3.1.3 Solução da Equação da Onda

O problema da corda vibrante é um problema bem posto no sentido de Hadamard se f é de classe C^2 e g é de classe C^1.

Definição. Dizemos que uma função $u : \overline{\mathcal{R}} \to \mathbb{R}$ é uma solução do problema da corda vibrante, se u é contínua em $\overline{\mathcal{R}}=\{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant x \leqslant L \text{ e } t \geqslant 0\}$, $u \in C^2(\mathcal{R})$ e u satisfaz todas as condições iniciais e de fronteira.

3.2 Solução pelo Método de Separação de Variáveis e Séries de Fourier

Vamos resolver o problema da corda vibrante com extremidades fixas pelo método de separação de variáveis:

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} & \text{se } 0 < x < L \text{ e } t > 0, \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 & \text{se } t \geqslant 0, \\ u(x,0) = f(x) & \text{se } 0 \leqslant x \leqslant L, \\ u_t(x,0) = g(x) & \text{se } 0 \leqslant x \leqslant L, \end{cases} \tag{3.4}$$

onde $f(0) = f(L) = f''(0) = f''(L) = g(0) = g(L) = 0$ e c é uma constante. Escrevendo $u(x,t) = F(x)G(t)$,
$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \left(a_n \cos \frac{cn\pi t}{L} + b_n \operatorname{sen} \frac{cn\pi t}{L} \right)$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L},$$

ou seja, c_n são os coeficientes da série de Fourier em senos de f:

$$\boxed{a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}\, dx.}$$

Como $u_t(x,0) = g(x)$, segue que

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{cn\pi}{L} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}$$

e $\frac{cn\pi}{L} b_n$ são portanto os coeficientes da série de Fourier em senos de g:

$$\boxed{b_n = \frac{2}{cn\pi} \int_0^L g(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}\, dx.}$$

Teorema 3.3. *Sejam $f, g : [0,L] \to \mathbb{R}$, f de classe C^2 e g de classe C^1, tais que $f(0) = f(L) = f''(0) = f''(L) = g(0) = g(L) = 0$. Suponha, além disso, que f''' e g'' são contínuas por partes. Então*

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \left(a_n \cos \frac{cn\pi t}{L} + b_n \operatorname{sen} \frac{cn\pi t}{L} \right)$$

com

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}\, dx,$$
$$b_n = \frac{2}{cn\pi} \int_0^L g(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}\, dx,$$

é uma solução para (3.4), contínua em $\overline{\mathcal{R}}$ e de classe C^2 em $\mathcal{R}$.

A prova usa:
u é de classe C^1 ➔ M-Weierstrass; integrando a_n por partes 2 vezes e b_n 1 vez.

u é de classe C^2 ➔ $ab \le \frac{1}{2}\left(a^2+b^2\right), a=\frac{1}{n}$; identidade de Parceval (Bessel): $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right)=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}\left|f(x)\right|^2 dx-\frac{a_0^2}{2}$;

Teorema 3.4. (Solução de D'Alembert, 1747) *Suponha que u é uma função de classe C^2 que satisfaz a equação da onda*

$$u_{tt}=c^2u_{xx}$$

onde c é uma constante. Então existem funções $F, G:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de classe C^2 tais que

$$u(x,t)=F(x+ct)+G(x-ct). \tag{3.15}$$

Além disso, esta é a solução geral da equação da onda.

(Só definir r, s)

Teorema 3.5. (Solução de D'Alembert para o Problema de Dirichlet) *Sejam $f,g:[0,L]\to\mathbb{R}$, f de classe C^2 e g de classe C^1, tais que $f(0)=f(L)=f''(0)=f''(L)=g(0)=g(L)=0$. Então*

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[\tilde{f}(x+ct)+\tilde{f}(x-ct)]+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\tilde{g}(s)\,ds, \tag{3.16}$$

onde $\tilde{f},\tilde{g}$ são as extensões periódicas ímpares de f,g, respectivamente, com período 2L, é a única solução para (3.4), contínua em $\overline{\mathcal{R}}$ e de classe C^2 em $\mathcal{R}$. Além disso, (3.4) é bem posto no sentido de Hadamard.

(Trigonometria; F(r), G(s); integra g e joga em F,G)

Harmônicos

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\operatorname{sen}\left(\frac{cn\pi t}{L}+\theta_n\right)$$

$$\theta_n=\arctan\frac{a_n}{b_n}$$

$$\alpha_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2},$$

amplitude $\alpha_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}$,

fase θ_n,

período $\frac{2L}{cn}$,

freqüência $\frac{cn}{2L}$.

Teorema 3.7. (Princípio de Conservação da Energia) *Suponha que $u(x,t)$ seja uma solução para a equação da onda*

$$u_{tt}=c^2(x,t)u_{xx}$$

onde $c(x,t)=\tau/\rho(x)$ e τ é uma constante positiva satisfazendo

$$u_x(0,t)=u_x(L,t)=0$$

ou

$$u_t(0,t)=u_t(L,t)=0.$$

Se a energia da solução u no instante t é definida por

$$E(t)=\frac{1}{2}\int_0^L \tau u_x^2(x,t)\,dx+\frac{1}{2}\int_0^L \rho(x)u_t^2(x,t)\,dx,$$

então ela é constante.