Integral de Riemann

$f: X \to \mathbb{R}$ limitada

$\sup f = \sup f(X) = \sup\{f(x), x \in X\}$
$\inf f = \quad \cdots \quad = \inf\{f(x), x \in X\}$

Coleção de Lemas

Lema 1 a) $A, B \subset \mathbb{R}$. Se $\forall x \in A$ e $y \in B$ $x \leq y \Rightarrow$
$\Rightarrow \sup\{A\} \leq \inf\{B\}$

b) $\sup(A) = \inf B \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ dado existe $x \in A$ e $y \in B$ tal que $x - y < \varepsilon$.

Lema 2 $A, B \subset \mathbb{R}$ são limitados então

$A + B = \{x + y, x \in A \text{ e } y \in B\}$ e $cA = \{cx, x \in A\}$, são conjuntos limitados.

Corolário $f, g: X \to \mathbb{R}$ são limitados então $f+g, cf: X \to \mathbb{R}$ são funções limitadas

Lema 3 Seja $f: X \to \mathbb{R}$ ltda. Sejam $m = \inf f$, $M = \sup f$ e $\omega = M - m$. Então $\omega = \sup\{\{|f(x) - f(y)|; x, y \in X\}$

Obs: ω é chamado de oscilação de f em X.

Lema 4 - Sejam $A' \subset A$ e $B' \subset B$ conj. ltdos.
Se $\forall a \in A$ e $\forall b \in B$ existem $a' \in A'$ e $b' \in B'$ tq
$a \leq a'$ e $b' \leq b \Rightarrow \sup A = \sup A'$ e $\inf B = \inf B'$.

Definição Uma partição do intervalo $[a,b]$ é um subconjunto finito de pontos $P = \{t_0, t_1, \dots, t_n\} \subset [a,b]$ tal que $a \in P$ e $b \in P$.

Usaremos que $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$, e $[t_{i-1}, t_i]$ será o i-ésimo intervalo da partição P cujo comprimento é $t_i - t_{i-1}$.

Obs 1 $\sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1}) = b - a$

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ limitada

$m = \inf\{f(x); x \in [a,b]\}$ e $M = \sup\{f(x); x \in [a,b]\}$

Assim, $m \leq f(x) \leq M, \forall x \in P$.

Se $P = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ é uma partição de $[a,b]$ usaremos as notações:

$m_i = \inf\{f(x); x \in [t_{i-1}, t_i]\}$, $M_i = \sup\{f(x), x \in [t_{i-1}, t_i]\}$

e $\omega_i = M_i - m_i$

Obs 2 - Se f é contínua em $[a,b]$ então m_i e M_i são atingidos e existem $x_i, y_i \in [t_{i-1}, t_i]$ tq $\omega_i = |f(y_i) - f(x_i)|$ 55-C

Definição (Soma inferior e Soma superior)

Seja P uma partição de $[a,b]$.

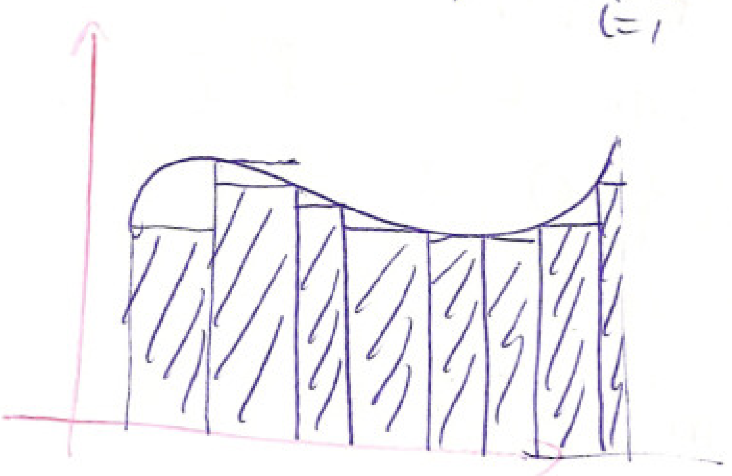
$$s(f,P) = m_1(t_1 - t_0) + \dots + m_n(t_n - t_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n} m_i (t_i - t_{i-1})$$

$$S(f,P) = M_1(t_1 - t_0) + \dots + M_n(t_n - t_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n} M_i (t_i - t_{i-1})$$

Def (*) (outra página)

Obs 3 a) $m(b-a) \leq s(f,P) \leq S(f,P) \leq M(b-a)$

b) $S(f,P) - s(f,P) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i (t_i - t_{i-1})$



Definição A integral inferior e a integral superior da função limitada $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ são definidas por

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup_P s(f,P), \quad \overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \inf_P S(f,P)$$

Def. (*) (Pg anterior)

Dizemos que Q refina a partição P ou que é um refinamento de P quando $P \subset Q$. 55-D

Exemplo: $P = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ e seja $c \in (t_{i-1}, t_i)$. Então $Q = \{t_0, t_1, \dots, c, t_i, \dots, t_n\}$ é um refinamento de P.

Teo1 Seja P uma partição de $[a,b]$. Se Q é um refinamento de P então

$$s(f,P) \leq s(f,Q) \quad e \quad S(f,Q) \leq S(f,P)$$

Dem: Suponha que $Q = P \cup \{c\}$ (depois é feito por ~~indução~~ recorrência) com $c \in (t_{i-1}, t_i)$.

Sejam $m' = \inf\{f(x) ; x \in [t_{i-1}, c]\}$

$m'' = \inf\{f(x) ; x \in [c, t_i]\}$.

Então $m_i \leq m'$ e $m_i \leq m''$. Além disso, $t_i - t_{i-1} = (t_i - c) + (c - t_{i-1})$. Logo

$$s(f,Q) - s(f,P) = \dots = m''(t_i - c) + m'(c - t_{i-1}) - m_j(t_i - t_{i-1})$$

$$= \dots = (m'' - m_j)(t_i - c) + (m' - m_j)(c - t_{i-1}) \geq 0.$$

Fazemos o mesmo p/ $S(f,Q) \leq S(f,P)$.

Corolário 1 Sejam P e Q partições de $[a,b]$. Então $\forall f:[a,b] \to \mathbb{R}$ tem-se $s(f,P) \leq S(f,Q)$

Dem: $P \cup Q$ refina P e $Q \Rightarrow$

$$s(f,P) \leq s(f,P\cup Q) \leq S(f,P\cup Q) \leq S(f,Q)$$

Corolário 2 $f:[a,b] \to \mathbb{R}$, $m \leq f(x) \leq M$, $\forall x \in [a,b]$.

$$\Rightarrow m(b-a) \leq \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq M(b-a)$$

Corolário 3: Seja P_0 uma partição de $[a,b]$. Então $\underline{\int_a^b} f = \sup_P s(f,P)$

$\overline{\int_a^b} f = \inf_P S(f,P)$, com P refinamento de P_0.

DEF: Uma função $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ diz-se integrável (no sentido de Riemann) quando

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

Exemplo (função não integrável no sentido de Riemann)

$f:[a,b] \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = 0$ se $x \in \mathbb{Q}$ e $f(x) = 1$ se $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

Então f não é integrável, pois p/ qualquer partição P de $[a,b]$ teremos $m_j = 0$ e $M_j = 1$ $\forall [t_{i-1}, t_i]$

$\Rightarrow s(f,P) = 0 \neq S(f,P) = b-a$ 55-F

Ex2 Se f é constante, digamos c, então $\forall P$ (part. de $[a,b]$), $m_i = c = M_i \Rightarrow$

$\rightarrow s(f,P) = c(b-a) = S(f,P)$.

Logo $\int_a^b f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx = c(b-a)$.

Teorema (Condições p/ integrabilidade) $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ integrável. São equivalentes:

a) f é integrável

b) $\forall \varepsilon > 0$ existem partições P e Q de $[a,b]$ tais que $S(f,Q) - s(f,P) < \varepsilon$

c) $\forall \varepsilon > 0$, existe $P_0 = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ tal que $S(f,P_0) - s(f,P) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i (t_i - t_{i-1}) < \varepsilon$.

Dem: Sejam A o conj. de todas as somas inferiores e B o conjunto de todas as somas superiores de f. Então pelo corolário 1 do Teo. 1 obtemos que $s \leq S$ $\forall s \in A$ e $S \in B$. Assim, $\sup(A) \leq \inf B$. Se a) é verdadeiro, então $\sup A = \inf B$ então pelo lema 1, $\forall \varepsilon > 0$ existem

$s(f,P) \in A$ e $S(f,Q) \in B$ tais que $S(f,Q) - s(f,P)$ JJ-6
$< \varepsilon$.

Portanto a) $\Rightarrow$ b).

Se b) é verdadeiro, então $P_0 = P \cup Q$ é um ref. de P e Q e pelo Teo 1 $s(f,P) \leq s(f,P_0) \leq S(f,P_0) \leq S(f,Q)$

$\Rightarrow S(f,P_0) - s(f,P_0) < \varepsilon$.

Assim b) $\Rightarrow$ c).

Para concluirmos que c) $\Rightarrow$ a), pelo Lema 1 segue o desejado.

Ex: Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ tq $f(x) = c$, $x \in (a,b]$ e $f(a) = L$. Então f é integrável e $\int_a^b f(x)dx = c(b-a)$

Assume que $c < L$. Seja $P = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ uma partição arbitrária de $[a,b]$.

Então $m_1 = c$, $M_1 = A$ e $m_j = M_j = c$ $\forall j \geq 2$.

Seja $\varepsilon > 0$ dado. Seja P uma partição tal que $t_1 - t_0 < \dfrac{\varepsilon}{A-c}$. Então

$$S(f,P) - s(f,P) = \dots = (A-c)(t_1 - t_0)$$

$$< (A-c)\frac{\varepsilon}{A-c} = \varepsilon$$

Portanto f é integrável e $s(f,P) = c(b-a)$ $\forall$ partição P, donde segue que

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = c(b-a).$$

Como f é integrável $\Rightarrow$ $\int_a^b f(x) = c(b-a)$.

<u>Obs:</u> Pode-se mostrar que $f(x) = c$, $\forall x \in [a,b)$, ou $f(x) = c$, $\forall x \in (a,b)$ o mesmo resultado vale.