Propriedades da integral

Teorema Seja $a < c < b$. Uma função $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é integrável se, e somente se, suas restrições $f|_{[a,c]}$ e $f|_{[c,b]}$ são integráveis. Neste caso

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^d f(x)dx$$

Dem: Sejam A o conjunto das somas inferiores de f no intervalo $[a,c]$ e B o conj. das somas inferiores de f no intervalo $[c,b]$ $(f|_{[c,b]})$. Seja C o conj. das somas inferiores de f em $[a,b]$. Então $A + B = C$.

De fato, se $P_A \in A$ e $P_B \in B$ então $P_A + P_B$ é uma partição de $[a,b]$. Logo $P_A + P_B \in C \Rightarrow A + B \subset C$. Seja P uma partição inferior de f em $[a,b]$. Considere o refinamento de P incluindo o ponto c. Assim $Q = \{a = t_0 < t_1 < \dots < c < \dots < t_n = b\}$ e $Q_A = \{a = t_0 < \dots < t_j = c\}$ e $Q_B = \{c = t_j < t_{j+1} < \dots < t_n = b\}$ são tais que $Q_A + Q_B = Q \Rightarrow Q \in A + B \Rightarrow C \subset A + B$.

Por um lema anterior

$$\sup C = \sup(A + B) = \sup A + \sup B \text{ e}$$

Assim

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \underline{\int_a^c} f(x)dx + \underline{\int_c^b} f(x)dx$$

Repetindo o processo para as somas superiores obtemos que

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^c} f(x)dx + \overline{\int_a^b} f(x)dx$$

Portanto

$$0 \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx - \underset{\geq 0}{\underline{\int_a^b} f(x)dx} = \underbrace{\left(\overline{\int_a^c} f - \underline{\int_a^c} f\right)}_{\geq 0} + \underbrace{\left(\overline{\int_c^b} f - \underline{\int_c^b} f\right)}_{\geq 0}$$

logo segue o desejado (f int $\Leftrightarrow f|_{[a,c]}$ e $f|_{[c,b]}$ int.)

Obs1 Usaremos os seguintes fatos convencionados

a) $\int_a^a f(x)dx = 0$

b) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

Obs 2 Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$. ~~[illegible]~~ Suponha que ~~f~~ $\int_a^c f(x)dx$ e $\int_c^b f(x)dx$ existam (mesmo que $c<a$ ou que $b>c$) Então ~~[illegible]~~ vale a igualdade

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Exemplo (função escada) $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ é uma função escada se existe uma partição $P = \{t_0, \dots, t_n\}$ de $[a,b]$ e números reais $c_1, \dots, c_n$ tais que $f(x_i) = c_i$, $t_{i-1} < x < t_i$
Então f é integrável em $[a,b]$ e

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{t_1} f(x)dx + \dots + \int_{t_{n-1}}^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} c_i(t_i - t_{i-1})$$

Teorema Sejam $f, g: [a,b] \to \mathbb{R}$ integráveis. Então

a) $f+g$ é integrável e $\int_a^b f+g = \int_a^b f + \int_a^b g$

b) $f \cdot g$ é integrável. Se $c \in \mathbb{R}$ então $\int_a^b c f(x) = c \int_a^b f(x)$

c) Se $0 < k < |g|$ em $[a,b)$ então $\frac{f}{g}$ é integrável

d) Se $f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in [a,b]$ então $\int_a^b f \leq \int_a^b g$

e) $|f|$ é integrável e $\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$

Dem: Seja P uma partição arbitrária de $[a,b]$, digamos $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$. Para cada um dos intervalinhos $[t_{i-1}, t_i]$ temos que

$$\begin{cases} \sup\limits_{[t_{i-1},t_i]}(f+g) \leq \sup\limits_{[t_{i-1},t_i]} f + \sup g \quad \text{e} \\ \inf(f+g) \geq \inf f + \inf g \end{cases}$$

Assim
$$S(f+g, P) \leq S(f,P) + S(g,P) \quad (1)$$
$$s(f+g, P) \geq s(f,P) + s(g,P) \quad (2)$$

Como $s(f+g, P) \leq \sup\limits_{P} (s(f+g), P) = \underline{\int_a}(f+g)dx$ segue que $(*)$ $s(f,P) + s(g,P) \leq \underline{\int_a^b}(f+g)dx$, para qualquer partição P de $[a,b]$.

Se P e Q são partições de $[a,b)$, então $P \cup Q$ também o é e por um resultado anterior e $(*)$ segue que

$$\underline{\int_a^b}(f+g) \geq s(f;P\cup Q)+s(g;P\cup Q) \geq s(f,P)+s(g,Q), \forall P, Q.$$

Como $\underline{\int_a^b} f + \underline{\int_a^b} g = \sup_P [s(f,P)] + \sup_Q [s(g,Q)]$

$$= \sup_{P,Q} [s(f,P)+s(g,Q)]$$

segue que

$$\underline{\int_a^b} f + \underline{\int_a^b} g \leq \underline{\int_a^b}(f+g) \leq \overline{\int_a^b}(f+g)$$

Repetindo o argumento para a expressão (1) obtemos que

$$\overline{\int_a^b}(f+g) \leq \overline{\int_a^b} f + \overline{\int_a^b} g.$$

Como f e g são integráveis obtemos o desejado.

2) Como f e g são limitadas podemos encontrar $K>0$ tal que $|f(x)| \leq K$ e $|g(x)| \leq K$, $\forall x \in [a,b]$. Seja P uma partição arbitrária de $[a,b]$, isto é, $P=\{t_0, t_1, \dots, t_n\}$. Para cada $i=0,\dots,n$, denote θ_f^i, θ_g^i e θ_i as oscilações de f, g e fg respectivamente. Então para quaisquer $x,y \in [t_{i-1}, t_i]$ temos que

$$|f(x)g(x)-f(y)g(y)| \leq |f(x)-f(y)||g(y)| + |f(x)||g(x)-g(y)|$$

$$\leq K(\theta_f^i + \theta_g^i)$$

Logo $\sum_{i=1}^n \theta_i(t_i-t_{i-1}) \leq K\left[\sum \theta_f^i(t_i-t_{i-1}) + \sum \theta_g^i(t_i-t_{i-1})\right]$

Como f e g são integráveis, por um teorema anterior segue que f e g são integráveis

Leminha: Seja $f: I \to \mathbb{R}$ limitada em um intervalo I. Então

a) $\sup(kf) = k \sup f$, $\inf(kf) = k \cdot \inf(f)$ se $k>0$

b) $\sup(-f) = -\inf(f)$ e $\inf(-f) = -\sup f$

Dem: a) $k>0$. $kf(x) \leq k \cdot \sup f \Rightarrow \sup(kf) \leq k \sup f$.

$$\sup(f) = \sup\left(\frac{1}{k}(kf)\right) \leq \frac{1}{k}\sup(kf) \Rightarrow k\sup(f) \leq \sup(kf)$$

b) $-f(x) \leq \sup(-f) \Rightarrow f(x) \geq -\sup(-f) \Rightarrow$

$\Rightarrow \inf(f) \geq -\sup(-f) \Rightarrow \sup(-f) \geq -\inf(f)$.

$f(x) \geq \inf(f) \Rightarrow -f(x) \leq -\inf f \Rightarrow \sup(-f) \leq -\inf(f)$

$\Rightarrow \sup(-f) = -\inf(f)$

Dem: Teo

2) $\int_a^b cf = c\int_a^b f$. Pelo demonstrado $c \cdot f$ é integrável.

$$\Rightarrow \int_a^b cf = \underline{\int_a^b} cf = \sup_P(s(cf,P)) = c \cdot \sup_P(s(f,P)) = c\underline{\int_a^b} f$$

$$= c\int_a^b f \quad (f \text{ é int})$$

c) $\frac{f}{g}$ é integrável se $\frac{1}{g}$ for integrável, pois $\frac{f}{g} = f\left(\frac{1}{g}\right)$.

Seja $\varepsilon > 0$ dado.

Seja P uma partição de $[a,b]$, $P = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ tal que definimos θ_g^i a oscilação de g e θ_2^i a oscilação de $\frac{1}{g}$.

no intervalo $[t_{i-1}, t_i]$, tem-se que

$$\sum_{i=1}^{n} \theta_i (t_{i-1} - t_i) < \varepsilon \cdot k^2.$$

Assim, $\forall x, y \in [t_{i-1}, t_i)$ temos

$$\left|\frac{1}{g(y)} - \frac{1}{g(x)}\right| = \frac{|g(x) - g(y)|}{|g(y)g(x)|} \leq \frac{\theta_g^i}{k^2} \Rightarrow \theta_2^i \leq \frac{\theta_g^i}{k^2}.$$

Então

$$\sum_{i=1}^{n} \theta_2^i (t_{i-1} - t_i) \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{\theta_g^i}{k^2} (t_{i-1} - t_i) < \varepsilon.$$

Logo $\frac{1}{g}$ é integrável

d) Se f e g são integráveis $g - f = g + (-f) = g + (-1)f \geq 0$ também o é. Logo basta mostrar que se $h \geq 0$ $\forall x \in [a,b]$ é integrável então $\int_a^b h \geq 0$.

De fato, se $h(x) \geq 0 \Rightarrow \forall P$ partição de $[a,b]$, $m_i, M_i \geq 0$ $\forall i = 1, \dots, n$. Logo $s(f,P) \geq 0$ e $S(f,P) \geq 0$ $\forall P$. Assim

$$\int_a^b h = \underline{\int_a^b} h = \sup_P \left(s(f,P)\right) \geq 0.$$

Portanto, se $h = g - f \Rightarrow \int_a^b h = \int_a^b g - f = \int_a^b g - \int_a^b f \geq 0$

$$\Rightarrow \int_a^b f \leq \int_a^b g$$

e) Como $||f(x)| - |f(y)|| \leq |f(x) - f(y)|$ $\forall x, y \in [a,b]$ então a $\omega(|f|) \leq \omega(f)$. Logo se f é integrável $\Rightarrow |f|$ é integrável $\Rightarrow -|f|$ integrável. Como $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ pelo item d) $-\int_a^b |f(x)| \leq \int_a^b f \leq \int_a^b |f(x)| \Rightarrow |\int_a^b f| \leq \int_a^b |f|$

Obs: 1) Se $f \geq 0$ não implica que $\int_a^b f > 0$. Tome $f = 1$ em $\{x_1, x_2, \ldots x_n\} \subset [a,b]$. Assim $\int_a^b f = 0$.

2) Se $\int_a^b f = 0$ não implica que $f = 0$. Tome $f(x) = \operatorname{sen} x$ e $[a,b] = [0, 2\pi]$

3) Mas se $f \geq 0$ e f é contínua, então $\int_a^b f = 0 \Rightarrow$ $f = 0$ em $[a,b]$

De fato, se $f(x_0) > 0$ p/ algum $x_0 \in (a,b)$ então pela continuidade de f existem $\delta > 0$ e $\alpha > 0$ tal que $f(x) > \alpha$ $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

Assim, $0 = \int_a^b f(x)dx \geq \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)dx \geq \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \alpha\, dx = \alpha(x_0 + \delta - x_0 + \delta)$
$= \alpha 2\delta > 0$,
o que é uma contradição.

Teorema Toda função contínua $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ é integrável.

Dem.: Seja $\varepsilon > 0$ dado. Como $[a,b]$ é compacto $\Rightarrow$ f é unif. contínua $\Rightarrow \exists\, \delta > 0$ tal que $|x - y| < \delta$, $\forall x, y \in [a,b] \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$. Seja P uma partição de $[a,b]$ tal que $(t_i - t_{i-1}) < \delta$.
Como f é contínua em $[t_{i-1}, t_i] \Rightarrow \exists\, x_i, y_i$ tais que

$f(x_i) = m_i$ e $f(y_i) = M_i \Rightarrow \theta_i = M_i - m_i = f(y_i) - f(x_i) <$
$< \frac{\varepsilon}{b-a}$, pois $|x_i - y_i| < |t_i - t_{i-1}| < \delta$.

logo $\sum_{i=1}^{n} \theta_i (t_i - t_{i-1}) < \varepsilon \Rightarrow f$ é integrável.

Teorema: Toda função monótona é integrável

Dem: Suponhamos que f seja não-decrescente. Seja $\varepsilon > 0$ dado
Escolha uma partição P de $[a,b]$ tal que $P = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$
e $t_i - t_{i-1} < \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$. Assim, para cada i, $\theta_f^i = M_i - m_i$
$= f(t_i) - f(t_{i-1})$. logo

$$\sum_{i=1}^{n} \theta_f^i (t_i - t_{i-1}) < \sum_{i=1}^{n} \theta_f^i \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)} = \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)} \sum_{i=1}^{n} f(t_i) - f(t_{i-1})$$

$$= \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)} \cdot (f(b) - f(a)) = \varepsilon$$

Definição: Um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ tem medida nula quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe uma cobertura (finita ou não) enumerável de intervalos abertos I_k tal que $X \subset \bigcup I_k$ e $\sum |I_k| < \varepsilon$

Exemplo: Todo conjunto enumerável $X = \{x_1, x_2, \dots\}$ tem medida nula. Basta tomar $I_k = \left(x_k - \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}, x_k + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}\right)$

Assim $\mathbb{Q}$ tem medida nula.

Teorema Seja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ uma função limitada. Seja $X\subset[a,b]$ o conjunto dos pontos de descontinuidade de f. Se X tem medida nula então f é integrável.

~~**Teorema Fundamental do Cálculo** (ok)~~

~~Seja $f: I\to\mathbb{R}$ contínua no intervalo I. As seguintes afirmações a respeito de uma função~~

Suponha que $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ seja integrável. Para cada $x\in[a,b]$ (por um teorema anterior) f é integrável em $[a,x]$. Assim podemos definir $F:[a,b]\to\mathbb{R}$

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$$

Se $|f(t)|<K$, $\forall t\in[a,b]$ então p/ cada $x,y\in[a,b]$ temos

$$|F(x)-F(y)| = \left|\int_x^y f(t)\,dt\right| \le \left|\int_x^y |f(t)|\right| \le K|x-y|$$

logo F é lipschitziana e portanto uniformemente contínua.

Teorema (T.F.C.[1]) Seja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrável. Se f é contínua em $c\in[a,b]$ então $F:[a,b]\to\mathbb{R}$, $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$

é derivável em $x=c$ e $F'(c)=f(c)$.

Dem.: Como f é contínua em $x=c$, dado $\varepsilon>0$ existe $\delta>0$ tal que se $t\in[a,b]$ e $|t-c|<\delta \Rightarrow |f(t)-f(c)|<\varepsilon$

Assim, se $0<|h|<\delta$ e $c+h\in[a,b]$ então

$$\frac{F(c+h)-F(c)}{h}-f(c)=\frac{1}{h}\int_c^{c+h}(f(t)-f(c))dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|\frac{F(c+h)-F(c)}{h}-f(c)\right| \leq \frac{1}{|h|}\int_c^{c+h}|f(t)-f(t)|dt < \frac{1}{|h|}\,\varepsilon.|h|=\varepsilon$$

logo $F'(c)=f(c)$.

Corolário Se $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ é contínua então existe $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ derivável tal que $F'(x)=f$,

Dem: Tome $F(x)=\int_a^x f(t)dt$.

Definição: Sejam $f,F:[a,b]\to\mathbb{R}$ ~~integrável~~. Uma função $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ é uma primitiva de f se $F'(x)=f(x)$ $\forall x\in[a,b]$

Teorema: Sejam F e G duas primitivas de $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrável. Então $F-G$ é uma constante.
~~Então~~

Dem: Como f é integrável, $F(x)$ e G são contínuas e $(F(x)-G(x))'=F'(x)-G'(x)=f(x)-f(x)=0$ $\forall x\in[a,b]$.

logo (por um teorema anterior) $F(x)-G(x)=cte$.

Teorema (TFC2). Seja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrável. Se f possui uma primitiva $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ então

$$\int_a^b f(t)dt = F(b)-F(a)$$

Obs: Se f é contínua em $[a,b]$ então duas primitivas F e G diferem-se por uma constante. Como $F(x)=\int_a^x f$ é uma primitiva, e $F(a)=0$, segue que $G(a)-F(a)=c$
$\Rightarrow G(a)=c \Rightarrow G(x)=F(x)+c=\int_a^x f(t)dt+G(a)$.

$$\Rightarrow G(b)=\int_a^b f(t)dt+G(a)$$

Obs: Nem toda função integrável possui primitiva

Dem: Teo TFC2. Seja P uma partição de $[a,b]$, $P=\{t_0,t_1,\dots,t_n\}$. Como F é contínua em $[a,b]$ e derivável, para cada $i=1,\dots,n$, existe $\xi_i\in[t_{i-1},t_i]$ tal que $F(t_i)-F(t_{i-1})=F'(\xi_i)(t_i-t_{i-1})$
$=f(\xi_i)(t_i-t_{i-1})$

Assim, $F(b)-F(a)=\sum_{i=1}^n[F(t_{i-1})-F(t_i)]=\sum_{i=1}^n f(\xi_i)(t_i-t_{i-1})$.

Portanto

$s(f,P)\leq F(b)-F(a)\leq S(f,P)$. Como f é integrável e P é arbitrário.

$$\int_a^b f(t)dt = F(b)-F(a)$$

(*)

Obs: A condição sobre a continuidade de f em $[a,b]$ ou sua integrabilidade não pode ser retirada. Exemplo a função $f(x)=\frac{1}{x}$ não é integrável em $[-1,1]$.

Teorema (mudança de variável) Sejam $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ contínua e $g:[c,d]\to\mathbb{R}$ derivável com $g'([c,d])\subset[a,b]$ e $g([c,d])\subset(a,b)$. Então

$$\int_{g(c)}^{g(d)} f(x)\,dx = \int_c^d f(g(t))g'(t)\,dt$$

Dem. f contínua $\Rightarrow \exists\, F:[a,b]\to\mathbb{R}$ tq $\int_{g(c)}^{g(b)} f(t)dt = F(g(b))-F(g(c))$

Pela regra da cadeia, $(F\circ g)'(t) = F'(g(t))\cdot g'(t) = f(g(t))\cdot g'(t)$

logo $F\circ g$ é uma primitiva de $f(g(t))g'(t)$. Portanto

$$\int_c^d f(g(t))g'(t)dt = F(g(b)) - F(g(a)) = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\,dt$$

Teorema (Integração por partes) Se $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ possuem derivadas integráveis então

$$\int_a^b f\cdot g' = f\cdot g\Big|_a^b - \int_a^b f'g$$

Dem. A função $f\cdot g$ é primitiva de $f'g+g'f$

Assim $\int_a^b (f\cdot g)'dx = \int_a^b f\cdot g'dx + \int_a^b f'g\,dx$

$\shortparallel$

$f(b)g(b) - f(a)g(a) =$

Teorema (Valor médio para integral)

Sejam $f, g : [a,b) \to \mathbb{R}$ tais que f é contínua e $g(x)$ integrável, com $g(x) \geq 0$ $\forall x \in [a,b]$.

Então existe $c \in [a,b]$ tal que

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx$$

Dem: Como f é contínua em $[a,b]$, existem $m = \min f$, $M = \max f$ tais que $m \leq f(x) \leq M$, $\forall x \in [a,b]$. $g \geq 0 \Rightarrow mg(x) \leq f(x)g(x) \leq \leq Mg(x) \Rightarrow \int_a^b mg(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M\int_a^b g(x)dx$

Logo existe $d \in [m,M]$ tal que $\int_a^b f(x)g(x) = d \cdot \int_a^b g(x)dx$.

Como f é contínua, pelo teorema do valor intermediário, existe $c \in [a,b]$ tal que $f(c) = d$

Corolário Seja $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ contínua. Existe $c \in [a,b)$ tal que $\int_a^b f(x)dx = f(c) \cdot (b-a)$

Dem: Tome $g = 1$.

Outra dem.: Seja $F(x)$ uma primitiva de f. Logo

$F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)dt$. Pelo T.F.C. $\int_a^b f = F(b) - F(a)$

Pelo T.V.M $\Rightarrow \exists c \in (a,b)$ tq $F(b) - F(a) = F'(c)(b-a) = f(c)(b-a)$