Naravna in cela števila

Bor Bregant

1 Naravna števila

Števila s katerimi štejemo $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

Peanovi aksiomi:

- $1 \in \mathbb{N}$
- Vsako naravno število ima svojega naslednika
- Različni naravni števili imata različna naslednika
- Če neka trditev velja z vsakim naravnim številom tudi za njegovega naslednika, velja za vsa naravna števila.

Osnovni operaciji $+$ in $\cdot$ (notranji). Seštevanec, vsota, faktor, produkt.

Komutativnost $a + b = b + a$, $\cdot$
Asociativnost $(a + b) + c = a + (b + c)$
Distributivnost $(a + b)c = ac + bc$.

Zgled. *Izračunaj* $75 \cdot 3 - 12 + 16 \cdot (-5)$ *in* $2 + 7 \cdot 3(2 + 4(3 + 2 \cdot 2(5 - 7 \cdot 8)))$ *ter* $172 \cdot 29$.

Zgled. *Odpravi oklepaje* $7(3x + 1)$ *in* $(3a + 4)(5b + 2)$

Zgled. *Izpostavi skupni faktor* $10a + 30$ *in* $ac + bc + a + b$.

Naloga 1. 5a, 8ce, 9be

2 Cela števila

Dodamo nasprotna števila $n \to -n$. $\mathbb{Z}$ konstruiramo kot unija pozitivnih celih števil, števila 0 in negativnih celih števil.

Dodamo $-$, ki je definirano kot kot prištevanje nasprotne vrednosti.

Nekaj aksiomov in pravil:

Aksiom: $a + 0 = a$, $-(-a) = a$, $1 \cdot a = a \; \forall a \in \mathbb{Z}$

Izrek: $-(a)+(-b)=-(a+b)$, $0\cdot a=0$.

Urejenost (primerjamo števila): Velja natanko ena od možnosti $a<b, a>b, a=b$ ($a>b \iff$ slika a leži na desni strani številske premice od števila b).

Za relacijo "biti manjši ali enak"(in podobno za $\geq$) veljajo lastnosti:

Refleksivnost $a \leq a$,
Antisimetričnost $a \leq b \wedge b \leq a \Rightarrow a=b$,
Tranzitivnost $a \leq b \wedge b \leq c \Rightarrow a \leq c$.

Zgled. *Trikratniku števila* 62 *odštejemo petkratnik vsote števil* 93, 82 *in* 8. *Katero število dobimo?*

Zgled. *Zapiši množico vseh celih števil, ki so od* 0 *oddaljena kvečjemu za* 6, *ter iskano množico predstavi na številski premici.*

3 Potence z naravnimi eksponenti

$$a^n = \underbrace{a\cdot \ldots \cdot a}_{n}$$

Osnova, eksponent, potenca

Pravila z dokazi:

$$\begin{aligned} a^n\cdot a^m &= a^{n+m}\\ (a^n)^m &= a^{n\cdot m}\\ (ab)^n &= a^n b^n\\ a^1 &= a,\ 1^n=1 \end{aligned}$$

Zgled. *Izračunaj* $x^2\cdot x^9+2x\cdot x^{10}$, $(a^n)^2\cdot\left(a^3\right)^n$, $\left(u^2v^3\right)^2$, $\left(a^2b\right)^3\left(3ab^3\right)^2a^2$ *in* $(-1)^{2023}\cdot(-1)^{2024}$, $(2x^3)^2\cdot(-3x^4)^2$.

Naloga 1. 82cg, 72ab, 80d, 90a

4 Večkratniki in izrazi

Večkratnik ali k-kratnik števila a je vsota k enakih sumandov a: $k\cdot a=a+\ldots+a$.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \text{ kvadrat vsote}$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \text{ kvadrat razlike}$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \text{ kub vsote}$$
$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \text{ kub razlike}$$
$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) \text{ razlika kvadratov}$$
$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) \text{ vsota (razlika) kubov}$$
$$ab + ac = a(b+c) \text{ izpostavljanje skupnega faktorja}$$

Zgled. *Izračunaj* $(2a+3b)^2$, $(x-2y)^2$, $(3u+v)^3$, $(2-5n)^3$ *in* $(x^2-2x-3)(x^2+3x)$.

Zgled. *Zapiši prve tri večkratnike izraza* $x-2$.

Zgled. *Razstavi* x^2+2x+1, a^2-9, $16a^2-81$, $25+10a+a^2$, x^3+64y^3, $3a+6a^2$, $ac+ad+bc+bd$ *in* $2x^2-2xz+xy-yz$.

Zgled. *Razstavi* $x^4-3x^3+2x^2$, *in* $a^4b+64ab$.

Naloga 1. DN 114a, 122a, 123a, 124acd, 125acd, 130a, 131ch, 135a

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$
$$a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a+b)(a^{2n} - a^{2n-1}b + a^{2n-2}b^2 + \cdots - ab^{2n-1} + b^{2n}) \text{ lihi naravni eksponenti}$$

Zgled. *Izračunaj* a^7-1, a^5+32b^5.

Zgled. *Poenostavi* $\left(-ab^2\right)^3\left(a\left(-b\right)^2\right)^4+\left(a\left(-b\right)^2\right)^7$ *in* $\left(x\left(4-2\right)^2\right)^3+\left(-2^2x\right)\left(-x\right)^2-\left(-15x\right)\left(2x\right)^2$.

Zgled. *Poenostavi* $5a^{n+1}+4a^{n+1}-6a^{n+1}$, $3x^{n+2}+5x^n\cdot x2+2x\cdot x^{n+1}$ *in* $3^{5x}\cdot 9^x-3^{7x}+27^x\cdot 9^{2x}$ *ter* $4^{2y}+3\left(2^y\right)^4-5\cdot 8^y\cdot 2^y$.

Vietovo pravilo
$$x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)$$

Zgled. *Razstavi* x^2+5x+6, $x^2-11x+18$, m^2+7m-8 *in* a^4+a^2-20.

Zgled. *Razstavi* $a^2+10ab+24b^2$ *in* x^3+x^2+3x+3.

Naloga 2. DN 127ac, 128b, 132a