

Kombinatorika

Bor Bregant

Zgled. Na koliko načinov lahko za ravno mizo sedi sedem povablencev?

Osnovni izrek kombinatorike ali pravilo produkta: Če neki proces lahko razdelimo na k zaporednih faz in je prva od faz izvedljiva na n_1 načinov, druga na n_2 načinov, tretja na n_3 načinov, ... in k -ta na n_k načinov (kjer so izbori med sabo neodvisni), je celotni proces izvedljiv na $n = n_1 \cdot \dots \cdot n_k$ načinov.

Zgled. Na koliko načinov se lahko oblečemo, če imamo na razpolago dva para čevljev, pet srajc, troje hlač in štiri kravate?

Na koliko načinov lahko damo nase pokrivalo, če imamo na voljo 3 klobuke in dve čepici (nezdružljivost).

Pravilo vsote: Če izbiramo med n_1 možnostmi iz prve množice izborov ali n_2 možnostmi iz druge množice naborov in tako naprej (kjer so izbori med sabo neodvisni in nezdružljivi) do k -tega nabora, potem je vseh izborov $M = n_1 + \dots + n_k$.

Zgled. Do ŠKG lahko pridemo z avtobusi števil 3 ali 5, kjer v obeh primerih naprej prestopimo na 1, 8 ali 25, lahko pa gremo s kolesom ali z avtom. Na koliko različnih načinov lahko pridemo do šole?

Zgled. Koliko je vseh različnih metov, če petkrat zapored vržemo kovanec. Predstavi s **kombinatoričnim drevesom**.

Zgled. Imamo 25 črk, 5 samoglasnikov. Koliko načinov, če različne črke, če ponavljajo ali pa če morajo biti na prvem mestu soglasniki.

Zgled. Na razpolago lahko dobimo 5 modelov mercedesa v 3 barvah in 4 modele BMW v 2 barvah. Med koliko možnostmi izbiramo?

Naloga 1. DN 232a, 248, 254

Zgled. Na koliko načinov lahko na polico damo 5 leposlovnih, 3 slovarje in 9 strokovnih knjig, če ni omejitev ali pa če isti tipi morajo iti skupaj.

Naloga 2. DN 232a, 248, 254

1 Permutacije

Razporeditve n različnih elementov na n mest, kjer je vrstni red pomemben imenujemo permutacije n elementov. Teh možnosti je $P_n = n! = n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$.

Zgled. Izračunaj $4!$ in $\frac{n!}{(n-1)!}$.

Zgled. Koliko besed lahko sestavimo iz črk ABCDE, če:

Ni omejitev?

Besede se morajo začeti na D

Besede se ne začnejo niti na A niti na E

Besede se ne končajo na DA

Zgled. Šestčlanska družina gre v kino. Na koliko načinov se lahko usede v vrsto, če sedita starša skupaj in otroci skupaj. Kaj pa če starša sedita na obeh koncih, otroci pa med njima.

Zgled. Sedem otrok stoji v vrsti. Na koliko načinov jih lahko prestavimo, če trije najbolj živahni ne smejo biti vsi skupaj.

Zgled. Preštejmo vse permutacije črk besede ANANAS.

Permutacij n elementov, kjer se en ponavlja k_1 -krat, drugi k_2 -krat in tako naprej, je $P_n^{k_1, \dots, k_r} = \frac{n!}{k_1! \dots k_r!}$

Zgled. Koliko besed iz črk BOMBAB se ne začne s črko A.

Zgled. Koliko števil iz nabora 5, 6, 7, 8, 9 če brez omejitev ali pa število večje od 70000? $3 \cdot 4!$

Zgled. Koliko načinov, da 4 dekleta, 5 fantov v vrsto, če dekleta skupaj, fantje brez omejitev? $4! \cdot 5! \cdot 6!$ ali pa zlepek dodaten fant torej $4! \cdot 6!$
Kaj če morajo stati izmenično?

Naloga 1. DN 262, 263, 273, 267, 281, 292.

Zgled. Koliko načinov lahko vržemo 3 cifre in 5 mož. $\frac{9!}{3! \cdot 6!}$

Zgled. Koliko načinov 5 ljudi za ravno ali okroglo mizo?

Zgled. Koliko načinov 2 avtomobila, 8 ljudi, 6 jih ima izpit. $6 \cdot 5 \cdot 6!$

Zgled. 10 igrač 3 otroci. A jih dobi 4, B jih dobi 3, C pa 3. Na koliko načinov si jih lahko razdelijo. če 10 otrok jih fiksiramo in $10!$ načinov. Naš primer spet fiksiramo igrače, A jih dobi 4 kot zlepek prvih 4, a je vseeno, če se v A zmešajo. Torej $\frac{10!}{4!3!3!}$.

Zgled. Podobna naloga košarka, 5 jih je v ekipi, 15 jih pride na trening. Na koliko načinov 3 ekipe? $\frac{15!}{5!5!5!}$

2 Variacije

n elementov razporejamo na r mest ($r < n$).

Zgled. Na koliko načinov lahko razporedimo 10 dijakov za mizo za 4 osebe.

Variacije brez ponavljanja:

$$V_n^r = N(n-1)(n-2) \cdots (n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Zgled. Koliko trimestrnih števil lahko sestavimo s števki 1, 2, 5, 8, če se števke ne smejo ponavljati. Kaj pa če dodamo 0.

Zgled. Ponavljanje

Variacije s ponavljanjem