Vektorji

Bor Bregant

1 Vektorji

Vektor je množica usmerjenih daljic, ki imajo isto velikost in ležijo na vzporednih nosilkah. Operiramo le z enim predstavnikom vektorjev.

Vektorju $\vec{a} = \vec{AB}$ lahko določimo:

i Velikost: $|\vec{AB}| = d(A, B)$

ii Smer in usmerjenost: Določena s premico nosilko in usmerjenostjo

Vektorja sta enaka, če imata enako velikost, ležita na vzporednih premicah in sta enako usmerjena.

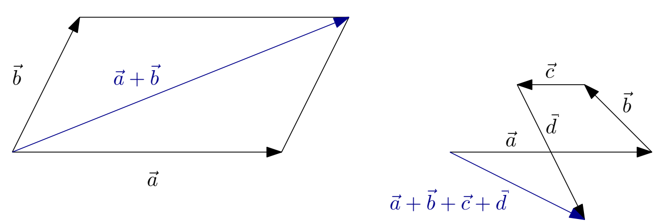
Operacije z vektorji

Seštevanje in odštevanje vektorjev

Dvočlena operacija, ki dvema vektorjema priredi nov vektor (vsoto). Operacija je komutativna in asociativna.

i Paralelogramsko pravilo - premaknemo vektorja na skupni začetek in vsota je diagonala

ii Trikotniško pravilo - premikamo na konec naslednjega vektorja



Ničelni vektor $\vec{0} = \vec{AA} = \vec{AB} + \vec{BA}$

Nasprotni vektor za $\vec{AB}$ je vektor $\vec{BA}$.

Enotski vektor je vektor z dolžino 1.

Razlika vektorjev je seštevanje nasprotnega vektorja.

Zgled. *V pravilnem šestkotniku $ABCDEF$, zapiši vse vektorje, ki so enaki $\vec{AB}$. Zapiši še vse nasprotne vektorje vektorja $\vec{SB}$, kjer je S središče tega šestkotnika.*

Zgled. *V kvadratu $ABCD$ izračunaj $\vec{BC} + \vec{CD}$, ter $\vec{DB} - \vec{CB} + \vec{CD}$.*

Zgled. *V kocki $ABCDA'B'C'D'$ izračunaj vrednost izrazov $\vec{AD} + \vec{A'B'}$ in $\vec{AB} - \vec{D'A} - \vec{BB'}$.*

Zgled. *Izračunaj $\vec{x}$, če je $\vec{x} - \vec{AC} = -\vec{AB}$.*

Naloga 1. DN 275b, 277bdf, 278e, 281ač. 283c

Množenje vektorja s številom (skalarjem)

$m \cdot \vec{a}$, kjer $m \in \mathbb{R}_{\neq 0}$ je vektor z enako smerjo kot $\vec{a}$, usmerjenost je odvisna od predznaka m, njegova velikost pa je enaka $|m| \cdot |\vec{a}|$. Za $|m| > 1$, se $\vec{a}$ podaljša, za $0 < |m| < 1$, se $\vec{a}$ skrajša.

i Asociativnost v skalarnem delju: $m(n\vec{a}) = (mn)\vec{a}$

ii Distributivnost v vektorskem delu: $m(\vec{a} + \vec{b}) = m\vec{a} + m\vec{b}$

iii Distributivnost v skalarnem delu: $(m + n)\vec{a} = m\vec{a} + n\vec{a}$

Iz vektorja $\vec{a}$ lahko naredimo enotski vektor $\vec{e} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$

Zgled. *Izračunaj n, če za vektor $\vec{a}$ velja $(n^2 + 3)\vec{a} - (n + 2)\vec{a} = (3 + n)\vec{a} + \vec{a}$.*

Zgled. *Nariši trikotnik ABC, kjer $|\vec{AB}| = 6cm$, $|\vec{BC}| = 5cm$ in $|\vec{CA}| = 3cm$. Nato nariši vektor $\vec{a} + 2\vec{c}$.*

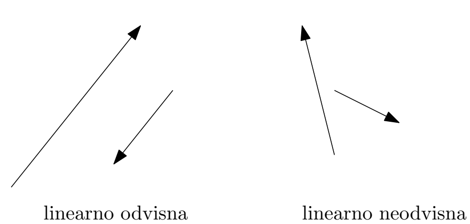
Naloga 2. DN 286b, 293ab

Odvisni in neodvisni vektorji

Vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ sta **linearno odvisna**, če lahko enega izrazimo z drugim $\vec{a} = k \cdot \vec{b}$. Vektorja ležita na vzporednih nosilkah in rečemo, da sta kolinearna.

Dva vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ v ravnini, ki nista kolinearna sta **linearno neodvisna** in tvorita **bazo** ravnine. To pomeni, da lahko vsak vektor v ravnini na en sam način zapišemo kot njuno **linearno kombinacijo**:

$$\vec{v} = m\vec{a} + n\vec{b}; \; m, n \in \mathbb{R}$$



Zgled. *V pravokotniku $ABCD$ sta bazna vektorja $\vec{a} = \vec{AB}$ in $\vec{b} = \vec{AD}$. Točka T_1 je razpolovišče CD, točka T_2 pa deli stranico AB v razmerju $|AT_2| : |T_2B| = 1 : 2$. Izrazi vektorje $\vec{T_2C}$, $\vec{T_1B}$ in $\vec{T_2T_1}$ v bazi.*

Vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ sta linearno neodvisna, če velja $m\vec{a} + n\vec{b} = 0 \iff m = 0 = n$.

Zgled. *Za bazna vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ določi $m, n \in \mathbb{R}$, če velja $(n-2)(\vec{a}+\vec{b}) = 3(m\vec{a}+\vec{b})$.*

Zgled. *V pravilnem šestkotniku $ABCDEF$ z bazo $\vec{a} = \vec{AB}$ in $\vec{b} = \vec{AF}$ zapiši vektorje $\vec{BF}$ in $\vec{AD}$.*

Zgled. *V pravokotniku $ABCD$ je točka N razpolovišče stranice BC, točka M pa leži na stranici AB tako, da $|AM| : |MB| = 3 : 2$. V kakšnem razmerju deli stranica MD daljico AN.*

Zgled. *V paralelogramu $ABCD$, je E na stranici CD, da $|DE| : |DC| = 1 : 5$, točka F pa je presek BE in AC. Pokaži, da velja $\vec{EF} = \frac{4}{9}\vec{EB}$.*

Zgled. *Pokaži, da težišče deli težiščnico v razmerju $2 : 1$.*

Zgled. *Izmisli si eno nalogo v šestkotniku*

Naloga 3. DN 304, 311ac, 313, 314

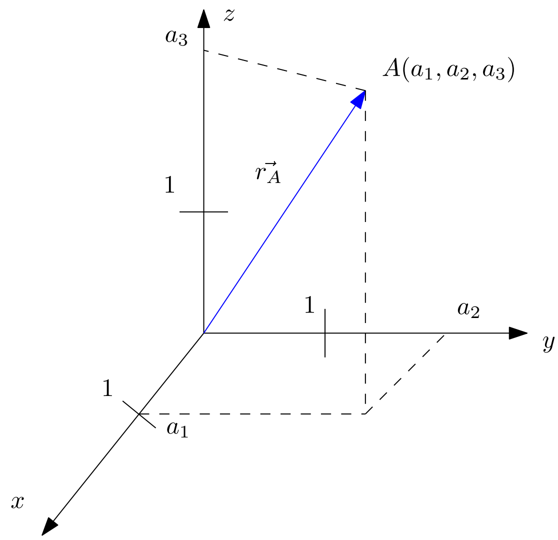
2 Vektorji v prostoru

Bazo prostora sestavljajo trije neodvisni vektorji. Vsak vektor v prostoru lahko torej enolično zapišemo kot njihovo linearno kombinacijo.

Baza je ortogonalna, če so vektorji baze med sabo pravokotni. Baza je ortonormirana, če so vektorji pravokotni med sabo in dolžine 1.

Standardna baza je ortonormirana baza $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, kjer ti vektorji ležijo zaporedno na poltrakih koordinatnih osi x, y in z.

V tej standardni bazi , lahko vsako točko $A(a_1, a_2, a_3)$ predstavimo s krajevnim vektorjem $\vec{r_A} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$. Pišemo $\vec{r_A} = (a_1, a_2, a_3)$. Posebej $\vec{i} = (1, 0, 0), \vec{j} = (0, 1, 0)$ in $\vec{k} = (0, 0, 1)$.



Zgled. *Poiščimo eno ortogonalno in eno neoortogonalno bazo kocke.*

Računanje s krajevnimi vektorji:

$(a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$
$n(a_1, a_2, a_3) = (na_1, na_2, na_3); n \in \mathbb{R}$

Zgled. *Zapišimo vektor daljice AB in krajevni vektor razpolovišča te daljice.* Video rešitve

Zgled. *Dani sta točki $A(-2, 2, 6)$ in $B(3, 2, -4)$. Točka T leži na daljici AB, da $|AT| : |TB| = 4 : 1$. Izračunajmo koordinate T.* Video rešitve

Zgled. *Dana sta vektorja $\vec{a} = (3, -2, 0)$ in $\vec{b} = (-1, 4, 3)$. Zapišimo linearne kombinacije $\vec{a} + \vec{b}$ in $2\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$.*

Zgled. *V prostoru sta točki $A(1, 4, -1)$ in $S(0, 2, -2)$. Določi točko B, da bo S središče daljice AB. Določi še vektor $\vec{AB}$ in $\vec{BA}$. Naj bo točka T na daljici AS, da velja $|AT| : |TS| = 2 : 1$. Določi $\vec{r_T}$.*

Zgled. *Določimo parameter u, da bosta vektorja $\vec{a} = (4, -6, u)$ in $\vec{b} = (-6, 9, 4)$ kolinearna.* Video rešitve

Zgled. *Pokažimo, da so vektorji $\vec{a} = (1, -1, 3), \vec{b} = (2, 1, 0)$ in $\vec{c} = (0, -3, 6)$ koplanarni.* Video rešitve *in, da so $(0, 1, 1)$, $(1, 0, 1)$ in $(-1, -1, 1)$ nekoplanarni.*

Zgled. *Vektor $\vec{c} = (3, 14)$ zapiši z vektorjema $\vec{a} = (3, 4)$ in $\vec{b} = (-1, 2)$ in jih nariši v ravnini.*

Zgled. *Na sliki so v koordinatnem sistemu točke A, B in C nariši. Zapiši vektor $\vec{AB}$ in vektor $\vec{CA}$ po komponentah in s pomočjo standardne baze $\{\vec{i}, \vec{j}\}$.*

Velja še, da je krajevni vektor $\vec{r_T}$ težišča T trikotnika ABC enak $\vec{r_T} = \frac{1}{3}(\vec{r_A} + \vec{r_B} + \vec{r_C})$.

Zgled. *Določi koordinate točke B, če je $T(-1,3,3)$ težišče trikotnika in ostali oglišči $A(1,4,-2)$ in $C(-1,2,6)$.*

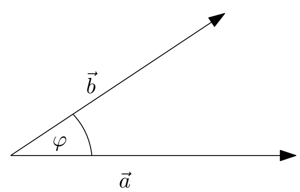
Naloga 1. NALOGE 321, 322, 324, 330, 340a

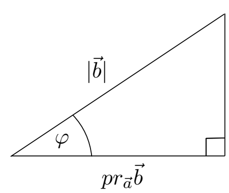
3 Skalarni produkt

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\varphi, \text{ kjer je } \varphi \text{ vmesni kot}$$

Zgled. *Izračunaj $\vec{a} \cdot \vec{b}$, če je $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$ in $\varphi = 150°$.*

Dolžina pravokotne projekcije $\vec{b}$ na $\vec{a}$ je $pr_{\vec{a}}\vec{b} = |\vec{b}| \cos\varphi$.





Za skalarni produkt velja komutativnost, distributivnost in homogenost

$\vec{a} \perp \vec{b} \iff \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

Dolžina vektorja $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$

Kosinusni izrek $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$

Dokaz: $\vec{BC} = -\vec{c} + \vec{b}$ in $a = |\vec{BC}| = \sqrt{\ldots}$

Zgled. *Izračunajmo dolžino vektorja $\vec{a}$, če ima $\vec{b}$ dolžino 6, njun skalarni produkt je enak 21, njun vmesni kot pa $60°$. Izračunajmo še $pr_{\vec{a}}\vec{b}$.* Video rešitve

Zgled. *Izračunaj $(\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot (\vec{a} + 3\vec{b})$, če je $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$ in $\varphi = 150°$. Določi še $|\vec{a} + \vec{b}|$.*

Zgled. *Dolžina vektorja $\vec{a}$ je 3, $|\vec{b}| = 4$, dolžina $2\vec{a} - \vec{b}$ pa $\sqrt{76}$. Izračunajmo kot med $\vec{a}$ in $\vec{b}$.* Video rešitve

Zgled. *Izračunaj kot med vektorjema $\vec{a}$ in $\vec{a} - \vec{b}$, če je $|\vec{a}| = 6$, $|\vec{b}| = 5$ in njun vmesni kot $\frac{2\pi}{3}$.*

Zgled. *Izračunaj dolžino stranice a in kot β v trikotniku, če je $b = 4cm$, $c = 8cm$ in $\alpha = 120°$.*

Zgled. *V paralelogramu ABCD je $a = 7cm, b = 4cm, \alpha = 36°$. Izračunajmo dolžino diagonale f.* *Video rešitve*

Zgled. *Z vektorji pokažimo, da je kot med diagonalama romba pravi.*

Naloga 1. 357a, 360c, 366, 375b, 377b

3.1 Skalarni produkt v ortonormirani bazi

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$
$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$
$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

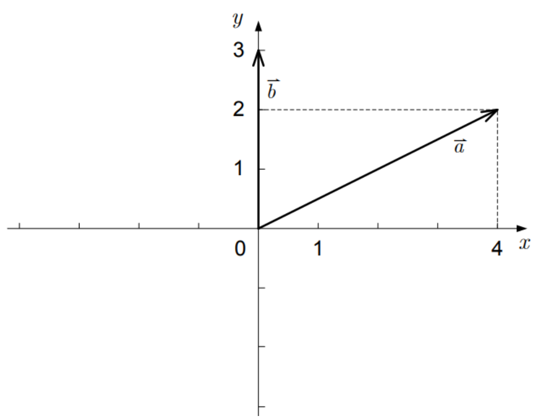
Zgled. *Za vektorja $\vec{a} = (-1, 4)$ in $\vec{b} = (-1, -3)$ izračunaj njun skalarni produkt.*

Zgled. *Za vektorja $\vec{a} = (2, 1, 4)$ in $\vec{b} = (1, 0, -1)$ izračunajmo $(2\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{b}$.* *Video rešitve*

Zgled. *Določimo komponento u, da bosta $\vec{a} = (-3, 2u, 5)$ in $\vec{b} = (6, u, 2)$ pravokotna.* *Video rešitve*

Zgled. *Naloga z mature 2021.* *Video rešitve*

V ravnini, opremljeni s koordinatnim sistemom, sta narisana vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$. Narišite vektor $\vec{c} = \frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b}$. Kolikšni sta dolžini vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$? Koliko meri kot φ med $\vec{a}$ in $\vec{b}$? Rezultat zaokrožite na stotinko stopinje.



Zgled. *Zapiši razdaljo med točkama A in B ter enotski vektor $\vec{e}$ v smeri vektorja $\vec{AB}$, če je $A(1, 4)$ in $B(-1, 8)$.*

Zgled. *Določi* y*, da bosta vektorja* $(2, y, 0)$ *in* $(0, 2, 2)$ *oklepala kot* 60°*.*

Zgled. *Določi* x *in* $|\vec{b}|$*, če velja* $\vec{a} = (1, 0, x)$*,* $\vec{b} = (2, -2, 5)$ *in* $\vec{a} \cdot \vec{b} = 7$*.*

Naloga 2. NALOGE 388, 389, 390ac, 393, 399, 405, 408, 414