Time Series Analysis : HW03

CH 05, 06

1. 다음의 시계열 자료 $\{7,6,5,8,9,4,5,5,4,6,7,8,5,6,5\}$에 대하여, SACF, $\hat{\rho}_h$ $(h = 1,2,3)$과 SPACF, $\hat{\phi}_{kk}$ $(k = 1,2)$을 직접 계산하여라. 그리고 유의수준 $\alpha = 0.05$에서

$$H_0 : \rho_h = 0 \ \ vs. \ \ H_1 : \rho_h \neq 0$$

대하여에 대한 가설검정으로 하여라.

$$\bar{Z} = \sum_{t=1}^{n} Z_t/n = 6$$

$$\hat{\gamma}_0 = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}(Z_t - \bar{Z})^2 = \frac{1}{n}(1+1+\cdots+1) = \frac{32}{15}$$

$$\hat{\gamma}_1 = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n-1}(Z_t - \bar{Z})(Z_{t+1} - \bar{Z}) = \frac{1}{n}\{1\times 0 + 0\times(-1) + (-1)\times 2 + \cdots + 0\times(-1)\} = \frac{3}{15}$$

$$\hat{\gamma}_2 = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n-2}(Z_t - \bar{Z})(Z_{t+2} - \bar{Z}) = \frac{1}{n}\{1\times(-1) + 0\times 2 + (-1)\times 3 + \cdots + (-1)\times(-1)\} = -\frac{9}{15}$$

$$\hat{\gamma}_3 = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n-3}(Z_t - \bar{Z})(Z_{t+3} - \bar{Z}) = -\frac{4}{15}$$

$$\Rightarrow \hat{\rho}_k = \frac{\hat{\gamma}_k}{\hat{\gamma}_0} \ \ \Rightarrow \ \ \hat{\rho}_1 = \frac{3}{32},\ \hat{\rho}_2 = -\frac{9}{32},\ \hat{\rho}_3 = -\frac{4}{32}$$

$$\Rightarrow \hat{\phi}_{11} = \hat{\rho}_1 = \frac{3}{32},\ \hat{\phi}_{22} = \frac{\hat{\rho}_2 - \hat{\rho}_1^2}{1 - \hat{\rho}_1^2} = -0.293$$

- 가설 : $H_0 : \rho_h = 0 \ \ vs. \ \ H_1 : \rho_h \neq 0$
- 검정통계량 :$\hat{\rho}_h$
- 기각역 : $|\hat{\rho}_h| \geq \frac{2}{\sqrt{n}} = \frac{2}{\sqrt{15}} = 0.516$
- 결론 : 모든 $h = 1,2,3$에 대하여 검정통계량의 관측값이 기각역에 속하지 않기 때문에, 자기상관관계가 없다고 할 수 있다.

2. 다음의 모형들에 의해 설명되는 확률과정 $\{Z_t\}$는 정상성을 갖는가? 단 $\varepsilon_t \sim WN(0,1)$.

(1) $Z_t = \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1} - \varepsilon_{t-2}$

- $E(Z_t) = E(\varepsilon_t) - E(\varepsilon_{t-1}) - E(\varepsilon_{t-2}) = 0$: t와 무관

- $Var(Z_t) = Var(\varepsilon_t) + Var(\varepsilon_{t-1}) + Var(\varepsilon_{t-2}) = 3$: t와 무관
- $Cov(Z_t, Z_{t+k})$:

  $Cov(Z_t, Z_{t+1}) = Cov(\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1} - \varepsilon_{t-2}, \varepsilon_{t+1} - \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1} = -Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_t) + Cov(\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-1}) = 0$

  $Cov(Z_t, Z_{t+2}) = Cov(\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1} - \varepsilon_{t-2}, \varepsilon_{t+2} - \varepsilon_{t+1} - \varepsilon_t = -Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_t) = -1$

  $Cov(Z_t, Z_{t+k}) = 0, \ \forall k \geq 3$

  따라서 t와 무관
- 따라서 $\{Z_t\}$는 정상시계열이다.

(2) $Z_t = \varepsilon_t \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_{t-2}$

- $Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}) = E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-1}) - E(\varepsilon_t)E(\varepsilon_{t-1}) = E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-1}) = 0$
- $E(Z_t) = 0$
- $Var(Z_t)$

$$\begin{aligned} Var(Z_t) &= E(Z_t^2) = E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_{t-2})^2 \\ &= E(\varepsilon_t^2 \varepsilon_{t-1}^2 + 2\varepsilon_t \varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-2} + \varepsilon_{t-2}^2) \\ &= E(\varepsilon_t^2) E(\varepsilon_{t-1})^2 + E(\varepsilon_{t-2})^2 = 1 \cdot 1 + 1 = 2 \quad (\because E(\varepsilon_t^2) = Var(\varepsilon_t) = 1) \end{aligned}$$

- $Cov(Z_t, Z_{t+k})$

  $Cov(Z_t, Z_{t-1}) = Cov(\varepsilon_t \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_{t-2}, \varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-2} + \varepsilon_{t-3}) = 0$

  $(\because Cov(\varepsilon_t \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-2}) = E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-2}) = E(\varepsilon_t) E(\varepsilon_{t-1}^2) E(\varepsilon_{t-2}) = 0 \cdot 1 \cdot 0 = 0)$

  $Cov(Z_t, Z_{t+k}) = 0, \ \forall k \geq 2$

(3) $Z_t = A \sin\left(\frac{2}{3}\pi t + U\right)$, 단 A는 평균이 0이고 분산이 1인 확률변수이고, U는 상수이다.

- $U = 0$ 이라고 하자.
- $E(A) = 0, Var(A) = 1$

$$\sin\left(\frac{2}{3}\pi t\right) = \begin{cases} \sin\left(\frac{2}{3}\pi\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} & t = 1, 4, 7, \ldots \\ \sin\left(\frac{4}{3}\pi\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} & t = 2, 5, 8, \ldots \\ \sin\left(\frac{2}{3}\pi\right) = 0 & t = 3, 6, 9, \ldots \end{cases}$$

- $E(Z_t) = \sin\left(\frac{2}{3}\pi t\right) E(A) = 0$

- $Var(Z_t)$

$$Var(Z_t) = \left\{\sin\left(\frac{2}{3}\pi t\right)\right\}^2 Var(A) = \left\{\sin\left(\frac{2}{3}\pi t\right)\right\}^2 = \begin{cases} 0 & t = 3, 6, 9, \dots \\ 3/4 & o.w. \end{cases}$$

- 분산이 t와 무관하지 않기 때문에 정상시계열이 아니다.

(4) $Z_t = A\sin(\pi t + U)$, 단 A는 평균이 0이고 분산이 1인 확률변수이고, U 는 $[-\pi, \pi]$에서의 균등분포(uniform distribution)을 따르는 확률변수이다. A, U는 서로 독립.

- $E(A) = 0, Var(A) = 1, E(U) = 0$

$$\sin(\pi t) = 0, \quad \forall t = 1, 2, \dots$$

$$\cos(\pi t) = 1, (t = 1, 3, 5, \dots), \ -1 (t = 2, 4, 6, \dots)$$

$$\sin(\pi t + U) = \sin(\pi t)\cos(U) + \cos(\pi t)\sin(U) = \begin{cases} \sin(U), & t = 1, 3, 5, \dots \\ -\sin(U), & t = 2, 4, 6, \dots \end{cases}$$

$$E(\sin(U)) = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(x)\frac{1}{2\pi}dx = 0 = E(-\sin(U))$$

$$Var(\sin(U)) = E(\sin^2(U)) = E\left(\frac{1-\cos(2U)}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}E(\cos(2U)) = \frac{1}{2}$$

$$\because E(\cos(2U)) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(2x)\frac{1}{2\pi}dx = 0$$

$$\Rightarrow E(Z_t) = 0, Var(Z_t) = \frac{1}{2}, \quad \forall t = 1, 2, \dots$$

- covariance

$$\begin{aligned} \sin(\pi(t+1) + U) &= \sin(\pi t + \pi + U) \\ &= \sin(\pi t + U)\cos(\pi) + \sin(\pi)\cos(\pi t + U) = -\sin(\pi t + U) \\ \sin(\pi(t+2) + U) &= \sin(\pi t + 2\pi + U) \\ &= \sin(\pi t + U)\cos(2\pi) + \sin(2\pi)\cos(\pi t + U) = \sin(\pi t + U) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad Z_{t+k} = \begin{cases} -Z_t, & k = 1, 3, 5, \dots \\ Z_t, & k = 2, 4, 6, \dots \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad cov(Z_t, Z_{t+k}) = \begin{cases} cov(Z_t, -Z_t) = -Var(Z_t) = -\frac{1}{2}, & k = 1, 3, \dots \\ cov(Z_t, Z_t) = Var(Z_t) = \frac{1}{2,}, & k = 2, 4, \dots \end{cases}$$

- 평균, 부산, 공분산이 t에 무관하므로 정상시계열

(5) $\begin{cases} Z_t = \varepsilon_t, & t : \text{짝수} \\ Z_t = \varepsilon_t + 1, & t : \text{홀수} \end{cases}$

$$E(Z_t) = \begin{cases} 0, & t : \text{짝수} \\ 1, & t : \text{홀수} \end{cases}$$

- 평균이 t에 무관하지 않기 때문에 정상시계열이 아니다.

3. ε_t가 $WN(0, \sigma^2)$를 따를 때, 다음과 같은 확률과정 모형에 대하여 각 물음에 답하여라.

$$Z_t - 0.8Z_{t-1} = \varepsilon_t$$

(1) 모형을 $\boldsymbol{\phi}(B)(Z_t - \mu) = \boldsymbol{\theta}(B)\varepsilon_t$로 표현하고, $\boldsymbol{\phi}(B), \boldsymbol{\theta}(B)$ 그리고 μ를 명시하여라.

$$(1 - 0.8B)Z_t = \varepsilon_t, \ \ \boldsymbol{\phi}(B) = 1 - 0.8B, \ \ \boldsymbol{\theta}(B) = 1, \ \ \mu = 0$$

(2) 모형은 $AR(p), MA(q)$ 혹은 $ARMA(p, q)$ 모형 중 어느 것인가? p와 q도 함께 명시하여라.

$$AR(1)$$

(3) ACF $\rho_k, \ \ k = 1, \ldots, 5$를 계산하여라.

$$\rho_k = \phi^k = 0.8^k, \ \ k \geq 0$$

(4) PACF $\phi_{kk}, \ \ k = 1, \ldots, 5$를 계산하여라.

$$\phi_{11} = \rho_1 = 0.8, \ \ \phi_{kk} = 0, \ \ k \geq 2$$

(5) 위에서 구한 ρ_k, ϕ_{kk}의 상관도표를 그려라.

4. 다음의 모형에 대하여 다음 물음에 답하여라.

$$Z_t = \varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} - \theta_2\varepsilon_{t-2},\ \ \varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$$

(1) 자기상관함수(ACF) $\rho_h,\ \ h = 1, 2, \ldots$를 구하시오.

$$\begin{aligned}
Cov(Z_t, Z_t) &= Cov(\varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} - \theta_2\varepsilon_{t-2}, \varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} - \theta_2\varepsilon_{t-2}) \\
&= Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_t) + \theta_1^2 Cov(\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-1}) + \theta_2^2 Cov(\varepsilon_{t-2}, \varepsilon_{t-2}) = (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2)\sigma^2 \\
Cov(Z_t, Z_{t+1}) &= Cov(\varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} - \theta_2\varepsilon_{t-2}, \varepsilon_{t+1} - \theta_1\varepsilon_t - \theta_2\varepsilon_{t-1}) \\
&= -\theta_1 Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_t) = \theta_1\theta_2 Cov(\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-1}) = -\theta_1(1 - \theta_2)\sigma^2 \\
Cov(Z_t, Z_{t+2}) &= Cov(\varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} - \theta_2\varepsilon_{t-2}, \varepsilon_{t+2} - \theta_1\varepsilon_{t+1} - \theta_2\varepsilon_t) \\
&= -\theta_2 Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_t) = \theta_2\sigma^2 \\
Cov(Z_t, Z_{t+3}) &= Cov(\varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} - \theta_2\varepsilon_{t-2}, \varepsilon_{t+3} - \theta_1\varepsilon_{t+2} - \theta_2\varepsilon_{t+1}) = 0
\end{aligned}$$

$$\gamma_k = \begin{cases} (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2)\sigma^2, & k = 0 \\ -\theta_1(1 - \theta_2)\sigma^2, & k = 1 \\ \theta_2\sigma^2, & k = 2 \\ 0, & k \geq 3 \end{cases} \Rightarrow \ \rho_k = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ \dfrac{-\theta_1(1 - \theta_2)}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2} & k = 1 \\ \dfrac{-\theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2} & k = 2 \\ 0 & k \geq 3 \end{cases}$$

(2) 부분자기상관함수(PACF) $\phi_{11},\ \phi_{22}$를 구하시오.

$$\begin{aligned}
\phi_{11} &= \rho_1 \\
\phi_{22} &= \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1 - \rho_1^2} = \frac{= \theta_1(1 + \theta_1^2 + \theta_2^2) + \theta_1^2(1 - \theta_2)^2}{(1 + \theta_1^2 + \theta_2^2)^2 + \theta_1^2(1 - \theta_2)^2}
\end{aligned}$$

5. ε_t가 $WN(0, \sigma^2)$를 따를 때, 다음과 같은 확률과정의 모형들에 대하여 각 물음에 답하여라. (단, (3)-(5)는 R을 이용하여, 각 모형을 따르는 10000개의 데이터를 생성한 후, acf, pacf 함수를 이용한다.)

$$\text{모형 } 1 : Z_t - 9.5 = \varepsilon_t - 1.3\varepsilon_{t-1} + 0.6\varepsilon_{t-2}$$
$$\text{모형 } 2 : Z_t - 0.6Z_{t-1} = 38 + \varepsilon_t + 0.9\varepsilon_{t-1}$$
$$\text{모형 } 3 : Z_t = 26 + 0.6Z_{t-1} + \varepsilon_t + 0.2\varepsilon_{t-1} + 0.5\varepsilon_{t-2}$$
$$\text{모형 } 4 : Z_t - 1.5Z_{t-1} + 0.7Z_{t-2} = 100 + \varepsilon_t - 0.5\varepsilon_{t-1}$$

(1) 각 모형을 $\boldsymbol{\phi}(B)(Z_t - \mu) = \boldsymbol{\theta}(B)\varepsilon_t$로 표현하고, $\boldsymbol{\phi}(B), \boldsymbol{\theta}(B)$ 그리고 μ를 명시하여라.

(2) 각 모형은 $AR(p), MA(q)$ 혹은 $ARMA(p, q)$모형 중 어느 것인가? p와 q도 함께 명시하여라.

(3) 각 확률과정에 대하여 ACF ρ_k, $k = 1, \ldots, 10$를 계산하여라.

(4) 각 확률과정에 대하여 PACF $\phi_{kk}, k = 1, \ldots, 10$를 계산하여라.

(5) 위에서 구한 ρ_k, ϕ_{kk}의 상관도표를 그려라.

모형1 : $Z_t - 9.5 = \varepsilon_t - 1.3\varepsilon_{t-1} + 0.6\varepsilon_{t-2}$

- $(Z_t - 9.5) = (1 - 1.3B + 0.6B^2)\varepsilon_t$: $MA(2)$
- $\boldsymbol{\phi}(B) = 1$, $\boldsymbol{\theta}(B) = 1 - 1.3B + 0.6B^2$, $\mu = 9.5$

모형2 : $Z_t - 0.6Z_{t-1} = 38 + \varepsilon_t + 0.9\varepsilon_{t-1}$

- $\mu = \delta/(1 - \phi_1 - \cdots - \phi_p) = 38/(1 - 0.6) = 95$
- $(1 - 0.6B)(Z_t - 95) = (1 + 0.9B)\varepsilon_t$: $ARMA(1, 1)$
- $\boldsymbol{\phi}(B) = 1 - 0.6B$, $\boldsymbol{\theta}(B) = 1 = 0.9B$, $\mu = 95$

모형3 : $Z_t = 26 + 0.6Z_{t-1} + \varepsilon_t + 0.2\varepsilon_{t-1} + 0.5\varepsilon_{t-2}$

- $\mu = \delta/(1 - \phi_1 - \cdots - \phi_p) = 26/(1 - 0.6) = 65$
- $(1 - 0.6B)(Z_t - 65) = (1 + 0.2B + 0.5B^2)\varepsilon_t$: $ARMA(1, 2)$
- $\boldsymbol{\phi}(B) = 1 - 0.6B$, $\boldsymbol{\theta}(B) = 1 + 0.2B + 0.5B^2$, $\mu = 65$

모형4 : $Z_t - 1.5Z_{t-1} + 0.7Z_{t-2} = 100 + \varepsilon_t - 0.5\varepsilon_{t-1}$

- $\mu = \delta/(1 - \phi_1 - \cdots - \phi_p) = 100/(1 - 1.5 + 0.7) = 500$
- $(1 - 1.5B + 0.7B^2)(Z_t - 500) = (1 - 0.5B)\varepsilon_t$: $ARMA(2, 1)$

– $\boldsymbol{\phi}(B) = 1 - 1.5B + 0.7B^2,\ \ \boldsymbol{\theta}(B) = 1 - 0.5B,\ \ \mu = 500$

6. 다음과 같은 ACF를 갖는 가역성 조건을 만족하는 $MA(1)$ 과정의 모형을 구하라.

$$\rho_0 = 0, \rho_1 = \frac{1}{9}, \rho_k = 0,\ k \geq 0$$

- $MA(1) : Z_t - \mu = (1 - \theta B)\varepsilon_t,\ \ |\theta| < 1$

  $$\rho_1 = \frac{-\theta}{1+\theta^2} = \frac{1}{9} \Leftrightarrow -9\theta = 1 + \theta^2$$

  $$\Leftrightarrow \theta^2 + 9\theta + 1 = 0 \Rightarrow \theta = \frac{-9 \pm \sqrt{77}}{2} \Rightarrow \theta = \frac{-9 + \sqrt{77}}{2} \approx -0.11$$

- $Z_t - \mu = (1 + 0.11B)\varepsilon_t$

7. (**R실습**). 확률과정 $Z_t = 1 + 0.9Z_{t-1} + \varepsilon_t, t = 1, 2, \ldots, 100$ 으로부터 시계열 자료를 생성한 후 다음을 수행하라. 단 $Z_0 = 10$ 의 값을 주고, $\varepsilon_t \sim_{i.i.d.} N(0, 1)$ 이다.

   (1) $\{Z_t\}$ 의 시계열그림을 그려라.

   (2) SACF, $\hat{\rho}_h,\ \ h = 1, 2, \ldots, 10$ 을 구하여 표본상관도표를 그려라.

   (3) SPACF, $\hat{\phi}_{kk},\ \ k = 1, 2, \ldots, 10$ 을 구하여 표본상관도표를 그려라.

   (4) $\{Z_t, Z_{t-1}\}$ 의 산점도를 그리고, 이 산점도와 $\hat{\rho}_1$ 의 관계를 설명하여라.

   (5) $\{Z_t, Z_{t-2}\}$ 의 산점도를 그리고, 이 산점도와 $\hat{\rho}_2$ 의 관계를 설명하여라.