LISTA 3

Questão 1

a) Gerei cem pontos e plotei os dados na Figura 1A.

b) Adicionei dez por cento do desvio padrão do y anterior multiplicando à esquerda os randômicos gaussianos ("randn"). Plotei os dados na Figura 1B.

c) A equação de regressão, ponto a ponto, é $y_i = x^\top \theta \Leftrightarrow y_i = \theta_3 x_i^2 + \theta_2 x_i + \theta_1$.

d) Portanto, precisamos da pseudoinversa de uma **matriz de regressores** de cem linhas cujas colunas são $[1, x_i, x_i^2]$ vezes um vetor cujas cem linhas são iguais a $y_i + e_i$.

e) Os parâmetros encontrados foram $[-2.468452165780984; 0.716463937117908; 1.529449567129221]$.

f) Gerei novamente mil pontos, como em (a), e plotei os dados na Figura 2A. Adicionei o erro como em (b) e plotei os dados na Figura 2B. Com nova matriz regressora, os parâmetros encontrados foram $[-2.019564476840127; 0.702513920204115; 1.507382167796436]$.

Repare que com dez vezes mais pontos, os parâmetros estimados foram bem mais próximos do ideal $[-2; 0.7; 1.5]$. Isso é explicado porque a função objetivo passou a minimizar dez vezes mais realizações de erros: $J = \sum e_i^2$.

g) Gerei mais cem pontos, como em (a), e plotei os dados na Figura 3A.

Adicionei dez por cento do desvio padrão do x anterior multiplicando à esquerda os randômicos gaussianos. Plotei os dados na Figura 3B. Repare que o modo de plotagem precisa ser diferente, uma vez que o vetor x tornou-se desordenado.

Com nova matriz regressora, os parâmetros encontrados foram

$[-1.715120009257206; 0.501563604178347; 1.440498754963116]$.

Repare que o resultado foi o menos preciso.

A comparação dos (x_2,y_2),(x_3,y_3),(x_4,y_4) montados após a regressão foi plotada na Figura 4. Repare que a diferença entre as aproximações é mínima diante do total dos dados.

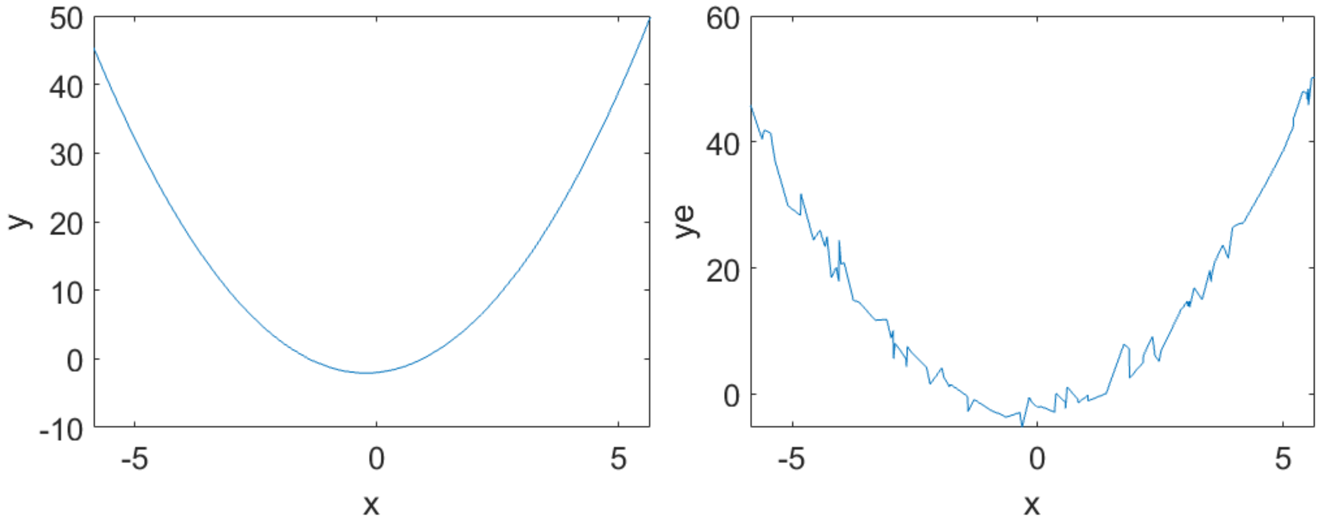

Figura 1: 100 pontos gerados (a) sem erro (b) com erro na saída.

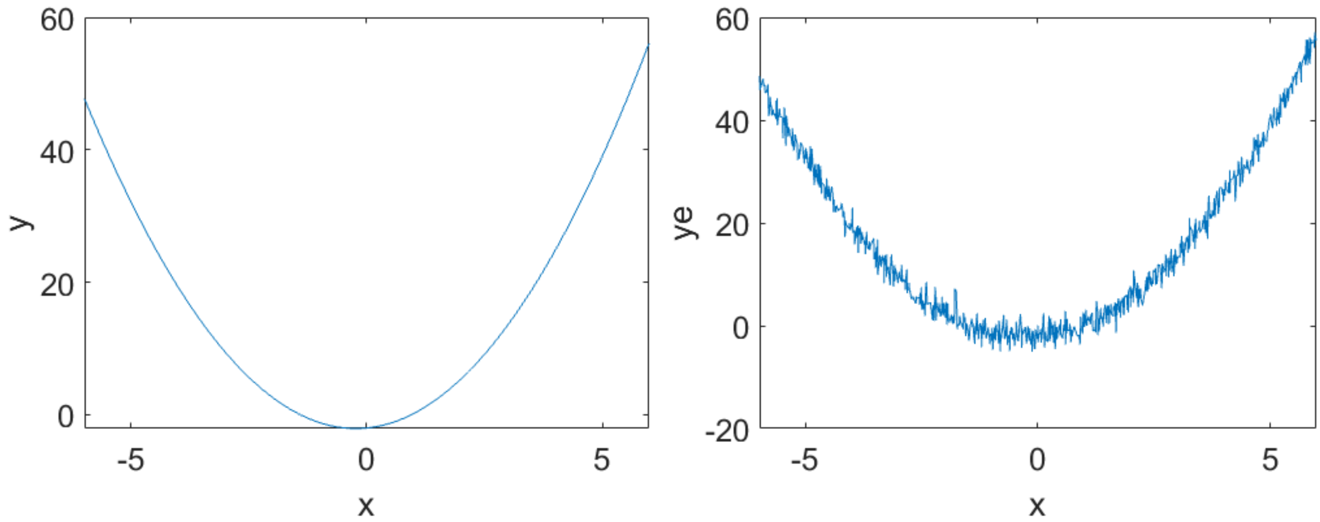

Figura 2: 1000 pontos gerados (a) sem erro (b) com erro na saída.

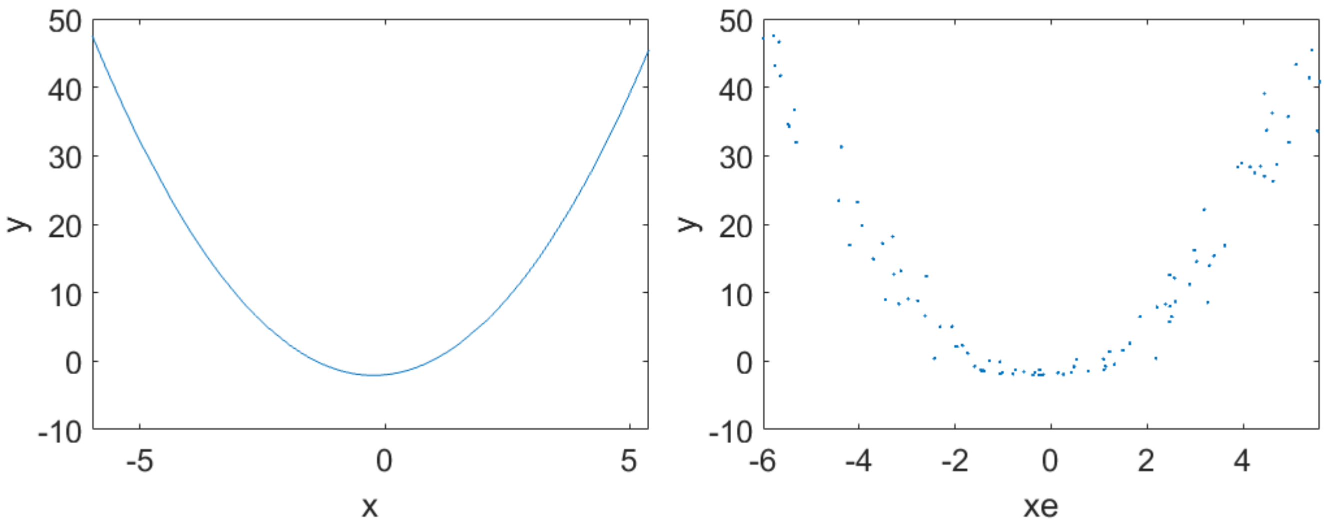

Figura 3: 100 pontos gerados (a) sem erro (b) com erro na entrada.

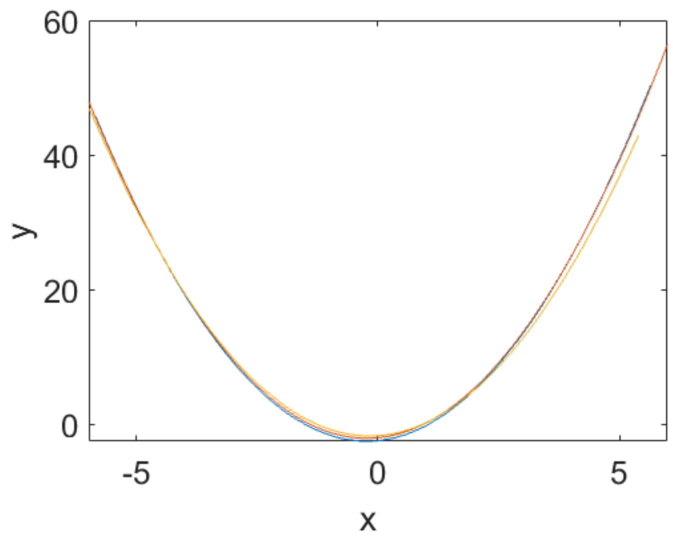

Figura 4: comparação utilizando os 3 vetores θ de parâmetros encontrados.

Questão 2

a) A entrada é $prbs(n,12,1)$, subtraída a média, multiplicada por 2, plotada na Figura 5A.

O ruído ν (plotado na Figura 5B) são os gaussianos "randn" multiplicados por $\sqrt{0.1}$. Vou explicar essa constante.

Pela definição de variância, se nós tivermos $var(X) = E[X^2] - E^2[X] = v$

$\Rightarrow E[X^2] = v + c^2$, então ao multiplicarmos por uma constante k,

$var(kX) = E[k^2X^2] - E^2[kX] = w \Rightarrow k^2 \underbrace{E[X^2]}_{v+c^2} - (ck)^2 = w.$

$\therefore k = \pm\sqrt{\dfrac{w}{v}}$ é a constante desejada.

b) Modelo ARX (plotado na Figura 6A):

$Ay = Bu + \nu$

$y(k) = -\theta(1)y(k-1) - \theta(2)y(k-2) + \theta(3)u(k-1) + \theta(4)u(k-2) + \nu(k).$

c) Modelo ARMAX (plotado na Figura 6B):

$Ay = Bu + C\nu$; Repare que troquei A, B, C por θ, para futura estimação.

$y(k) = -\theta(1)y(k-1) - \theta(2)y(k-2) + \theta(3)u(k-1) + \theta(4)u(k-2) + \theta(5)\nu(k) + \theta(6)\nu(k-1).$

d) Modelo com erro na saída (plotado na Figura 7):

$Fw = Bu$; $y = w + \nu$; Repare que é o único sem filtro. Não há função de q multiplicando ν.

$w(k) = -\theta(1)w(k-1) - \theta(2)w(k-2) + \theta(3)u(k-1) + \theta(4)u(k-2)$; $y(k) = w(k) + \nu(k).$

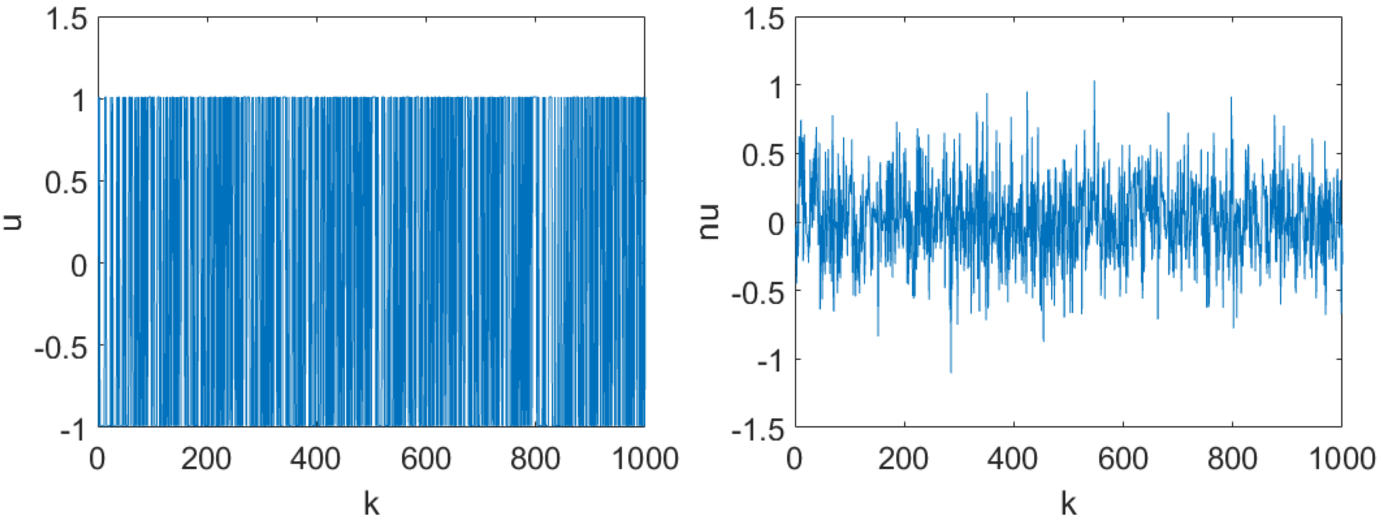

Figura 5: (a) entrada (b) ruído.

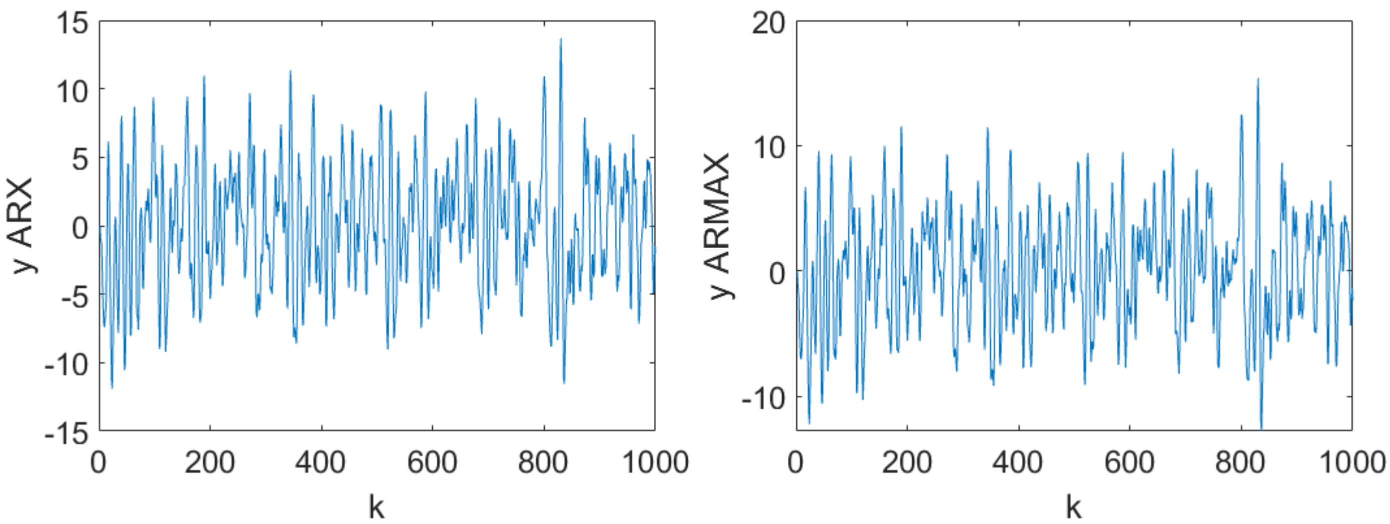

Figura 6: Simulações: (a) ARX (b) ARMAX.

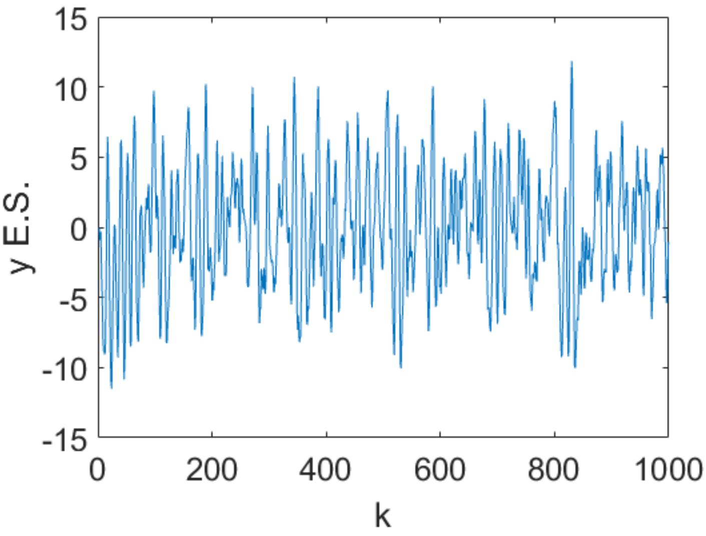

Figura 7: Simulação com erro na saída.

Questão 3

Os parâmetros ideais são $[-1.5; 0.7; 1; 0.5; 1; 0.8]$. Veremos que não é possível estimar os dois últimos.

a) ARX: Temos $y_{(3:1000)} = X\theta$, em que cada uma das 998 linhas de X é

$[-y(k-1), -y(k-2), u(k-1), u(k-2)]$. Os parâmetros encontrados foram:

$[-1.492231811181352; 0.691822104421257; 0.991675629125383; 0.498357708396526]$.

Foi possível montar toda a matriz de regressão.

b) ARMAX: Não foi possível montar toda a matriz de regressão. Para isso, teríamos que ter disponíveis os dados de ν. Os parâmetros encontrados foram:

$[-1.511287691284849; 0.709024279287422; 1.001511280557228; 0.472411376814075]$.

c) Erro na saída: os parâmetros encontrados foram:

$[-1.428278426942452; 0.632047338684911; 0.973519519942481; 0.582697779355300]$.

O que acontece aqui é que nós precisaríamos de colunas com os valores de $w = y - \nu$ que foram trocadas por y. Portanto, foi possível estimar todos os parâmetros.

d) Sobre o desempenho. Calculando o valor da função objetivo $J = \sum e_i^2$, obtivemos

$J_{ARX} = 96.8369$; $J_{ARMAX} = 155.9078$; $J_{ES} = 348.7046$. Dessa forma, concluímos que a aproximação mais precisa é do ARX, e a menos precisa é a do modelo de erro na saída.

Questão 4

Por definição, $J_{reg} = 0.5J_{MQ} + 0.5\lambda\theta^\top\theta$, em que $\lambda \in \mathbb{R}$ é um escalar e $\theta \in \mathbb{R}^n$ é um vetor, a nossa incógnita a ser estimada, minimizando J_{reg}.

Sejam $\Psi \in \mathcal{M}_{N\times n}(\mathbb{R})$; $N \geq n$. Aproximamos a saída pelos parâmetros pré multiplicados pela matriz de regressão, cuja diferença é o erro $\xi \in \mathbb{R}^n$.

$y = \Psi\hat{\theta} + \xi$.

Por definição, $J_{MQ} = \sum_{i=1}^{N} \xi(i)^2$.

Então, $J_{MQ} = \xi^\top\xi = (y - \Psi\hat{\theta})^\top(y - \Psi\hat{\theta}) = y^\top y - y^\top\Psi\hat{\theta} - \hat{\theta}^\top\Psi^\top y + \hat{\theta}^\top\Psi^\top\Psi\hat{\theta}$.

Derivando, temos que $\dfrac{\partial J_{reg}}{\partial\hat{\theta}} = 0.5(-\Psi^\top y - \Psi^\top y + 2\Psi^\top\Psi\hat{\theta} + 2\lambda\hat{\theta})$

O mínimo acontece quando a derivada é zero:

$\dfrac{\partial J_{reg}}{\partial\hat{\theta}} = 0 \Rightarrow -\Psi^\top y + \Psi^\top\Psi\hat{\theta} + \lambda\hat{\theta} = 0 \Rightarrow (\Psi^\top\Psi + \lambda I)\hat{\theta} = \Psi^\top y.$

Finalmente, pré-multiplicando pela inversa dos dois lados:

$\hat{\theta}_{reg} = [\Psi^\top\Psi + \lambda I]^{-1}\Psi^\top y.$

O que fizemos foi minimizar $J_{reg} = \sum_{i=1}^{N} \xi(i)^2 + \sum_{i=1}^{n} \theta(i)^2 = \|\xi\|^2 + \|\theta\|^2$. Essa constante 0.5 é desprezível nesse caso. Portanto, a norma dos parâmetros também será mínima.

Link para os códigos-fonte.

Versão de 13/maio/2022* por Vinicius Claudino Ferraz.

Matrícula: 2019435823.

*Fora da caridade não há salvação.