LIMA, Elon Lages. **Espaços Métricos.** Ed. IMPA: Rio de Janeiro. 2007

Página 195+, ex. 33

Sejam $I=[a,b]; C=C^0(I,\Re)=\{f: I\mapsto\Re : f\in Lim\cap C^0 \text{ com a métrica * da conv. uniforme}\}$

$\forall f: I\mapsto\Re; f\in C^0 \Rightarrow f\in Lim$

Teorema 1: $\{f\in C: f'(a)=b, \exists a\in I, b\in\Re\}$ é magro *.

Equivale a: Seja $F=\{f\in C: \nexists f'(a), \forall a\in I\}=\left\{f\in C: \forall m\in R, \exists\varepsilon>0: \forall\delta>0, |x-a|<\delta\wedge\left|\frac{f(a+h)-f(a)}{h}-m\right|\geq\varepsilon, \forall a\in I\right\}$

Então $F\supset\bigcap_{n\in N}A_n : \underbrace{\forall n\in N, A_n \text{ é aberto e denso * em } C.}_{(i)}$

Logo, por Baire*, F é denso em C.

Demo.: por definição, $\exists f(t+h)\Leftarrow t+h\in I$

$\forall n\in N$, seja $A_n=\left\{f\in C; \forall t\in I, \exists h: \left|\frac{f(t+h)-f(t)}{h}\right|>n\right\}$

Pela def. de derivada, $f\in A_n, \forall n\in N\Rightarrow f\in F$

Basta provar (i), pois C é espaço métrico completo*, logo $\bigcap_N A_n$ é denso em C

Lema 1: $(i.1)$ Cada A_n é aberto em C

Demo.: Seja $f\in A_n$.

$(ii)\ \forall t\in I, \exists h: \xi(t,h)=|f(t+h)-f(t)|-n|h|>0$

Lema 2: $\exists\delta>0; \forall t\in I, \exists h: \xi(t,h)>\delta$

Demo.: Caso contrário, $\forall k\in N, \exists t_k\in I: \xi(t_k,h)\leq\frac{1}{k}, \forall h$

$(x_n)\subset I\Rightarrow\exists(x_{n_k})_{k\in N}\in Conv.$

Suponhamos, sem perda de generalidade, $t_k\to t_0\in I$

$\xi\in C^0\Rightarrow\forall h, \xi(t_0,h)=\lim_{k\to\infty}\xi(t_k,h)\leq\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}=0$, contradizendo (ii)

Seja $g\in C: \|g-f\|\leq\frac{\delta}{2}$

$\forall t\in I, \exists h: n|h|+\delta<|f(t+h)-f(t)|\leq|f(t+h)-g(t+h)|+|g(t+h)-g(t)|+|g(t)-f(t)|<\frac{\delta}{2}+|g(t+h)-g(t)|+\frac{\delta}{2}$

Logo, $|g(t+h)-g(t)|>n|h|\Rightarrow g\in A_n\Rightarrow A_n$ é aberto em C

Lema 3: (i.2) Cada A_n é denso em C

Demo.: $f: I\mapsto\Re; f\in C^0\Rightarrow f\in Unif.Conv.$

$\forall\varepsilon>0, \forall f\in C, \exists g\in A_n: \|g-f\|\leq\varepsilon$

$\because$ Como $f\in Unif.Conv.$,

$\exists\delta>0: |x-y|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(y)|<\varepsilon$

Seja $I_j=[a_{j-1},a_j]: |I_j|<\delta; I=\bigcup_{j=1}^{n}I_j$

Construir $g: I\mapsto\Re; \|g-f\|\leq\varepsilon; g\in A_n$.

Seja $g(a_j)=f(a_j)$

Seja $g|_{\operatorname{int} I_j}$ uma serra tal que $|g'(t)|>n$ e Gráfico$(g)\subset$ qualquer retângulo de altura ε que contenha Gráfico$\left(f|_{I_j}\right)$

M é espaço métrico completo se (p. 165)

$M\supset(x_n)$ é de Cauchy $\Rightarrow(x_n)\in Conv$

Métrica (p. 1, 12 e 14)

$$\text{dist}: M^2 \mapsto \Re \text{ é métrica} \Leftarrow \forall x, y, z \in M, \begin{cases} \text{dist}(x,x) = 0 \\ x \neq y \Rightarrow \text{dist}(x,y) > 0 \\ \text{dist}(x,y) = \text{dist}(y,x) \\ \text{dist}(x,z) \leq \text{dist}(x,y) + \text{dist}(y,z) \end{cases}$$

métrica da convergência uniforme: Sejam $f, g : X \mapsto M$. $\text{dist}(f,g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|$

$\text{diam } X = \sup\{\text{dist}(x,y) : x, y \in X\}$

Densos (p. 73 e 188)

$X \subset M$. X é denso em $M \Leftarrow \overline{X} = M$

X é denso em $M \Leftarrow \forall B \subset M : B$ é bola aberta, $B \cap X \neq \varnothing$

X é denso em $M \Leftarrow \forall A \subset M : A \neq \varnothing, A \cap X \neq \varnothing$

$\text{int } X = \varnothing \Leftrightarrow M - X$ é denso em M

$\overline{F} = F \subset M, \text{int } F = \varnothing \Leftrightarrow M - X \supset A$ aberto e denso $\Leftrightarrow \text{int}(M - X)$ é denso

Magros (p. 187)

Seja $X \subset M$, que é espaço métrico.

X é magro $\Leftarrow X = \bigcup X_n : \forall n \in N, \text{int } \overline{X}_n = \varnothing$

X é magro em $M \Leftrightarrow X = \bigcup_{n \in N} F_n : \forall n \in N, \overline{F}_n = F_n \subset M, \text{int } F_n = \varnothing$

$X \subset Y$, que é magro $\Rightarrow X$ é magro

$\forall n \in N, X_n$ é magro $\Rightarrow \bigcup_{n \in N} X_n$ é magro

$M \supset X$ é enumerável. X é magro $\Leftrightarrow$ nenhum $x \in X$ é isolado

Teorema de Baire (p. 189+)

$$\text{Teorema 2}: M \text{ é completo} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall F_n \subset M : F_1 \supset F_2 \supset \ldots \supset F_n \supset \ldots; \overline{F}_n = F_n \neq \varnothing; \lim \text{diam } B_n = 0 \\ \exists a \in M : \bigcap_{n \in N} F_n = \{a\} \end{cases}$$

Demo.($\Rightarrow$): Suponhamos M completo e F_n como acima.

$\forall n \in N$, escolha $x_n \in F_n$

$(x_n) \subset M$

$m, n > n_0 \Rightarrow x_m, x_n \in F_{n_0}$

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 : \text{diam } F_{n_0} < \varepsilon$

$m, n > n_0 \Rightarrow \text{dist}(x_m, x_n) < \varepsilon \Rightarrow (x_n)$ é de Cauchy

Seja $\lim x_n = a \in M$

$\forall p \in N, x_n \in F_p, \forall n \geq p \Rightarrow a = \lim x_n \in F_p, \forall p \in N$

$a \in \bigcap_{n \in N} F_n$

$\bigcap_{n \in N} F_n = \{a, b\} \Rightarrow \text{dist}(a,b) \leq \text{diam } F_n, \forall n \therefore \bigcap_{n \in N} F_n = \{a\}$

Demo.($\Leftarrow$): Seja $M \supset (x_n)$ seq. de Cauchy

$\forall n \in N$, seja $X_n = \{x_n, x_{n+1}, \ldots\}$

$X_1 \supset X_2 \supset \ldots \supset X_n \supset \ldots ; \overline{X}_n = X_n \neq \varnothing$

$0 = \lim_{n\to\infty} \text{diam } X_n = \lim_{n\to\infty} \text{diam } \overline{X}_n$

$\exists a \in M : \bigcap \overline{X}_n = \{a\}$

$a \in \overline{X}_n, \forall n \in N \Rightarrow \forall B : B$ é bola aberta de centro $a, \exists n_0 \in N : x_n \in B, \forall n \geq n_0$

$a = \lim x_{n_k}$

(x_n) é de Cauchy $\therefore a = \lim x_n$

Teorema de Baire : Sejam $X \subset M$ espaço métrico completo. X é magro $\Rightarrow \text{int } X = \varnothing$

$Baire \Leftrightarrow X = \bigcap_{n\in N} A_n : \forall n \in N, A_n$ é aberto e denso $\Rightarrow X$ é denso em M

Sejam $M \supset A_n$ abertos e densos. Mostrar que $M \supset A = \bigcap_{n\in N} A_n$ é denso

$\Leftrightarrow$ Sejam $\text{M} \supset B_n$ bolas abertas. $\forall B_1, B_1 \cap A \neq \varnothing$

Demo.: A_1 é aberto e denso $\Rightarrow \varnothing \neq B_1 \cap A_1 = X_1$ é aberto $\Rightarrow X_1 \supset B_2$

Suponhamos que $\text{raio}(B_2) \leq \frac{1}{2}$ e que $\overline{B}_2 \subset B_1 \cap A_1$.

A_2 é aberto e denso $\Rightarrow \varnothing \neq B_2 \cap A_2 = X_2$ é aberto $\Rightarrow X_2 \supset B_3 ; \text{raio}(B_3) \leq \frac{1}{3} ; \overline{B}_3 \subset B_2 \cap A_2$

$\overline{B}_1 \supset \overline{B}_2 \supset \ldots \supset \overline{B}_n \supset \ldots ; \text{diam } B_n \to 0$

$\overline{B}_{n+1} \subset B_n \cap A_n \quad (i)$

$T2 \Rightarrow \exists a \in M : a = \bigcap \overline{B}_n$

$(i) \Rightarrow a \in \bigcap A_n \Rightarrow a \in A \cap B_1$