SEGUNDA ETAPA

$N = naturais, R = reais$

$Conv = convergentes = \{(x_n) : \lim x_n = a \in R\}$

$Lim = \text{limitados} = \{X \subset R \mid \exists m, M \in R : m \leq x \leq M, \forall x \in X\}$

$Decres \subset \sim Cres = \text{não crescentes} = \{(x_n) : x_n \geq x_{n+1}, \forall n \in N\}$

$Cres \subset \sim Decres = \text{não decrescentes} = \{(x_n) : x_n \leq x_{n+1}, \forall n \in N\}$

$Mono = \text{monótonas} = \sim Cres \cup \sim Decres$

110. $Conv \subset Lim$

111. $Mono \cap Lim \subset Conv$

137. $110, 111 \text{ para } (s_n)$

119. $(sanduíche) \left.\begin{matrix} x_n \leq z_n \leq y_n, \forall n \in N \\ \lim x_n = \lim y_n = a \end{matrix}\right\} \Rightarrow \lim z_n = a$

123,5. $(Bolzano - Weierstrass)\ (x_n) \in L \Rightarrow \exists (x_{n_k})_{k \in N} \in Conv$

135. $\sum a_n \in Conv \Rightarrow \lim a_n = 0$

137. $(comparação) \left.\begin{matrix} a_n \geq 0, b_n \geq 0 \\ \exists c > 0, n_0 \in N : a_n \leq cb_n, \forall n > n_0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left(\sum b_n \in Conv \Rightarrow \sum a_n \in Conv\right)$

139,151. $\text{comutativamente conv.} \Leftrightarrow (|x_n|) \in Conv \Rightarrow (x_n) \in Conv$

140. $\exists c : \sqrt[n]{|a_n|} \leq c < 1, \forall n > n_0 \Rightarrow \sum |a_n| \in Conv$

$(raiz)\ \lim \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \Rightarrow \sum |a_n| \in Conv$

141. $\left.\begin{matrix} a_n \neq 0, b_n > 0, \sum b_n \in Conv \\ \exists n_0 \in N : \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq \dfrac{b_{n+1}}{b_n}, \forall n > n_0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \sum |a_n| \in Conv$

142. $\exists c : 0 < c < 1, \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq c, \forall n > n_0 \Rightarrow \sum |a_n| \in Conv$

$\lim \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1 \Rightarrow \sum |a_n| \in Conv$

143. $(a_n) \in Lim, \lim \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = a \Rightarrow \lim \sqrt[n]{a_n} = a$

146. $(Leibinitz)\ (b_n) \in \sim Cres, \lim b_n = 0 \Rightarrow \sum (-1)^n b_n \in Conv$

$D^n(I)=\{f:X\to R \mid f \text{ é } n \text{ vezes derivável em } I\subset X\}$

9. $(Taylor \text{ infinitesimal})$ Se $: D^n(a)\ni f:I\to R$

$$\text{Então}: \forall h: a+h\in I, \begin{cases} f(a+h)=\sum_{i=0}^{n}\frac{f^{(i)}(a)}{i!}h^i + r(h) \\ \lim_{h\to 0}\frac{r(h)}{h^n}=0 \end{cases}$$

$$\text{Então}: p(h)=\sum_{i=0}^{n}\frac{f^{(i)}(a)}{i!}h^i \text{ é o único polinômio}: \begin{cases} \deg p\le n \\ f(a+h)=p(h)+r(h) \\ \lim_{h\to 0}\frac{r(h)}{h^n}=0 \end{cases}$$

10. (Lagrange)Se $: D^n(a,b)\ni f:[a,b]\to R\in C^{n-1}$

$$\text{Então}: \exists c\in(a,b): f(b)=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{f^{(i)}(a)}{i!}(b-a)^i+\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(b-a)^n$$

$$\text{Então}: \exists \theta\in(0{,}1): f(a+h)=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{f^{(i)}(a)}{i!}h^i+\frac{f^{(n)}(a+\theta h)}{n!}h^n$$

$m_i=\inf\{f(x): x\in[t_{i-1},t_i]\},\ \omega_i=M_i-m_i$

$s(f,P)=\sum_{i=1}^{n} m_i\Delta t_i,\ \underline{\int_a^b} f=\sup_P s(f,P)$

1. refinar $P\Rightarrow s(f,P)\le s(f,P_{ref}), S(f,P)\ge S(f,P_{ref})$

2. ponto intermediário para $\underline{\int}$ e $\overline{\int}$

$\inf(A+B)=\inf A+\inf B,\ \inf(f+g)\ge \inf f+\inf g$

$\sup(f+g)\le \sup f+\sup g$

$c>0\Rightarrow\begin{cases}\sup cA=c\sup A\\ \inf cA=c\inf A\end{cases};\ c<0\Rightarrow\begin{cases}\sup cA=c\inf A\\ \inf cA=c\sup A\end{cases}$

$Lim=\text{limitadas}=\{f:X\to R \mid \exists m,M\in R: m\le f(x)\le M\}$

3. $Lim\ni f,g:[a,b]\to R$

$$(\inf f)(b-a)\le \underline{\int_a^b} f+\underline{\int_a^b} g\le \underline{\int_a^b}(f+g)\le \overline{\int_a^b}(f+g)\le \overline{\int_a^b} f+\le \overline{\int_a^b} g\le(\sup f)(b-a)$$

5. $\int_a^b (f+g)=\le \int_a^b f+\int_a^b g$

3. $c<0\Rightarrow\begin{cases}\underline{\int_a^b} cf=c\overline{\int_a^b} f\\ \overline{\int_a^b} cf=c\underline{\int_a^b} f\end{cases}$ $\quad 5.\int_a^b cf=c\int_a^b f$

3. $f(x)\le g(x), \forall x\in[a,b]\Rightarrow\begin{cases}\underline{\int_a^b} f\le \underline{\int_a^b} g\\ \overline{\int_a^b} f\le \overline{\int_a^b} g\end{cases}$ $\quad 5.\int_a^b f\le \int_a^b g$

$Integ_a^b=\text{integráveis}=\left\{Lim\ni f:[a,b]\to R \,\middle|\, \underline{\int_a^b} f=\overline{\int_a^b} f\right\}$

Agora é que vêm as integrais (in)definidas

$\varnothing \neq \sigma, \Sigma \in Lim$

$\forall s \in \sigma, \forall S \in \Sigma, s \leq S \Rightarrow \left(\sup \sigma = \inf \Sigma \Leftrightarrow \exists s, S : S \xrightarrow{\varepsilon} s\right)$

$\varnothing \neq Y \in Lim, m = \inf Y, M = \sup Y \Rightarrow M - m = \sup\limits_{x,y \in Y} |x - y|$

$Lim \ni f : [a,b] \to R \Rightarrow \left(\varnothing \neq X \subset [a,b] \Rightarrow \omega(f, X) = \sup |f(x) - f(y)|\right)$

4. $f \in Integ_a^b \Leftrightarrow \exists P, Q : S(f,Q) \xrightarrow{\varepsilon} s(f,P)$

$$\Leftrightarrow \exists P : S(f,P) \xrightarrow{\varepsilon} s(f,P) \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n} \omega_i \Delta t_i \xrightarrow{\varepsilon} 0$$

5. $f \in Integ_a^b \Leftrightarrow f\big|_{[a,c]} \in Integ_a^c \wedge f\big|_{[c,b]} \in Integ_c^b$

$$f \in Integ_a^b \Rightarrow \begin{cases} \int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f \\ |f| \in Integ_a^b : \left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f| dx \leq \left(\sup|f|\right)(b-a) \\ fg \in Integ_a^b \end{cases}$$

6. $C^0 \ni f : [a,b] \to R \Rightarrow f \in Integ_a^b$

$Desc(f : [a,b] \to R) = \{x \in [a,b] : f \text{ é descontínua em } x\}$

7. $\# Desc(f) \in N \Rightarrow f \in Integ_a^b$

8. $$\left.\begin{matrix} f \in Integ_a^b \\ \lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} F : [a,b] \to R \\ F(x) = \int_a^x f(t)dt \in D^1(c) \\ F'(c) = f(c) \end{cases}$$

9. $F : [a,b] \to R, F' \in Integ_a^b \Rightarrow F(b) - F(a) = \int_a^b F'(t)dt$

10. $[c,d] \xrightarrow{g} [a,b] \xrightarrow{f} R, f \in C^0, g \in D^1_{[c,d]}, g' \in Integ_c^d \Rightarrow \int_{g(c)}^{g(d)} f\, dx = \int_c^d f(g(t))g'(t)dt$

11. $f, g : [a,b] \to R, f', g' \in Integ_a^b \Rightarrow \int_a^b f(t)g'(t)dt = [f(t)g(t)]_{t=a}^{b} - \int_a^b f'(t)g(t)dt$

12. $C^0 \ni f : [a,b] \to R \Rightarrow \exists c \in (a,b) : \int_a^b f = f(c)(b-a)$

$$\left.\begin{matrix} p \in Integ_a^b \\ p(x) \geq 0, \forall x \in [a,b] \text{ ou } p(x) \leq 0, \forall x \in [a,b] \end{matrix}\right\} \Rightarrow \exists c \in [a,b] : f(c) = \frac{\int_a^b fp}{\int_a^b p}$$

$$\left.\begin{matrix} p, p' \in Integ_a^b \\ p(x) > 0, \forall x \in [a,b] \\ p'(x) \leq 0, \forall x \in [a,b] \end{matrix}\right\} \Rightarrow \exists c \in [a,b] : p(a) = \frac{\int_a^b fp}{\int_a^c f}$$

13. $(\text{Taylor integral})\, f : [a, a+h] \to R, f^{(n+1)} \in Integ_a^{a+h} \Rightarrow f(a+h) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!} h^i + \left[\int_0^1 (1-t)^n f^{(n+1)}(a+th)dt\right] \frac{h^{n+1}}{n!}$

Aqui o cara começa a sair pulando matéria

$m(X)=0 \Leftarrow \exists\{I_1,...,I_n,...\}: X \subset \bigcup_{n\in N} I_n \text{ e } \sum_{n=1}^{\infty}|I_n| < \varepsilon$

$Y \subset X, m(X)=0 \Rightarrow m(Y)=0$

$m(\varnothing)=0$

$Y=\bigcup_{n\in N} X_n, m(X_n)=0 \Rightarrow m(Y)=0$

20. $f \in Integ_a^b \Leftrightarrow m(Desc(f))=0$

$f_n : X \to R \xrightarrow{simplesmente} f : X \to R \Leftarrow \forall x \in X, f_n(x) \xrightarrow{\varepsilon(x),n_0(x)} f(x)$

$Unif.Conv. = \text{uniformemente convergentes} = \left\{f_n \mid f_n \xrightarrow{uniformemente} f\right\} = \left\{f_n \mid f_n \xrightarrow{\varepsilon,n_0} f, \forall x \in X\right\}$

$Cauchy = \text{sequências de Cauchy} = \left\{f_n \mid f_m(x) \xrightarrow{\varepsilon;m,n>n_0} f_n(x)\right\}$

1. $f_n \in Unif.Conv. \Leftrightarrow f \in Cauchy$

3. Se: $f_n \in Unif.Conv.; \forall n \in N, \lim_{x\to a} f_n(x) \in R$

   Então: $\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to a} f_n(x) = \lim_{x\to a}\lim_{n\to\infty} f_n(x)$

   Então: $\lim_{n\to\infty}\sum f_n = \sum \lim_{n\to\infty} f_n$

6. Se: $f_n \in Unif.Conv.$

   Então: $\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n$

   Então: $\int_a^b \sum f_n = \sum \int_a^b f_n$

7. $$\left.\begin{array}{l}\lim_{n\to\infty} f_n(c) \in R \\ f_n' = g_n \in Unif.Conv.\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} f_n \in Unif.Conv. \\ f' = g\end{array}\right.$$

9. $\exists r > 0 : \sum a_n x^n$ converge em $(-r, r)$. $r = \dfrac{1}{\lim \sqrt[n]{|a_n|}}$

$\forall x \in A, f : A \to B, \exists! f(x) \in B$

$\text{sobrejeção} : \forall y \in B, \exists x \in A : f(x) = y$

$\text{injeção} : f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

$I_n = \{x \in N : x \le n\}$

$Finitos = \{X \mid \exists n \in N, \exists f : I_n \xrightarrow{bijeção} X\} = \{X : \# X \in N\}$

$\# X \in N, A \subset X \Rightarrow \# A \in N$

$f : X \xrightarrow{injeção} Y, \# Y \in N \Rightarrow \# X \in N$

$f : X \xrightarrow{sobrejeção} Y, \# X \in N \Rightarrow \# Y \in N$

$Enumeráveis = \{X \mid \exists f : N \xrightarrow{bijeção} X\} = \{X : \# X = \# N\}$

$\# X \ge \# N \Leftrightarrow \exists f : X \xrightarrow{injeção} Y \underset{\neq}{\subset} X$

Q é um $\underset{\text{A1}}{\text{corpo}}$ $\underset{\text{A2}}{\text{ordenado}}$. R é um corpo ordenado $\underset{\text{A3}}{\text{completo}}$.

$A1$: adição e multiplicação

$A2$: tricotomia $x < y \vee x = y \vee x > y$

$$A3 : K \text{ é completo se } \forall X \subset K, X \neq \varnothing, \exists b \in K : x \le b, \forall x \in X \Rightarrow \begin{array}{l} \exists \sup X \in K : \\ \begin{cases} y \in X \Rightarrow y \le \sup X \\ y \le c \in K, \forall y \in X \Rightarrow \sup X \le c \\ c < \sup X \Rightarrow \exists y \in X : c < y < \sup X \\ \forall \varepsilon > 0, \exists y \in A : y \le \sup X < y + \varepsilon \ (p.308) \end{cases} \end{array}$$

$$\exists \inf X \in K : \begin{cases} y \in X \Rightarrow \inf X \le y \\ c \in K, c \le y, \forall y \in X \Rightarrow c \le \inf X \\ \inf X < c \Rightarrow \exists y \in X : \inf X < y < c \\ \forall \varepsilon > 0, \exists y \in A : y - \varepsilon < \inf X \le y \ (p.311) \end{cases}$$

$I_1 \supset I_2 \supset \ldots \supset I_n$ intervalos fechados $\Rightarrow \exists b \in R : b \in I_n, \forall n \in N$

$I = (a,b) \subset R \Rightarrow \# I = \# R > \# N$

$Def.: \lim x_n = \lim\limits_{n \to \infty} x_n = a \Leftarrow x_n \xrightarrow{\varepsilon, n_0} a \in R \Leftarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in N : n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$

$\lim x_n = \infty \Leftarrow \forall A \in R, \exists n_0 \in N : n > n_0 \Rightarrow x_n > A$

$\lim x_n = a \in R \Rightarrow \left[(y_n) = (x_{n_k})_{k \in N} \Rightarrow \lim y_n = a \right]$

$\lim x_n = a > b \in R \Rightarrow \exists n_b \in N : n > n_b \Rightarrow x_n > b$

$(x_n), (y_n) \in Conv; x_n \le y_n, \forall n \in N \Rightarrow \lim x_n \le \lim y_n$

$\lim x_n = 0, (y_n) \in Lim \Rightarrow \lim x_n y_n = 0$

$$(x_n), (y_n) \in Conv \Rightarrow \begin{cases} \lim (x_n + y_n) = \lim x_n + \lim y_n \\ \lim c x_n = c \lim x_n \\ \lim x_n y_n = \lim x_n \cdot \lim y_n \\ y_n \neq 0, \forall n \in N; \lim y_n \neq 0 \Rightarrow \lim \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{\lim x_n}{\lim y_n} \end{cases}$$

$$\lim \frac{\ln n}{n^k} = \lim \frac{n^k}{a^n} = \lim \frac{a^n}{n!} = \lim \frac{n!}{n^n} = 0$$

E ainda tem coisas que não caíram naquelas provas

a é valor de aderência de $(x_n) \Leftarrow \exists (x_{n_k})_{k\in N} : \lim x_{nk} = a$

Seja $X \subset R$. x é ponto interior de $X \Leftarrow x \xrightarrow{\varepsilon} a \Rightarrow a \in X$, ou seja, $\exists \varepsilon > 0 : (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset X$

$\operatorname{int} X = \{x \in X : x \text{ é ponto interior de } X\}$

A é aberto $\Leftarrow \operatorname{int} A = A$

$R \supset \overline{X} =$ fecho de $X = \{a \in R : a \text{ é aderente a } X\} = \{a \in R : a = \lim x_n, \exists (x_n) \subset X\}$

X é fechado $\Leftarrow X = \overline{X}$

$Y \supset X$ é denso em $Y \Leftarrow \forall y \in Y$, y é aderente a X

X é denso em $Y \Leftrightarrow Y \subset \overline{X} \Leftrightarrow [\forall I = (a,b) \subset R, Y \cap I \neq \varnothing \Rightarrow X \cap I \neq \varnothing]$

X é denso em $R \Leftrightarrow I = (a,b) \subset R \Rightarrow X \cap I \neq \varnothing$

$R \supset X' = \{a \in R : a \text{ é ponto de acumulação de } X\} = \{a \in R : \forall I = (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subset R, X \cap I - \{a\} \neq \varnothing\}$

$X' = \{a \in R \mid \exists x \in X : a \neq x \xrightarrow{\varepsilon} a\} = \{a \in R \mid \forall \varepsilon > 0, \exists x \in X : 0 < |x-a| < \varepsilon\}$

a é ponto isolado de $X \subset R \Leftarrow a \in X - X'$

$$A_1, \ldots, A_n, \ldots \text{ são abertos} \Rightarrow \begin{cases} \bigcap_{i \le n} A_i \text{ é aberto} \\ \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \text{ é aberto} \end{cases}$$

$\inf X, \sup X$ são aderentes a X

169. a é ponto aderente a $X \Leftrightarrow (x_n) \subset X, a = \lim x_n \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, X \cap (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \neq \varnothing$

171. $F = \overline{F} \Leftrightarrow R - F = \operatorname{int}(R-F)$

$$F_1, \ldots, F_n, \ldots \text{ são fechados} \Rightarrow \begin{cases} \bigcup_{i \le n} F_i \text{ é fechado} \\ \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \text{ é fechado} \end{cases}$$

172. $\overline{\overline{F}} = \overline{F}$

177. $X \subset R \Rightarrow \overline{X} = X \cup X'$

$X = \overline{X} \Leftrightarrow X' \subset X$

182. X é compacto $\equiv X \in Lim \wedge X$ é fechado

$Seq.Cauchy =$ Sequências de Cauchy $= \{(x_n) \mid \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in N : m,n > n_0 \Rightarrow |x_m - x_n| < \varepsilon\}$

$Conv = Seq.Cauchy$

$\sum a_n = s \Rightarrow s_n = a_1 + \ldots + a_n ; s = \lim s_n ; a_n = s_n - s_{n-1}$

Funções cabulosas de X em R

$a\in X',\lim_{x\to a} f(x)=L \Leftarrow f(x)\xrightarrow{\varepsilon,\delta,x\to a} L$, ou seja, $(\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0:\forall x\in X, 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon)$

$$(Sanduíche)\left.\begin{array}{l} X\subset R; f,g,h:X\to R; a\in X' \\ \forall x\in X, x\neq a, f(x)\leq g(x)\leq h(x) \\ \lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} h(x)=L \end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to a} g(x)=L$$

6.$(p.199)$ $X\subset R, f:X\to R, a\in X'; \lim_{x\to a} f(x)=L \Leftrightarrow \left[\forall (x_n)\subset X-\{a\}, \lim_{n\to\infty} x_n=a \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n)=L\right]$

$$\left.\begin{array}{l} X,Y\subset R; X\xrightarrow{f} Y\xrightarrow{g} R; a\in X' \\ \lim_{x\to a} f(x)=b\in Y'\cap Y \\ g \text{ é contínua em } b \end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to a} g(f(x))=g\left(\lim_{x\to a} f(x)\right)$$

acumulação à direita : $R\supset X'_+=\{a\in R:\forall I=(a,a+\varepsilon)\subset R, X\cap I\neq\varnothing\}=\{a\in R \mid \forall\varepsilon>0,\exists x\in X: 0<x-a<\varepsilon\}$

acumulação à esquerda : $R\supset X'_-=\{a\in R:\forall I=(a-\varepsilon,a)\subset R, X\cap I\neq\varnothing\}=\{a\in R \mid \forall\varepsilon>0,\exists x\in X: -\varepsilon<x-a<0\}$

$\lim_{x\to a+} f(x)=L \Leftarrow f(x)\xrightarrow{\varepsilon,\delta,x\to a+} L$, ou seja, $(\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0:\forall x\in X, 0<x-a<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon)$

$\lim_{x\to a-} f(x)=L \Leftarrow f(x)\xrightarrow{\varepsilon,\delta,x\to a-} L$, ou seja, $(\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0:\forall x\in X, -\delta<x-a<0 \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon)$

$\lim_{x\to\infty} f(x)=L \Leftarrow (\forall\varepsilon>0,\exists x_0\in R:\forall x\in X, x>x_0 \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon)$

$\lim_{x\to a} f(x)=\infty \Leftarrow (\forall A\in R,\exists\delta>0:\forall x\in X, 0<|x-a|<\delta \Rightarrow f(x)>A)$

$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty \Leftarrow (\forall A\in R,\exists x_0\in R:\forall x\in X, x>x_0 \Rightarrow f(x)>A)$

$f:X\to R$ é contínua em $a\in X \Leftarrow \lim_{x\to a} f(x)=f(a)$

$(6)\Rightarrow 4.(p.226)$ $f:X\to R$ é contínua em $a\in X \Leftrightarrow \left[\forall (x_n)\subset X, \lim_{n\to\infty} x_n=a \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n)=f(a)\right]$

$$\left.\begin{array}{l} X\xrightarrow{f} Y\xrightarrow{g} R \\ f \text{ é contínua em } a\in X \\ g \text{ é contínua em } f(a)\in Y \end{array}\right\}\Rightarrow g\circ f: X\to R \text{ é contínua em } a$$

$$f:X\to R \text{ é descontínua em } a\in X \Leftarrow \begin{cases} \exists\varepsilon>0:\forall\delta>0,\exists x_\delta\in X, |x_\delta-a|<\delta, \text{ mas } |f(x_\delta)-f(a)|\geq\varepsilon \\ x\to a\Rightarrow f(x) \text{ não tem limite} \\ f(x)\xrightarrow{x\to a} \text{Indeterminação} \notin R\cup\{\pm\infty\} \end{cases}$$

$$(\text{Valor intermediário})\, C^0 \ni f:[a,b]\to R; \begin{cases} f(a)<d<f(b)\Rightarrow \exists c\in(a,b): f(c)=d \\ f(a)>d>f(b)\Rightarrow \exists c\in(a,b): f(c)=d \end{cases}$$