$$S \subset \mathbb{R}^n \,;\, n \geq 4 \tag{1}$$

$$\iint_S \mathrm{d}S = \iint_R \|\varphi_u\| \cdot \|\varphi_v\| \cdot \sin\theta \,\mathrm{d}u \,\mathrm{d}v \tag{2}$$

$$= \iint_R \operatorname{sgn}(\langle \varphi_u, \varphi_v \rangle) \cdot \|\varphi_u\| \cdot \|\varphi_v\| \cdot \sqrt{1 - \frac{\langle \varphi_u, \varphi_v \rangle^2}{\|\varphi_u\|^2 \cdot \|\varphi_v\|^2}} \,\mathrm{d}u \,\mathrm{d}v \tag{3}$$

$$= \iint_R \operatorname{sgn}(\langle \varphi_u, \varphi_v \rangle) \cdot \sqrt{\|\varphi_u\|^2 \cdot \|\varphi_v\|^2 - \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle^2} \,\mathrm{d}u \,\mathrm{d}v \tag{4}$$