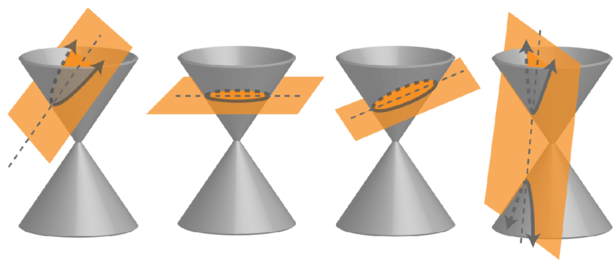
Stožnice

Bor Bregant

Rešitve enačbe $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ (krivulja drugega reda ali kvadratna enačba z dvema neznankama) je lahko krožnica, elipsa, hiperbola, parabola, ena ali dve premici, točka ali pa prazna množica.



1 Krožnica

$$\{T(x, y)|d(T, S) = r\}$$

Enačba krožnice s središčem $S(p, q)$ in polmerom r je $(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$.

Potrebni pogoj $A = C$ in $B = 0$. Zadostni pogoj $D^2 + E^2 > 4AF$.

Zgled. *Napišimo enačbo krožnice s središčem $S(3, -7)$ in polmerom $r = 3$.*

Zgled. *Poiščimo krožnico, ki ima središče v $S(2, -3)$ in se dotika premice $x = 4$.*

Zgled. *Pokažimo, da se krožnici $(x - 8)^2 + (y - 6)^2 = 25$ in $(5x - 16)^2 + (5y - 12)^2 = 25$ dotikata.*

Zgled. *Iz diametralnih točk $A(-5, 2)$ in $B(1, 4)$ zapišimo enačbo krožnice.*

Zgled. *Določimo konstanto k, da bo $y = kx+2$ tangenta na $x^2+y^2 = 2$. (vstavimo in iščemo le eno rešitev)*

Dopolnjevanje do popolnega kvadrata: $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 12 = 0$

1. Združimo x in y
2. Če gre, izpostavimo člen pred x^2 in pred y^2
3. Dopolnimo do kvadrata in uredimo, da cifra na desni, ostalo na levi
4. Če gre, delimo enačbo z desno cifro, da imamo na desni $= 1$

Zgled. *Ali enačbi $x^2 + y^2 + 8x - 2y - 8 = 0$ in $x^2 + y^2 + 6y + 10 = 0$ predstavljata krožnico. Če ja, napiši njen polmer in središče.*

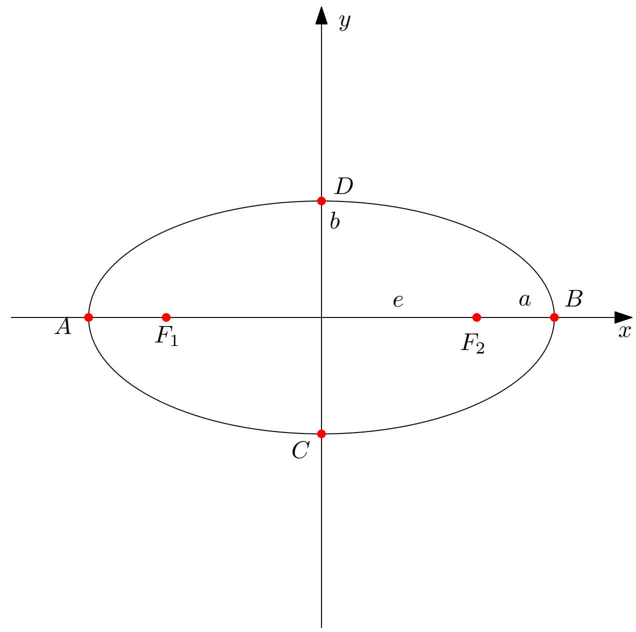
Zgled. *Napišimo enačbo krožnice, ki je očrtana trikotniku ABC z oglišči $A(0, 1), B(-2, -3)$ in $C(-3, -1)$.*

Naloga 1. NALOGE 228a, 229c, 231ac, $\boxed{\text{232adf}}$, 234a, 239a, 241a.

2 Elipsa

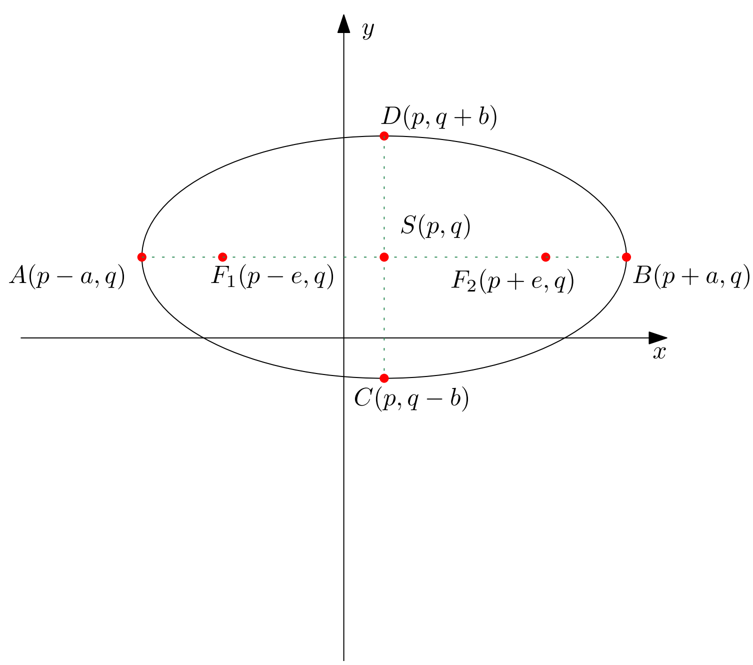
Elipsa je množica točk v ravnini, katerih vsota razdalj od izbranih točk F_1 in F_2 (gorišč) je konstantna.

V središčni legi $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. a in b imenujemo velika in mala polos elipse, $A(-a,0), B(a,0), C(0,-b), D(0,b)$ so temena elipse, $F_1(-e,0)$ in $F_2(e,0)$ gorišči elipse, e linearna ekscentričnost. Velja $e^2=a^2-b^2$ (če $a>b$) oziroma $e^2=b^2-a^2$ (če $b>a$).



Zgled. *Napišimo enačbo elipse v središčni legi, na kateri ležita točki* $A(\sqrt{3},-\sqrt{10})$ *in* $B(-3,0)$. *Zapišimo še njena gorišča.*

V splošni legi $\frac{(x-p)^2}{a^2}+\frac{(y-q)^2}{b^2}=1$. Središče $S(p,q)$, temena in gorišča kot na sliki.



Zgled. *Premaknimo enačbo elipse* $5x^2 + 12y^2 - 60 = 0$*, da bo imela središče v točki* $S(3, -2)$ *in zapišimo njeni novi gorišči.*

Zgled. *Ali enačba* $9x^2+4y^2+36x-8y+4 = 0$ *predstavlja elipso. Če ja, jo narišimo in označimo simetrijske osi.*

Zgled. *Ali enačba* $4x^2 + 5y^2 - 4x + 10y + 6 = 0$ *predstavlja elipso.*

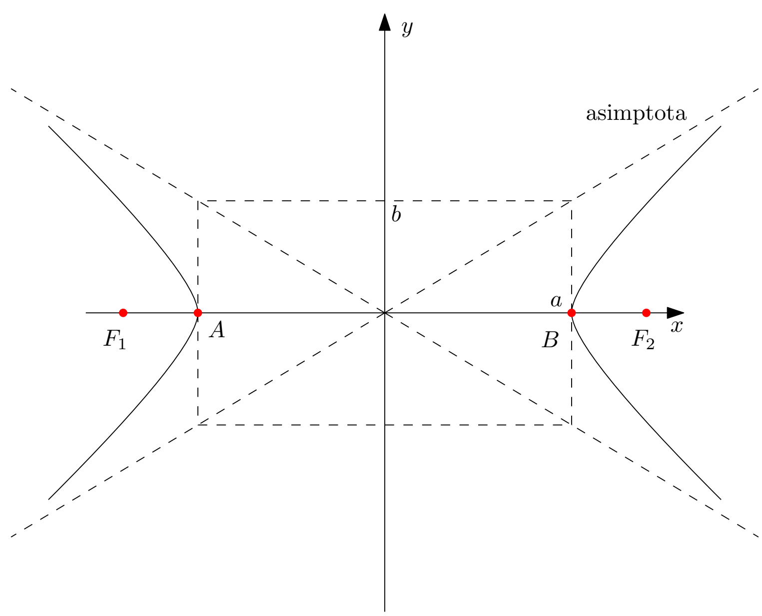
Potreben pogoj $A \neq C$ in $AC > 0$

Naloga 2. 253ac, 257ab, 260a, $\boxed{\text{263ab nariši}}$, 266a, 272, 273.

3 Hiperbola

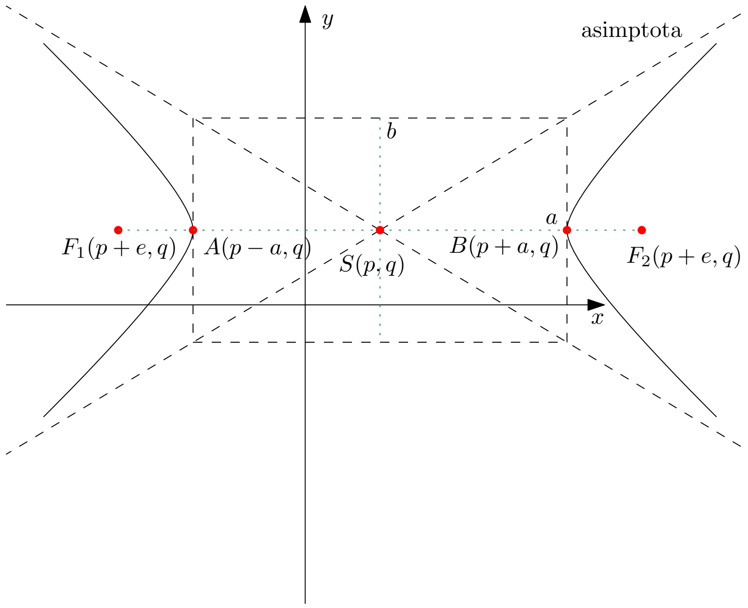
Hiperbola je množica točk v ravnini, katerih absolutna vrednost razlike razdalj od dveh izbranih točk (gorišč F_1 in F_2) je konstantna.

V središčni legi $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Glede na sliko, imenujemo a glavna (ali realna) polos, b imaginarna polos, $A(-a, 0)$ in $B(a, 0)$ temeni hiperbole, $F_1(-e, 0)$ in $F_2(e, 0)$ gorišči in e linearna ekscentričnost, ki jo izračunamo kot $e^2 = a^2 + b^2$. Asimptoti sta premici $y = \pm\frac{b}{a}x$.
Hiperbola oblike $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ (oziroma $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$) je "podobna", le da "gleda gor-dol". Enakoosa če $a = b$.



Zgled. *Zapišimo enačbo hiperbole v središčni legi, če poznamo njeno asimptoto* $y = \frac{3}{2}x$ *in vemo, da točka* $A(2\sqrt{5}, 3)$ *leži na njej.*

V splošni legi $\frac{(x-p)^2}{a^2} - \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1$.



Potreben pogoj $AC < 0$.

Zgled. *Izračunajmo gorišča, temeni, enačbi asimptot, simetrijske osi in narišimo hiperbolo* $x^2 - y^2 - 2x + 4y - 28 = 0$.

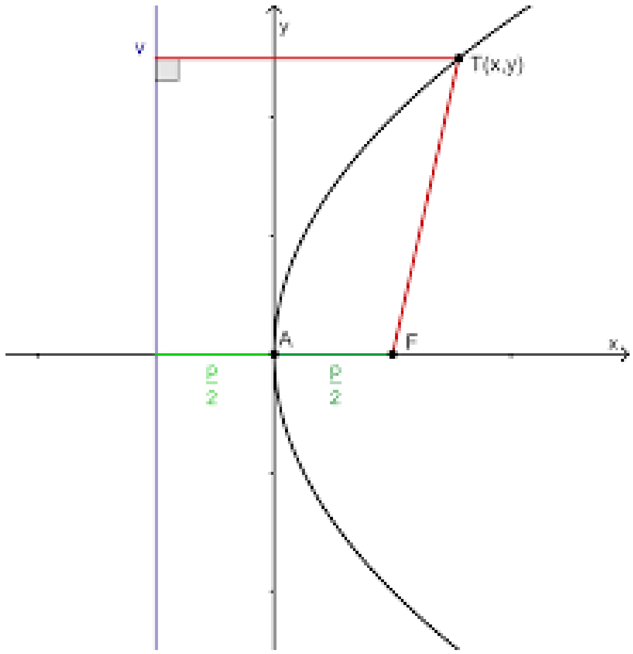
Zgled. *Nariši krivuljo* $4x^2 - 9y^2 + 16x + 18y - 29 = 0$.

Naloga 3. NALOGE 277ab, 278ac, $\boxed{282}$, $\boxed{284ab}$, $\boxed{\boxed{286}}$.

4 Parabola

Parabola je množica točk v ravnini, ki so enako oddaljene od izbrane točke (gorišče F) in izbrane premice (vodnica).

V središčni legi $y^2 = 2px$. Glede na sliko imenujemo $A(0,0)$ teme parabole, $p = 2|OF|$ parameter parabole, $F(\frac{p}{2}, 0)$ gorišče, enačba premice vodnice pa je $x = -\frac{p}{2}$.



Zgled. *Zapišimo enačbo parabole, ki ima gorišče v $F(4,0)$ in teme v koordinatnem izhodišču.*

Zgled. *Zapišimo enačbo parabole v izhodiščni legi, na kateri leži točka $T(3,-2)$.*

Zgled. *Zapišimo točki parabole $y^2 = 12x$, ki sta od gorišča oddaljeni za 7 enot.*

V splošni legi $(y-q)^2 = 2p(x-t)$. Potreben pogoj $AC = 0$, a ne oba hkrati. V tem primeru $F(\frac{p}{2}+t, q), x = -\frac{p}{2} + q, T(t,q)$.

Zgled. *Narišimo parabolo, če vemo, da je njeno teme $T(-2,-6)$ in gorišče $F(4,-6)$.*

Zgled. *Preveri ali $y^2 - 6x - 10y - 15$ predstavlja parabolo. Zapiši teme, gorišče, enačbo vodnice ter presečišča s koordinatnima osema.*

Naloga 4. 289vse, 300a, 301b, 302a, $\boxed{\text{304vse}}$, $\boxed{\text{306a}}$

5 Presečišča stožnic

Zgled. *Izračunajmo presečišča $x^2 + y^2 = 8$, $x^2 + 3y^2 = 12$.*

Zgled. *Izračunajmo presečišča $x^2 - 2y^2 = 125$, $y^2 = 10x$.*

Zgled. *Izračunajmo presečišča $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 14$, $(x+\frac{1}{2})^2 + (y+\frac{1}{2})^2 = \frac{13}{2}$.*

Zgled. *Izračunajmo presečišča $y^2 = 2x$, $2x - y - 6 = 0$.*

Zgled. *Izračunajmo presečišča $4x^2 + 5y^2 = 20$, $4x^2 - y^2 = 36$.*

Naloga 5. $\boxed{\text{309ab}}$cd, $\boxed{\text{310a}}$, $\boxed{\text{311ab}}$.