T Teses de Doutorado

Letras — Backup

Pedagogia — Backup

Psiquiatria — Backup

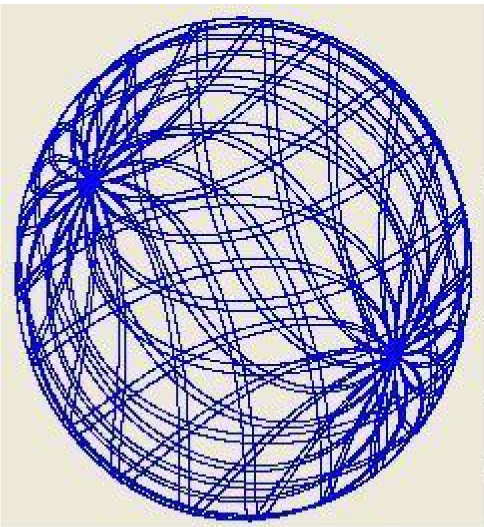
LaTeX *Matemática*

M.2 Ensino Fundamental

Arcos na Circunferência (7ª): AM é lado de triângulo equilátero inscrito, BN é lado de quadrado inscrito. Determinar o ângulo MPN das tangentes traçadas em M e N.

Sistema com inequação de 2º grau (8ª): Seja o sistema $x^2 - x - 2 < 0$, $x^2 + px + q = 0$. Determine p e q, de forma que haja exatamente 2 soluções para x.

M.3 Superior



$$\begin{cases} y = 0 \\ z = x \tan\lambda \\ x^2 + z^2 = R^2 \end{cases} \Rightarrow (1 + \tan^2\lambda)x^2 = R^2 \Rightarrow x = R\cos\lambda \Rightarrow z = R\sin\lambda$$

$$\begin{cases} y = x \tan\mu \\ x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \Rightarrow (1 + \tan^2\mu)x^2 = R^2 - z^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = R\cos\lambda\cos\mu \\ y = R\cos\lambda\sin\mu \end{cases}$$

$$A = (x_1, y_1, z_1) = (\lambda_1, \mu_1), B = (x_1, y_1, z_1) = (\lambda_2, \mu_2)$$

$$d(A,B) = R \arccos \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{R^2} = R \arccos[\cos\lambda_1 \cos\lambda_2 \cos\mu_1 \cos$$

$$r = 1$$

$$= R \arccos[\cos\lambda_1 \cos\lambda_2 \cos(\mu_1 - \mu_2) + \sin\lambda_1 \sin\lambda_2] = R \arccos$$

$$\lambda = 2t$$

$$\mu = t\sqrt{3}$$

$$\underbrace{\iiint \cdots \iiint}_{M} \mathrm{d}\omega = \underbrace{\iint \cdots \iiint}_{\partial M} \omega$$

Equações de Navier-Stokes

Suponha que exista solução. Dado o número real R > 0, determine u, v, w, p(x,y,z,t) — as três componentes da velocidade e a pressão — tais que, fazendo F = G = H = 0, vale o sistema 4 × 4:

$$u_x + v_y + w_z = 0$$

$$R(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) + F = u_t + p_x + u_x u$$

$+ u_y v + u_z w$

$R(v_{xx} + v_{yy} + v_{zz}) + G = v_t + p_y + v_x u + v_y v + v_z w$

$R(w_{xx} + w_{yy} + w_{zz}) + H = w_t + p_z + w_x u + w_y v + w_z w$

Suponha que não exista solução. Aponte F(x,y,z,t), G(x,y,z,t), H(x,y,z,t), U(x,y,z,0), V(x,y,z,0), W(x,y,z,0), todas suaves, satisfazem as desigualdades abaixo, u, v, w "livres de divergência" (satisfazem i), tais que alguma das 3 igualdades seja falsa ∀ u,v,w,p suaves e u,v,w cineticamente limitadas.

$d = \partial_x \ldots \partial_y \ldots \partial_z$

$$\forall d, k; \exists C : \sqrt{dU^2 + dV^2 + dW^2} \leq \frac{C}{\left(1 + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)^K}$$

$$\forall d, k; \exists C : \sqrt{dF^2 + dG^2 + dH^2} \leq \frac{C}{\left(1 + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} + t\right)^K}$$

$$\exists K : \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \left(u^2 + v^2 + w^2\right) dx\, dy\, dz < K$$

∃ F, G, H, U, V, W tal que...

Suponha que é improvável. Seja um conjunto de axiomas T qualquer, contendo números reais, adição, multiplicação, funções reais, derivação parcial. Seja p nossa proposição: ∀ R (...) ∃ u, v, w ; (...)
Demonstre que "p é provável de T" é um absurdo.

Eu simplesmente não consigo acreditar que estao oferecendo um premiozinho e que nenhuma sociedade secreta da humanidade conseguiu resolver isso.

Até agora, supondo w_x, w_y, v_x não nulos, consegui 3 equações diferenciais em w.
Seja $A_i = \{(x,y,z,t,w_i) \mid w_i = f_i(x,y,z,t)\}$, para i = 1,2,3.
Uma função de (x,y) tem 2 dimensões ⇒ dim $A_i = 4$

Pela Álgebra Linear em uma matriz $M_{3 \times 5}$, temos desde 3 hiperfícies paralelas a 3 hiperfícies coincidentes:
dim (A_1 inter A_2 inter A_3) está no conjunto {dim Vazio, 0,1,2,3,4}

RMS ___ Link 1 ___ Link 2

Hipótese Riemanniana

Demonstre que $\zeta(a + bi) = 0 \Rightarrow a = 1/2$, caso suponha ser verdadeiro.

Caso contrário, aponte $a \neq 1/2 ; \zeta(a + bi) = 0$
Caminho da dúvida: construa uma linguagem lógica L, axiomas T, e prove a falsidade da demonstrabilidade.

Mini-Curso

Unsolved

Na verdade, o gato entrou na igreja porque ele se moveu na $(n + 1)^{a}$ dimensão e retornou à n^{a}. Ele e a igreja têm n dimensões — seja n = 2 e a representação num papel: gato = interior do círculo, igreja = interior do retângulo. A igreja é topologicamente fechada em $\mathbb{R}^{n}$, mas não em $\mathbb{R}^{n+p}$. Basta fazer um 8 com o papel — este é o universo no qual o gato e a igreja estão imersos ou submersos. O gato na verdade é uma semi-esfera e a igreja um semi-cubo, mas eles não sabem disso. A verdadeira distância é medida na linha reta em $\mathbb{R}^{n+p}$ que vai do centro do gato ao centro da igreja. Possivelmente zero, como o papel**dobrado**. Físicos confundem as dimensões com as coordenadas do gato.

Imersões

Lipschitz contém Imersões Isométricas = Isometrias contém Translações ∪ Transformações Lineares Ortogonais

Transformação Linear T é ortogonal ⇔ T é isometria.

Def.: Seja $f : U_{aberto} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^6$. f é imersão ⇐ f é diferenciável tal que $\forall\, x \in U$, $f'(x) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^6$ é transformação linear injetiva.

Forma local: Seja a imersão f fortemente diferenciável em $a \in U$. Então ∃ homeomorfismo $h : Z_{aberto} \to (V \times W)_{aberto}$, **[que é carta local inversa de V × W em Z]**, tal que $f(a) \in Z \subset \mathbb{R}^6$, $(a, 0) \in V \times W \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^4$, $h \circ f(x) = (x, 0)$, $\forall\, x \in V$, h é fortemente difenciável em $f(a) \in Z$.

Caso $f \in C^k$, $k \geq 1$, então $\exists\, V_2, W_2, Z_2$ tais que o difeomorfismo $h \in C^k$.

Corolário: $f \in C^k$, $k \geq 1$, $f'(a)$ é injetiva $\exists\, a \in U$, então $f'(x) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^6$ é injetiva, $\forall\, x \in V_{aberto} \subset \mathbb{R}^2$ tal que $a \in V$.

Isso é consequência de:

1º) Seja $f' : U \to L(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^6)$. $f' \in C^0$

2º) O conjunto das transformações lineares injetivas é aberto em $L(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^6)$.

T é injetiva ⇔ ∃ subMatriz $r_{2 \times 2}$ de $T_{6 \times 2}$, tal que $\det r \neq 0$.

Se $r \neq 0$, $\forall\, v \in B = Bola(T, \delta)$, $\exists\, \delta > 0$, então $\forall\, f \in B$, f é injetiva.

Submersões

Def.: $f : U_{aberto} \subset \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ é submersão ⇐ $\forall\, x \in U$, $f'(x) : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ é transformação linear sobrejetiva.

f é funcional linear ⇒ f é sobrejetivo ou f = 0.

f é submersão ⇔ $df(x) \neq 0$, $\forall\, x \in U$ ⇔ $\nabla f(x) \neq 0$, $\forall\, x \in U$.

$\forall\, T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$, $\exists\, \mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{R}^3$ tal que $r = T\,|_{\mathbb{R}^3} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é isomorfismo.

$(a_{ij})_{3 \times 5} = T \Rightarrow (b_{ij})_{3 \times 3} = r = \text{sub } T$, $\det r \neq 0$.

Seja $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{R} = \mathbb{R}^2 \cdot (e_1, e_3) + \mathbb{R} \cdot (e_2)$.

$\forall\, v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $v = (\alpha, \beta)$, tal que $\alpha = (x, 0, z)$, $\beta = (0, y, 0)$.

Forma Local: Seja f submersão fortemente diferenciável em $a \in U$. Se $\exists\, \mathbb{R}^5 = \mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{R}^3$, tal que $a = (a_1, a_2)$, $\partial_2 f(a) = f'(a)\,|_{\mathbb{R}^3}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é isomorfismo, então ∃ V, W, Z abertos, tais

que $a_1 \in V \subset \mathbb{R}^2$, $f(a) \in W \subset \mathbb{R}^3$, $a \in Z \subset \mathbb{R}^5$, e $\exists$ homeomorfismo $h : V \times W \to Z$, **[que é carta local de V × W em Z]**, tal que h é fortemente diferenciável em $(a_1, f(a))$; $f \circ h (x, w) = w$, $\forall (x, w) \in V \times W$.
Caso $f \in C^k$, $\forall x \in U = \text{dom } f$, $k \geq 1$, então $\exists V_2, W_2, Z_2$ tais que o difeomorfismo $h \in$ a C^k.

Corolário 1. Seja $f : U_{aberto} \subset \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$, fortemente diferenciável em $a \in U$. Se $f'(a) : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ é sobrejetiva, então $\exists Z_{aberto}$; $a \in Z \subset \mathbb{R}^5$; tal que $f\mid_Z$ é aplicação aberta $\Leftrightarrow \forall A_{aberto} \subset Z$, $f(A)$ é aberto em $\mathbb{R}^3$.

Corolário 2. $f \in C^k$, $k \geq 1$ é submersão $\Rightarrow$ f é aplicação aberta.

Teorema da Aplicação Implícita. Seja $f : U_{aberto} \subset \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ submersão fortemente diferenciável em $a \in U$; $f(a) = c \in \mathbb{R}^3$. Se $\exists\ \mathbb{R}^5 = \mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{R}^3$, tal que $a = (a_1, a_2)$, $\partial_2 f(a)$ é isomorfismo, então $\exists V, Z$ abertos, tais que $a_1 \in V \subset \mathbb{R}^2$, $a \in Z \subset U$, $\forall x \in V$, $\exists ! \xi(x) \in \mathbb{R}^3$ tal que $(x, \xi(x)) \in Z$, $f(x, \xi(x)) = c$. A aplicação $\xi : V \to \mathbb{R}^3$ é fortemente diferenciável em a_1 com $\xi'(a_1) = -[\partial_2 f(a)]^{-1} \circ [\partial_1 f(a)]$.
Caso $f \in C^k$, $k \geq 1$, então $\xi \in C^k$ com $\forall x \in V$, $\xi'(x) = -[\partial_2 f(x,\xi(x))]^{-1} \circ [\partial_1 f(x,\xi(x))]$.

Exercício 10.5 Seja $f : U \to \mathbb{R}^n$ diferenciável. Dado $X \subset U$, diz-se que $f\mid_X$ é um mergulho de X em $\mathbb{R}^n$ quando:
(i) $f\mid_X$ é um homeomorfismo de X sobre f(X);
(ii) $\forall x \in X$, a derivada $f'(x) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é injetiva.
Seja $g : U \to \mathbb{R}^n$. Prove que se $K \subset U$ é um compacto convexo tal que $f\mid_K$ é um mergulho, então $\exists \delta > 0$ tal que $\forall f, g \in C^1$, se $|g(x) - f(x)| < \delta \wedge |g'(x) - f'(x)| < \delta$, $\forall x \in K$, então $g\mid_K$ é um mergulho.

Exercício 11.5 Toda raiz simples de um polinômio complexo é uma função C^∞ dos coeficientes desse polinômio.

Mais Definições

$p : U_{aberto} \subset R^m \to R$ é diferenciável em $a \in U \Leftarrow \exists (A_1,\ldots A_m) \in R^m; \forall v = (\alpha_1,\ldots,\alpha_m)$

$$\begin{cases} p(a+v) = p(a) + A_1\alpha_1 + \ldots + A_m\alpha_m + r(v) \\ \lim_{v\to 0} \frac{r(v)}{|v|} = 0, a+v \in U \end{cases}$$

$$A_i \equiv \partial_i p(a) \equiv \lim_{t\to 0} \frac{f(a+te_i) - f(a)}{t}$$

Seja $p : U_{aberto} \subset R^m \to R$ diferenciável em $a \in U$. $\begin{cases} dp(a) : R^m \to R \\ dp(a)\cdot v = \frac{\partial p}{\partial v}(a) \end{cases}$

Na base canônica $*, dp : U \to (R^m)^* = L(R^m; R)$

$$d\mathbf{r} = (dx_1,\ldots,dx_m)$$

$$dx_i(a)\cdot v = \alpha_i, \forall a \in R^m$$

$$\nabla p(a) \equiv (\partial_1 p(a),\ldots,\partial_m p(a))$$

$$dp(a)\cdot v = \langle \nabla p(a), d\mathbf{r}\rangle \cdot v, \forall v \in R^m, \forall a \in U$$

$$\langle \nabla p(a), v\rangle = \frac{\partial p}{\partial v}(a) = dp(a)\cdot v$$

$f : U_{aberto} \subset R^m \to R^n$ é diferenciável em $a \in U \Leftarrow \exists T : R^m \to R^n$ tal que $\begin{cases} f(a+v) - f(a) = T\cdot v + r(v) \\ \lim_{v\to 0} \frac{r(v)}{|v|} = 0, a+v \in U \end{cases}$

$$T \equiv f'(a) = Df(a)$$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) \equiv \lim_{t\to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t} \in R^n$$

$$f = (f_1,\ldots,f_n), v = e_j \Rightarrow \partial_j f(a) \equiv (\partial_j f_1,\ldots,\partial_j f_n), 1 \le j \le m$$

$$n = 1 \Rightarrow f'(a) = df(a), m = n = 1 \Rightarrow f'(a) \in R$$

$$Jf(a) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right) = (\partial_j f_i(a))_{n\times m}$$

$$\mathrm{col}_j Jf(a) = \partial_j f(a) = (\partial_j f_1,\ldots,\partial_j f_n) \in R^n$$

$$\mathrm{row}_i Jf(a) = df_i(a) = (\partial_1 f_i,\ldots,\partial_m f_i) \in R^m$$

$$\forall v \in R^m; f'(a)\cdot v = \frac{\partial f}{\partial v}(a) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial v}(a),\ldots,\frac{\partial f_n}{\partial v}(a)\right) = (df_1(a)\cdot v,\ldots,df_n(a)\cdot v) \in R^n$$

$f : U_{aberto} \subset R^m \to R^n$ é fortemente diferenciável em $a \in U \Leftarrow \exists T : R^m \to R^n, \forall x,y \in U$

$$\begin{cases} f(x) - f(y) = T(x-y) + \rho_a(x,y)|x-y| \\ \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, x,y \in B(a,\delta) \Rightarrow |\rho_a(x,y)| < \varepsilon \end{cases}$$

$\Rightarrow$ localmente Lipschitz $\Rightarrow$ localmente C^0

$m = n = 1 \Rightarrow$ secante $\to$ tangente

Sejam $U_{aberto} \subset R^m \xrightarrow{f} f(U) \subset V_{aberto} \subset R^n \xrightarrow{g} R^p$. Se $\exists g'(y)$ tal que $y = f(x) \in V$

Então $\frac{\partial}{\partial x}(g \circ f) = \frac{\partial g}{\partial y} \circ \frac{\partial f}{\partial x}$

f é de Lipschitz $\Leftarrow \exists\ k > 0 ; \forall\ x, y \in$ dom f, $| f(x) - f(y) | \le k\ | x - y |$

f é isometria $\Leftarrow$ f é de Lipschitz com k = 1 f é translação $\Leftarrow$ $f(x) = x + v$

T é linear $\Leftarrow$ $T(x + y) = T(x) + T(y) \wedge T(ax) = a\,T(x)$

f é funcional linear $\Leftarrow$ f é linear $\wedge$ Im $f = \mathbb{R}$

T é ortogonal $\Leftarrow$ $< Ax, Ay > = < x, y >, \forall\, x, y \in \text{dom } T$
T é ortogonal $\Rightarrow$ dois vetores v_i, $v_j \in T$ são ortogonais. $|v_i| = 1$
T é ortogonal $\Rightarrow$ $T^t \cdot T = Id$
T é isomorfismo linear $\Leftrightarrow$ $\det T \neq 0$

Seja $f : U_{aberto} \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ diferenciável. f é fortemente diferenciável em $a \in U \Leftrightarrow f' : U \to L(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n)$ é contínua em a

$f \in C^0 \Leftarrow$ f é contínua em x, $\forall\, x \in \text{dom } f$.
$f \in C^n \Leftarrow$ f é n vezes diferenciável e $d^n f$ é contínua.

f é homeomorfismo $\Leftarrow$ f é bijeção; $f^{-1}, f \in C^0$

f é difeomorfismo $\Leftarrow$ f é bijeção; f^{-1}, f são diferenciáveis.

$f : A \to B$ é sobrejetiva $\Leftarrow$ $\forall\, y \in B, \exists\, x \in A$, tal que $y = f(x)$.

f é injetiva $\Leftarrow$ $[\, f(a) = f(b) \Rightarrow a = b \,]$

A é aberto $\Leftarrow$

f é carta local $\Leftarrow$

$L(A; B) \equiv \{f \in B^A;$ f é linear$\}$
$L(\mathbb{R}^a; \mathbb{R}^b) \cong \mathbb{R}^{ab}$
$L(\mathbb{R}^a; \mathbb{R}) \cong (\mathbb{R}^a)^*$

$Bola(T \in U, R) \equiv \{v \in U;\ 0 \leq |v - T| \leq R)$

Hiperplanos projetivos: P^0 = ponto no infinito.
P^1 = R barrado = $R \cup P^0$
$P^2 = R^2 \cup S^1/2 \cup P^0$, onde S/2 é uma semi-esfera aberta.
$P^3 = R^3 \cup S^2/2 \cup S^1/2 \cup P^0$
$P^n = R^n \cup$ (reunião de i = 1 até n - 1) $S^i/2 \cup P^0$

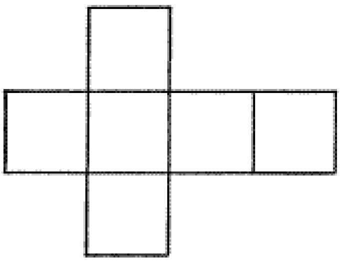
A verdade é que as preocupações matemáticas "do homem" (entendo "o homem rico", pois o pobre tem outras preocupações) levam a humanidade prum buraco cada vez mais fundo.

Se eu fosse físico, me preocuparia com as experimentações, pois já estamos cheios de teorias a la Hawking. Vejamos:
O som é uma onda 1d. A energia se propaga, o ar se move em x, vibrando.
Na corda a onda é 2d. A energia se propaga e os pontos se movem em y.
Numa explosão (e no som real), vibram os eixos x, y e z.
E a luz? A energia se propaga e o fluido cósmico universal se move.
— Ah, mas já provaram que não existe o éter.

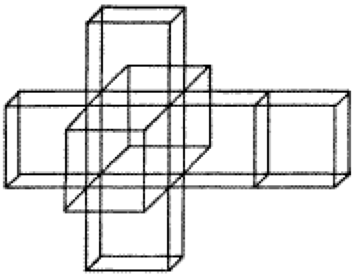
Exercício 1) uma experiência que detecte (0,0,0,w) vibrando. $w = A \cos \omega t$

2) Um detector de presença. Mas não tenha medo de encontrar com uma onda eletromagnética falante!

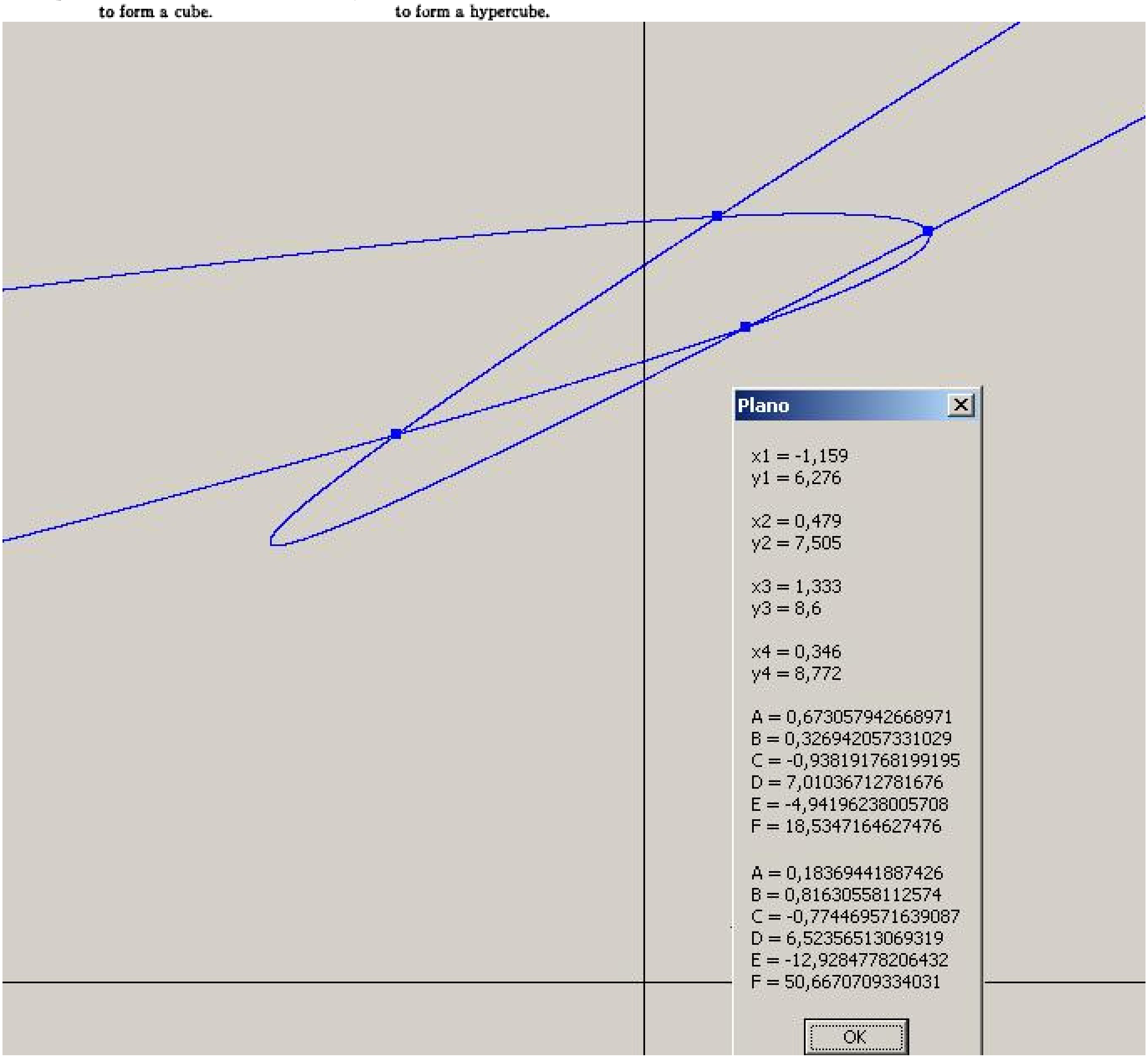
Exercício: Eu sou um fotonzinho. Descreva meu referencial. Qual minha massa? Quais distâncias eu vejo? Quais intervalos de tempo? E as composições de velocidade? Eu estou passando perto de um buraco negro. Eu vou pelo melhor caminho, segundo o princípio da ação mínima. Isso seria uma reta. Como eu vejo minha trajetória? Quais forças percebo? Eu acelero e freio? Como é que vim parar no mesmo ponto? A culpa é do neutrino?



Six squares which can be folded so as to form a cube.



Eight cubes which can be folded so as to form a hypercube.



Comé que é o negócio? **4 pontos definem 2 parábolas conjugadas, se formarem um quadrilátero convexo; caso contrário, nenhuma parábola passa por eles.**

Parte 1

Parte 2

Clique nos 4 pontos

External

Elipse

Hipérbole