Znani integrali

$$\int e^{ax}\sin(bx)\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\big(a\sin(bx) - b\cos(bx)\big) + C$$

$$\int e^{ax}\cos(bx)\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\big(a\cos(bx) + b\sin(bx)\big) + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\Big(\frac{x}{a}\Big) + C$$

Parcialni ulomki

Ulomek	Parcialni razcep
$\frac{px+q}{(x-a)(x-b)}, a \neq b$	$\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b}$
$\frac{px+q}{(x-a)^2}$	$\frac{A}{x-a} + \frac{B}{(x-a)^2}$
$\frac{px^2+qx+r}{(x-a)(x^2+bx+c)}$	$\frac{A}{x-a} + \frac{Bx+C}{x^2+bx+c}$

kjer se x^2+bx+c se ne da razstaviti naprej.

Trigonometrične formule

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

Univerzalna substitucija

$$t = \tan\tfrac{x}{2}, \ \ \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \ \ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \ \ dx = \frac{2}{1+t^2}dt$$

Integral s parametrom

- Če je f zvezna na D, je F zvezna na $[c,d]$ in je

$$\lim_{y\to y_0}\int_a^b f(x,y)\,dx = \int_a^b f(x,y_0)\,dx$$

- Če sta f in $f_y = \frac{\partial f}{\partial y}$ zvezni na D, je F odvedljiva na $[c,d]$ in je

$$F'(y) = \int_a^b f_y(x,y)\,dx.$$

- Če sta f in f_y zvezni na D ter sta $u, v : [c,d] \to [a,b]$ odvedljivi funkciji, potem je funkcija $G(y) = \int_{u(y)}^{v(y)} f(x,y)\,dx$ odvedljiva na $[c,d]$ in $G'(y) = \int_{u(y)}^{v(y)} f_y(x,y)\,dx + f(v(y),y)\cdot v'(y) - f(u(y),y)\cdot u'(y)$.

Enakomerna konvergenca integrala s parametrom

- $F(y)$ je *enakomerno konvergenten* na $[c,d]$, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $B > a$ tak, da za vsak $b > B$ velja: $\left|\int_b^\infty f(x,y)\,dx\right| < \varepsilon$ za vsak $y \in [c,d]$
- *Weierstrassov kriterij*: Če obstaja taka zvezna funkcija g, da je $|f(x,y)| \leq g(x)$ za vsak $(x,y) \in D$ ter je $\int_a^\infty g(x)\,dx$ končen, potem $F(y) = \int_a^\infty f(x,y)\,dx$ enakomerno konvergira na $[c,d]$

Laplaceova transformacija

$$\mathcal{L}(f)(s) \equiv F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$$

je *Laplaceova transformiranka* funkcije f
Lastnosti:

- $\mathcal{L}\left(af(t) + bg(t)\right)(s) = a\mathcal{L}(f)(s) + b\mathcal{L}(g)(s)$
- $\mathcal{L}\left(e^{at}f(t)\right)(s) = \mathcal{L}(f)(s-a) = F(s-a)$
- $\mathcal{L}\left(f(at)\right)(s) = \frac{1}{a}\mathcal{L}(f)\left(\frac{s}{a}\right) = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$
- $\mathcal{L}(f')(s) = s\mathcal{L}(f) - f(0)$
  $\mathcal{L}(f'')(s) = s^2\mathcal{L}(f) - sf(0) - f'(0)$
  $\mathcal{L}(f^{(n)})(s) = s^n\mathcal{L}(f) - s^{n-1}f(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$
- $F'(s) = -\mathcal{L}(tf(t))(s)$
  $F^{(n)}(s) = \mathcal{L}((-t)^n f(t))(s)$

f	*Laplaceova tr.*	f	*Laplaceova tr.*
1	$\frac{1}{s}$	$\cos at$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
t	$\frac{1}{s^2}$	$\sin at$	$\frac{a}{s^2+a^2}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\cosh at$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$\sinh at$	$\frac{a}{s^2-a^2}$
$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$		

Konvolucija funkcij

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(u)g(t-u)\,du, \quad t \geq 0.$$

- $(f * g)(t) = (g * f)(t)$
- $\mathcal{L}(f * g)(s) = \mathcal{L}(f)\mathcal{L}(g)$

Heavisedeova in Delta funkcija

$$H(t-a)=\begin{cases}0, & t<a\\ 1, & t\geq a\end{cases}$$

- $\mathcal{L}(H(t-a))(s)=\frac{e^{-as}}{s}$
- $\mathcal{L}\left(H(t-a)f(t-a)\right)(s)=e^{-as}\mathcal{L}(f)(s)$
- $\mathcal{L}^{-1}(e^{-as}\mathcal{L}(f)(s))(t)=H(t-a)f(t-a)$

$$\delta(t-a)=\begin{cases}\infty, & t=a\\ 0, & \text{sicer}\end{cases} \qquad \text{in} \qquad \int_0^\infty \delta(t-a)\,dt=1.$$

$$\mathcal{L}(\delta(t-a))(s)=e^{-as}.$$

Gama in Beta funkcija

$$\Gamma(p)=\int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}\,dx, \qquad p>0$$

- Γ je zvezna in diferenciabilna
- $\Gamma(p+1)=p\,\Gamma(p), \quad \Gamma(n+1)=n!, n\in\mathbb{N}$
- $\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$

$$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx, \qquad p,q>0$$

- B je zvezna in diferenciabilna po obeh spremenljivkah
- $B(p,q)=B(q,p)$
- $B(p,q)=\dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$
- $B(p,q) = 2\int_0^{\pi/2}\cos^{2p-1}\varphi\sin^{2q-1}\varphi\,d\varphi$, za $p>0,\ q>0$

Funkcijske in Potenčne vrste

ITFR 04

Potenčna metoda in Frobeniusova metoda

ITFR 05, ITFR 06
Frobeniusova

$$y=\sum_{m=0}^\infty a_m(x-x_0)^{m+r}, \quad \text{pri } x_0=0:\ y=\sum_{m=0}^\infty a_m x^{m+r}.$$

Iz koeficienta pri najnižji potenci dobimo *karakteristično enačbo*, kvadratno enačbo za r z rešitvama r_1, r_2.

1. Različni rešitvi r_1, r_2, $r_1-r_2\notin\mathbb{Z}$: Linearno neodvisni rešitvi sta
$$y_1(x)=x^{r_1}\sum_{m=0}^\infty a_m x^m, \quad y_2(x)=x^{r_2}\sum_{m=0}^\infty A_m x^m.$$
2. Dvojna rešitev $r_1=r_2=r$. Rešitvi sta
$$y_1(x)=x^r\sum_{m=0}^\infty a_m x^m$$
$y_2(x)$ izračunamo po metodi zniževanja reda
3. Različni rešitvi, $r_1-r_2\in\mathbb{Z}$, $r_1-r_2>0$. Rešitvi sta
$$y_1(x)=x^{r_1}\sum_{m=0}^\infty a_m x^m$$
$y_2(x)$ izračunamo po metodi zniževanja reda
4. Kompleksni rešitvi r_1, $r_2=\overline{r_1}$. Zapišemo $y(x)=x^{r_1}\sum_{m=0}^\infty a_m x^m$, $a_m\in\mathbb{C}$. Rešitvi dobimo kot realni oz. imaginarni del.

Legendrova enačba in Legendrovi polinomi

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0.$$

Vsako rešitev te enačbe imenujemo *Legendrova funkcija.* Poiščemo jo z metodo potenčnih vrst. Splošna rešitev Legendrove enačbe je oblike

$$y(x) = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x),$$

kjer je

$$y_1(x) = 1 - \frac{n(n+1)}{2!}x^2 + \frac{(n-2)n(n+1)(n+3)}{4!}x^4 - \cdots,$$

$$y_2(x) = x - \frac{(n-1)(n+2)}{3!}x^3 + \frac{(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)}{5!}$$

Vrsti konvergirata za $|x| < 1$ (ali pa sta polinoma) in predstavljata dve linearno neodvisni rešitvi.

- Pri $n=0$ sta rešitvi enačbe $(1-x^2)y'' - 2xy' = 0$

$$y_1(x) = 1, \qquad y_2(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}.$$

- Pri $n=1$ sta rešitvi enačbe $(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$

$$y_2(x) = x, \qquad y_1(x) = 1 - \frac{1}{2}x\ln\frac{1+x}{1-x}.$$

Splošno: Pri sodem n je $y_1(x)$ polinom stopnje n, pri lihem n je $y_2(x)$ polinom stopnje $n \Rightarrow$ *Legendrovi polinomi* P_n:

$$P_n(x) = \sum_{m=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^m \frac{(2n-2m)!}{2^n m!(n-m)!(n-2m)!}\, x^{n-2m}.$$

$$\begin{aligned}
P_0(x) &= 1,\\
P_1(x) &= x,\\
P_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2-1),\\
P_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^3-3x),\\
P_4(x) &= \frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3)
\end{aligned}$$

Rodrigues: $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\,\frac{d^n}{dx^n}\left((x^2-1)^n\right)$

(a) so ortogonalni na intervalu $[-1,1]$,

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)\,dx = 0, \quad m \neq n.$$

(b) $\displaystyle\int_{-1}^{1} P_n(x)\,dx = 0, \quad n \geq 1.$

(c) $\displaystyle\int_{-1}^{1} (P_n(x))^2\,dx = \frac{2}{2n+1}.$

(d) P_n so sode funkcije pri sodem n in lihe funkcije pri lihem n, $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$, $P_n(1) = 1$.

(e) $(2n+1)P_n(x) = (P_{n+1}(x) - P_{n-1}(x))'$.

Besselova enačba in Besselove funkcije

$$x^2y'' + xy' + (x^2-\nu^2)y = 0, \quad \nu \geq 0.$$

Vsako rešitev te enačbe imenujemo *Besselova funkcija.* Poiščemo jo s Frobeniusovo metodo.
(I) $\nu = n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$:

$$J_n(x) = x^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k+n}\,k!\,(n+k)!}\, x^{2k}, \quad n \geq 0.$$

(II) $\nu > 0$, $\nu \notin \mathbb{N}$

$$J_\nu(x) = x^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k+\nu}\,k!\,\Gamma(\nu+k+1)}\, x^{2k}.$$

Pri $\nu \notin \mathbb{N}\cup\{0\}$ je splošna rešitev oblike

$$y(x) = c_1 J_\nu(x) + c_2 J_{-\nu}(x), \qquad \nu \neq n,$$

kjer je

$$J_{-\nu}(x) = x^{-\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k-\nu}\,k!\,\Gamma(-\nu+k+1)}\, x^{2k}.$$

Pri vseh ostalih vrednostih ν je splošna rešitev oblike

$$y(x) = c_1 J_\nu(x) + c_2 Y_\nu(x), \quad x > 0.$$

kjer je Y_ν *Besselova funkcija druge vrste* oz. Neumannova funkcija reda ν,

$$Y_\nu(x) = \frac{J_\nu(x)\,\cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\nu\pi)}, \; Y_n(x) = \lim_{\nu\to n} Y_\nu(x).$$

- $(x^\nu J_\nu(x))' = x^\nu J_{\nu-1}(x)$,
- $(x^{-\nu} J_\nu(x))' = -x^{-\nu} J_{\nu+1}(x)$,
- $J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x}\, J_\nu(x)$,
- $J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x) = 2J_\nu'(x)$,
- $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$.

Fourierove vrste

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{2n\pi}{b-a}x + b_n \sin\frac{2n\pi}{b-a}x\right),$$

$$a_0 = \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx,$$

$$a_n = \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\cos\frac{2n\pi x}{b-a}\,dx, \quad n = 1,2,3,\ldots$$

$$b_n = \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\sin\frac{2n\pi x}{b-a}\,dx, \quad n = 1,2,3,\ldots$$

Če je funkcija f definirana na $(0,a)$, jo lahko razvijemo v Fourierovo vrsto tudi kot

- liho funkcijo s periodo $2a$: **sinusna Fourierova vrsta** za funkcijo f

$$F_s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{a},\ b_n = \frac{2}{a}\int_0^a f(x)\sin\frac{n\pi x}{a}\,dx.$$

- sodo funkcijo s periodo $2a$: **kosinusna Fourierova vrsta** za funkcijo f

$$F_c(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{a},\ a_n = \frac{2}{a}\int_0^a f(x)\cos\frac{n\pi x}{a}\,dx$$

Posplošene Fourierove vrste

Sturm-Liouvillov problem: diferencialna enačba

$$(p(x)y')' + (q(x) + \lambda r(x))y = 0, \quad a \le x \le b,$$

z robnima pogojema

$$\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0, \quad \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0.$$

Posplošena Fourierova vrsta:

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m y_m(x),$$

$$a_m = \frac{1}{\parallel y_m \parallel^2}\int_a^b r(x)f(x)y_m(x)\,dx, \qquad m = 0,1,2,\ldots$$

Fourier Legendrove vrste

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0,$$

$$f(x) = a_0P_0(x) + a_1P_1(x) + a_2P_2(x) + \cdots.$$

Upoštevamo $\parallel P_m \parallel = \sqrt{\frac{2}{2m+1}}$ in dobimo

$$a_m = \frac{2m+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_m(x)\,dx, \qquad m = 0,1,2\ldots.$$

Fourier Besselove vrste

Za vsak $n \ge 0$ zaporedje Besselovih funkcij prve vrste

$$J_n(k_{n,1}x),\ J_n(k_{n,2}x),\ J_n(k_{n,3}x),\ \ldots$$

tvori ortogonalno množico na $[0,R]$ glede na utežno funkcijo $r(x)=x$. Velja

$$\int_0^R x\,J_n(k_{n,m}x)\,J_n(k_{n,j}x)\,dx = 0, \qquad j \ne m.$$

Tu so $\alpha_{n,1} < \alpha_{n,2} < \alpha_{n,3} < \cdots$ ničle funkcije J_n in

$$k_{n,m} = \frac{\alpha_{n,m}}{R}, \quad m = 1,2,3,\ldots.$$

Pri fiksnem n definiramo *Fourier-Besselovo vrsto*,

$$f(x) = a_1J_n(k_{n,1}x) + a_2J_n(k_{n,2}x) + a_3J_n(k_{n,3}x) + \cdots,$$

$$a_m = \frac{1}{\parallel J_n(k_{n,m}x)\parallel^2}\int_0^R x\,f(x)J_n(k_{n,m}x)\,dx, \qquad m = 1,2,\ldots$$

$$\parallel J_n(k_{n,m}x)\parallel^2 = \int_0^R x\,J_n^2(k_{n,m}x)\,dx = \frac{R^2}{2}J_{n+1}^2(k_{n,m}R).$$

$$(x^nJ_n(x))' = x^nJ_{n-1}(x),\ J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x}J_n(x)$$

Fourierov integral

$$F(x) = \int_0^{\infty}[A(w)\cos wx + B(w)\sin wx]\,dw,$$

$$A(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\cos wv\,dv,\ B(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\sin wv\,dv.$$

Fourierov kosinusni integral za sodo funkcijo f je enak

$$F(x) = \int_0^{\infty} A(w)\cos wx\,dw,\ A(w) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} f(v)\cos wv\,dv.$$

Fourierov sinusni integral za liho funkcijo f je enak

$$F(x) = \int_0^{\infty} B(w)\sin wx\,dw,\ B(w) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} f(v)\sin wv\,dv.$$

Fourierova transformacija

Fourierova kosinusna transformacija $\mathscr{F}_c : f \mapsto \hat{f}_c$

$$\hat{f}_c(w) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}A(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} f(x)\cos wx\,dx,$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}\hat{f}_c(w)\cos wx\,dw.\ \text{(inverz)}$$

Fourierova sinusna transformacija $\mathscr{F}_s : f \mapsto \hat{f}_s$

$$\hat{f}_s(w) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}B(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} f(x)\sin wx\,dx,$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}\hat{f}_s(w)\sin wx\,dw.\ \text{(inverz)}$$

Faktorizacija in defaktorizacija

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta))$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta))$$

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))$$