

## LISTA 4

**Questão 5.18**

a) Simular o modelo sem ruído. A entrada  $u$  e a saída  $y$  são exibidas na Figura 1.

b) Estimar parâmetros com 5 : 8, depois com 205 : 208.

Ambas as vezes a resposta foi exata. Salvei o desvio padrão da saída = 4.29480726. Ambas as funções objetivo encontradas  $J_1$  e  $J_2$  foram iguais a zero. Esse cálculo minimiza apenas 4 valores.

c) Simular o modelo com ruído. Utilizei percentual do desvio padrão salvo, com novas entradas e saídas exibidas na Figura 2.

d) Estimar parâmetros com 5 : 8, depois com 205 : 208.

Inacreditavelmente,  $J_1 = J_2 = 0$  também com ruído. Os parâmetros encontrados foram:

$$\theta_1 = [-3.177457143484890; -8.075610986992073; -8.050961695201854; -18.265756577047323]$$

$$\theta_2 = [1.875202840936330; -1.377627335851368; 1.052656744417933; -0.158734182054370]$$

Sendo que o valor original era  $\theta_0 = [1.5; -0.7; 1; 0.5]$ . Eram esperadas grandes discrepâncias, da mesma forma que no exemplo da reta que passa por 2 pontos varia conforme se escolhem amostras de pares de pontos em particular. Salvei a entrada em u.csv, para uso posterior.

e) Estimar com Mínimos Quadrados. Utilizando todos os pontos, fiz 200 estimativas, cada uma com um ruído distinto. Os histogramas de cada  $\theta$  são exibidos na Figura 3.

f) Comparar e discutir. Pela média e variância de um histograma, medimos a polarização que será matéria futura: desempenho de estimadores. Aqui o viés é baixo e a distância do  $\theta$  mínimo até o  $\theta$  máximo também é boa, por ser baixa. Reparamos que cada parâmetro se comporta de forma independente.

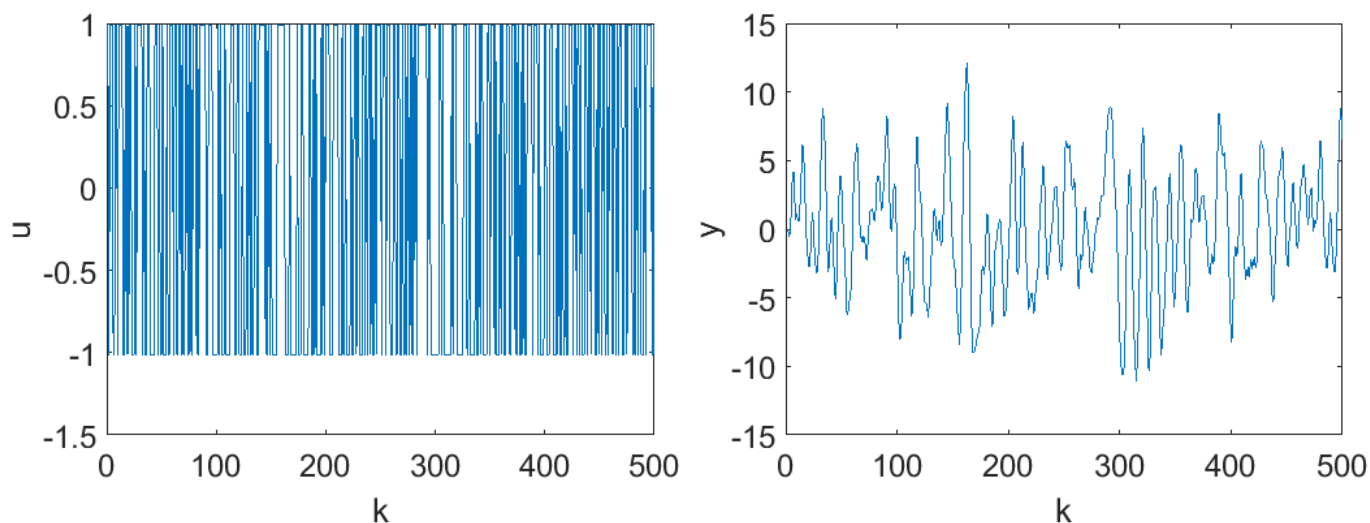


Figura 1: Entrada e saída para modelo sem ruído.

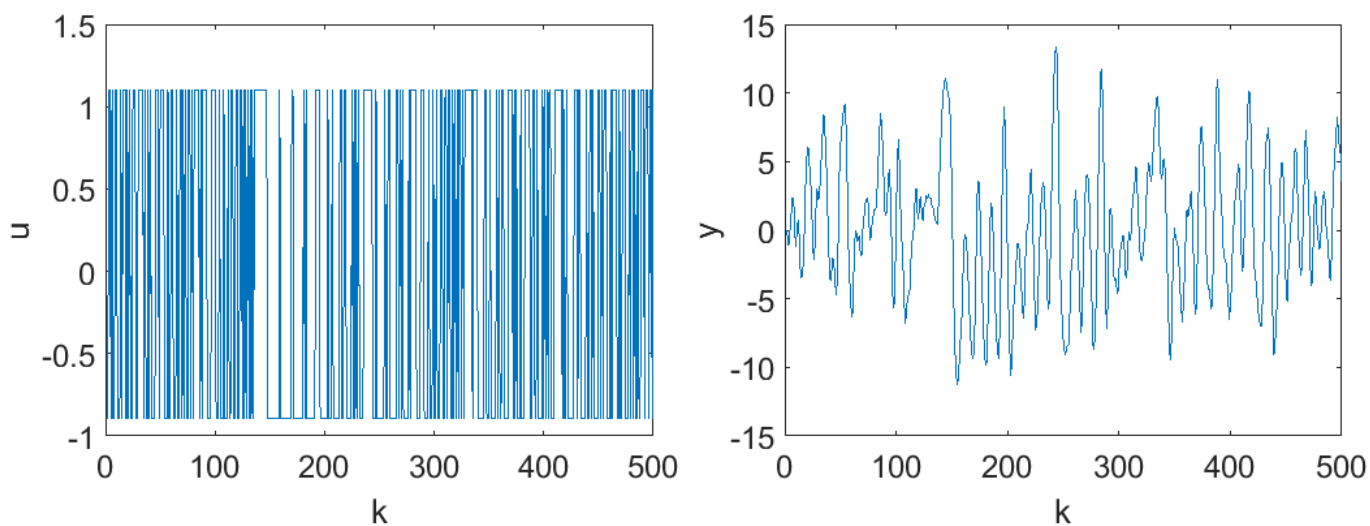


Figura 2: Entrada e saída para modelo com ruído.

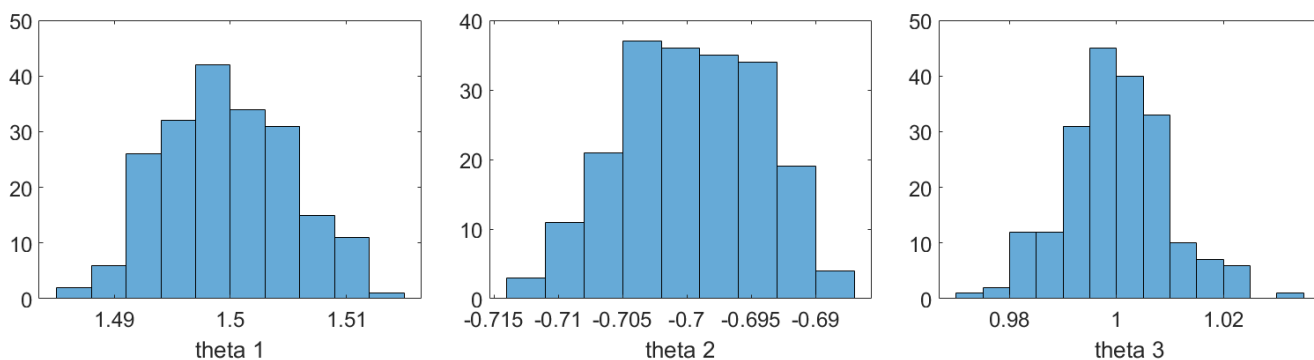


Figura 3: Histograma baseado em 200 execuções independentes do estimador MQ, com a mesma entrada da figura anterior.

**Questão 2 — versus 4.19**

Na Lista de Exercícios 2, item 4 os dados no arquivo prbsa02.dat foram usados. Use agora os mesmos dados, mas para estimar um modelo ARX. Valide seus resultados. Compare os procedimentos (em termos de praticidade) seguidos na Lista de Exercícios 2 e neste item.

.....

Refiz a questão 4.19, agora considerando o regime permanente: de  $t = 3000$  em diante. É quase a metade final dos dados. prbsa02(1476 : 2940).

O arquivo prbsa02.dat tem três colunas:  $t, u, y$ . Verificando, obtivemos a Figura 4.

Calculamos as correlações utilizadas na equação de Wiener-Hopf e obtivemos a Figura 5.

Plotamos a resposta ao impulso estimada versus a primeira coluna ( $t$ ) e obtivemos a Figura 6.

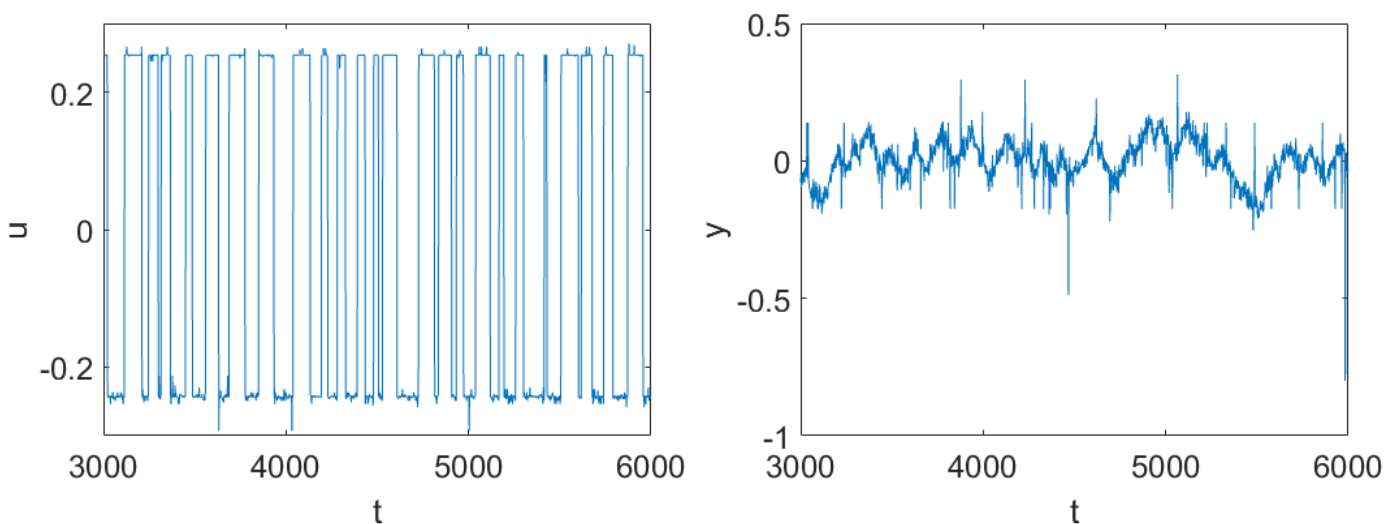


Figura 4: Dados de prbsa02.dat

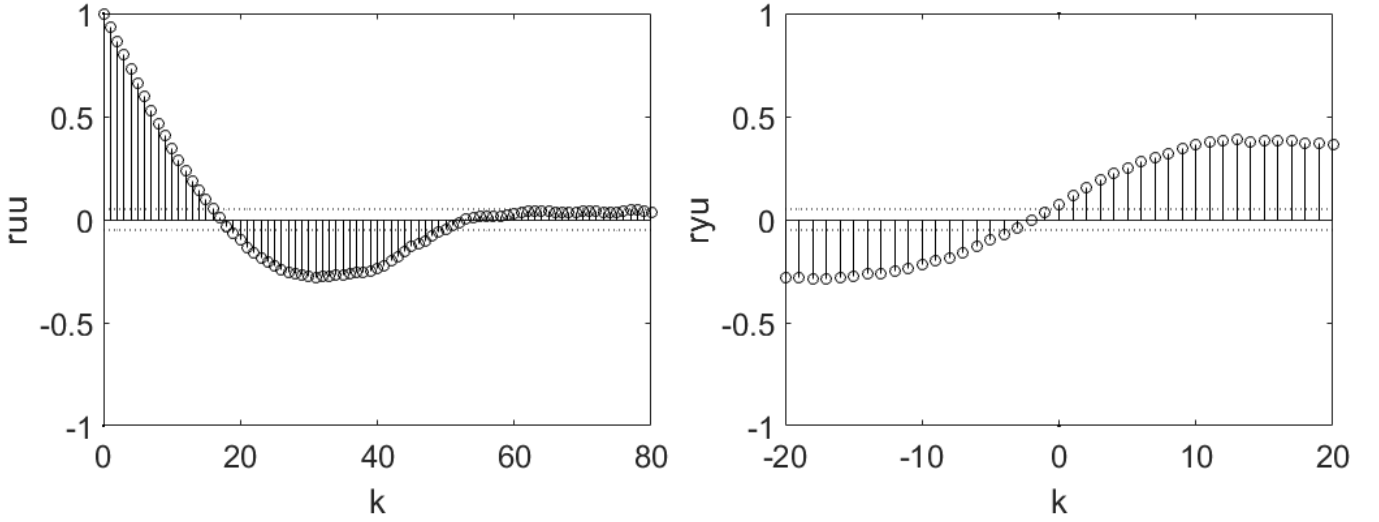


Figura 5: (a) Autocorrelação de  $u$ . (b) Correlação cruzada.

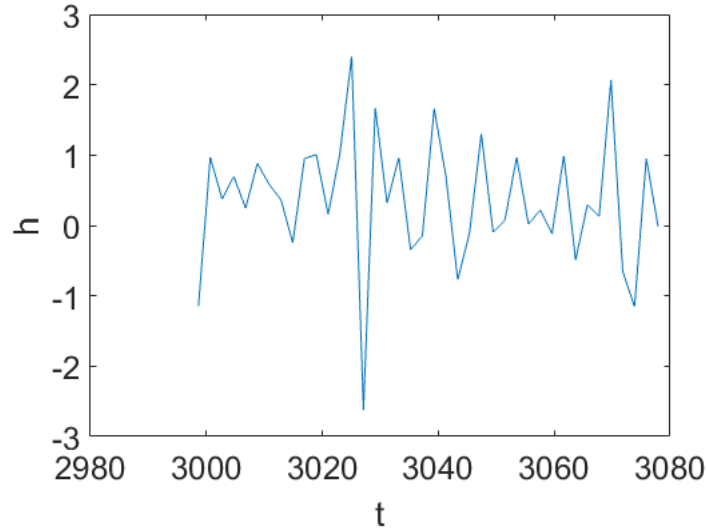


Figura 6: Resposta ao impulso estimada

.....

Após subtrair a média, estimei  $\Delta y = y_{ss} - y_0$ , ou seja, a diferença entre o valor de estado estacionário e o inicial. Utilizei as aproximações:  $\Delta u = 1$  e  $\Delta y = y_{2940}$ . Dessa forma, o valor final passa a ser  $y_{ss} = 1$ .

Gerei a matriz de regressores, considerando o seguinte modelo ARX:

$$y(k) + a_1y(k-1) + a_2y(k-2) + a_3y(k-3) = b_1u(k-1) + b_2u(k-2) + b_3u(k-3).$$

Para validar, fiz uma simulação com os parâmetros obtidos. A comparação entre os dados e a simulação (Figura 7) não foi boa. Foi extraído o ruído?

A Figura 8 mostra apenas a saída da simulação.

Para comparar com o que fiz na questão 4.19, tornei a simular com a entrada igual a um impulso.

A comparação (Figura 9) mostrou dois sinais completamente diferentes.

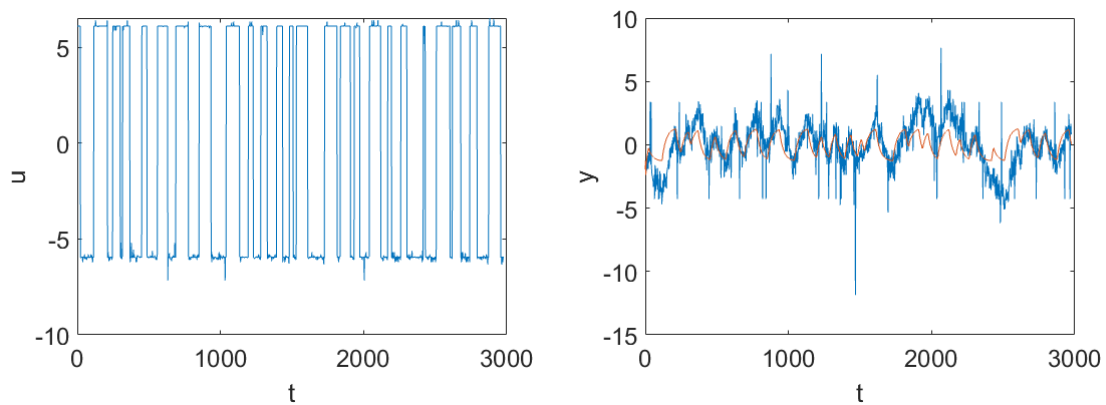


Figura 7: (a) Entrada (b) Dados de saída em azul e saída ARX estimada em vermelho.

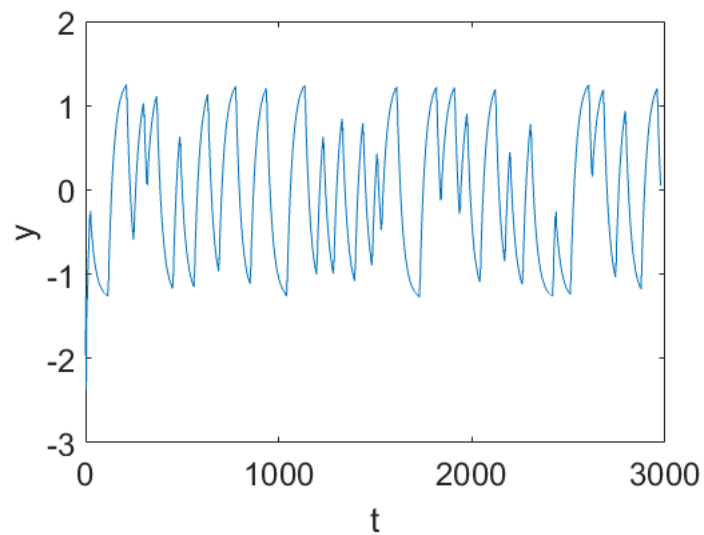


Figura 8: Saída ARX estimada.

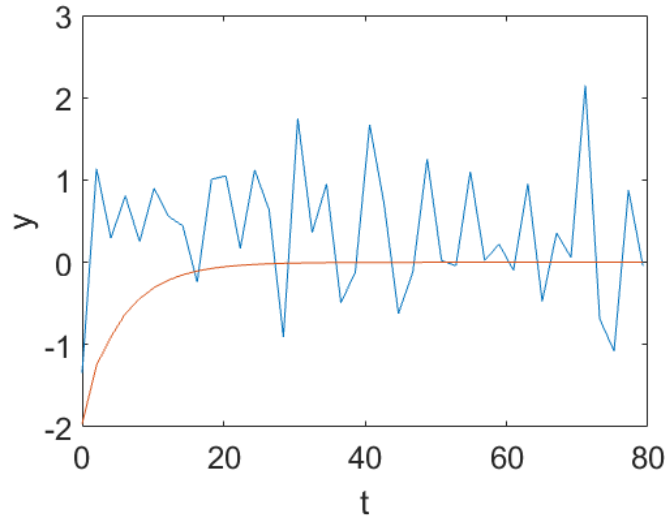


Figura 9: Em azul a resposta ao impulso por correlações; em vermelho, a resposta ao impulso via matriz de regressores.

### Questão 5.13

Os dados do arquivo bfg33.dat são exibidos na Figura 10.

Para retirar o offset, desconsidere os 28 pontos iniciais.

Estimei  $\Delta y = y_{ss} - y_0$ , ou seja, a diferença entre o valor de estado estacionário e o inicial.

Dividi  $u$  e  $y$  por  $\Delta y$ , a fim de que  $y_{ss} = 1$ . A nova entrada é exibida na Figura 11.

Gerei a matriz de regressores, considerando o seguinte modelo ARX:

$y(k) + a_1y(k-1) + a_2y(k-2) = b_1u(k-19) + b_2u(k-20)$ , uma vez que a primeira saída considerável para fins de atraso puro de tempo aconteceu em  $k = 21$ .

Fiz a simulação com os parâmetros estimados, obtive a figura 12a. A entrada foi constante e igual a  $\Delta u$ . Dividi a saída por  $\Delta y$ .

Comparei com  $H_1(s)$  e obtive a figura 12b. Esta ficou ótima, como esperado; a anterior ficou um pouco mal aproximada em relação a  $H_1$ , mas bem próxima. Portanto o modelo ARX teve bom desempenho nesse caso.

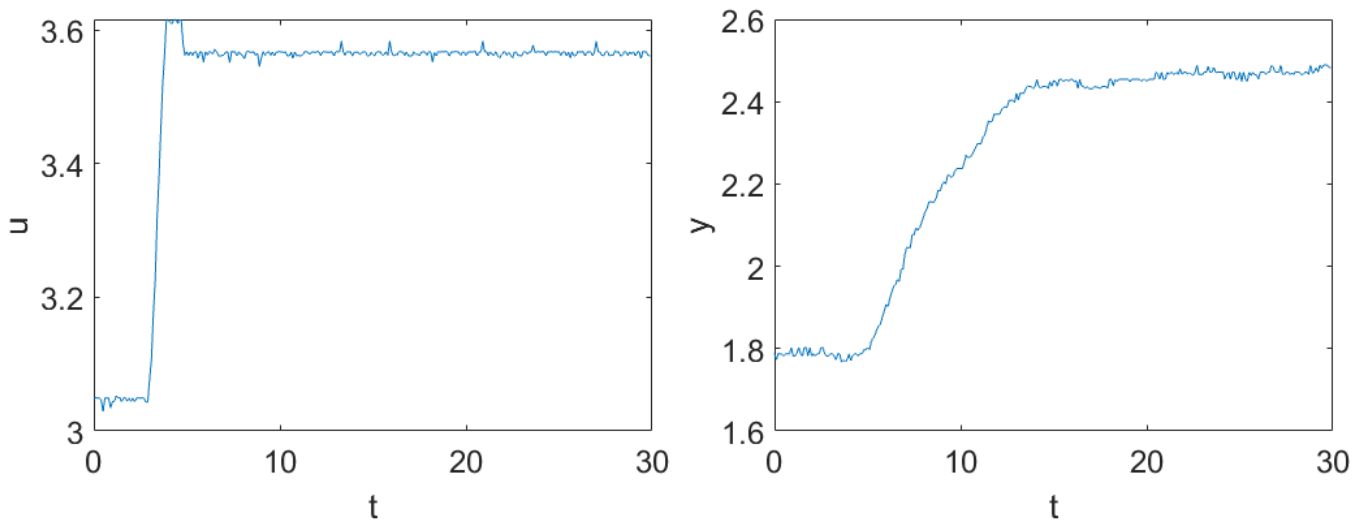


Figura 10: Entrada e saída de bfg33.dat

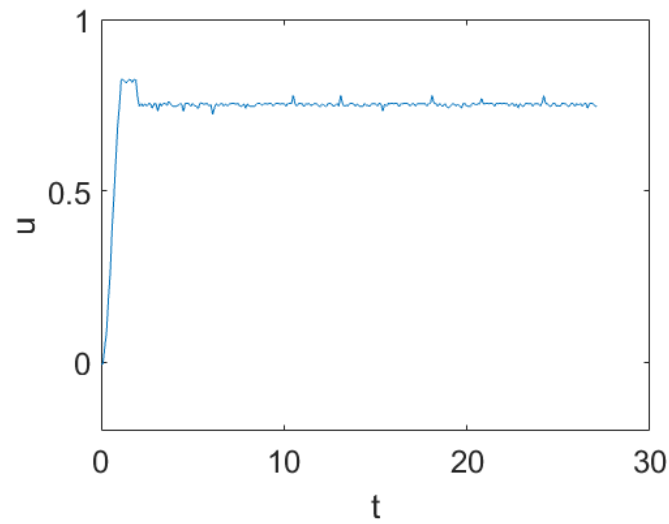


Figura 11: Entrada considerada para os cálculos

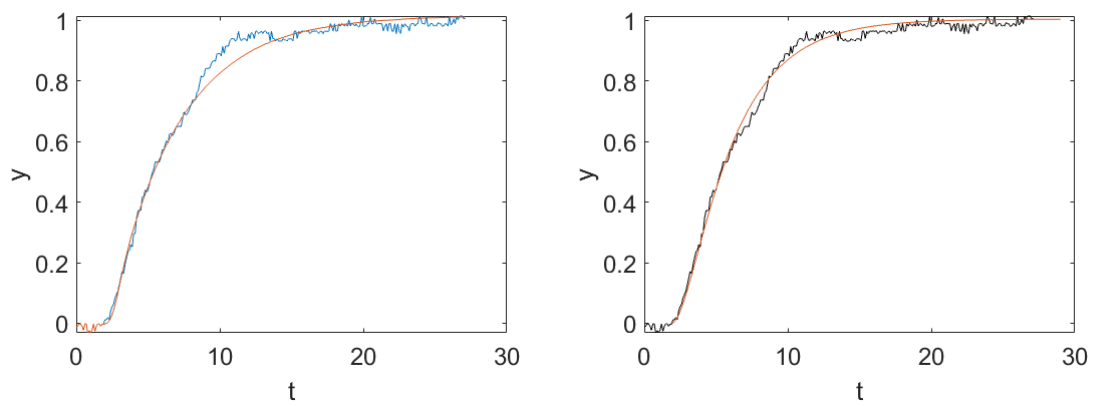


Figura 12: a) Simulação pelo estimador MQ b) Comparação com  $H_1(s)$

.....

Os dados do arquivo bfg44.dat são exibidos na Figura 13.

Para retirar o offset, não foi necessário retirar nenhum ponto inicial. Tomei o módulo de  $\Delta y$ .

Estimei  $\Delta y = y_{ss} - y_0$ , ou seja, a diferença entre o valor de estado estacionário e o inicial.

Dividi  $u$  e  $y$  por  $\Delta y$ , a fim de que  $y_{ss} = 1$ . A nova entrada é exibida na Figura 14.

Gerei a matriz de regressores, considerando o seguinte modelo ARX:

$y(k) + a_1 y(k-1) + a_2 y(k-2) = b_1 u(k-32) + b_2 u(k-33)$ , uma vez que a primeira saída considerável aconteceu em  $k = 34$ , quando é decrescente.

Fiz a simulação com os parâmetros estimados, obtive a figura 15a. A entrada foi constante e igual a  $\Delta u$ . Dividi a saída por  $\Delta y$ .

Comparei com  $H_2(s)$  e obtive a figura 15b. Esta ficou como esperado pelo exemplo; a anterior ficou péssima em relação a  $H_2$ . Portanto o modelo ARX teve desempenho ruim nesse caso. A fim de melhorar, poderíamos aumentar a quantidade de colunas da matriz regressora; melhor ainda, considerar este sistema como não linear e utilizar métodos mais sofisticados.

A forma dos sinais  $H_i$  é  $H_i(s) = \frac{K e^{-\tau_d s}}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}$ . Nós comparamos com modelos ARX cuja transformada  $Z$  é  $Y(z) + a_1 \frac{Y(z)}{z} + a_2 \frac{Y(z)}{z^2} = b_1 \frac{U(z)}{z^{n-1}} + b_2 \frac{U(z)}{z^n}$ . A maior dificuldade é encontrar o grau de  $A(q)$  e  $B(q)$ , e a quantidade de regressores de ambos, que minimiza a função objetivo. Com mais esforço e tempo, conseguiríamos estimar exatamente os parâmetros  $H_1(z)$  e  $H_2(z)$ , devidamente discretizados ou amostrados.

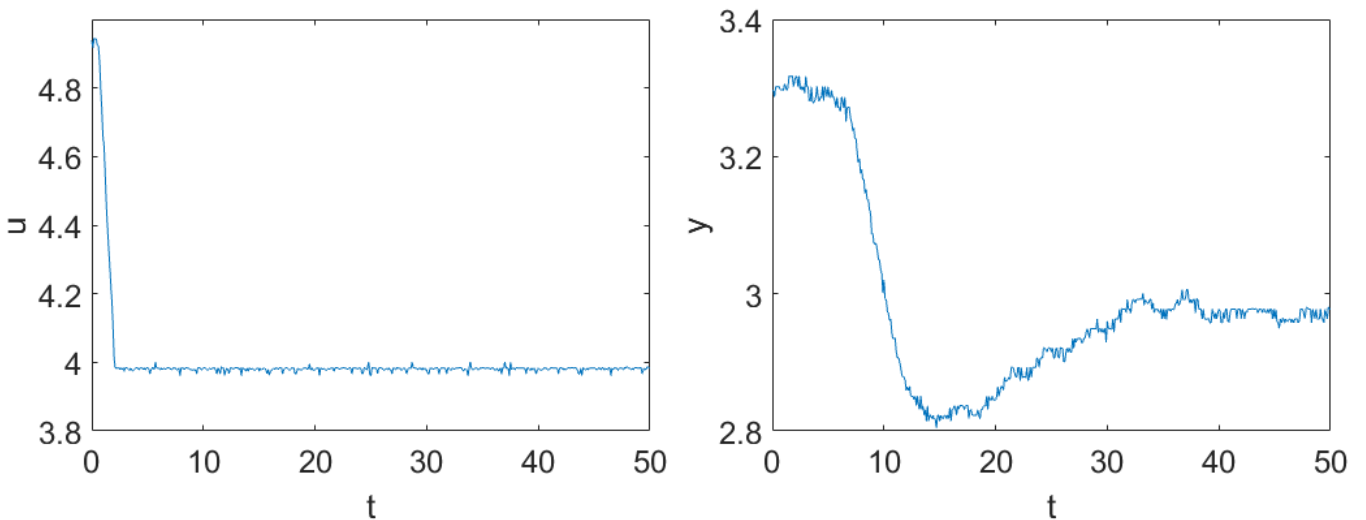


Figura 13: Entrada e saída de bfg44.dat



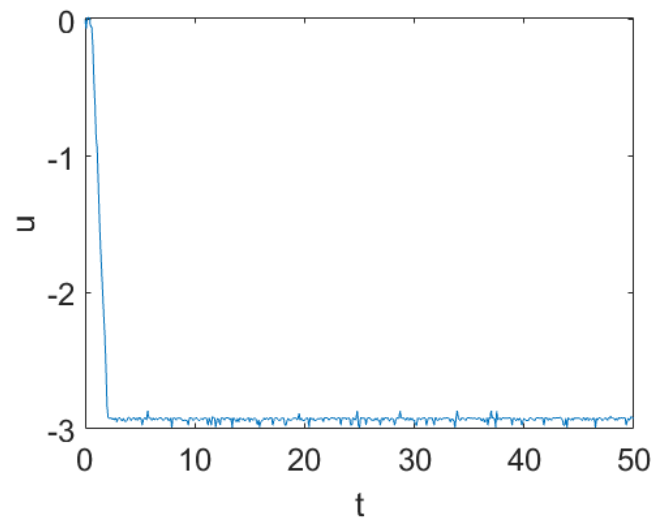


Figura 14: Entrada considerada para os cálculos

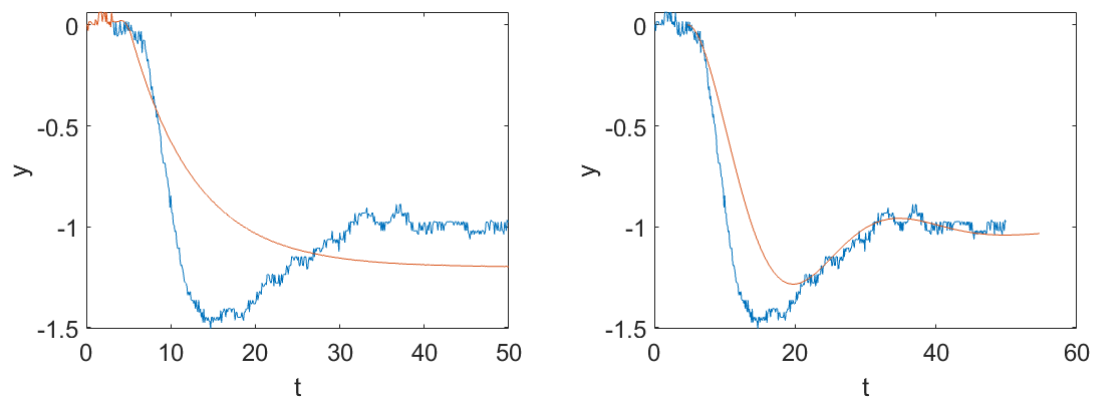


Figura 15: a) Simulação pelo estimador MQ b) Comparação com  $H_2(s)$

Para terminar, gerei nova matriz de regressores, considerando o seguinte modelo ARX:

$$y(k) + \sum_{i=1}^5 a_i y(k-i) = \sum_{j=29}^{33} b_j u(k-j).$$

O resultado está exibido na Figura 16 e foi bem aproximado apenas no início, indicando possível mudança de ponto de operação.

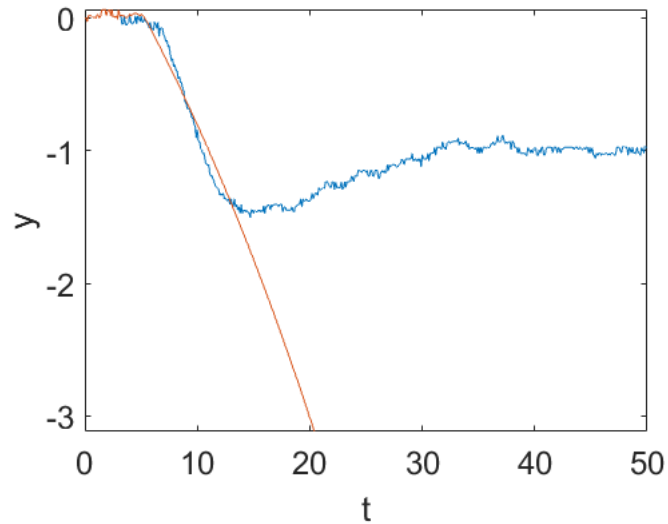


Figura 16: Nova simulação com matriz de dez colunas

Link para os [códigos-fonte](#).

Versão de 20/maio/2022\* por Vinicius Claudino Ferraz.

Matrícula: 2019435823.

---

\*Fora da caridade não há salvação.