Geometrija

Bor Bregant

1 Trikotnik

Višina trikotnika je daljica, pravokotna na stranico... Višinska točka (ortocenter).

Težiščnica trikotnika je daljica, ki povezuje oglišče in razpolovišče stranice. Težišče trikotnika razdeli težiščnice $1 : 2$.

...

2 Krog in krožnica

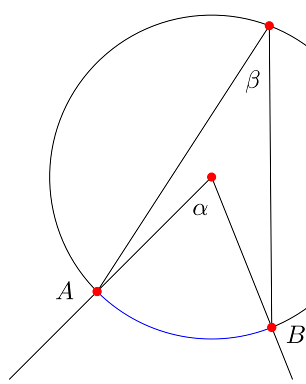
Krožnica je množica točk v ravnini, ki so enako oddaljene (za polmer) od fiksne točke, ki jo imenujemo središče. $K = \{T;\ d(T, S) = r\}$. Krog podobno, le $\leq$.

Tangenta ali dotikalnica je premica, ki ima s krožnico eno samo skupno točko in je pravokotna na radij.

Sekanta je premica, ki ima s krožnico dve skupni točki. Tetiva je daljica, ki povezuje dve točki na krožnici. Lok

Skupna slika vsega zgoraj

Središčni kot je kot, ki ima vrh v središču kroga, kraka pa potekata skozi dve točki na krožnici. Obodni kot nad lokom AB. Središčni kot je še enkrat večji od obodnega kota nad istim lokom z dokazom.



Posledica: Vsi obodni koti nad istim lokom so skladni.
Posledica: Če je središčni kot iztegnjeni kot, je njegov obodni kot pravi kot (Talesov izrek).

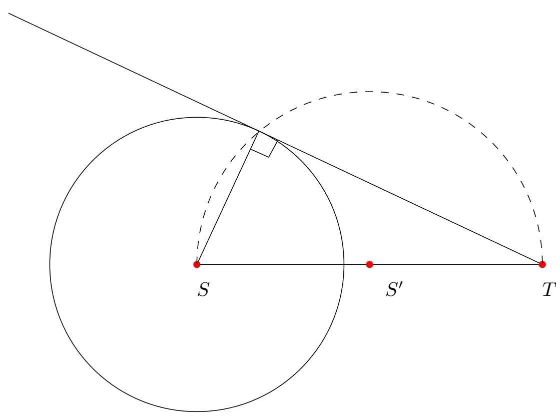
Risanje tangente na krožnico skozi poljubno točko s pomočjo Talesovega izreka

i Poveži S (središče) in T (zunanja točka).

ii Razpolovišče $ST \to S'$

iii Polkrog iz S', radij $|SS'|$

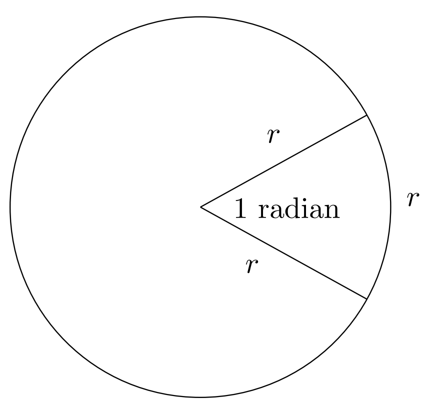
iv Dobimo dve tangenti



Merjenje kotov:

Stopinje, minute, sekunde
1° je $\frac{1}{360}$ polnega kota
$1^\circ = 60'$ in $1' = 60''$.

Radiani:
Kot meri en radian, če mu pripada lok z dolžino radija



$90^\circ = \frac{\pi}{2}$

$180^\circ = \pi$

$0^\circ = 0$

$30^\circ = \frac{\pi}{6}$

$45^\circ = \frac{\pi}{4}$

$60^\circ = \frac{\pi}{3}$

Polni kot: 2π radianov

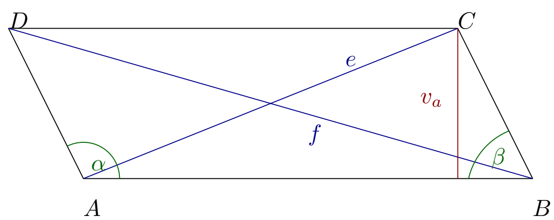
Zgled. *Nariši ΔABC, v katerem $c = 6cm,\ v_c = 2cm,\ \gamma = 60°$.*
Ideja: Začnemo s c in naredimo vzporednico za višino. Želimo središčni kot $120°$. Ker je središčni enakokrak, bosta ostala kota $30°$. γ bo torej obodni kot za krožnico s središčem S in polmerom AS.

Naloga 1. DN Konstruiraj trikotnik s podatki $a = 5cm,\ t_a = 4cm,\ \alpha = 30°$.

3 Štirikotnik in pravilni n-kotnik

Vsota notranjih kotov štirikotnika je $360°$. *dokaz s triangulacijo*

Paralelogram



a, b	stranici
$A,\ B,\ C,\ D$	oglišča
$e,\ f$	diagonali
$\alpha,\ \beta$	notranja kota
v_a	višina na stranico a

i Dva para vzporednih stranic

ii Diagonali se razpolavljata

iii Poljubna sosednja kota sta suplementarna

iv Poljubna nasprotna kota sta enako velika

Pravokotnik = pravokotni paralelogram

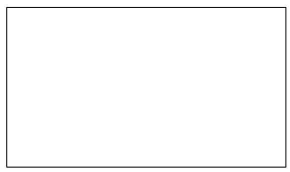
Romb = enakostranični paralelogram (diagonali se razpolavljata pod pravim kotom)

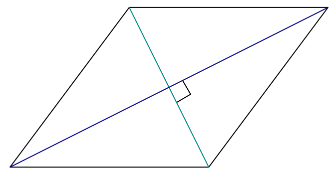
Kvadrat = enakostranični pravokotnik

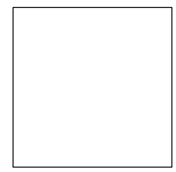
Trapez = štirikotnik, ki ima par vzporednih stranic (α in δ suplementarna) (enakokraki trapez)

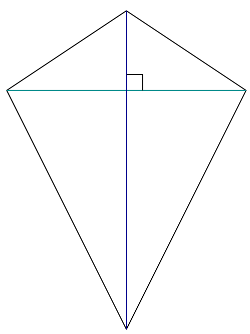
Srednjica trapeza (povezuje razpolovišči krakov in je vzporedna osnovnicama) ima dolžino $s = \frac{a+c}{2}$

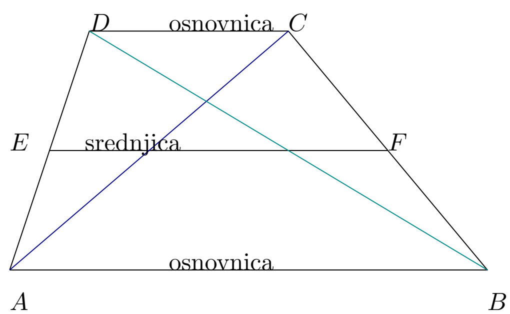
Deltoid = štirikotnik, ki ima dva para sosednjih enako dolgih stranic (diagonali sta pravokotni, ena se z drugo razpolavlja & dva notranja kota sta skladna).











Zgled. *Nariši paralelogram $ABCD$, za katerega velja $\alpha = 120°$, $e = 2.5cm$, $v_a = 2cm$.*

Zgled. *Nariši romb $ABCD$, katerega diagonali merita $e = 5cm$ in $f = 4cm$.*

Zgled. *Nariši pravokotnik $ABCD$, za katerega velja $a = 4cm$ in $f = 6cm$.*

Zgled. *Nariši trapez $ABCD$, za katerega velja $a = 4.5cm$, $\beta = 45°$, $e = 3.3cm$ in $f = 5cm$. dve rešitvi*

Zgled. *Nariši trapez $ABCD$, za katerega velja $\alpha = 60°$, $d = 3cm$, $c = 2cm$ in $f = 6cm$.*

Zgled. *Nariši deltoid $ABCD$, za katerega velja $e = 4cm$, $f = 7cm$ in $a = 5cm$.*

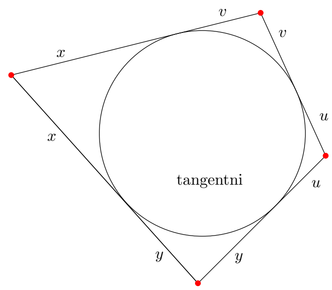
Zgled. *S pomočjo srednjice nariši trikotnik ABC, kjer $b = 4cm$, $t_a = 4.5cm$ in $\alpha = 75°$.*
α, b, skozi razpolovišče b vzporednico c in iz A odmerimo t_a

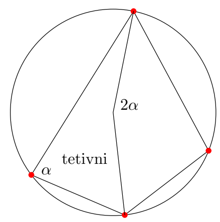
Naloga 1. DN 119, 121b, 128acd, 132a, 133ac

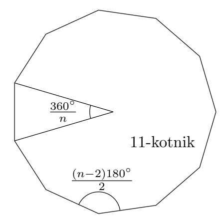
Tangentni štirikotnik (včrtamo krožnico, $a + c = b + d$ z dokazom)

Tetivni štirikotnik (očrtamo krožnico, $\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180°$ z dokazom)

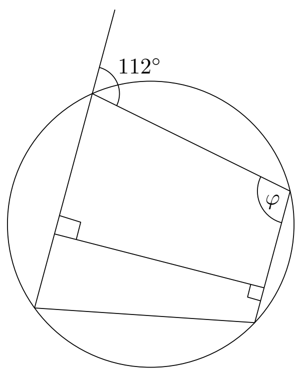
Pravilni n-kotnik - vse stranice in notranji koti enaki. Vsota kotov $= (n-2)180°$.

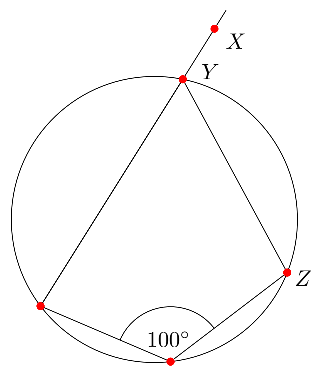






Zgled. *Glede na sliko določi φ in $\angle XYZ$.*





Zgled. *Načrtaj tangenten trapez s podatki $a = 6cm$, $\alpha = 60°$ in polmerom včrtane krožnice $r = 2cm$.*
a, $\alpha \to$ simetrala α, vzporednica a oddaljena za r, $\to S$

Zgled. *Pravilni večkotnik ima dvanajstkrat več diagonal kot stranic. Izračunaj, koliko meri notranji kot tega večkotnika.*

Zgled. *Če n-kotniku podvojimo število stranic, se njegovo število diagonal pomnoži z 5. Kateri n-kotnik je to.* $5\frac{n(n-3)}{2} = \frac{2n(2n-3)}{2}$

Zgled. *Načrtaj trapez s podatki $a = 6cm$, $b = c = 4cm$ in $d = 5cm$. Naredimo paralelogram $a - c$ in iz točke X in B točko C*

Naloga 2. DN Kateri n kotnik ima 3 diagonale več kot stranic?, 135bc

4 Podobnost

Zgled. *Daljici AB in CD sta v razmerju $5:4$, vsota njunih dolžin pa je $63cm$. Izračunaj dolžini AB in CD.*

Zgled. *Daljico AC razdeli na dva dela, da bo veljalo $|AB| : |BC| = 3 : 4$, kjer $|AC| = 5cm$.*

Trikotnika ABC in $A_1B_1C_1$ sta podobna, če imata enaka razmerja vseh stranic in enake vse notranje kote ali ekvivalentno če se ujemata v:

i razmerju po dveh enakoležnih stranic $a : a_1 = b : b_1 = c : c_1$.

ii dveh notranjih kotih npr. $\alpha = \alpha_1$, $\beta = \beta_1$.

iii razmerju dveh stranic in vmesni kot npr. $\alpha = \alpha_1$, $b : b_1 = c : c_1$.

iv razmerju dveh stranic in v kotu nasproti daljše stranice.

Relacija podobnosti je ekvivalenčna:

i Refleksivnost $L \sim L$

ii Simetričnost $L_2 \sim L_1 \Rightarrow L_1 \sim L_2$

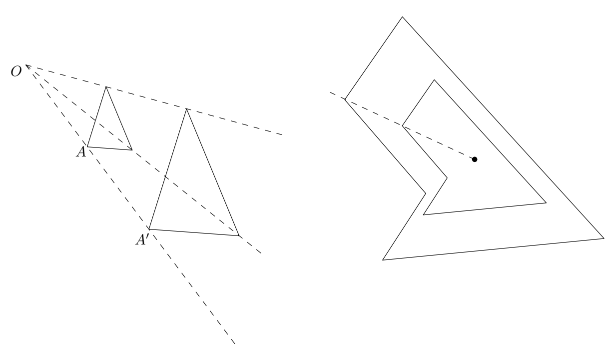
iii Tranzitivnost $L_1 \sim L_2 \wedge L_2 \sim L_3 \Rightarrow L_1 \sim L_3$.

Središčni razteg (homotetija) s središčem v točki O in faktorjem k je preslikava, ki daljico OA preslika v daljico OA', da velja $|OA'| = k \cdot |OA|$.

i Ohranja kote (oblike, tudi vzporednost)

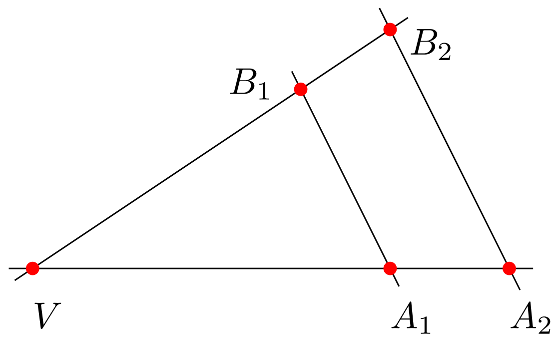
ii $|k| > 1$ pomeni razteg, $|k| < 1$ pomeni skrčitev, $k < 0$ doda še zrcaljenje.

iii Podobnostna preslikava, saj like slika v njim podobne like.



Geometrijska sredina $a : x = x : b \to x = \sqrt{ab}$
Primer: Geometrijska sredina 2 in 18 je 6. Velja $2 \times 18 = 6 \times 6$ (ploščina)
Primer kasneje: Višinski izrek

Razmerje = kvocient dveh količin (npr. dolžin daljic)
Sorazmerje = enakost dveh razmerij
Talesov izrek:



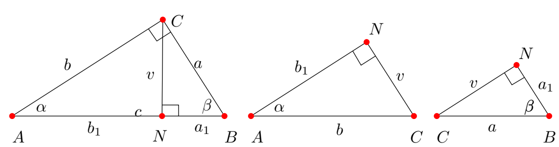
Zgled. *Stranice ΔABC so v razmerju $2:5:4$, njegov obseg pa meri $5.5cm$. Kako dolge so stranice trikotnika.*

Zgled. *V ΔABC narišemo daljico BD tako, da točka D razdeli stranico AC na odseka $|AD| = 7cm$ in $|DC| = 9cm$, ter da je $\angle BDC = \angle ABC$. Izračunaj $|BC|$ in $|BD| : |AB|$.*

Zgled. *V trapezu $ABCD$ sta kota $\angle ADC$ in $\angle ACB$ skladna. Izračunaj $|AC|$, če je $|AB| = 27cm$ in $|DC| = 12cm$. Tudi $\angle CAB = \angle ACD$*

Naloga 1. DN 143ac, 145abc, 148

Višinski izrek $v^2 = a_1 b_1$, Evklidov izrek $a^2 = a_1 c$, $b^2 = b_1 c$, Pitagorov izrek $c^2 = a^2 + b^2$.



Višinski $v : b_1 = a_1 : v$
Evklidov $a : c = a_1 : a$ in podobno za b
Pitagorov $a^2 + b^2 = a_1 c + b_1 c = (a_1 + b_1)c = c^2$. $b^2 = v^2 + b_1^2$

Zgled. *Narišimo daljico dolžine $\sqrt{15}$. Hipotenuza 8, kateti 7 in $\sqrt{15}$*

Zgled. *V pravokotnem trikotniku izračunaj pravokotno projekcijo katete b na hipotenuzo, če je $b = 7cm$ in $a = 4cm$.*

Zgled. *Izračunaj dolžini višine na hipotenuzo in projekcije neznane katete na hipotenuzo v pravokotnem trikotniku ABC, pri katerem je $c = 9cm$ in $b = 5cm$.*

Zgled. *Izračunaj velikost diagonale kvadrata in višine enakostraničnega trikotnika, če je obakrat stranica enaka a.*

Zgled. *Dve ladji sta ob isti uri izpluli iz pristanišča, ena proti vzhodu, druga proti jugu. Po nekaj urah sta bili 17 milj narazen. Pri tem je ladja proti jugu naredila 7 milj več kot ladja, ki pluje proti vzhodu. Kolikšno pot sta prevozili.*

Zgled. *Nariši* ΔABC, *kjer* $a : b = 3 : 4$, $\gamma = 60^\circ$ *in* $t_c = 2cm$.
Narišemo podobnega z γ *in* $a' = 3cm$, $b' = 4cm$.

Naloga 2. DN 149, 153, 164aceg, 167, 172