UFMG – Universidade Federal de Minas Gerais
Vinícius Claudino Ferraz

INTRODUÇÃO À GEOMETRIA PROJETIVA

Monografia para conclusão do curso de
Matemática – Licenciatura
ORIENTADOR: Victor Gerasimov

Belo Horizonte
2007

Agradecimentos

Ao professor Victor Gerasimov, pelo suporte.

À professora Samira Zaidan, por aceitar como exceção este tema.

A Rivani Gomes, minha noiva companheira, pelo auxílio emocional.

Sumário

Lista de Ilustrações

Resumo

Sob o ponto de vista da projeção central, apresentamos o objeto de estudo da Geometria Projetiva e sua relação com a Geometria Afim; introduzimos os conceitos de cônica e reta no infinito; apresentamos os principais teoremas (Desargues, Pappus, Pascal), com aplicação.

Sob o ponto de vista axiomático, desenvolvemos incidência e princípio da dualidade; e apresentamos o teorema de Brianchon. Sob o ponto de vista da Álgebra Linear, definimos espaço projetivo, introduzimos coordenadas homogêneas e verificamos a inexistência do paralelismo. Por fim, algumas notas históricas.

Abstract

Under the approach of central projection, we present the subject-matter of Projective Geometry and its relation with Affine Geometry; we introduce the concepts of conic and line at infinity; we present the main theorems (Desargues, Pappus, Pascal), with application.

Under the axiomatic approach, we develop incidence and duality principle; and we present Brianchon's theorem. Under the approach of Linear Algebra, we define projective space, we introduce homogeneous coordinates and we verify the inexistence of parallelism. At last, some historical notes.

Justificativa

Geometria para mim é desafiador, tanto no aprender quanto no ensinar. Por este motivo, escolhi este tema para esta monografia e espero desenvolver um estudo que possa ampliar conhecimentos e possibilidades dentro do tema.

1 Introdução

Durante o século XIX, houve uma tendência de extrair da Geometria Euclidiana certas idéias de uma natureza particularmente simples, especialmente idéias que não envolvem medidas de distância ou ângulo, e usá-las para criar sistemas mais gerais. A mais antiga dessas idéias que encontramos é de Pappus de Alexandria, remontando ao século IV d.C. Trabalharemos com as Geometrias Afim e Projetiva. A primeira pode ser utilizada dentro do contexto da teoria especial da relatividade, na geometria do espaço-tempo de Minkowski, e existem vários tipos de geometria não euclidiana associadas a idéias modernas de cosmologia relativística em que a segunda é válida.

A Geometria Projetiva ganhou vida há mais de 500 anos no estudo de desenho em perspectiva: a distância entre dois pontos na tela do artista não representa a distância real entre os objetos que eles representam, então a distância euclidiana não é o conceito certo. Séculos atrás, geometria projetiva costumava ser chamada de "geometria descritiva", mas isso não quer dizer que é menos quantitativa.

2 Projeção Paralela – Objeto de Estudo da Geometria Afim

Duas figuras em planos distintos estão relacionadas por **projeção paralela**, se pontos correspondentes podem ser ligados por retas paralelas. Isso é essencialmente o que acontece quando temos uma moeda circular e sua sombra elíptica no chão criada pelo sol.

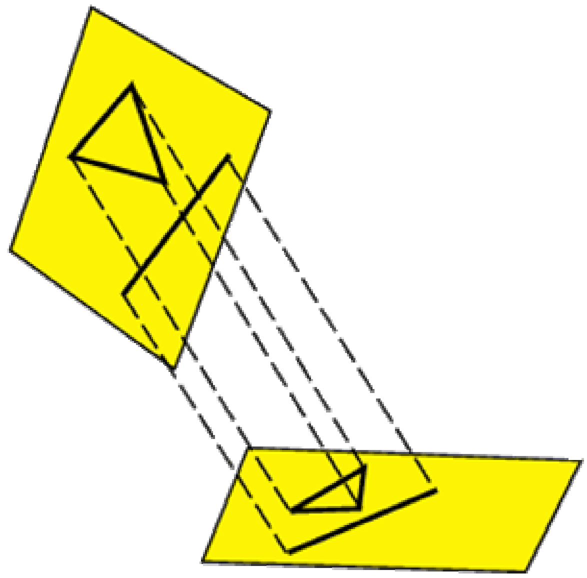

Fig. 1

Se os dois planos são paralelos, as figuras são congruentes. Mas, mesmo em caso contrário, as retas permanecem retas; tangentes a curvas permanecem tangentes; retas paralelas permanecem paralelas; segmentos bipartidos permanecem bipartidos; áreas iguais permanecem iguais.

Em outras palavras, retidão, tangência, paralelismo, bipartição e igualdade de área são invariantes sob projeção paralela. Tais propriedades são o objeto de estudo da Geometria Afim. A Geometria Projetiva é mais restrita: está confinada às invariâncias sob projeção central.

3 Projeção Central

Duas figuras em planos distintos estão relacionadas por **projeção central**, se pontos correspondentes podem ser ligados por retas concorrentes em um único ponto L fixo. Por exemplo, uma lâmpada puntual criando a sombra de um objeto no chão ou na parede.

Se os dois planos são paralelos, as figuras são semelhantes e as propriedades invariantes podem ser tratadas pela Geometria Afim. Então assumimos planos não paralelos, seja $\alpha \not\parallel \beta$. Seja também γ o plano paralelo a α que contém L; $v = \gamma \cap \beta$, a chamada **reta que desaparece**. A fig. abaixo ilustra a *caixa* formada por α, β, γ e paralelos em L.

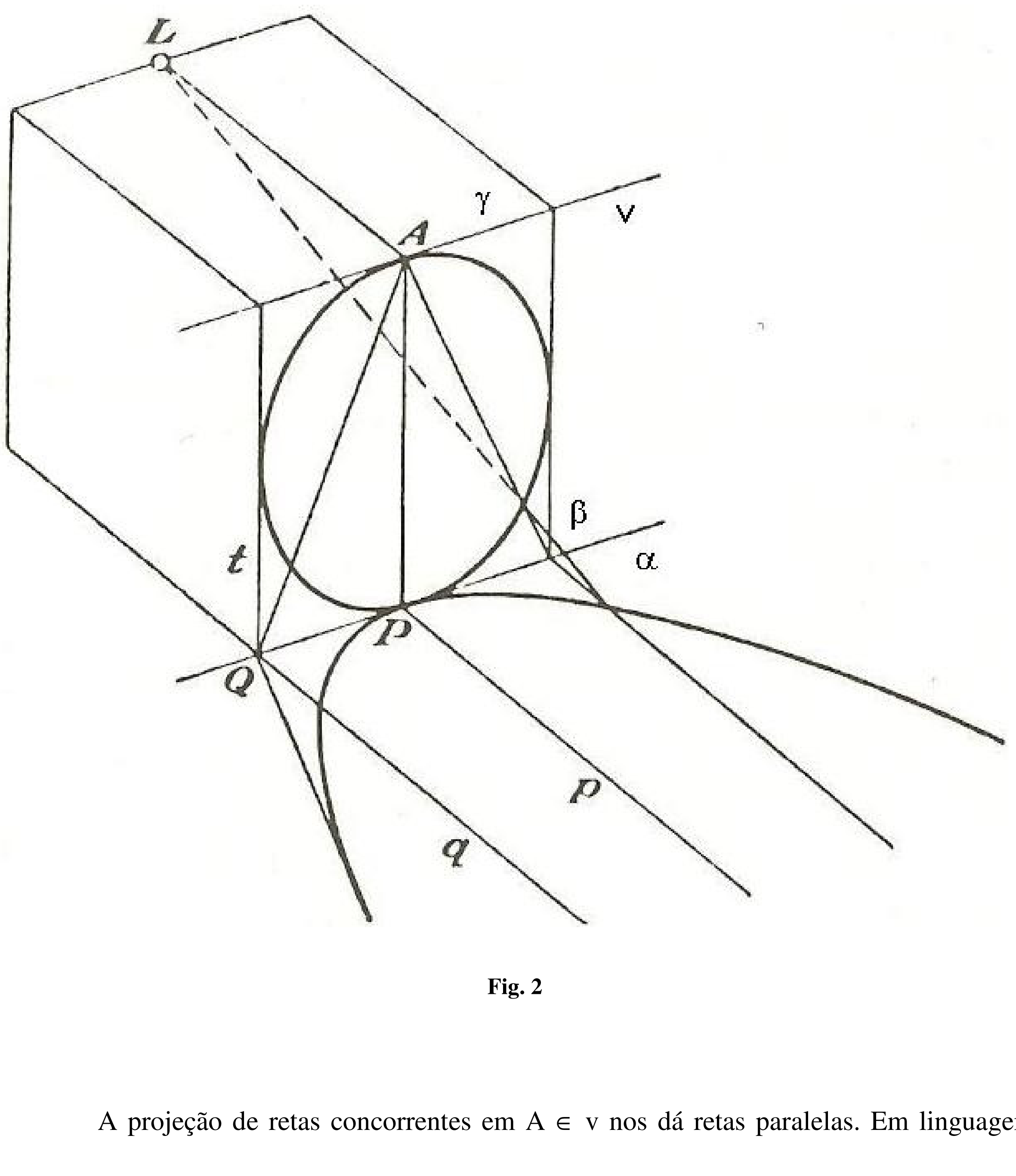

Fig. 2

A projeção de retas concorrentes em A ∈ v nos dá retas paralelas. Em linguagem matemática:

$$\left.\begin{array}{l} P, Q \in \alpha \cap \beta \\ p = proj(AP) \end{array}\right\} \Rightarrow proj(AQ) = q \,//\, p \,//\, LA$$

A projeção de retas concorrentes em A’ $\notin$ v nos dá retas concorrentes.

Sejam duas retas paralelas em α, não paralelas a v. Cada uma é coplanar com a paralela às duas que passa por L. Seja esta LA, A $\in$ v. Logo elas são imagens projetadas de duas retas concorrentes em A. Ou seja,

$$p \,//\, q \,//\, LA \Rightarrow \begin{cases} p = proj(AP) \\ q = proj(AQ); P, Q \in \alpha \cap \beta \end{cases}$$

Projetando pontos B “abaixo” de α, conseguimos pontos B’ dentro da *caixa.*

Ao projetar pontos D “acima” de v, conseguimos pontos D’ atrás da *caixa.*

As cônicas na **Geometria Projetiva** são tão vitais quanto os círculos na Geometria Euclidiana.

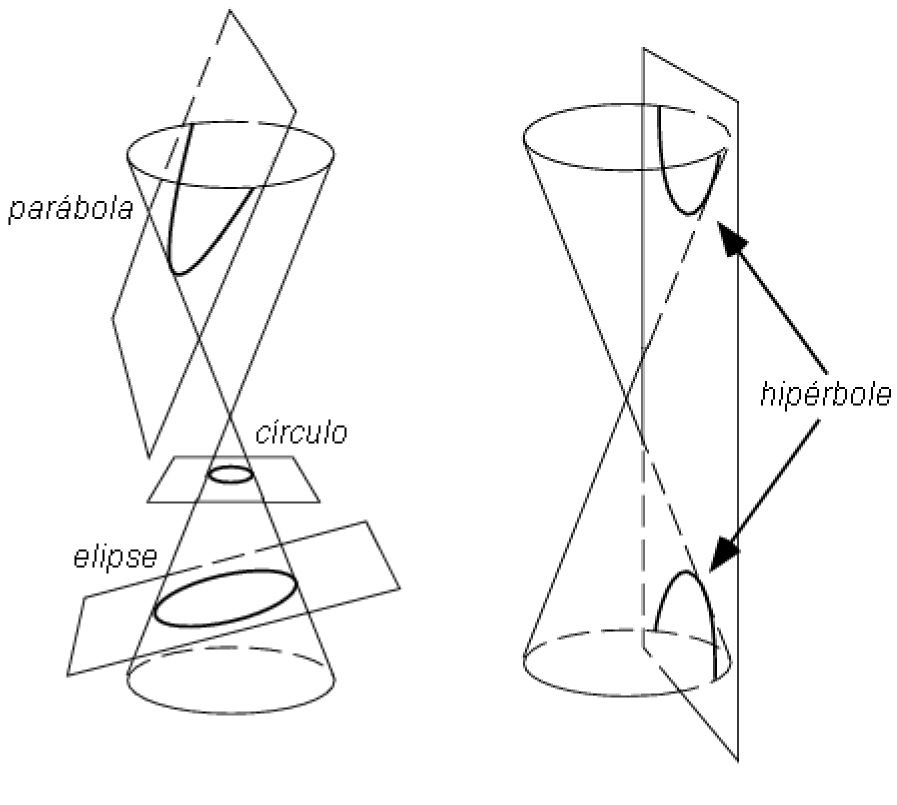

Fig. 3

Se um círculo C em β é ligado a L, formando um cone, geralmente oblíquo; então temos que proj(C) = cônica.

$C \cap \gamma = \varnothing \Rightarrow$ proj(C) = elipse

C intercepta γ em um ponto $\Rightarrow$ proj(C) = parábola

C intercepta γ em dois pontos $\Rightarrow$ proj(C) = hipérbole. Já sabemos que o ramo atrás da *caixa* é a projeção do arco "acima" de v.

Observando a reta t na fig. 2, vemos que a projeção de tangentes a C nos dá tangentes à cônica.

4 A Reta no Infinito

Pela nossa definição de Geometria Afim, toda proposição que ali valer, valerá também na Euclidiana, mas algumas proposições da Euclidiana, inclusive o conceito de ângulo, não têm significado na Afim. De forma um pouco semelhante, a Geometria Projetiva contém todas as proposições da Afim, mas o que é verdadeiro na Projetiva pode ser falso na Afim. Exemplo: *"Duas retas coplanares quaisquer têm um ponto de interseção."* Na Geometria Afim, duas retas podem ser paralelas, então essa afirmação falha; mas na Projetiva a afirmação valerá, como veremos abaixo.

Definição (Kepler): Um ponto no infinito é a imagem de um ponto na reta que desaparece.

Consideremos um ponto e o feixe de retas que passam por ele. Proposições sobre pontos são facilmente traduzidas em proposições sobre feixes. Exemplo: Dois pontos definem uma única reta $\Leftrightarrow$ *Dois feixes contêm uma única reta comum.* Se concordarmos em chamar a projeção do feixe A (fig. 2), como as retas p e q, um **feixe de paralelas**, denotamos A', poderemos escrever: *proj(feixe) = feixe*, em particular, proj(A) = A'. Dizemos que A' é um **ponto no infinito**. Quando traduzimos de volta afirmações sobre feixes em afirmações sobre pontos, temos que admitir pontos no infinito da mesma forma que admitimos os pontos ordinários.

Dessa forma, estendemos o significado da palavra **ponto** e podemos dizer: *duas retas coplanares se interceptam em um ponto.* Analogamente, estendemos o significado de **reta**, para dizer que *dois planos se interceptam em uma reta*. Se os planos são paralelos, sua interseção é uma **reta no infinito**. Vou denotar por índice ∞. Assim: $\alpha \mathbin{//} \beta \Rightarrow \alpha \cap \beta = r_\infty$

Na fig. 2, pontos no infinito do plano α pertencem também a γ, formando $r_\infty = \alpha \cap \gamma = \text{proj}(v)$. Parece ser um paradoxo: A' é só outro nome para o feixe de paralelas a p. $A' \subset \gamma$, mas tais paralelas não estão contidas em γ. Explicação: Para tratamento completo dos elementos ideais, teríamos que considerar *feixes-3d* de retas e planos, passando por um ponto dado (ou paralelas a uma reta dada), ao invés de feixe de retas. Então ponto $\in$ plano $\Leftrightarrow$ plano $\subset$ feixe-3d. No caso de um feixe-3d de paralelas, significa que plano $\supset$ reta na direção do feixe-3d. Quando consideramos um único plano, o feixe-3d é substituído por um feixe, todas as retas de um feixe ordinário contêm pontos P_∞ diferentes (que pertencem igualmente às retas respectivamente paralelas de qualquer outro feixe ordinário) e todos esses P_∞ são considerados um subconjunto de r_∞. Podemos tratar os pontos no infinito como qualquer outra faixa de pontos, uma vez que estamos lidando com propriedades invariantes sob projeção central.

Introduzindo esses novos elementos, alargamos o plano afim (onde valem as geometrias Afim e Euclidiana) e obtivemos o **plano projetivo** que tem propriedades mais simples de incidência.

A fig. abaixo classifica as cônicas de acordo com sua interseção com a reta no infinito.

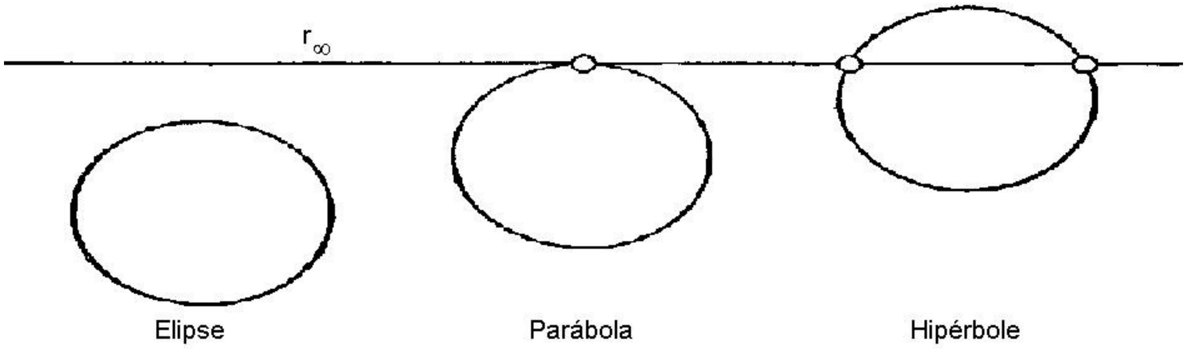

Fig. 4

O plano afim é muitas vezes derivado do plano projetivo por simplificação, retirando a reta no infinito. Então é comum escolher arbitrariamente uma reta r no plano projetivo e escrever “vamos tornar o plano afim, fazendo de r a reta no infinito”.

5 Teorema de Desargues

Lema 1: *Se os 3 lados do ΔABC são paralelos aos 3 lados do ΔPQR, então $\Delta ABC \sim \Delta PQR$.*

Logo, semelhança euclidiana é assunto presente também na Geometria Afim, onde há paralelas e podemos medir distâncias.

Lema 2: *Sejam ΔPQR, $\Delta P'Q'R'$ com $QR \mathbin{//} Q'R'$ e $RP \mathbin{//} R'P'$, $PP' \cap QQ' \cap RR' = O$. Então $PQ \mathbin{//} P'Q'$.*

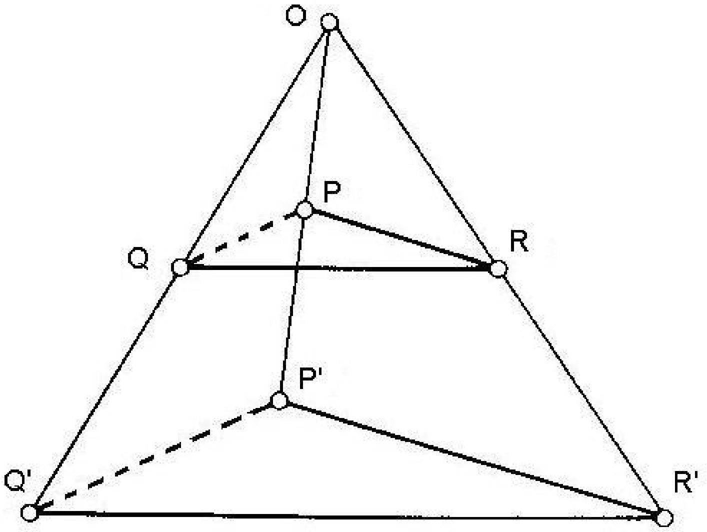

Fig. 5

Demonstração:

$$\left.\begin{matrix}\Delta QOR \sim \Delta Q'OR' \\ \Delta ROP \sim \Delta R'OP'\end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{OQ'}{OQ} = \frac{OR'}{OR} = \frac{OP'}{OP} \Rightarrow \Delta POQ \sim \Delta P'OQ' \Rightarrow PQ \,//\, P'Q'$$

A generalização deste lema fornece o teorema desejado.

Teorema de Desargues: *Se dois triângulos têm vértices correspondentes ligados por retas concorrentes, então as interseções de lados correspondentes são colineares.* Ou seja, AA’ ∩ BB’ ∩ CC’ = O; R = AB ∩ A’B’, S = AC ∩ A’C’, T = BC ∩ B’C’ ⇒ R, S, T são colineares.

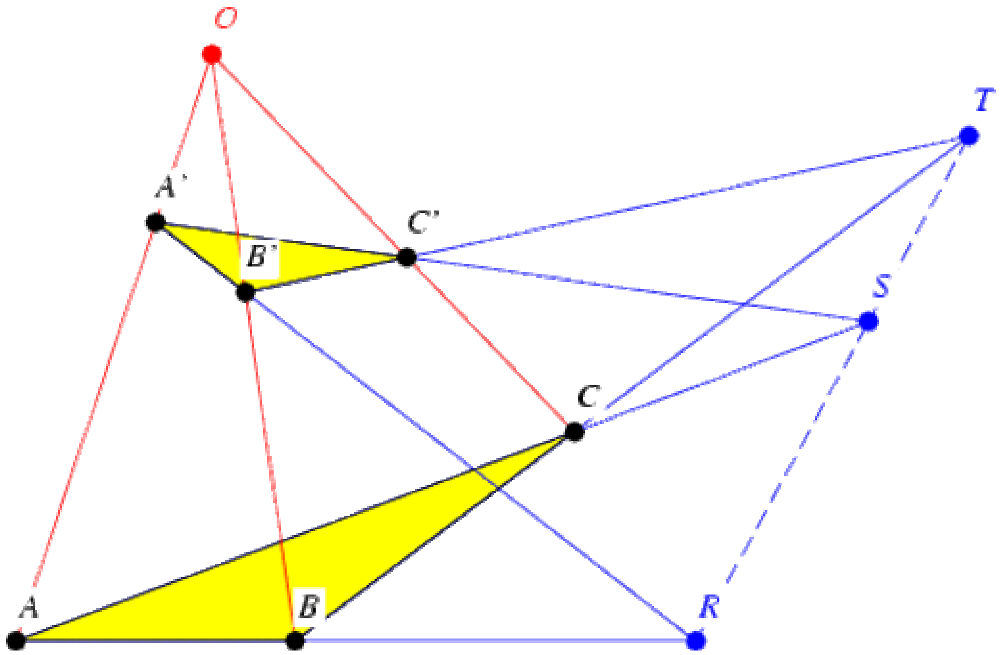

Fig. 6

O Lema 2 é um caso especial deste teorema. Basta tornar o plano afim, fazendo RS a reta no infinito. O uso de construções na terceira dimensão é inevitável a menos que tomemos o teorema de Desargues (ou equivalente) como axioma.

Observamos que de cada ponto saem três retas. É a chamada **configuração de Desargues**. O é denominado centro de perspectiva ou *perspector* e a reta RS é chamada eixo de perspectiva ou *perspectriz*. Mais adiante veremos que vale a recíproca. Por isso, algumas vezes o teorema é reescrito: *Dois triângulos têm centro de perspectiva se, e somente se, eles têm eixo de perspectiva.*

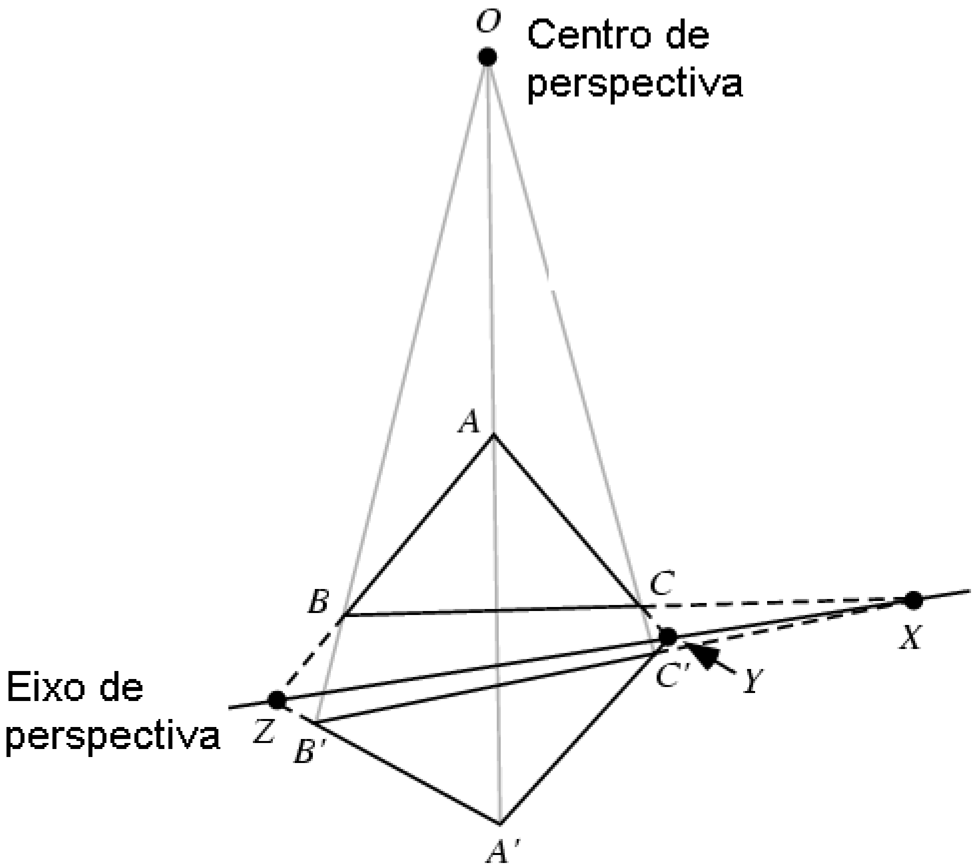

Fig. 7

Abaixo vemos uma aplicação do Teorema de Desargues.

5.1 O Problema da Mancha

Uma reta encontra um obstáculo: uma mancha. Queremos construir a continuação dessa reta, sem usar ângulos ou distâncias, ou seja: Como prolongar a mesma reta após a mancha, somente com um instrumento para traçar retas?

Resolução:

Vamos reescrever o Teorema de Desargues da seguinte maneira: *$PP' \cap QQ' \cap RR' = O$; $A = QR \cap Q'R'$, $B = RP \cap R'P'$, $C = PQ \cap P'Q' \Rightarrow A, B, C$ são colineares.*

Seja a reta a prolongar t (verde).

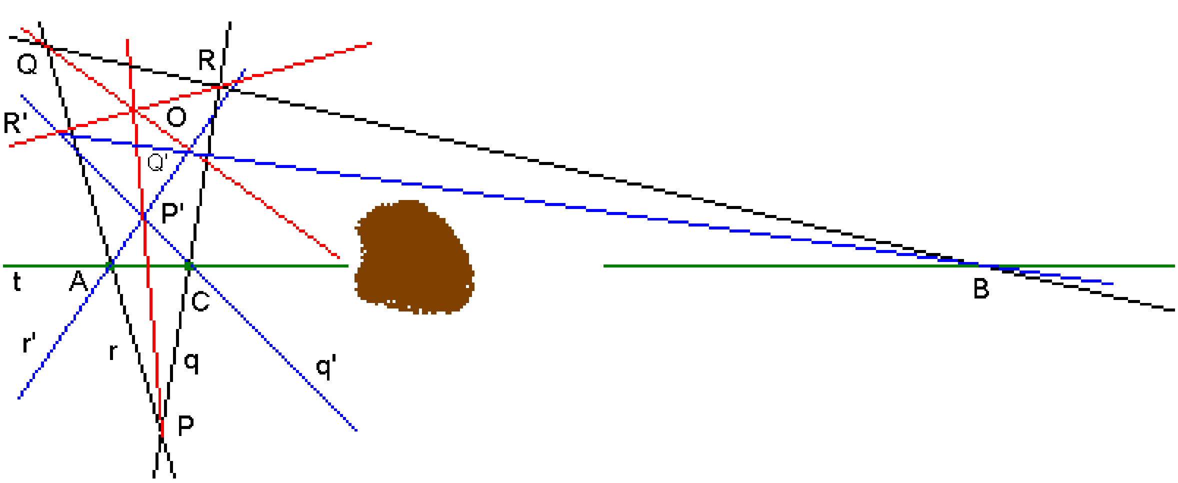

Fig. 8

Marcamos A, C em t.
Traçamos duas retas r, r' em A e duas retas q, q' em C (r' e q' em azul).

Sabemos que $\begin{cases} r \supset PQ; & r' \supset P'Q' \\ q \supset PR; & q' \supset P'R' \\ q \cap r = P; & q' \cap r' = P' \end{cases}$; então marcamos P, P'.

Traçamos PP' (vermelho).
Escolhemos e marcamos O em PP'.
Sabemos que $Q \in r, R \in q$ e traçamos QR (preto), de modo que ultrapasse a mancha.
Dessa forma podemos escolher dois pares: (Q_1, R_1), (Q_2, R_2). (*)
Traçamos OQ_1, OR_1 (vermelho).

Sabemos que $\begin{cases} Q' = OQ \cap r'; & R' = OR \cap q' \\ B = QR \cap Q'R' \end{cases}$; então traçamos $Q'_1R'_1$ (azul) e marcamos B_1.

(*) Análogo para (Q_1', R_1', B_1) e (Q_2', R_2', B_2):

Traçamos Q_2R_2, de modo que ultrapasse a mancha.
Traçamos OQ_2, OR_2.
Traçamos $Q'_2R'_2$ e marcamos B_2.
A reta desejada é B_1B_2 = AC.

6 Teorema de Pappus

Se vértices alternados de um hexágono pertencem a duas retas, então os 3 pares de lados opostos se encontram em 3 pontos colineares.

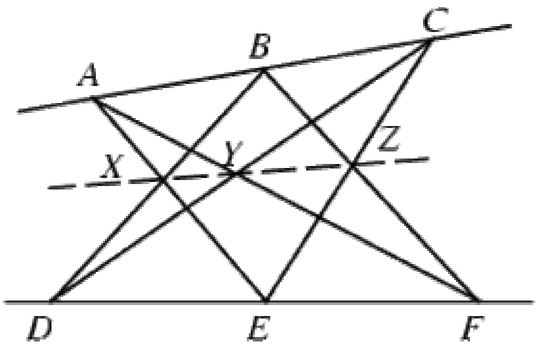

Fig. 9-A

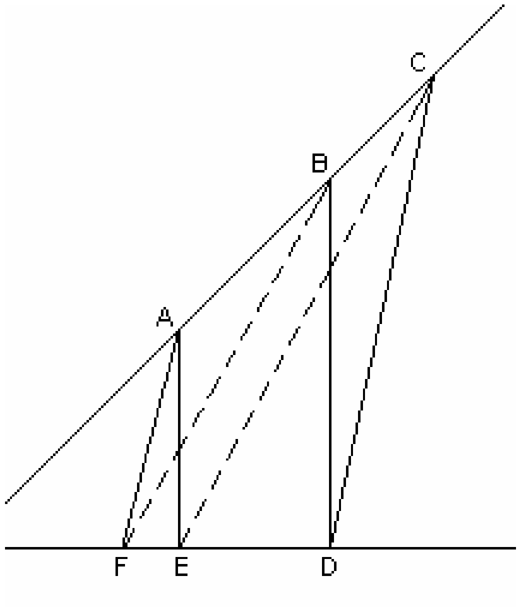

Fig. 9-B

Observe na fig. 9-A o hexágono AECDBF. Podemos tornar o plano afim, fazendo XY a reta no infinito. Podemos mostrar que Z está nessa reta, ou seja, AE // BD, AF // CD $\Rightarrow$ BF // CE (fig. 9-B).

7 Teorema de Pascal – O Hexagrama Místico

Num hexágono inscrito em uma cônica, os pares de lados opostos se interceptam em 3 pontos colineares.

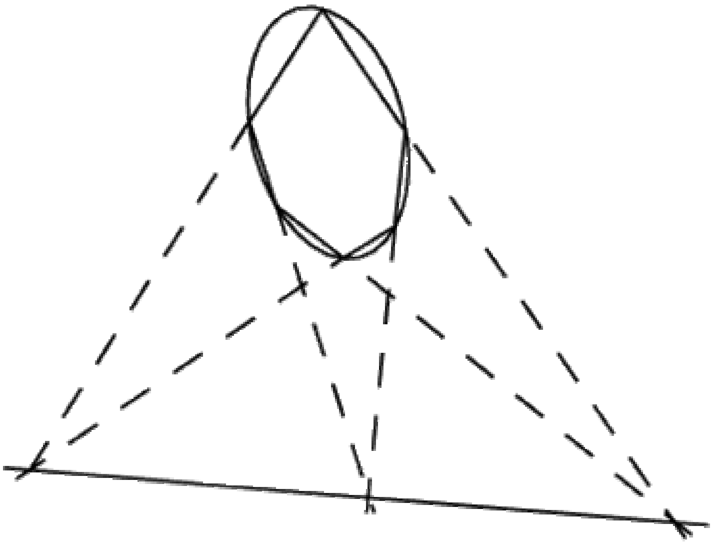

Fig. 10

Considerando que um par de retas é uma cônica degenerada, podemos dizer que o teorema de Pascal é uma generalização do teorema de Pappus.

Vale a recíproca, conhecida como o **Teorema de Braikenridge-Maclaurin:** *Se os 3 pares de lados opostos de um hexágono se encontram em 3 pontos colineares, então os 6 vértices pertencem a uma cônica, que pode degenerar em um par de retas.*

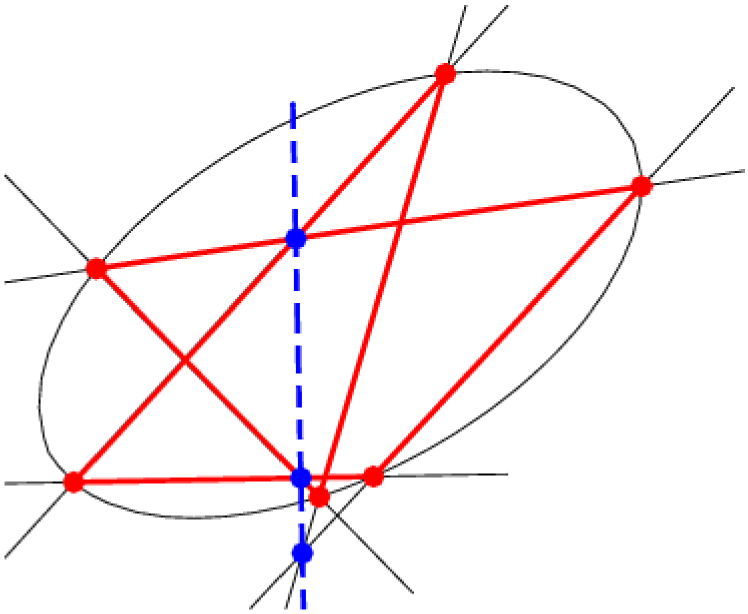

Fig. 11

8 Conceitos primitivos

Num desenvolvimento lógico de geometria, cada definição de uma entidade ou relação envolve outras entidades ou relações; portanto algumas entidades e relações, os **conceitos primitivos**, precisam ficar indefinidos. Similarmente, a prova de cada proposição usa outras proposições; portanto algumas proposições, os **axiomas**, precisam ficar sem prova. Na prática, os conceitos primitivos deveriam ter algum significado intuitivo, alguma interpretação na qual vê-se que os axiomas são verdadeiros; de outra forma, estaríamos num jogo sem sentido.

Vamos trabalhar com ponto, reta e **incidência**; sendo que os dois primeiros são como na geometria euclidiana.

Um ponto e uma reta podem ou não ser incidentes. Quando são, dizemos que o ponto pertence à reta ou que a reta contém o ponto ou passa por ele. Uma reta passando por dois pontos é chamada sua **ligação** (reta suporte), e um ponto que pertence a duas retas é chamado de sua interseção.

Os dois processos de ligação e interseção, que emergem da relação de incidência, de certa forma se assemelham aos processos de adição e multiplicação em álgebra e são às vezes denotados pelo mesmo simbolismo. Denotamos a interseção de AB e CD por $AB \cdot CD$ e a ligação de $a \cdot b$ e $c \cdot d$ por $(a \cdot b)(c \cdot d)$.

9 Os Axiomas de Incidência

A1. Existe um ponto e uma reta que não se interceptam.

A2. Toda reta é incidente com pelo menos três pontos distintos.

A3. Dois pontos distintos quaisquer são incidentes com uma única reta.

A4. Quaisquer duas retas são incidentes com ao menos um ponto.

(Segue que quaisquer duas retas distintas são incidentes com um único ponto.)

A5. Se 3 retas PP', QQ', RR' são todas distintas e incidentes com 1 ponto, então os 3 pontos QR · Q'R', RP · R'P', PQ · P'Q' são todos incidentes com 1 reta.

Estamos admitindo A5, mas existem geometrias "não Desarguesianas" que satisfazem A1-A4 sem satisfazer A5. Em outros sistemas axiomáticos, A5 é colocado em conjunto com o teorema de Pappus, para criar uma álgebra de pontos. Dependendo dos objetivos, a multiplicação pode ser comutativa ou não, como no caso do conjunto $\mathbb{H}$ dos quatérnions.

Vamos provar a recíproca. *Se dois triângulos têm lados correspondentes interceptando em pontos colineares, então as ligações dos vértices correspondentes são concorrentes.*

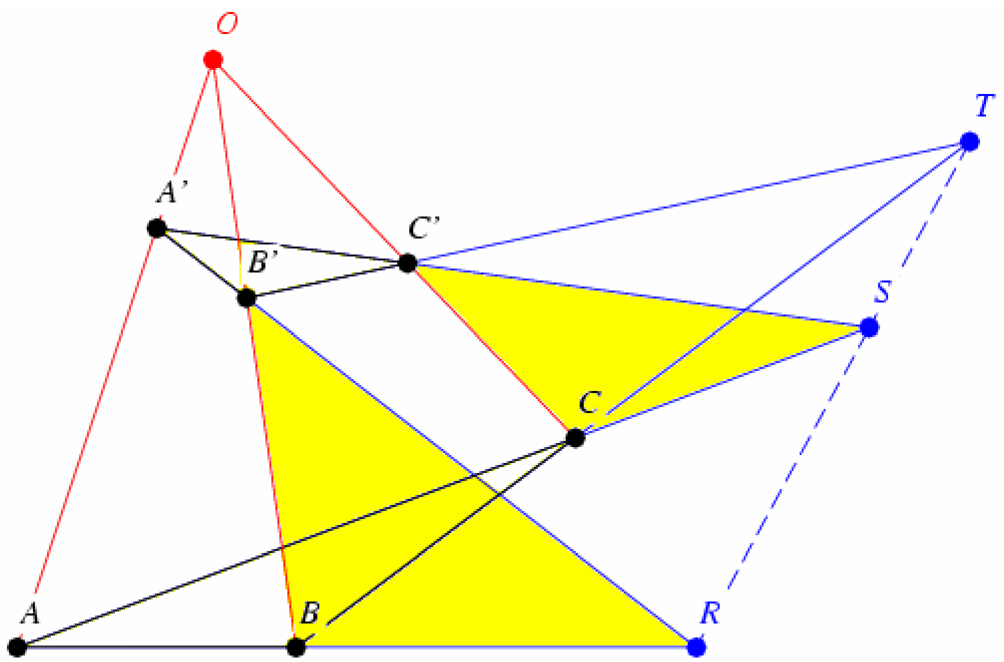

Fig. 12

Temos 2 triângulos ABC e A'B'C', cujos lados correspondentes interceptam em 3 pontos colineares R, S, T. Desejamos provar que a reta AA' passa pelo ponto O = BB' · CC'. Isso é uma conseqüência imediata de A5, aplicado aos triângulos RBB' e SCC', cujas ligações de vértices correspondentes todas passam por T, enquanto as interseções dos lados correspondentes são O, A', A.

10 O Princípio da Dualidade

Toda definição permanece significante e todo teorema permanece verdadeiro quando trocamos "ponto" e "reta", "ligação" e "interseção".

Como o dual de AB · CD é (a · b)(c · d), o dual de A1 é ele próprio, e o dual de A4 é parte de A3. Outras mudanças na maneira de escrever são conseqüências óbvias dessas mudanças fundamentais; por exemplo, o dual de A5 é sua recíproca.

Para estabelecer este princípio, nós temos meramente que observar que *os axiomas implicam seus próprios duais*.

Dual de A1. Existe um ponto e uma reta que não se interceptam.

Dual de A2. Todo ponto é incidente com pelo menos três retas distintas.

Dual de A3. Duas retas distintas quaisquer são incidentes com um único ponto.

Dual de A4. Quaisquer dois pontos são incidentes com ao menos uma reta.

(Segue que quaisquer dois pontos distintos são incidentes com uma única reta.)

Dual de A5. Se 3 pontos p · p', q · q', r · r' são todos distintos e incidentes com 1 reta, então as 3 retas (q · r)(q' · r'), (r · p)(r' · p'), (p · q)(p' · q') são todas incidentes com 1 ponto.

Dado um teorema e a sua prova, podemos imediatamente afirmar o teorema dual; uma prova do último poderia ser escrita mecanicamente, dualizando cada passo na prova do teorema original.

Por exemplo, podemos dualizar o teorema de Pappus, reescrevendo-o na forma: se A, B, C são incidentes com r e D, E, F são incidentes com s, então AE · BD, AF · CD, BF · CE são incidentes com uma reta t. O dual fica: *se as retas a, b, c se interceptam em R e as retas d, e, f se interceptam em S então x, y e z se interceptam num ponto T, onde x = (a · e)(b · d), y = (a · f)(c · d), z = (b · f)(c · e).*

Na fig. abaixo, podemos visualizá-lo quando R e S são pontos no infinito:

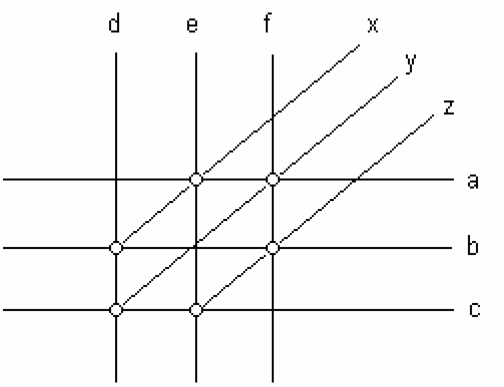

Fig. 13

Da mesma forma, o dual do teorema de Pascal dá origem ao seguinte teorema, conhecido como **Teorema de Brianchon**: *"Num hexágono circunscrito a uma cônica, as três diagonais são concorrentes."*

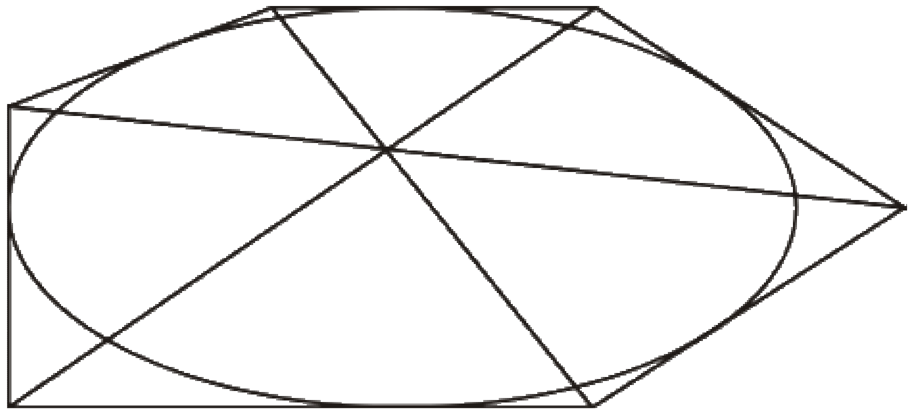

Fig. 14

A definição exata de cônica ultrapassa o caráter fundamental deste texto; mas percebe-se que o dual de ponto incidente com cônica é a reta tangente à cônica. Então podemos dualizar o teorema de Braikenridge-Maclaurin (recíproca de Pascal):

Se as retas $x = (a \cdot b)(d \cdot e)$, $y = (b \cdot c)(e \cdot f)$, $z = (c \cdot d)(f \cdot a)$ *se interceptam em um ponto, então a, b, c, d, e, f são tangentes a uma cônica ou incidentes com dois pontos.*

Concluímos unindo Pappus, Pascal e sua recíproca.

Teorema: Os 6 vértices de um hexágono pertencem a uma cônica, ou a um par de retas, se, e somente se, os 3 pares de lados opostos se interceptam em 3 pontos colineares.

Dual: *As retas a, b, c, d, e, f são tangentes a uma cônica, ou se interceptam em 2 pontos, se, e somente se, as retas* $x = (a \cdot b)(d \cdot e)$, $y = (b \cdot c)(e \cdot f)$, $z = (c \cdot d)(f \cdot a)$ *se interceptam em um ponto.*

11 O Plano Projetivo Real

Definição: Seja V um espaço vetorial. O **espaço projetivo** P(V) de V é o conjunto de subespaços vetoriais unidimensionais de V. Se o espaço vetorial V tem dimensão 3, então P(V) é um espaço projetivo de dimensão 2. Um espaço projetivo unidimensional é chamado **reta projetiva** e um bidimensional é denominado **plano projetivo**.

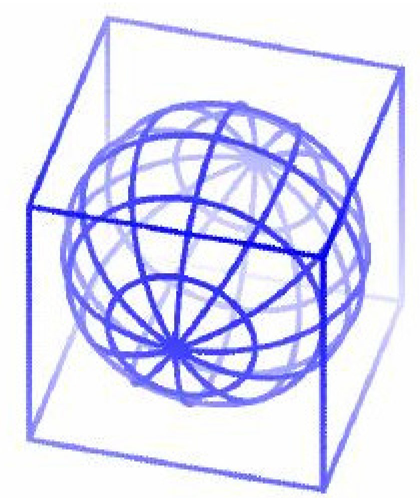

Fig. 15-A

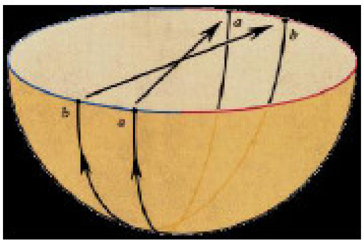

Fig. 15-B

O espaço projetivo de $\mathbb{R}^3$ é o conjunto de todas as retas que passam pela origem. Cada reta intercepta a esfera $S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ em dois pontos $\pm u$, então desse ponto de vista $P(\mathbb{R}^3)$ é S^2 com pontos antipodais identificados. A fig. 15-A ilustra geodésicas se encontrando em um ponto. Cada reta intercepta o hemisfério inferior, então podemos remover igualmente o hemisfério superior e então identificar pontos opostos na esfera equatorial (fig 15-B).

Dessa forma, tratamos $P(\mathbb{R}^3)$ como bidimensional, passando a escrever $P^2(\mathbb{R})$.

Cada subespaço unidimensional de V é o conjunto de múltiplos de um vetor não nulo $v \in V$. Então dizemos que v é um vetor representativo para o ponto $[v] \in P(V)$. Claramente, se $\lambda \neq 0$, então $[\lambda v] = [v]$.

Seja em $V = \mathbb{R}^3$, fixada a base canônica $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$, $v = (a, b, c)$. Se $v \neq 0$, então escrevemos $[v] = [a, b, c]$ e essas são conhecidas como as **coordenadas homogêneas** para um ponto em P(V). Novamente, se $\lambda \neq 0$, então $[\lambda a, \lambda b, \lambda c] = [a, b, c]$.

Sob esse novo ponto de vista, seja $U_0 \subset P(V)$ o subconjunto de pontos com coordenadas homogêneas [x, y, z], tal que $x \neq 0$. Então $[x, y, z] = [1, y/x, z/x]$. Logo $U_0 \cong \mathbb{R}^2$.

Os pontos que retiramos são aqueles para os quais $x = 0$, mas estes são subespaços unidimensionais do subespaço vetorial gerado por **j** e **k**. Ou seja, são da forma [0, 1, z/y], ou da forma [0, 0, 1]. A união de ambos forma a reta no infinito. E também $P(\mathbb{R}^2)$. Logo, $P^2(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^2 \cup P^1(\mathbb{R})$.

Uma reta projetiva é dada por um subespaço bidimensional de $\mathbb{R}^3$, que é definido pela equação $ax + by + cz = 0$. Se b e c não são ambos zero, ele intercepta U_0. Temos $0 = a + b\, y/x + c\, z/x = a + bx' + cy'$, que é uma reta ordinária em $\mathbb{R}^2$ com coordenadas x', y'. A reta projetiva tem um ponto extra [0, c, -b]. Reciprocamente, qualquer reta em $\mathbb{R}^2$ se estende unicamente a uma reta projetiva em $P^2(\mathbb{R})$. Na fig. abaixo, podemos ver que:

- Pontos de $P^2(\mathbb{R})$ são retas em $\mathbb{R}^3$;
- Uma reta de $P^2(\mathbb{R})$ é um plano em $\mathbb{R}^3$;
- Dois pontos definem uma reta em $P^2(\mathbb{R}) \Leftrightarrow$ Duas retas definem um plano em $\mathbb{R}^3$;

- Em $P^2(\mathbb{R})$ duas retas se interceptam em um ponto. $\Leftrightarrow$ Em $\mathbb{R}^3$ dois planos se interceptam em uma reta.

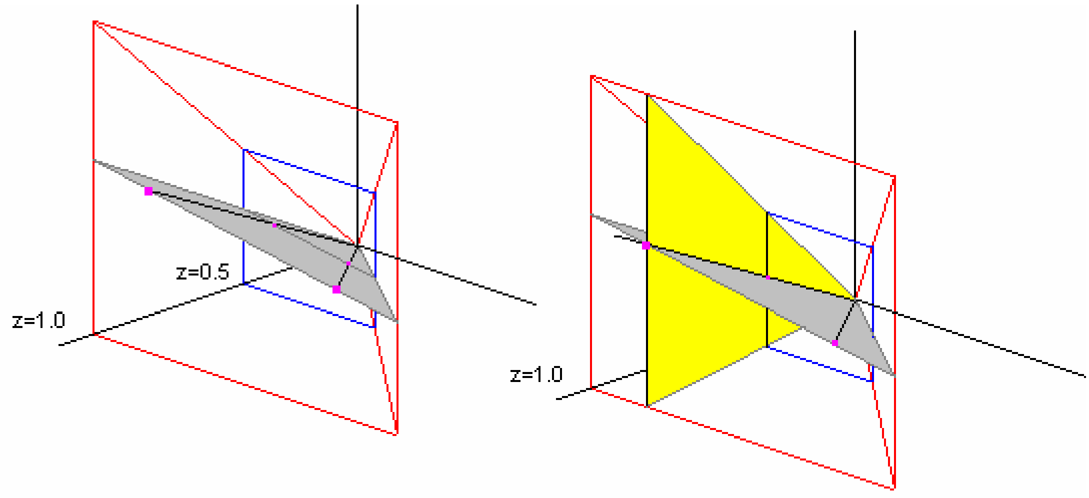

Fig. 16

Inexistência do paralelismo: Duas retas em $\mathbb{R}^2$ são paralelas se estão na forma $\begin{cases} a_1 + bx + cy = 0 \\ a_2 + bx + cy = 0 \end{cases}$, mas o ponto [0, c, -b] pertence às duas, logo está verificado que elas se encontram num único ponto de r_∞, ou seja, $P^1(\mathbb{R})$.

12 Notas Históricas

O fundamento de projeção central é de Jean Victor Poncelet (1788-1867), que lutou na campanha russa de Napoleão (1812) e foi preso pelos russos. Privado de todos os livros, decidiu reconstruir toda a geometria.

Girard Desargues (1593-1662) foi arquiteto na França. Descobriu vários teoremas, especialmente em conexão com cônicas. Seu tratado de 1639 era obscuro, não foi bem recebido na época. Nele, introduziu cerca de 70 neologismos, sobrevivendo apenas o conceito de involução.

O teorema de Blaise Pascal (1623-1662), descoberto quando ele tinha apenas 16 anos, foi publicado com a ajuda de Desargues em 1640. A prova mais elegante é de J. van Yzeren (holandês).

As propriedades de dualidade, perspectividade, conjugação harmônica, remontam à época de Desargues. Mas sua natureza essencialmente projetiva foi compreendida primeiro pelo alemão von Staudt (1798-1867).

> “Apesar de que a idéia de poliedros recíprocos tenha ocorrido nos escritos do italiano medieval Maurolycus (1494-1575), o princípio de dualidade pode ser propriamente devido a Gergonne (1771-1859). Poncelet protestou que não era nada mais que seu método de reciprocação com respeito a uma cônica (polaridade), e Gergonne respondeu que a cônica é irrelevante – a dualidade é intrínseca ao sistema.” (COXETER, 1993, p. 16)

13 Considerações Finais

Este trabalho tinha por objetivo apresentar uma introdução à Geometria Projetiva sem relação com a astronomia, ou teoria de desenhos.

Para isso, relacionamos seu objeto de estudo com o da Geometria Afim.

Introduzimos os conceitos de cônica como projeção de círculo, de reta que desaparece, e de reta no infinito como projeção da última.

Os Teorema de Desargues e Pappus foram demonstrados por simplificação, transportando cada problema para o plano afim.

Foi resolvido o problema da mancha com base em Desargues.

O teorema de Pascal foi apresentado somente como a generalização do teorema de Pappus. Apresentamos sua recíproca.

Foram apresentados os conceitos primitivos e os axiomas de indicência, pelos quais a recíproca de Desargues foi demonstrada.

Exemplificamos o princípio da dualidade com o teorema de Pappus, Pascal e Brianchon.

Definimos espaço e plano projetivo, apresentamos um modelo na esfera unitária, introduzimos equação de reta em coordenadas homogêneas e verificamos a inexistência do paralelismo.

Por fim, foram reunidas algumas notas históricas.

14 Referências Bibliográficas

1. COXETER, H.S.M. **The Real Projective Plane**. Ed. Springer-Verlag: New York. 1993
2. HITCHIN, N. **Projective Geometry**. 2003
3. WEISSTEIN, Eric W. **Perspective Triangles.** Disponível em *MathWorld*. http://mathworld.wolfram.com/PerspectiveTriangles.html
4. MathWorld – A Wolfram Web Resourse. http://www.mathworld.wolfram.com