

# Kombinatorika

Bor Bregant

**Zgled.** Na koliko načinov lahko za ravno mizo sedi sedem povablencev?

**Osnovni izrek kombinatorike ali pravilo produkta:** Če neki proces lahko razdelimo na  $k$  zaporednih faz in je prva od faz izvedljiva na  $n_1$  načinov, druga na  $n_2$  načinov, tretja na  $n_3$  načinov, ... in  $k$ -ta na  $n_k$  načinov (kjer so izbori med sabo neodvisni), je celotni proces izvedljiv na  $n = n_1 \cdot \dots \cdot n_k$  načinov.

**Zgled.** Na koliko načinov se lahko oblečemo, če imamo na razpolago dva para čevljev, pet srajc, troje hlač in štiri kravate?

Na koliko načinov lahko damo nase pokrivalo, če imamo na voljo 3 klobuke in dve čepici (nezdružljivost).

**Pravilo vsote:** Če izbiramo med  $n_1$  možnostmi iz prve množice izborov ali  $n_2$  možnostmi iz druge množice naborov in tako naprej (kjer so izbori med sabo neodvisni in nezdružljivi) do  $k$ -tega nabora, potem je vseh izborov  $M = n_1 + \dots + n_k$ .

**Zgled.** Do ŠKG lahko pridemo z avtobusi števil 3 ali 5, kjer v obeh primerih naprej prestopimo na 1, 8 ali 25, lahko pa gremo s kolesom ali z avtom. Na koliko različnih načinov lahko pridemo do šole?

**Zgled.** Koliko je vseh različnih metov, če petkrat zapored vržemo kovanec. Predstavi s **kombinatoričnim drevesom**.

**Zgled.** Imamo 25 črk, 5 samoglasnikov. Koliko načinov, če različne črke, če ponavljajo ali pa če morajo biti na prvem mestu soglasniki.

**Zgled.** Na razpolago lahko dobimo 5 modelov mercedesa v 3 barvah in 4 modele BMW v 2 barvah. Med koliko možnostmi izbiramo?

**Naloga 1.** DN 232a, 248, 254

**Zgled.** Na koliko načinov lahko na polico damo 5 leposlovnih, 3 slovarje in 9 strokovnih knjig, če ni omejitev ali pa če isti tipi morajo iti skupaj.

**Naloga 2.** DN 232a, 248, 254

## 1 Permutacije

Razporeditve  $n$  različnih elementov na  $n$  mest, kjer je vrstni red pomemben imenujemo permutacije  $n$  elementov. Teh možnosti je  $P_n = n! = n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$ .

**Zgled.** Izračunaj  $4!$  in  $\frac{n!}{(n-1)!}$ .

**Zgled.** Koliko besed lahko sestavimo iz črk ABCDE, če:

Ni omejitev?

Besede se morajo začeti na D

Besede se ne začnejo niti na A niti na E

Besede se ne končajo na DA

**Zgled.** Šestčlanska družina gre v kino. Na koliko načinov se lahko usede v vrsto, če sedita starša skupaj in otroci skupaj. Kaj pa če starša sedita na obeh koncih, otroci pa med njima.

**Zgled.** Sedem otrok stoji v vrsti. Na koliko načinov jih lahko prestavimo, če trije najbolj živahni ne smejo biti vsi skupaj.

**Zgled.** Preštejmo vse permutacije črk besede ANANAS.

Permutacij  $n$  elementov, kjer se en ponavlja  $k_1$ -krat, drugi  $k_2$ -krat in tako naprej, je  $P_n^{k_1, \dots, k_r} = \frac{n!}{k_1! \dots k_r!}$

**Zgled.** Koliko besed iz črk BOMBAS se ne začne s črko A.

**Zgled.** Koliko števil iz nabora 5, 6, 7, 8, 9 če brez omejitev ali pa število večje od 70000?  $3 \cdot 4!$

**Zgled.** Koliko načinov, da 4 dekleta, 5 fantov v vrsto, če dekleta skupaj, fantje brez omejitev?  $4! \cdot 5! \cdot 6$  ali pa zlepek dodaten fant torej  $4! \cdot 6!$

Kaj če morajo stati izmenično?

**Naloga 1.** DN 262, 263, 273, 267, 281, 292.

**Zgled.** Koliko načinov lahko vržemo 3 cifre in 5 mož.  $\frac{9!}{3! \cdot 6!}$

**Zgled.** Koliko načinov 5 ljudi za ravno ali okroglo mizo?

**Zgled.** Koliko načinov 2 avtomobila, 8 ljudi, 6 jih ima izpit.  $6 \cdot 5 \cdot 6!$

**Zgled.** 10 igrač 3 otroci. A jih dobi 4, B jih dobi 3, C pa 3. Na koliko načinov si jih lahko razdelijo. če 10 otrok jih fiksiramo in  $10!$  načinov. Naš primer spet fiksiramo igrače, A jih dobi 4 kot zlepek prvih 4, a je vseeno, če se v A zmešajo. Torej  $\frac{10!}{4!3!3!}$ .

**Zgled.** Podobna naloga košarka, 5 jih je v ekipi, 15 jih pride na trening. Na koliko načinov 3 ekipe?  $\frac{15!}{5!5!5!}$

## 2 Variacije

$n$  elementov razporejamo na  $r$  mest ( $r < n$ ).

**Zgled.** Na koliko načinov lahko razporedimo 10 dijakov za mizo za 4 osebe.

Variacije brez ponavljanja:

$$V_n^r = N(n-1)(n-2) \cdots (n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

**Zgled.** Koliko trimestrnih števil lahko sestavimo s števki 1, 2, 5, 8, če se števke ne smejo ponavljati. Kaj pa če dodamo 0.

**Zgled.** Ponavljanje

Variacije s ponavljanjem

## 3 Kombinacije

Na voljo  $n$  elementov, izberemo  $r$  elementov, vrstni red ni pomemben.

$$\frac{n!}{(n-r)!r!} = \binom{n}{r} = C_n^r$$

**Zgled.** Koliko načinov 3 kepice izmed 16 vrst, če v kornetu ali skledici? kornet vrstni red pomemben  $16 \cdot 15 \cdot 14$  skleda vrstni red ni pomemben  $\frac{16!}{(16-3)!3!}$ .

**Zgled.** Na koliko načinov lahko izberemo 3 dijake iz razreda 22 deklet in 5 fantov. Kaj pa 2 dekleti in enega fanta.

**Zgled.** Naloga z igračami lažje  $\binom{10}{4} \cdot \binom{6}{3} \cdot \binom{3}{3}$ .

**Zgled.** 12 deklet, 18 fantov. Na koliko načinov lahko določimo otvoritveni par.

Hitro računanje binoma:  $\binom{98}{4} = \frac{98 \cdot 97 \cdot 96 \cdot 95}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$ . (enako cifer zgoraj kot spodaj)

### 3.1 Lastnosti binomskih simbolov

i  $\binom{n}{0} = 1$  Med  $n$  elementi jih izberemo 0

$$\text{Dokaz } \binom{n}{0} = \frac{n!}{(n-0)! \cdot 0!} = 1$$

ii  $\binom{n}{1} = n$

iii Simetričnost  $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$

$$\text{Dokaz } \binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!} = \frac{n!}{(n-(n-r))! \cdot (n-r)!} = \binom{n}{n-r}$$

$$\text{Posledica } \binom{n}{n} = \binom{n}{n-n} = \binom{n}{0} = 1$$

iv Aditivnost  $\binom{n}{r} + \binom{n}{r+1} = \binom{n+1}{r+1}$

Dokaz s Pascalovim trikotnikom

$$\text{Zgled. Izračunaj } \binom{n}{n-2} \text{ in } \binom{200}{197} + \binom{200}{198} = \binom{201}{198} = \binom{201}{3} = \frac{201 \cdot 200 \cdot 199}{3 \cdot 2 \cdot 1}.$$

$$\text{Zgled. Poenostavi } \binom{n+1}{n} \text{ in } \binom{n+1}{k+1} : \binom{n}{k}$$

$$\text{Zgled. Reši enačbo } C_{n+2}^3 = n \cdot C_{n+1}^1.$$

**Naloga 1.** DN Računanje binoma 346č, 347ač, 348ac, 349

### 3.2 Binomski izek

Vpeljava z  $(a+b)^i$  in Pascalovim trikotnikom.

$$\binom{0}{0}$$

$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$

$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$

$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$

$$\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4}$$

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n}b^n$$

$$\text{Zgled. Izračunaj } (x^2 - \sqrt{2})^6.$$

$$\text{Zgled. Izračunaj 17. člen v razvoju } (2a - b^2)^{23}. \text{ Predznak } +, \binom{23}{16}(2a)^7(b^2)^16$$

DN 380, 381