Álgebra 1 - Lista de Resultados 1 - 2009

(1) Propriedades básicas: o elemento neutro de um anel é único; o inverso (aditivo) de um elemento a em um anel A é único; a unidade de um anel (quando existe) é única.

(2) Se I é ideal de $\mathbb{Z}$ então $I = m\mathbb{Z}$, para algum $m \in \mathbb{Z}$.

(3) Os elementos invertíveis de $\mathbb{Z}_m$ são $\{ \bar{a} \in \mathbb{Z}_m \mid mdc(a, m) = 1 \}$.

(4) $\mathbb{Z}_p$ é corpo se, e somente se, p é primo.

(5) Um subconjunto $S \neq \emptyset$ de um anel A é um subanel de A se, e somente se, $a - b \in S$ e $ab \in S$ para todos $a, b \in S$.

(6) Um subconjunto $I \neq \emptyset$ de um anel A é um ideal de A se, e somente se, para todos $a, b \in I$ temos $a - b \in I$ e para todo $x \in I$ temos $ax \in I$ e $xa \in I$.

(7) Se D é domínio de integridade com unidade 1_D e B é um subanel com unidade 1_B então $1_B = 1_D$.

(8) Os únicos ideais de um corpo F são $\{0\}$ e F.

(9) Os únicos ideais de $M_2(\mathbb{R})$ são $\{0\}$ e $M_2(\mathbb{R})$.

(10) Se I é um ideal de um anel R então $R/I = \{a + I \mid a \in R\}$ é um anel.

(11) Se I e J são ideais de um anel A então são ideais de A:

$$I \cap J, \qquad I + J = \{ x + y \mid x \in I,\ y \in J \} \qquad \text{e} \qquad IJ = \{\sum x_i y_i \mid x_i \in I,\ y_i \in J\}.$$

(12) Se $I = n\mathbb{Z}$ e $J = m\mathbb{Z}$ são ideais de $\mathbb{Z}$ então $I \cap J = d\mathbb{Z}$, $I + J = k\mathbb{Z}$ e $IJ = nm\mathbb{Z}$, onde $d = mdc(n, m)$ e $k = mmc(n, m)$.

(13) Se $\psi : A \to B$ é um homomorfismo de anéis então:

(a) O conjunto $Ker\ \psi = \{a \in A \mid \psi(a) = 0\}$ é um ideal de A
(b) O conjunto $Im\ \psi = \{\psi(a) \mid a \in A\}$ é um subanel de B.
(c) ψ é injetiva se, e somente se, $Ker\ \psi = \{0\}$.
(d) Se J é um ideal de B então $\tilde{J} = \{ a \in A \mid \psi(a) \in J \}$ é um ideal de A.
(e) Se ψ é sobrejetiva e I é ideal de A então $\psi(I)$ é ideal de B.

(14) Sejam A e B anéis com unidades 1_A e 1_B, respectivamente. Se $\varphi : A \to B$ é um homomorfismo sobrejetor então $\varphi(1_A) = 1_B$.

(15) Seja A um anel com unidade 1_A e D é um domínio de integridade. Se $\varphi : A \to D$ é um homomorfismo de anéis e $\varphi(1_A) \neq 0$ então $\varphi(1_A) = 1_D$.

(16) Um ideal I de um anel R é maximal se $I \neq R$ e se houver um ideal J tal que $I \subset J \subset R$ então $J = I$ ou $J = R$.

(a) Os únicos ideais maximais de $\mathbb{Z}$ são $p\mathbb{Z}$, onde p é primo.
(b) Seja A anel comutativo com identidade. Um ideal I de A é maximal se, e somente se, A/I é um corpo.