Ortogonalidade

$$\int_{-L}^{L} \sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{m\pi x}{L}dx = \int_{-L}^{L} \cos\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{m\pi x}{L}dx = \begin{cases} L \\ 0, n \neq m \end{cases}$$

$$\int_{-L}^{L} \sin\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{m\pi x}{L}dx = 0, \text{sempre}$$

Fórmulas de a e b

Se $\frac{a_0}{2} + \sum_{1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L} = f(x)$ converge, integrável em intervalo e termo a termo, então:

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx$$ (A prova usa ortogonalidade)

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx$$

- f é absolutamente integrável em R → os termos não divergem (mas a série pode divergir)
  A prova é com módulos.

Teorema de Fourier

f é função real, período 2L, f e f' contínuas por partes em intervalo → a série de Fourier de f converge p/ f(x), se contínua. Caso contrário, média de f(x+) e f(x-)

Estimativa (Convergência)

f é absolutamente integrável em R $\Rightarrow |a_n|, |b_n| \leq M_0$ $\left(\text{Trabalhar com} \int_{-L}^{L} |f(x)|\,dx\right)$

& se f diferenciável, então

$$a_n = -\frac{L}{n\pi}b_n' = -\frac{L^2}{n^2\pi^2}a_n''; \quad b_n = \frac{L}{n\pi}a_n' = -\frac{L^2}{n^2\pi^2}b_n''$$

$$|a_n|, |b_n| \leq \frac{M_1}{n} \text{ ou } \frac{M_2}{n^2}$$

Pares e Ímpares

+	P	I
P	P	?
I	?	I

*	P	I
P	P	I
I	I	P

função par, integramos o intervalo positivo e dobramos. Só cossenos.
função ímpar, integral = 0. Só senos.
Anula a_n de ímpar "A.I." e b_n de par.

Extensão: $\tilde{f} = \begin{cases} f(x), 0 \leq x < L \\ \pm f(-x), -L < x < 0 \end{cases}$

$$\tilde{f}(x + 2kL) = f(x), \forall k \in Z$$

Lema 1.16 = Riemann-Lebesgue

f absolutamente integrável em intervalo $\Rightarrow \lim_{t\to\infty}\int_a^b f(x)\,\mathrm{tri}(tx)\,dx = 0$, onde $\mathrm{tri} = \sin \vee \cos$

Usa M = max|f| em (a,b) e duas somas de Riemann (diferem de ε).

Somas parciais

Multiplicamos as fórmulas de a_n e b_n por cos kπt/L e transformamos em cos(a – b)

Definimos o núcleo de Dirichlet (função par, contínua, período 2L):

$$D_n(x)=\frac{1}{L}\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{k\pi x}{L}\right)=\frac{1}{2L}\frac{\sin\frac{(n+1/2)\pi x}{L}}{\sin\frac{\pi x}{2L}}; \quad \int_{-L}^{L}D_n(x)\,dx=1$$

Usou a identidade de Lagrange? Legendre? [1] abaixo

Nova variável s = x – t;

u = -s, somente de –L a 0 $\Rightarrow S_n(x)=\int_0^L[f(x+s)+f(x-s)]D_n(s)\,ds$

Teste de Dini

f real, período 2L, absolutamente integrável em intervalo. Fixado x no intervalo, se existem os limites laterais e $\delta_0:\int_0^{\delta_0}\left|\frac{g(s)}{s}\right|ds<\infty, onde\ g(s)=[f(x+s)-f(x+)]+[f(x-s)-f(x-)]$

Então $S_n(x)\to\frac{f(x+)-f(x-)}{2}$

Na prova integra Dirichlet de 0 a L;

Trabalha com $S_n(x)-\frac{f(x+)+f(x-)}{2}=\int_0^L g(x,s)D_n(s)\,ds$, separando (0,δ) e (δ,L). A segunda é zero e a primeira tem singularidade. Seno em cima ≤ 1; $h(s)=\frac{s}{\sin\frac{\pi s}{2L}}\le L$, por teste da derivada primeira; enfim ela é < ε.

Prova do Teorema de Fourier

Basta provar que o δ_0 de Dini existe. Isso é decorrência de q contínua por partes → existência das derivadas laterais f'(x+) e f'(x-).

Derivar termo a termo

f real, período 2L, contínua, f' contínua por partes, então podemos derivar termo a termo.

A prova calcula os coeficientes de f' e usa o Teorema Fundamental do Cálculo.

Integrar termo a termo

Se f real, período 2L, contínua por partes, então mesmo se a série de Fourier não for convergente, vale

$$\forall t\in\Re,\int_0^t f(x)\,dx=\frac{a_0}{2}t+\frac{L}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{a_n}{n}\sin\frac{n\pi t}{L}-\frac{b_n}{n}\left(\cos\frac{n\pi t}{L}-1\right)\right].$$

A prova integra f(x) – a_0/2 e chama de F(t), expressa em A_n's e B_n's. É preciso mostrar que F é periódica, $A_n=-\frac{L}{n\pi}b_n; B_n=\frac{L}{n\pi}a_n; F(0)=0\Rightarrow A_0=\frac{L}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}$

Erro quadrático médio

f real, período 2L, quadrado-integrável em intervalo.

$$E_n = \int_{-L}^{L} \left|f(x) - S_n(x)\right|^2 dx = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}\left|f(x)\right|^2 dx - \frac{a_0^2}{4} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(a_k^2 + b_k^2\right)$$

A prova expande $(a – b)^2$ e resolve tudo. Só somem 2ab's por ortogonalidade.

Desigualdade de Bessel (id. Parseval)

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right) \le \frac{1}{L}\int_{-L}^{L}\left|f(x)\right|^2 dx \because 0 \le \lim_{n\to\infty} E_n$$

Convergência Uniforme

Seja f_n: X → R. f_n → f uniformemente em X se

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in N$ independente de x, tal que $\left|f(x) - f_n(x)\right| < \varepsilon, \forall n \ge n_0, \forall x \in X$

- Se f_n → f uniformemente em X; todas f_n's são contínuas; então f é contínua.

Prova:
$$\begin{aligned} &\exists N: \\ &f(x) - f_N(x) \to 0 \because f_n \to f \\ &f_N(x) - f_N(x_0) \to 0 \because f_N \text{ é contínua em } x_0 \\ &f_N(x_0) - f(x_0) \to 0 \because f_n \to f \end{aligned}$$

- Se $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \to f$ uniformemente; todas f_n's são contínuas; então f é contínua. Uma vez que cada soma parcial é contínua.

Teste M de Weierstrass

Se $\left|f_n(x)\right| \le M_n, \forall x \in X; \sum_{n=1}^{\infty} M_n$ converge, então $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge uniformemente.

Prova: $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge absolutamente (seja para f) pelo teste da comparação.

$$\left|f(x) - \sum_{n=1}^{k} f_k(x)\right| = \left|\sum_{n=k+1}^{\infty} f_k(x)\right| \le \ldots \text{ e converge!}$$

Convergência Uniforme da Série de Fourier

f real, período 2L, contínua, f' contínua por partes. Então a série de Fourier de f → f uniformemente em R.

A prova eleva o termo n da série ao quadrado e usa $2AB \le A^2 + B^2; 1 = \frac{1}{n}\sqrt{n^2}$. Desigualdade de Bessel em f' (só colocando linha).

Série Cesàro-somável

$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{S_k}{n}$ converge <=> S é Cesàro-somável.

<u>Somas de Féjer</u>

Sejam S_n as parciais de Fourier; $\sigma_n(x) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{\infty} S_k(x)$.

Definimos o <u>núcleo de Féjer</u>: $F_n(x) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} D_k(x) = \frac{1}{2L(n+1)}\frac{\sin(n+1)\frac{\pi x}{2L}}{\sin\frac{\pi x}{2L}}; D_0 \equiv 1$, que tem período 2L e integral 1.

<u>Teorema de Féjer</u>

f real, período 2L, limitada, integrável. $\exists f(x+), f(x-) \Rightarrow \sigma_n(x) \to \frac{f(x+)+f(x-)}{2}$.

Se f contínua, então converge uniformemente.

Prova: parte de S_n; mostra que $\sigma_n(x) - \frac{f(x+)-f(x-)}{2} = \int_0^L g(x,s)F_n(s)\,ds$ (g de Dini); separa (0,δ) e (δ,L), onde o |g(x,s)| < ε ou M.

- f, g reais, período 2L, contínuas. Mesma série de Fourier → f = g.
- f real, período 2L, quadrado-integrável em intervalo, então $\lim_{n\to\infty} E_n = 0$. Usa o exercício 1.27 e implica a identidade de Parseval: “a desigualdade de Bessel se torna igualdade”.

[1]

$$2\sin\frac{\theta}{2}\cos k\theta = \sin\left(k+\frac{1}{2}\right)\theta - \sin\left(k-\frac{1}{2}\right)\theta$$