UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

GRUPY AUTOMORFIZMOV LINEÁRNYCH KÓDOV

Diplomová práca

2022 Bc. Branislav Boráň

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

GRUPY AUTOMORFIZMOV LINEÁRNYCH KÓDOV

Diplomová práca

Študijný program:	Aplikovaná informatika
Študijný odbor:	2511 Aplikovaná informatika
Školiace pracovisko:	Katedra algebry a geometrie
Školiteľ:	doc. RNDr. Róbert Jajcay, DrSc.

Bratislava, 2022

Bc. Branislav Boráň

63836751

Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta:	Branislav Boráň
Študijný program:	aplikovaná informatika (Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)
Študijný odbor:	informatika
Typ záverečnej práce:	diplomová
Jazyk záverečnej práce:	anglický
Sekundárny jazyk:	slovenský

Názov: Automorphism groups of linear codes and linear codes with prescribed automorphism groups
Grupy automorfizmov lineárnych kódov a lineárne kódy s predpísanou grupou automorfizmov

Anotácia: Lineárne kódy sú podpriestory konečnorozmerných vektorových priestorov nad konečnými poľami. Majú preto bohaté grupy automorfizmov, ktoré zároveň obsahujú množstvo informácií o uvažovanom kóde. Určenie úplnej grupy automorfizmov kódu je výpočtovo náročná úloha. Namiesto určenia grupy automorfizmov pre daný kód sa preto uvažuje obrátená úloha zostrojenia kódu s predpísanou grupou automorfizmov. Cieľom práce je preskúmať oba smery tejto interakcie.

Cieľ: Cieľom navrhovanej problematiky je poskytnúť študentovi výpočtovo zložitý problém vyžadujúci dôkladné porozumenie štruktúry uvažovaných objektov ako aj programátorské a organizačné schopnosti.

Literatúra: R. Hill, A first course in coding theory, Oxford University Press, 1993
S. Roman, Coding and information theory, Springer, 1992
R. Jajcay, P. Potocnik and Stephen E. Wilson, Half-cyclic, dihedral and half-dihedral codes,
J. of Applied Mathematics and Computing 64 (2020), 691-708.

Kľúčové slová: lineárny kód, grupa automorfizmov, konečné pole

Vedúci:	doc. RNDr. Róbert Jajcay, DrSc.
Katedra:	FMFI.KAG - Katedra algebry a geometrie
Vedúci katedry:	doc. RNDr. Pavel Chalmoviansky, PhD.
Dátum zadania:	09.12.2020

Dátum schválenia: 10.12.2020

prof. RNDr. Roman Ďurikovič, PhD.
garant študijného programu

....

študent vedúci práce

Čestne prehlasujem, že túto diplomovú prácu som vypracoval samostatne len s použitím uvedenej literatúry a za pomoci konzultácií u môjho školiteľa.

. . . .

Bratislava, 2022 Bc. Branislav Boráň

Poďakovanie

Chcel by som sa v prvom rade poďakovať môjmu školiteľovi doc. RNDr. Róbertovi Jajcayovi, DrSc. za odbornú pomoc a usmernenia pri písaní tejto práce, za materiály, cenné rady, ktoré mi veľmi pomohli pri riešení tejto diplomovej práce. V neposlednom rade chcem tiež poďakovať všetkým mojím kamarátom a celej mojej rodine za podporu počas môjho štúdia.

Abstrakt

Táto práca sa venuje problematike skúmaniu grúp automorfizmov lineárnych kódov ako aj lineárnym kódom s predpísanou grupou automorfizmov. V našej práci sa zameriavame na LDPC kódy.

Kľúčové slová: automorfizmus grúp, LDPC, klietky

Abstract

This thesis deals with the problem of examining groups of automorphisms of linear codes as well as linear codes with a prescribed group of automorphisms. In our work we focus on LDPC codes.

Keywords: Automorphism groups, LDPC, cages

Obsah

Kapitola 1

Úvod

xxxxxx

Kapitola 2

Motivácia

xxxxxx

Kapitola 3

Analýza problému

3.1 Lineárny kód

Lineárny kód $C(n, k)$ je k-rozmerný lineárny podpriestor priestoru F_n^2. F_n^2 je priestor n–rozmerných vektorov, kde koordináty berieme z poľa F^2. k-rozmerný lineárny podpriestor obsahuje práve k lineárne nezávislých vektorov. Ak by sme zobrali k takých vektorov, potom tieto vektory generujú daný k-rozmerný podpriestor a hovoríme, že tvoria bázu podpriestoru.[MTSB13] [HP03] Ak je splnená vlastnosť, ktorá hovorí, že súčet 2 kódových slov $mod\ 2$ je kódové slovo, tak vieme nájsť Generačnú maticu lineárneho kódu.[Mal07]

3.1.1 Generujúca matica lineárneho kódu

Generujúca matica lineárneho kódu G je zostrojená z bázy lineárneho kódu tak, že riadky matice predstavujú prvky bázy. Riadky generujúcej matice sú lineárne nezávislé vektory dĺžky n. [MTSB13] [HP03] Nech $\vec{m}$ je vstup (nekódované slovo), $\vec{v}$ je výstup (kódované slovo), C je označenie lineárneho kódu, potom platí:

$$C = \{\vec{m} \times G : \vec{m} \in F_2^k\}, \quad \vec{v} = \vec{m} \times G \tag{3.1}$$

3.1.2 Kontrolná matica lineárneho kódu

V k-rozmernom linearnom kóde $C(n,k)$ v F_n^2 potom existuje $n-k$ lineárne nezávislých vektorov $\vec{v}$ takých, že každé kódové slovo je kolmé na všetky tieto vektory. Keď týchto $n-k$ vektorov zoberieme ako riadky matice, dostaneme kontrolnú maticu lineárneho kódu H. [MTSB13] [HP03] Ľubovoľný vektor $\vec{v}$ je kódovým slovom práve vtedy, ak platí:

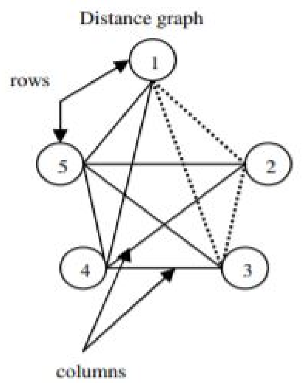
$$C = \{\vec{v} \in F_2^n : H \times \vec{v}^T = 0\} \tag{3.2}$$

3.1.3 LDPC kódy

LDPC kódy (z angl. low density parity check code) sú lineárne samoopravné kódy, ktoré jednak umožňujú prenos dát rýchlosťou blízkou kapacite kanálu a zároveň pre ne existujú vysoko účinné dekódovacie algoritmy. Kódy majú veľmi riedku kontrolnú maticu, pomocou ktorej sa dajú opraviť chyby v kódových slovách. Ich kontrolná matica obsahuje menej ako 1% jednotiek.[MTSB13] Hlavnou nevýhodou väčšiny LDPC kódov je vysoká časová náročnosť ich kódovacieho algoritmu. Výhodou je paralelizmus pri dekódovaní a jednoduché výpočtové operácie. Dekódovacie výpočty sú rozdelené do 2 množín uzlov a to do kontrolných uzlov a premenných uzlov. Uzol na jednej strane je spojený s uzlom na druhej strane, čo umožňuje paralelné výpočty na každej strane.[Mal07] Téme LDPC kódov som sa okrajovo venoval aj vo svojej bakalárskej práci, v ktorej som skúmal hostotu inverzií riedkych cyklických matíc. Zameral som sa však na QC-MDPC McElieceov kryptosystém. Rozdiel medzi MDPC kódmi a LDPC je v hustote kontrolnej matice, ktorá môže byť trochu hustejšia ako pri LDPC kódoch (obsahuje menej ako 2% jednotiek).[Bor18]

3.2 Grafová reprezentácia LDPC kódov

Matica LDPC môže byť reprezentovaná grafom vzdialenosti, v ktorom riadky matice predstavujú vrcholy a stĺpce matice reprezentujú hrany grafu. Stĺpec je potom množina hrán formujúca kompletný graf medzi vrcholmi spojenými v stĺpci. Nasledujúci obrázok ilustruje grafovú reprezentáciu matice LDPC kódu odvodenú z grafu vzdialenosti:[Mal07]



Matrix form

1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1	1	0	0	0
0	1	0	0	1	0	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	0	1	0	1
0	0	0	1	0	0	1	0	1	1

Obr. 3.1: Vzťah medzi grafom a maticou [Mal07]

Graf vzdialenosti je formovaný cestami hrán alebo vrcholov. Cyklus dĺžky g v grafe korešponduje s cyklom dĺžky $2g$ v maticovej forme.

3.2.1 Základné pojmy

- Dĺžka kódu - špecifikuje dimenzie $(M \times N)$ kontrolnej matice H. M predstavuje počet riadkov matice a N je počet stĺpcov.

- Kódová váha a rate (R) - predstavuje počet bitov (informácií) nad celkovým počtom prenesených bitov. Rate možno vyjadriť vzťahom: [MTSB13]
$$R = (N - M)/N \tag{3.3}$$

- Minimálna Hammingová (kódová) vzdialenosť $minHW(\vec{u}, \vec{v})$ - Nech sú vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$ kódové slová. Minimálna Hammingová vzdialenosť 2 vektorov $\vec{u} \in F_n^2$ a $\vec{v} \in F_n^2$ je počet koordinátov, na ktorých sa vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$ líšia.[MTSB13] [HP03]

- Obvod (g) - ovplyvňuje dekódovanie LDPC kódu. V grafovej reprezentácií LDPC kódu sa jedná o najmenší cyklus v grafe. Jeho dĺžku zrátavame iba pomocou vrcholov alebo hrán. V matici LDPC kódu je dĺžka obvodu $2g$, pretože cyklus alternuje medzi riadkami a stĺpcami z čoho vyplýva, že cyklus grafu reprezentuje iba polovicu maticového kódu.[Mal07]

- Moorov graf - Pravidelný graf stupňa d a parametra k vo forme stromu vyhľadávania do šírky začínajúceho z ľubovoľného vrcholu V, ktorého počet vrcholov vieme dostať ako:
$$1 + d\sum_{i=0}^{k-1}(d-1)^i \tag{3.4}$$

- Rád grafu - Predstavuje počet vrcholov daného grafu

3.2.2 Automorfizmus grafu

Automorfizmus grafu je permutácia ϕ všetkých vrcholov grafu, ktorá zachováva jeho štruktúru takým spôsobom, že akékoľvek 2 vrcholy U a V susedia iba vtedy a len vtedy ak platí, že $\phi(U)$ susedí s $\phi(V)$.[EJ13] Zjednodušene môžme povedať, že sa jedná o bijektívne zobrazenie, pri ktorom sa každý vrchol grafu a každá hrana zobrazí na iný vrchol a hranu, hovoríme tiež, že ide o jeho obraz. Množina všetkých automorfizmov grafu G tvorí grupu automorfizmov $Aut(G)$. Moorové grafy vlastnia grupu automorfizmov, ktorá prechodne pôsobí na vrcholy daného grafu.[EJ13]

3.2.3 Klietky

Na konštrukciu LDPC kódov môžme využiť grafy vzdialenosti. Tieto grafy delíme na regulárne s vrcholmi rovnakého stupňa (napr. Moorové grafy) a neregulárne s vrcholmi rôznych stupňov.[Mal07] V našej práci sa budeme venovať regulárnym grafom vzdialenosti. Klietka $cage(k, g)$ je k-regulárny graf obvodu g s najmenším možným počtom vrcholov $M(k, g)$.[Mal07] Výpočet minimálneho počtu vrcholov pre klietku sa líši podľa toho, či je jej obvod párny alebo nepárny:

- g - nepárne:

$$M(k,g) \leq 1 + \sum_{i=0}^{(g-3)/2} k(k-1)^i = \frac{k(k-1)^{(g-1)/2} - 2}{k-2} \tag{3.5}$$

- g - párne:

$$M(k,g) \leq 2 \sum_{i=0}^{(g-2)/2} k(k-1)^i = \frac{2(k-1)^{g/2} - 2}{k-2} \tag{3.6}$$

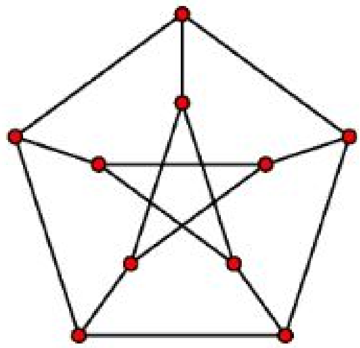
Dolné ohraničenie počtu vrcholov $M(k, g)$ sa tiež nazýva Moorové ohraničenie.[EJ13]

Pre klietku ako Moorov graf platí:

$$d = k \tag{3.7}$$

Aj keď neexistuje jednotná konštrukcia klietok, existuje niekoľko známych klietok pre stupeň vrchola k a obvod g. Ukážeme si niektoré z nich:

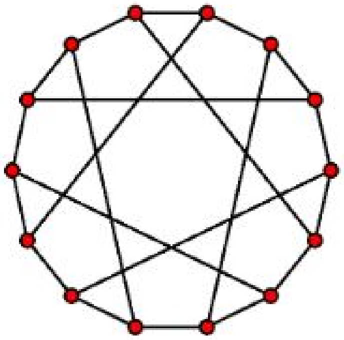
- Petersenov graf - cage(3,5):



Obr. 3.2: Petersenov graf [EJ13]

Petersenov graf má rád 10. Graf je vrcholovo tranzitívny.[EJ13]

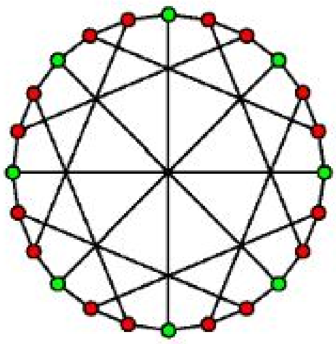
- Heawoodov graf - cage(3,6):



Obr. 3.3: Heawoodov graf [EJ13]

Heawoodov graf má rád 14 a počet automorfizmov je 336. Graf je vrcholovo tranzitívny.

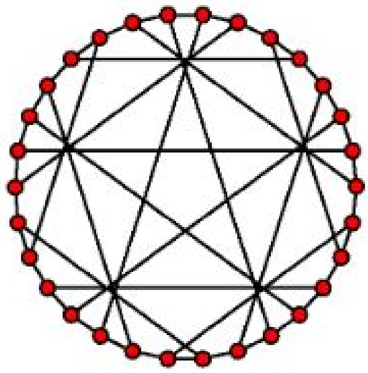
- McGeeho graf - cage(3,7):



Obr. 3.4: McGeeho graf [EJ13]

McGeeho graf má rád 24 a počet automorfizmov je 32. Graf nie je vrcholovo tranzitívny.[EJ13]

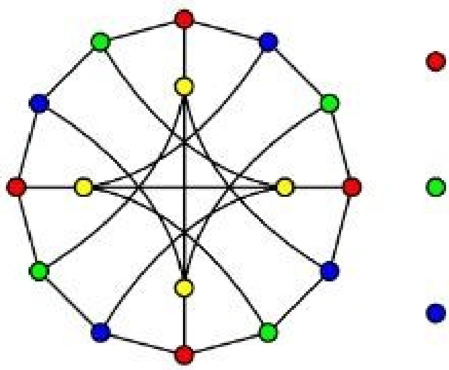
- Tutteho-Coxeterov graf - cage(3,8):



Obr. 3.5: Tutteho-Coxeterov graf [EJ13]

Tutteho-Coxterov graf má rád 30 a počet automorfizmov je 1440. Graf je vrcholovo tranzitívny.[EJ13]

- Balabanov graf - cage(3,11): Balabanov graf má 112 vrcholov a počet automorfizmov je 64. Graf nie je vrcholovo tranzitívny.[EJ13]
- Bensonov graf - cage(3,12): Bensonov graf má 126 vrcholov a počet automorfizmov je 12096. Graf je vrcholovo tranzitívny.[EJ13]
- Robertsonov graf - cage(4,5):



Obr. 3.6: Robertsonov graf [EJ13]

Ďalšie známe klietky:

- cage(4,7) - Exoo, McKay a Nadonov graf
- cages(5,5): počet automorfizmov je 20, 30 a 120
- cage(7,5) - Hoffmanov-Singletonov graf
- cage(7,6) - O'Keefe a Wongov graf[EJ13]

Kapitola 4

Návrh riešenia

Problematiku riešime v programe Sage [The], ktorý je založený na programovacom jazyku Python. Zvolili sme ho, pretože ponúka veľké množstvo vopred naimplementovaných funkcií, ktoré nám podstatne uľahčia prácu s grafmi, maticami a grupami automorfizmov. Využili sme online aplikáciu CoCalc [CoC], ktorá nám umožňuje vytvárať Sage projekty priamo na internete. CoCalc prevádzkuje prostredie Ubuntu Linux, s ktorým je možné komunikovať cez terminál a taktiež poskytuje prístup k ďalším možnostiam Linuxu.

4.1 Generovanie incidenčných matíc, automorfizmov zo zadaných klietok

Program Sage ponúka zopár vopred naimplementovaných grafov, ktoré môžme využiť ako klietky. Jedná sa o Petersenov graf - $cage(3,5)$, Heawoodov graf - $cage(3,6)$, McGeeho graf - $cage(3,7)$, Tutteho-Coxeterov graf - $cage(3,8)$, Balabanov graf - $cage(3,10)$, Robertsonov graf - $cage(4,5)$, Hoffmanov-Singletonov graf - $cage(7,5)$. Z týchto grafov vieme zistiť cykly formujúce daný graf. Na zistenie týchto cyklov je potrebné naimplementovať metódu, ktorá získa utriedený zoznam vrcholov v cykloch(pomocou *graph.minimum_ cycle_ basis()* [The]) a následne z grafu vytvoríme podgrafy obsahujúce tieto vrcholy (pomocou metódy *subgraph()*[The], zoznam vrcholov bude parameter). Takýto podgraf obsahuje len 1 cyklus (získame pomocou metódy *cycle_ basis()*[The]), ktorý pridáme do nášho zoznamu cyklov, ktoré sledujeme. ďalej vieme získať incidenčnú maticu (pomocou metódy *incidence_ matrix()*[The]), zoznam všetkých vrcholov (pomocou metódy *vertices()*[The]), zoznam všetkých hrán (pomocou metódy *edges()*[The]) a zoznam všetkých automorfizmov(pomocou *automorphism_ group()*[The]). Pre výpočet počtu vrcholov, počtu hrán a počtu automorfizmov nám stačí iba zistiť veľkosť ich zoznamov. Na verifikáciu existencie klietok bude potrebné vytvoriť metódu, ktorá z parametrov klietky zistí Moorove ohraničenie a na jej základe vieme otestovať počet vrcholov, hrán, minimálny rozmer incidenčnej matice. Na verifikáciu ako aj výpočet bude potrebné zostrojiť samostatné metódy.

4.2 Generovanie incidenčných matíc, automorfizmov zo zadaného zoznamu susedností

Uvažujeme existujúce vstupné textové súbory, ktoré nesú informácie o susednostiach všetkých uvažovaných vrcholov jednotlivo pre 1 klietku. Tieto vstupné súbory sme získali na webovej stránke [Exo]. Je potrebné vytvoriť metódu, ktorá nám rozdelí tieto dáta na zoznamy vrcholov a vieme si z nich vytvoriť hrany, ktoré postupne popridávame prázdnemu grafu (vytvorený pomocou metódy *EmptyGraph()*[The]) a tým z neho vytvoríme požadovanú klietku, ktorú využijeme na spracovanie a získanie informácií ako v predchádzajúcom návrhu zo zadaných klietok. Rovnako aj testovanie s validáciou.

4.3 Generovanie klietky a následne incidenčných matíc, automorfizmov

Generovanie klietok nemá jednotný prístup, je potrebné k nim pristupovať jednotlivo alebo preskúmať skupiny, ktoré sa generujú podobným spôsobom.[EJ13]

4.3.1 Generovanie cage(6,4)

Klietku vygenerujeme ako bipartitný graf. V Sage použijeme metódu *DegreeSequenceBipartite(s,s)*[The], ktorá bude mať 2 rovnaké parametre s, pričom každý predstavuje zoznam vrcholov. Najskôr je potrebné si vypočítať Moorovo ohraničenie pre minimálny počet vrcholov, ktorú už máme implementovanú. $Cage(6,4)$ je taký typ klietky, ktorej počet vrcholov m je rovnaký ako minimálny počet vrcholov z Moorovho ohraničenia.[Mal07] Tieto vrcholy rozdelím na 2 zoznamy takým spôsobom, že každý zoznam bude obsahovať $\frac{m}{2}$ vrcholov stupňa k a teda platí:

$$s = [k, k, k, k, k, k] \;\; len(s) = \frac{m}{2} \tag{4.1}$$

Grafu nastavíme vrcholy pomocou metódy *set_vertex()*[The]. Výsledný graf bude $cage(6,4)$ ku ktorému potom pristupujeme rovnako ako v predošlých prípadoch.

4.4 Experimentálne generovanie incidenčných matíc

4.4.1 Generovanie incidenčnej matice z parametrov cage(6,4)

Využijeme parametre stupeň $k = 6$, počet vrcholov $m = 12$ a počet hrán $pocetHran = 36$. Potrebujeme metódu na vytvorenie vektora s počtom jednotiek k a počtom núl $pocetHran - k$. Tento vektor rovnomerne náhodne permutujeme (pomocou *metódy numpy.random.shuffle()*[The] s parametrom vektora) a získame náhodný vektor s Hammingovou váhou k. Incidenčnú maticu môžme skontrštruovať takým spôsobom, že do nej postupne pridávame takéto náhodné vektory avšak musí platiť, že v každom stĺpci musí byť maximálna Hammingová váha 2. Na túto podmienku si vytvoríme ďaľšiu samostatnú metódu, kde si inicializujeme nulový vektor (pomocou *zero_vector(SR, pocetHran)*[The]). V prípade, že táto podmienka nie je splnená je potrebné vymazať posledný vektor a vygenerovať ho nanovo. Takýmto spôsobom vieme naplniť všetky riadky matice avšak môže obsahovať aj duplicitné hrany. Tie odstránime tým, že si maticu vložíme do grafu, získame z neho všetky hrany, ktoré v množine set zbavíme duplicitných výskytov a následne ich opäť vložíme do grafu, z ktorého získame neúplnú incidenčnú maticu. Niekedy je duplicitných hrán viac niekedy menej. Pomocou cyklu získavame opakovane hrany ošetrené o duplicitu až kým nedostaneme $pocetHran - 2$ jedinečných hrán. Posledné 2 hrany si na základe aktuálneho stavu už vieme dopočítať a dopočítame posledné 2 stĺpce matice tak aby mal každý riadok Hammingovú váhu k a každý stĺpec 2. Výslednú maticu opäť preverím na duplicity a získavam konečný tvar potencionálnej incidenčnej matice. Keďže tento postup nie je overený, budeme ho realizovať v 3 pokusoch s rovnakými parametrami a na záver vyhodnotíme, či sa nám podarilo získať maticu incidencie $cage(6, 4)$

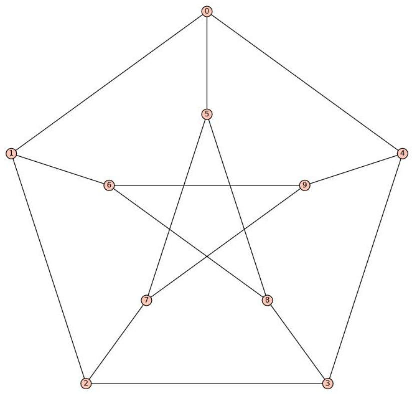
alebo nie.

Kapitola 5

Výsledky

5.1 Generovanie incidenčných matíc, automorfizmov zo zadaných klietok

5.1.1 Petersenov graf - cage(3,5)



Obr. 5.1: Petersenov graf [The]

- Cykly formujúce graf:

  $[[[4, 3, 8, 5, 0]], [[1, 2, 3, 4, 0]], [[1, 6, 8, 5, 0]], [[1, 2, 7, 5, 0]], [[4, 9, 7, 5, 0]], [[1, 6, 9, 4, 0]]]$

- Vrcholy v grafe: 10 vrcholov

- Hrany v grafe: 15 hrán

  $[(0,1),(0,4),(0,5),(1,2),(1,6),(2,3),(2,7),(3,4),$

  $(3,8),(4,9),(5,7),(5,8),(6,8),(6,9),(7,9)]$

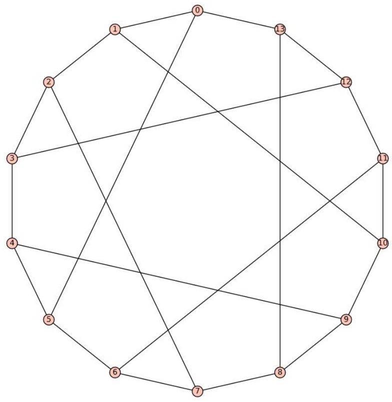
- Počet automorfizmov: 120

- Incidenčná matica:

```
[1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
[1 0 0 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
[0 0 0 1 0 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0]
[0 0 0 0 0 1 0 1 1 0 0 0 0 0 0]
[0 1 0 0 0 0 0 1 0 1 0 0 0 0 0]
[0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 1 1 0 0 0]
[0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 1 1 0]
[0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 1]
[0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 1 1 0 0]
[0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 1 1]
```

Obr. 5.2: Incidenčná matica Petersenovho grafu

5.1.2 Heawoodov graf - cage(3,6)



Obr. 5.3: Heawoodov graf [The]

- Cykly formujúce graf:

  $[[[5, 6, 11, 12, 13, 0]], [[1, 2, 3, 12, 13, 0]], [[1, 10, 11, 6, 5, 0]], [[1, 2, 7, 8, 13, 0]], [[5, 4, 3, 12, 13, 0]], [[1, 10, 9, 4, 5, 0]], [[5, 6, 7, 8, 13, 0]], [[1, 10, 9, 8, 13, 0]]]$

- Vrcholy v grafe: 14 vrcholov

- Hrany v grafe: 21 hrán

  $[(0, 1), (0, 5), (0, 13), (1, 2), (1, 10), (2, 3), (2, 7), (3, 4), (3, 12), (4, 5), (4, 9), (5, 6), (6, 7), (6, 11), (7, 8), (8, 9), (8, 13), (9, 10), (10, 11), (11, 12), (12, 13)]$

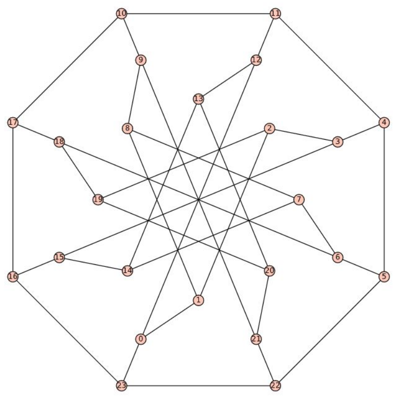
- Počet automorfizmov: 336

- Incidenčná matica:

```
[1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
[1 0 0 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
[0 0 0 1 0 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
[0 0 0 0 0 1 0 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
[0 0 0 0 0 0 0 1 0 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
[0 1 0 0 0 0 0 0 0 1 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0]
[0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 1 0 0 0 0 0 0]
[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 0 0 0 0]
[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 1 0 1 0 0 0]
[0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 0 0]
[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 1 1 0]
[0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1]
[0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 1]
```

Obr. 5.4: Incidenčná matica Heawoodovho grafu

5.1.3 McGeeho graf - cage(3,7)



Obr. 5.5: McGeeho graf[The]

- Cykly formujúce graf:

  $[[[23, 22, 21, 20, 13, 12, 0]], [[1, 2, 3, 15, 16, 23, 0]], [[1, 8, 9, 10, 11, 12, 0]],$
  $[[1, 2, 19, 20, 13, 12, 0]], [[1, 2, 3, 4, 11, 12, 0]], [[23, 22, 5, 4, 11, 12, 0]],$
  $[[3, 4, 5, 6, 18, 19, 2]], [[2, 19, 18, 6, 7, 8, 1]], [[1, 8, 7, 14, 13, 12, 0]],$
  $[[1, 8, 9, 21, 22, 23, 0]], [[23, 16, 17, 10, 11, 12, 0]], [[23, 16, 15, 14, 13, 12, 0]],$
  $[[3, 15, 16, 17, 18, 19, 2]]]$

- Vrcholy v grafe: 24 vrcholov

- Hrany v grafe: 36 hrán

  $[(0, 1), (0, 12), (0, 23), (1, 2), (1, 8), (2, 3), (2, 19), (3, 4), (3, 15),$
  $(4, 5), (4, 11), (5, 6), (5, 22), (6, 7), (6, 18), (7, 8), (7, 14), (8, 9),$
  $(9, 10), (9, 21), (10, 11), (10, 17), (11, 12), (12, 13), (13, 14), (13, 20), (14, 15),$
  $(15, 16), (16, 17), (16, 23), (17, 18), (18, 19), (19, 20), (20, 21), (21, 22), (22, 23)]$

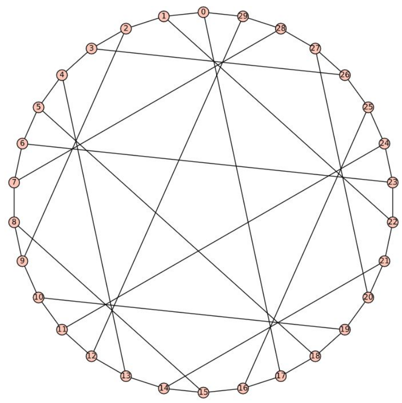
- Počet automorfizmov: 32

- Incidenčná matica:

```
[1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
[1 0 0 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
[0 0 0 1 0 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
[0 0 0 0 0 1 0 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
[0 0 0 0 0 0 0 1 0 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
[0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
[0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
[0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
[0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0]
[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 0 0 0 0 0 0]
[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 1 0 1 0 0 0 0 0]
[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 0 0 0 0]
[0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 0 0 0]
[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 1 1 0 0]
[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 0]
[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1]
[0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 1]
```

Obr. 5.6: Incidenčná matica McGeeho grafu

5.1.4 Tutteho-Coxeterov graf - cage(3,8)



Obr. 5.7: Tutteho-Coxeterov graf [The]

- Cykly formujúce graf:

  $[[[17, 18, 19, 10, 11, 12, 29, 0]], [[1, 2, 3, 26, 25, 16, 17, 0]],$
  $[[1, 22, 23, 6, 7, 28, 29, 0]], [[1, 2, 9, 8, 7, 28, 29, 0]],$
  $[[1, 2, 3, 4, 13, 12, 29, 0]], [[17, 18, 5, 4, 13, 12, 29, 0]],$
  $[[17, 18, 5, 6, 7, 28, 29, 0]], [[1, 22, 21, 20, 19, 18, 17, 0]],$
  $[[1, 2, 9, 10, 19, 18, 17, 0]], [[17, 16, 15, 8, 7, 28, 29, 0]],$
  $[[17, 16, 25, 24, 11, 12, 29, 0]], [[17, 18, 19, 20, 27, 28, 29, 0]],$
  $[[17, 16, 15, 14, 13, 12, 29, 0]], [[1, 22, 21, 14, 13, 12, 29, 0]],$
  $[[17, 16, 25, 26, 27, 28, 29, 0]], [[1, 22, 23, 24, 25, 16, 17, 0]]]$

- Vrcholy v grafe: 30 vrcholov

- Hrany v grafe: 45 hrán

  $[(0, 1), (0, 17), (0, 29), (1, 2), (1, 22), (2, 3), (2, 9), (3, 4), (3, 26),$
  $(4, 5), (4, 13), (5, 6), (5, 18), (6, 7), (6, 23), (7, 8), (7, 28), (8, 9),$
  $(8, 15), (9, 10), (10, 11), (10, 19), (11, 12), (11, 24), (12, 13), (12, 29), (13, 14),$

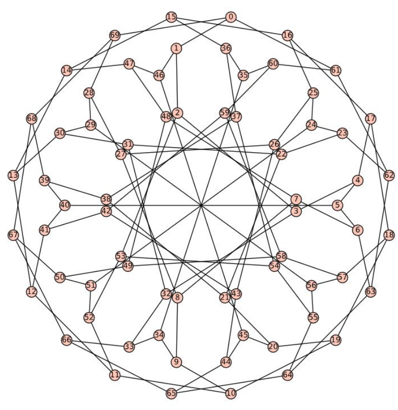
$(14, 15), (14, 21), (15, 16), (16, 17), (16, 25), (17, 18), (18, 19), (19, 20), (20, 21),$
$(20, 27), (21, 22), (22, 23), (23, 24), (24, 25), (25, 26), (26, 27), (27, 28), (28, 29)]$

- Počet automorfizmov: 1440
- Incidenčná matica:

```
[1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
[1 0 0 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
[0 0 0 1 0 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
[0 0 0 0 0 1 0 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
[0 0 0 0 0 0 0 1 0 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
[0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
[0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
[0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0]
[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 1 0 1 0 0 0 0 0 0 0]
[0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 0 0 0 0 0 0]
[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 0 0 0 0 0]
[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 0 0 0 0]
[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 0 0 0]
[0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 0 0]
[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 1 0]
[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1]
[0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1]
```

Obr. 5.8: Incidenčná matica Tutteho-Coxeterovho grafu

5.1.5 Balabanov graf - cage(3,10)



Obr. 5.9: Balabanov(10) graf[The]

- Cykly formujúce graf:

  $[[[1, 46, 47, 14, 13, 30, 29, 28, 69, 0]], [[1, 2, 53, 52, 51, 24, 23, 62, 61, 0]],$
  $[[1, 2, 53, 54, 37, 38, 39, 68, 69, 0]], [[1, 2, 3, 32, 33, 34, 35, 60, 61, 0]],$
  $[[1, 2, 3, 4, 5, 6, 63, 62, 61, 0]], [[2, 3, 4, 17, 18, 19, 20, 45, 46, 1]],$
  $[[1, 2, 3, 4, 5, 40, 39, 68, 69, 0]], [[1, 46, 47, 48, 7, 6, 63, 62, 61, 0]],$
  $[[69, 28, 27, 8, 7, 6, 63, 62, 61, 0]], [[69, 28, 27, 8, 9, 34, 35, 60, 61, 0]],$
  $[[3, 2, 53, 52, 11, 10, 9, 34, 33, 32]], [[2, 53, 52, 11, 10, 19, 20, 45, 46, 1]],$
  $[[2, 53, 52, 11, 12, 13, 14, 47, 46, 1]], [[3, 4, 5, 40, 41, 12, 11, 52, 53, 2]],$
  $[[1, 46, 45, 44, 43, 26, 27, 28, 69, 0]], [[1, 46, 47, 14, 15, 36, 35, 60, 61, 0]],$
  $[[2, 3, 4, 17, 16, 15, 14, 47, 46, 1]], [[3, 4, 17, 16, 25, 24, 51, 52, 53, 2]],$
  $[[3, 4, 17, 18, 57, 56, 55, 54, 53, 2]], [[1, 46, 45, 20, 21, 38, 39, 68, 69, 0]],$
  $[[1, 46, 45, 20, 21, 22, 23, 62, 61, 0]], [[69, 28, 29, 30, 31, 22, 23, 62, 61, 0]],$
  $[[1, 2, 53, 54, 37, 36, 35, 60, 61, 0]], [[69, 28, 27, 26, 25, 24, 23, 62, 61, 0]],$
  $[[1, 46, 47, 48, 49, 50, 67, 68, 69, 0]], [[1, 2, 53, 54, 55, 56, 29, 28, 69, 0]],$
  $[[1, 2, 3, 32, 31, 30, 29, 28, 69, 0]], [[1, 2, 3, 32, 33, 66, 67, 68, 69, 0]],$
  $[[1, 2, 53, 54, 55, 64, 63, 62, 61, 0]], [[69, 68, 67, 66, 65, 64, 63, 62, 61, 0]],$
  $[[69, 68, 39, 40, 41, 42, 59, 60, 61, 0]], [[1, 46, 45, 44, 43, 42, 59, 60, 61, 0]],$
  $[[1, 46, 45, 44, 65, 66, 67, 68, 69, 0]], [[1, 46, 47, 48, 49, 58, 59, 60, 61, 0]],$
  $[[1, 2, 53, 52, 51, 50, 67, 68, 69, 0]], [[69, 28, 29, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 0]]]$

- Vrcholy v grafe: 70 vrcholov

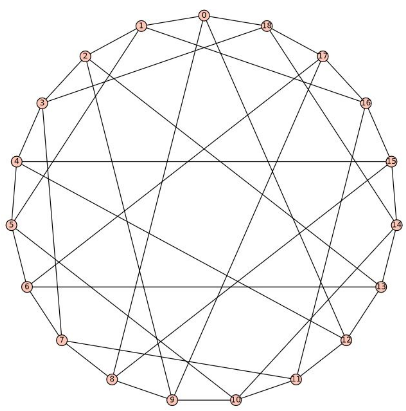
- Hrany v grafe: 105 hrán

  $[(0, 1), (0, 61), (0, 69), (1, 2), (1, 46), (2, 3), (2, 53), (3, 4),$
  $(3, 32), (4, 5), (4, 17), (5, 6), (5, 40), (6, 7), (6, 63), (7, 8),$
  $(7, 48), (8, 9), (8, 27), (9, 10), (9, 34), (10, 11), (10, 19), (11, 12),$
  $(11, 52), (12, 13), (12, 41), (13, 14), (13, 30), (14, 15), (14, 47), (15, 16),$

$(15,36),(16,17),(16,25),(17,18),(18,19),(18,57),(19,20),(20,21),$
$(20,45),(21,22),(21,38),(22,23),(22,31),(23,24),(23,62),(24,25),$
$(24,51),(25,26),(26,27),(26,43),(27,28),(28,29),(28,69),(29,30),$
$(29,56),(30,31),(31,32),(32,33),(33,34),(33,66),(34,35),(35,36),$
$(35,60),(36,37),(37,38),(37,54),(38,39),(39,40),(39,68),(40,41),$
$(41,42),(42,43),(42,59),(43,44),(44,45),(44,65),(45,46),(46,47),$
$(47,48),(48,49),(49,50),(49,58),(50,51),(50,67),(51,52),(52,53),$
$(53,54),(54,55),(55,56),(55,64),(56,57),(57,58),(58,59),(59,60),$
$(60,61),(61,62),(62,63),(63,64),(64,65),(65,66),(66,67),(67,68),(68,69)]$

- Počet automorfizmov: 80

5.1.6 Robertsonov graf - cage(4,5)



Obr. 5.10: Robertsonov graf [The]

- Cykly formujúce graf:

  $[[[1,2,3,18,0]],[[8,7,11,12,0]],[[1,16,17,18,0]],$
  $[[1,16,11,12,0]],[[1,2,9,8,0]],[[1,2,13,12,0]],$
  $[[18,3,4,12,0]],[[18,3,7,8,0]],[[1,5,4,12,0]],$
  $[[8,15,4,12,0]],[[16,17,6,5,1]],[[2,9,10,5,1]],$

[[2, 13, 6, 5, 1]], [[3, 7, 6, 13, 2]], [[18, 14, 15, 8, 0]],
[[18, 17, 9, 8, 0]], [[16, 11, 10, 5, 1]], [[9, 10, 14, 13, 2]],
[[18, 14, 13, 12, 0]], [[1, 16, 15, 8, 0]]]

- Vrcholy v grafe: 19 vrcholov

- Hrany v grafe: 38 hrán

  [(0, 1), (0, 8), (0, 12), (0, 18), (1, 2), (1, 5), (1, 16), (2, 3), (2, 9), (2, 13), (3, 4), (3, 7), (3, 18), (4, 5), (4, 12), (4, 15), (5, 6), (5, 10), (6, 7), (6, 13), (6, 17), (7, 8), (7, 11), (8, 9), (8, 15), (9, 10), (9, 17), (10, 11), (10, 14), (11, 12), (11, 16), (12, 13), (13, 14), (14, 15), (14, 18), (15, 16), (16, 17), (17, 18)]

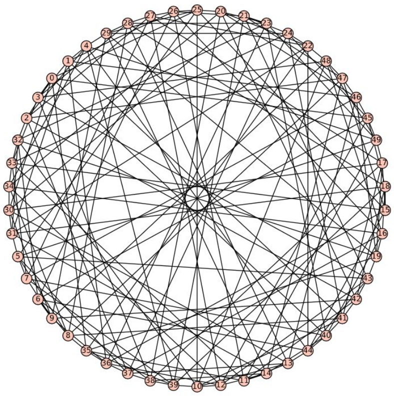
- Počet automorfizmov: 24

- Incidenčná matica:

```
[1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
[1 0 0 0 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
[0 0 0 0 0 1 0 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
[0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
[0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 1 0 0 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 1 0 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
[0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
[0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 1 0 1 1 0 0 0 0 0 0 0]
[0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 0 0 0 0 0 0]
[0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 0 0 0 0 0]
[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 1 1 1 0 0 0]
[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 0 0]
[0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 1 0]
[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1]
[0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 1]
```

Obr. 5.11: Incidenčná matica Robertsonovho grafu

5.1.7 Hoffmanov-Singletonov graf - cage(7,5)



Obr. 5.12: Hoffmanov-Singletonov graf [The]

- Cykly formujúce graf:

  $[[[28, 29, 24, 41, 8]], [[24, 37, 16, 34, 33]],$

  $[[24, 22, 35, 11, 33]], [[41, 24, 37, 36, 1]],$

  $[[45, 24, 21, 26, 6]], [[44, 22, 24, 45, 6]],$

  $[[33, 24, 45, 6, 32]], [[24, 45, 6, 38, 37]],$

  $[[45, 24, 41, 8, 6]], [[45, 24, 29, 9, 6]],$

  $[[24, 22, 20, 46, 45]], [[24, 45, 46, 7, 33]],$

  $[[46, 45, 24, 41, 1]], [[24, 29, 19, 46, 45]],$

  $[[24, 45, 46, 13, 37]], [[24, 21, 47, 46, 45]],$

  $[[45, 24, 37, 2, 0]], [[45, 24, 41, 40, 0]],$

  $[[45, 24, 29, 25, 0]], [[45, 24, 21, 30, 0]],$

  $[[45, 24, 22, 35, 0]], [[45, 24, 33, 3, 0]],$

  $[[24, 22, 27, 7, 33]], [[24, 37, 5, 7, 33]],$

  $[[24, 41, 40, 7, 33]], [[24, 21, 39, 7, 33]],$

  $[[24, 29, 9, 7, 33]], [[21, 24, 45, 18, 39]],$

  $[[39, 21, 24, 29, 4]], [[21, 24, 41, 10, 39]],$

$[[24, 21, 39, 38, 37]], [[39, 21, 24, 22, 35]],$

$[[10, 41, 24, 33, 32]], [[24, 41, 10, 13, 37]],$

$[[24, 22, 48, 10, 41]], [[24, 29, 25, 10, 41]],$

$[[24, 45, 12, 10, 41]], [[37, 24, 29, 25, 5]],$

$[[24, 29, 28, 23, 21]], [[24, 37, 38, 3, 33]],$

$[[24, 21, 30, 13, 37]], [[37, 24, 22, 27, 2]],$

$[[24, 22, 20, 38, 37]], [[24, 41, 17, 38, 37]],$

$[[24, 29, 14, 38, 37]], [[4, 29, 24, 41, 1]],$

$[[21, 24, 29, 19, 43]], [[24, 29, 25, 15, 33]],$

$[[29, 24, 21, 30, 9]], [[45, 24, 29, 14, 12]],$

$[[25, 29, 24, 22, 20]], [[37, 24, 45, 49, 5]],$

$[[24, 29, 25, 26, 21]], [[24, 22, 20, 42, 41]],$

$[[24, 41, 42, 11, 33]], [[24, 45, 18, 42, 41]],$

$[[37, 24, 41, 42, 2]], [[24, 21, 43, 42, 41]],$

$[[24, 29, 9, 42, 41]], [[24, 29, 28, 27, 22]],$

$[[47, 21, 24, 41, 8]], [[24, 29, 28, 13, 37]],$

$[[24, 29, 28, 18, 45]], [[24, 29, 28, 3, 33]], [[2, 37, 24, 33, 32]],$

$[[37, 24, 21, 47, 2]], [[37, 24, 29, 4, 2]],$

$[[24, 22, 48, 3, 33]], [[24, 21, 43, 3, 33]],$

$[[3, 33, 24, 41, 1]], [[24, 21, 26, 16, 37]],$

$[[24, 22, 48, 16, 37]], [[24, 41, 40, 16, 37]],$

$[[24, 29, 19, 16, 37]], [[24, 45, 18, 16, 37]],$

$[[26, 21, 24, 41, 1]], [[24, 22, 27, 26, 21]],$

$[[24, 21, 26, 11, 33]], [[23, 21, 24, 33, 32]],$

$[[33, 24, 22, 31, 32]], [[33, 24, 29, 19, 32]],$

$[[37, 24, 21, 43, 5]], [[24, 45, 18, 15, 33]],$

$[[24, 29, 14, 11, 33]], [[24, 21, 23, 49, 45]],$

$[[37, 24, 41, 8, 5]], [[37, 24, 22, 31, 5]],$

$[[24, 22, 48, 49, 45]], [[48, 22, 24, 21, 47]], [[29, 24, 22, 48, 9]],$

$[[29, 24, 22, 44, 4]], [[29, 24, 45, 49, 4]],$

$[[24, 29, 4, 34, 33]], [[37, 24, 21, 23, 36]],$

$[[22, 24, 37, 36, 35]], [[24, 37, 36, 15, 33]],$

$[[37, 24, 45, 12, 36]], [[37, 24, 29, 9, 36]],$

$[[41, 24, 22, 31, 1]], [[24, 22, 31, 18, 45]],$

$[[29, 24, 22, 31, 14]], [[24, 22, 31, 30, 21]],$

$[[24, 22, 20, 34, 33]], [[24, 41, 8, 34, 33]],$

$[[24, 21, 30, 34, 33]], [[24, 45, 12, 34, 33]],$

$[[24, 29, 19, 17, 41]], [[24, 22, 27, 17, 41]],$

$[[24, 45, 49, 17, 41]], [[24, 21, 30, 17, 41]],$

$[[24, 41, 17, 15, 33]], [[24, 22, 44, 15, 33]],$

$[[24, 21, 47, 15, 33]], [[24, 22, 44, 13, 37]],$

$[[24, 37, 13, 11, 33]], [[45, 24, 22, 27, 12]],$

$[[12, 45, 24, 21, 43]], [[14, 29, 24, 41, 40]],$

$[[29, 24, 21, 47, 14]], [[41, 24, 21, 23, 40]],$

$[[44, 22, 24, 21, 43]], [[19, 29, 24, 22, 35]],$

$[[23, 21, 24, 22, 20]], [[8, 41, 24, 22, 35]],$

$[[24, 45, 49, 11, 33]], [[41, 24, 22, 44, 40]]]$

- Vrcholy v grafe: 50 vrcholov

- Hrany v grafe: 175 hrán

  $[(0, 2), (0, 3), (0, 25), (0, 30), (0, 35), (0, 40), (0, 45), (1, 3), (1, 4),$

  $(1, 26), (1, 31), (1, 36), (1, 41), (1, 46), (2, 4), (2, 27), (2, 32), (2, 37),$

  $(2, 42), (2, 47), (3, 28), (3, 33), (3, 38), (3, 43), (3, 48), (4, 29), (4, 34),$

$(4,39),(4,44),(4,49),(5,7),(5,8),(5,25),(5,31),(5,37),(5,43),$
$(5,49),(6,8),(6,9),(6,26),(6,32),(6,38),(6,44),(6,45),(7,9),$
$(7,27),(7,33),(7,39),(7,40),(7,46),(8,28),(8,34),(8,35),(8,41),$
$(8,47),(9,29),(9,30),(9,36),(9,42),(9,48),(10,12),(10,13),(10,25),$
$(10,32),(10,39),(10,41),(10,48),(11,13),(11,14),(11,26),(11,33),(11,35),$
$(11,42),(11,49),(12,14),(12,27),(12,34),(12,36),(12,43),(12,45),(13,28),$
$(13,30),(13,37),(13,44),(13,46),(14,29),(14,31),(14,38),(14,40),(14,47),$
$(15,17),(15,18),(15,25),(15,33),(15,36),(15,44),(15,47),(16,18),(16,19),$
$(16,26),(16,34),(16,37),(16,40),(16,48),(17,19),(17,27),(17,30),(17,38),$
$(17,41),(17,49),(18,28),(18,31),(18,39),(18,42),(18,45),(19,29),(19,32),(19,35),$
$(19,43),(19,46),(20,22),(20,23),(20,25),(20,34),(20,38),(20,42),(20,46),$
$(21,23),(21,24),(21,26),(21,30),(21,39),(21,43),(21,47),(22,24),(22,27),$
$(22,31),(22,35),(22,44),(22,48),(23,28),(23,32),(23,36),(23,40),(23,49),$
$(24,29),(24,33),(24,37),(24,41),(24,45),(25,26),(25,29),(26,27),(27,28),$
$(28,29),(30,31),(30,34),(31,32),(32,33),(33,34),(35,36),(35,39),(36,37),$
$(37,38),(38,39),(40,41),(40,44),(41,42),(42,43),(43,44),(45,46),(45,49),$
$(46,47),(47,48),(48,49)]$

- Počet automorfizmov: 252000

5.2 Generovanie incidenčných matíc, automorfizmov zo zadaného zoznamu susedností

5.2.1 cage(3,11)

- Počet vrcholov v klietke: 112
- Počet hrán v klietke: 168

- Počet automorfizmov: 64

5.2.2 cage(3,14)

- Počet vrcholov v klietke: 384
- Počet hrán v klietke: 576
- Počet automorfizmov: 96

5.2.3 cage(3,16)

- Počet vrcholov v klietke: 960
- Počet hrán v klietke: 1440
- Počet automorfizmov: 96

5.2.4 cage(3,17)

- Počet vrcholov v klietke: 2176
- Počet hrán v klietke: 3264
- Počet automorfizmov: 544

5.2.5 cage(3,18)

- Počet vrcholov v klietke: 2560
- Počet hrán v klietke: 3840
- Počet automorfizmov: 640

5.2.6 cage(3,20)

- Počet vrcholov v klietke: 5376
- Počet hrán v klietke: 8064
- Počet automorfizmov: 2688

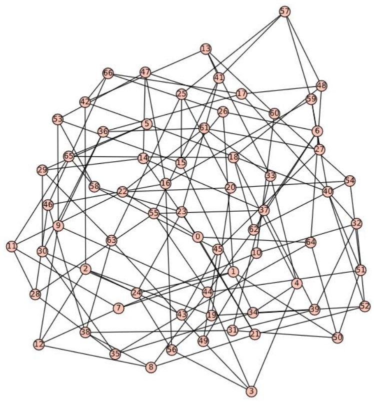
5.2.7 cage(3,23)

- Počet vrcholov v klietke: 49326
- Počet hrán v klietke: 73989
- Počet automorfizmov: 1

5.2.8 cage(3,25)

- Počet vrcholov v klietke: 108906
- Počet hrán v klietke: 163359
- Počet automorfizmov: *nevievygenerova*

5.2.9 cage(4,7)



Obr. 5.13: $cage(4,7)$

- Cykly formujúce klietku:

  $[[[22, 11, 7, 12, 8, 21, 0]], [[22, 11, 28, 55, 37, 14, 0]],$

  $[[22, 20, 25, 63, 29, 14, 0]], [[22, 20, 54, 60, 47, 14, 0]],$

  $[[14, 29, 5, 40, 52, 21, 0]], [[12, 7, 11, 22, 20, 19, 2]],$

  $[[48, 17, 36, 61, 22, 0, 64]], [[50, 1, 7, 11, 22, 0, 64]],$

  $[[43, 45, 27, 61, 22, 0, 64]], [[50, 31, 33, 61, 22, 0, 64]],$

  $[[50, 1, 26, 66, 17, 48, 64]], [[24, 23, 21, 8, 12, 7, 1]],$

  $[[50, 51, 54, 20, 22, 0, 64]], [[26, 15, 53, 58, 23, 24, 1]],$

  $[[14, 47, 53, 15, 26, 6, 37]], [[29, 30, 24, 56, 16, 47, 14]],$

  $[[14, 29, 30, 24, 23, 21, 0]], [[48, 18, 65, 11, 22, 0, 64]],$

  $[[11, 22, 20, 54, 60, 10, 7]], [[9, 12, 7, 11, 22, 61, 36]],$

  $[[43, 2, 19, 20, 22, 0, 64]], [[48, 17, 66, 42, 2, 43, 64]],$

  $[[43, 35, 28, 11, 22, 0, 64]], [[5, 42, 2, 12, 7, 11, 65]],$

  $[[42, 13, 60, 47, 14, 29, 5]], [[22, 20, 54, 62, 8, 21, 0]],$

  $[[4, 3, 44, 51, 50, 31, 33]], [[50, 51, 44, 3, 56, 24, 1]],$

  $[[24, 56, 3, 49, 10, 7, 1]], [[56, 24, 23, 58, 45, 49, 3]],$

$[[49, 63, 29, 14, 47, 60, 10]], [[11, 22, 61, 33, 4, 18, 65]],$
$[[4, 18, 62, 8, 21, 52, 34]], [[50, 51, 44, 9, 12, 7, 1]],$
$[[14, 47, 53, 9, 44, 55, 37]], [[14, 47, 16, 56, 19, 39, 37]],$
$[[22, 61, 27, 6, 37, 14, 0]], [[11, 22, 20, 54, 62, 18, 65]],$
$[[29, 14, 47, 16, 59, 40, 5]], [[22, 11, 65, 5, 29, 14, 0]],$
$[[50, 51, 40, 52, 21, 0, 64]], [[14, 37, 39, 32, 52, 21, 0]],$
$[[11, 22, 61, 27, 45, 58, 65]], [[22, 20, 19, 39, 37, 14, 0]],$
$[[27, 61, 22, 20, 54, 62, 6]], [[14, 29, 63, 38, 8, 21, 0]],$
$[[10, 60, 47, 14, 37, 39, 32]], [[9, 53, 47, 14, 29, 30, 36]],$
$[[14, 47, 53, 58, 23, 21, 0]], [[29, 63, 25, 15, 53, 47, 14]],$
$[[13, 60, 54, 20, 22, 61, 33]], [[63, 29, 14, 47, 16, 46, 38]],$
$[[48, 17, 32, 52, 21, 0, 64]], [[35, 30, 24, 23, 21, 52, 34]],$
$[[28, 11, 22, 61, 36, 30, 35]], [[14, 47, 16, 46, 28, 55, 37]],$
$[[14, 47, 60, 13, 41, 55, 37]], [[14, 37, 55, 41, 23, 21, 0]],$
$[[48, 57, 41, 23, 21, 0, 64]], [[15, 53, 58, 23, 21, 52, 34]],$
$[[27, 61, 22, 20, 25, 57, 59]], [[22, 61, 36, 30, 29, 14, 0]],$
$[[14, 47, 16, 59, 27, 6, 37]], [[48, 57, 25, 20, 22, 0, 64]],$
$[[26, 66, 46, 16, 56, 24, 1]], [[31, 39, 19, 20, 22, 61, 33]],$
$[[22, 11, 65, 58, 23, 21, 0]], [[14, 29, 63, 38, 31, 39, 37]]]$

- Vrcholy v klietke: 67 vrcholov

- Hrany v klietke: 134 hrán

  $[(0, 14), (0, 21), (0, 22), (0, 64), (1, 7), (1, 24), (1, 26), (1, 50), (2, 12),$
  $(2, 19), (2, 42), (2, 43), (3, 4), (3, 44), (3, 49), (3, 56), (4, 18), (4, 33),$
  $(4, 34), (5, 29), (5, 40), (5, 42), (5, 65), (6, 26), (6, 27), (6, 37), (6, 62),$
  $(7, 10), (7, 11), (7, 12), (8, 12), (8, 21), (8, 38), (8, 62), (9, 12), (9, 36),$

$(9,44),(9,53),(10,32),(10,49),(10,60),(11,22),(11,28),(11,65),(13,33),$
$(13,41),(13,42),(13,60),(14,29),(14,37),(14,47),(15,25),(15,26),(15,34),$
$(15,53),(16,46),(16,47),(16,56),(16,59),(17,32),(17,36),(17,48),(17,66),$
$(18,48),(18,62),(18,65),(19,20),(19,39),(19,56),(20,22),(20,25),(20,54),$
$(21,23),(21,52),(22,61),(23,24),(23,41),(23,58),(24,30),(24,56),(25,57),$
$(25,63),(26,66),(27,45),(27,59),(27,61),(28,35),(28,46),(28,55),(29,30),$
$(29,63),(30,35),(30,36),(31,33),(31,38),(31,39),(31,50),(32,39),(32,52),$
$(33,61),(34,35),(34,52),(35,43),(36,61),(37,39),(37,55),(38,46),$
$(38,63),(40,51),(40,52),(40,59),(41,55),(41,57),(42,66),(43,45),(43,64),$
$(44,51),(44,55),(45,49),(45,58),(46,66),(47,53),(47,60),(48,57),(48,64),$
$(49,63),(50,51),(50,64),(51,54),(53,58),(54,60),(54,62),(57,59),(58,65)]$

- Počet automorfizmov: 4

5.2.10 cage(4,9)

- Počet vrcholov v klietke: 270
- Počet hrán v klietke: 540
- Počet automorfizmov: 90

5.2.11 cage(4,10)

- Počet vrcholov v klietke: 384
- Počet hrán v klietke: 768
- Počet automorfizmov: 768

5.2.12 cage(5,10)

- Počet vrcholov v klietke: 1296
- Počet hrán v klietke: 3240
- Počet automorfizmov: 3888

5.2.13 cage(7,7)

- Počet vrcholov v klietke: 640
- Počet hrán v klietke: 2240
- Počet automorfizmov: 320

5.2.14 cage(7,8)

- Počet vrcholov v klietke: 672
- Počet hrán v klietke: 2352
- Počet automorfizmov: 14112

5.2.15 cage(10,5)

- Počet vrcholov v klietke: 124
- Počet hrán v klietke: 620
- Počet automorfizmov: 1

5.2.16 cage(11,5)

- Počet vrcholov v klietke: 154
- Počet hrán v klietke: 847
- Počet automorfizmov: 1

5.2.17 cage(12,5)

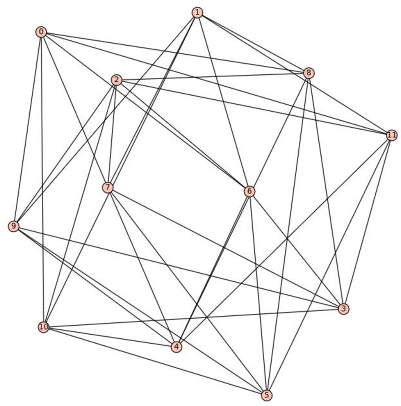
- Počet vrcholov v klietke: 203
- Počet hrán v klietke: 1218
- Počet automorfizmov: 203

5.2.18 cage(13,5)

- Počet vrcholov v klietke: 230
- Počet hrán v klietke: 1495
- Počet automorfizmov: 1

5.3 Generovanie klietky a následne incidenčných matíc, automorfizmov

5.3.1 cage(6,4)



Obr. 5.14: $cage(6, 4)$

- Cykly formujúce klietku:

  $[[[7, 3, 10, 0]], [[9, 5, 10, 0]], [[7, 3, 8, 0]], [[9, 2, 11, 0]], [[7, 1, 11, 0]], [[8, 1, 9, 0]],$
  $[[7, 1, 8, 0]], [[7, 1, 10, 0]], [[6, 1, 11, 0]], [[6, 2, 8, 0]], [[7, 2, 11, 0]], [[6, 4, 11, 0]],$
  $[[8, 2, 10, 0]], [[8, 2, 11, 0]], [[6, 3, 9, 0]], [[6, 5, 7, 0]], [[8, 5, 9, 0]], [[6, 3, 8, 0]],$
  $[[6, 3, 11, 0]], [[6, 4, 7, 0]], [[6, 4, 9, 0]], [[8, 4, 9, 0]], [[7, 4, 10, 0]], [[10, 5, 11, 0]],$
  $[[7, 5, 11, 0]]]$

- Vrcholy v klietke: 12 vrcholov

- Hrany v klietke: 36 hrán

  $[(0, 6), (0, 7), (0, 8), (0, 9), (0, 10), (0, 11), (1, 6), (1, 7), (1, 8),$
  $(1, 9), (1, 10), (1, 11), (2, 6), (2, 7), (2, 8), (2, 9), (2, 10), (2, 11), (3, 6),$

$(3,7),(3,8),(3,9),(3,10),(3,11),(4,6),(4,7),(4,8),(4,9),$
$(4,10),(4,11),(5,6),(5,7),(5,8),(5,9),(5,10),(5,11)]$

- Počet automorfizmov: 1036800
- Incidenčná matica:

```
[1 1 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
[0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0]
[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 1 1]
[1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0]
[0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0]
[0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0]
[0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0]
[0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0]
[0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1]
```

Obr. 5.15: Incidenčná matica klietky $cage(6,4)$

5.4 Vyhodnotenie výsledkov generovania incidenčných matíc z klietok a automorfizmov

V nasledovnej tabuľke si zobrazíme dosiahnuté výsledky a porovnáme ich s vypočítaným Moorovým ohraničením pre povolený počet vrcholov

cage(k,g)	**M(k,g)**	**Počet vrcholov**	**Počet hrán**	**Rozmer matice**	**Počet automorfizmov**
cage(3,5)	10	10	15	10×15	120
cage(3,6)	14	14	21	14×21	336
cage(3,7)	22	24	36	24×36	32
cage(3,8)	30	30	45	30×45	1440
cage(3,10)	62	70	105	70×105	80
cage(3,11)	94	112	168	112×168	64
cage(3,14)	254	384	576	384×576	96
cage(3,16)	510	960	1440	960×1440	96
cage(3,17)	766	2176	3264	2176×3264	544
cage(3,18)	1022	2560	3840	2560×3840	640
cage(3,20)	2046	5376	8064	5376×8064	2688
cage(3,23)	6142	49326	73989	49326×73989	1
cage(3,25)	12286	108906	163359	108906×163359	-
cage(4,5)	17	19	38	19×38	24
cage(4,7)	53	67	134	67×134	4
cage(4,9)	161	270	540	270×540	90
cage(4,10)	242	384	768	384×768	768
cage(5,10)	682	1296	3240	1296×3240	3888
cage(6,4)	12	12	36	12×36	1036800
cage(7,5)	50	50	175	50×175	252000
cage(7,7)	302	640	2240	640×2240	320
cage(7,8)	518	672	2352	672×2352	14112
cage(10,5)	101	124	620	124×620	1
cage(11,5)	122	154	847	154×847	1
cage(12,5)	145	203	1218	203×1218	203
cage(13,5)	170	230	1495	230×1495	1

Tabuľka 5.1: Tabuľka overenia dosiahnutých výsledkov

Vo všetkých prípadoch bola splnená podmienka Moorovho ohraničenia zaručujúca existenciu uvažovaných klietok. Vo všetkých prípadoch sa nám podarilo zistit vrcholy, hrany, rozmer incidenčnej matice ako aj incidenčnú maticu spolu, počet automorfizmov až na klietku $cage(3, 25)$, kedy program nedokázal vypočítať počet automorfizmov. Správnosť počtu automorfizmov sme overili aj pomocou teórie, kde je tento údaj pre niektoré uvažované klietky známy ako aj údaj o počte vrcholov. Ďalším krokom bude preskúmať prepojenie incidenčných matíc a lineárnych LDPC kódov ako aj proces samotného kódovania.

5.5 Experimentálne generovanie incidenčných matíc

5.5.1 Generovanie Incidenčnej matice, ktorej výsledkom bude cage(6,4)

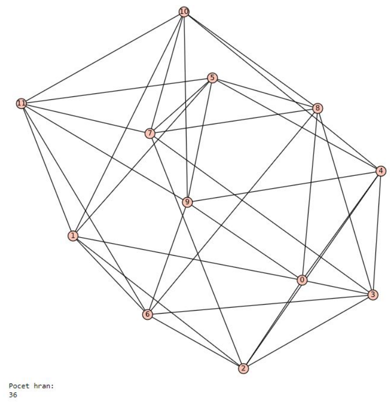
Pokus č. 1

- Parametre: počet vrcholov = 12,
  počet hrán = 36, stupeň vrcholov k = 6
- Výsledná incidenčná matica:

```
[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1]
[0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 1 0 0 0 0 1 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 1 0]
[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 1 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 0 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
[1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
[0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 1 1 1 0 0]
[0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 0 1 1 1 0 0 0 0 0 0]
[0 0 1 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 1 1 0 0 0 0]
[0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 1 0 0 1 0 1 0 0 0]
[0 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 1 0 0 0 0 1 0 1]
[1 1 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
[0 1 0 0 0 0 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0]
```

Obr. 5.16: Experimentalne vygenerovaná incidenčná matica 1 $cage(6,4)$

- Graf z incidenčnej matice s kontrolou počtu hrán:



Obr. 5.17: Experimentalne vygenerovaný graf 1 $cage(6,4)$

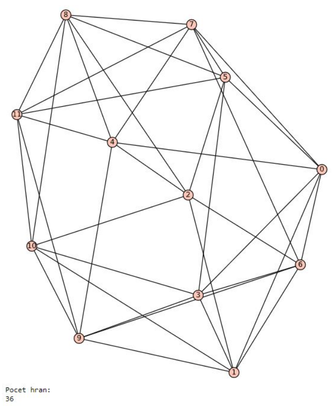
Pokus č. 2

- Parametre: počet vrcholov = 12,
  počet hrán = 36, stupeň vrcholov k = 6
- Výsledná incidenčná matica:

```
[0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1]
[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 1 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 0 0]
[0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
[1 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0]
[0 0 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 0 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0]
[0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 1 1 1 0 0 0]
[0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 1 1 0 1]
[0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 1 0]
[0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 1 0 0 0 1 0 0 1 0 0 0 0]
[0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
[1 1 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
```

Obr. 5.18: Experimentalne vygenerovaná incidenčná matica 2 $cage(6,4)$

- Graf z experimentálnej incidenčnej matice s kontrolou počtu hrán:



Obr. 5.19: Experimentalne vygenerovaný graf 2 $cage(6,4)$

Pokus č. 3

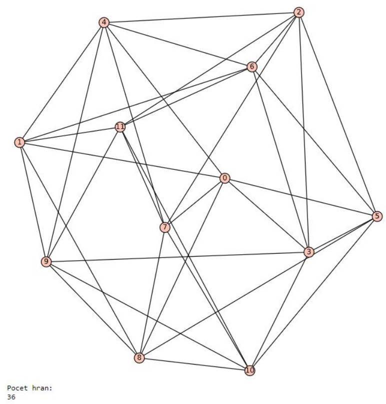
- Parametre: počet vrcholov = 12,
  počet hrán = 36, stupeň vrcholov k = 6

- Výsledná incidenčná matica:

```
[0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
[1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
[0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 1 0 1 0 0 0 0]
[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 1]
[0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 1 1 1 1 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
[0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 1 0 0 0 0 1 0 0]
[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 1 1 0 0 0 0 1 0]
[0 0 1 0 0 1 0 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 0 0 0 0]
[0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 1 1 0 0]
[0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 1 0 0 1 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0]
[0 1 0 0 0 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1]
[1 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0]
```

Obr. 5.20: Experimentálne vygenerovaná incidenčná matica 3 $cage(6, 4)$

- Graf z experimentálnej incidenčnej matice s kontrolou počtu hrán:



Obr. 5.21: Experimentalne vygenerovaný graf 3 $cage(6, 4)$

5.6 Vyhodnotenie výsledkov experimentálneho generovania incidenčných matíc

Vo všetkých prípadoch sa nám nepodarilo vygenerovať incidenčnú maticu klietky $cage(6, 4)$ nakoľko z obrázkov pri vizuálnej kontrole môžme vidieť, že graf neobsahuje iba cykly dĺžky 4. Incidenčnú maticu sa nám síce podarilo vygenerovať, ale správne dĺžky cyklov niesú zachované. Okrem toho, že už takýto spôsob generovania incidenčných matíc je príliž výpočtovo náročný, pomocou náhodného generovania je veľmi obtiažne dostať sa k želanému výsledku. Z tohto dôvodu je potrebné pre problematiku opačného generovania zvoliť iný postup, alebo sa zamerať na niektoré také skupiny klietok, ktoré sa generujú rovnakým, poprípade podobným spôsobom na základe informácií, ktoré sú už o nich známe. Ide o pomerne zložitý problém vyžadujúci hlbšie skúmanie.

Kapitola 6

Záver

xxxxxx

Literatúra

[Bor18] Branislav Boráň. Hustota inverzií riedkych cyklických matíc, 2018.

[CoC] Cocalc. Available at `https://cocalc.com`.

[EJ13] Geoffrey Exoo and Robert Jajcay. Dynamic cage survey. *The Electronic Journal of Combinatorics*, 2013.

[Exo] Geoffrey Exoo. Regular graphs of given degree and girth. Available at `http://cs.indstate.edu/ge/CAGES/index.html`.

[HP03] W Cary Huffman and Vera Pless. *Fundamentals of error-correcting codes.* Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2003.

[Mal07] Gabofestwe Alafang Malema. *Low-Density Parity-Check Codes: Construction and Implementation.* PhD thesis, 2007.

[MTSB13] Rafael Misoczki, Jean-Pierre Tillich, Nicolas Sendrier, and Paulo S. L. M. Barreto. Mdpc-mceliece: New mceliece variants from moderate density parity-check codes. pages 2069–2073. IEEE, 2013.

[The] The Sage Developers. *SageMath, the Sage Mathematics Software System (Version x.y.z).*

Zoznam obrázkov