Álgebra 1 - Lista de Resultados 2 - 2009

(I) Ideais

(1) Se I e J são ideais de um anel A então $\frac{I+J}{J} \cong \frac{I}{I \cap J}$.

(2) Seja I um ideal de A e considere J' um ideal do anel quociente A/I. Então existe um ideal J de A tal que $I \subset J$ e $J' = J/I$.

(II) Domínios Euclidianos, D.I.P. e D.F.U

Obs.: De (1) a (8), D denota um domínio euclidiano com norma φ.

(3) Se u é elemento não nulo de D, são equivalentes:

(i) u é unidade de D;

(ii) $\varphi(u) = \varphi(1)$;

(iii) $\varphi(c) = \varphi(uc)$, para algum elemento não nulo $c \in D$.

(4) Consequências:

(i) $\mathcal{U}(D) = \{ \ a \in D^* \mid \varphi(a) = \varphi(1) \ \}$.

(ii) Sejam $a, b \in D^*$. Se $b \notin \mathcal{U}(D)$ então $\varphi(a) < \varphi(ab)$.

(5) (Existência do *mdc***)** Dados $a, b \in D^*$, existe δ um $mdc(a, b)$ e além disso, $\delta = \alpha a + \beta b$, para algum $\alpha, \beta \in D$.

(6) δ e δ' são *mdc* de a e b se, e somente se, $\delta = u.\delta'$, para algum $u \in \mathcal{U}(D)$.

(7) D é D.I.P., ou seja, se I é um ideal de D então existe $a \in D$ tal que $I = (a)$.

(**Obs.:** O gerador do ideal é um elemento $a \in I$ tal que $\varphi(a) \leq \varphi(\lambda)$, $\forall \lambda \in I$).

(8) p é irredutível em D e $a \in D^*$ então $p|a$ ou $mdc(a, p)$ é elemento de $\mathcal{U}(D)$.

(**Def.:** a é *irredutível* em $D \Leftrightarrow a \in D^* \backslash \mathcal{U}(D)$ e se $a = bc$ então $b \in \mathcal{U}(D)$ ou $c \in \mathcal{U}(D)$).

(9) Sejam $a, b \in D^*$. Se p é irredutível em D e $p|ab$ então $p|a$ ou $p|b$.

(10) D é um *D.F.U* (ou seja, o domínio euclidiano D é um domínio de fatoração única. Isto significa que todo elemento não invertível $a \in D^*$ pode ser escrito como um produto de elementos irredutíveis, de maneira única a menos de unidades).

(11) Todo D.I.P. satisfaz a condição ascendente de cadeia para ideais - A.C. C.- (ou seja, para toda cadeia $(a_1) \subset (a_2) \subset \cdots \subset (a_m) \subset \cdots$ de ideais principais existe um inteiro positivo n tal que $(a_i) = (a_n), \forall i \geq n$.

(12) $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{ \ a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z} \ \}$ é domínio euclidiano, onde $\varphi(a + b\sqrt{2}) = |a^2 - 2b^2|$.

(13) $\mathbb{Z}[\sqrt{5}] = \{ \ a + b\sqrt{5} \mid a, b \in \mathbb{Z} \ \}$ não é domínio euclidiano (pois não é D.F.U.).

(14) $\mathbb{Z}[i] = \{ \ a + bi \mid i^2 = -1; \ a, b \in \mathbb{Z} \ \}$ é um domínio euclidiano com a norma $\varphi(a + bi) = a^2 + b^2$. Além disso, $\varphi(\alpha\beta) = \varphi(\alpha)d(\beta)$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z}[i]$ e $\mathcal{U}(\mathbb{Z}[i]) = \{ \ \pm 1, \pm i \ \}$.

(15) Seja $a + bi \in \mathbb{Z}[i]$.

(i) Se $a + bi \in \mathcal{U}(\mathbb{Z}[i])$ então $a - bi \in \mathcal{U}(\mathbb{Z}[i])$.

(ii) Se $a + bi$ é irredutível de $\mathbb{Z}[i]$ então $a - bi$ é irredutível de $\mathbb{Z}[i]$.

(III) Anéis de Polinômios

(16) Se A é um domínio de integridade então:

(i) $A[x]$ é um domínio de integridade.

(ii) Se $f(x), g(x) \in A[x]$ então $\deg(f(x)g(x)) = \deg(f(x)) + \deg(g(x))$.

(17) Se F é um corpo, temos:

(i) Se $f(x), g(x) \in F[x]$ com $g(x) \neq 0$ então existem $q(x), r(x) \in F[x]$ tais que $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$, onde $r(x) = 0$ ou $\deg(r(x)) < \deg(g(x))$ (ou seja, $F[x]$ é um D.E. com norma sendo o grau).

(ii) Se I é um ideal de $F[x]$ então existe $f(x) \in F[x]$ tal que $I = (f(x))$ (ou seja, $F[x]$ é um D.I.P).

(iii) $\mathcal{U}(F[x]) = F^*$, ou seja, os elementos invertíveis em $F[x]$ são os elementos não nulos de F.

(iv) Todo polinômio de $F[x] - \{0\}$ de degau ≥ 1 pode ser escrito de maneira única (a menos de elementos invertíveis) como um produto de irredutíveis (ou seja, $F[x]$ é um D.F.U.).

(18) $\mathbb{Z}[x]$ não é domínio euclidiano (pois não é D.I.P.).

(19) $\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}[x]$, o anel dos polinômios em $\mathbb{Q}[x]$ com termo independente sendo um inteiro, não é domínio euclidiano (pois não satisfaz A.C.C.).

(20) Um polinômio $f(x)$ de $F[x] - \{0\}$ é irredutível se, e somente se, o ideal $(f(x))$ é maximal.