sea la función

$$f(z) = u(r,\,\theta) + iv(r,\,\theta)$$

definida en algún entorno ϵ de un punto no nulo $z_0 = r_0 e^{i\theta_0}$, y supóngase que

(a) las derivadas parciales de primer orden de las funciones u y v respecto a r y θ existen en todo el entorno;

[5] Por la deducción de la regla de la cadena para diferenciar funciones reales de dos variables reales recurrir por ejemplo a la sección 14.5 de [3].

(*b*) esas derivadas parciales son continuas en $(r_0,\, \theta_0)$ y satisfacen la forma polar

$$ru_r = v_\theta, \qquad u_\theta = -rv_r$$

de las ecuaciones de Cauchy-Riemann en $(r_0,\, \theta_0)$.

Entonces, existe $f'(z_0)$ y su valor es

$$f'(z_0) = e^{-i\theta}(u_r + iv_r),$$

cuando el lado derecho se evalúa en $(r_0,\, \theta_0)$.

Ejemplo El teorema puede emplearse para mostrar que cada rama

$$f(z) = \sqrt{r}e^{i\theta/2} \qquad \text{con} \qquad r > 0,\, \alpha < \theta < \alpha + 2\pi,$$

de la función raíz cuadrada $\sqrt{z}$ tiene derivada en todos lados de su dominio de definición. Efectivamente, como

$$f(z) = \sqrt{r}e^{i\theta/2} = \sqrt{r}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right)$$

se tiene que

$$u(r,\, \theta) = \sqrt{r}\cos\frac{\theta}{2} \qquad \text{y} \qquad v(r,\, \theta) = \sqrt{r}\sin\frac{\theta}{2}.$$

Por lo tanto

$$\left.\begin{aligned} u_r &= \frac{1}{2\sqrt{r}}\cos\frac{\theta}{2} \\ v_\theta &= \frac{\sqrt{r}}{2}\cos\frac{\theta}{2} \end{aligned}\right. \quad \Rightarrow \quad ru_r = v_\theta \qquad \text{y} \qquad \left.\begin{aligned} u_\theta &= -\frac{\sqrt{r}}{2}\sin\frac{\theta}{2} \\ v_r &= \frac{1}{2\sqrt{r}}\sin\frac{\theta}{2} \end{aligned}\right. \quad \Rightarrow \quad u_\theta = -rv_r,$$

y además como se cumplen el resto de las condiciones del teorema, la derivada $f'(z)$ existe en todo el dominio de definición de $f(z)$. El teorema también indica que

$$f'(z) = \frac{e^{-i\theta}}{2\sqrt{r}}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right),$$

expresión que se reduce a

$$f'(z) = \frac{e^{-i\theta}e^{i\theta/2}}{2\sqrt{r}} = \frac{e^{-i\theta/2}}{2\sqrt{r}} = \frac{1}{2\sqrt{r}e^{i\theta/2}} = \frac{1}{2f(z)}.$$

2.11.1. Ejercicios

Ejercicio 1

Emplear el teorema de la sección 2.9 para mostrar que $f'(z)$ no existe en ningún punto si

(*a*) $f(z) = \overline{z}$; (*b*) $f(z) = z - \overline{z}$;

(*c*) $f(z) = 2x + ixy^2$; (*d*) $f(z) = e^x e^{iy}$.

Solución

(*a*) Como

$$f(z) = \overline{z} = x - iy,$$

los componentes son

$$u = x \qquad \text{y} \qquad v = -y.$$

Para ver si se verifican las ecuaciones de Cauchy-Riemann, se observa que

$$\begin{aligned} u_x &= 1 & \qquad u_y &= 0 \\ v_y &= -1 & \qquad v_x &= 0. \end{aligned}$$

Como $u_x = v_y$ no se cumple en ningún punto, se concluye que $f'(z)$ no existe en ningún punto z.

(*b*) Como

$$f(z) = z - \overline{z} = (x + iy) - (x - iy) = 2iy,$$

los componentes son

$$u = 0 \qquad \text{y} \qquad v = 2y.$$

Para ver si se verifican las ecuaciones de Cauchy-Riemann, se observa que

$$\begin{aligned} u_x &= 0 & \qquad u_y &= 0 \\ v_y &= 2 & \qquad v_x &= 0. \end{aligned}$$

Como $u_x \neq v_y$ para todo z, las ecuaciones de Cauchy-Riemann no se cumplen en ningún punto z, se concluye que $f'(z)$ no existe en ningún punto z.

(*c*) Como

$$f(z) = 2x + ixy^2,$$

los componentes son

$$u = 2x \qquad \text{y} \qquad v = xy^2.$$

Para comprobar las ecuaciones de Cauchy-Riemann, se observa que

$$\begin{aligned} u_x &= 2 & \qquad u_y &= 0 \\ v_y &= 2xy & \qquad v_x &= y^2. \end{aligned}$$

De esta forma

$$\begin{aligned} u_x = v_y \quad &\Leftrightarrow \quad 2 = 2xy \quad \Leftrightarrow \quad xy = 1 \\ u_y = -v_x \quad &\Leftrightarrow \quad y^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = 0. \end{aligned}$$

Como ambas condiciones no pueden satisfacerse simultáneamente para ningún punto, las ecuaciones de Cauchy-Riemann no se cumplen en ningún punto z y por lo tanto $f'(z)$ no existe en ningún punto z.

(*d*) Como

$$f(z) = e^x e^{-iy} = e^x(\cos y - i \operatorname{sen} y)$$

los componentes son

$$u = e^x \cos y \qquad \text{y} \qquad v = -e^x \operatorname{sen} y$$

y las derivadas parciales son

$$\begin{aligned} u_x &= e^x \cos y & \qquad u_y &= -e^x \operatorname{sen} y \\ v_y &= -e^x \cos y & \qquad v_x &= -e^x \operatorname{sen} y. \end{aligned}$$

De esta forma

$$\begin{aligned} u_x = v_y \quad &\Leftrightarrow \quad e^x \cos y = -e^x \cos y \quad \Leftrightarrow \quad 2e^x \cos y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ u_y = -v_x \quad &\Leftrightarrow \quad -e^x \operatorname{sen} y = e^x \operatorname{sen} y \quad \Leftrightarrow \quad 2e^x \operatorname{sen} y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{sen} y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = k\pi, \end{aligned}$$

con $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Como ambos conjuntos de valores de y son disjuntos, las ecuaciones de Cauchy-Riemann no se cumplen en ningún punto z y por lo tanto $f'(z)$ no existe en ningún punto z.

Ejercicio 2

Emplear el teorema de la sección 2.10 para mostrar que $f'(z)$ y su derivada $f''(z)$ existe en todos lados y encontrar $f''(z)$ cuando

(*a*) $f(z) = iz + 2$; (*b*) $f(z) = e^{-x}e^{-iy}$;

(*c*) $f(z) = z^3$; (*d*) $f(z) = \cos x \cosh y - i \operatorname{sen} x \operatorname{senh} y$.

Solución

(*a*) Como
$$f(z) = iz + 2 = i(x + iy) + 2 = (2 - y) + ix,$$
los componentes son
$$u = 2 - y \qquad \text{y} \qquad v = x,$$
y sus derivadas parciales son
$$\begin{aligned} u_x &= 0 & u_y &= -1 \\ v_y &= 0 & v_x &= 1. \end{aligned}$$
Las derivadas parciales son continuas en todos lados y cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Por lo tanto, la derivada $f'(z)$ existe en todos lados, y de la ecuación 2.36 es
$$f'(z) = u_x + iv_x = i.$$
Aplicando nuevamente el teorema de la sección 2.10 a la derivada primera, se parte observando que los componentes de la derivada primera son
$$u_x = 0 \qquad \text{y} \qquad v_x = 1,$$
y sus derivadas parciales son
$$\begin{aligned} u_{xx} &= 0 & u_{xy} &= 0 \\ v_{xy} &= 0 & v_{xx} &= 0. \end{aligned}$$
Como son continuas y cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en todos lados, se concluye que la derivada segunda existe en todos lados y es
$$f''(z) = u_{xx} + iv_{xx} = 0.$$

(*b*) En este caso
$$f(z) = e^{-x}e^{-iy} = e^{-x}(\cos y - i \operatorname{sen} y)$$
los componentes son
$$u = e^{-x}\cos y \qquad \text{y} \qquad v = -e^{-x}\operatorname{sen} y,$$
y sus derivadas parciales son
$$\begin{aligned} u_x &= -e^{-x}\cos y & u_y &= -e^{-x}\operatorname{sen} y \\ v_y &= -e^{-x}\cos y & v_x &= e^{-x}\operatorname{sen} y. \end{aligned}$$
Las derivadas parciales son continuas en todos lados y cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Por lo tanto, la derivada $f'(z)$ existe en todos lados y es
$$f'(z) = u_x + iv_x = e^{-x}(-\cos y + i \operatorname{sen} y).$$
Los componentes de la derivada primera son
$$u_x = -e^{-x}\cos y \qquad \text{y} \qquad v_x = e^{-x}\operatorname{sen} y,$$
y sus derivadas parciales son
$$\begin{aligned} u_{xx} &= e^{-x}\cos y & u_{xy} &= e^{-x}\operatorname{sen} y \\ v_{xy} &= e^{-x}\cos y & v_{xx} &= -e^{-x}\operatorname{sen} y. \end{aligned}$$
Nuevamente, son continuas y cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en todos lados, por lo que la derivada segunda existe en todos lados y es
$$f''(z) = u_{xx} + iv_{xx} = e^{-x}(\cos y - i \operatorname{sen} y) = e^{-x}e^{-iy} = f(z).$$

(c) Se parte buscando los componentes,

$$\begin{aligned}
f(z) &= z^3 \\
&= (x+iy)^3 \\
&= (x^2-y^2+2ixy)(x+iy) \\
&= x(x^2-y^2) - 2xy^2 + i\left[y(x^2-y^2)+2x^2y\right] \\
&= x(x^2-y^2-2y^2) + iy(x^2-y^2+2x^2) \\
&= x(x^2-3y^2) + iy(3x^2-y^2),
\end{aligned}$$

resultando en que los componentes son

$$u = x^3 - 3xy^2 \qquad \text{y} \qquad v = 3x^2y - y^3,$$

y sus derivadas parciales son

$$\begin{aligned}
u_x &= 3x^2 - 3y^2 & u_y &= -6xy \\
v_y &= 3x^2 - 3y^2 & v_x &= 6xy.
\end{aligned}$$

Las derivadas parciales son continuas en todos lados y cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Por lo tanto, la derivada $f'(z)$ existe en todos lados y es

$$f'(z) = u_x + iv_x = 3x^2 - 3y^2 + 6ixy = 3(x^2-y^2+2ixy) = 3(x+iy)^2 = 3z^2.$$

Continuando con el cálculo de la derivada segunda, los componentes de la derivada primera son

$$u_x = 3x^2 - 3y^2 \qquad \text{y} \qquad v_x = 6xy,$$

y sus derivadas parciales son

$$\begin{aligned}
u_{xx} &= 6x & u_{xy} &= -6y \\
v_{xy} &= 6x & v_{xx} &= 6y.
\end{aligned}$$

Como son continuas y cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en todos lados, la derivada segunda existe en todos lados y es

$$f''(z) = u_{xx} + iv_{xx} = 6x + 6iy = 6(x+iy) = 6z.$$

(d) Como

$$f(z) = \cos x \cosh y - i \operatorname{sen} x \operatorname{senh} y$$

los componentes son

$$u = \cos x \cosh y \qquad \text{y} \qquad v = -\operatorname{sen} x \operatorname{senh} y.$$

Teniendo en cuenta que

$$\frac{d}{dx}\operatorname{senh} x = \cosh x \qquad \text{y} \qquad \frac{d}{dx}\cosh x = \operatorname{senh} x$$

las derivadas parciales de los componentes son

$$\begin{aligned}
u_x &= -\operatorname{sen} x \cosh y & u_y &= \cos x \operatorname{senh} y \\
v_y &= -\operatorname{sen} x \cosh y & v_x &= -\cos x \operatorname{senh} y.
\end{aligned}$$

Las derivadas parciales son continuas en todos lados y cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Por lo tanto, la derivada $f'(z)$ existe en todos lados y es

$$f'(z) = u_x + iv_x = -\operatorname{sen} x \cosh y - i \cos x \operatorname{senh} y.$$

Continuando con el cálculo de la derivada segunda, los componentes de la derivada primera son

$$u_x = -\operatorname{sen} x \cosh y \qquad \text{y} \qquad -\cos x \operatorname{senh} y,$$

y sus derivadas parciales son

$$\begin{aligned} u_{xx} &= -\cos x \cosh y & \qquad u_{xy} &= -\operatorname{sen} x \operatorname{senh} y \\ v_{xy} &= -\cos x \cosh y & \qquad v_{xx} &= \operatorname{sen} x \operatorname{senh} y. \end{aligned}$$

Como son continuas y cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en todos lados, la derivada segunda existe en todos lados y es

$$f''(z) = u_{xx} + iv_{xx} = -\cos x \cosh y + i \operatorname{sen} x \operatorname{senh} y = -f(z).$$

Ejercicio 3

De los resultados obtenidos en las secciones 2.9 y 2.10 determinar dónde existe $f'(z)$ y encontrar su valor cuando

$$(a)\ f(z) = \frac{1}{z}; \qquad (b)\ f(z) = x^2 + iy^2; \qquad (c)\ f(z) = z \operatorname{Im} z.$$

Solución

(a) El dominio de definición de la función es $z \neq 0$. Se parte buscando los componentes. Como

$$f(z) = \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2},$$

los componentes son

$$u = \frac{x}{x^2 + y^2} \qquad \text{y} \qquad v = \frac{-y}{x^2 + y^2},$$

y sus derivadas parciales son

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{x^2 + y^2 - x(2x)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2} & \qquad u_y &= \frac{-x(2y)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2} \\ v_y &= \frac{-(x^2 + y^2) - (-y)2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2} & \qquad v_x &= \frac{y(2x)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}. \end{aligned}$$

Las derivadas parciales son continuas en $z \neq 0$ y cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Por lo tanto, la derivada $f'(z)$ existe en $z \neq 0$, y de la ecuación 2.36 es

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2} + i \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} \\ &= -\frac{x^2 - y^2 - 2ixy}{(x^2 + y^2)^2} \\ &= -\frac{(x - iy)^2}{(x^2 + y^2)^2} \\ &= -\frac{\overline{z}^2}{|z|^4} \\ &= -\frac{\overline{z}^2}{(z\overline{z})^2} \\ &= -\frac{1}{z^2}, \end{aligned}$$

para todo $z \neq 0$.

(*b*) Si

$$f(z) = x^2 + iy^2,$$

los componentes son

$$u = x^2 \qquad \text{y} \qquad v = y^2,$$

y sus derivadas parciales son

$$\begin{aligned} u_x &= 2x & u_y &= 0 \\ v_y &= 2y & v_x &= 0, \end{aligned}$$

continuas en todo el plano. La ecuación de Cauchy-Riemann $u_x = v_y$ se cumple en la recta $x = y$, y la ecuación de Cauchy-Riemann $u_y = -v_x$ se cumple en todo el plano. Por lo tanto, $f'(z)$ existe solo en la recta $x = y$ y vale

$$f'(x + ix) = 2x.$$

(*c*) En este caso,

$$f(z) = z \operatorname{Im} z = (x + iy)y = xy + iy^2$$

y los componentes son

$$u = xy \qquad \text{y} \qquad v = y^2.$$

Las derivadas parciales son

$$\begin{aligned} u_x &= y & u_y &= x \\ v_y &= 2y & v_x &= 0, \end{aligned}$$

funciones continuas en todo el plano. La ecuación de Cauchy-Riemann $u_x = v_y$ se cumple si $y = 2y$, es decir, si $y = 0$, y la ecuación de Cauchy-Riemann $u_y = -v_x$ se cumple $x = 0$. Por lo tanto, $f'(z)$ existe solo en el punto $(0, 0)$ y vale

$$f'(0) = 0 + i0 = 0.$$

Ejercicio 4

Emplear el teorema de la sección 2.11 para ostrar que cada una de las siguientes funciones son diferenciables en el dominio de definición y encontrar $f'(z)$:

(*a*) $f(z) = \dfrac{1}{z^4}$ con $z \neq 0$

(*b*) $f(z) = e^{-\theta} \cos(\ln r) + ie^{-\theta} \operatorname{sen}(\ln r)$ con $r > 0,\ 0 \leq \theta < 2\pi$.

Solución

(*a*) Se parte calculando los componentes en función de r y θ,

$$f(z) = \frac{1}{z^4} = \frac{1}{(re^{i\theta})^4} = \frac{1}{r^4 e^{4i\theta}} = \frac{e^{-4i\theta}}{r^4} = \frac{1}{r^4}(\cos 4\theta - i \operatorname{sen} 4\theta).$$

Por lo tanto, los componentes son

$$u = \frac{\cos 4\theta}{r^4} \qquad \text{y} \qquad v = \frac{-\operatorname{sen} 4\theta}{r^4}.$$

y sus derivadas parciales son

$$\begin{aligned} u_r &= \frac{-4\cos 4\theta}{r^5} & u_\theta &= \frac{-4\operatorname{sen} 4\theta}{r^4} \\ v_\theta &= \frac{-4\cos 4\theta}{r^4} & v_r &= \frac{4\operatorname{sen} 4\theta}{r^5}. \end{aligned}$$

Se observa que son funciones continuas y se cumplen las ecuaciones 2.41 de Cauchy-Riemann en forma polar $ru_r = v_\theta$ y $u_\theta = -rv_r$ en todo el dominio de definición. De la ecuación 2.44 de la derivada $f'(z)$ se obtiene que

$$\begin{aligned} f'(z) &= e^{-i\theta}\left(-\frac{4\cos 4\theta}{r^5} + i\frac{4\operatorname{sen} 4\theta}{r^5}\right) \\ &= -\frac{4e^{-i\theta}}{r^5}(\cos 4\theta - i\operatorname{sen} 4\theta) \\ &= -\frac{4e^{-i\theta}e^{-4i\theta}}{r^5} \\ &= -\frac{4}{r^5e^{5i\theta}} \\ &= -\frac{4}{(re^{i\theta})^5} \\ &= -\frac{4}{z^5}. \end{aligned}$$

(b) Como

$$f(z) = e^{-\theta}\cos(\ln r) + ie^{-\theta}\operatorname{sen}(\ln r),$$

los componentes son

$$u = e^{-\theta}\cos(\ln r) \qquad \text{y} \qquad v = e^{-\theta}\operatorname{sen}(\ln r).$$

y sus derivadas parciales son

$$u_r = e^{-\theta}\left[-\operatorname{sen}(\ln r)\frac{1}{r}\right] = \frac{-e^{-\theta}\operatorname{sen}(\ln r)}{r} \qquad u_\theta = -e^{-\theta}\cos(\ln r)$$

$$v_\theta = -e^{-\theta}\operatorname{sen}(\ln r) \qquad v_r = \frac{e^{-\theta}\cos(\ln r)}{r}.$$

Se observa que son funciones continuas y se cumplen las ecuaciones 2.41 de Cauchy-Riemann en forma polar en todo el dominio de definición. De la ecuación 2.44 se obtiene que la derivada es

$$\begin{aligned} f'(z) &= e^{-i\theta}\left[-\frac{e^{-\theta}\operatorname{sen}(\ln r)}{r} + i\frac{e^{-\theta}\cos(\ln r)}{r}\right] \\ &= \frac{e^{-i\theta}}{r}\left[-e^{-\theta}\operatorname{sen}(\ln r) + ie^{-\theta}\cos(\ln r)\right] \\ &\overset{(a)}{=} \frac{i}{re^{i\theta}}\left[e^{-\theta}\cos(\ln r) + ie^{-\theta}\operatorname{sen}(\ln r)\right] \\ &= \frac{i}{z}f(z), \end{aligned}$$

donde en (a) se multiplicó la ecuación por $-ii = 1$.

Ejercicio 5

Resolver las ecuaciones 2.39 para u_x y u_y para mostrar que

$$u_x = u_r\cos\theta - u_\theta\frac{\operatorname{sen}\theta}{r}, \qquad u_y = u_r\operatorname{sen}\theta + u_\theta\frac{\cos\theta}{r}. \tag{2.42}$$

Luego, emplear esas ecuaciones y las equivalentes para v_x y v_y para mostrar que las ecuaciones 2.35 de Cauchy-Riemann se cumplen en el punto z_0 si las ecuaciones 2.41 de Cauchy-Riemann en forma polar se cumplen en ese punto.

Solución Se pide resolver el sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_x\cos\theta & + & u_y\,\mathrm{sen}\,\theta & = & u_r \\ -u_x r\,\mathrm{sen}\,\theta & + & u_y r\cos\theta & = & u_\theta \end{array}\right. .$$

Multiplicando la primer ecuación por $\cos\theta$ y la segunda por $-(\mathrm{sen}\,\theta)/r$, se tiene que

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_x\cos^2\theta & + & u_y\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta & = & u_r\cos\theta \\ u_x r\,\mathrm{sen}^2\theta & - & u_y\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta & = & -u_\theta\dfrac{\mathrm{sen}\,\theta}{r} \end{array}\right. .$$

Sumando ambas ecuaciones se obtiene que

$$u_x = u_r\cos\theta - u_\theta\frac{\mathrm{sen}\,\theta}{r}.$$

De forma similar, multiplicando la primera ecuación por $\mathrm{sen}\,\theta$ y la segunda por $(\cos\theta)/r$, se obtiene que

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_x\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta & + & u_y\,\mathrm{sen}^2\theta & = & u_r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ -u_x\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta & + & u_y\cos^2\theta & = & u_\theta\dfrac{\cos\theta}{r} \end{array}\right. ,$$

y sumando ambas ecuaciones resulta en que

$$u_y = u_r\,\mathrm{sen}\,\theta + u_\theta\frac{\cos\theta}{r}.$$

Las ecuaciones equivalentes para v_x y v_y se obtienen resolviendo el sistema

$$\left\{\begin{array}{rcl} v_x\cos\theta & + & v_y\,\mathrm{sen}\,\theta & = & v_r \\ -v_x r\,\mathrm{sen}\,\theta & + & v_y r\cos\theta & = & v_\theta \end{array}\right. .$$

Procediendo igual que antes, es fácil ver que se obtiene que

$$v_x = v_r\cos\theta - v_\theta\frac{\mathrm{sen}\,\theta}{r} \qquad \text{y} \qquad v_y = v_r\,\mathrm{sen}\,\theta + v_\theta\frac{\cos\theta}{r}. \tag{2.43}$$

Se asume ahora que se cumplen las ecuaciones 2.41 de Cauchy-Riemann en forma polar

$$ru_r = v_\theta \qquad \text{y} \qquad u_\theta = -rv_r$$

en z_0. Sustituyendo $v_\theta/r = u_r$ en la expresión de v_y y $-u_\theta/r = v_r$ en la expresión de u_x se observa que

$$v_y = v_r\,\mathrm{sen}\,\theta + u_r\cos\theta \qquad \text{y} \qquad u_x = u_r\cos\theta + v_r\,\mathrm{sen}\,\theta = v_y.$$

De forma similar, sustituyendo $v_\theta/r = u_r$ en la expresión de v_x y $u_\theta/r = -v_r$ en la expresión de u_y se observa que

$$v_x = v_r\cos\theta - u_r\,\mathrm{sen}\,\theta \qquad \text{y} \qquad u_y = u_r\,\mathrm{sen}\,\theta - v_r\cos\theta = -v_x.$$

Ejercicio 6

Sea una función $f(z) = u + iv$ diferenciable en un punto no nulo $z_0 = r_0e^{i\theta_0}$. Emplear la expresiones para u_x y v_x encontradas en el Ejercicio 5 junto con las ecuaciones 2.41 Cauchy-Riemann en forma polar para reescribir la expresión

$$f'(z_0) = u_x + iv_x$$

de la sección 2.10 como

$$f'(z_0) = e^{-i\theta}(u_r + iv_r), \tag{2.44}$$

donde u_r y v_r se evalúan en $(r_0,\,\theta_0)$.

Solución Se tiene que

$$
\begin{aligned}
f'(z_0) &= u_x + iv_x \\
&\overset{(a)}{=} \left(u_r \cos\theta - u_\theta \frac{\operatorname{sen}\theta}{r}\right) + i\left(v_r \cos\theta - v_\theta \frac{\operatorname{sen}\theta}{r}\right) \\
&\overset{(b)}{=} (u_r \cos\theta + v_r \operatorname{sen}\theta) + i\,(v_r \cos\theta - u_r \operatorname{sen}\theta) \\
&= u_r(\cos\theta - i \operatorname{sen}\theta) + v_r(\operatorname{sen}\theta + i\cos\theta) \\
&\overset{(c)}{=} u_r(\cos\theta - i \operatorname{sen}\theta) + iv_r(\cos\theta - i\operatorname{sen}\theta),
\end{aligned}
\tag{2.45}
$$

donde en (a) se emplearon los resultados de las ecuaciones 2.42 y 2.43 obtenidas en el Ejercicio 5, en (b) se emplearon las ecuaciones 2.41 de Cauchy-Riemann en forma polar y en (c) se multiplicó el segundo sumando por $-ii = 1$. Finalmente, considerando que

$$e^{-i\theta} = \cos\theta - i\operatorname{sen}\theta$$

se obtiene que

$$f'(z_0) = e^{-i\theta}(u_r + iv_r).$$

Ejercicio 7

(a) Empleando las ecuaciones 2.41 de Cauchy-Riemann en forma polar, deducir la expresión alternativa

$$f'(z_0) = \frac{-i}{z_0}(u_\theta + iv_\theta) \tag{2.46}$$

para $f'(z_0)$ encontrada en el Ejercicio 6.

(b) Emplear la expresión de $f'(z_0)$ obtenida en la parte (a) para mostrar que la derivada de la función $f(z) = 1/z$ con $z \neq 0$ es $f'(z) = -1/z^2$, como se encontró en el Ejercicio 3(a).

Solución

(a) Aplicando las ecuaciones 2.41 de Cauchy-Riemann en forma polar para sustituir u_r y v_r en la ecuación 2.45, se tiene que

$$
\begin{aligned}
f'(z_0) &= \left(v_\theta \frac{\cos\theta}{r} - u_\theta \frac{\operatorname{sen}\theta}{r}\right) + i\left(-u_\theta \frac{\cos\theta}{r} - v_\theta \frac{\operatorname{sen}\theta}{r}\right) \\
&= \frac{1}{r}\left[u_\theta(-\operatorname{sen}\theta - i\cos\theta) + v_\theta(\cos\theta - i\operatorname{sen}\theta)\right] \\
&\overset{(a)}{=} \frac{-i}{r}\left[iu_\theta(-\operatorname{sen}\theta - i\cos\theta) + iv_\theta(\cos\theta - i\operatorname{sen}\theta)\right] \\
&= \frac{-i}{r}\left[u_\theta(\cos\theta - i\operatorname{sen}\theta) + iv_\theta(\cos\theta - i\operatorname{sen}\theta)\right] \\
&\overset{(b)}{=} \frac{-ie^{-i\theta}}{r}(u_\theta + iv_\theta) \\
&= \frac{-i}{re^{i\theta}}(u_\theta + iv_\theta) \\
&= \frac{-i}{z_0}(u_\theta + iv_\theta),
\end{aligned}
$$

donde en (a) se multiplicó la ecuación por $-ii = 1$ y en (b) se tuvo en cuenta que $e^{-i\theta} = \cos\theta - i\operatorname{sen}\theta$.

(b) Se quiere calcular la derivada de

$$f(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{e^{-i\theta}}{r} = \frac{1}{r}(\cos\theta - i\operatorname{sen}\theta).$$

De esta ecuación se observa que los componentes son

$$u(r,\,\theta) = \frac{\cos\theta}{r} \qquad \text{y} \qquad v(r,\,\theta) = -\frac{\operatorname{sen}\theta}{r},$$

y sus derivadas parciales respecto a θ son

$$u_\theta(r,\,\theta) = -\frac{\operatorname{sen}\theta}{r} \qquad \text{y} \qquad v_\theta(r,\,\theta) = -\frac{\cos\theta}{r}.$$

Sustituyendo estos resultados en la expresión 2.46 de $f'(z_0)$ obtenida en el Ejercicio 6, se tiene que

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \frac{-i}{z}\left(-\frac{\operatorname{sen}\theta}{r} - i\frac{\cos\theta}{r}\right) \\ &= \frac{-i}{zr}\left(-\operatorname{sen}\theta - i\cos\theta\right) \\ &= -\frac{1}{zr}\left(\cos\theta - i\operatorname{sen}\theta\right) \\ &= -\frac{e^{-i\theta}}{zr} \\ &= -\frac{1}{zre^{i\theta}} \\ &= -\frac{1}{z^2}. \end{aligned}$$

Ejercicio 8

(a) Recordar que si $z = x + iy$, se cumple que

$$x = \frac{z+\overline{z}}{2} \qquad \text{y} \qquad y = \frac{z-\overline{z}}{2i}.$$

Aplicando la regla de la cadena de cálculo a una función $F(x,\,y)$ de dos variables reales, derivar la expresión

$$\frac{\partial F}{\partial \overline{z}} = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \overline{z}} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial x} + i\frac{\partial F}{\partial y}\right)$$

(b) Definiendo el operador

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

sugerido por la parte (a), mostrar que si las derivadas de primer orden de los componentes real e imaginario de una función $f(z) = u(x,\,y) + iv(x,\,y)$ satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann, se cumple que

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}[(u_x - v_y) + i(v_x + u_y)] = 0.$$

$\partial f/\partial \overline{z} = 0$ es la *forma compleja* de las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

Solución

(a) Aplicando la regla de la cadena para una función de dos variables reales, se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \overline{z}} &= \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \overline{z}} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \overline{z}} \\ &\overset{(a)}{=} \frac{\partial F}{\partial x}\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{\partial F}{\partial y}\left(-\frac{1}{2i}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial x} + i\frac{\partial F}{\partial y}\right), \end{aligned}$$

donde en (a) se empleó que

$$\frac{\partial x}{\partial \overline{z}} = \frac{\partial}{\partial \overline{z}}\left(\frac{z+\overline{z}}{2}\right) = \frac{1}{2} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial y}{\partial \overline{z}} = \frac{\partial}{\partial \overline{z}}\left(\frac{z-\overline{z}}{2i}\right) = -\frac{1}{2i}.$$

(b) Aplicando el operador definido a la función $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ se tiene que

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x}(u + iv) + i\frac{\partial}{\partial y}(u + iv)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[(u_x + iv_x) + i(u_y + iv_y)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[(u_x - v_y) + i(v_x + u_y)\right].\end{aligned}$$

Además, si se satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann $u_x = v_y$ y $u_y = -v_x$, se cumple que

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left[(u_x - v_y) + i(v_x + u_y)\right] = 0.$$

2.12. Funciones analíticas

En este punto ya se dispone de las bases teóricas para introducir el concepto de función analítica. Una función f de variable compleja z es *analítica en un conjunto abierto* S si tiene derivada en todos lados en el conjunto. Es *analítica en un punto* z_0 si es analítica en algún entorno de z_0. En la literatura usualmente también se emplean los términos *función holomorfa* y *función regular* como sinónimos de función analítica.

Para que una función sea analítica en un punto z_0 se requiere que sea analítica en cada punto de algún entorno de z_0. Al hablar de una función que es analítica en algún conjunto S que no es abierto, debe entenderse que la función es analítica en algún conjunto abierto que contiene a S.

Una *función completa* es una función que es analítica en todos los puntos del plano complejo.

Una condición necesaria pero de ninguna forma suficiente para que una función sea analítica en un dominio D es la continuidad de la función en D (ver la sección 2.7). Otra condición necesaria es el cumplimiento de las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Las condiciones suficientes de analiticidad están dadas por los teoremas de las secciones 2.10 y 2.11. Otras condiciones suficientes útiles se obtienen a partir de las reglas de diferenciación indicadas en la sección 2.8.

Si una función f no es analítica en el punto z_0 pero es analítica en algún punto de cada entorno de z_0, entonces z_0 se llama *punto singular* o *singularidad* de f. El punto $z = 0$ es evidentemente un punto singular de $f(z) = 1/z$.

La siguiente propiedad de las funciones analíticas es especialmente útil, así como esperable:

Teorema. Si $f'(z) = 0$ en todos lados de un dominio D, entonces $f(z)$ debe ser constante en D.

Por la demostración del teorema, recurrir a [1]. Los conceptos de derivada direccional y gradiente de funciones de variables reales empleados en la demostración del teorema pueden encontrarse por ejemplo en la sección 14.6 de [3].

Los siguientes dos ejemplos ilustran como pueden emplearse las ecuaciones de Cauchy-Riemann para obtener diversas propiedades de las funciones analíticas.

Ejemplo 1. Supóngase que una función $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ y su conjugada $\overline{f(z)} = u(x, y) - iv(x, y)$ son analíticas en un dominio D. Se mostrará que $f(z)$ es constante en D.

Sea $\overline{f(z)} = U(x, y) + iV(x, y)$, donde

$$U(x, y) = u(x, y) \qquad \text{y} \qquad V(x, y) = -v(x, y). \tag{2.47}$$

Debido a la analiticidad de $f(z)$, las ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$u_x = v_y \qquad \text{y} \qquad u_y = -v_x \tag{2.48}$$

se cumplen, y lo mismo ocurre con $\overline{f(z)}$,

$$U_x = V_y \qquad \text{y} \qquad U_y = -V_x.$$

A partir de las ecuaciones 2.47, estas últimas ecuaciones pueden escribirse como

$$u_x = -v_y \qquad \text{y} \qquad u_y = v_x. \tag{2.49}$$

Sumando las primeras ecuaciones en 2.48 y 2.49 se obtiene que $u_x = 0$ en D. De forma similar, restando las segundas ecuaciones en 2.48 y 2.49 se deduce que $v_x = 0$. De esta forma, de la ecuación 2.36 se obtiene que

$$f'(z) = u_x + iv_x = 0 + i0 = 0,$$

y del teorema anterior resulta en que f es constante en D.

Ejemplo 2. Sea una función que es analítica en un dominio D. Asumiendo además que el módulo $|f(z)|$ es constante en D, se probará que f debe ser constante en D.

Por hipótesis, sea

$$|f(z)| = c \qquad \text{para todo } z \text{ en } D,$$

donde c es una constante real. Si $c = 0$, $f(z) = 0$ en D. Si $c \neq 0$, por la propiedad $z\overline{z} = |z|^2$ de los números complejos, se cumple que

$$f(z)\overline{f(z)} = c^2 \neq 0$$

y por lo tanto, $f(z)$ nunca es cero en D. De esta forma,

$$\overline{f(z)} = \frac{c^2}{f(z)} \qquad \text{para todo } z \text{ en } D,$$

y por lo tanto, $\overline{f(z)}$ es analítica en todo D. Finalmente, el resultado del Ejemplo 1 asegura que $f(z)$ es constante en todo D.

2.12.1. Ejercicios

Ejercicio 1

Aplicar el teorema de la sección 2.10 para verificar que cada una de las siguientes funciones es completa:

(a) $f(z) = 3x + y + i(3y - x)$;

(b) $f(z) = \cosh x \cos y + i \operatorname{senh} x \operatorname{sen} y$;

(c) $f(z) = e^{-y} \operatorname{sen} x - ie^{-y} \cos x$;

(d) $f(z) = (z^2 - 2)e^{-x}e^{-iy}$.

Solución

(a) Como

$$f(z) = 3x + y + i(3y - x),$$

los componentes son

$$u = 3x + y \qquad \text{y} \qquad v = 3y - x.$$

Para ver si se verifican las ecuaciones de Cauchy-Riemann, se observa que

$$\begin{matrix} u_x = 3 \\ v_y = 3 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad u_x = v_y \quad \forall z \qquad \text{y} \qquad \begin{matrix} u_y = 1 \\ v_x = -1 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad u_y = -v_x \quad \forall z.$$

Como las derivadas parciales son continuas y cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en todo el plano complejo, la función es completa.

(b) Para la función

$$f(z) = \cosh x \cos y + i \operatorname{senh} x \operatorname{sen} y,$$

los componentes son

$$u = \cosh x \cos y \qquad \text{y} \qquad v = \operatorname{senh} x \operatorname{sen} y.$$

Luego,

$$\begin{aligned} u_x &= \operatorname{senh} x \cos y & u_y &= -\cosh x \operatorname{sen} y \\ v_y &= \operatorname{senh} x \cos y & v_x &= \cosh x \operatorname{sen} y. \end{aligned}$$

Se observa que las derivadas parciales son continuas y cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en todo el plano complejo, concluyendo que la función es completa.

(c) Para la función

$$f(z) = e^{-y} \operatorname{sen} x - ie^{-y} \cos x,$$

los componentes son

$$u = e^{-y} \operatorname{sen} x \qquad \text{y} \qquad v = -e^{-y} \cos x.$$

Luego,

$$\begin{aligned} u_x &= e^{-y} \cos x & u_y &= -e^{-y} \operatorname{sen} x \\ v_y &= e^{-y} \cos x & v_x &= e^{-y} \operatorname{sen} x. \end{aligned}$$

Se observa que las derivadas parciales son continuas y cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en todo el plano complejo, concluyendo que la función es completa.

(d) La función

$$f(z) = (z^2 - 2)e^{-x}e^{-iy}$$

puede escribirse como

$$f(z) = g(z)h(z) \qquad \text{con} \qquad g(z) = z^2 - 2 \qquad \text{y} \qquad h(z) = e^{-x}e^{-iy}.$$

$g(z)$ es una función completa por ser un polinomio y $h(z)$ también por tener derivadas parciales continuas que cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en todo el plano complejo, como se mostró en el Ejercicio 2 de la sección 2.11.1. Como $f(z)$ es el producto de funciones completas, también es una función completa.

Ejercicio 2

Emplear el teorema de la sección 2.9 para mostrar que las siguientes funciones no son analíticas en ningún lado:

(a) $f(z) = xy + iy$; (b) $f(z) = 2xy + i(x^2 - y^2)$;

(c) $f(z) = e^y e^{ix}$.

Solución

(a) Para la función

$$f(z) = xy + iy$$

los componentes son

$$u = xy \qquad \text{y} \qquad v = y.$$

Para comprobar las ecuaciones de Cauchy-Riemann, se observa que

$$\begin{aligned} u_x &= y & u_y &= x \\ v_y &= 1 & v_x &= 0. \end{aligned}$$

De esta forma

$$\begin{aligned} u_x &= v_y & &\Leftrightarrow & y &= 1 \\ u_y &= -v_x & &\Leftrightarrow & x &= 0. \end{aligned}$$

Se obtuvo que las ecuaciones de Cauchy-Riemann se cumplen únicamente en el punto $z = 0+1i = i$, lo que implica que la derivada de la función existe únicamente en este punto. Se concluye que la función no es analítica en ningún lado, ya que la derivada de la función no existe en un entorno de algún punto, como se requiere.

(b) Los componentes de la función

$$f(z) = i\overline{z}^2 = 2xy + i(x^2 - y^2)$$

son

$$u = 2xy \qquad \text{y} \qquad v = x^2 - y^2.$$

Para comprobar las ecuaciones de Cauchy-Riemann, se observa que

$$\begin{aligned} u_x &= 2y & u_y &= 2x \\ v_y &= -2y & v_x &= 2x. \end{aligned}$$

De esta forma

$$\begin{aligned} u_x &= v_y &\Leftrightarrow\quad 2y &= -2y &\Leftrightarrow\quad y &= 0 \\ u_y &= -v_x &\Leftrightarrow\quad 2x &= -2x &\Leftrightarrow\quad x &= 0. \end{aligned}$$

Se obtuvo que las ecuaciones de Cauchy-Riemann se cumplen únicamente en el punto $z = 0{+}0i = 0$, lo que implica que la derivada de la función existe únicamente en este punto y por lo tanto la función no es analítica en ningún lado.

(b) Los componentes de la función

$$f(z) = e^{i\overline{z}} = e^y e^{ix} = e^y(\cos x + i \operatorname{sen} x)$$

son

$$u = e^y \cos x \qquad \text{y} \qquad v = e^y \operatorname{sen} x.$$

Para comprobar las ecuaciones de Cauchy-Riemann, se observa que

$$\begin{aligned} u_x &= -e^y \sin x & u_y &= e^y \cos x \\ v_y &= e^y \operatorname{sen} x & v_x &= e^y \cos x. \end{aligned}$$

De esta forma

$$\begin{aligned} u_x &= v_y &\Leftrightarrow\quad -e^y \sin x &= e^y \sin x &\Leftrightarrow\quad 2e^y \sin x &= 0 &\Leftrightarrow\quad \sin x &= 0 &\Leftrightarrow\quad x &= k\pi \\ u_y &= -v_x &\Leftrightarrow\quad e^y \cos x &= -e^y \cos x &\Leftrightarrow\quad 2e^y \cos x &= 0 &\Leftrightarrow\quad \cos x &= 0 &\Leftrightarrow\quad x &= \frac{\pi}{2} + k\pi. \end{aligned}$$

Como ambas condiciones no se cumplen simultáneamente para ningún k entero, las ecuaciones de Cauchy-Riemann no se cumplen en ningún lado, por lo que la derivada de la función no existe en ningún lado.

Ejercicio 3

Justificar porque la composición de dos funciones completas es completa. también justificar porque cualquier combinación lineal $c_1 f_1(z) + c_2 f_2(z)$ de dos funciones completas, donde c_1 y c_2 son constantes complejas, es completa.

Solución Para la composición, se parte observando que $g[f(z)]$ está definida en todos lados por ser $g(z)$ una función completa. Además, por la regla de la cadena, se cumple que

$$\frac{d}{dz} g[f(z)] = g'[f(z)]f'(z).$$

Como f y g son completas, f' y g' existen en todos lados, por lo que la derivada de $g[f(z)]$ existe en todos lados.

La derivada de la combinación lineal de funciones es

$$\frac{d}{dz}[c_1 f_1(z) + c_2 f_2(z)] = c_1 f_1'(z) + c_2 f_2'(z),$$

que existe en todos lados, ya que como f_1 y f_2 son completas, f_1' y f_2' existen en todos lados.

Ejercicio 4

En cada caso, determinar los puntos singulares e indicar porqué la función es analítica en todo el resto del plano:

$$(a)\ f(z) = \frac{2z+1}{z(z^2+1)}; \qquad (b)\ f(z) = \frac{z^3+1}{z^2-3z+2};$$

$$(c)\ f(z) = \frac{z^2+1}{(z+2)(z^2+2z+2)}.$$

Solución Si dos funciones son analíticas en un dominio D, su cociente es analítico en el dominio D excepto en los puntos de D en donde el denominador se anula. En este caso, las funciones son cocientes de polinomios, y como los polinomios son funciones enteras, su cocientes es una función analítica en todo el plano excepto en los puntos en donde el denominador se anula.

(a) Los puntos singulares son los que cumplen que

$$z(z^2+1) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad z = 0,\ \pm i.$$

(b) Los puntos singulares son los que cumplen que

$$z^2 - 3z + 2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad z = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} = 1,\ 2.$$

(c) Los puntos singulares son los que cumplen que

$$(z+2)(z^2+2z+2) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad z = 2 \qquad \text{y} \qquad z = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = \frac{-2 \pm 2i}{2} = -1 \pm i.$$

Ejercicio 5

De acuerdo al ejemplo de la sección 2.11, la función

$$g(z) = \sqrt{r}e^{i\theta/2} \qquad \text{con} \qquad r > 0,\ -\pi < \theta < \pi,$$

es analítica en su dominio de definición, con derivada

$$g'(z) = \frac{1}{2g(z)}.$$

Mostrar que la función compuesta

$$G(z) = g(2z - 2 + i)$$

es analítica en el medio plano $x > 1$, con derivada

$$G'(z) = \frac{1}{g(2z - 2 + i)}.$$

Sugerencia: observar que $\operatorname{Re}(2z - 2 + i) > 0$ cuando $x > 1$.

Solución La función $w = f(z) = 2z - 2 + i$ es analítica en todos lados y la función $g(z)$ es analítica en todo su dominio de definición, que es $z = re^{i\theta}$ con $r > 0$, $-\pi < \theta < \pi$ y consiste en todo el plano complejo excepto el origen y el eje real negativo. Observar que el dominio de definición de $g(z)$ puede expresarse como $z \in \mathbb{C}$ tal que $z \neq x + 0i$ con $x \leq 0$. Por lo tanto, la composición $G(z) = g[f(z)] = g(w)$ es analítica en todo su dominio de definición, dado por

$$\{z \in \mathbb{C} :\ w = 2z - 2 + i \neq X + 0i,\ \text{con } X \leq 0\}.$$

Expresando $z = x + iy$, se tiene que

$$w = 2z - 2 + i = 2(x + iy) - 2 + i = 2(x-1) + i(2y+1) \neq X + 0i,\ \text{con } X \leq 0.$$

Por lo tanto, el dominio de la composición $G(z)$ son los puntos z del plano que *no cumplen simultáneamente* que

$$2(x-1) \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \leq 1 \qquad \text{y} \qquad 2y+1=0 \quad \Leftrightarrow \quad y=-\frac{1}{2},$$

o los puntos z del plano que cumplen que

$$\{z \in \mathbb{C} : \; z \neq x - \frac{i}{2}, \text{ con } x \leq 1\}.$$

Como

$$\{z \in \mathbb{C} : \; z = x + iy, \text{ con } x > 1\} \subset \{z \in \mathbb{C} : \; z \neq x - \frac{i}{2}, \text{ con } x \leq 1\},$$

se concluye que $G(z)$ es analítica en el medio plano $x > 1$.

Empleando la regla de la cadena, la derivada es

$$G'(z) = g'(2z-2+i)\frac{d}{dz}(2z-2+i) = \frac{1}{2g(2z-2+i)} \times 2 = \frac{1}{g(2z-2+i)}.$$

Ejercicio 6

Emplear los resultados de la sección 2.11 para verificar que la función

$$g(z) = \ln z = \ln(re^{i\theta}) = \ln r + i\theta, \qquad \text{con} \qquad r > 0, \, 0 < \theta < 2\pi,$$

es analítica en el dominio de definición indicado, con derivada $g'(z) = 1/z$. Luego mostrar que la función compuesta $G(z) = g(z^2+1)$ es analítica en el cuadrante $x > 0$, $y > 0$, con derivada

$$G'(z) = \frac{2z}{z^2+1}.$$

Sugerencia: observar que $\text{Im}(z^2+1) > 0$ cuando $x > 0$, $y > 0$.

Solución Los componentes son

$$u = \ln r \qquad \text{y} \qquad v = \theta.$$

Para verificar si se cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann, se observa que

$$\begin{array}{l} u_r = \dfrac{1}{r} \\ v_\theta = 1 \end{array} \quad \Rightarrow \quad ru_r = v_\theta \qquad \text{y} \qquad \begin{array}{l} u_\theta = 0 \\ v_r = 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad u_\theta = -rv_r.$$

Como las derivadas parciales son continuas y cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en todo el dominio de definición, se concluye que $g(z)$ es analítica en todo el dominio de definición. De la ecuación 2.44, la derivada es

$$g'(z) = e^{-i\theta}(u_r + iv_r) = \frac{e^{-i\theta}}{r} = \frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{z}.$$

Se considera ahora la función compuesta $G(z) = g(z^2+1)$ y se quiere estudiar su analiticidad. La función $w = f(z) = z^2 + 1$ es analítica en todos lados y la función $g(z)$ es analítica en todo su dominio de definición, que es $z = re^{i\theta}$ con $r > 0$, $0 < \theta < 2\pi$ y consiste en todo el plano complejo excepto el origen y el eje real positivo. Observar que el dominio de definición de $g(z)$ puede expresarse como $z \in \mathbb{C}$ tal que $z \neq x + 0i$ con $x \geq 0$. Por lo tanto, la composición $G(z) = g[f(z)] = g(w)$ es analítica en todo su dominio de definición, dado por

$$\{z \in \mathbb{C} : \; w = z^2 + 1 \neq X + 0i, \text{ con } X \geq 0\}.$$

Expresando $z = x + iy$, se tiene que

$$w = z^2 + 1 = (x+iy)^2 + 1 = x^2 - y^2 + 2ixy + 1 = x^2 - y^2 + 1 + 2ixy \neq X + 0i, \text{ con } X \geq 0.$$

Por lo tanto, el dominio de la composición $G(z)$ son los puntos z del plano que *no cumplen simultáneamente* que

$$x^2 - y^2 + 1 \geq 0 \qquad \text{y} \qquad 2xy = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \quad \text{o} \quad y = 0. \tag{2.50}$$

Si $x = 0$ en la segunda condición en 2.50, la primera condición es

$$-y^2 + 1 \geq 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad -y^2 \geq -1 \qquad \Leftrightarrow \qquad y^2 \leq 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad |y| \leq 1.$$

Esto indica que los puntos $z = iy$ con $|y| \leq 1$ no pertenecen al dominio de $G(z)$. Observar que estos puntos son que pertenecen al segmento $[-1, 1]$ del eje imaginario. Por otro lado, si $y = 0$ en la segunda condición en 2.50, la primera condición es

$$x^2 + 1 \geq 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x^2 \geq -1 \qquad \Leftrightarrow \qquad x \text{ cualquiera.}$$

Esto indica que los puntos $z = x + i0$, que consisten en el eje real, no pertenecen al dominio de $G(z)$. Combinando ambos resultados, se obtuvo que el dominio de $G(z)$ es

$$\{z \in \mathbb{C} : \; z \neq x + i0 \quad \text{y} \quad z \neq iy, \; \text{con } |y| \leq 1\},$$

que es todo el plano complejo excepto el eje real y el intervalo $[-1, 1]$ del eje imaginario. Como el cuadrante $x > 0$, $y > 0$ está incluido en este conjunto, es decir,

$$\{z \in \mathbb{C} : \; z = x + iy, \; \text{con } x > 0, \, y > 0\} \subset \{z \in \mathbb{C} : \; z \neq x + i0 \quad \text{y} \quad z \neq iy, \; \text{con } |y| \leq 1\},$$

se concluye que $G(z)$ es analítica en el cuadrante $x > 0$, $y > 0$.

Finalmente, empleando la regla de la cadena, la derivada es

$$G'(z) = g'(z^2 + 1)\frac{d}{dz}(z^2 + 1) = \frac{1}{z^2 + 1} \times 2z = \frac{2z}{z^2 + 1}.$$

Ejercicio 7

Sea f una función analítica en un dominio D. Probar que si $f(z)$ es real para todo z en D, entonces $f(z)$ debe ser constante en D.

Solución Como $f(z) = u + iv$ es real, tiene que cumplirse que $v = 0$ para todo z en D. Bajo esta hipótesis, $v_x = v_y = 0$, y además, por la hipótesis de que f es analítica en D, deben cumplirse las ecuaciones de Cauchy-Riemann, que en este caso son

$$\begin{aligned} u_x &= v_y = 0 \\ u_y &= -v_x = 0 \end{aligned} \qquad \Rightarrow \qquad u_x = u_y = v_x = v_y = 0.$$

Por lo tanto, de la ecuación 2.36, la derivada de f es

$$f'(z) = u_x + iv_x = 0$$

para todo z en D y del teorema de la sección 2.12 resulta que f es constante en D.

2.13. Funciones armónicas

Una función real H de dos variables reales x y y se dice *armónica* en un dominio dado del plano xy si en ese dominio tiene derivadas parciales de primer y segundo orden continuas y satisface la ecuación en derivadas parciales

$$H_{xx}(x, y) + H_{yy}(x, y) = 0,$$

conocida como *ecuación de Laplace*.

Teorema. Si una función $f(z) = u(x, y)+iv(x, y)$ es analítica en un dominio D, entonces las funciones componentes u y v son armónicas en D.

Para la prueba se necesita el siguiente resultado que se proveerá mas adelante en la sección **??**: si una función de variable compleja es analítica en un punto, su componente real y su componente imaginario tienen derivadas continuas de todos los ordenes en ese punto.

Asumiendo que f es analítica en D, se parte de la observación de que las derivadas parciales de primer orden de sus componentes deben satisfacer las ecuaciones de Cauchy-Riemann en D:

$$u_x = v_y, \qquad u_y = -v_x.$$

Diferenciando ambos lados de las ecuaciones respecto a x, se tiene que

$$u_{xx} = v_{yx}, \qquad u_{yx} = -v_{xx}, \tag{2.51}$$

y de forma similar, diferenciando ambos lados respecto a y resulta en

$$u_{xy} = v_{yy}, \qquad u_{yy} = -v_{xy}. \tag{2.52}$$

Para continuar, se considera el siguiente resultado de cálculo:

Teorema de Clairaut. Sea la función real f de dos variables reales x y y definida en un dominio D que contiene el punto (x_0, y_0). Si las funciones f_{xy} y f_{yx} son continuas en D, se cumple que

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0).$$

El planteo y la demostración de este teorema puede encontrarse por ejemplo en la sección 14.3 de [3].

De este teorema, la continuidad de las derivadas parciales de u y v aseguran que

$$u_{yx} = u_{xy}, \qquad v_{yx} = v_{xy}. \tag{2.53}$$

Por lo tanto,

$$u_{xx} + u_{yy} \overset{(a)}{=} v_{yx} - v_{xy} \overset{(b)}{=} v_{xy} - v_{xy} = 0,$$

donde en (a) se emplearon los resultados de las ecuaciones 2.51 y 2.52, y en (b) el resultado de la ecuación 2.53. Análogamente

$$v_{xx} + v_{yy} = -u_{yx} + u_{xy} = -u_{xy} + u_{xy} = 0.$$

Se concluye que u y v son armónicas en D.

2.13.1. Ejercicios

Ejercicio 1

Sea la función $f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$ analítica en un dominio D que no incluye el origen. Empleando las ecuaciones 2.41 de Cauchy-Riemann de forma polar y asumiendo continuidad de las derivadas parciales, mostrar que en D la función $u(r, \theta)$ satisface la ecuación en derivadas parciales

$$r^2 u_{rr}(r, \theta) + ru_r(r, \theta) + u_{\theta\theta}(r, \theta) = 0,$$

que es la *forma polar de las ecuaciones de Laplace*. Mostrar que lo mismo se cumple para $v(r, \theta)$.

Solución Como f es analítica en D, se deben cumplir las ecuaciones de Cauchy-Riemann en D,

$$ru_r = v_\theta, \qquad u_\theta = -rv_r.$$

Diferenciando ambos lados de las ecuaciones respecto a r, se tiene que

$$u_r + ru_{rr} = v_{\theta r}, \qquad u_{\theta r} = -v_r - rv_{rr}, \tag{2.54}$$

y de forma similar, diferenciando ambos lados respecto a θ resulta en

$$ru_{r\theta} = v_{\theta\theta}, \qquad u_{\theta\theta} = -rv_{r\theta}. \tag{2.55}$$

Del teorema de Clairaut formulado mas arriba en esta sección, la continuidad de las derivadas parciales de u y v aseguran que

$$u_{\theta r} = u_{r\theta}, \qquad v_{\theta r} = v_{r\theta}. \tag{2.56}$$

Por lo tanto, partiendo de multiplicar por r la primera ecuación en 2.54, se tiene que

$$ru_r + r^2u_{rr} = rv_{\theta r} \overset{(a)}{=} rv_{r\theta} \overset{(b)}{=} -u_{\theta\theta},$$

donde en (a) se empleó el resultado de la ecuación 2.56 y en (b) el resultado de la ecuación 2.55. Finalmente, despejando se obtiene que

$$r^2u_{rr} + ru_r + u_{\theta\theta} = 0,$$

que es lo que se quería probar. Análogamente, partiendo de multiplicar por $-r$ la segunda ecuación en 2.54, se tiene que

$$rv_r + r^2v_{rr} = -ru_{\theta r} \overset{(a)}{=} -ru_{r\theta} \overset{(b)}{=} -v_{\theta\theta},$$

donde se empleó el resultado de la ecuación 2.56 en (a) y la primera ecuación de 2.55 en (b). Se concluye que

$$r^2v_{rr} + rv_r + v_{\theta\theta} = 0.$$

Ejercicio 2

Sea la función $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ analítica en un dominio D, y se considera la familia de *curvas de nivel* $u(x, y) = c_1$ y $v(x, y) = c_2$, donde c_1 y c_2 son constantes reales. Probar que esas familias son ortogonales. Mas precisamente, mostrar que si $z_0 = (x_0, y_0)$ es un punto en D que es común a dos curvas particulares $u(x, y) = c_1$ y $v(x, y) = c_2$ y si $f'(z_0) \neq 0$, se cumple que las líneas tangentes a esas curvas en (x_0, y_0) son perpendiculares.

Sugerencia: notar que del par de ecuaciones $u(x, y) = c_1$ y $v(x, y) = c_2$ surge que

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0 \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0.$$

Solución Una curva en el plano xy puede parametrizarse localmente como $y(x)$, y la pendiente de la tangente en el punto $[x, y(x)]$ es $y'(x)$. Sea la curva de nivel $u(x, y) = c_1$, y considérese la parametrización $y(x)$. De esta forma, como el punto $[x, y(x)]$ pertenece a la curva de nivel $u(x, y) = c_1$, se cumple que

$$u[x, y(x)] = c_1.$$

Diferenciando ambos lados de la igualdad respecto a x, se tiene que

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0,$$

para lo cual se empleó la regla de la cadena. La expresión puede escribirse como

$$u_x + u_y y' = 0.$$

Despejando, se obtiene que la pendiente de la tangente en un punto $[x, y(x)]$ de la curva de nivel $u(x, y) = c_1$ es

$$y' = -\frac{u_x}{u_y}$$

Procediendo de forma análoga para la curva de nivel $v(x, y) = c_2$, diferenciando ambos lados de la igualdad respecto a x, se tiene que

$$\frac{dv}{dx} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0,$$

o

$$v_x + v_y y' = 0,$$

por lo que la pandiente de la tangente en el punto $(x,\, y)$ de la curva de nivel $v(x,\, y) = c_2$ es

$$y' = -\frac{v_x}{v_y} \overset{(a)}{=} \frac{u_y}{u_x},$$

donde en (a) se emplearon las ecuaciones 2.35 de Cauchy-Riemann, que deben cumplirse por ser f analítica en D. Llamando y'_u y y'_v a las pendientes de las tangentes a las curvas $u(x,\, y) = c_1$ y $v(x,\, y) = c_2$ respectivamente, se obtuvo que

$$y'_u = -\frac{u_x}{u_y} \qquad \text{y} \qquad y'_v = \frac{u_y}{u_x}.$$

Se concluye que en un punto $(x_0,\, y_0)$ común a ambas curvas de nivel, se cumple que

$$y'_u(x_0,\, y_0) = -\frac{u_x(x_0,\, y_0)}{u_y(x_0,\, y_0)} \qquad \text{y} \qquad y'_v(x_0,\, y_0) = \frac{u_y(x_0,\, y_0)}{u_x(x_0,\, y_0)} \qquad \Rightarrow \qquad y'_u(x_0,\, y_0) = -\frac{1}{y'_v(x_0,\, y_0)},$$

indicando que las tangentes en un punto común a ambas curvas de nivel son perpendiculares.

Otra forma de obtener la misma conclusión es considerando el resultado de cálculo que indica que el gradiente de una función real de dos variables reales es un vector perpendicular a la tangente de las curvas de nivel (ver la sección 14.6 de [3]). Los gradientes de u y v son respectivamente

$$\nabla u = u_x\mathbf{i} + u_y\mathbf{j} \qquad \text{y} \qquad \nabla v = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j},$$

y su producto interno es

$$\nabla u \cdot \nabla v = (u_x\mathbf{i} + u_y\mathbf{j}) \cdot (v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j}) = u_x v_x + u_y v_y \overset{(a)}{=} u_x(-u_y) + u_y u_x = 0,$$

donde en (a) se emplearon las ecuaciones 2.35 de Cauchy-Riemann. Como los gradientes en un punto común $(x_0,\, y_0)$ a ambas curvas de nivel son perpendiculares, se concluye que las tangentes a las curvas son perpendiculares en ese punto.

Como ejemplo sencillo, se considera la función $f(z) = z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$, cuyos componentes son

$$u(x,\, y) = x^2 - y^2 \qquad \text{y} \qquad v(x,\, y) = 2xy.$$

En la figura 2.7 se muestran las superficies correspondientes a los componentes $u(x,\, y)$ y $v(x,\, y)$ y algunas curvas de nivel. Se puede ver que en los puntos de intersección de las curvas de nivel de ambos componentes, las tangentes son perpendiculares. Esto no ocurre en el punto $(x,\, y) = (0,\, 0)$, ya que en ese caso, $f'(0) = 0$.

Ejercicio 3

Mostrar que cuando $f(z) = z^2$, las curvas de nivel $u(x,\, y) = c_1$ y $v(x,\, y) = c_2$ de las funciones componentes son las hipérbolas indicadas en la figura 2.7. Observar la ortogonalidad de las dos familias, descripta en el Ejercicio 2. Observar que las curvas $u(x,\, y) = 0$ y $v(x,\, y) = 0$ se intersectan en el origen pero no son ortogonales entre si. ¿Porque este hecho es acorde al resultado del Ejercicio 2?

Solución El hecho de que las curvas de nivel

$$u(x,\, y) = x^2 - y^2 = c_1 \qquad \text{y} \qquad v(x,\, y) = 2xy = c_2$$

de las funciones componentes de $f(z) = z^2$ son las hipérbolas mostradas en la figura 2.7 se explicó en la sección 2.2.

Como se explicó en el Ejercicio 2, las curvas de nivel $u(x,\, y) = 0$ y $v(x,\, y) = 0$ se intersectan en el origen pero no son ortogonales debido a que $f'(0) = 0$.

Ejercicio 4

Bosquejar las familias de curvas de nivel de las funciones componentes u y v cuando $f(z) = 1/z$ y notar la ortogonalidad descripta en el Ejercicio 2.

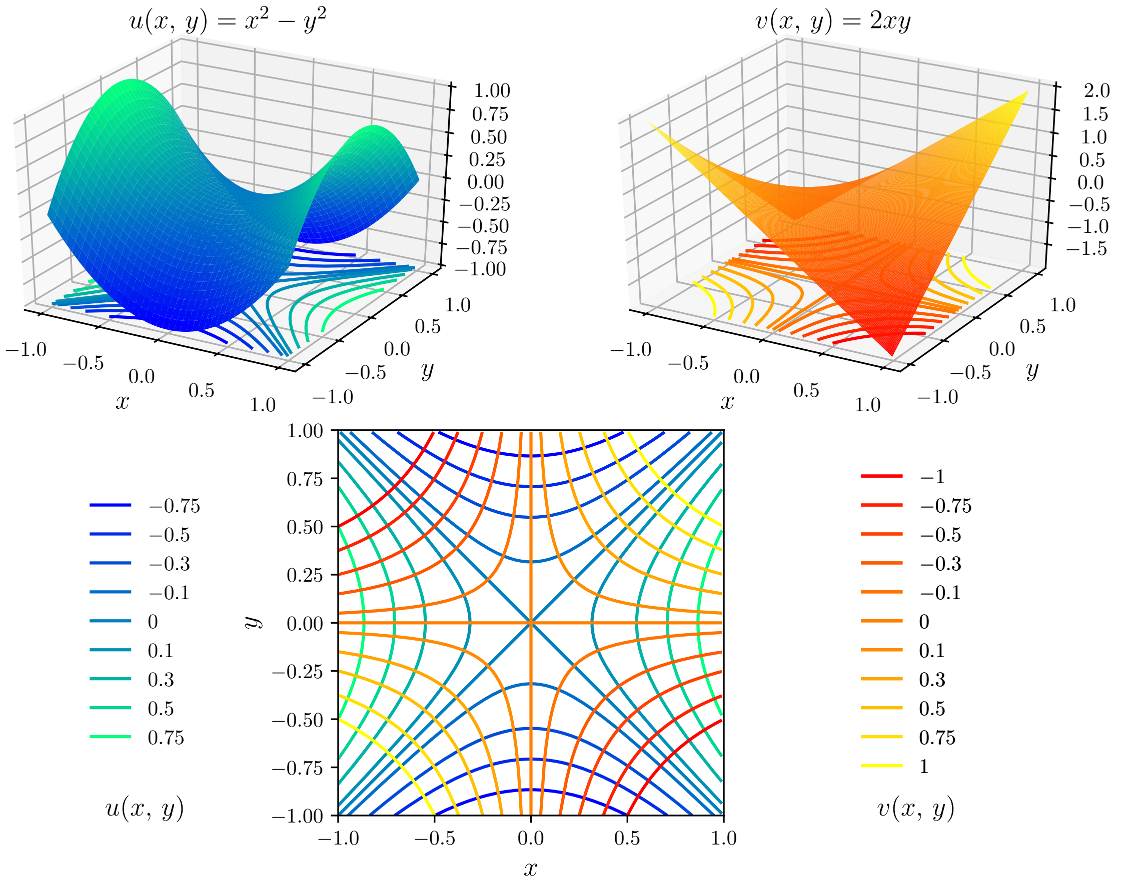

Figura 2.7: Superficie y curvas de nivel de las funciones componentes $u(x,\, y) = x^2 - y^2$ y $v(x,\, y) = 2xy$ de la función $f(z) = z^2$. Las tangentes a las curvas de nivel de ambos componentes son perpendiculares en los puntos de intersección, excepto en el punto $(0,\, 0)$, donde se cumple que $f'(0) = 0$.

Solución Como

$$f(z) = \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2},$$

las funciones componentes son

$$u(x,\, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} \qquad \text{y} \qquad v(x,\, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2}.$$

La ecuación de la curva de nivel

$$u(x,\, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} = c_1$$

se puede escribir como

$$x^2 + y^2 - \frac{x}{c_1} = 0,$$

y es equivalente a

$$x^2 - 2\left(\frac{1}{2c_1}\right)x + \left(\frac{1}{2c_1}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2c_1}\right)^2$$

o

$$\left(x - \frac{1}{2c_1}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2c_1}\right)^2.$$

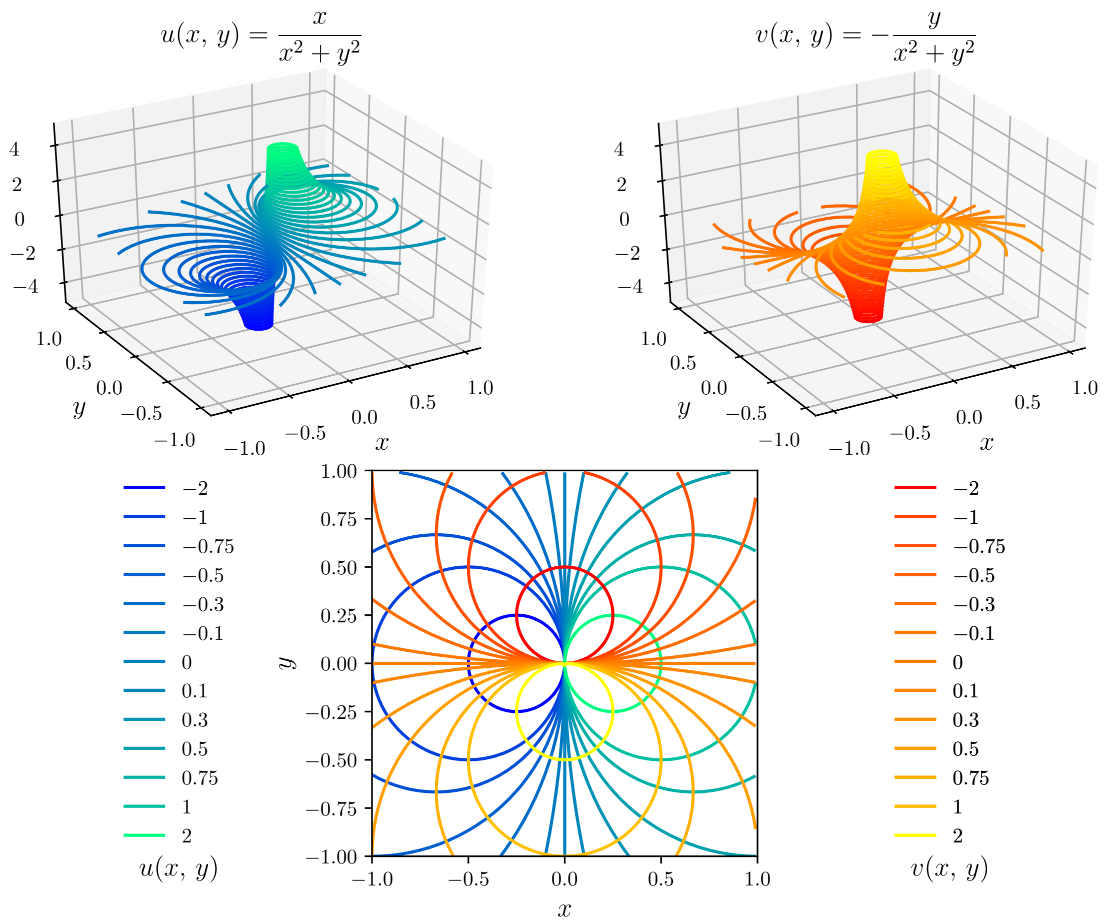

Figura 2.8: Superficie y curvas de nivel de las funciones componentes $u(x,\, y) = x/(x^2+y^2)$ y $v(x,\, y) = -y/(x^2+y^2)$ de la función $f(z) = 1/z$. Las curvas de nivel del componente u es la familia de circunferencias con centro en el eje real que pasan por el origen y las curvas de nivel del componente v es la familia de circunferencias con centro en el eje imaginario que pasan por el origen. Se observa que ambas familas son ortogonales.

Esto es la ecuación de una circunferencia de centro $[1/(2c_1),\, 0]$ y radio $1/(2c_1)$. Por lo tanto, las curvas de nivel del componente u son la familia de circunferencias con centro en el eje real $y = 0$ que pasan por el origen $(0,\, 0)$, y se muestra en la figura 2.8.

Realizando un razonamiento análogo, la ecuación de las curvas de nivel del componente v

$$v(x,\, y) = -\frac{y}{x^2+y^2} = c_2$$

es

$$x^2 + \left(y + \frac{1}{2c_2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2c_2}\right)^2.$$

Esto es la ecuación de una circunferencia de centro $[0,\, -1/(2c_2)]$ y radio $1/(2c_2)$. Por lo tanto, las curvas de nivel del componente v son la familia de circunferencias con centro en el eje imaginario $x = 0$ que pasan por el origen $(0,\, 0)$, como se muestra en la figura 2.8. Como se aprecia en la figura, ambas familias de curvas son ortogonales.

Ejercicio 5

Hacer el Ejercicio 4 empleando coordenadas polares.

Solución Con $z = re^{i\theta}$, la función se puede expresar como

$$f(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{e^{-i\theta}}{r} = \frac{\cos\theta}{r} - i\frac{\operatorname{sen}\theta}{r},$$

resultando en que las funciones componentes en coordenadas polares son

$$u(r,\,\theta) = \frac{\cos\theta}{r} \qquad \text{y} \qquad v(r,\,\theta) = -\frac{\operatorname{sen}\theta}{r}.$$

Para realizar el análisis de las curvas de nivel, se parte considerando que la ecuación de una circunferencia en coordenadas polares es[6]

$$r^2 - 2rr_0\cos(\theta - \varphi) + r_0^2 = a^2,$$

donde a es el radio, $(r_0,\,\varphi)$ son las coordenadas polares del centro y $(r,\,\theta)$ son las coordenadas polares de los puntos de la circunferencia. En el caso particular en que el origen pertenece a la circunferencia, se cumple que $r_0 = a$, y la ecuación se reduce a

$$r = 2r_0\cos(\theta - \varphi). \tag{2.57}$$

Las ecuaciones de las curvas de nivel del componente u son

$$u(r,\,\theta) = \frac{\cos\theta}{r} = c_1,$$

que se pueden escribir como

$$r = \frac{\cos\theta}{c_1} \qquad \text{o} \qquad r = \begin{cases} 2\left(\dfrac{1}{2c_1}\right)\cos\theta & c_1 \geq 0 \\ -2\left(\dfrac{1}{2|c_1|}\right)\cos\theta = 2\left(\dfrac{1}{2|c_1|}\right)\cos(\theta - \pi) & c_1 < 0 \end{cases},$$

donde se empleó la identidad trigonométrica $-\cos\theta = \cos(\theta - \pi)$. Comparando este resultado con el de la ecuación 2.57, se concluye que las curvas de nivel son circunferencias de radio $1/(2|c_1|)$ y centro con coordenadas polares $[1/(2c_1),\,0]$ si $c_1 \geq 0$ o $[1/(2|c_1|),\,\pi]$ si $c_1 < 0$, es decir, la familia de circunferencias con centro en el eje real que pasan por el origen.

Las ecuaciones de las curvas de nivel del componente v son

$$v(r,\,\theta) = -\frac{\sin\theta}{r} = c_2,$$

que se pueden escribir como

$$r = -\frac{\sin\theta}{c_2} \qquad \text{o} \qquad r = \begin{cases} 2\left(\dfrac{1}{2c_2}\right)\cos\left(\theta + \dfrac{\pi}{2}\right) & c_2 \geq 0 \\ 2\left(\dfrac{1}{2|c_2|}\right)\sin\theta = 2\left(\dfrac{1}{2|c_2|}\right)\cos\left(\theta - \dfrac{\pi}{2}\right) & c_2 < 0 \end{cases}$$

donde se empleó la identidad trigonométrica $\mp\sin\theta = \cos(\theta \pm \pi/2)$. Comparando este resultado con el de la ecuación 2.57, se concluye que las curvas de nivel son circunferencias de radio $1/(2|c_2|)$ y centro con coordenadas polares $[1/(2c_2),\,-\pi/2]$ si $c_2 \geq 0$ o $[1/(2|c_2|),\,\pi/2]$ si $c_2 < 0$, es decir, la familia de circunferencias con centro en el eje imaginario que pasan por el origen. Las curvas de nivel de ambos componentes se muestran en la figura 2.8.

Ejercicio 6

Esbozar la familia de curvas de nivel de las funciones componentes u y v cuando

$$f(z) = \frac{z-1}{z+1}$$

y notar como se ilustra en este caso el resultado del Ejercicio 2.

[6] Ver `https://en.wikipedia.org/wiki/Circle#Equations`, por ejemplo.

Solución Para calcular los componentes se observa que

$$f(z) = \frac{z-1}{z+1} = \frac{(z-1)\overline{(z+1)}}{(z+1)\overline{(z+1)}} = \frac{(z-1)(\overline{z}+1)}{|z+1|^2} = \frac{z\overline{z}+z-\overline{z}-1}{|z+1|^2} = \frac{|z|^2+z-\overline{z}-1}{|z+1|^2}.$$

Considerando que $|z|^2 = x^2+y^2$, $|z+1|^2 = (x+1)^2+y^2$ y $z-\overline{z} = 2iy$ se obtiene que

$$f(z) = \frac{x^2+y^2-1+2iy}{(x+1)^2+y^2}$$

por lo que los componentes son

$$u(x,\,y) = \frac{x^2+y^2-1}{(x+1)^2+y^2} \qquad \text{y} \qquad v(x,\,y) = \frac{2y}{(x+1)^2+y^2}.$$

Las curvas de nivel del componente u están dadas por

$$\frac{x^2+y^2-1}{(x+1)^2+y^2} = c_1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2+y^2-1 = c_1[(x+1)^2+y^2] \quad \Leftrightarrow \quad x^2+y^2-1 = c_1(x^2+2x+1+y^2)$$

resultando en que

$$x^2(c_1-1)+2c_1x+(c_1+1)+y^2(c_1-1) = 0,$$

es decir,

$$x^2+\frac{2c_1x}{c_1-1}+\frac{c_1+1}{c_1-1}+y^2 = 0. \tag{2.58}$$

Empleando la técnica de completar el cuadrado, considerando la identidad

$$\left(x+\frac{c_1}{c_1-1}\right)^2 = x^2+\frac{2c_1x}{c_1-1}+\frac{c_1^2}{(c_1-1)^2},$$

la ecuación 2.58 queda

$$\left(x+\frac{c_1}{c_1-1}\right)^2+y^2-\frac{c_1^2}{(c_1-1)^2}+\frac{c_1+1}{c_1-1} = 0$$

resultando en

$$\left(x+\frac{c_1}{c_1-1}\right)^2+y^2 = \frac{1}{(c_1-1)^2}$$

Esto es una circunferencia de centro $[-c_1/(c_1-1),\,0]$ y radio $1/|c_1-1|$. Se observa además que el punto $(-1,\,0)$ pertenece a la circunferencia. Se concluye que las curvas de nivel del componente u es la familia de circunferencias con centro en el eje real que pasan por el punto $(-1,\,0)$ y se muestran en la figura 2.9.

Las curvas de nivel del componente v están dadas por

$$\frac{2y}{(x+1)^2+y^2} = c_2,$$

es decir,

$$(x+1)^2+y^2-\frac{2y}{c_2} = 0. \tag{2.59}$$

Nuevamente, empleando la técnica de completar el cuadrado, como

$$\left(y-\frac{1}{c_2}\right)^2 = y^2-\frac{2y}{c_2}+\frac{1}{c_2^2},$$

la ecuación 2.59 se puede escribir como

$$(x+1)^2+\left(y-\frac{1}{c_2}\right)^2 = \frac{1}{c_2^2}.$$

Esto es una circunferencia de centro $(-1,\,1/c_2)$ y radio $1/|c_2|$. Se observa además que el punto $(-1,\,0)$ pertenece a la circunferencia. Se concluye que las curvas de nivel del componente u es la familia de circunferencias con centro en la recta vertical $x=-1$ que pasan por el punto $(-1,\,0)$ y se muestran en la figura 2.9.

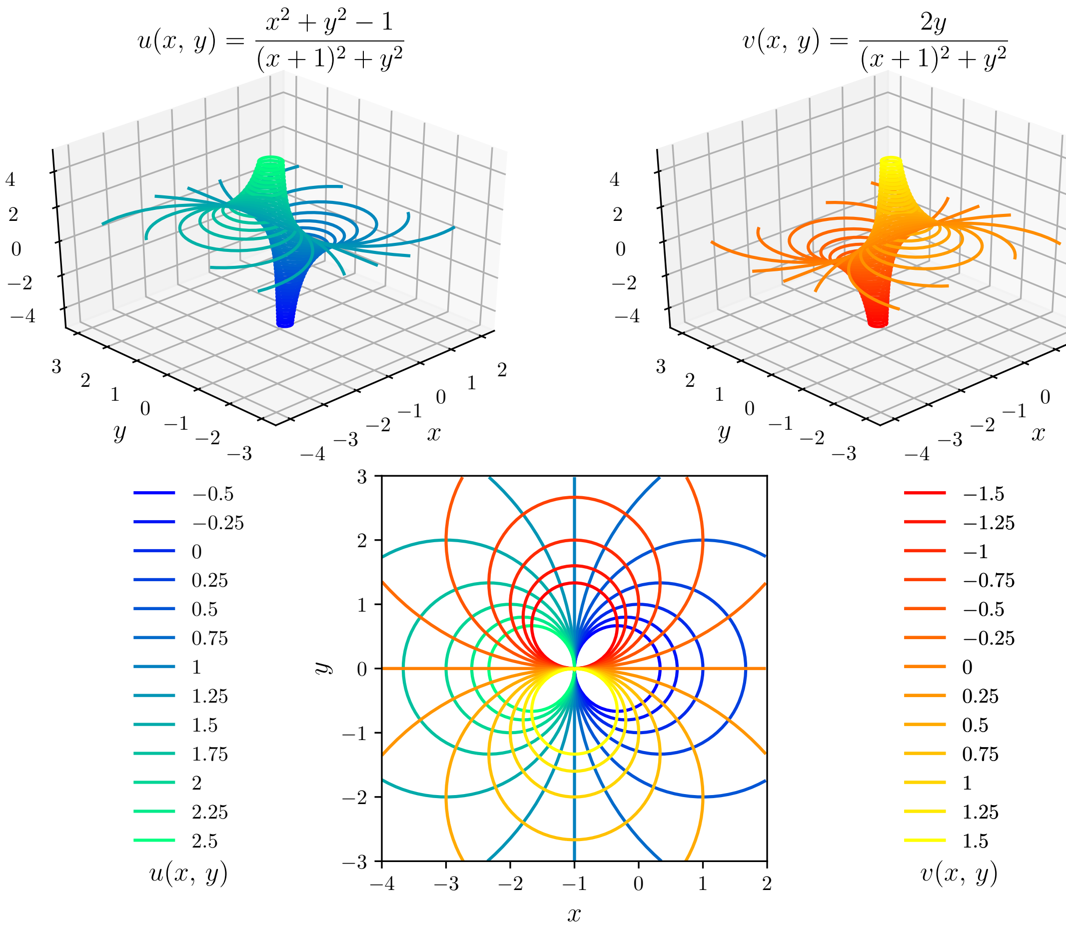

Figura 2.9: Superficie y curvas de nivel de las funciones componentes $u(x,\, y)$ y $v(x,\, y)$ de la función $f(z) = (z-1)/(z+1)$. Las curvas de nivel del componente u es la familia de circunferencias con centro en el eje real que pasan por el punto $(-1,\, 0)$ y las curvas de nivel del componente v es la familia de circunferencias con centro en la recta vertical $x = -1$ que pasan por el punto $(-1,\, 0)$. Se observa que ambas familas son ortogonales.

2.14. Funciones analíticas determinadas unívocamente

En esta sección y la siguiente se estudia como los valores de una función analítica en un dominio D son afectados por sus valores en un subdominio de D o en un segmento de recta en D.

Lema. Supóngase que

(a) una función f es analítica en un dominio D;

(b) $f(z) = 0$ en un dominio o segmento de recta contenido en D

Entonces, se cumple que $f(z) \equiv 0$ en D, es decir, $f(z)$ es idénticamente nula en D.

Supóngase ahora que dos funciones f y g son analíticas en el mismo dominio D y $f(z) = g(z)$ en un dominio o segmento de recta contenido en D. La diferencia

$$h(z) = f(z) - g(z)$$

también es analítica en D y $h(z) = 0$ en el dominio o segmento. De acuerdo al lema, $h(z) \equiv 0$ en D y por lo tanto, $f(z) = h(z)$ en cada punto de D. Esto conduce al siguiente importante teorema.

Teorema. Una función que es analítica en D está unívocamente determinada en D por los valores en un dominio o segmento de recta contenido en D.

Este teorema es útil en el estudio de la extensión del dominio de definición de una función analítica. Mas precisamente, dados dos dominios D_1 y D_2, se considera la intersección $D_1 \cap D_2$. Si D_1 y D_2 tienen puntos en común y una función f_1 es analítica en D_1 *puede* existir una función f_2 analítica en D_2 tal que $f_2(z) = f_1(z)$ para cada z en la intersección $D_1 \cap D_2$. En ese caso f_2 se llama *continuación analítica* de f_1 en el dominio D_2.

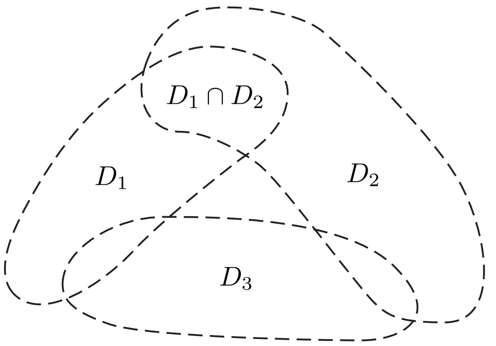

Figura 2.10: Continuación analítica.

Si la continuación analítica existe, por el teorema anterior, es única. Es decir, no mas de una función puede ser analítica en D_2 y asumir el valor $f_1(z)$ en cada punto z del dominio $D_1 \cap D_2$ interior a D_2. Sin embargo, si hay una continuación analítica f_3 de f_2 del dominio D_2 al dominio D_3 que intersecta al dominio D_1, como se muestra en la figura 2.10, no es necesariamente cierto que $f_3(z) = f_1(z)$ para cada z en $D_1 \cap D_3$. Esto se ilustra en el Ejercicio 2 de la sección 2.15. Por la demostración de los teoremas en esta sección, recurrir a [1].

Si f_2 es la continuación analítica de f_1 de un dominio D_1 a un dominio D_2, la función F definida como

$$F(z) = \begin{cases} f_1(z) & \text{si } z \in D_1 \\ f_2(z) & \text{si } z \in D_2, \end{cases}$$

es analítica en la unión $D_1 \cup D_2$. La función F es la continuación analítica en $D_1 \cup D_2$ de f_1 o f_2, y f_1 y f_2 se dicen *elementos* de F.

2.15. Principio de reflexión

El teorema en esta sección concierne al hecho de que algunas funciones analíticas tienen la propiedad de que $\overline{f(z)} = f(\overline{z})$ en todos los puntos z de algunos dominios, mientras otras no. Se observa por ejemplo que las funciones $z+1$ y z^2 tienen esta propiedad cuando el dominio D es el plano complejo finito, pero lo mismo no es cierto para las funciones $z+i$ y iz^2. El siguiente teorema, denominado *principio de reflexión* provee una forma de predecir cuando $\overline{f(z)} = f(\overline{z})$.

Teorema. Supóngase que una función f es analítica en un dominio D que contiene un segmento del eje x y cuya mitad inferior es el reflejo de la mitad superior respecto al eje x. Entonces

$$\overline{f(z)} = f(\overline{z}) \tag{2.60}$$

para cada punto z en el dominio si y solo si $f(x)$ es real para cada punto x en el segmento del eje real.

Se comienza la prueba asumiendo que $f(x)$ es real en cada punto x del segmento. Se mostrará que

$$F(z) = \overline{f(\overline{z})} \tag{2.61}$$

es analítica en D, y se empleará ese resultado junto con la hipótesis para obtener 2.60. Para obtener la analiticidad de $F(x)$ se escribe

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \qquad \text{y} \qquad F(z) = U(x, y) + iV(x, y).$$

De esta forma,
$$\overline{f(\overline{z})} = u(x,\, -y) - iv(x,\, -y) \tag{2.62}$$
y por lo tanto, los componentes de $F(z)$ y $f(z)$ se relacionan por las ecuaciones
$$U(x,\, y) = u(x,\, -y) \qquad \text{y} \qquad V(x,\, y) = -v(x,\, -y).$$
o, definiendo $t = -y$,
$$U(x,\, y) = u(x,\, t) \qquad \text{y} \qquad V(x,\, y) = -v(x,\, t). \tag{2.63}$$
Continuando, como por hipótesis $f(x + it)$ es una función analítica de $x + it$, las derivadas parciales de primer orden de las funciones componentes $u(x,\, t)$ y $v(x,\, t)$ son continuas en D y satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann,
$$u_x = v_t \qquad \text{y} \qquad u_t = -v_x, \tag{2.64}$$
como se demostró en la sección 2.10. Además, de las ecuaciones 2.63,
$$U_x = u_x \qquad \text{y} \qquad V_y = \frac{\partial(-v)}{\partial t}\frac{dt}{dy} = (-v_t)(-1) = v_t, \tag{2.65}$$
y de forma similar,
$$U_y = \frac{\partial u}{\partial t}\frac{dt}{dy} = (u_t)(-1) = -u_t \qquad \text{y} \qquad V_x = -v_x. \tag{2.66}$$
Combinando las ecuaciones en 2.65 con la primer ecuación en 2.64 se obtiene que $U_x = V_y$, y combinando las ecuaciones en 2.66 con la segunda ecuación en 2.64 se obtiene que $U_y = -V_x$. Se obtuvo que las derivadas parciales de $U(x,\, y)$ y $V(x,\, y)$ satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann, y como esas derivadas son continuas, se concluye que $F(z)$ es analítica en D. Además, como $f(x)$ es real en el segmento del eje real en D, se cumple que $v(x,\, 0) = 0$ en el segmento, y de las ecuaciones 2.63, se observa que
$$F(x) = U(x,\, 0) + iV(x,\, 0) = u(x,\, 0) - iv(x,\, 0) = u(x,\, 0) = f(x),$$
es decir,
$$F(z) = f(z) \tag{2.67}$$
en cada punto del segmento. Por lo tanto, del teorema de la sección 2.14 que indica que una función analítica definida en un dominio D queda determinada por unívocamente por los valores en cualquier segmento en D se concluye que la ecuación 2.67 es válida en todo el dominio D. De la definición 2.61 de la función $F(z)$ se obtiene que
$$\overline{f(\overline{z})} = f(z), \tag{2.68}$$
que es lo mismo que la ecuación 2.60, concluyendo la prueba.

Para probar el recíproco del teorema, se asume que se cumple la ecuación 2.60. De la ecuación 2.62, la forma 2.68 de la ecuación 2.60 se puede escribir como
$$u(x,\, -y) - iv(x,\, -y) = u(x,\, y) + iv(x,\, y)$$
En particular, si $(x,\, 0)$ es un punto del segmento del eje real en D,
$$u(x,\, 0) - iv(x,\, 0) = u(x,\, 0) + iv(x,\, 0),$$
e igualando las partes imaginarias, se obtiene que $v(x,\, 0) = 0$. Se concluye que $f(x)$ es real en el segmento del eje real en D.

2.15.1. Ejercicios

Ejercicio 1

Emplear el teorema de la sección 2.14 para mostrar que si $f(z)$ es analítica y no constante en un dominio D, no puede ser constante en ningún entorno en D.

Sugerencia: suponer que $f(z)$ tiene un valor constante w_0 en algún entorno en D.

Solución $f(z)$ es analítica en D y por absurdo, supóngase que $f(z) = w_0$ constante en un entorno en D. De esta forma, la función $h(z) = f(z) - w_0$ es analítica en D y $h(z) = 0$ en dicho entorno en D. Del lema de la sección 2.14, se debe cumplir que $h(z) = 0$ en todo D, o equivalentemente, $f(z) = w_0$ constante en todo D, contradiciendo la hipótesis. Se concluye que $f(z)$ no puede ser constante en ningún entorno en D.

Ejercicio 2

Comenzando con la función

$$f_1(z) = \sqrt{r}e^{i\theta/2} \qquad \text{con} \qquad r > 0,\, 0 < \theta < \pi,$$

y refiriéndose al ejemplo de la sección 2.11 indicar porque

$$f_2(z) = \sqrt{r}e^{i\theta/2} \qquad \text{con} \qquad r > 0,\, \frac{\pi}{2} < \theta < 2\pi,$$

es una continuación analítica de f_1 al eje real negativo y el semiplano inferior. Luego, mostrar que la función

$$f_3(z) = \sqrt{r}e^{i\theta/2} \qquad \text{con} \qquad r > 0,\, \pi < \theta < \frac{5\pi}{2},$$

es una continuación analítica de f_2 al eje real positivo y al primer cuadrante, pero $f_3(z) = -f_1(z)$ allí.

Solución En el ejemplo de la sección 2.11 se mostró que la función

$$f(z) = \sqrt{r}e^{i\theta/2} \qquad \text{con} \qquad r > 0,\, \alpha < \theta < \alpha + 2\pi,$$

es analítica en todo el dominio de definición.

El dominio de definición D_1 de la función f_1 es el semiplano superior, y la función es analítica allí. Por otro lado, el dominio de definición D_2 de la función f_2 es el segundo cuadrante y el semiplano inferior, y es analítica allí. Se cumple entonces que

$$D_1 \cap D_2 = \left\{ r > 0,\, \frac{\pi}{2} < \theta < \pi \right\}$$

y además $f_2(z) = f_1(z)$ para cada z en $D_1 \cap D_2$. Por lo tanto, f_2 es la continuación analítica de f_1 del semiplano superior al eje real negativo y el semiplano inferior.

De forma similar, el dominio D_3 de la función f_3 es el semiplano inferior y el primer cuadrante, y la función es analítica en todo el dominio. De esta forma, se cumple que

$$D_2 \cap D_3 = \{r > 0,\, \pi < \theta < 2\pi\}$$

y además, como $f_3(z) = f_2(z)$ para cada z en $D_2 \cap D_3$, f_3 es la continuación analítica de f_2 al eje real positivo y al primer cuadrante.

Finalmente, se observa que los dominios D_1 y D_3 contienen al primer cuadrante. Efectivamente, en el dominio D_1 los puntos del primer cuadrante se obtienen con $0 < \theta < \pi/2$, y en el dominio D_3 los puntos del primer cuadrante se obtienen con $2\pi < \theta < 5\pi/4 = 2\pi + \pi/2$. Sea el punto $z = re^{i\theta}$ con $0 < \theta < \pi/2$ y sea el punto $z' = re^{i\theta'}$ con $\theta' = \theta + 2\pi$. De esta forma, $z \in D_1$, $z' \in D_3$ y además $z' = z$, ya que

$$z' = re^{i\theta'} = re^{i(\theta+2\pi)} = re^{i\theta}e^{i2\pi} = re^{i\theta} = z.$$

Se cumple que

$$f_1(z) = \sqrt{r}e^{i\theta/2},$$

y

$$f_3(z) = f_3(z') = \sqrt{r}e^{i\theta'/2} = \sqrt{r}e^{i(\theta+2\pi)/2} = \sqrt{r}e^{i\theta/2}e^{i\pi} = \sqrt{r}e^{i\theta/2}(-1) = -f_1(z).$$

Se concluye que f_2 es la continuación analítica de f_1, f_3 es la continuación analítica de f_2 pero f_3 no es la continuación analítica de f_1 en $D_1 \cap D_3$.

Ejercicio 3

Indicar porque la función

$$f_4(z) = \sqrt{r}e^{i\theta/2} \qquad \text{con} \qquad r > 0,\ -\pi < \theta < \pi,$$

es la continuación analítica de f_1 del Ejercicio 2 al eje real positivo y el semiplano inferior.

Solución El dominio de definición D_1 de la función f_1 es el semiplano superior, y la función es analítica allí. Por otro lado, el dominio de definición D_4 de la función f_4 es todo el plano excepto el eje real negativo, y es analítica allí. Se cumple entonces que

$$D_1 \cap D_4 = \{r > 0,\ 0 < \theta < \pi\}$$

y además $f_4(z) = f_1(z)$ para cada z en $D_1 \cap D_4$. Por lo tanto, f_4 es la continuación analítica de f_1 del semiplano superior al semiplano inferior y al eje real positivo.

Ejercicio 4

Del ejemplo de la sección 2.10 se sabe que la función

$$f(z) = e^z = e^x \cos y + ie^x \operatorname{sen} y$$

es diferenciable en todos lados en el plano complejo finito. Indicar como surge del principio de reflexión que

$$\overline{f(z)} = f(\overline{z})$$

para todo z. Luego, verificarlo directamente.

Solución Como el dominio de la función es todo el plano complejo, contiene todo el eje real, y la mitad inferior, que es todo el semiplano inferior, es el reflejo de la mitad superior, que es todo el semiplano superior. De esta forma el dominio cumple las condiciones del principio de reflexión. Como para un punto $z = x + i0$ del eje real, la función toma el valor

$$f(z) = f(x) = e^x$$

real, por el teorema de reflexión se cumple que $\overline{f(z)} = f(\overline{z})$ para todo z.

Para verificar el resultado de forma directa, se observa que

$$\overline{f(z)} = e^x \cos y - ie^x \operatorname{sen} y,$$

y además, con $\overline{z} = x - iy$,

$$f(\overline{z}) = e^x \cos(-y) + ie^x \operatorname{sen}(-y) = e^x \cos y - ie^x \operatorname{sen} y,$$

resultando en que $\overline{f(z)} = f(\overline{z})$ para todo z.

Ejercicio 5

Mostrar que si la condición de que $f(x)$ es real en el principio de reflexión se reemplaza por la condición de que $f(x)$ es imaginario puro, la ecuación 2.60 del principio cambia a

$$\overline{f(z)} = -f(\overline{z}). \tag{2.69}$$

Solución Como se demostró en el teorema del principio de reflexión en la sección 2.15, la función

$$F(z) = \overline{f(\overline{z})} \tag{2.70}$$

es analítica en el dominio de definición D de f. Para demostrar el teorema directo, supóngase que $f(x)$ es imaginario puro en el segmento del eje real en D. De esta forma, el componente real de $f(z)$ es nulo en los puntos del segmento del eje real, es decir, $u(x,\, 0) = 0$. Por lo tanto, de la ecuación 2.63 en el teorema,

$$F(x) = U(x,\, 0) + iV(x,\, 0) = u(x,\, 0) - iv(x,\, 0) = -iv(x,\, 0) = -f(x),$$

es decir,

$$F(z) = -f(z) \tag{2.71}$$

en cada punto del segmento. Por lo tanto, del teorema de la sección 2.14 que indica que una función analítica definida en un dominio D queda determinada por unívocamente por los valores en cualquier segmento en D se concluye que la ecuación 2.71 es válida en todo el dominio D. De la definición 2.70 de la función $F(z)$ se obtiene que

$$\overline{f(\overline{z})} = -f(z), \tag{2.72}$$

que es lo mismo que la ecuación 2.69.

Para demostrar el recíproco, se asume que se cumple la ecuación 2.69, que se puede expresar como

$$u(x,\, y) - iv(x,\, y) = -u(x,\, -y) - iv(x,\, -y).$$

En particular, si $(x,\, 0)$ es un punto del segmento del eje real en D,

$$u(x,\, 0) - iv(x,\, 0) = -u(x,\, 0) - iv(x,\, 0),$$

e igualando las partes reales, se obtiene que $u(x,\, 0) = 0$. Se concluye que $f(x)$ es imaginario puro en el segmento del eje real en D.

Bibliografía

[1] J. W. Brown and R. V. Churchill, *Complex variables and applications.* McGraw-Hill, 9th ed., 2013.

[2] W. Kaplan, *Advanced Calculus.* Addison-Wesley, 5th ed., 2002.

[3] J. Stewart, *Multivariable calculus.* Cengage Learning, 8th ed., 2016.