

Funkcije

Bor Bregant

Funkcija ali preslikava f iz množice A v množico B je predpis, ki vsakemu elementu iz A priredi natanko en element iz množice B .

Zgled. Zapiši definicijsko območje in ničle za funkcijo $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ in $g(x) = \log(x(x-1)(x+1))$. Ob grafu funkcije zapiši zalogo vrednosti intervale naraščanja in obravnavaj konveksnost za $h(x) = \cos(x - \frac{\pi}{2}) - 4$. Obravnavaj sodost / lihost za $f(x) = x^2 + x^6$ in $g(x) = x + x^3$. Zapiši ničle in začetno vrednost za $g(x) = 2^{\frac{x}{2}} - (\frac{1}{2})^4$.

1 Računanje s funkcijami

i Vsota $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$

ii Razlika $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$

iii Produkt $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

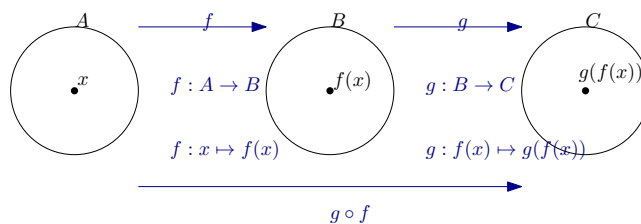
iv Kvocient $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ za $g(x) \neq 0, \forall x \in D_g$

v Produkt s številom $(k \cdot f)(x) = k \cdot f(x)$

Zgled. Zapiši vsoto, razliko, produkt in kvocient funkcij $f(x) = x - 3$ in $g(x) = -2x + 1$.

Naloga 1. DN 569c, 576, 578ad

Kompozitum funkcij



$$\begin{aligned} g \circ f &: A \rightarrow C \\ g \circ f &: x \mapsto g(f(x)) \\ (g \circ f)(x) &= g(f(x)) \end{aligned}$$

Zgled. Izračunaj $f \circ g$ in $g \circ f$ za $f(x) = \ln(x^2 + 2)$ in $g(x) = 3x - 1$ in pokaži, da ta operacija ni komutativna.

Zgled. Poišči inverzno funkcijo za $f(x) = \sqrt[3]{x} + 1$ in pokaži, da velja $(f \circ f^{-1})(x) = (f^{-1} \circ f)(x) = x$ Za bijektivne f .

Zgled. Dani sta funkciji $f(x) = 2x - 3$ in $g(x) = -x + 2$. Za katera realna števila x je $f(2x) = g(x)$ in za katera $f(-2) = g(x^2)$.

Zgled. Dani sta funkciji $f(x) = 3x + 2$ in $g(x) = 2x + n$. Za katera števila n velja $f(g(x)) = g(f(x))$?

Zgled. Določi k , da bo $f(g(x)) = g(f(x))$, kjer $f(x) = kx + 3$ in $g(x) = kx - 1$.

Naloga 2. DN 574, 573ace, 587, 592ac

Limita in zveznost

Zveznost

Zgled. Narišimo funkcije

$$\begin{aligned} f(x) &= \begin{cases} 2 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -x - 1 & x < 0 \end{cases} \\ g(x) &= \begin{cases} |x| + 1 & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \\ h(x) &= \begin{cases} x + 1 & x \leq 0 \\ e^x & x > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Opazimo, da f in g ista zvezni v $x = 0$, ampak lahko g popravimo v zvezno če dopolnimo z 1. h je zvezna. g ima v $x = 0$ limito, f pa ne.

Funkcije, ki lahko narišemo z eno potezo so **zvezne**, sicer pa **nezvezne**.

Funkcija f je zvezna v točki a , če in samo če:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

f je zvezna na $[a, b]$, če je zvezna v vsaki točki tega intervala. Vse elementarne funkcije so zvezne, kjer so definirane.

Zgled. *Nariši graf*

$$f(x) = \begin{cases} 2^x & x \leq 0 \\ x^{-1} & 0 < x < 1 \\ 2x - 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} \sin x & x \leq 0 \\ \tan x & x > 0 \end{cases}$$

in zapiši točke nezveznosti.

Zgled. *Določi $a \in \mathbb{R}$, da bosta $f(x) = \begin{cases} x^2 & x > 4 \\ x + a & x \leq 4 \end{cases}$ in $g(x) = \begin{cases} 2^{x+a} & x < -1 \\ -x & x \geq -1 \end{cases}$ zvezni.*

Naloga 3. DN 597bčef, 598abc

Limita

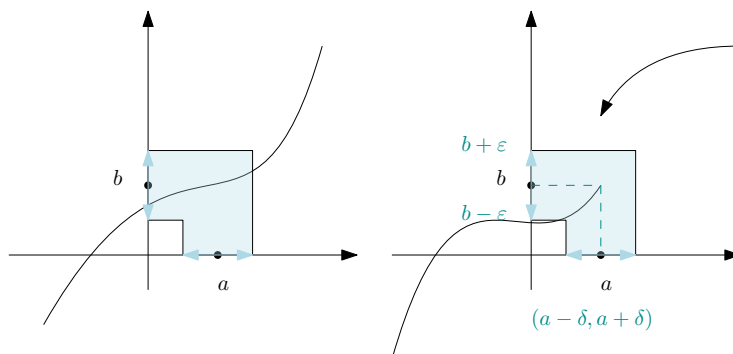
Zgled. *Nariši $f(x) = \tan x$ in $g(x) = \frac{x+1}{(x-1)^2}$ in opazuj točke nedefiniranosti.*

Enako za $f(x) = \begin{cases} x + 2 & x < -1 \\ -1 & x \geq -1 \end{cases}$.

Limita je neke vrste nadomestek za vrednost funkcije.

$$b = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$$

Število b je limita funkcije f , ko gre x proti a , če za poljubno ε okolico točke b obstaja taka δ okolica točke a , da brž ko je x v δ okolici točke a , je tudi $f(x)$ v ε okolici točke b .



Zgled. Izračunaj $\lim_{x \rightarrow -1} (2x^2 + x)$, $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\log_2 x}{4^x}$, $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 4}$ in $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x + x^2}{x}$.

Zgled. Izračunaj $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 100} - 10}{x^2}$ in korenska limita $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}{x}$.

Naloga 4. DN 606bč, 607bdc, 608c, 624bč

Limita v neskončnosti in neskončna limita

$$\lim_{x \rightarrow a} = \infty \iff \forall M \in \mathbb{R} \exists \delta > 0 : |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > M$$

Zgled. Izračunaj $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2}$ in $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-1}{(x+2)^2}$.

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} \iff \forall \varepsilon > 0 \exists M \in \mathbb{R} : x > M \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$$

Zgled. Izračunaj $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{1}{x}$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \arctan x + 1$, $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} 3^{-x+2}$ in $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+x^3}{-2x-2x^2-2x^3}$.

Naloga 5. DN 614d, 615ac, 619cč

Pravila za računanje z limitami

i $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x)$

ii $\lim_{x \rightarrow a} kf(x) = k \lim_{x \rightarrow a} f(x)$

iii $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$

iv Enako za kvocient, potenco, koren

v $\lim_{x \rightarrow a} c = c$

Limita e in $\frac{\sin x}{x}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Zgled. Izračunaj $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^x$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{3x}$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x}\right)^x$ in $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{4x}\right)^{5x}$.

Zgled. Izračunaj $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x+3}{5x-7}\right)^x$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3x-1}{x+2}\right)^x$ in $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x+5}\right)^{x+1}$

Naloga 6. DN 625bc

Zgled. Izračunaj $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}$ in $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{5x}$.

Zgled. Izračunaj $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 4x}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$ razširimo s konjugirano in $\lim_{x \rightarrow 0} x^{-1} \tan x \cos x$.

Naloga 7. DN 621acče, 623če, 626c

Zgled. Pokaži, da je funkcija $f(x) = \sqrt{x}$ zvezna povsod, kjer je definirana.

Po definiciji $|f(x) - f(a)| = |\sqrt{x} - \sqrt{a}| = \left| \frac{x-a}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} \right| \leq \frac{|x-a|}{\sqrt{a}}$

Izberemo lahko $\delta = \varepsilon\sqrt{a}$

V $x = 0$ posebej $|f(x) - f(0)| = \sqrt{x}$ pa izberemo $\delta = \varepsilon^2$