História da Matemática

Felipe Gontijo
Flávio Fonseca
Vinícius Claudino Ferraz

Proposição 1

Sobre uma linha reta determinada, descrever um triângulo equilátero.

Vamos prová-lo através dos axiomas modernos.

Axioma A1: Por cada par de pontos distintos passa uma e uma só reta.
A2: Cada reta contém pelo menos dois pontos.
A3: Existem pelo menos três pontos não colineares.

A4:
$$|PQ| \geq 0, \forall P, Q \in E$$
$$|PQ| = 0 \Leftrightarrow P = Q$$
$$|PQ| = |QP|, \forall P, Q \in E$$

(1) Sejam A, B pontos distintos dados, definindo o segmento AB, tal que |AB| = R.

(2) Sendo E o plano euclidiano, define-se circunferência de centro O e raio r como o lugar geométrico dos pontos do plano que estão a uma distância r de O, ou seja, $C_O(r) = \{X \in E : |OX| = r\}$.

(3) Traçamos $C_A(R), C_B(R)$

(4) Elas se encontram em dois pontos. $C_A \cap C_B = \{P_1, P_2\}$. Para demonstrar, vou utilizar Geometria Analítica e o Teorema de Pitágoras.

Geometria Analítica

A5: Cada reta $l \subset E$ possui algum sistema de coordenadas, que é uma função bijetiva f tal que $f : l \to R$, $|PQ| = |f(P) - f(Q)|, \forall P, Q \in l$

Logo eu posso chamar a única reta AB de eixo x, abscissa de A = 0, abscissa de B = R.

A6: O conjunto dos pontos de E que não pertencem a uma dada reta *l* é reunião de dois conjuntos convexos disjuntos, chamados semiplanos, tais que, se P está num deles e Q está no outro, então o segmento PQ intersecta *l*.

A7: **A cada ângulo $A\hat{B}C$ está associado um único número $m(A\hat{B}C)$, a que chamamos amplitude do ângulo e que pertence ao intervalo aberto]0, 180[.**

A8: **Sejam A e B dois pontos distintos e H um dos semiplanos limitados pela reta AB. Então, dado $\alpha \in]0,180[$, existe uma única semi-reta $AP, P \in H : m(P\hat{A}B) = \alpha$**

Logo eu posso chamar de eixo y a única reta $AP \perp AB$.
E cada ponto do plano fica unicamente representado por um par ordenado (x,y).

<u>**Demonstração do teorema de Pitágoras**</u>

A9: **Se D for um ponto interior de BÂC, então** $m(B\hat{A}C) = m(B\hat{A}D) + m(D\hat{A}C)$

A10: **Se $A\hat{B}C, A\hat{B}D$ forem suplementares adjacentes (isto é, se B,C,D forem colineares e B for intermédio a C e D) então** $m(A\hat{B}C) + m(A\hat{B}D) = 180$

A11: **Se, numa correspondência entre dois triângulos, dois lados de um dos triângulos e o ângulo por eles formado forem congruentes às partes correspondentes do outro triângulo, então essa corresondência é uma congruência. (Isto é,**

$$\left.\begin{array}{l} |AB| = |DE| \\ |AC| = |DF| \\ m(C\hat{A}B) = m(F\hat{D}E) \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABC \cong \Delta DEF$$

Sejam a, b, c números positivos e os pontos:

$A = (0,0), B = (a,0), C = (a+b,0)$

$D = (a+b,a), E = (a+b,a+b)$

$F = (b,a+b), G = (0,a+b), H = (0,b)$

$\Delta BAH \cong \Delta DCB \cong \Delta FED \cong \Delta HGF$

A congruência vem do caso LAL (axioma 11). Triângulos retângulos de catetos a,b. Seja a hipotenusa c.

A12: **Por qualquer ponto externo a uma reta dada l passa no máximo uma reta que não intersecta l.**

De A12 vem que a soma dos ângulos de um triângulo é 180º.

$$D\hat{B}C + \underbrace{B\hat{C}D}_{90^\circ} + \underbrace{C\hat{D}B}_{A\hat{B}H} = 180^\circ \Rightarrow A\hat{B}H + D\hat{B}C = 90^\circ$$

$$\underbrace{A\hat{B}H + D\hat{B}C}_{90^\circ} + H\hat{B}D = 180^\circ \Rightarrow H\hat{B}D = 90^\circ$$

Logo BDFH é quadrado de lado c. Pelas áreas:

$$S(ACEG) = S(BDFH) + 4S(BAH) \Rightarrow (a+b)^2 = c^2 + 4\frac{ab}{2} \Rightarrow a^2 + b^2 = c^2$$

Assim, a distância analítica entre dois pontos é

$$d[(x,y),(a,b)] = c \Rightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 = c^2$$

<u>Interseção de C_A e C_B:</u>

Equações das circunferências: $C_A(R): dist[(x,y),(0,0)] = R \Rightarrow x^2 + y^2 = R^2$

$C_B(R): dist[(x,y),(R,0)] = R \Rightarrow (x-R)^2 + y^2 = R^2$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 \ (ii) \\ x^2 - 2Rx + R^2 + y^2 = R^2 \ (iii) \end{cases}$$

$$(ii) - (iii) \Rightarrow 2Rx - R^2 = 0$$

$$R > 0 \Rightarrow 2x - R = 0 \Rightarrow x = \frac{R}{2}$$

$$(ii) \Rightarrow y = \pm\sqrt{R^2 - \frac{R^2}{4}} = \pm R\frac{\sqrt{3}}{2} \therefore P_1 = R\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), P_2 = R\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

(5) Para um P qualquer entre eles, $|AB| = |AP| = |BP| = R$. Logo, o triângulo equilátero desejado é ABP.

Bibliografia

ARAÚJO, P.V. *Curso de Geometria.* Ed. Gradiva: Lisboa. 1998