Time Series Analysis : HW01

CH 02

1. 다음은 어느 서점에서 최근 10 일동안 판매된 경제 서적의 일별 판매액 (단위 : 만원)을 나타내는 시계열 자료이다. 이 자료에 상수평균모형을 적합시키려 한다.

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Z_t	52	46	46	52	50	50	48	45	41	53

(1) 상수평균모형을 적합하여라.

(2) 미래값 Z_{10+l}에 대한 예측값 $\hat{Z}_{10}(l)$을 구하시오. $(l = 1, 2, 3, 4, 5)$

(3) 미래값 $Z_{10+l}, l = 1, 2, 3, 4, 5$에 대한 95% 예측구간을 구하고, 예측값 및 예측구간의 하한값과 상한값을 관측값 Z_t의 시계열과 함께 표시하여라.

2. 다음은 신장개업한 어느 편의점의 15 주간 주별 매출액을 나타낸 시계열자료이다. 이 자료에 선형추세모형을 적합시키려 한다.

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Z_t	303	298	303	314	303	314	310	324	317	327	323	324	331	330	332

(1) 선형추세모형을 쓰시오.

(2) 최소제곱법에 의하여 구한 β_0, β_1의 추정량이 각각 다음과 같아짐을 보여라.

$$\hat{\beta}_0 = \frac{2(2n+1)}{n(n-1)} \sum_{t=1}^{n} Z_t - \frac{6}{n(n-1)} \sum_{t=1}^{n} t_t$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{12}{n(n^2-1)} \sum_{t=1}^{n} tZ_t - \frac{6}{n(n-1)} \sum_{t=1}^{n} Z_t$$

(3) 선형추세모형을 적합하시오. (회귀계수 추정 및 모형 결과 설명)

(4) 미래값 Z_{15+l}에 대한 예측값 $\hat{Z}_{15}(l)$을 구하시오. $(l = 1, 2, 3, 4, 5)$

3. (**R 실습**) 다음과 같은 시계열모형으로부터 모의시계열자료 $\{Z_t, t = 1, 2, \ldots, 100\}$을 생성한 후 4개의 시계열그림을 겹쳐 그려보고 비교하여라. 그리고 각 모의시계열자료의 표본평균과 표본분산을 구하고, 이론적인 평균 및 분산과 비료하여라.

(1) $Z_t = 100 + \epsilon_t$, 단 ϵ_t는 서로 독립이고 $N(0,1)$ 분포를 따른다.

(2) $Z_t = 500 + \epsilon_t$, 단 ϵ_t는 서로 독립이고 $N(0,1)$ 분포를 따른다.

(3) $Z_t = 100 + \epsilon_t$, 단 ϵ_t는 서로 독립이고 $N(0,100)$ 분포를 따른다.

(4) $Z_t = 100 + t\epsilon_t$, 단 ϵ_t는 서로 독립이고 $N(0,1)$ 분포를 따른다.

4. (**R 실습**) 다음과 같은 시계열모형으로부터 모의시계열자료 $\{Z_t, t = 1, 2, \ldots, 100\}$을 생성한 후 Z_t와 $E(Z_t)$의 시계열그림을 겹쳐 그려라. 또한 이 시계열 자료들은 각각 어떤 성분으로 구성되어 있는지 설명하여라. 단 오차항 ϵ_t는 서로 독립인 $N(0,1)$ 분포를 가정한다.

(1) $Z_t = 100 + \epsilon_t$

(2) $Z_t = 100 + t + \epsilon_t$

(3) $Z_t = 100 + 0.3t + \sin\left(\frac{2\pi t}{12}\right) + \cos\left(\frac{2\pi t}{12}\right) + \epsilon_t$

5. (**R 실습**) "book.txt"는 한 서점에서 첫 30일동안 팔린 어느 베스트셀러의 일별 판매 부수(단위 : 권) 시계열자료이다.

(1) 시계열 그림을 그리시오.

(2) 이 시계열 자료는 어떤 성분으로 구성되어 있는지 설명하시오.

(3) 적절한 추세모형을 적합하여라.

(4) 마지막 관측값으로 부터 Z_{n+l}에 대한 예측값 $\hat{Z}_n(l)$을 구하시오. $(n = 30, l = 1, 2, \ldots, 12)$

(5) 마지막 관측값으로 부터 $Z_{n+l}(n = 30, l = 1, 2, \ldots, 12)$에 대한 95% 예측구간을 구하여라.

(6) 예측값 및 예측구간의 하한값과 상한값을 관측값 Z_t의 시계열과 함께 표시하여라.

6. (**R 실습**) "export.txt"는 월별수출액(단위:억$) 시계열자료이다.

(1) 시계열 그림을 그리시오.

(2) 이 시계열 자료는 어떤 성분으로 구성되어 있는지 설명하시오.

(3) 적절한 추세모형을 적합하여라. (지시함수 사용)

(4) 적합 결과를 설명하여라. (회귀계수의 의미 설명)

(5) 마지막 관측값으로 부터 Z_{n+l}에 대한 예측값 $\hat{Z}_n(l)$을 구하시오. $(n = 30, l = 1, 2, \ldots, 12)$

(6) 마지막 관측값으로 부터 $Z_{n+l}(n = 30, l = 1, 2, \ldots, 12)$에 대한 95% 예측구간을 구하여라.

(7) 예측값 및 예측구간의 하한값과 상한값을 관측값 Z_t의 시계열과 함께 표시하여라.

1. 다음은 어느 서점에서 최근 10 일동안 판매된 경제 서적의 일별 판매액 (단위 : 만원)을 나타내는 시계열 자료이다. 이 자료에 상수평균모형을 적합시키려 한다.

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Z_t	52	46	46	52	50	50	48	45	41	53

(1) 상수평균모형을 적합하여라.

(2) 미래값 Z_{10+l}에 대한 예측값 $\hat{Z}_{10}(l)$을 구하시오. $(l = 1, 2, 3, 4, 5)$

(3) 미래값 $Z_{10+l}, l = 1, 2, 3, 4, 5$에 대한 95% 예측구간을 구하고, 예측값 및 예측구간의 하한값과 상한값을 관측값 Z_t의 시계열과 함께 표시하여라.

(1) 상수평균 모형. $y_t = \beta_0 + \varepsilon_t$.

$$\hat{\beta}_0 = \bar{z} = \frac{1}{10}\sum_{t=1}^{n} z_i = \frac{493}{10} = 49.3$$

$$\Rightarrow \hat{z}_t = 49.3$$

(2) $\hat{z}_{n+l} = \hat{z}_n(l) = \hat{\beta}_0 \ , \quad l = 1, 2, \cdots$

$$\Rightarrow \hat{z}_{10}(1) = \hat{z}_{10}(2) = \cdots = \hat{z}_{10}(5) = 49.3$$

(3) ▹ Z_{n+l}의 $100(1-\alpha)\%$ 예측 구간 : $\bar{Z} \pm t_{2/\alpha}(n-1) \times \sqrt{\left(1+\frac{1}{n}\right) s^2}$

$n = 10, \quad \alpha = 0.05.$

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{t=1}^{n}(z_t - \bar{z})^2 = \frac{74.1}{9} = 8.2333$$

$$t_{\alpha/2}(n-1) = t_{0.025}(9) = 2.2621$$

$$\Rightarrow 49.3 \pm 2.2621 \times \sqrt{\left(1+\frac{1}{10}\right) \cdot 8.233}$$

$$= (46.3602 \ , \ 56.2398)$$

2. 다음은 신장개업한 어느 편의점의 15 주간 주별 매출액을 나타낸 시계열자료이다. 이 자료에 선형추세모형을 적합시키려 한다.

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Z_t	303	298	303	314	303	314	310	324	317	327	323	324	331	330	332

(1) 선형추세모형을 쓰시오.

(2) 최소제곱법에 의하여 구한 β_0, β_1의 추정량이 각각 다음과 같아짐을 보여라.

$$\hat{\beta}_0 = \frac{2(2n+1)}{n(n-1)}\sum_{t=1}^{n} Z_t - \frac{6}{n(n-1)}\sum_{t=1}^{n} t_t$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{12}{n(n^2-1)}\sum_{t=1}^{n} tZ_t - \frac{6}{n(n-1)}\sum_{t=1}^{n} Z_t$$

(3) 선형추세모형을 적합하시오. (회귀계수 추정 및 모형 결과 설명)

(4) 미래값 Z_{15+l}에 대한 예측값 $\hat{Z}_{15}(l)$을 구하시오. $(l = 1, 2, 3, 4, 5)$

(1) $Z_t = \beta_0 + \beta_1 t + \varepsilon_t \quad t = 1, \cdots, 15, \quad \varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$. indep

(2) $S^2 = \sum_{t=1}^{n} \varepsilon_t^2 = \sum_{t=1}^{n} (Z_t - \beta_0 - \beta_1 t)^2$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S^2}{\partial \beta_0} = -2\sum_{t=1}^{n} (Z_t - \beta_0 - \beta_1 t) \\ \dfrac{\partial S^2}{\partial \beta_1} = -2\sum_{t=1}^{n} t(Z_t - \beta_0 - \beta_1 t) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sum_{t=1}^{n} (Z_t - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 t) = 0 \\ \sum_{t=1}^{n} t(Z_t - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 t) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sum Z_t - n\hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 \sum t = 0 & ① \\ \sum tZ_t - \hat{\beta}_0 \sum t - \hat{\beta}_1 \sum t^2 = 0 & ② \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{①} \Rightarrow \hat{\beta}_0 = \frac{1}{n}\sum z_t - \hat{\beta}_1 \frac{1}{n}\sum t$$

$$\text{②} \Rightarrow \sum t z_t - \left(\frac{1}{n}\sum z_t - \hat{\beta}_1 \frac{1}{n}\sum t\right)\sum t - \hat{\beta}_1 \sum t^2 = 0$$

$$\hat{\beta}_1 \left\{ \underbrace{\sum t^2 - \frac{1}{n}\left(\sum t\right)^2} \right\} = \sum t z_t - \frac{1}{n}\sum z_t \cdot \sum t$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{1}{\cancel{n}} \cdot \frac{n^{\cancel{2}}(n+1)^2}{4}$$

$$= \frac{2n(n+1)(2n+1) - 3n(n+1)^2}{12}$$

$$= \frac{n(n+1)\{2(2n+1) - 3(n+1)\}}{12} = \frac{n(n+1)(n-1)}{12}$$

$$\Rightarrow \frac{n(n+1)(n-1)}{12}\hat{\beta}_1 = \sum t \cdot z_t - \frac{1}{\cancel{n}} \cdot \frac{\cancel{n}(n+1)}{2}\sum z_t$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{12}{n(n^2-1)}\sum t z_t - \frac{6}{n(n-1)}\sum z_t$$

$$\Rightarrow \hat{\beta}_0 = \frac{1}{n}\sum z_t - \left\{\frac{12}{n(n^2-1)}\sum t z_t - \frac{6}{n(n-1)}\sum z_t\right\} \cdot \frac{1}{\cancel{n}} \cdot \frac{\cancel{n}(n+1)}{2}$$

$$= \left(\underbrace{\frac{1}{n} + \frac{3(n+1)}{n(n-1)}}\right)\sum z_t - \frac{6}{n(n-1)}\sum t z_t$$

$$= \frac{n-1+3n+3}{n(n-1)} = \frac{4n+2}{n(n-1)} = \frac{2(2n+1)}{n-1}$$

$\Rightarrow$ QED. //

(3) 선형추세모형을 적합하시오. (회귀계수 추정 및 모형 결과 설명)

$\hat{\beta}_0 = 297.781$

$\hat{\beta}_1 = 2.386$

$\Rightarrow \hat{Z}_t = 297.781 + 2.386t$

시간 1단위 증가하면 Z 값은 평균적으로 2.386 만큼 증가.

(4) 미래값 Z_{15+l}에 대한 예측값 $\hat{Z}_{15}(l)$을 구하시오. ($l = 1, 2, 3, 4, 5$)

$\hat{Z}_{15+l} = \hat{Z}_{15}(l) = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1(15+l)$

$= 297.781 + 2.386 \times (15+l)$

l	1	2	3	4	5
$\hat{Z}_n(l)$	335.9524	338.3381	340.7238	343.1095	345.4952