Kombinatorika

Bor Bregant

Zgled. *Na koliko načinov lahko za ravno mizo sedi sedem povabljencev?*

Osnovni izrek kombinatorike ali pravilo produkta: Če neki proces lahko razdelimo na k zaporednih faz in je prva od faz izvedljiva na n_1 načinov, druga na n_2 načinov, tretja na n_3 načinov, ... in k-ta na n_k načinov (kjer so izbori med sabo neodvisni), je celotni proces izvedljiv na $n = n_1 \cdot \ldots n_k$ načinov.

Zgled. *Na koliko načinov se lahko oblečemo, če imamo na razpolago dva para čevljev, pet srajc, troje hlač in štiri kravate?*
Na koliko načinov lahko damo nase pokrivalo, če imamo na voljo 3 klobuke in dve čepici (nezdružljivost).

Pravilo vsote: Če izbiramo med n_1 možnostmi iz prve množice izborov ali n_2 možnostmi iz druge množice naborov in tako naprej (kjer so izbori med sabo neodvisni in nezdružljivi) do k-tega nabora, potem je vseh izborov $M = n_1 + \ldots n_k$.

Zgled. *Do ŠKG lahko pridemo z avtobusi številk 3 ali 5, kjer v obeh primerih naprej prestopimo na 1, 8 ali 25, lahko pa gremo s kolesom ali z avtom. Na koliko različnih način lahko pridemo do šole?*

Zgled. *Koliko je vseh različnih metov, če petkrat zapored vržemo kovanec. Predstavi s* ***kombinatoričnim drevesom****.*

Zgled. *Imamo 25 črk, 5 samoglasnikov. Koliko načinov, če različne črke, če ponavljajo ali pa če morajo biti na prvem mestu soglasniki.*

Zgled. *Na razpolago lahko dobimo* 5 *modelov mercedesa v* 3 *barvah in* 4 *modele BMW v* 2 *barvah. Med koliko možnostmi izbiramo?*

Naloga 1. DN 232a, 248, 254

Zgled. *Na koliko načinov lahko na polico damo* 5 *leposlovnih,* 3 *slovarje in* 9 *strokovnih knjig, če ni omejitev ali pa če isti tipi morajo iti skupaj.*

Naloga 2. DN 232a, 248, 254

1 Permutacije

Razporeditve n različnih elementov na n mest, kjer je vrstni red pomemben imenujemo permutacije n elementov. Teh možnosti je $P_n = n! = n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$.

Zgled. *Izračunaj* $4!$ *in* $\frac{n!}{(n-1)!}$.

Zgled. *Koliko besed lahko sestavimo iz črk $ABCDE$, če:*
Ni omejitev?
Besede se morajo začeti na D
Besede se ne začnejo niti na A niti na E
Besede se ne končajo na DA

Zgled. *Šestčlanska družina gre v kino. Na koliko načinov se lahko usede v vrsto, če sedita starša skupaj in otroci skupaj. Kaj pa če starša sedita na obeh koncih, otroci pa med njima.*

Zgled. *Sedem otrok stoji v vrsti. Na koliko načinov jih lahko prestavimo, če trije najbolj živahni ne smejo biti vsi skupaj.*

Zgled. *Preštejmo vse permutacije črk besede $ANANAS$.*

Permutacij n elementov, kjer se en ponavlja k_1-krat, drugi k_2-krat in tako naprej, je $P_n^{k_1,\cdots k_r} = \frac{n!}{k_1!\cdots k_r!}$

Zgled. *Koliko besed iz črk $BOMBAZ$ se ne začne s črko A.*

Zgled. *Koliko številk iz nabora 5, 6, 7, 8, 9 če brez omejitev ali pa število večje od 70000?* $3 \cdot 4!$

Zgled. *Koliko načinov, da 4 dekleta, 5 fantov v vrsto, če dekleta skupaj, fantje brez omejitev?* $4! \cdot 5! \cdot 6$ *ali pa zlepek dodaten fant torej* $4! \cdot 6!$
Kaj če morajo stati izmenično?

Naloga 1. DN 262, 263, 273, 267, 281, 292.

Zgled. *Koliko načinov lahko vržemo 3 cifre in 5 mož.* $\frac{8!}{3!\cdot 5!}$

Zgled. *Koliko načinov 5 ljudi za ravno ali okroglo mizo?*

Zgled. *Koliko načinov 2 avtomobila, 8 ljudi, 6 jih ima izpit.* $6 \cdot 5 \cdot 6!$

Zgled. *10 igrač 3 otroci. A jih dobi 4, B jih dobi 3, C pa 3. Na koliko načinov si jih lahko razdelijo. če 10 otrok jih fiksiramo in $10!$ načinov. Naš primer spet fiksiramo igrače, A jih dobi 4 kot zlepek prvih 4, a je vseeno, če se v A zmešajo. Torej* $\frac{10!}{4!3!3!}$.

Zgled. *Podobna naloga košarka, 5 jih je v ekipi, 15 jih pride na trening. Na koliko načinov 3 ekipe?* $\frac{15!}{5!5!5!}$

2 Variacije

n elementov razporejamo na r mest $(r < n)$.

Zgled. *Na koliko načinov lahko razporedimo 10 dijakov za mizo za 4 osebe.*

Variacije brez ponavljanja:

$$V_n^r = N(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Zgled. *Koliko trimestnih števil lahko sestavimo s števkami $1, 2, 5, 8$, če se števke ne smejo ponavljati. Kaj pa če dodamo 0.*

Zgled. *Ponavljanje*

Variacije s ponavljanjem

3 Kombinacije

Na voljo n elementov, izberemo r elementov, vrstni red ni pomemben.

$$\frac{n!}{(n-r)!r!} = \binom{n}{r} = C_n^r$$

Zgled. *Koliko načinov 3 kepice izmed 16 vrst , če v kornetu ali skledici? kornet vrstni red pomemben* $16 \cdot 15 \cdot 14$ *skleda vrstni red ni pomemben* $\frac{16!}{(16-3)!3!}$.

Zgled. *Na koliko načinov lahko izberemo 3 dijake iz razreda 22 deklet in 5 fantov. Kaj pa 2 dekleti in enega fanta.*

Zgled. *Naloga z igračami lažje* $\binom{10}{4} \cdot \binom{6}{3} \cdot \binom{3}{3}$.

Zgled. *12 deklet, 18 fantov. Na koliko načinov lahko določimo otvoritveni par.*

Hitro računanje binoma: $\binom{98}{4} = \frac{98\cdot 87\cdot 96\cdot 95}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}$. (enako cifer zgoraj kot spodaj)

3.1 Lastnosti binomskih simbolov

i $\binom{n}{0} = 1$ Med n elementi jih izberemo 0

Dokaz $\binom{n}{0} = \frac{n!}{(n-0)!\cdot 0!} = 1$

ii $\binom{n}{1} = n$

iii Simetričnost $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$

Dokaz $\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!} = \frac{n!}{(n-(n-r))!\cdot(n-r)!} = \binom{n}{n-r}$

Posledica $\binom{n}{n} = \binom{n}{n-n} = \binom{n}{0} = 1$

iv Aditivnost $\binom{n}{r} + \binom{n}{r+1} = \binom{n+1}{r+1}$

Dokaz s Pascalovim trikotnikom

Zgled. *Izračunaj* $\binom{n}{n-2}$ *in* $\binom{200}{197} + \binom{200}{198} = \binom{201}{198} = \binom{201}{3} = \frac{201\cdot 200\cdot 199}{3\cdot 2\cdot 1}$.

Zgled. *Poenostavi* $\binom{n+1}{n}$ *in* $\binom{n+1}{k+1} : \binom{n}{k}$

Zgled. *Reši enačbo* $C^3_{n+2} = n \cdot C^1_{n+1}$.

Naloga 1. DN Računanje binoma 346č, 347ač, 348ac, 349

3.2 Binomski izek

Vpeljava z $(a+b)^i$ in Pascalovim trikotnikom.

$$\binom{0}{0}$$

$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$

$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$

$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$

$$\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4}$$

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n}b^n$$

Zgled. *Izračunaj* $(x^2 - \sqrt{2})^6$.

Zgled. *Izračunaj 17. člen v razvoju* $(2a - b^2)^{23}$. Predznak +, $\binom{23}{16}(2a)^7(b^2)^{16}$

Zgled. *Izračunaj 4. člen v razvoju* $(\sqrt{3} + \sqrt{2}i)^{21}$. Predznak +, $\binom{21}{3}(\sqrt{3})^{18}(i\sqrt{2})^3$

Zgled. *Višji nivo: Poišči člen v razvoju* $(\sqrt{x}y^2 - \frac{x}{\sqrt[3]{y^2}})^{10}$*, ki vsebuje* x^9. *Gremo po členih, 9. člen*

DN 380, 381

Število preslikav (višji nivo)

Število bijektivnih preslikav iz A v B je $n!$, kjer $m(A) = m(B) = n$. (slika diagrama z mehurčki)

Število vseh preslikav iz A v B je n^r, kjer $m(A) = r$, $m(B) = n$

Število injektivnih $m(A) = r$, $m(B) = n$, je $n(n-1)(n-2)\ldots$ - variacije