

OTIMIZAÇÃO MULTIOBJETIVO

Um Algoritmo Evolucionário de Pareto de Força

Baseado em Direções de Referência

para Otimização Multiobjetivo e de Muitos Objetivos

Vinícius Claudino Ferraz

A Strength Pareto Evolutionary Algorithm Based on Reference Direction for Multi-objective and Many-objective Optimization

Shouyong Jiang and Shengxiang Yang, *Senior Member, IEEE*

1. Introdução

- Definições: Seja M = o número de objetivos
- MOP = Multiobjective Optimization Problem — $M \leq 3$
- MaOP = Many-objective Optimization Problem — $M \geq 4$
- Objetivo: Solucionar problemas anteriores — Surgem problemas a partir de 4 objetivos
- MOEA = Multiobjective Evolutionary Algorithm — Desempenho cai drasticamente com o número de objetivos
- Também diminui a proporção de soluções não dominadas — acima de 10 objetivos, quase todas as soluções são não dominadas
- Proposta: SPEA/R = Strength Pareto evolutionary algorithm (SPEA) based on reference direction
- Temos como um de nossos objetivos — melhorar a uniformidade das soluções

- Vamos utilizar — um estimador de densidade, um novo esquema de atribuição de aptidão e uma nova estratégia de seleção ambiental
- Seja POS = Pareto-optimal set
- POF = Pareto-optimal front
- Vamos comparar com algoritmos pré-existentes — 2 de MOPs e 5 de MaOPs
- Algoritmo 1 — HypE — Emprega a métrica de hipervolume como um indicador na seleção ambiental; usa Simulação de Monte Carlo para aproximar o hipervolume exato;
- Algoritmo 2 — MOEA/D — visto em aula (decompõe um problema de otimização multiobjetivo em N subproblemas de otimização escalar)
- Algoritmo 3 — NSGA-II — visto em aula (Nondominated Sorting Genetic Algorithm II)
- Algoritmo 4 — PICEA-g — Algoritmo coevolutivo baseado em preferências (PICEA), que co-evolui uma família de preferências do tomador de decisão junto com uma população de soluções candidatas, para otimização de muitos objetivos
- No PICEA-g as preferências ganham mais aptidão se esta for satisfeita por menos soluções, e as soluções ganham aptidão atendendo ao maior número de preferências possível
- Algoritmo 5 — SPEA2 — visto em sala
- A maioria dos MOEAs existentes adota uma estratégia de seleção de convergência em primeiro lugar e diversidade em segundo
- Vamos fazer o contrário — diversidade em primeiro lugar e convergência em segundo

- O SPEA/R herda a vantagem da atribuição de aptidão do SPEA2 na quantificação da diversidade e na convergência das soluções em uma forma compacta
- Vamos substituir o estimador de densidade mais demorado por uma estimativa baseada em direção de referência
- Nossa atribuição de aptidão levará em consideração tanto convergência local quanto global
- O desempenho foi validado — foram feitos testes com problemas adequados
- Como o artigo é extenso, pretendo testar os algoritmos e fazer umas poucas comparações
- Até agora, fiz 1 teste com 20 pontos, mas ainda estou sem saber como interpretar

2. Algoritmo SPEA/R Proposto

Algorithm 1 Framework of SPEA/R

```
1: Input:  $N$  (population size)
2: Output: approximated Pareto-optimal front
3: Generate a diverse reference direction set  $W$ :
    $W := \text{Reference\_Generation}()$ ;
4: Create an initial parent population  $P$ ;
5: while stopping criterion not met do
6:   Apply genetic operators on  $P$  to generate offspring
     population  $\bar{P}$ ;
7:    $Q := P \cup \bar{P}$ ;
8:   Normalize objectives of members in  $Q$ :
      $\bar{Q} := \text{Objective\_Normalization}(Q)$ ;
9:   for each reference direction  $i \in W$  do
10:    Identify members of  $\bar{Q}$  close to  $i$ :
      $E(i) := \text{Associate}(\bar{Q}, W, i)$ ;
11:    Calculate fitness values of members in  $E(i)$ :
      $\text{Fitness\_Assignment}(E(i))$ ;
12:   end for
13:    $P := \text{Environment\_Selection}(\bar{Q}, W)$ ;
14: end while
```

(1) Gerar população inicial

(2) Construção de um conjunto predefinido de direções de referência

(3) Particionar o espaço de objetivos em várias sub-regiões independentes, para busca em direção a toda a POF com uma boa garantia de diversidade populacional no espaço de objetivos

(4) Para cada ciclo geracional, aplicar o operador genético para reproduzir uma população descendente (linha 6)

Algorithm 1 Framework of SPEA/R

```
1: Input:  $N$  (population size)
2: Output: approximated Pareto-optimal front
3: Generate a diverse reference direction set  $W$ :
    $W := \text{Reference\_Generation}()$ ;
4: Create an initial parent population  $P$ ;
5: while stopping criterion not met do
6:   Apply genetic operators on  $P$  to generate offspring
     population  $\bar{P}$ ;
7:    $Q := P \cup \bar{P}$ ;
8:   Normalize objectives of members in  $Q$ :
      $\bar{Q} := \text{Objective\_Normalization}(Q)$ ;
9:   for each reference direction  $i \in W$  do
10:    Identify members of  $\bar{Q}$  close to  $i$ :
       $E(i) := \text{Associate}(\bar{Q}, W, i)$ ;
11:    Calculate fitness values of members in  $E(i)$ :
       $\text{Fitness\_Assignment}(E(i))$ ;
12:   end for
13:    $P := \text{Environment\_Selection}(\bar{Q}, W)$ ;
14: end while
```

(5) União das populações ascendentes e descendentes, fusão das duas populações (linha 7)

(6) Normalização dos objetivos, para tornar o SPEA/R capaz de lidar com problemas com objetivos em escalas diferentes (linha 8)

(7) Cada membro da população combinada está associado a uma direção de referência (ou uma sub-região, linha 10)

(8) Dessa forma, os membros da população combinada são distribuídos em diferentes sub-regiões

Algorithm 1 Framework of SPEA/R

```
1: Input:  $N$  (population size)
2: Output: approximated Pareto-optimal front
3: Generate a diverse reference direction set  $W$ :
    $W := \text{Reference\_Generation}()$ ;
4: Create an initial parent population  $P$ ;
5: while stopping criterion not met do
6:   Apply genetic operators on  $P$  to generate offspring
     population  $\bar{P}$ ;
7:    $Q := P \cup \bar{P}$ ;
8:   Normalize objectives of members in  $Q$ :
      $\bar{Q} := \text{Objective\_Normalization}(Q)$ ;
9:   for each reference direction  $i \in W$  do
10:    Identify members of  $\bar{Q}$  close to  $i$ :
       $E(i) := \text{Associate}(\bar{Q}, W, i)$ ;
11:    Calculate fitness values of members in  $E(i)$ :
       $\text{Fitness\_Assignment}(E(i))$ ;
12:   end for
13:    $P := \text{Environment\_Selection}(\bar{Q}, W)$ ;
14: end while
```

(9) Uma nova técnica de atribuição de aptidão é aplicada em indivíduos que residem em cada sub-região (linha 11)

(10) Uma estratégia de seleção de diversidade primeiro, convergência segundo, é adotada para construir uma nova população de pais para a próxima geração (linha 13)

3. Geração do Conjunto de Direções de Referência

Algorithm 2 Reference_Generation()

```

1: Input:  $K$  (number of layers),  $M$  (number of objectives),
    $N$  (archive size)
2: Output:  $W$  (reference direction set)
3: if  $M < 3$  then
4:   Use Das and Dennis's method [9] to generate  $W$ ;
5: else
6:   Generate extreme points  $\mathbf{B}_i$  for  $i = 1, \dots, M$ , and the
   central point  $\mathbf{C}$ ;
7:   for  $i := 1$  to  $M$  do
8:     for  $r := 1$  to  $K$  do
9:       Calculate all points on the  $r$ -th layer by Eq. (2);
10:    end for
11:  end for
12: end if

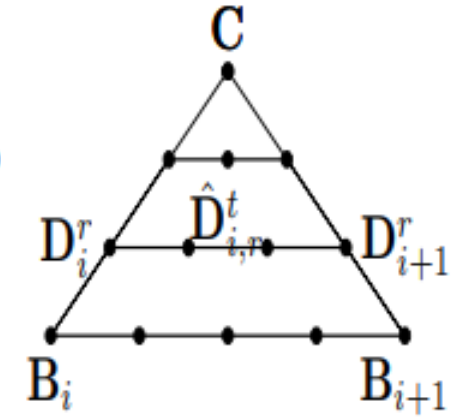
```

$$\mathbf{D}_i^r = \mathbf{C} + \frac{r}{k}(\mathbf{B}_i - \mathbf{C}) \quad (1)$$

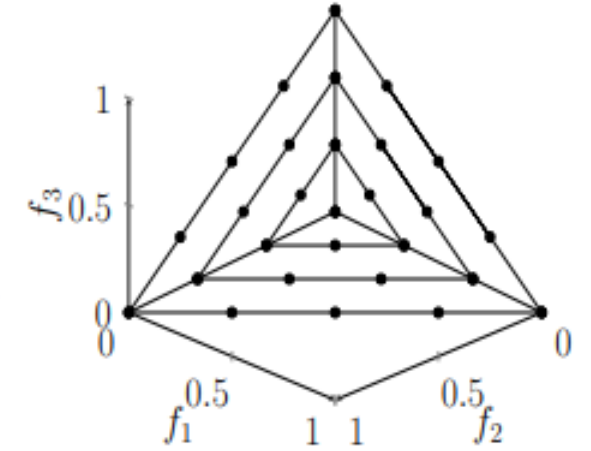
where $r \in \{1, \dots, k\}$.

$$\hat{\mathbf{D}}_{i,r}^t = \mathbf{D}_i^t + \frac{t}{r+1}(\mathbf{D}_{i+1}^r - \mathbf{D}_i^t) \quad (2)$$

where $t \in \{1, \dots, r\}$.



(a)



(b)

Fig. 1: Intersections of reference directions and a unit simplex: (a) reference directions on the subsimplex $\text{Simp}(i)$; (b) reference directions (with 28 directions generated by 3 layers) in three-dimensional space.

(1) Das and Dennis = $(\beta, 1 - \beta)$ — dividem $[0,1]^2$ em p^2 partes iguais

(2) Para problemas de alta dimensão, gera uma grande quantidade de direções de referência = $\binom{p+M-1}{M-1}$, em que p = o número de divisões em cada coordenada

(3) Construa o simplex ou tetraedro $i,j,k, \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$; divida as arestas em k partes; trace paralelas às arestas; divida cada paralela em $r+1$ partes

4. Reprodução Descendente

```
function MatingPool = SP_MatingSelection(PopObj,K)
    N = size(PopObj,1);

    %% The Euclidean distance between each two solutions
    Dis = pdist2(PopObj,PopObj);
    Dis(logical(eye(N))) = inf;

    %% Randomly select one solution for each solution
    MatingPool = zeros(1,N);
    for i = 1 : N
        Candidates = randperm(N,min(K,N));
        [~,nearest] = min(Dis(i,Candidates));
        MatingPool(i) = Candidates(nearest);
    end
end
```

- (1) “Seleção de Acasalamento”
- (2) Seja: População ascendente = Arquivo
- (3) Cada indivíduo dos ascendentes P_1 precisa de um parceiro P_2 para fazer reprodução
- (4) K candidatos diferentes de P_1 são escolhidos aleatoriamente da população ascendente
- (5) O candidato que minimiza a distância euclidiana (no espaço de objetivos) até P_1 é incluído em P_2
- (6) $K = 20$ é recomendado — veremos experimentalmente por quê

```

function MatingPool = SP_MatingSelection(PopObj,K)
    N = size(PopObj,1);

    %% The Euclidean distance between each two solutions
    Dis = pdist2(PopObj,PopObj);
    Dis(logical(eye(N))) = inf;

    %% Randomly select one solution for each solution
    MatingPool = zeros(1,N);
    for i = 1 : N
        Candidates = randperm(N,min(K,N));
        [~,nearest] = min(Dis(i,Candidates));
        MatingPool(i) = Candidates(nearest);
    end
end

```

- (7) Como aprimoramento, após a execução deste algoritmo, podemos utilizar cruzamento binário simulado (SBX) e mutação polinomial, como um dos possíveis “operadores genéticos para gerar população descendente”

5. Normalização dos Objetivos

Algorithm 3 $\text{Objective_Normalization}(Q)$

```
1: Input:  $Q$  (combined population)
2: Output:  $\overline{Q}$  (normalized population)
3: for  $i := 1$  to  $M$  do
4:   Compute the ideal point  $z_{min}^i := \min_{q \in Q} f_i(q)$ ;
5:   Compute the worst point  $z_{max}^i := \max_{q \in Q} f_i(q)$ ;
6: end for
7: for each member  $q \in Q$  do
8:   Computed the normalized objective vector by Eq. (4);
9:   Save the normalized  $q$  to  $\overline{Q}$ ;
10: end for
```

$$\hat{f}_i(q) = \frac{f_i(q) - z_{min}^i}{z_{max}^i - z_{min}^i} \quad (4)$$

6. Associação de Membros

Algorithm 4 Associate(\overline{Q}, W, i)

```

1: Input:  $\overline{Q}$  (combined population),  $W$  (reference direction
   set)
2: Output:  $E(i)$  (individuals in the  $i$ th subregion)
3: for each  $q \in \overline{Q}$  do
4:   for each  $w \in W$  do
5:     Compute the acute angle  $\langle \hat{F}(q), w \rangle$ 
6:   end for
7:   Assign  $\hat{w} = w : \operatorname{argmin}_{w \in W} \langle \hat{F}(q), w \rangle$ ;
8:   Assign  $\theta_q = \langle \hat{F}(q), \hat{w} \rangle$ ;
9:   Save  $q$  in  $E(\hat{w})$ 
10: end for

```

```

function [Ei, Angle] = SP_Associate(PopObj, W)
    Angle = acos(1 - pdist2(PopObj, W, 'cosine'));
    [Angle, Ei] = min(Angle', [], 1);
end

```

For each reference direction $w^i \in W$, $i \in \{1, \dots, H_M^k\}$, we define a subregion, denoted as Ψ^i , in the objective space, as follows:

$$\Psi^i = \{\hat{F}(x) \in \Omega_f | \langle \hat{F}(x), w^i \rangle \leq \langle \hat{F}(x), w^j \rangle\} \quad (5)$$

where $j \in \{1, \dots, H_M^k\}$, $x \in \Omega_x$, $\hat{F}(x)$ is the normalized objective vector of x , and $\langle \hat{F}(x), w^j \rangle$ is the acute angle between vectors $\hat{F}(x)$ and w^j . Using this definition can easily identify a number of members residing in Ψ^i , denoted as $E(i)$, from the normalized population \overline{Q} .

- Seja H_M^k = cardinalidade de direções de referência, k = número de camadas do simplex ou tetraedro

7. Atribuição de Aptidão

Algorithm 5 Fitness_Assignment($E(i)$)

- 1: **Input:** $E(i)$ (individuals in the i th subregion), \overline{Q} (combined population), W (reference direction set)
 - 2: **Output:** FV (fitness values of members in $E(i)$)
 - 3: **for each** $a \in E(i)$ **do**
 - 4: Compute the “local” raw fitness $R(a)$ using Eq. (7);
 - 5: Estimate the density value $D(a)$ using Eq. (8);
 - 6: Compute the “local” fitness value $FV_l(a) := R(a) + D(a)$;
 - 7: Assign the final fitness value $FV(a)$ using Eq. (10);
 - 8: **end for**
-

$$S(a) = C(\{a \in E(i) | a \succeq b\})$$

where $b \in E(i)$ and $C(\cdot)$ denotes the cardinality of a set.

$$R(a) = \sum_{b \in E(i), b \succeq a} S(b) \quad (7)$$

$$\theta_a = \langle \hat{F}(a), w^i \rangle$$

$$D(a) = \frac{\theta_a}{\theta_a + \theta_m} \quad (8)$$

$$\text{where } \theta_m = \max_{1 \leq i \leq H_M^k} \min_{j \neq i} (w^i, w^j)$$

$$FV_l(a) = R(a) + D(a) \quad (9)$$

$$(6) \quad FV(a) = \begin{cases} FV_l(a) & \text{if } |\Psi^i| = 1; \\ FV_l(a) + FV_g(a) & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (10)$$

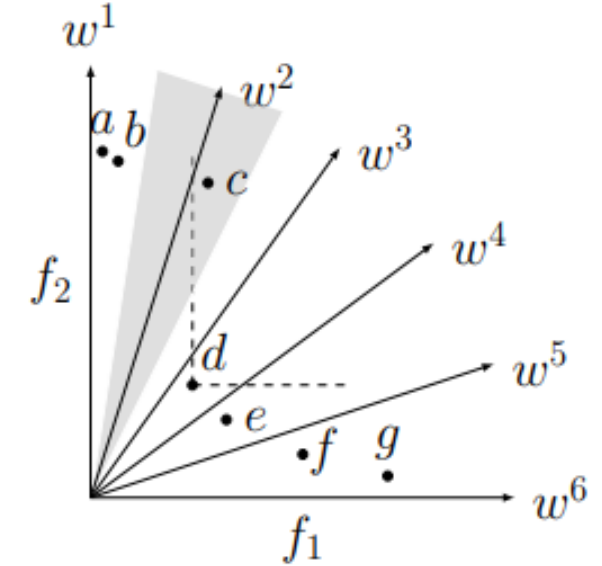


Fig. 2: Influence of decomposed subregions on environmental selection. The grey area represents the subregion occupied by w^2 , i.e., Ψ^2 , and the dashed lines are used to indicate d dominates c .

- $FV_g(a)$ é igual à aptidão bruta do SPEA2
- O objetivo é dar uma chance às regiões que têm um único ponto — as quais outros algoritmos descartam

8. Seleção Ambiental

Algorithm 6 $\text{Environment_Selection}(\overline{Q}, W)$

```
1: Input:  $N$  (population size),  $\overline{Q}$  (combined population),  $W$ 
   (reference direction set)
2: Output:  $P$  (new parent population).
3: Set  $P = \emptyset$ ;
4: while  $C(P) < N$  do
5:   Set  $H = \emptyset$ ;
6:   for each reference direction  $i \in W$  do
7:     if  $E(i) \neq \emptyset$  then
8:       Assign  $\hat{q} = q : \operatorname{argmin}_{q \in E(i)} FV(q)$ ;
9:       Save  $\hat{q}$  in  $H$  and remove it from  $E(i)$ ;
10:    end if
11:   end for
12:   if  $C(P \cup H) \leq N$  then
13:      $P = P \cup H$ ;
14:   else
15:     Fill up  $P$  with the best  $N - C(P)$  individuals in terms
       of fitness from  $H$ ;
16:   end if
17: end while
```

(1) Os melhores N indivíduos que podem equilibrar diversidade e convergência devem ser preservados

(2) Selecionar repetidamente uma matriz H de indivíduos vindos de cada sub-região

(3) Copiar os indivíduos selecionados para a nova população P se o tamanho da população $C(P)$ não for maior do que N (linha 13)

(4) Caso contrário, H é classificado de acordo com a aptidão dos indivíduos (linhas 8-9), e, em seguida, os melhores $N - C(P)$ indivíduos são copiados para P (linha 15)

Algorithm 6 Environment_Selection(\overline{Q}, W)

```
1: Input:  $N$  (population size),  $\overline{Q}$  (combined population),  $W$ 
   (reference direction set)
2: Output:  $P$  (new parent population).
3: Set  $P = \emptyset$ ;
4: while  $C(P) < N$  do
5:   Set  $H = \emptyset$ ;
6:   for each reference direction  $i \in W$  do
7:     if  $E(i) \neq \emptyset$  then
8:       Assign  $\hat{q} = q : \operatorname{argmin}_{q \in E(i)} FV(q)$ ;
9:       Save  $\hat{q}$  in  $H$  and remove it from  $E(i)$ ;
10:    end if
11:  end for
12:  if  $C(P \cup H) \leq N$  then
13:     $P = P \cup H$ ;
14:  else
15:    Fill up  $P$  with the best  $N - C(P)$  individuals in terms
      of fitness from  $H$ ;
16:  end if
17: end while
```

(5) Indivíduos na primeira execução do loop de seleção (linhas 6 – 11) têm a maior diversidade

(6) E aqueles no segundo loop têm a segunda maior diversidade, e assim por diante. Dessa forma, a diversidade da população pode ser bem mantida

(7) A estratégia de seleção pode ser aprimorada pela elaboração da contagem de nicho de cada sub-região ao realizar a seleção de convergência (linha 15) para preencher P

9. Experimentos — Otimização Multiobjetivo

- $M \leq 3$
- Compara o SPEA/R com os dois algoritmos abaixo:
- Algoritmo 6 — MOEA/D-M2M — Otimização evolutiva multiobjetivo baseada em decomposição. Este algoritmo resolve subproblemas de forma colaborativa. Cada subproblema tem sua própria população e recebe esforço computacional a cada geração. Dessa forma, a diversidade da população pode ser mantida.
- Algoritmo 7 — MOEA/D-ACD — Decomposição em escalares. Impõe restrições aos subproblemas. Ajusta de forma adaptativa as restrições usando informações coletadas na pesquisa.
- A comparação utiliza Métricas de Desempenho
- IGD = Distância Geracional Invertida — Calcule a distância de cada ponto p da POF Aproximada até a POF Verdadeira inteira (mínimo sobre V); Divida pela cardinalidade de V ; Compare o IGD dos algoritmos
- HV = Hipervolume abaixo do referencial = $(2, 2, \dots, 2)$; Compare o HV dos algoritmos
- Nestes experimentos, é utilizado o conjunto de testes MOP — 7 fronteiras dos autores H-L Liu, F. Gu, Q. Zhang
- Uma vez que é necessário gerar uma POF Verdadeira, com pontos uniformemente distribuídos

- Resultados — Tabela de Desempenho — SPEA/R ganha de MOEA/D-M2M e MOEA/D-ACD — IGD e HV — MOP1 a MOP7

TABLE I: Mean and stand deviation IGD and HV values on MOP problems

Prob.	IGD			HV		
	SPEA/R	MOEA/D-M2M	MOEA/D-ACD	SPEA/R	MOEA/D-M2M	MOEA/D-ACD
MOP1	8.7805E-3(1.9373E-4)	9.4133E-3(8.4998E-4) [‡]	9.0088E-3(1.6739E-4) [†]	3.6522E+0(2.8854E-4)	3.6514E+0(1.0269E-3) [‡]	3.6520E+0(2.4682E-4) [†]
MOP2	4.2374E-3(3.8551E-5)	8.2719E-3(1.6819E-2) [‡]	4.4633E-3(5.8251E-5) [†]	3.3264E+0(1.0877E-4)	3.3226E+0(1.8367E-2) [‡]	3.3207E+0(3.8048E-4) [‡]
MOP3	4.8235E-3(1.4936E-4)	1.0236E-2(1.9945E-2) [‡]	4.9031E-3(1.5359E-4) [†]	3.2101E+0(1.1819E-4)	3.1825E+0(1.1641E-1) [‡]	3.2084E+0(1.1626E-3) [†]
MOP4	5.8664E-3(1.5107E-3)	6.5855E-3(1.6268E-3) [‡]	7.7672E-3(1.5285E-3) [‡]	3.5128E+0(2.3030E-3)	3.5109E+0(2.9883E-3) [†]	3.5071E+0(3.5365E-3) [‡]
MOP5	1.2053E-2(7.0952E-4)	9.3834E-3(5.1483E-4)	8.6467E-3(2.2862E-4)	3.6457E+0(1.1503E-3)	3.6502E+0(1.4470E-3)	3.6414E+0(5.7291E-3) [†]
MOP6	4.0020E-2(2.6624E-3)	3.8164E-2(1.6047E-3) [†]	2.5999E-2(3.5385E-4)	7.7687E+0(3.9912E-3)	7.7356E+0(1.4549E-2) [‡]	7.7956E+0(1.6302E-3)
MOP7	5.7604E-2(2.3640E-3)	8.7838E-2(2.9091E-2) [‡]	1.0901E-1(3.9980E-3) [‡]	7.3919E+0(3.2270E-3)	7.3659E+0(3.0804E-2) [‡]	7.3730E+0(1.6802E-2) [‡]

[‡] and [†] indicate SPEA/R performs significantly better than and equivalently to the corresponding algorithm, respectively.

- Gráficos das Fronteiras f_1 , f_2 , f_3 , MOP4 a MOP7 — SPEA/R uniforme, MOEA/D-M2M intermediário, MOEA/D/ACD pouco uniforme

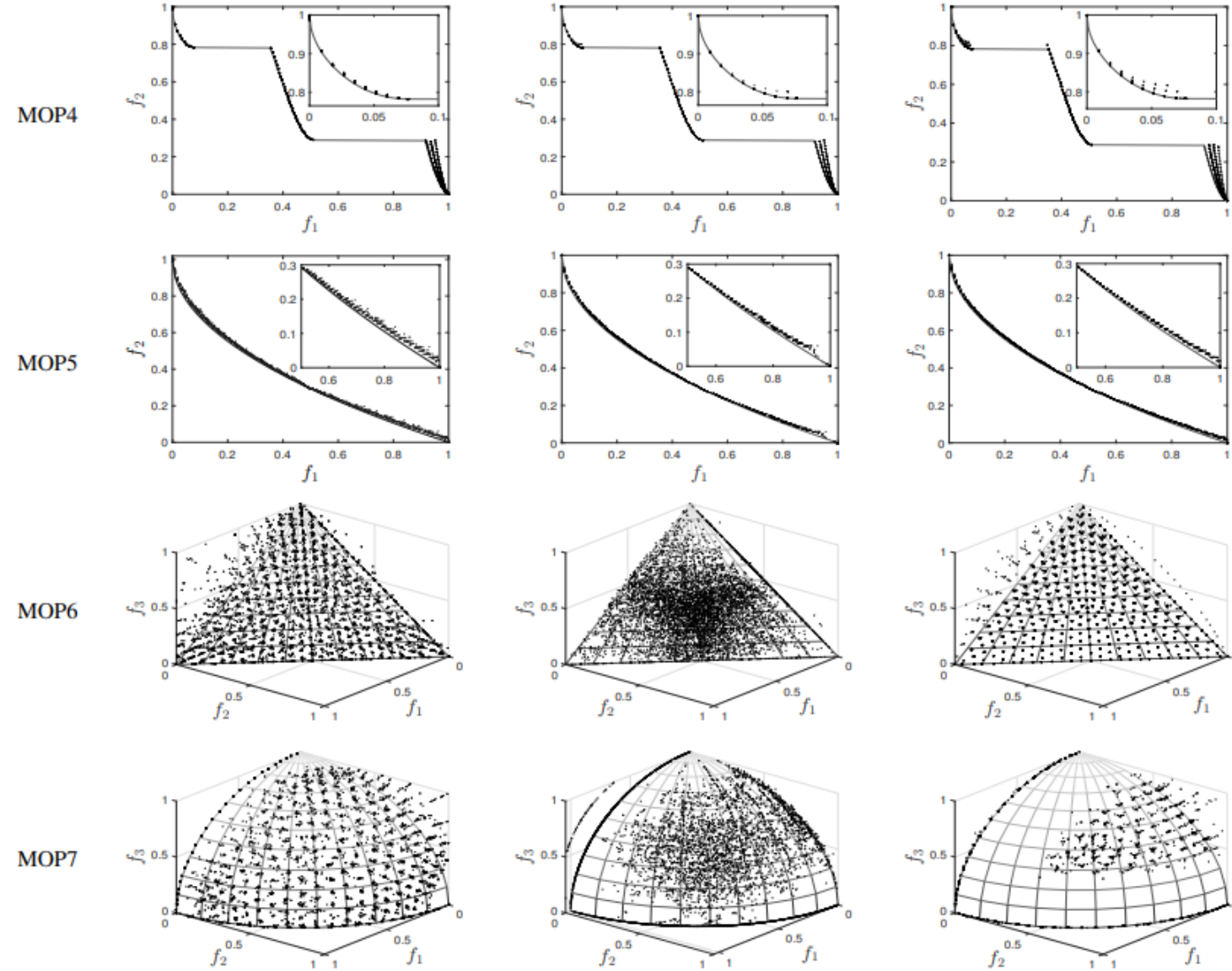


Fig. 3: Approximated POFs for MOP test problems over 30 runs. Left column: SPEA/R; middle column: MOEA/D-M2M; right column: MOEA/D-ACD.

10. Experimentos — Otimização de Muitos Objetivos

- $M \geq 4$
- Nestes experimentos, é utilizado o conjunto de ferramentas WFG = Walking Fish Group — dos autores S. Huband, P. Hingston, L. Barone, L. While
- Compara o SPEA/R com os cinco algoritmos abaixo:
- MOEA/D de novo
- HypE de novo
- Algoritmo 8 — SPEA2+SDE — Introduz um estimador de densidade que considera a distribuição e a convergência de informações dos indivíduos para aumentar a pressão de seleção na otimização de muitos objetivos
- PICEA-g de novo
- Algoritmo 9 — NSGAIII — Versão atualizada do NSGA-II baseada em dominância, em que uma série de pontos de referência fornecidos são usados como uma diretriz para lidar com MaOPs; Mantém a diversidade da população por meio da preservação de nicho
- Cada algoritmo para após 300, 600, 1000, 1500, e 2000 gerações para os casos de 2, 3, 5, 8, 12 objetivos
- Cada algoritmo foi executado 30 vezes independentes em cada instância de teste

• Resultado de Desempenho — SPEA/R ganha em IGD — WFG1 a WFG9 — $M = 2,3,5,8,12$

TABLE III: Mean and standard deviation IGD values obtained by six algorithms for WFG problems

Prob.	M	HypE	PICEA-g	MOEA/D	NSGA-III	SPEA2+SDE	SPEA/R
WFG1	2	8.8317E-1(3.0615E-2) [†]	8.4573E-1(7.7703E-2) [†]	1.0781E+0(4.1187E-2) [‡]	1.0260E+0(5.5762E-2) [‡]	8.2124E-1(3.9450E-2)	9.0085E-1(2.0778E-2)
	3	1.2748E+0(4.3651E-2) [‡]	7.8534E-1(8.9205E-2)	1.2041E+0(3.1711E-2) [‡]	1.3784E+0(4.0202E-2) [‡]	1.2648E+0(2.3129E-2) [‡]	1.1794E+0(2.4394E-2)
	5	1.8676E+0(6.2653E-2) [‡]	5.3311E-1(1.3060E-1)	1.4877E+0(3.0123E-2) [‡]	2.0084E+0(1.0479E-1) [‡]	1.8980E+0(1.6956E-2) [‡]	1.4780E+0(3.5911E-2)
	8	2.5670E+0(6.2118E-2) [‡]	1.4327E+0(1.4821E-1)[†]	2.7002E+0(3.2555E-1) [‡]	2.7334E+0(9.6093E-2) [‡]	2.7327E+0(6.3839E-2) [‡]	1.5879E+0(6.9790E-2)
	12	3.6640E+0(4.1488E-1)	3.2660E+0(6.1898E-1)	4.9319E+0(7.5027E-1) [†]	4.8169E+0(2.8691E-1) [†]	3.6292E+0(8.4763E-2)	4.7653E+0(7.7595E-1)
WFG2	2	1.3134E-1(5.5902E-2) [‡]	8.6982E-2(6.4363E-2) [‡]	6.5756E-1(2.4753E-1) [‡]	9.8399E-2(7.0368E-2) [‡]	8.6488E-2(6.8054E-2) [‡]	5.3339E-2(5.9669E-2)
	3	3.9965E-1(9.4628E-2) [‡]	3.0184E-1(1.3370E-1) [‡]	1.6004E+0(5.1826E-1) [‡]	2.7108E-1(1.9464E-1) [‡]	2.9113E-1(1.3529E-1) [‡]	1.9273E-1(1.4337E-1)
	5	1.0282E+0(3.1081E-1) [‡]	6.9710E-1(3.7222E-1) [‡]	3.4876E+0(9.7999E-1) [‡]	6.1589E-1(5.8567E-1) [‡]	5.2034E-1(1.8118E-1) [‡]	4.1324E-1(1.9367E-1)
	8	1.6356E+0(2.0123E-1) [‡]	1.0825E+0(3.2538E-1) [‡]	6.9688E+0(3.6616E+0) [‡]	2.5990E+0(5.5451E-1) [‡]	1.0398E+0(8.0346E-2) [‡]	9.2918E-1(1.5704E-2)
	12	3.6569E+0(1.0009E+0) [‡]	1.9909E+0(1.6166E-1) [‡]	1.4420E+1(7.0122E+0) [‡]	5.3146E+0(2.1231E+0) [‡]	2.0416E+0(2.9444E-1) [‡]	1.9406E+0(4.8101E-1)
WFG3	2	6.1055E-2(2.1969E-2) [‡]	1.5970E-2(1.0060E-3) [‡]	2.1120E-2(1.0954E-2) [‡]	1.7672E-2(3.9260E-3) [‡]	1.4922E-2(1.3055E-3) [‡]	9.5981E-3(1.4972E-3)
	3	3.6647E-1(7.0170E-2) [‡]	1.2092E-1(8.5003E-3) [‡]	8.4610E-2(2.0841E-2)	1.1033E-1(1.9565E-2) [‡]	1.0415E-1(9.6999E-3) [‡]	1.2706E-1(1.9111E-2)
	5	8.7070E-1(3.4817E-1) [‡]	4.2029E-1(2.6257E-2) [‡]	2.1410E-1(9.2308E-3)	3.9046E-1(5.6144E-2)	6.8446E-1(7.4234E-2) [‡]	4.7455E-1(5.0952E-2)
	8	1.2895E+0(3.8251E-1)	1.0091E+0(1.1303E-1)	8.6567E+0(2.5278E-2) [‡]	2.4852E+0(1.3923E+0) [‡]	2.3216E+0(2.1709E-1) [‡]	1.8096E+0(7.9589E-1)
	12	2.1678E+0(6.4471E-1) [‡]	1.5164E+0(4.9334E-1)	1.3202E+1(5.0194E-2) [‡]	6.1449E+0(1.0145E+0) [‡]	4.3313E+0(2.2150E-1) [‡]	2.2071E+0(8.9759E-1)
WFG4	2	3.1877E-2(6.5145E-3) [‡]	1.6304E-2(1.2351E-3) [‡]	2.7940E-2(6.4054E-3) [‡]	1.2596E-2(3.0353E-3) [‡]	3.0674E-2(6.3801E-3) [‡]	4.0642E-3(6.3104E-4)
	3	5.6412E-1(8.5813E-2) [‡]	2.0043E-1(7.9213E-3) [‡]	6.9098E-2(1.0745E-2) [‡]	6.3007E-2(5.4682E-3) [‡]	2.9956E-1(1.5741E-2) [‡]	2.8864E-2(2.1139E-3)
	5	2.0444E+0(2.2951E-1) [‡]	1.1045E+0(4.7317E-1) [‡]	1.4182E-1(1.4965E-2) [‡]	3.6864E-1(4.4117E-1) [‡]	1.2366E+0(7.4328E-2) [‡]	1.0932E-1(7.3118E-3)
	8	6.0523E+0(1.5295E+0) [‡]	6.6026E+0(7.9339E-1) [‡]	1.4683E+1(1.1304E+0) [‡]	2.3447E+0(8.3237E-1) [‡]	3.7387E+0(2.1384E-1) [‡]	3.0963E-1(4.4228E-2)
	12	1.1022E+1(1.4125E+0) [‡]	1.4136E+1(9.6910E-1) [‡]	2.4085E+1(3.8119E-7) [‡]	9.3126E+0(9.3937E-1) [‡]	7.8294E+0(2.7645E-1) [‡]	5.545E-1(5.8877E-2)
WFG5	2	1.4442E-1(2.9026E-2) [‡]	6.9351E-2(1.8443E-3) [‡]	7.2942E-2(1.6355E-3) [‡]	6.9201E-2(1.9862E-3) [‡]	8.1770E-2(4.0625E-3) [‡]	6.8656E-2(6.0334E-4)
	3	7.9362E-1(1.4324E-1) [‡]	2.1530E-1(6.1536E-3) [‡]	1.0567E-1(4.0651E-3) [‡]	2.1164E-1(1.2089E-2) [‡]	2.8447E-1(1.1878E-2) [‡]	1.0007E-1(2.7774E-3)
	5	2.3647E+0(5.0181E-1) [‡]	9.3128E-1(1.7072E-2) [‡]	1.7300E-1(2.0329E-2) [‡]	3.6011E-1(2.7441E-2) [‡]	1.1152E+0(5.7730E-2) [‡]	1.5221E-1(3.3155E-3)
	8	5.0708E+0(9.3870E-1) [‡]	3.6695E+0(6.6358E-1) [‡]	1.4665E+1(1.6616E-1) [‡]	1.0424E+0(1.2969E+0) [‡]	3.0894E+0(1.6408E-1) [‡]	2.9294E-1(7.8991E-3)
	12	1.1590E+1(3.7303E+0) [‡]	1.1189E+1(6.7757E-1) [‡]	2.3809E+1(3.6910E-2) [‡]	1.1152E+1(1.7458E+0) [‡]	6.8783E+0(3.5983E-1) [‡]	5.9182E-1(5.6574E-2)
WFG6	2	9.5505E-2(2.7439E-2) [‡]	8.7771E-2(1.6443E-2) [‡]	1.2231E-1(2.9457E-2) [‡]	6.2542E-2(8.0865E-3)	8.3074E-2(2.2805E-2) [‡]	8.2235E-2(1.7636E-2)
	3	5.0657E-1(5.9845E-2) [‡]	2.2653E-1(1.1940E-2) [‡]	1.6990E-1(4.3933E-2) [‡]	1.3889E-1(1.6059E-2) [‡]	3.0489E-1(2.5190E-2) [‡]	1.2494E-1(1.8689E-2)
	5	1.7161E+0(1.7421E-1) [‡]	9.3252E-1(2.8199E-2) [‡]	2.4944E-1(5.9006E-2) [‡]	2.5876E-1(1.8224E-2) [‡]	1.1083E+0(4.5895E-2) [‡]	1.9652E-1(2.1632E-2)
	8	3.5742E+0(2.2169E-1) [‡]	2.4527E+0(1.0243E-1) [‡]	1.3441E+1(3.4359E+0) [‡]	3.5306E-1(3.9311E-2) [‡]	2.8712E+0(1.5114E-1) [‡]	3.1442E-1(4.5861E-2)
	12	8.5555E+0(1.2719E+0) [‡]	8.3868E+0(1.5120E+0) [‡]	2.4086E+1(1.0499E-3) [‡]	1.2026E+0(1.4127E+0) [‡]	6.5637E+0(3.4155E-1) [‡]	5.6185E-1(6.4777E-2)
WFG7	2	8.2165E-2(2.8926E-2) [‡]	1.5910E-2(6.6738E-4) [‡]	2.3036E-2(5.5223E-3) [‡]	6.1770E-3(1.2478E-3) [‡]	2.9225E-2(4.7514E-3) [‡]	3.0428E-3(6.4407E-4)
	3	6.6418E-1(9.6773E-2) [‡]	1.9958E-1(6.0806E-3) [‡]	1.0757E-1(6.5050E-2) [‡]	4.5169E-2(5.3488E-3) [‡]	2.6732E-1(1.8452E-2) [‡]	1.7752E-2(2.2178E-3)
	5	2.1347E+0(2.2676E-1) [‡]	9.3521E-1(2.3560E-2) [‡]	1.3512E-1(2.0759E-2) [‡]	1.9524E-1(3.9223E-2) [‡]	1.2314E+0(7.5941E-2) [‡]	7.6146E-2(6.0145E-3)
	8	5.7576E+0(1.2137E+0) [‡]	4.7858E+0(1.3194E+0) [‡]	4.1326E+0(4.8119E+0) [‡]	1.9059E+0(5.2245E-1) [‡]	3.3239E+0(2.3293E-1) [‡]	4.4555E-2(1.4906E-3)
	12	1.3634E+1(2.8675E+0) [‡]	1.1684E+1(1.1888E+0) [‡]	1.8854E+1(7.2573E+0) [‡]	9.0098E+0(1.1672E+0) [‡]	7.2319E+0(2.0432E-1) [‡]	1.2239E+0(1.7913E-1)
WFG8	2	1.1761E-1(1.3492E-2) [‡]	1.7830E-1(8.4903E-3) [‡]	1.9949E-1(7.7770E-2) [‡]	1.0440E-1(4.4972E-3) [‡]	9.6227E-2(7.0488E-3) [‡]	6.5348E-2(8.3518E-3)
	3	6.4260E-1(9.6987E-2) [‡]	3.6302E-1(6.6066E-3) [‡]	2.9721E-1(1.8361E-2) [‡]	2.6280E-1(1.1173E-2) [‡]	3.9859E-1(1.2363E-2) [‡]	1.8791E-1(1.2203E-2)
	5	3.0822E+0(3.6658E-1) [‡]	1.1359E+0(1.5299E-1) [‡]	6.2743E-1(2.4932E-2) [‡]	6.2983E-1(3.4558E-2) [‡]	1.3975E+0(7.1725E-2) [‡]	4.4959E-1(6.3168E-2)
	8	6.6256E+0(6.9786E-1) [‡]	4.8593E+0(6.4988E-1) [‡]	1.4786E+1(5.2920E-1) [‡]	3.9291E+0(8.5793E-1) [‡]	3.6385E+0(1.3014E-1) [‡]	7.7559E-1(1.7947E-1)
	12	1.2621E+1(1.3872E+0) [‡]	1.2125E+1(8.1783E-1) [‡]	2.4081E+1(1.6969E-2) [‡]	9.5723E+0(7.4981E-1) [‡]	7.5282E+0(2.7831E-1) [‡]	25918E+0(1.5246E+0)
WFG9	2	1.1042E-1(2.1126E-1) [‡]	2.5073E-2(2.0117E-3) [‡]	1.1382E-1(9.2790E-2) [‡]	4.1288E-2(3.6557E-2) [‡]	4.6615E-2(4.5168E-2) [‡]	2.3333E-2(1.8028E-3)
	3	8.5309E-1(3.9767E-1) [‡]	2.0280E-1(5.3020E-3) [‡]	3.6735E-1(8.0129E-2) [‡]	2.1455E-1(2.8924E-2) [‡]	2.8436E-1(2.9944E-2) [‡]	1.3565E-1(6.0332E-2)
	5	2.2225E+0(5.9275E-1) [‡]	9.0468E-1(2.3965E-2) [‡]	5.6825E-1(5.1271E-2) [‡]	4.7457E-1(2.0885E-2) [‡]	1.2446E+0(1.0233E-1) [‡]	4.4527E-1(1.0612E-1)
	8	5.6313E+0(2.0539E+0) [‡]	2.3506E+0(1.8201E-1) [‡]	1.4075E+1(3.1523E+0) [‡]	1.4547E+0(7.5551E-1) [‡]	3.2874E+0(2.1696E-1) [‡]	1.0596E+0(2.1459E-1)
	12	1.1425E+1(4.1445E+0) [‡]	9.0759E+0(1.1149E+0) [‡]	2.3886E+1(1.0426E-1) [‡]	7.0250E+0(2.2799E+0) [‡]	6.8976E+0(3.8740E-1) [‡]	1.9587E+0(4.1090E-1)

‡ and † indicate SPEA/R performs significantly better than and equivalently to the corresponding algorithm, respectively.

• Resultado de Desempenho — SPEA/R ganha em HV — WFG1 a WFG9 — $M = 2,3,5,8,12$

TABLE IV: Mean and standard deviation HV values obtained by six algorithms for WFG problems

Prob.	M	HypE	PICEA-g	MOEA/D	NSGA-III	SPEA2+SDE	SPEA/R
WFG1	2	6.1349E-1(8.4520E-3) [‡]	6.2383E-1(2.1342E-2)	5.2963E-1(2.6156E-2) [‡]	5.2796E-1(2.1870E-2) [‡]	6.3186E-1(1.1067E-2)	6.0736E-1(5.9395E-3)
	3	5.9929E-1(8.2784E-3) [‡]	7.3526E-1(2.6053E-2)	5.8131E-1(2.7399E-2) [‡]	5.4419E-1(2.4954E-2) [‡]	6.0147E-1(6.0920E-3) [‡]	6.2420E-1(6.0584E-3)
	5	5.2153E-1(7.6354E-3) [‡]	9.1200E-1(5.4121E-2)	5.7746E-1(7.5357E-3) [‡]	5.4737E-1(1.7873E-2) [‡]	5.0145E-1(3.6774E-3) [‡]	5.7919E-1(5.4070E-3)
	8	4.3738E-1(1.3688E-2) [‡]	9.3707E-1(2.1198E-2)	4.3174E-1(4.4287E-2) [‡]	4.8199E-1(1.7796E-2) [‡]	4.2294E-1(2.3498E-3) [‡]	6.2128E-1(7.8831E-2)
	12	3.7561E-1(4.6241E-3) [‡]	9.2162E-1(2.9084E-2)	3.2474E-1(7.3978E-2) [‡]	7.4386E-1(4.0646E-2)	3.6416E-1(3.7633E-3) [‡]	4.2884E-1(5.9670E-2)
WFG2	2	7.9746E-1(3.0072E-2) [‡]	8.1726E-1(3.3376E-2) [‡]	6.5750E-1(5.0778E-2) [‡]	8.0801E-1(3.4064E-2) [‡]	8.1659E-1(3.4444E-2) [‡]	8.3092E-1(2.9447E-2)
	3	9.2195E-1(5.6280E-2) [‡]	9.0282E-1(6.9396E-2) [‡]	6.4363E-1(7.0612E-2) [‡]	9.1538E-1(6.8576E-2) [‡]	9.0856E-1(6.6674E-2) [‡]	9.4106E-1(6.0781E-2)
	5	9.2808E-1(7.4718E-2) [‡]	9.4948E-1(7.9765E-2) [‡]	6.2190E-1(8.7394E-2) [‡]	9.6131E-1(6.1941E-2) [‡]	9.7887E-1(3.5391E-2) [‡]	9.8674E-1(3.7587E-2)
	8	9.7630E-1(3.8039E-3) [‡]	9.8194E-1(5.5797E-2) [‡]	5.5675E-1(2.5975E-1) [‡]	9.1862E-1(1.0630E-1) [‡]	9.8544E-1(2.1334E-3) [‡]	9.9759E-1(6.6128E-4)
	12	9.6801E-1(1.1392E-2) [‡]	9.9860E-1(8.5921E-4)	3.3908E-1(3.1366E-1) [‡]	7.9068E-1(1.6581E-1) [‡]	9.7314E-1(3.9702E-2) [‡]	9.8832E-1(9.2631E-2)
WFG3	2	8.1688E-1(4.4403E-3) [‡]	8.2899E-1(4.8416E-4) [‡]	8.2486E-1(4.3417E-3) [‡]	8.2634E-1(1.1226E-3) [‡]	8.2739E-1(1.0559E-3) [‡]	8.2945E-1(1.3184E-3)
	3	7.5060E-1(9.0712E-3) [‡]	8.9256E-1(7.5315E-4)	7.9356E-1(5.8079E-3)	7.8197E-1(4.1079E-3) [‡]	7.8383E-1(4.3288E-3) [‡]	7.7947E-1(8.0418E-3)
	5	6.6263E-1(2.6816E-2) [‡]	9.5989E-1(1.2055E-3)	7.3844E-1(5.3374E-3)	7.1730E-1(7.5465E-3) [‡]	6.8788E-1(1.3525E-2) [‡]	6.8696E-1(1.1909E-2)
	8	6.0613E-1(2.3359E-2)	9.8966E-1(5.0622E-4)	1.2210E-1(1.2553E-3) [‡]	4.6929E-1(1.0987E-1) [‡]	4.8493E-1(3.3216E-2) [‡]	4.9757E-1(4.4357E-2)
	12	5.6477E-1(2.7196E-2)	9.5252E-1(6.7478E-2)	8.6302E-2(1.5356E-3) [‡]	3.3546E-1(3.7684E-2) [‡]	3.2742E-1(6.1689E-3) [‡]	4.8913E-1(4.4723E-2)
WFG4	2	7.2511E-1(6.1498E-3) [‡]	7.3428E-1(5.4716E-4) [‡]	7.2972E-1(1.3665E-3) [‡]	7.3314E-1(9.9494E-4) [‡]	7.1096E-1(1.1254E-2) [‡]	7.3497E-1(6.0901E-4)
	3	8.2289E-1(2.1555E-2) [‡]	8.4966E-1(1.1654E-3) [‡]	8.3709E-1(2.2772E-3) [‡]	8.3960E-1(1.2736E-3) [‡]	7.6916E-1(1.1329E-2) [‡]	8.5842E-1(9.0221E-4)
	5	7.4786E-1(3.9699E-2) [‡]	9.1105E-1(7.2895E-2) [‡]	9.1690E-1(1.2970E-3) [‡]	8.7615E-1(4.9747E-2) [‡]	7.5415E-1(1.2288E-2) [‡]	9.2169E-1(1.2998E-3)
	8	5.8468E-1(6.8400E-2) [‡]	7.0094E-1(7.4721E-2) [‡]	1.3762E-1(8.1625E-2) [‡]	8.0583E-1(4.5507E-2) [‡]	5.8432E-1(2.5894E-2) [‡]	9.5797E-1(3.9059E-3)
	12	5.3389E-1(5.8040E-2) [‡]	6.6260E-1(7.2208E-2) [‡]	7.6923E-2(5.9845E-9) [‡]	7.1332E-1(3.0720E-2) [‡]	5.3058E-1(3.7951E-2) [‡]	9.1609E-1(7.8544E-2)
WFG5	2	6.8762E-1(4.8597E-3) [‡]	7.0799E-1(2.7043E-3) [‡]	7.0280E-1(1.5455E-3) [‡]	7.0558E-1(3.3458E-3) [‡]	6.8987E-1(7.5992E-3) [‡]	7.1227E-1(9.3626E-4)
	3	7.6888E-1(2.2719E-2) [‡]	8.2305E-1(1.5867E-3) [‡]	8.1368E-1(2.3212E-3) [‡]	8.0667E-1(2.8385E-3) [‡]	7.7206E-1(7.9184E-3) [‡]	8.2437E-1(2.0573E-3)
	5	7.4369E-1(5.0270E-2) [‡]	9.0566E-1(1.5576E-3)	8.7778E-1(2.3524E-3) [‡]	8.4922E-1(3.6613E-3) [‡]	7.8108E-1(1.0898E-2) [‡]	8.8792E-1(1.1292E-3)
	8	6.0049E-1(7.9653E-2) [‡]	8.4677E-1(4.8498E-2) [‡]	1.0334E-1(5.3172E-3) [‡]	8.5495E-1(6.6536E-2) [‡]	6.9019E-1(1.6596E-2) [‡]	9.0023E-1(2.9488E-3)
	12	4.3256E-1(6.7488E-2) [‡]	7.3490E-1(4.4608E-2) [‡]	6.8603E-2(8.1182E-4) [‡]	6.3626E-1(5.0428E-2) [‡]	5.9168E-1(2.0913E-2) [‡]	9.0236E-1(6.6030E-3)
WFG6	2	6.9937E-1(1.1071E-2) [‡]	7.0821E-1(5.5304E-3) [‡]	6.9412E-1(1.0969E-2) [‡]	7.1557E-1(3.0357E-3)	6.9758E-1(1.5288E-2) [‡]	7.1001E-1(6.5120E-3)
	3	7.8656E-1(1.1842E-2) [‡]	8.1866E-1(6.8386E-3) [‡]	8.0201E-1(1.2884E-2) [‡]	8.1457E-1(4.2668E-3) [‡]	7.7216E-1(1.2142E-2) [‡]	8.2552E-1(6.3065E-3)
	5	8.0206E-1(2.2080E-2) [‡]	8.9790E-1(1.0352E-2) [‡]	8.6441E-1(1.4974E-2) [‡]	8.6594E-1(5.3327E-3) [‡]	7.7777E-1(1.3556E-2) [‡]	8.9930E-1(7.7577E-3)
	8	7.0169E-1(5.5025E-2) [‡]	9.2290E-1(7.9111E-3) [‡]	1.9017E-1(1.8471E-1) [‡]	9.0534E-1(9.3956E-3) [‡]	7.2350E-1(1.6221E-2) [‡]	9.2855E-1(1.5045E-2)
	12	5.1133E-1(4.6498E-2) [‡]	8.2963E-1(5.2905E-2) [‡]	6.8017E-2(2.6487E-3) [‡]	9.0514E-1(3.8475E-2) [‡]	6.3134E-1(2.2436E-2) [‡]	9.1604E-1(1.2921E-2)
WFG7	2	7.1926E-1(4.5563E-3) [‡]	7.3505E-1(2.4614E-4) [‡]	7.3136E-1(1.0965E-3) [‡]	7.3510E-1(3.1131E-4) [‡]	7.2082E-1(8.9974E-3) [‡]	7.3615E-1(1.1625E-3)
	3	8.1856E-1(1.4867E-2) [‡]	8.5110E-1(8.3476E-4) [‡]	8.3278E-1(1.5401E-2) [‡]	8.4263E-1(1.1488E-3) [‡]	7.9338E-1(1.3433E-2) [‡]	8.5171E-1(3.4081E-4)
	5	7.4819E-1(5.6439E-2) [‡]	9.4257E-1(9.5013E-4)	9.2071E-1(1.3121E-3) [‡]	8.9358E-1(4.7463E-3) [‡]	7.4066E-1(1.4528E-2) [‡]	9.2528E-1(6.1088E-4)
	8	5.8792E-1(7.2407E-2) [‡]	8.2636E-1(8.6834E-2) [‡]	7.4490E-1(2.7588E-1) [‡]	8.4280E-1(2.5436E-2) [‡]	6.9531E-1(1.9407E-2) [‡]	9.5110E-1(1.7669E-2)
	12	4.6000E-1(8.2486E-2) [‡]	7.6346E-1(6.1408E-2) [‡]	2.7676E-1(2.8129E-1) [‡]	7.5706E-1(3.6351E-2) [‡]	6.3525E-1(2.3553E-2) [‡]	9.4407E-1(9.1515E-3)
WFG8	2	6.7904E-1(1.0189E-2) [‡]	6.7029E-1(3.8045E-3) [‡]	6.6299E-1(2.3559E-2) [‡]	6.9584E-1(1.4755E-3) [‡]	6.8948E-1(4.3227E-3) [‡]	7.0318E-1(3.3615E-3)
	3	7.2386E-1(2.5175E-2) [‡]	7.7446E-1(2.1990E-3) [‡]	7.6918E-1(4.6432E-3) [‡]	7.9129E-1(2.5827E-3) [‡]	7.2355E-1(8.3819E-3) [‡]	8.0651E-1(5.3416E-3)
	5	6.2664E-1(4.0359E-2) [‡]	8.3085E-1(1.5580E-2) [‡]	7.9897E-1(1.7626E-3) [‡]	7.9816E-1(5.4098E-3) [‡]	7.0110E-1(1.1835E-2) [‡]	8.5983E-1(1.8504E-2)
	8	5.6633E-1(4.5007E-2) [‡]	8.0925E-1(4.2507E-2) [‡]	1.2037E-1(2.3436E-2) [‡]	7.3449E-1(1.9296E-2) [‡]	6.3416E-1(1.7580E-2) [‡]	8.8805E-1(3.8120E-2)
	12	5.4577E-1(6.2990E-2) [‡]	7.4233E-1(4.8267E-2) [‡]	7.6453E-2(2.1549E-3) [‡]	6.9534E-1(3.5933E-2) [‡]	5.5797E-1(1.9437E-2) [‡]	8.7084E-1(2.2243E-1)
WFG9	2	6.9556E-1(3.9680E-2) [‡]	7.1483E-1(8.6702E-4) [‡]	6.8383E-1(2.8965E-2) [‡]	7.0797E-1(1.1834E-2) [‡]	7.0116E-1(1.4582E-2) [‡]	7.1499E-1(1.4646E-3)
	3	7.4158E-1(7.1225E-2) [‡]	8.1680E-1(2.8524E-3) [‡]	7.2575E-1(2.5631E-2) [‡]	7.8864E-1(1.2055E-2) [‡]	7.6490E-1(1.6052E-2) [‡]	8.2240E-1(2.2316E-2)
	5	6.4243E-1(1.0678E-1) [‡]	8.5030E-1(5.3667E-2) [‡]	7.5157E-1(2.2857E-2) [‡]	7.9189E-1(3.9893E-3) [‡]	7.1535E-1(2.8081E-2) [‡]	8.6833E-1(4.2512E-2)
	8	4.4778E-1(1.0543E-1) [‡]	8.4756E-1(5.2963E-2)	1.2548E-1(1.6679E-1) [‡]	7.5797E-1(2.7755E-2) [‡]	6.3961E-1(1.9066E-2) [‡]	8.1250E-1(4.0473E-2)
	12	3.8782E-1(1.3885E-1) [‡]	7.7356E-1(4.2001E-2) [‡]	5.9415E-2(6.0946E-3) [‡]	6.6920E-1(3.6199E-2) [‡]	5.9417E-1(2.9346E-2) [‡]	7.8937E-1(4.7711E-2)

[‡] and [†] indicate SPEA/R performs significantly better than and equivalently to the corresponding algorithm, respectively.

- Plotar graficamente as coordenadas paralelas (normalizadas) das soluções finais obtidas por cada algoritmo
- SPEA/R ganha em uniformidade

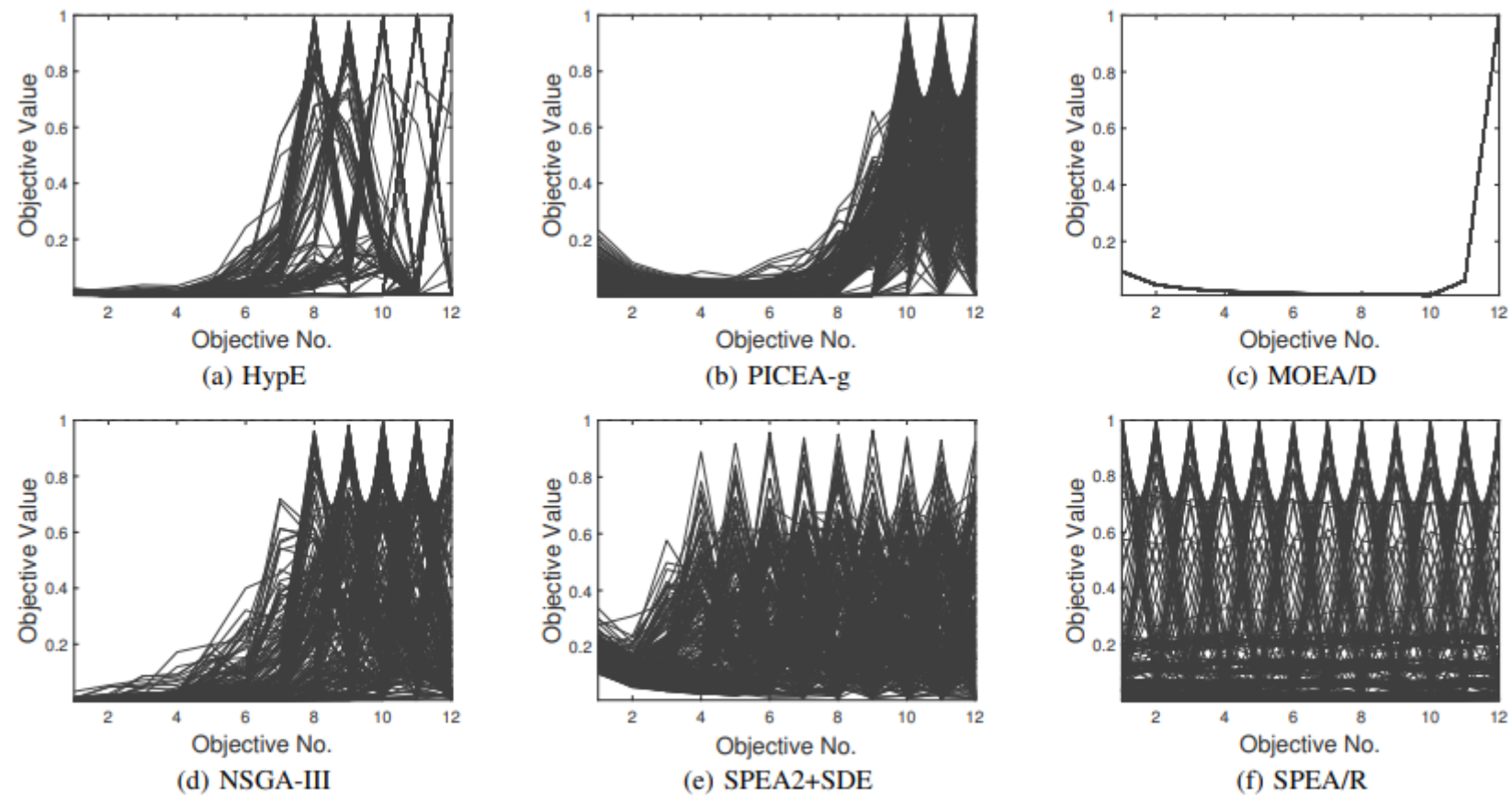


Fig. 5: Parallel coordinates of final solutions obtained by six algorithms for the 12-objective WFG4 instance.

- SPEA/R ganha em Tamanho da População
- Comparação de diferentes abordagens de geração de direção de referência
- Gráfico do Tamanho da amostra \times Tamanho da população, $M = 3, 5, 7, 8, 15, 30$ — comparação com NSGAIII
- No eixo x , temos $n \cdot H_M^k =$ quantas vezes o número de direções de referência
- No último caso, a comparação é entre 10^3 com 10^5 de população

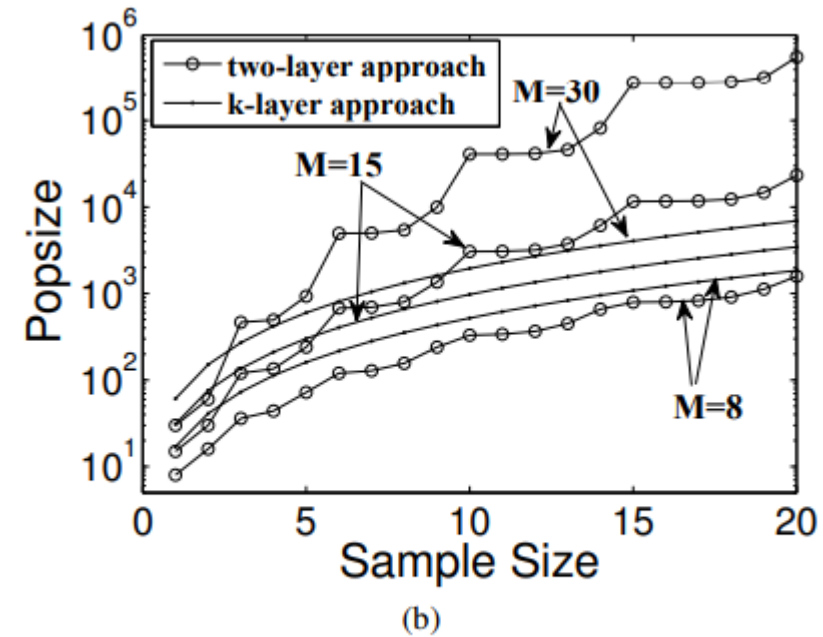
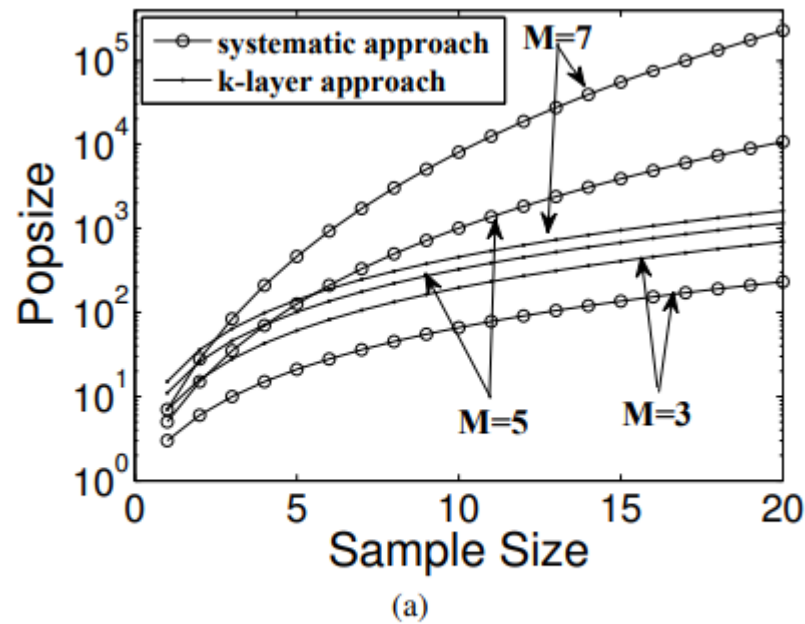


Fig. 6: Comparison of the population size required by different methods: (a) the systematic approach and k -layer approach for low-dimensional cases; (b) the two-layer approach and k -layer approach for high-dimensional cases.

- Gráfico das Fronteiras em Escala f_1, f_2, f_3 , WFG5 — comparação com NSGAIII
- Os objetivos f_1, f_2, f_3 estão multiplicados por $5, 5^2, 5^3$, respectivamente
- SPEA/R ganha em uniformidade

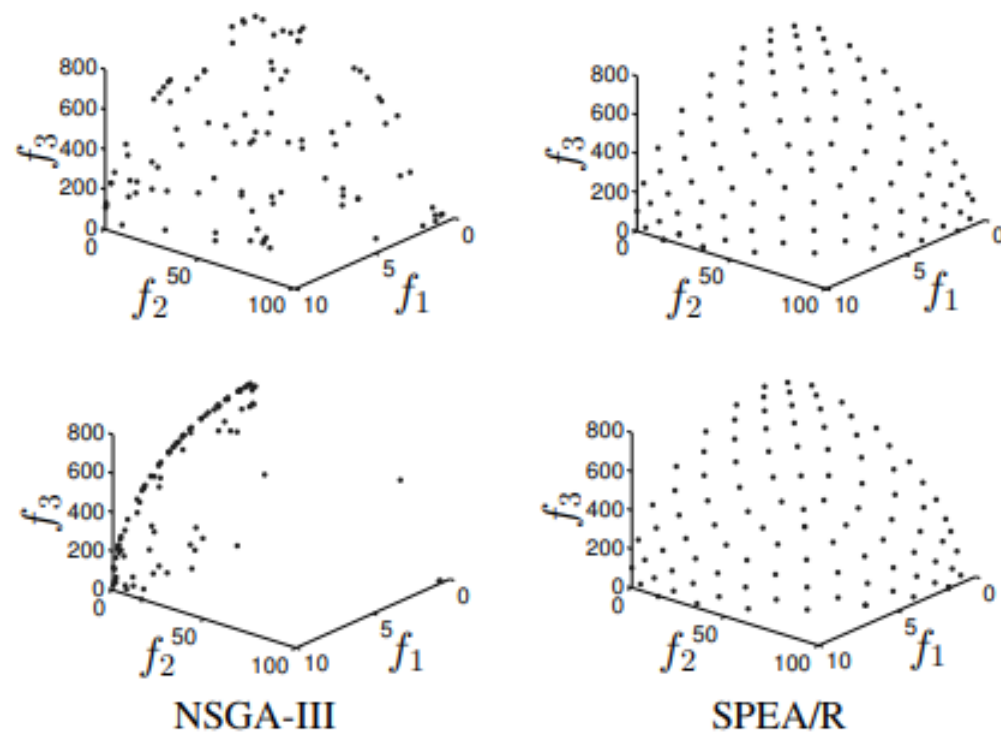


Fig. 7: Approximated POFs for scaled WFG5. Top: the median approximation; bottom: the worst approximation.

- Influência do acasalamento restrito — Desempenho — $K = 20$ minimiza o HV, WFG5 a WFG8, $M = 2,3,5,8,12$

TABLE VI: Mean and standard deviation HV values obtained by SPEA/R with different K values for four WFG problems

Prob.	M	$K=2$	$K=5$	$K=10$	$K=20$	$K=40$	$K=50$
WFG5	2	7.0444E-1(2.6807E-3)	7.0331E-1(1.4893E-3)	7.0290E-1(1.5121E-3)	7.1227E-1(9.3626E-4)	7.0240E-1(1.0190E-3)	7.0225E-1(1.2918E-3)
	3	8.1491E-1(2.2212E-3)	8.1506E-1(2.5168E-3)	8.1509E-1(2.6994E-3)	8.2437E-1(2.0573E-3)	8.1398E-1(1.3143E-3)	8.1376E-1(1.1227E-3)
	5	8.7474E-1(2.0417E-3)	8.7699E-1(2.8228E-3)	8.7754E-1(1.4904E-3)	8.8792E-1(1.1292E-3)	8.7778E-1(1.3177E-3)	8.7786E-1(1.0863E-3)
	8	8.8822E-1(8.3131E-3)	8.9728E-1(3.1274E-3)	8.9833E-1(1.2579E-2)	9.0023E-1(2.9488E-3)	9.0064E-1(3.1272E-3)	8.9896E-1(3.0760E-3)
	12	8.2542E-1(4.0708E-2)	8.3170E-1(6.4925E-2)	8.6648E-1(9.6071E-2)	9.0236E-1(6.6030E-3)	9.0357E-1(5.3041E-3)	8.9903E-1(1.3462E-2)
WFG6	2	7.0956E-1(7.4317E-3)	7.1207E-1(4.9637E-3)	7.1049E-1(6.8942E-3)	7.1001E-1(6.5120E-3)	7.1125E-1(4.4444E-3)	7.1112E-1(6.4365E-3)
	3	8.1414E-1(8.6380E-3)	8.1048E-1(6.0997E-3)	8.1501E-1(5.5185E-3)	8.2552E-1(6.3065E-3)	8.1704E-1(6.4877E-3)	8.1612E-1(6.9906E-3)
	5	8.7020E-1(1.2008E-2)	8.7366E-1(1.2462E-2)	8.7589E-1(8.0459E-3)	8.9930E-1(7.7577E-3)	8.7429E-1(1.3280E-2)	8.7756E-1(8.3509E-3)
	8	8.8848E-1(2.9622E-2)	8.9990E-1(1.9014E-2)	9.0585E-1(1.0637E-2)	9.2855E-1(1.5045E-2)	9.0146E-1(1.2872E-2)	9.0041E-1(1.2033E-2)
	12	8.6720E-1(8.0397E-2)	8.8930E-1(4.9023E-2)	8.9676E-1(5.2199E-3)	9.1604E-1(1.2921E-2)	9.0072E-1(2.5975E-2)	8.9359E-1(6.1651E-2)
WFG7	2	7.3554E-1(5.8256E-4)	7.3573E-1(4.3877E-4)	7.3570E-1(4.2235E-4)	7.3615E-1(1.1625E-3)	7.3531E-1(5.4513E-4)	7.3455E-1(1.5055E-3)
	3	8.5109E-1(3.6231E-4)	8.5135E-1(2.8815E-4)	8.5120E-1(3.8447E-4)	8.5171E-1(3.4081E-4)	8.5022E-1(3.7511E-4)	8.5007E-1(3.9649E-4)
	5	9.2148E-1(1.0175E-3)	9.2385E-1(5.7867E-4)	9.2498E-1(6.6708E-4)	9.2528E-1(6.1088E-4)	9.2504E-1(8.4886E-4)	9.2451E-1(1.7558E-3)
	8	8.1636E-1(7.3633E-2)	8.8675E-1(5.2499E-2)	9.1107E-1(6.1033E-2)	9.5110E-1(1.7669E-2)	9.0279E-1(3.2266E-2)	8.4598E-1(6.7261E-2)
	12	9.0203E-1(1.1885E-1)	9.2156E-1(8.3763E-2)	9.3326E-1(3.5592E-2)	9.4407E-1(9.1515E-3)	8.8898E-1(8.1680E-2)	8.5109E-1(1.4778E-1)
WFG8	2	6.9842E-1(2.5016E-3)	7.0146E-1(3.4153E-3)	7.0138E-1(3.2326E-3)	7.0318E-1(3.3615E-3)	7.0262E-1(3.5139E-3)	7.0264E-1(3.2564E-3)
	3	7.9341E-1(3.4538E-3)	8.0085E-1(6.2528E-3)	8.0478E-1(7.1091E-3)	8.0651E-1(5.3416E-3)	8.0817E-1(5.9836E-3)	8.0802E-1(5.7856E-3)
	5	8.0213E-1(3.0860E-3)	8.0994E-1(3.9769E-3)	8.2573E-1(2.0662E-2)	8.5983E-1(1.8504E-2)	8.5576E-1(3.6934E-2)	8.4240E-1(1.7857E-2)
	8	8.6003E-1(6.8351E-2)	8.6155E-1(4.5106E-2)	8.7114E-1(4.3606E-2)	8.8805E-1(3.8120E-2)	8.6770E-1(5.7081E-2)	8.5679E-1(6.3412E-2)
	12	8.4546E-1(5.2716E-2)	8.5492E-1(2.0422E-1)	8.5888E-1(2.2243E-1)	8.7084E-1(2.2243E-1)	8.5445E-1(1.6750E-1)	7.4837E-1(1.6586E-1)

```

function MatingPool = SP_MatingSelection(PopObj,K)
    N = size(PopObj,1);

    %% The Euclidean distance between each two solutions
    Dis = pdist2(PopObj,PopObj);
    Dis(logical(eye(N))) = inf;

    %% Randomly select one solution for each solution
    MatingPool = zeros(1,N);
    for i = 1 : N
        Candidates = randperm(N,min(K,N));
        [~,nearest] = min(Dis(i,Candidates));
        MatingPool(i) = Candidates(nearest);
    end
end

```

- Influência do acasalamento restrito — Plotar graficamente as coordenadas paralelas (normalizadas) das soluções finais — WFG4, $M = 20, 40$
- Novamente a uniformidade da fronteira do SPEA/R

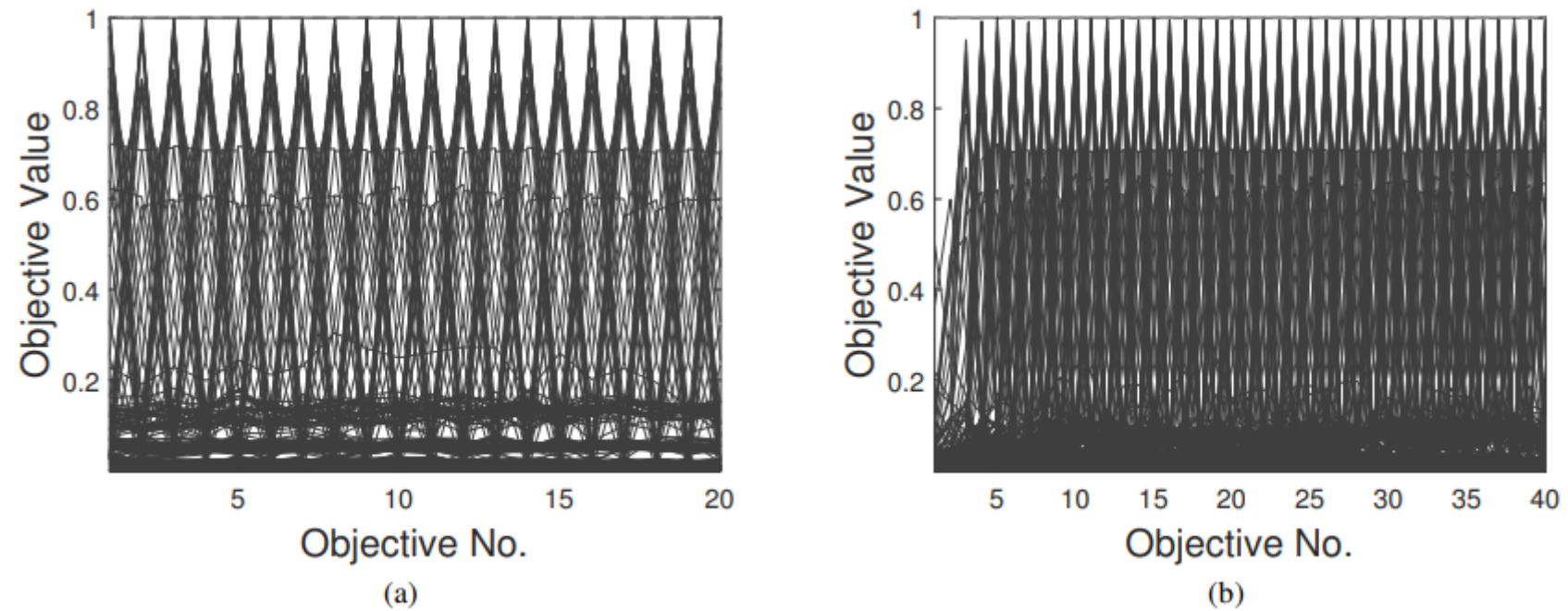


Fig. 9: Parallel coordinates of final solutions obtained by SPEA/R for WFG with 20 (a) and 40 (b) objectives.

- Gráfico Gerações \times Percentual de soluções dominadas, WFG5
- O SPEA/R prioriza a geração de soluções não dominadas

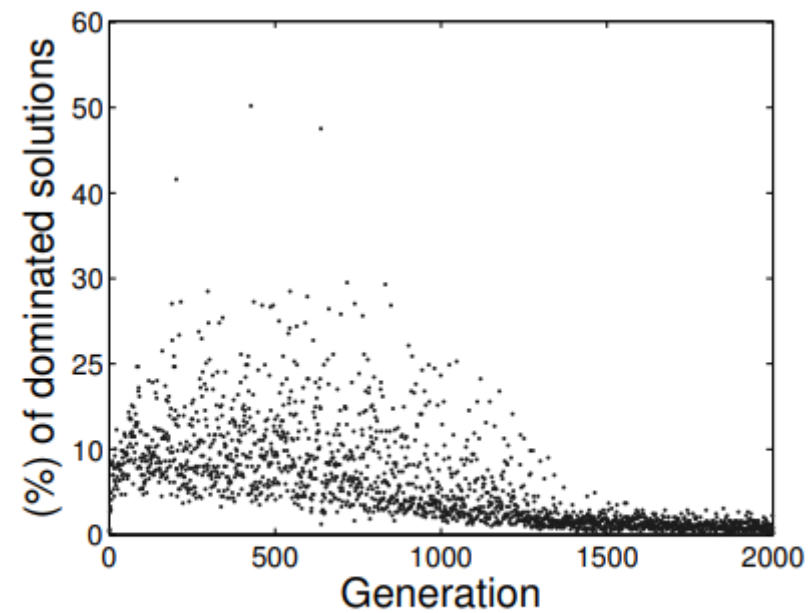


Fig. 11: The percentage of dominated solutions in every generation of SPEA/R for 12-objective WFG5.

11. Conclusões

- MOEAs convencionais baseados em dominância de Pareto podem ser inadequados para muitos objetivos de otimização
- Apesar de que eles possam resolver com sucesso problemas de dois ou três objetivos
- O SPEA/R resolve tanto MOPs quanto MaOPs
- O SPEA/R particiona o espaço objetivo em várias sub-regiões de interesse
- E os indivíduos em cada sub-região são guiados para direções de pesquisa predefinidas
- O SPEA/R adota uma estratégia de seleção de diversidade em primeiro lugar e convergência em segundo
- O que pode aumentar a pressão de seleção para otimização de muitos objetivos, em que uma grande fração da população é não dominada
- O SPEA/R também emprega um esquema de acasalamento restrito para melhorar a eficiência da reprodução
- A estrutura proposta reduziu significativamente o esforço computacional de métodos baseados em SPEA, com complexidade computacional limitada por $O(MN^2)$
- O estudo experimental demonstrou a eficácia do SPEA/R em uma série de problemas de teste MOP e WFG com 2 a 40 objetivos e várias dificuldades de otimização
- Uma comparação justa com vários MOEAs de última geração sugere que o SPEA/R é muito superior para otimização multiobjetivo e de muitos objetivos
- Mas não a maior qualidade possível

- Dar alta prioridade à diversidade em vez da convergência pode ser outra maneira eficaz de lidar com a otimização de muitos objetivos
- Embora o SPEA/R tenha fornecido desempenho encorajador nos problemas de teste considerados, ele precisa ser examinado em uma gama mais ampla de problemas (por exemplo, formas complicadas de POS e POF)
- Como a pesquisa sobre otimização de muitos objetivos ainda está em sua infância, existem algumas questões em aberto que ainda precisam ser resolvidas
- Como por exemplo o cálculo computacionalmente caro das métricas de desempenho
- E a visualização de fronteiras em dimensões mais elevadas
- Portanto, esses devem ser tópicos muito interessantes para trabalho futuro

12. Referências

- [40] R. L. While, L. Bradstreet, and L. Barone, “A fast way of calculating exact **hypervolumes**,” IEEE Trans. Evol. Comput., vol. 16, no. 1, pp. 86–95, 2012.
- **Sobre MOPs e MOEA/D-M2M:** [34] H. Liu, F. Gu, and Q. Zhang, “Decomposition of a multiobjective optimization problem into a number of simple multiobjective subproblems,” IEEE Trans. Evol. Comput., vol. 18, no. 3, pp. 450–455, 2014.
- **Sobre WFG:** [21] S. Huband, P. Hingston, L. Barone, and L. While, “A review of multiobjective test problems and a scalable test problem toolkit,” IEEE Trans. Evol. Comput., vol. 10, no. 2, pp. 477–506, 2006.
- **Sobre MOEA/D-ACD:** [44] L. Wang, Q. Zhang, A. Zhou, M. Gong, and, L. Jiao, “Constrained subproblems in decomposition based multiobjective evolutionary algorithm,” IEEE Trans. Evol. Comput., vol. 20, no. 3, pp. 475–480, 2015.
- [4] J. Bader and E. Zitzler, “**HypE**: An algorithm for fast hypervolume-based many-objective optimization,” Evol. Comput., vol. 19, no. 1, pp. 45–76, 2011.
- **Sobre SPEA2+SDE:** [32] M. Li, S. Yang, X. Liu, “Shift-based density estimation for Pareto-based algorithms in many-objective optimization,” IEEE Trans. Evol. Comput., vol. 18, no. 3, pp. 348–365, Jun. 2014.
- **Sobre PICEA-g:** [43] R. Wang, R. C. Purshouse, and P. J. Fleming, “Preference-inspired coevolutionary algorithms for many-objective optimization,” IEEE Trans. Evol. Comput., vol. 17, no. 4, pp. 474–494, Aug. 2013.
- **Sobre NSGA3:** [13] K. Deb and H. Jain, “An evolutionary many-Objective optimization algorithm using reference-point based non-dominated sorting approach, Part I: Solving problems with box constraints,” IEEE Trans. Evol. Comput., vol. 18, no. 4, pp. 577–601, 2014.

- **Sobre Reference Generation:** [9] I. Das and J. Dennis, “Normal-boundary intersection: A new method for generating the Pareto surface in nonlinear multicriteria optimization problems,” SIAM J. Optimiz., vol. 8, no. 3, pp. 631–657, 1998.
- **Sobre cruzamento binário simulado (SBX) e mutação polinomial:** [55] Yuan J, Liu HL, Gu F (2018) A cost value based evolutionary manyobjective optimization algorithm with neighbor selection strategy. In: 2018 IEEE congress on evolutionary computation (CEC). IEEE, pp 1–8

OBRIGADO.

Fora da caridade, não há salvação. Com caridade, há evolução.

Vinicius Claudino Ferraz, versão de 07/janeiro/2022.