Derivadas de ordem superior.

Sabemos que se f é diferenciável em X, então existe $f'(x)$, p/ cada $x \in X$. Se f' é de classe C^1 em X, podemos questionar sobre a derivada da função $g: X \to \mathbb{R}$, $g(x) = f'(x)$. Neste caso se $a \in X \cap X'$ e

$$g'(a) = \lim_{x \to a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a}$$ existe então teremos

$$(f')'(a) = g'(a) = f''(a)$$

Podemos continuar este processo e verificarmos se existe $f'''(a), \ldots, f^{(n)}(a) = (f^{(n-1)})'(a)$, $n \in \mathbb{N}$.

Quando $f^{(n)}(x)$ existe para todo $x \in I$ (intervalo) dizemos que f é n vezes ~~diferenciável~~ derivável. Se além disso $f^{(n)}$ é contínua, para todo $x \in I$, dizemos que f é de classe C^n.

Uma função f é de classe C^∞ se f é derivável em qualquer ordem.

Exemplos.

1) $p: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $p(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$, $a_n, \ldots, a_0 \in \mathbb{R}$.

p é C^∞.

2) Seja $n \in \mathbb{N}$ e define $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $f_n(x) = x^n|x|$

Se $x \geq 0 \Rightarrow f_n(x) = x^{n+1}$ Se $x > 0 \Rightarrow f_n^{(n)}(x) = (n+1)x$

Se $x < 0 \Rightarrow f_n(x) = -x^{n+1}$ Se $x < 0 \Rightarrow f_n^{(n)}(x) = -(n+1)x$

$\Rightarrow f_n^{(n+1)}(x) = n+1,\ x > 0,\ f_n^{(n+1)}(x) = -(n+1)\ x < 0$

logo $f_n^{(n+1)}(0)$ não existe. $\Rightarrow f$ não é de Classe C^{n+1}.

Definição Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função n-vezes derivável no ponto $a \in I$. Definimos o polinômio de Taylor de ordem n da função f no ponto $x = a$ por

$$p(h) = a_0 + a_1 h + \dots + a_n h^n$$

tais que $p^{(i)}(0) = f^{(i)}(a)$, $i = 0, 1, \dots, n$.

Obs: Como $p^{(i)}(0) = i!\,a_i = f^{(i)}(a)$ segue que

$$a_i = \frac{f^{(i)}(a)}{i!},\ i = 0, 1, \dots, n.$$

Então o polinômio de Taylor de f no ponto a é

$$p(h) = f(a) + f'(a)\cdot h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n$$

Obs: Defina $r : J \to \mathbb{R}$ por $r(h) = f(a+h) - p(h)$, $J = \{h;\ a+h \in I\}$

Teorema Então $r(0) = r'(0) = \dots = r^{(n)}(0) = 0$.

$r(0) = f(a) - p(0) = 0$, $r'(0) = f'(a) - p'(0) = f'(a) - f'(a) = 0$

Lema Seja $r: I \to \mathbb{R}$ uma função n vezes diferenciável no ponto $0 \in J$. Então $r(0) = r'(0) = \dots = r^{(n)}(0) = 0$ se, e somente se, $\lim_{n\to\infty} \frac{r(h)}{h^n} = 0$ 53

Dem: ?

Teorema (Fórmula infinitesimal de Taylor) Seja $f: I \to \mathbb{R}$ n vezes derivável em $a \in I$. Seja $r: J \to \mathbb{R}$ definida em $J = \{h \in \mathbb{R} ; a+h \in I\}$ por

$$f(a+h) = f(a) + \frac{f'(a)}{1} \cdot h + \frac{f''(a)}{2} \cdot h^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot h^n + r(h)$$

Então $\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h^n} = 0$. Se $p(h)$ é um polinômio de grau $\leq n$ e $r(h) = f(a+h) - p(h)$ é tal que $\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h^n} = 0$ então $p(h)$ é o polinômio de Taylor no ponto a de f ou seja, $p(h) = f(a) + f'(a) \cdot h + \frac{f''(a)}{2} h^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a) \cdot h^n}{n!}$

Dem. $(\Rightarrow)$ Como $r(h) = f(a+h) - p(h)$ e $r(0) = r'(0) = \dots = r^{(n)}(0) = 0$ pelo Lema anterior $\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h^n} = 0$. Agora se $r(h) = f(a+h) - p(h)$ e $\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h^n} = 0$, então pelo Lema anterior $r'(0) = r(0) = \dots = r^{(n)}(0)$. Logo $f^{(i)}(a) = p^{(i)}(0)$, $\forall i = 0, \dots, n$. Portanto $p(h)$ é o polinômio de Taylor de f no ponto a.

Aplicações: $f: I \to \mathbb{R}$, ~~[illegible]~~ $I = (a,b)$, $I = [a,b]$, ...

1) Suponha que $x_0 \in (a,b) = \text{int}\, I$ e que f seja duas vezes diferenciável em (a,b). Se $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) > 0$ (<0) então f tem um mínimo local (máximo local) em x_0.

Dem: $f(x_0+h) - f(x_0) = \frac{f''(a)h^2}{2} + r(h) = h^2\left[f''(a) + \frac{r(h)}{h^2}\right]$

Como $x_0 \in \text{int}\, I$, $\exists\, \delta_1$ tal que se $0<|h|<\delta_1 \Rightarrow x_0+h \in I$.
Como $\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h^2} = 0$, existe $\delta_2 > 0$ tal que se $0<|h|<\delta_2$ então $\frac{r(h)}{h^2} + f''(a) > 0$. Logo $f(x_0+h) - f(x_0) > 0$ $\forall\, 0<|h|<\delta = \min$

(*)

2) Regra de L'Hopital $f, g: I \to \mathbb{R}$ n-vezes diferenciável em $x = c \in I$. Se $g^{(i)}(a) = f^{(i)}(a) = 0$, $i = 0, 1, \dots, n-1$ e $g^{(n)}(a) \neq 0$ então $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n)}(c)}{g^{(n)}(c)}$

Dem.: $f(c+h) = h^n\left[\frac{f^{(n)}(c)}{n!} + \frac{r(h)}{h^n}\right]$ ($\frac{r(h)}{h^n} \to 0$)

$g(a+h) = h^n\left[\frac{g^{(n)}(a)}{n!} + \frac{s(h)}{h^n}\right]$ ($\frac{s(h)}{h^n} \to 0$)

$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim$ ______ $= \dots$

(entrar uma parte importante) pg 54 b)

(*) Obs: Se f é n-vezes derivável com n par em $x = a \in \text{int}\, I$, e $f^{(i)}(a) = 0$, $i = 1, \dots, n-1$ e $f^{(n)}(a) > 0$ (<0) então f em um mínimo local em $x=a$ (máximo local em $x=a$),

pois
$$f(a+h)-f(a)=h^n\left[\frac{f^{(n)}(a)}{n!}+\frac{r(h)}{h^n}\right]$$

Teorema 2: (Fórmula de Taylor com resto de Lagrange)

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ n vezes derivável em (a,b) com $f^{(n-1)}$ contínua em $[a,b]$. Então existe $c\in(a,b)$ tal que
$$f(b)=f(a)+f'(a)(b-a)+\dots+\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1}+\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(b-a)^n$$

Dem: Defina $\varphi:[a,b]\to\mathbb{R}$ por
$$\varphi(x)=f(b)-f(x)-f'(x)(b-x)-\frac{f''(x)(b-x)^2}{2}-\dots-\frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}(b-x)^{n-1}$$
$$-A\cdot\frac{(b-x)^n}{n!},$$ sendo que
$$A=\frac{n!}{(b-a)^n}\left[f(b)-f(a)-f'(a)(b-a)-\dots-\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1}\right]$$
Assim, $\varphi(a)=0=\varphi(b)$ e
$$\varphi'(x)=-\cancel{f'(x)}-\cancel{f''(x)(b-x)}+\cancel{f'(x)}-\frac{f'''(x)}{2}(b-x)^2-\frac{f''(x)}{\cancel{2}}\cancel{2}(b-x)(-1)$$
$$-\frac{f^{(n)}(x)}{(n-1)!}(b-x)^{n-1}-\frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}(n-1)(b-x)^{n-2}-\frac{A\cdot n(b-x)^{n-1}(-1)}{(n-1)!}$$

~~[illegible]~~ Na fórmula de Taylor infinitesimal, se fizermos $h = x - a$ teremos

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

$$+ r(x-a), \ \forall x \in (a-h, a+h)$$

$$= \frac{A - f^{(n)}(x)}{(n-1)!}(b-x)^{n-1}$$

Pelo teorema de Rolle, existe $c \in (a,b)$ tal que $\varphi'(c) = 0$

ou seja $A = f^{(n)}(c)$.