Polinomi in racionalne funkcije

Bor Bregant

1 Polinomi

Polinom je funkcija $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, kjer je $a_n \neq 0$. n imenujemo stopnja polinoma, a_0 prosti člen, a_n vodilni koeficient, $a_0, \ldots, a_n$ pa koeficienti polinoma p.
$p(x) = 0$ imenujemo ničelni polinom.
Polinoma sta enaka, če imata enako stopnjo in enake koeficienti pri enakih potencah x.

Zgled. *Zapiši stopnjo, koeficiente in vrednost pri* $x = 2$ *za* $p(x) = 3x^4 - 2x^3 + 11x - 7$
Zapiši polinom druge stopnje, če veš, da je $p(8) = 6, p(2) = 0$ *in* $p(0) = 4$. *Izračunajmo še njegovo vrednost za x=1.*
Za kateri števili a *in* b *je* $a(x+2) + b = 4x - 3$.

Naloga 1. NALOGE 1, 2, 3, 8

Množenje polinoma s številom, seštevanje, odštevanje in množenje polinomov:

Zgled. *Pomnožimo polinom* $r(x) = 2x^4 + 3x^2 - 8x + 5$ *s številom* $\frac{3}{2}$.
Seštejmo polinoma $p(x) = 3x^4 + 7x^3 - 4x^2 + 6$ *in* $q(x) = 7x^5 + 2x^3 + 7x^2 + 8x - 5$. *Za isti primer izračunajmo še* $q(x) - p(x)$.
Zmnožimo polinoma $p(x) = x^2 + 1$ *in* $q(x) = x^3 - 4x^2 + 6$.

Za množenje polinomov velja $st(p \cdot q) = st(p) + st(q)$, komutativnost in asociativnost.

Deljenje polinomov:

Za vsak polinom p stopnje n in polinom q stopnje m $(n \geq m)$ obstajata natanko določena polinoma k in r, da velja $p(x) = k(x)q(x) + r(x)$. k imenujemo kvocient in je stopnje $n - m$, r pa ostanek in je nižje stopnje kot q.

Zgled. *Delimo* $(x^2 + x - 3) : (x + 3)$
Delimo polinom $p(x) = 3x^4 + 5x^3 - 4x^2 + 7$ *s polinomom* $q(x) = x^2 + 2x - 1$.

Zgled. *Če polinom* $p(x) = x^5 - 3x^3 - 5x$ *delimo z neznanim polinomom* q *dobimo kvocient* $k(x) = x^3 + x^2 - 3x - 4$ *in ostanek* $r(x) = -6x + 4$. *Določimo* q.

Naloga 2. NALOGA 16ab, 17a, 20a, 23, 27b,c,e,g, $\boxed{\text{28a}}$c, 30, 36

Hornerjev algoritem - Postopek za deljenje polinoma z linearnim polinomom.
Velja tudi, da je ostanek pri deljenju polinoma p z linearnim polinomom $x - c$ enak vrednosti p pri $x = c$.

Zgled. *S Hornerjevim algoritmom delimo* $3x^5 - 4x^4 - 7x^2 + 3x - 4$ *z* $x - 2$. *Preverimo še, da je ostanek res enak vrednosti* $p(2)$.
Enaka naloga $(x^3 - 4x^2 + 6x - 7) : (x - 3)$, $(2x^5 - 2x^4 - 13x^3 + 7x + 6) : (x + 1)$.
Zapiši vrednost $p(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 2x - 4$ *v točki* $x = i$.
S hornerjevim algoritmom pokažimo, da je polinom $p(x) = x^4 + 8x^3 + 6x^2 - 13x - 2$ *deljiv s polinomom* $q(x) = x^2 + x - 2$.

Naloga 3. NALOGE 45, 46, 48b

1.1 Ničle polinoma: $p(x) = 0$

Razstavimo, kjer si lahko pomagamo s hornerjem. Ko pridemo do kvadratne člena v vietovim pravilom ali kvadratno formulo. Rezultat je ničelna oblika $p(x) = a(x - x_1)^{k_1} \cdots (x - x_l)^{k_l}$ c je ničla polinoma p natanko tedaj, ko je p deljiv s polinomom $x - c$. Pri deljenju si pomagamo s Hornerjem!

Zgled. *Preverimo, da je $x = -2$ ničla polinoma $p(x) = 2x^4 + 3x^3 - 7x^2 + x + 22$.*
Razcepimo izraz $x^3 - 7x + 6$ kot produkt linearnih faktorjev, če vemo da je eden od faktorjev $x + 3$.
Izračunajmo vse ničle $f(x) = x^4 - x^2$.
Razcepimo izraz $3x^3 - 20x^2 + 42x - 20$, če vemo, da je ena faktor $x - \frac{2}{3}$.

Polinom stopnje n ima natanko n (kompleksnih) ničel štetih z večkratnostjo. Kompleksne ničle nastopajo v konjugiranih parih.

Zgled. *(a) Zapišimo polinom tretje stopnje, ki ima prosti člen enak -2 in ima enkratno ničlo 1 in dvakratno ničlo $\frac{1}{2}$.*
(b) Poiščimo ničle polinoma $p(x) = x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x + 9$, če vemo, da je (-1) dvakratna ničla.
(c) Zapišimo polinom tretje stopnje, ki ima ničli $2 + i$ in 1, pri $x = 0$ pa vrednost $\frac{1}{2}$.

Kandidati za ničle: Kandidati za celoštevilske ničle polinoma so delitelji prostega člena. Kandidati za racionalne ničle polinoma so oblike $\frac{c}{d}$, kjer c deli prosti člen, d pa vodilni koeficient.

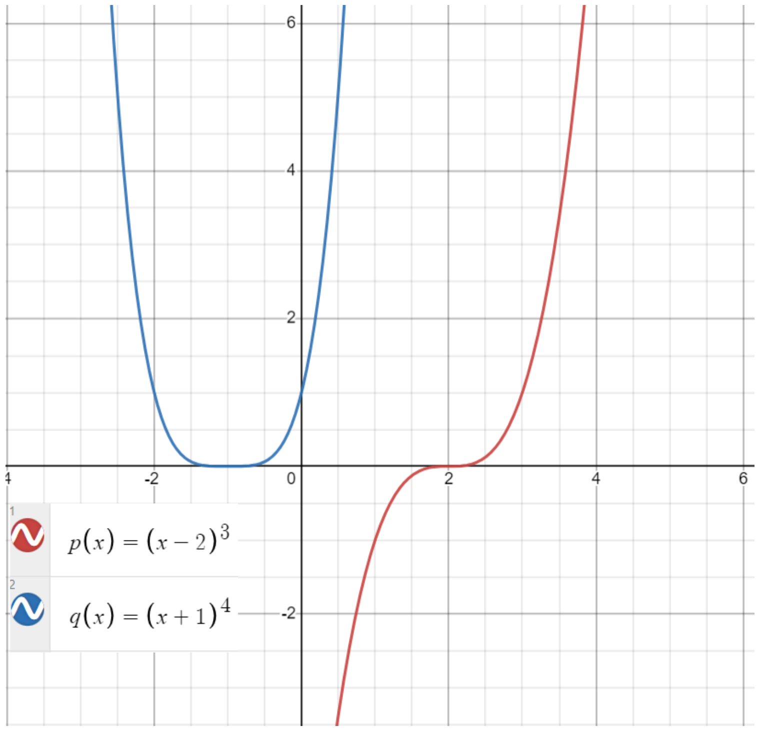
Zgled. *Izračunajmo vse ničle polinoma $p(x) = 12x^4 - 20x^3 + 7x^2 + 2x - 1$.*

Naloga 4. NALOGE 53, 56, 58, 68, 74, $\boxed{\text{92ab}}$, 93a, 95a, $\boxed{\text{97ab}}$, 99ab

Zgled. *Zapiši rešitve enačbe $x^3 - 6x^2 = -11x + 6$ in $x^3 + x^2 = 5x + 2$.*

1.2 Graf polinoma

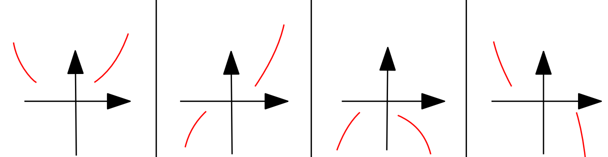
Začetna vrednost $p(0)$.
Če je ničla lihe stopnje (enkratna, trikratna, ...) polinom v ničli spremeni predznak. Če je ničla sode stopnje se predznak ne spremeni.



Slika 1: Grafa funkcij z ničlo lihe in sode stopnje.

Obnašanje grafa v $\pm\infty$:
Če $a_n > 0$, gre graf proti ∞ v $+\infty$. Če $a_n < 0$, gre graf proti ∞ v $-\infty$.
Če je n sod, se graf obnaša "podobno" v ∞ in $-\infty$. Če n lih se obnaša "obratno".

$a_n > 0$		$a_n < 0$	
n sod	n lih	n sod	n lih



Zgled. *Narišimo graf polinoma* $p(x) = x^3 - 3x + 2$ *in grafe* $|p(x)|, p(|x|), 2p(x), p(2x), p(x-2), p(x) - 2$.
Resimo se neenačbo $p(x) \geq 0$.
Nariši še grafe $p(x) = x^4 - 4x^2$, $p(x) = x^3 + x^2 - 5x + 3$, $p(x) = -(x+1)(x-1)^2$
Zapiši predpis za narisan graf - Enojna ničla -2, *dvojna* 1, *zacetna vrednost* 3

Naloga 5. NALOGE 116ab, 119, 120, 124, $\boxed{127}$, 130, 144a,č, 154a

1.3 Bisekcija

Metoda za iskanje ničel. Če je f realna zvezna funkcija na $[a, b]$ in je v a in b različno predznačena obstaja $c \in (a, b)$, da $f(c) = 0$. V vsakem koraku zamenjamo eno točko intervala z razpoloviščem le tega, torej se v vsakem koraku napaka razpolovi.

Zgled. *Približno poiščimo iracionalno ničlo za* $p(x) = x^5 + 2x - 1$ *na* $[0, 1]$.

2 Racionalne funkcije

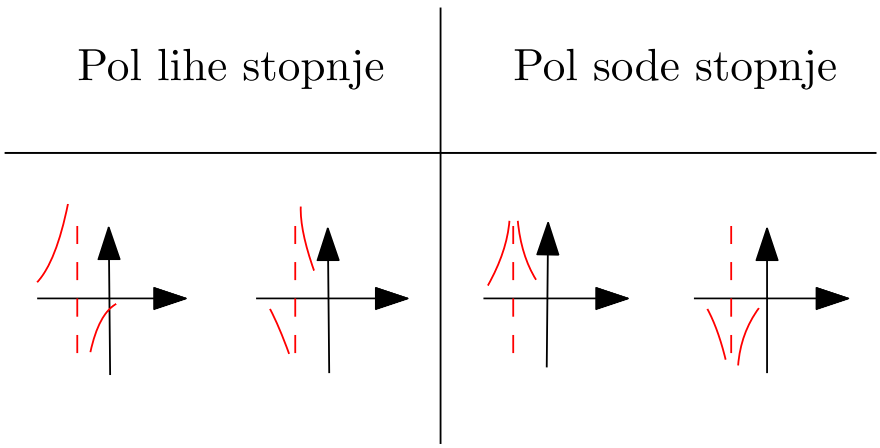
$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, kjer sta p in q polinoma. Ničle f = ničle p, $D_f = \mathbb{R} \backslash \{x | q(x) = 0\}$. Ničle imenovalca imenujemo poli.

Zgled. *Določimo* $D_f, D_g, g + f, g \cdot f$*, ničle in pole* f *in* g *za* $f(x) = \frac{3x-2}{x^2-4}$ *in* $g(x) = \frac{3}{x}$

Naloga 1. NALOGE 168a,b,c, 170a

2.1 Graf racionalne funkcije

Ničle podobno kot pri polinomih.
V polih ima graf navpično asimptoto. Če je pol lihe stopnje graf spremeni predznak. Če je pol sode stopnje graf ne spremeni predznaka.
Lahko si pomagamo z vmesnimi točkami npr. začetno vrednostjo



Obnašanje grafa v $\pm\infty$:

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_n x^n + \ldots + a_0}{b_m x^m + \ldots + b_0} \xrightarrow{x \to \pm\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}$$

- $n < m$: Vodoravna asimptota $y = 0$.
- $n = m$: Vodoravna asimptota $y = \frac{a_n}{b_n}$.
- $n > m$: Delimo $p : q$. Celi del rešitve je funkcija kateri se približujemo. V točkah, kjer je ostanek enak 0, pa to (krivuljno) asimptoto sekamo (tudi za $n = m$).

Zgled. *Narišimo grafe*
(a) $f(x) = \frac{x+3}{x^2-4x+4}$ *(b)* $f(x) = \frac{2x+6}{3x-3}$ *(c)* $f(x) = \frac{x^2+4x+4}{x+3}$
Zapiši predpis racionalne funkcije, ki ustreza grafu ...

Naloga 2. 175a,b, 183 vse, $\boxed{\text{189a,b}}$, $\boxed{\text{193a,b}}$.

2.2 Racionalne enačbe in neenačbe

Vse damo na eno stran (pri neenačbi to storimo z odštevanjem ne množenjem!). V enačbi so rešitve ničle novega grafa, v neenačbi pa x, kjer je graf nad oz. pod x osjo.

Zgled. *Reši enačbi* $\frac{x+1}{x-4} = 6$ *in* $\frac{2x}{x-1} + \frac{1}{x-3} = \frac{2}{x^2-4x+3}$.

Zgled. *V kateri točki se sekata grafa funkcij* $f(x) = \frac{x-3}{x+2}$ *in* $g(x) = \frac{x+1}{x+3}$.

Zgled. *Vsota števila in dvakratnika njegovega obratnega števila je* $\frac{9}{2}$. *Katero število je to?*

Zgled. *Rešimo neenačbo* $\frac{x+2}{2x+2} \geq \frac{x-2}{x+1}$.

Zgled. *Na katerem intervalu je* $f(x) = \log(\frac{x}{x+2} - \frac{1}{x})$ *pozitivna?*

Zgled. *Zapiši ničle, pole, nariši graf za* $f(x) = \frac{3x^2+10x+3}{x^3+2x^2-7x+4}$. *Kje* f *zavzame vrednosti* $-\frac{1}{3}$.

Naloga 3. NALOGE 195a,b, 200a, 201a,d, 206, 207