Cálculo Numérico – Trabalho Prático 2

Vinícius Claudino Ferraz – 19/11/2007

Problema

Uma geladeira é vendida a prazo em 12 pagamentos mensais, iniciando um mês após a compra, com prestações iguais de R$ 180,00. Ou a vista por R$ 900,00. Qual é a taxa de juros praticada pela loja?

Modelagem Matemática

Para resolver problemas de **Matemática Financeira**, muitas vezes é necessário saber o Valor Presente (VP) de um capital. Isso é feito pela fórmula básica de montante:

$$M = C(1+i)^t \Rightarrow VP = \frac{M}{(1+i)^t}$$, onde C é capital, i é taxa e t é tempo.

No caso de vários instantes diferentes, somam-se os VP's. Suponhamos vários salários de valor R, do próximo mês ao mês n.

$$VP = \frac{R}{1+i} + \frac{R}{(1+i)^2} + \ldots + \frac{R}{(1+i)^n}$$

Colocando R em evidência, temos uma soma de termos de progressão geométrica, que pode ser simplificada para $VP = R\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n i}$ (*).

Repare que nessa **seqüência uniforme de capitais**, podemos isolar R e n, mas não podemos determinar a taxa facilmente.

$$R = VP\frac{(1+i)^n i}{(1+i)^n - 1}; \qquad n = \frac{\ln R - \ln(R - VP \cdot i)}{\ln(1+i)}$$

De forma mais geral, temos um fluxo programado de capitais não uniforme (de diferentes valores). Nossa tarefa é determinar a taxa.

Teorema

Sejam n ∈ ℕ, $R_i \geq 0$, VP > 0. Se $\sum_{i=1}^{n} R_i > VP$, então a equação

$VP = \frac{R_1}{1+i} + \frac{R_2}{(1+i)^2} + ... + \frac{R_n}{(1+i)^n}$ (**) possui solução única para i ≥ 0.

Demonstração

Seja f : [0, ∞) → ℝ; $f(x) = \sum_{i=1}^{n} R_i x^i - VP$

$f'(x) = nR_n x^{n-1} + ... + 2R_2 x + R_1$. Logo f(x) é crescente para x > 0.

$f(0) = -VP < 0;$ $f(1) = \sum_{i=1}^{n} R_i - VP > 0$, por hipótese.

Pelo Teorema do Valor Médio, existe uma única raiz x_0 de f(x) = 0 no intervalo 0 < x < 1.

Mas a mudança de variável $x = \frac{1}{1+i}$ faz (**) ser equivalente a f(x) = 0

$0 < x_0 < 1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{1+i_0} < 1 \Rightarrow i_0 > 0$, como queríamos demonstrar.

O Software

O usuário informará VP, n e os R_i's e o sistema resolverá f(x) = 0 pelo método da bisseção e resgatará a taxa i.

O método da bisseção foi escolhido com base na comparação do livro-texto feita nas Tabelas 6.1 a 6.5, páginas 283 e 284.

Listagem (Turbo C da Borland)

```
#include <math.h>

typedef float Vetor[101];

int n;
Vetor R;
float VP;

float f(float x) {
  float soma = 0, potencia = 1;
  int i;
  for (i = 1; i <= n; i++) {
    potencia = potencia * x;
    soma = soma + R[i] * potencia;
  }
  return (soma - VP);
}

void Bissecao(float a, float b, float Toler, int IterMax, float
*Raiz, int *Iter, int *Erro) {
  float x, Fx, Fa, Fb, DeltaX;
  Fa = f(a); Fb = f(b);
  if (Fa * Fb > 0) {
    printf("Funcao nao muda de sinal nos extremos do intervalo
dado");
    *Erro = 1;
    return;
  }
  DeltaX = fabs(b - a)/2; *Iter = 0;
  printf("Iter      a               b               x
Fx           DeltaX\n");
  for (;;) {
    (*Iter)++; x = (a + b)/2;
    Fx = f(x);
    printf("%2d  %13.10f  %13.10f  %13.10f  %13.10f  %13.10f\n",
*Iter, a, b, x, Fx, DeltaX);
    if ((DeltaX < Toler) && (fabs(Fx) < Toler) || (*Iter >=
IterMax))
      break;
    if (Fa * Fx > 0) {
      a = x; Fa = Fx;
    }
    else b = x;
    DeltaX = DeltaX/2;
  }
  *Raiz = x;
  if ((DeltaX < Toler) && (fabs(Fx) < Toler))
    *Erro = 0;
```

```
  else *Erro = 1;
}

void main() {
  int i, Iter, Erro;
  float Toler, IterMax, Raiz;

  clrscr();
  printf("Digite Toler: ");
  scanf("%f", &Toler);
  printf("Digite IterMax: ");
  scanf("%f", &IterMax);
  printf("Digite VP: ");
  scanf("%f", &VP);
  if (VP <= 0) {
    printf("Valor nao positivo\n");
    getch();
    return;
  }
  printf("Digite n (1 a 100): ");
  scanf("%d", &n);
  if ((n < 1) || (n > 100)) return;

  for (i = 1; i <= n; i++) {
    printf("Digite R[%d]: ", i);
    scanf("%f", &R[i]);
    if (R[i] < 0) {
      printf("Valor negativo\n");
      getch();
      return;
    }
  }

  Bissecao(0, 1, Toler, IterMax, &Raiz, &Iter, &Erro);
  if (!(Erro)) {
    printf("A taxa eh %8.10f %\n", (1/Raiz - 1)*100);
  }

  getch();
}
```

Solução Numérica

Toler = 0.00001; Itermax = 100; VP = 900; n = 12; R_i = 180, para todo i.

Iter	a	b	x	Fx	DeltaX
1	0.0000000000	1.0000000000	0.5000000000	-720.0439453125	0.5000000000
2	0.5000000000	1.0000000000	0.7500000000	-377.1052246094	0.2500000000
3	0.7500000000	1.0000000000	0.8750000000	106.2142333984	0.1250000000

4	0.7500000000	0.8750000000	0.8125000000	-184.5617065430	0.0625000000
5	0.8125000000	0.8750000000	0.8437500000	-54.5411987305	0.0312500000
6	0.8437500000	0.8750000000	0.8593750000	21.5216674805	0.0156250000
7	0.8437500000	0.8593750000	0.8515625000	-17.5247802734	0.0078125000
8	0.8515625000	0.8593750000	0.8554687500	1.7370605469	0.0039062500
9	0.8515625000	0.8554687500	0.8535156250	-7.9583129883	0.0019531250
10	0.8535156250	0.8554687500	0.8544921875	-3.1267700195	0.0009765625
11	0.8544921875	0.8554687500	0.8549804688	-0.6989746094	0.0004882812
12	0.8549804688	0.8554687500	0.8552246094	0.5180664062	0.0002441406
13	0.8549804688	0.8552246094	0.8551025391	-0.0906982422	0.0001220703
14	0.8551025391	0.8552246094	0.8551635742	0.2136230469	0.0000610352
15	0.8551025391	0.8551635742	0.8551330566	0.0614013672	0.0000305176
16	0.8551025391	0.8551330566	0.8551177979	-0.0147094727	0.0000152588
17	0.8551177979	0.8551330566	0.8551254272	0.0234375000	0.0000076294
18	0.8551177979	0.8551254272	0.8551216125	0.0043945312	0.0000038147
19	0.8551177979	0.8551216125	0.8551197052	-0.0050659180	0.0000019073
20	0.8551197052	0.8551216125	0.8551206589	-0.0004272461	0.0000009537
21	0.8551206589	0.8551216125	0.8551211357	0.0020141602	0.0000004768
22	0.8551206589	0.8551211357	0.8551208973	0.0007934570	0.0000002384
23	0.8551206589	0.8551208973	0.8551207781	0.0001831055	0.0000001192
24	0.8551206589	0.8551207781	0.8551207185	0.0000000000	0.0000000596

```
A taxa eh 16.9425530677 %
```

Análise dos resultados

Utilizando a fórmula (*), com i = 0,16942553; n = 12; R = 180, precisamos verificar que VP é aproximadamente igual a 900.

$$VP = 180\frac{(1{,}16942553)^{12} - 1}{(1{,}16942553)^{12}0{,}16942553} = 899{,}99992$$

Referências Bibliográficas

MOITA, Cecília Menon. *Matemática Financeira*. Ed. Atlas. São Paulo. 2002