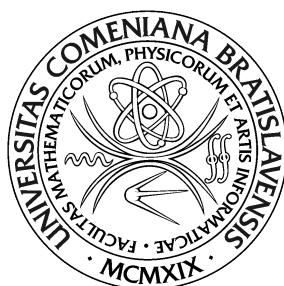


UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE  
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY



# GRUPY AUTOMORFIZMOV LINEÁRNYCH KÓDOV

Diplomová práca

2022

Bc. Branislav Boráň

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE  
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY



# GRUPY AUTOMORFIZMOV LINEÁRNYCH KÓDOV

Diplomová práca

Študijný program: Aplikovaná informatika  
Študijný odbor: 2511 Aplikovaná informatika  
Školiace pracovisko: Katedra algebry a geometrie  
Školiteľ: doc. RNDr. Róbert Jajcay, DrSc.

Bratislava, 2022

Bc. Branislav Boráň



Univerzita Komenského v Bratislave  
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

## ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

**Meno a priezvisko študenta:** Branislav Boráň  
**Študijný program:** aplikovaná informatika (Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)  
**Študijný odbor:** informatika  
**Typ záverečnej práce:** diplomová  
**Jazyk záverečnej práce:** anglický  
**Sekundárny jazyk:** slovenský

**Názov:** Automorphism groups of linear codes and linear codes with prescribed automorphism groups  
*Grupy automorfizmov lineárnych kódov a lineárne kódy s predpísanou grupou automorfizmov*

**Anotácia:** Lineárne kódy sú podpriestory konečnorozmerných vektorových priestorov nad konečnými poľami. Majú preto bohaté grupy automorfizmov, ktoré zároveň obsahujú množstvo informácií o uvažovanom kóde. Určenie úplnej grupy automorfizmov kódu je výpočtovo náročná úloha. Namiesto určenia grupy automorfizmov pre daný kód sa preto uvažuje obrátená úloha zostrojenia kódu s predpísanou grupou automorfizmov. Cieľom práce je preskúmať oba smery tejto interakcie.

**Cieľ:** Cieľom navrhovanej problematiky je poskytnúť študentovi výpočtovo zložitý problém vyžadujúci dôkladné porozumenie štruktúry uvažovaných objektov ako aj programátorské a organizačné schopnosti.

**Literatúra:** R. Hill, A first course in coding theory, Oxford University Press, 1993  
S. Roman, Coding and information theory, Springer, 1992  
R. Jajcay, P. Potocnik and Stephen E. Wilson, Half-cyclic, dihedral and half-dihedral codes, J. of Applied Mathematics and Computing 64 (2020), 691-708.

**Kľúčové slová:** lineárny kód, grupa automorfizmov, konečné pole

**Vedúci:** doc. RNDr. Róbert Jajcay, DrSc.  
**Katedra:** FMFI.KAG - Katedra algebry a geometrie  
**Vedúci katedry:** doc. RNDr. Pavel Chalmovianský, PhD.  
**Dátum zadania:** 09.12.2020  
**Dátum schválenia:** 10.12.2020

prof. RNDr. Roman Ďurikovič, PhD.  
garant študijného programu

študent

vedúci práce

Čestne prehlasujem, že túto diplomovú prácu som  
vypracoval samostatne len s použitím uvedenej literatúry  
a za pomoci konzultácií u môjho školiteľa.

Bratislava, 2022

.....

Bc. Branislav Boráň

# Pod'akovanie

Chcel by som sa v prvom rade poďakovať môjmu školiteľovi doc. RNDr. Róbertovi Jajcayovi, DrSc. za odbornú pomoc a usmernenia pri písaní tejto práce, za materiály, cenné rady, ktoré mi veľmi pomohli pri riešení tejto diplomovej práce. V neposlednom rade chcem tiež poďakovať všetkým mojím kamarátom a celej mojej rodine za podporu počas môjho štúdia.

# Abstrakt

Táto práca sa venuje problematike xxxxxxxxxx. Súčasťou tejto práce je prehľad existujúcich riešení a ich krátke zhodnotenie. Ďalej je tu xxxxx. Čo sa tu rieši.

Kľúčové slová: automorfizmus grúp, ....

# Abstract

english abstract

Keywords: Automorphism groups, ...

# Obsah

<b>1</b>	<b>Úvod</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Motivácia</b>	<b>2</b>
<b>3</b>	<b>Analýza problému</b>	<b>3</b>
3.1	Lineárny kód . . . . .	3
3.1.1	Generujúca matica lineárneho kódu . . . . .	4
3.1.2	Kontrolná matica lineárneho kódu . . . . .	4
3.1.3	LDPC kódy . . . . .	4
3.1.4	Kvázicyklický kód . . . . .	5
3.2	Grafová reprezentácia LDPC kódov . . . . .	5
3.2.1	Základné pojmy . . . . .	6
3.2.2	Moorové grafy . . . . .	7
3.2.3	Klietky . . . . .	7
3.2.4	Automorfizmus grafu . . . . .	11
<b>4</b>	<b>Návrh riešenia</b>	<b>12</b>
4.1	Generovanie Incidenčných matíc zo známych klietok a grupy automorfizmov . . . . .	12
4.1.1	Petersenov graf - $cage(3, 5)$ . . . . .	13
4.1.2	Heawoodov graf - $cage(3, 6)$ . . . . .	15



<i>OBSAH</i>	ix
4.1.3 McGeeho graf - $cage(3, 7)$ . . . . .	17
4.1.4 Tutte - Coxeterov graf - $cage(3, 8)$ . . . . .	19
4.1.5 Balabanov graf - $cage(3, 10)$ . . . . .	21
4.1.6 Robertsonov graf - $cage(4, 5)$ . . . . .	25
4.1.7 Hoffman - Singletonov graf - $cage(7, 5)$ . . . . .	28
4.2 Generovanie kliebok a ich Incidenčných matíc spolu s grupami automorfizmov . . . . .	33
4.2.1 $cage(6, 4)$ . . . . .	33
<b>5 Záver</b>	<b>36</b>

# Kapitola 1

## Úvod

xxxxxxx

# Kapitola 2

## Motivácia

xxxxxxx

# Kapitola 3

## Analýza problému

V tejto kapitole si popíšeme pojmy a problematiku, ktorú treba riešiť pri návrhu a implementácii xxxxx.

Problematiku tejto témy môžeme rozdeliť na 2 logické časti: Lineárny kód a grafovú reprezentáciu LDPC kódov.

### 3.1 Lineárny kód

Lineárny kód  $(n, k)$  je  $k$ -rozmerný lineárny podpriestor priestoru  $F_n^2$ .  $F_n^2$  je priestor  $n$ -rozmerných vektorov, kde koordináty berieme z poľa  $F^2$ .  $k$ -rozmerný lineárny podpriestor obsahuje práve  $k$  lineárne nezávislých vektorov. Ak by sme zobrali  $k$  takých vektorov, potom tieto vektory generujú daný  $k$ -rozmerný podpriestor a hovoríme, že tvoria bázu podpriestoru. Ak je splnená vlastnosť modulo 2 ( $q$ ) súčtu 2 kódových slov je kódové slovo, tak vieme nájsť Generačnú maticu lineárneho kódu.

### 3.1.1 Generujúca matica lineárneho kódu

Generujúca matica lineárneho kódu ( $G$ ) je zostrojená z bázy lineárneho kódu tak, že riadky matice predstavujú prvky bázy. Riadky generujúcej matice sú lineárne nezávislé vektory dĺžky  $n$ . Nech  $\vec{m}$  je vstup (nekódované slovo),  $\vec{v}$  je výstup (kódované slovo),  $C$  je označenie lineárneho kódu, potom platí:

$$C = \{\vec{m} \times G : \vec{m} \in F_2^k\}, \quad \vec{v} = \vec{m} \times G \quad (3.1)$$

### 3.1.2 Kontrolná matica lineárneho kódu

V  $k$ -rozmernom linearnom kóde ( $C$ ) v  $F_n^2$  potom existuje  $n - k$  lineárne nezávislých vektorov  $\vec{v}$  takých, že každé kódové slovo je kolmé na všetky tieto vektory. Keď týchto  $n - k$  vektorov zoberieme ako riadky matice, dostaneme kontrolnú maticu lineárneho kódu  $H$ . Ľubovoľný vektor  $\vec{v}$  je kódovým slovom práve vtedy, ak platí:

$$C = \{\vec{v} \in F_2^n : H \times \vec{v}^T = 0\} \quad (3.2)$$

### 3.1.3 LDPC kódy

LDPC kódy (z angl. low density parity check code) sú lineárne samoopravné kódy, ktoré jednak umožňujú prenos dát rýchlosťou blízkou kapacite kanálu a zároveň pre ne existujú vysoko účinné dekódovacie algoritmy. Kódy majú veľmi riedku kontrolnú maticu, pomocou ktorej sa dajú opraviť chyby v kódových slovách. Ich kontrolná matica obsahuje menej ako 1% jednotiek. Hlavnou nevýhodou väčšiny LDPC kódov je vysoká časová náročnosť ich kódovacieho algoritmu. Výhodou je paralelizmus pri dekódovaní a jednoduché výpočtové operácie. Dekódovacie výpočty sú rozdelené do 2 množín uzlov a

to do kontrolných uzlov a premenných uzlov. Uzol na jednej strane je spojený s uzlom na druhej strane, čo umožňuje paralelné výpočty na každej strane.

### 3.1.4 Kvázicyklický kód

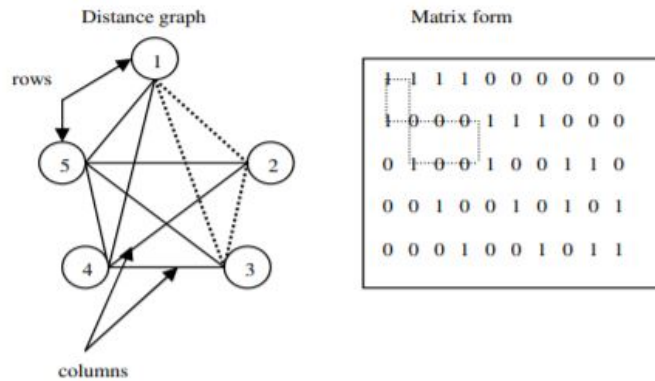
Lineárny kód ( $C$ ) je kvázicyklický kód, ak existuje kontrolná matica  $H$ , ktorá má tvar:

$$H = (H_0 | H_1 | \dots | H_{n_0}^{-1}) \quad (3.3)$$

$H_i$  sú cyklické matice. Ak sú LDPC kvázicyklické, nazývame ich QC-LDPC kódy.

## 3.2 Grafová reprezentácia LDPC kódov

Matica LDPC je reprezentovaná Moorovým grafom. Matica môže byť tiež reprezentovaná bipartitným grafom alebo grafom vzdialenosti, v ktorom riadky matice predstavujú vrcholy a stĺpce matice reprezentujú hrany grafu. Stĺpec je potom množina hrán formujúca kompletný graf medzi vrcholmi spojenými v stĺpci. Nasledujúci obrázok ilustruje grafovú reprezentáciu matice LDPC kódu:



Obr. 3.1: Vzťah medzi grafom a maticou [Mal07]

Graf vzdialenosti je formovaný cestami hrán alebo vrcholov Cyklus dĺžky  $g$  v grafe korešponduje s cyklom dĺžky  $2g$  v maticovej forme.

### 3.2.1 Základné pojmy

- Dĺžka kódu - špecifikuje dimenzie ( $M \times N$ ) kontrolnej matice  $H$ .  $M$  predstavuje počet riadkov matice a  $N$  je počet stĺpcov.
- Kódová váha a rate ( $R$ ) - predstavuje počet bitov (informácií) nad celkovým počtom prenesených bitov. Rate možno vyjadriť vzťahom:

$$R = (N - M)/N \quad (3.4)$$

- Kódová štruktúra - označuje spojenia medzi riadkami a stĺpcami
- Minimálna Hammingová (kódová) vzdialenosť  $\min HW(\vec{u}, \vec{v})$  - Nech sú vektory  $\vec{u}$  a  $\vec{v}$  kódové slová. Minimálna Hammingová vzdialenosť 2 vektorov  $\vec{u} \in F_n^2$  a  $\vec{v} \in F_n^2$  je počet koordinátov, na ktorých sa vektory  $\vec{u}$  a  $\vec{v}$  líšia.

- Obvod ( $g$ ) - ovplyvňuje dekódovanie LDPC kódu. V grafovej reprezentácii LDPC kódu sa jedná o najmenší cyklus v grafe. Jeho dĺžku zráčavame iba pomocou vrcholov alebo hrán. V matici LDPC kódu je dĺžka obvodu  $2g$ , pretože cyklus alternuje medzi riadkami a stĺpcami z čoho vyplýva, že cyklus grafu reprezentuje iba polovicu maticového kódu.

### 3.2.2 Moorové grafy

Pravidelný graf stupňa  $d$  a parametra  $k$  vo forme stromu vyhľadávania do šírky začínajúceho z ľubovoľného vrcholu  $V$ , ktorého počet vrcholov vieme dostať ako:

$$1 + d \sum_{i=0}^{k-1} (d-1)^i \quad (3.5)$$

### 3.2.3 Kliečky

Klietka  $cage(k, g)$  je  $k$ -pravidelný graf obvodu  $g$  s najmenším možným počtom vrcholov  $m$ . Výpočet minimálneho počtu vrcholov pre klietku sa líši podľa toho, či je jej obvod párný alebo nepárny:

- $g$  - nepárne:

$$m = 1 + \sum_{i=0}^{(g-3)/2} k(k-1)^i = \frac{k(k-1)^{(g-1)/2} - 2}{k-2} \quad (3.6)$$

- $g$  - párne:

$$m = 2 \sum_{i=0}^{(g-2)/2} k(k-1)^i = \frac{2(k-1)^{g/2} - 2}{k-2} \quad (3.7)$$

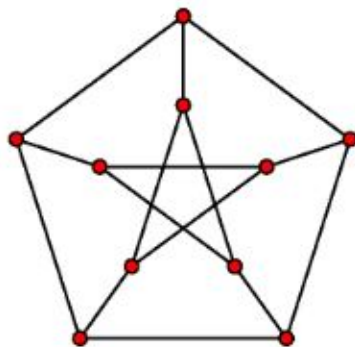


Klietka môže byť aj Moorov graf, pre ktorý platí:

$$d = k \quad (3.8)$$

Môžeme vypočítať najnižší počet vrcholov minimálneho stupňa  $k$  a jeho obvodu  $g$ . Aj keď neexistuje jednotná konštrukcia klietok, existuje niekoľko známych klietok pre stupeň vrchola  $k$  a obvod  $g$ . Ukážeme si niektoré z nich.

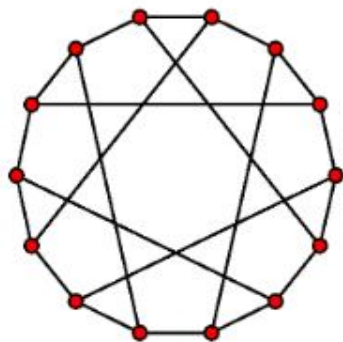
- Petersenov graf -  $cage(3, 5)$ :



Obr. 3.2: Petersenov graf [EJ11]

Petersenov graf má rád 10.

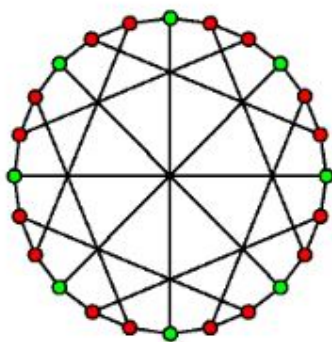
- Heawoodov graf -  $cage(3, 6)$ :



Obr. 3.3: Heawoodov graf [EJ11]

Heawoodov graf má rád 14 a počet grúp automorfizmov je 336.

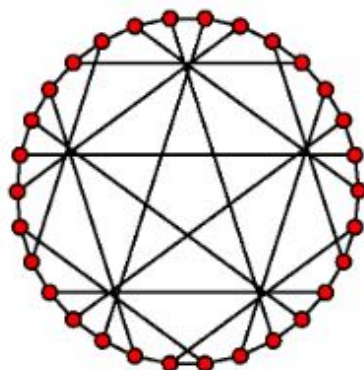
- McGeeho graf -  $cage(3, 7)$ :



Obr. 3.4: McGeeho graf [EJ11]

McGeeho graf má rád 24 a počet grúp automorfizmov je 32.

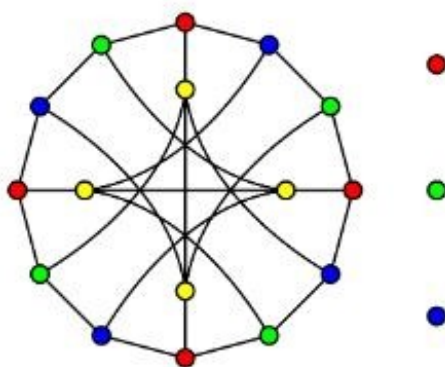
- Tutte-Coxeterov graf -  $cage(3, 8)$ :



Obr. 3.5: Tutte-Coxeterov graf [EJ11]

Tutte-Coxeterov graf má rád 30 a počet grúp automorfizmov je 1440.

- Balabanov graf -  $cage(3, 11)$ : Balabanov graf má 112 vrcholov a počet grúp automorfizmov je 64.
- Bensonov graf -  $cage(3, 12)$ : Bensonov graf má 126 vrcholov a počet grúp automorfizmov je 12096.
- Robertsonov graf -  $cage(4, 5)$ :



Obr. 3.6: Robertsonov graf [EJ11]

- ďalšie známe klitky:  $cage(4, 7)$  - Exoo, McKay, a Nadonov graf,  $cages(5, 5)$ : počet grúp automorfizmov je 20, 30 a 120,  $cage(7, 5)$  - Hoffman - Singletonov graf,  $cage(7, 6)$  - O'Keefe a Wongov graf

### 3.2.4 Automorfizmus grafu

Automorfizmus grafu je permutácia  $\varnothing$  všetkých vrcholov grafu, ktorá zachováva jeho štruktúru takým spôsobom, že akékoľvek 2 vrcholy  $U$  a  $V$  susedia iba vtedy a len vtedy ak platí:

$$\varnothing(U)V \quad (3.9)$$

Jedná sa o bijektívne zobrazenie, pri ktorom sa každý vrchol grafu a každá hrana zobrazí na iný vrchol a hranu, hovoríme tiež, že ide o jeho obraz. Množina všetkých automorfizmov grafu  $G$  tvorí grupu automorfizmov  $Aut(G)$ . Moorové grafy majú grupu automorfizmov, ktoré prechodne pôsobia na množinu vrcholov grafu.

# Kapitola 4

## Návrh riešenia

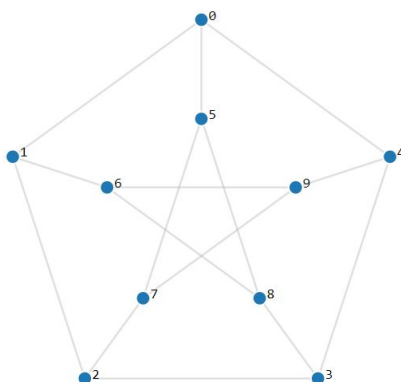
Problematiku riešime v programe Sage [sag], ktorý je založený na programovacom jazyku Python. Zvolili sme ho, pretože ponúka veľké množstvo vopred naimplementovaných funkcií, ktoré nám podstatne uľahčia prácu s grafmi, maticami a grupami automorfizmov. Využili sme online aplikáciu CoCalc [coc], ktorá nám umožňuje vytvárať Sage projekty priamo na internete. CoCalc prevádzkuje prostredie Ubuntu Linux, s ktorým je možné komunikovať cez terminál a taktiež poskytuje prístup k ďalším možnostiam Linuxu.

### 4.1 Generovanie Incidenčných matíc zo známych kliebok a grupy automorfizmov

Uvažujeme známe kliebky a na základe nich vygenerujeme incidenčnú maticu a zistíme grupu automorfizmov. Na základe výpočtov nezávislých od toho, či kliebku vieme zostrojiť alebo je známa vieme pre danú kliebku zistiť minimálny počet vrcholov, rozmer minimálnej matice kódu, obvod cyklu v matici a minimálny počet hrán. Na základe výpočtov nezávislých od toho, či kliebku vieme zostrojiť alebo je známa vieme pre danú kliebku zistiť minimálny počet

vrcholov, rozmer minimálnej matice kódu, obvod cyklu v matici a minimálny počet hrán.

#### 4.1.1 Petersenov graf - $cage(3, 5)$



Obr. 4.1: Petersenov graf 2D [coc]



Obr. 4.2: Petersenov graf 3D [coc]

- minimálny počet vrcholov: 10
- rozmer minimálnej matice kódu:  $10 \times 15$

- obvod cyklu v matici: 10

- minimálny počet hrán: 15

- cykly v grafe: 6 cyklov

$[[1, 6, 8, 5, 0], [4, 9, 6, 8, 5, 0], [7, 9, 6, 8, 5], [4, 3, 8, 5, 0], [1, 2, 3, 8, 5, 0], [7, 2, 3, 8, 5]]$

- hrany v grafe: 15 hrán

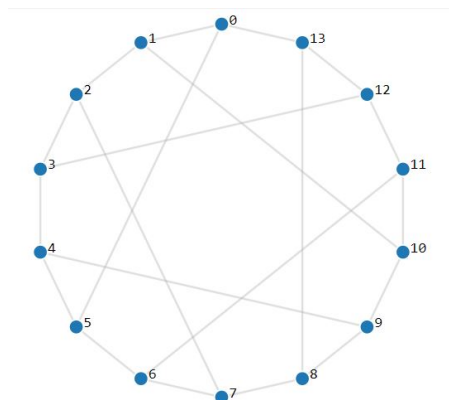
$[(0, 1, \text{None}), (0, 4, \text{None}), (0, 5, \text{None}), (1, 2, \text{None}), (1, 6, \text{None}), (2, 3, \text{None}),$   
 $(2, 7, \text{None}), (3, 4, \text{None}), (3, 8, \text{None}), (4, 9, \text{None}), (5, 7, \text{None}), (5, 8, \text{None}),$   
 $(6, 8, \text{None}), (6, 9, \text{None}), (7, 9, \text{None})]$

- počet grúp automorfizmov: 120

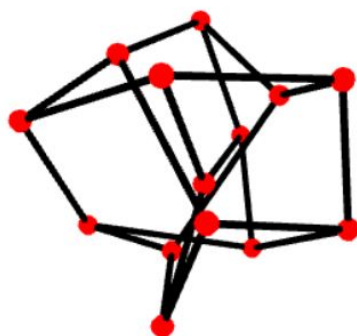
- matica lineárneho kódu:

```
[1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
[1 0 0 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
[0 0 0 1 0 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0]
[0 0 0 0 0 1 0 1 1 0 0 0 0 0 0]
[0 1 0 0 0 0 0 1 0 1 0 0 0 0 0]
[0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 1 1 0 0 0]
[0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 1 1 0]
[0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 1]
[0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 1 1 0 0]
[0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 1 1]
```

Obr. 4.3: Matica Petersenovho grafu [coc]

4.1.2 Heawoodov graf -  $cage(3, 6)$ 

Obr. 4.4: Heawoodov graf 2D [coc]



Obr. 4.5: Heawoodov graf 3D [coc]

- minimálny počet vrcholov: 14
- rozmer minimálnej matice kódu:  $14 \times 21$
- obvod cyklu v matici: 12
- minimálny počet hrán: 21



- cykly v grafe: 8 cyklov

$[[1, 10, 11, 12, 13, 0], [8, 9, 10, 11, 12, 13], [3, 4, 9, 10, 11, 12],$   
 $[5, 4, 9, 10, 11, 12, 13, 0], [5, 6, 11, 12, 13, 0], [8, 7, 6, 11, 12, 13],$   
 $[1, 2, 7, 6, 11, 12, 13, 0], [3, 2, 7, 6, 11, 12]]$

- hrany v grafe: 21 hrán

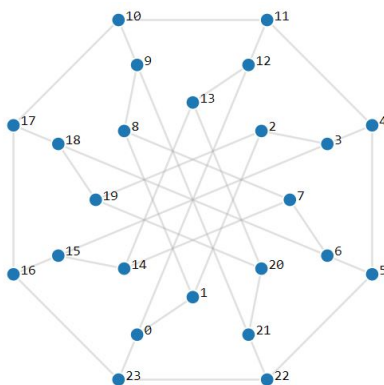
$[(0, 1, \text{None}), (0, 5, \text{None}), (0, 13, \text{None}), (1, 2, \text{None}), (1, 10, \text{None}), (2, 3, \text{None}),$   
 $(2, 7, \text{None}), (3, 4, \text{None}), (3, 12, \text{None}), (4, 5, \text{None}), (4, 9, \text{None}), (5, 6, \text{None}),$   
 $(6, 7, \text{None}), (6, 11, \text{None}), (7, 8, \text{None}), (8, 9, \text{None}), (8, 13, \text{None}),$   
 $(9, 10, \text{None}), (10, 11, \text{None}), (11, 12, \text{None}), (12, 13, \text{None})]$

- počet grúp automorfizmov: 336

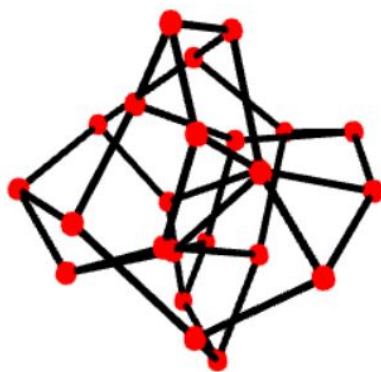
- matica lineárneho kódu:

```
[1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
[1 0 0 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
[0 0 0 1 0 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
[0 0 0 0 0 1 0 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
[0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
[0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0]
[0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 1 0 1 0 0 0 0 0 0]
[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 0 0 0 0]
[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 1 0 0 0]
[0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 0 0 0]
[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 1 0]
[0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1]
[0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 1]
```

Obr. 4.6: Matica Heawoodovho grafu [coc]

4.1.3 McGeeho graf -  $cage(3, 7)$ 

Obr. 4.7: McGeeho graf 2D [coc]

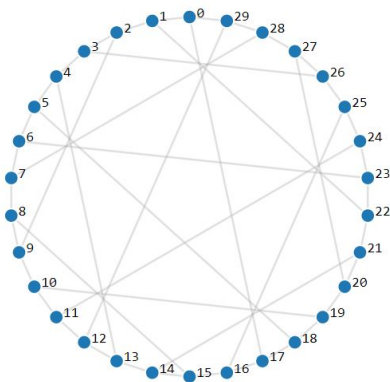


Obr. 4.8: McGeeho graf 3D [coc]

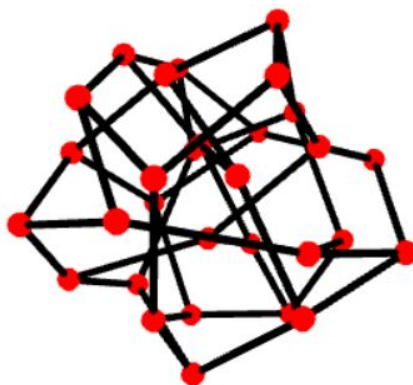
- minimálny počet vrcholov: 22
- rozmer minimálnej matice kódu:  $22 \times 33$
- obvod cyklu v matici: 14
- minimálny počet hrán: 33

- [illegible]

Obr. 4.9: Matica McGeeho grafu [coc]

4.1.4 Tutte - Coxeterov graf -  $cage(3, 8)$ 

Obr. 4.10: Tutte-Coxeterov graf 2D [coc]



Obr. 4.11: Tutte-Coxeterov graf 3D [coc]

- minimálny počet vrcholov: 30
- rozmer minimálnej matice kódu:  $30 \times 45$
- obvod cyklu v matici: 16
- minimálny počet hrán: 45

- cykly v grafe: 16 cyklov

[[1, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 0], [20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27], [16, 15, 14, 21, 22, 23, 24, 25], [7, 8, 15, 14, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28], [11, 10, 9, 8, 15, 14, 21, 22, 23, 24], [20, 19, 10, 9, 8, 15, 14, 21], [17, 18, 19, 10, 9, 8, 15, 14, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 0], [6, 5, 18, 19, 10, 9, 8, 15, 14, 21, 22, 23], [3, 4, 5, 18, 19, 10, 9, 8, 15, 14, 21, 22, 23, 24, 25, 26], [13, 4, 5, 18, 19, 10, 9, 8, 15, 14], [1, 2, 9, 8, 15, 14, 21, 22], [3, 2, 9, 8, 15, 14, 21, 22, 23, 24, 25, 26], [12, 13, 14, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29], [7, 6, 23, 24, 25, 26, 27, 28], [12, 11, 24, 25, 26, 27, 28, 29], [17, 16, 25, 26, 27, 28, 29, 0]]

- hrany v grafe: 45 hrán

[(0, 1, *None*), (0, 17, *None*), (0, 29, *None*), (1, 2, *None*), (1, 22, *None*), (2, 3, *None*), (2, 9, *None*), (3, 4, *None*), (3, 26, *None*), (4, 5, *None*), (4, 13, *None*), (5, 6, *None*), (5, 18, *None*), (6, 7, *None*), (6, 23, *None*), (7, 8, *None*), (7, 28, *None*), (8, 9, *None*), (8, 15, *None*), (9, 10, *None*), (10, 11, *None*), (10, 19, *None*), (11, 12, *None*), (11, 24, *None*), (12, 13, *None*), (12, 29, *None*), (13, 14, *None*), (14, 15, *None*), (14, 21, *None*), (15, 16, *None*), (16, 17, *None*), (16, 25, *None*), (17, 18, *None*), (18, 19, *None*), (19, 20, *None*), (20, 21, *None*), (20, 27, *None*), (21, 22, *None*), (22, 23, *None*), (23, 24, *None*), (24, 25, *None*), (25, 26, *None*), (26, 27, *None*), (27, 28, *None*), (28, 29, *None*)]

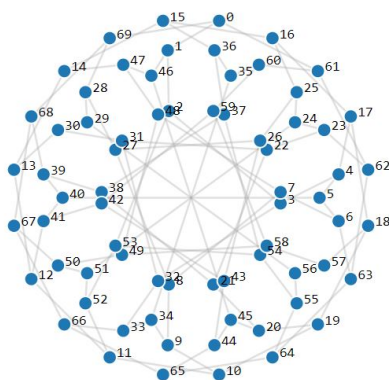
- počet grúp automorfizmov: 1440

- matica lineárneho kódu:

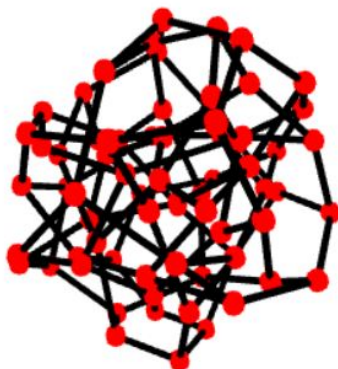
[illegible]

Obr. 4.12: Matica Tutte - Coxeterovho grafu [coc]

#### 4.1.5 Balabanov graf - $cage(3, 10)$



Obr. 4.13: Balabanov(10) graf 2D [coc]



Obr. 4.14: Balabanov(10) graf 3D [coc]

- minimálny počet vrcholov: 62
- rozmer minimálnej matice kódu:  $62 \times 93$
- obvod cyklu v matici: 20
- minimálny počet hrán: 93
- cykly v grafe: 36 cyklov
  - $[[69, 68, 67, 66, 65, 64, 63, 62, 61, 0], [60, 59, 42, 41, 40, 39, 68, 67, 66, 65, 64, 63, 62, 61],$
  - $[55, 56, 57, 58, 59, 42, 41, 40, 39, 68, 67, 66, 65, 64],$
  - $[33, 32, 31, 30, 29, 56, 57, 58, 59, 42, 41, 40, 39, 68, 67, 66],$
  - $[5, 4, 3, 32, 31, 30, 29, 56, 57, 58, 59, 42, 41, 40],$
  - $[18, 17, 4, 3, 32, 31, 30, 29, 56, 57],$
  - $[43, 26, 25, 16, 17, 4, 3, 32, 31, 30, 29, 56, 57, 58, 59, 42],$
  - $[28, 27, 26, 25, 16, 17, 4, 3, 32, 31, 30, 29],$
  - $[12, 11, 10, 9, 8, 27, 26, 25, 16, 17, 4, 3, 32, 31, 30, 29, 56, 57, 58, 59, 42, 41],$
  - $[2, 53, 52, 11, 10, 9, 8, 27, 26, 25, 16, 17, 4, 3],$
  - $[55, 54, 53, 52, 11, 10, 9, 8, 27, 26, 25, 16, 17, 4, 3, 32, 31, 30, 29, 56],$
  - $[38, 37, 54, 53, 52, 11, 10, 9, 8, 27, 26, 25, 16, 17, 4, 3, 32, 31,$

30, 29, 56, 57, 58, 59, 42, 41, 40, 39], [15, 36, 37, 54, 53, 52, 11, 10, 9, 8, 27, 26, 25, 16],  
 [34, 35, 36, 37, 54, 53, 52, 11, 10, 9],  
 [60, 35, 36, 37, 54, 53, 52, 11, 10, 9, 8, 27, 26, 25, 16, 17, 4, 3, 32, 31, 30, 29, 56, 57, 58, 59],  
 [24, 51, 52, 11, 10, 9, 8, 27, 26, 25],  
 [50, 51, 52, 11, 10, 9, 8, 27, 26, 25, 16, 17, 4, 3, 32,  
 31, 30, 29, 56, 57, 58, 59, 42, 41, 40, 39, 68, 67], [18, 19, 10, 9, 8, 27, 26, 25, 16, 17],  
 [44, 45, 20, 19, 10, 9, 8, 27, 26, 25, 16, 17, 4, 3, 32, 31, 30,  
 29, 56, 57, 58, 59, 42, 41, 40, 39, 68, 67, 66, 65],  
 [1, 46, 45, 20, 19, 10, 9, 8, 27, 26, 25, 16, 17, 4, 3, 32, 31, 30, 29, 56, 57, 58, 59, 42, 41, 40,  
 39, 68, 67, 66, 65, 64, 63, 62, 61, 0], [7, 48, 47, 46, 45, 20, 19, 10, 9, 8],  
 [49, 48, 47, 46, 45, 20, 19, 10, 9, 8, 27, 26, 25, 16, 17, 4, 3, 32, 31, 30, 29, 56, 57, 58],  
 [13, 14, 47, 46, 45, 20, 19, 10, 9, 8, 27, 26, 25, 16, 17, 4, 3, 32, 31, 30],  
 [15, 14, 47, 46, 45, 20, 19, 10, 9, 8, 27, 26, 25, 16],  
 [22, 21, 20, 19, 10, 9, 8, 27, 26, 25, 16, 17, 4, 3, 32, 31],  
 [38, 21, 20, 19, 10, 9, 8, 27, 26, 25, 16, 17, 4, 3, 32, 31, 30, 29, 56, 57, 58, 59, 42, 41, 40, 39],  
 [33, 34, 9, 8, 27, 26, 25, 16, 17, 4, 3, 32],  
 [6, 7, 8, 27, 26, 25, 16, 17, 4, 3, 32, 31,  
 30, 29, 56, 57, 58, 59, 42, 41, 40, 39, 68, 67, 66, 65, 64, 63],  
 [23, 24, 25, 16, 17, 4, 3, 32, 31, 30, 29,  
 56, 57, 58, 59, 42, 41, 40, 39, 68, 67, 66, 65, 64, 63, 62],  
 [1, 2, 3, 32, 31, 30, 29, 56, 57, 58, 59, 42, 41, 40, 39, 68, 67, 66, 65, 64, 63, 62, 61, 0],  
 [23, 22, 31, 30, 29, 56, 57, 58, 59, 42, 41, 40, 39, 68, 67, 66, 65, 64, 63, 62],  
 [12, 13, 30, 29, 56, 57, 58, 59, 42, 41],  
 [69, 28, 29, 56, 57, 58, 59, 42, 41, 40, 39, 68],  
 [50, 49, 58, 59, 42, 41, 40, 39, 68, 67],  
 [44, 43, 42, 41, 40, 39, 68, 67, 66, 65],  
 [6, 5, 40, 39, 68, 67, 66, 65, 64, 63]]



- hrany v grafe: 105 hrán

$[(0, 1, \text{None}), (0, 61, \text{None}), (0, 69, \text{None}), (1, 2, \text{None}), (1, 46, \text{None}), (2, 3, \text{None}),$   
 $(2, 53, \text{None}), (3, 4, \text{None}), (3, 32, \text{None}), (4, 5, \text{None}), (4, 17, \text{None}), (5, 6, \text{None}),$   
 $(5, 40, \text{None}), (6, 7, \text{None}), (6, 63, \text{None}), (7, 8, \text{None}), (7, 48, \text{None}), (8, 9, \text{None}),$   
 $(8, 27, \text{None}), (9, 10, \text{None}), (9, 34, \text{None}), (10, 11, \text{None}), (10, 19, \text{None}),$   
 $(11, 12, \text{None}), (11, 52, \text{None}), (12, 13, \text{None}), (12, 41, \text{None}), (13, 14, \text{None}),$   
 $(13, 30, \text{None}), (14, 15, \text{None}), (14, 47, \text{None}), (15, 16, \text{None}), (15, 36, \text{None}),$   
 $(16, 17, \text{None}), (16, 25, \text{None}), (17, 18, \text{None}), (18, 19, \text{None}), (18, 57, \text{None}),$   
 $(19, 20, \text{None}), (20, 21, \text{None}), (20, 45, \text{None}), (21, 22, \text{None}), (21, 38, \text{None}),$   
 $(22, 23, \text{None}), (22, 31, \text{None}), (23, 24, \text{None}), (23, 62, \text{None}), (24, 25, \text{None}),$   
 $(24, 51, \text{None}), (25, 26, \text{None}), (26, 27, \text{None}), (26, 43, \text{None}), (27, 28, \text{None}),$   
 $(28, 29, \text{None}), (28, 69, \text{None}), (29, 30, \text{None}), (29, 56, \text{None}), (30, 31, \text{None}),$   
 $(31, 32, \text{None}), (32, 33, \text{None}), (33, 34, \text{None}), (33, 66, \text{None}), (34, 35, \text{None}),$   
 $(35, 36, \text{None}), (35, 60, \text{None}), (36, 37, \text{None}), (37, 38, \text{None}), (37, 54, \text{None}),$   
 $(38, 39, \text{None}), (39, 40, \text{None}), (39, 68, \text{None}), (40, 41, \text{None}), (41, 42, \text{None}),$   
 $(42, 43, \text{None}), (42, 59, \text{None}), (43, 44, \text{None}), (44, 45, \text{None}), (44, 65, \text{None}),$   
 $(45, 46, \text{None}), (46, 47, \text{None}), (47, 48, \text{None}), (48, 49, \text{None}), (49, 50, \text{None}),$   
 $(49, 58, \text{None}), (50, 51, \text{None}), (50, 67, \text{None}), (51, 52, \text{None}), (52, 53, \text{None}),$   
 $(53, 54, \text{None}), (54, 55, \text{None}), (55, 56, \text{None}), (55, 64, \text{None}), (56, 57, \text{None}),$   
 $(57, 58, \text{None}), (58, 59, \text{None}), (59, 60, \text{None}), (60, 61, \text{None}), (61, 62, \text{None}),$   
 $(62, 63, \text{None}), (63, 64, \text{None}), (64, 65, \text{None}), (65, 66, \text{None}), (66, 67, \text{None}),$   
 $(67, 68, \text{None}), (68, 69, \text{None})]$

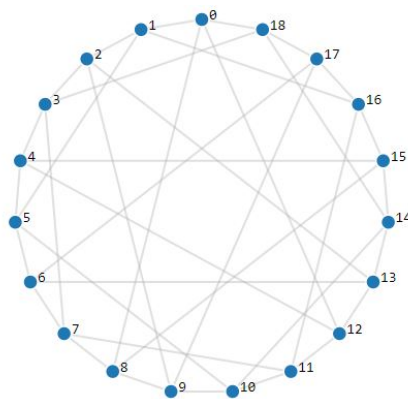
- počet grúp automorfizmov: 80

- matica lineárneho kódu:

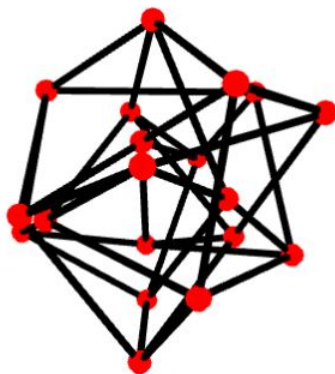
[illegible]

Obr. 4.15: Matica Balabanovho(10) grafu [coc]

#### 4.1.6 Robertsonov graf - $cage(4, 5)$



Obr. 4.16: Robertsonov graf 2D [coc]



Obr. 4.17: Robertsonov graf 3D [coc]

- minimálny počet vrcholov: 17
- rozmer minimálnej matice kódu:  $17 \times 34$
- obvod cyklu v matici: 10
- minimálny počet hrán: 34
- cykly v grafe: 20 cyklov
  - $[[18, 14, 13, 12, 0], [4, 15, 14, 13, 12], [8, 15, 14, 13, 12, 0],$
  - $[1, 16, 15, 14, 13, 12, 0], [11, 16, 15, 14, 13, 12], [6, 17, 16, 15, 14, 13],$
  - $[18, 17, 16, 15, 14], [2, 9, 17, 16, 15, 14, 13], [8, 9, 17, 16, 15],$
  - $[10, 9, 17, 16, 15, 14], [11, 10, 14, 13, 12], [1, 5, 10, 14, 13, 12, 0],$
  - $[4, 5, 10, 14, 13, 12], [6, 5, 10, 14, 13], [8, 7, 6, 13, 12, 0],$
  - $[11, 7, 6, 13, 12], [2, 3, 7, 6, 13], [18, 3, 7, 6, 13, 12, 0],$
  - $[4, 3, 7, 6, 13, 12], [1, 2, 13, 12, 0]]$
- hrany v grafe: 38 hrán
  - $[(0, 1, \text{None}), (0, 8, \text{None}), (0, 12, \text{None}), (0, 18, \text{None}), (1, 2, \text{None}), (1, 5, \text{None}),$
  - $(1, 16, \text{None}), (2, 3, \text{None}), (2, 9, \text{None}), (2, 13, \text{None}), (3, 4, \text{None}), (3, 7, \text{None}),$

$(3, 18, \text{None}), (4, 5, \text{None}), (4, 12, \text{None}), (4, 15, \text{None}), (5, 6, \text{None}), (5, 10, \text{None}),$   
 $(6, 7, \text{None}), (6, 13, \text{None}), (6, 17, \text{None}), (7, 8, \text{None}), (7, 11, \text{None}), (8, 9, \text{None}),$   
 $(8, 15, \text{None}), (9, 10, \text{None}), (9, 17, \text{None}), (10, 11, \text{None}), (10, 14, \text{None}), (11, 12, \text{None}),$   
 $(11, 16, \text{None}), (12, 13, \text{None}), (13, 14, \text{None}), (14, 15, \text{None}), (14, 18, \text{None}), (15, 16, \text{None}),$   
 $(16, 17, \text{None}), (17, 18, \text{None})]$

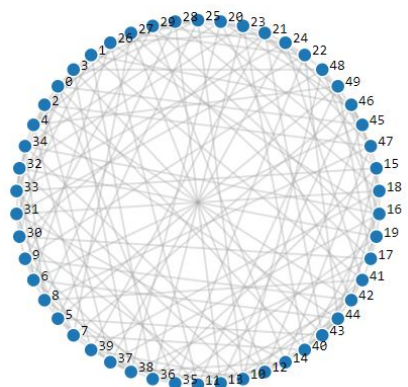
- počet grúp automorfizmov: 24
- matica lineárneho kódu:

```

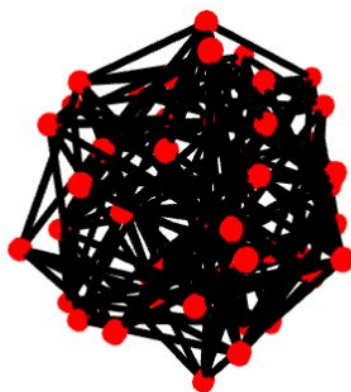
[1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
[1 0 0 0 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
[0 0 0 0 0 1 0 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
[0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
[0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 1 0 0 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 1 0 1 1 0 0 0 0 0 0]
[0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 1 1 0 0 0 0 0 0]
[0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 1 1 0 0 0 0]
[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 0 0 0]
[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 1 0 1 1 0]
[0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 0 0]
[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 0 0]
[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 0 0]
[0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0]
[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0]
[0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0]

```

Obr. 4.18: Matica Robertsonovho grafu [coc]

4.1.7 Hoffman - Singletonov graf -  $cage(7, 5)$ 

Obr. 4.19: Hoffman - Singletonov graf 2D [coc]



Obr. 4.20: Hoffman - Singletonov graf 3D [coc]

- minimálny počet vrcholov: 50
- rozmer minimálnej matice kódu:  $50 \times 175$
- obvod cyklu v matici: 10
- minimálny počet hrán: 175

- cykly v grafe: 126 cyklov

$[[45, 24, 22, 35, 0], [30, 21, 24, 22, 35, 0], [39, 21, 24, 22, 35], [2, 47, 21, 24, 22, 35, 0],$   
 $[8, 47, 21, 24, 22, 35], [48, 47, 21, 24, 22], [44, 15, 47, 21, 24, 22], [25, 15, 47, 21, 24, 22, 35, 0],$   
 $[36, 15, 47, 21, 24, 22, 35], [33, 15, 47, 21, 24], [31, 18, 15, 47, 21, 24, 22], [45, 18, 15, 47, 21, 24],$   
 $[39, 18, 15, 47, 21], [3, 28, 18, 15, 47, 21, 24, 22, 35, 0], [23, 28, 18, 15, 47, 21],$   
 $[27, 28, 18, 15, 47, 21, 24, 22], [8, 28, 18, 15, 47],$   
 $[29, 28, 18, 15, 47, 21, 24], [46, 13, 28, 18, 15, 47],$   
 $[44, 13, 28, 18, 15], [11, 13, 28, 18, 15, 47, 21, 24, 22, 35],$   
 $[30, 13, 28, 18, 15, 47, 21], [37, 13, 28, 18, 15, 47, 21, 24],$   
 $[25, 10, 13, 28, 18, 15], [41, 10, 13, 28, 18, 15, 47, 21, 24], [48, 10, 13, 28, 18, 15, 47],$   
 $[39, 10, 13, 28, 18], [43, 12, 10, 13, 28, 18, 15, 47, 21],$   
 $[45, 12, 10, 13, 28, 18], [14, 12, 10, 13, 28, 18, 15, 47],$   
 $[27, 12, 10, 13, 28], [36, 12, 10, 13, 28, 18, 15], [16, 34, 12, 10, 13, 28, 18], [8, 34, 12, 10, 13, 28],$   
 $[33, 34, 12, 10, 13, 28, 18, 15], [30, 34, 12, 10, 13],$   
 $[20, 34, 12, 10, 13, 28, 18, 15, 47, 21, 24, 22],$   
 $[44, 4, 34, 12, 10, 13],$   
 $[2, 4, 34, 12, 10, 13, 28, 18, 15, 47], [29, 4, 34, 12, 10, 13, 28],$   
 $[39, 4, 34, 12, 10], [31, 1, 4, 34, 12, 10, 13, 28, 18],$   
 $[46, 1, 4, 34, 12, 10, 13], [3, 1, 4, 34, 12, 10, 13, 28], [26, 1, 4, 34, 12, 10, 13, 28, 18, 15, 47, 21],$   
 $[41, 1, 4, 34, 12, 10], [36, 1, 4, 34, 12], [17, 49, 4, 34, 12, 10, 13, 28, 18, 15],$   
 $[23, 49, 4, 34, 12, 10, 13, 28], [45, 49, 4, 34, 12], [11, 49, 4, 34, 12, 10, 13], [48, 49, 4, 34, 12, 10],$   
 $[31, 5, 49, 4, 34, 12, 10, 13, 28, 18], [43, 5, 49, 4, 34, 12], [25, 5, 49, 4, 34, 12, 10],$   
 $[8, 5, 49, 4, 34], [37, 5, 49, 4, 34, 12, 10, 13], [46, 7, 5, 49, 4, 34, 12, 10, 13], [33, 7, 5, 49, 4, 34],$   
 $[40, 7, 5, 49, 4, 34, 12, 10, 13, 28, 18, 15, 47, 21, 24, 22, 35, 0], [27, 7, 5, 49, 4, 34, 12],$   
 $[39, 7, 5, 49, 4], [30, 9, 7, 5, 49, 4, 34],$   
 $[42, 9, 7, 5, 49, 4, 34, 12, 10, 13, 28, 18],$   
 $[36, 9, 7, 5, 49, 4, 34, 12], [48, 9, 7, 5, 49],$

[29, 9, 7, 5, 49, 4], [44, 6, 9, 7, 5, 49, 4], [45, 6, 9, 7, 5, 49],  
 [26, 6, 9, 7, 5, 49, 4, 34, 12, 10, 13, 28, 18, 15, 47, 21], [8, 6, 9, 7, 5],  
 [32, 6, 9, 7, 5, 49, 4, 34, 12, 10], [17, 38, 6, 9, 7, 5, 49], [14, 38, 6, 9, 7, 5, 49, 4, 34, 12],  
 [37, 38, 6, 9, 7, 5], [20, 38, 6, 9, 7, 5, 49, 4, 34], [3, 38, 6, 9, 7, 5, 49, 4, 34, 12, 10, 13, 28],  
 [39, 38, 6, 9, 7], [31, 32, 10, 13, 28, 18], [23, 32, 10, 13, 28], [2, 32, 10, 13, 28, 18, 15, 47],  
 [33, 32, 10, 13, 28, 18, 15], [19, 32, 10, 13, 28, 18, 15, 47, 21, 24, 22, 35], [43, 42, 18, 15, 47, 21],  
 [2, 42, 18, 15, 47], [11, 42, 18, 15, 47, 21, 24, 22, 35], [41, 42, 18, 15, 47, 21, 24],  
 [20, 42, 18, 15, 47, 21, 24, 22], [40, 16, 18, 15, 47, 21, 24, 22, 35, 0], [37, 16, 18, 15, 47, 21, 24],  
 [19, 16, 18, 15, 47, 21, 24, 22, 35], [48, 16, 18, 15, 47], [26, 16, 18, 15, 47, 21],  
 [30, 17, 15, 47, 21], [41, 17, 15, 47, 21, 24],  
 [27, 17, 15, 47, 21, 24, 22], [19, 17, 15, 47, 21, 24, 22, 35],  
 [31, 14, 47, 21, 24, 22], [11, 14, 47, 21, 24, 22, 35],  
 [29, 14, 47, 21, 24], [40, 14, 47, 21, 24, 22, 35, 0],  
 [20, 46, 47, 21, 24, 22], [45, 46, 47, 21, 24], [19, 46, 47, 21, 24, 22, 35],  
 [11, 26, 21, 24, 22, 35], [25, 26, 21, 24, 22, 35, 0], [27, 26, 21, 24, 22], [40, 23, 21, 24, 22, 35, 0],  
 [20, 23, 21, 24, 22], [36, 23, 21, 24, 22, 35], [44, 43, 21, 24, 22], [3, 43, 21, 24, 22, 35, 0],  
 [19, 43, 21, 24, 22, 35], [25, 29, 24, 22, 35, 0], [19, 29, 24, 22, 35], [2, 37, 24, 22, 35, 0],  
 [36, 37, 24, 22, 35], [3, 33, 24, 22, 35, 0], [11, 33, 24, 22, 35], [8, 41, 24, 22, 35],  
 [40, 41, 24, 22, 35, 0], [3, 48, 22, 35, 0], [2, 27, 22, 35, 0], [25, 20, 22, 35, 0],  
 [40, 44, 22, 35, 0], [30, 31, 22, 35, 0]

- hrany v grafe: 175 hrán

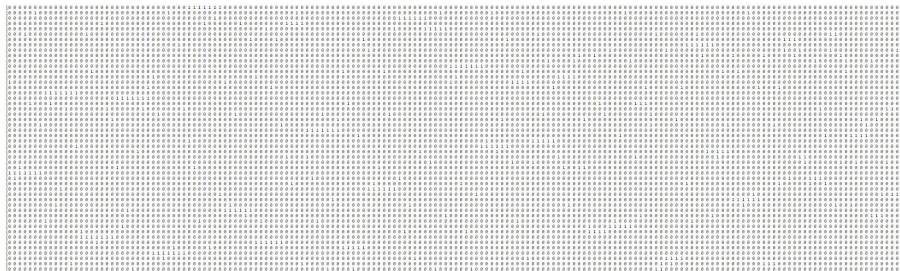
[(0, 2, *None*), (0, 3, *None*), (0, 25, *None*), (0, 30, *None*),  
 (0, 35, *None*), (0, 40, *None*), (0, 45, *None*), (1, 3, *None*),  
 (1, 4, *None*), (1, 26, *None*), (1, 31, *None*), (1, 36, *None*),  
 (1, 41, *None*), (1, 46, *None*), (2, 4, *None*), (2, 27, *None*),  
 (2, 32, *None*), (2, 37, *None*), (2, 42, *None*), (2, 47, *None*),

$(3, 28, \text{None}), (3, 33, \text{None}), (3, 38, \text{None}), (3, 43, \text{None}),$   
 $(3, 48, \text{None}), (4, 29, \text{None}), (4, 34, \text{None}), (4, 39, \text{None}),$   
 $(4, 44, \text{None}), (4, 49, \text{None}), (5, 7, \text{None}), (5, 8, \text{None}),$   
 $(5, 25, \text{None}), (5, 31, \text{None}), (5, 37, \text{None}), (5, 43, \text{None}),$   
 $(5, 49, \text{None}), (6, 8, \text{None}), (6, 9, \text{None}), (6, 26, \text{None}),$   
 $(6, 32, \text{None}), (6, 38, \text{None}), (6, 44, \text{None}), (6, 45, \text{None}),$   
 $(7, 9, \text{None}), (7, 27, \text{None}), (7, 33, \text{None}), (7, 39, \text{None}),$   
 $(7, 40, \text{None}), (7, 46, \text{None}), (8, 28, \text{None}), (8, 34, \text{None}),$   
 $(8, 35, \text{None}), (8, 41, \text{None}), (8, 47, \text{None}), (9, 29, \text{None}),$   
 $(9, 30, \text{None}), (9, 36, \text{None}), (9, 42, \text{None}), (9, 48, \text{None}),$   
 $(10, 12, \text{None}), (10, 13, \text{None}), (10, 25, \text{None}), (10, 32, \text{None}),$   
 $(10, 39, \text{None}), (10, 41, \text{None}), (10, 48, \text{None}), (11, 13, \text{None}),$   
 $(11, 14, \text{None}), (11, 26, \text{None}), (11, 33, \text{None}), (11, 35, \text{None}),$   
 $(11, 42, \text{None}), (11, 49, \text{None}), (12, 14, \text{None}), (12, 27, \text{None}),$   
 $(12, 34, \text{None}), (12, 36, \text{None}), (12, 43, \text{None}), (12, 45, \text{None}),$   
 $(13, 28, \text{None}), (13, 30, \text{None}), (13, 37, \text{None}), (13, 44, \text{None}),$   
 $(13, 46, \text{None}), (14, 29, \text{None}), (14, 31, \text{None}), (14, 38, \text{None}),$   
 $(14, 40, \text{None}), (14, 47, \text{None}), (15, 17, \text{None}), (15, 18, \text{None}),$   
 $(15, 25, \text{None}), (15, 33, \text{None}), (15, 36, \text{None}), (15, 44, \text{None}),$   
 $(15, 47, \text{None}), (16, 18, \text{None}), (16, 19, \text{None}), (16, 26, \text{None}),$   
 $(16, 34, \text{None}), (16, 37, \text{None}), (16, 40, \text{None}), (16, 48, \text{None}),$   
 $(17, 19, \text{None}), (17, 27, \text{None}), (17, 30, \text{None}), (17, 38, \text{None}),$   
 $(17, 41, \text{None}), (17, 49, \text{None}), (18, 28, \text{None}), (18, 31, \text{None}),$   
 $(18, 39, \text{None}), (18, 42, \text{None}), (18, 45, \text{None}), (19, 29, \text{None}),$   
 $(19, 32, \text{None}), (19, 35, \text{None}), (19, 43, \text{None}), (19, 46, \text{None}),$   
 $(20, 22, \text{None}), (20, 23, \text{None}), (20, 25, \text{None}), (20, 34, \text{None}),$   
 $(20, 38, \text{None}), (20, 42, \text{None}), (20, 46, \text{None}), (21, 23, \text{None}),$



$(21, 24, \text{None}), (21, 26, \text{None}), (21, 30, \text{None}), (21, 39, \text{None}),$   
 $(21, 43, \text{None}), (21, 47, \text{None}), (22, 24, \text{None}), (22, 27, \text{None}),$   
 $(22, 31, \text{None}), (22, 35, \text{None}), (22, 44, \text{None}), (22, 48, \text{None}),$   
 $(23, 28, \text{None}), (23, 32, \text{None}), (23, 36, \text{None}), (23, 40, \text{None}),$   
 $(23, 49, \text{None}), (24, 29, \text{None}), (24, 33, \text{None}), (24, 37, \text{None}),$   
 $(24, 41, \text{None}), (24, 45, \text{None}), (25, 26, \text{None}), (25, 29, \text{None}),$   
 $(26, 27, \text{None}), (27, 28, \text{None}), (28, 29, \text{None}), (30, 31, \text{None}),$   
 $(30, 34, \text{None}), (31, 32, \text{None}), (32, 33, \text{None}), (33, 34, \text{None}),$   
 $(35, 36, \text{None}), (35, 39, \text{None}), (36, 37, \text{None}), (37, 38, \text{None}),$   
 $(38, 39, \text{None}), (40, 41, \text{None}), (40, 44, \text{None}), (41, 42, \text{None}),$   
 $(42, 43, \text{None}), (43, 44, \text{None}), (45, 46, \text{None}), (45, 49, \text{None}),$   
 $(46, 47, \text{None}), (47, 48, \text{None}), (48, 49, \text{None})]$

- počet grúp automorfizmov: 252000
- matica lineárneho kódu:



Obr. 4.21: Matica Hoffman - Singletonovho grafu [coc]

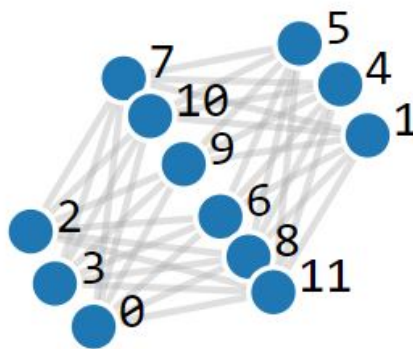
## 4.2 Generovanie kliebok a ich Incidenčných matic spolu s grupami automorfizmov

Uvažujeme existujúce kliebky, ktoré je potrebné zostrojiť spoločne s grafom, na základe nich potom vygenerujeme incidenčnú maticu a zistíme grupu automorfizmov. Pre vygenerovanú kliebku vieme zistiť všetky potrebné informácie ako v predošlom prípade.

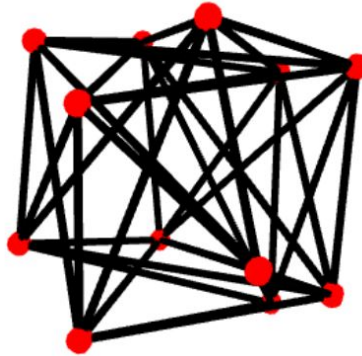
### 4.2.1 $cage(6, 4)$

Kliebku vygenerujeme ako bipartitný graf. V Sage použijeme metódu *DegreeSequenceBipartite*( $s, s$ ), ktorá bude mať 2 rovnaké parametre  $s$ , pričom každý predstavuje zoznam vrcholov. Najskôr je potrebné si vypočítať minimálny počet vrcholov  $m$  kliebky  $cage(6, 4)$  a na základe výpočtu viem určiť parameter. Každý zoznam obsahuje  $m/2$  vrcholov stupňa  $k$  a teda platí:

$$s = [k, k, k, k, k, k] \quad len(s) = \frac{m}{2} \quad (4.1)$$



Obr. 4.22: Cage(6,4) graf 2D [coc]



Obr. 4.23: Cage(6,4) graf 3D [coc]

- minimálny počet vrcholov: 12
- rozmer minimálnej matice kódu:  $12 \times 36$
- obvod cyklu v matici: 8
- minimálny počet hrán: 36
- cykly v grafe: 25 cyklov  
 $[[6, 5, 11, 0], [7, 5, 11, 0], [8, 5, 11, 0], [9, 5, 11, 0], [10, 5, 11, 0], [6, 4, 11, 0],$   
 $[7, 4, 11, 0], [8, 4, 11, 0], [9, 4, 11, 0], [10, 4, 11, 0], [6, 3, 11, 0], [7, 3, 11, 0],$   
 $[8, 3, 11, 0], [9, 3, 11, 0], [10, 3, 11, 0], [6, 2, 11, 0], [7, 2, 11, 0], [8, 2, 11, 0],$   
 $[9, 2, 11, 0], [10, 2, 11, 0], [6, 1, 11, 0], [7, 1, 11, 0], [8, 1, 11, 0], [9, 1, 11, 0], [10, 1, 11, 0]]$
- hrany v grafe: 36 hrán  
 $[(0, 6, \text{None}), (0, 7, \text{None}), (0, 8, \text{None}), (0, 9, \text{None}), (0, 10, \text{None}), (0, 11, \text{None}),$   
 $(1, 6, \text{None}), (1, 7, \text{None}), (1, 8, \text{None}), (1, 9, \text{None}), (1, 10, \text{None}), (1, 11, \text{None}),$   
 $(2, 6, \text{None}), (2, 7, \text{None}), (2, 8, \text{None}), (2, 9, \text{None}), (2, 10, \text{None}), (2, 11, \text{None}),$   
 $(3, 6, \text{None}), (3, 7, \text{None}), (3, 8, \text{None}), (3, 9, \text{None}), (3, 10, \text{None}), (3, 11, \text{None}),$   
 $(4, 6, \text{None}), (4, 7, \text{None}), (4, 8, \text{None}), (4, 9, \text{None}), (4, 10, \text{None}), (4, 11, \text{None}),$   
 $(5, 6, \text{None}), (5, 7, \text{None}), (5, 8, \text{None}), (5, 9, \text{None}), (5, 10, \text{None}), (5, 11, \text{None})]$

- počet grúp automorfizmov: 1036800

- matica lineárneho kódu:

```
[1 1 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
[0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0]
[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 1 1 1]
[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 1]
[1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0]
[0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0]
[0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0]
[0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0]
[0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0]
[0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0]
[0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0]
```

Obr. 4.24: Matica kietky Cage(6,4) [coc]

# Kapitola 5

## Záver

xxxxxxx

# Literatúra

[bra]

[bus]

[CBS<sup>+</sup>15] Chao Chen, Baoming Bai, Guangming Shi, Xiaotian Wang, and Xiaopeng Jiao. Nonbinary ldpc codes on cages: Structural property and code optimization. *IEEE Transactions on Communications*, 63(2):364–375, 2015.

[cho]

[cle]

[coc] Cocalc. <https://cocalc.com/projects?session=default>.

[dura]

[durb]

[EJ11] Geoffrey Exoo and Robert Jajcay. Dynamic cage survey. *The Electronic Journal of Combinatorics [electronic only]*, 1, 01 2011.

[glf]

[gre]

[her]

[hona]

[honb]

[kim]

[kraa]

[krab]

[kue]

[Mal07] Gabofestwe Alafang Malema. *Low-Density Parity-Check Codes: Construction and Implementation*. School of Electrical and Electronic Engineering, Faculty of Engineering, Computer and Mathematical Sciences The University of Adelaide, Australia, 2007.

[mih]

[ope]

[pia]

[pla]

[red]

[sag] Sage. <https://www.sagemath.org/>.

[sun]

[tay]

[thu]

[tnt]

[vie]

[wea]

[zhe]



# Zoznam obrázkov

3.1	Vztah medzi grafom a maticou [Mal07]	6
3.2	Petersenov graf [EJ11]	8
3.3	Heawoodov graf [EJ11]	9
3.4	McGeeho graf [EJ11]	9
3.5	Tutte-Coxeterov graf [EJ11]	10
3.6	Robertsonov graf [EJ11]	10
4.1	Petersenov graf 2D [coc]	13
4.2	Petersenov graf 3D [coc]	13
4.3	Matica Petersenovho grafu [coc]	14
4.4	Heawoodov graf 2D [coc]	15
4.5	Heawoodov graf 3D [coc]	15
4.6	Matica Heawoodovho grafu [coc]	16
4.7	McGeeho graf 2D [coc]	17
4.8	McGeeho graf 3D [coc]	17
4.9	Matica McGeeho grafu [coc]	18
4.10	Tutte-Coxeterov graf 2D [coc]	19
4.11	Tutte-Coxeterov graf 3D [coc]	19
4.12	Matica Tutte - Coxeterovho grafu [coc]	21
4.13	Balabanov(10) graf 2D [coc]	21

4.14	Balabanov(10) graf 3D [coc]	22
4.15	Matica Balabanovho(10) grafu [coc]	25
4.16	Robertsonov graf 2D [coc]	25
4.17	Robertsonov graf 3D [coc]	26
4.18	Matica Robertsonovho grafu [coc]	27
4.19	Hoffman - Singletonov graf 2D [coc]	28
4.20	Hoffman - Singletonov graf 3D [coc]	28
4.21	Matica Hoffman - Singletonovho grafu [coc]	32
4.22	Cage(6,4) graf 2D [coc]	33
4.23	Cage(6,4) graf 3D [coc]	34
4.24	Matica kletky Cage(6,4) [coc]	35