

# Vektorji

Bor Bregant

## 1 Vektorji

Vektor je množica usmerjenih daljic, ki imajo isto velikost in ležijo na vzporednih nosilkah. Operiramo le z enim predstavnikom vektorjev.

Vektorju  $\vec{a} = \vec{AB}$  lahko določimo:

- i Velikost:  $|\vec{AB}| = d(A, B)$
- ii Smer in usmerjenost: Določena s premico nosilko in usmerjenostjo

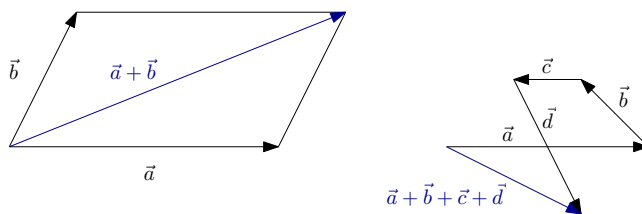
Vektorja sta enaka, če imata enako velikost, ležita na vzporednih premicah in sta enako usmerjena.

## Operacije z vektorji

### Seštevanje in odštevanje vektorjev

Dvočlena operacija, ki dvema vektorjema priredi nov vektor (vsoto). Operacija je komutativna in asociativna.

- i Paralelogramsko pravilo - premaknemo vektorja na skupni začetek in vsota je diagonala
- ii Trikotniško pravilo - premikamo na konec naslednjega vektorja



Ničelni vektor  $\vec{0} = \vec{AA} = \vec{AB} + \vec{BA}$

Nasprotni vektor za  $\vec{AB}$  je vektor  $\vec{BA}$ .

Enotski vektor je vektor z dolžino 1.

Razlika vektorjev je seštevanje nasprotnega vektorja.

**Zgled.** V pravilnem šestkotniku  $ABCDEF$ , zapiši vse vektorje, ki so enaki  $\vec{AB}$ . Zapiši še vse nasprotnne vektorje vektorja  $\vec{SB}$ , kjer je  $S$  središče tega šestkotnika.

**Zgled.** V kvadratu  $ABCD$  izračunaj  $\vec{BC} + \vec{CD}$ , ter  $\vec{DB} - \vec{CB} + \vec{CD}$ .

**Zgled.** V kocki  $ABCD A' B' C' D'$  izračunaj vrednost izrazov  $\vec{AD} + \vec{A'B'}$  in  $\vec{AB} - \vec{D'A} - \vec{B'B'}$ .

**Zgled.** Izračunaj  $\vec{x}$ , če je  $\vec{x} - \vec{AC} = -\vec{AB}$ .

**Naloga 1.** DN 275b, 277bdf, 278e, 281ač. 283c

### Množenje vektorja s številom (skalarjem)

$m \cdot \vec{a}$ , kjer  $m \in \mathbb{R}_{\neq 0}$  je vektor z enako smerjo kot  $\vec{a}$ , usmerjenost je odvisna od predznaka  $m$ , njegova velikost pa je enaka  $|m| \cdot |\vec{a}|$ . Za  $|m| > 1$ , se  $\vec{a}$  podaljša, za  $0 < |m| < 1$ , se  $\vec{a}$  skrajša.

i Asociativnost v skalarnem delju:  $m(n\vec{a}) = (mn)\vec{a}$

ii Distributivnost v vektorskem delu:  $m(\vec{a} + \vec{b}) = m\vec{a} + m\vec{b}$

iii Distributivnost v skalarnem delu:  $(m + n)\vec{a} = m\vec{a} + n\vec{a}$

Iz vektorja  $\vec{a}$  lahko naredimo enotski vektor  $\vec{e} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$

**Zgled.** Izračunaj  $n$ , če za vektor  $\vec{a}$  velja  $(n^2 + 3)\vec{a} - (n + 2)\vec{a} = (3 + n)\vec{a} + \vec{a}$ .

**Zgled.** Nariši trikotnik  $ABC$ , kjer  $|\vec{AB}| = 6\text{cm}$ ,  $|\vec{BC}| = 5\text{cm}$  in  $|\vec{CA}| = 3\text{cm}$ . Nato nariši vektor  $\vec{a} + 2\vec{c}$ .

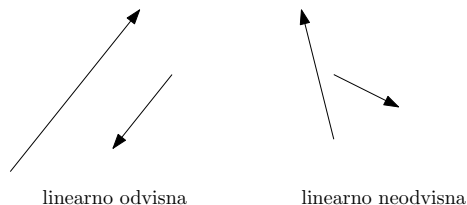
**Naloga 2.** DN 286b, 293ab

### Odvisni in neodvisni vektorji

Vektorja  $\vec{a}$  in  $\vec{b}$  sta **linearno odvisna**, če lahko enega izrazimo z drugim  $\vec{a} = k \cdot \vec{b}$ . Vektorja ležita na vzporednih nosilkah in rečemo, da sta kolinearna.

Dva vektorja  $\vec{a}$  in  $\vec{b}$  v ravnini, ki nista kolinearna sta **linearno neodvisna** in tvorita **bazo** ravnine. To pomeni, da lahko vsak vektor v ravnini na en sam način zapišemo kot njuno **linearno kombinacijo**:

$$\vec{v} = m\vec{a} + n\vec{b}; \quad m, n \in \mathbb{R}$$



**Zgled.** V pravokotniku  $ABCD$  sta bazna vektorja  $\vec{a} = \vec{AB}$  in  $\vec{b} = \vec{AD}$ . Točka  $T_1$  je razpolovišče  $CD$ , točka  $T_2$  pa deli stranico  $AB$  v razmerju  $|AT_2| : |T_2B| = 1 : 2$ . Izrazi vektorje  $\vec{T_2C}$ ,  $\vec{T_1B}$  in  $\vec{T_2T_1}$  v bazi.

Vektorja  $\vec{a}$  in  $\vec{b}$  sta linearno neodvisna, če velja  $m\vec{a} + n\vec{b} = \vec{0} \iff m = 0 = n$ .

**Zgled.** Za bazna vektorja  $\vec{a}$  in  $\vec{b}$  določi  $m, n \in \mathbb{R}$ , če velja  $(n - 2)(\vec{a} + \vec{b}) = 3(m\vec{a} + \vec{b})$ .

**Zgled.** V pravilnem šestkotniku  $ABCDEF$  z bazo  $\vec{a} = \vec{AB}$  in  $\vec{b} = \vec{AF}$  zapiši vektorje  $\vec{BF}$  in  $\vec{AD}$ .

**Zgled.** V pravokotniku  $ABCD$  je točka  $N$  razpolovišče stranice  $BC$ , točka  $M$  pa leži na stranici  $AB$  tako, da  $|AM| : |MB| = 3 : 2$ . V kakšnem razmerju deli stranica  $MD$  daljico  $AN$ .

**Zgled.** V paralelogramu  $ABCD$ , je  $E$  na stranici  $CD$ , da  $|DE| : |DC| = 1 : 5$ , točka  $F$  pa je presek  $BE$  in  $AC$ . Pokaži, da velja  $\vec{EF} = \frac{4}{9}\vec{EB}$ .

**Zgled.** Pokaži, da težišče deli težiščnico v razmerju  $2 : 1$ .

**Zgled.** Izmisli si eno nalogo v šestkotniku

**Naloga 3.** DN 304, 311ac, 313, 314

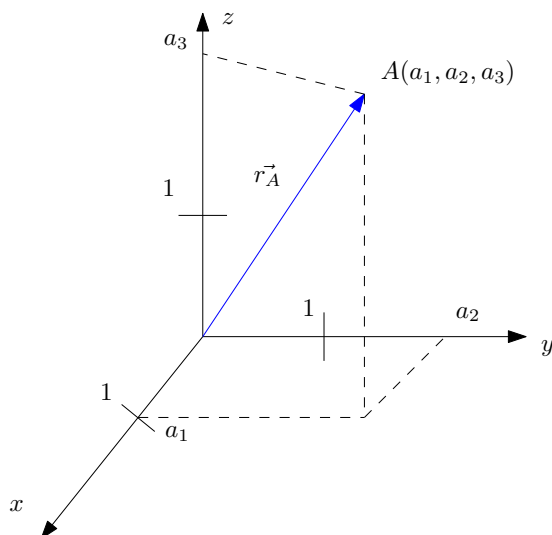
## 2 Vektorji v prostoru

Bazo prostora sestavljajo trije neodvisni vektorji. Vsak vektor v prostoru lahko torej enolično zapišemo kot njihovo linearno kombinacijo.

Baza je ortogonalna, če so vektorji baze med sabo pravokotni. Baza je ortonormirana, če so vektorji pravokotni med sabo in dolžine 1.

Standardna baza je ortonormirana baza  $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ , kjer ti vektorji ležijo zaporedno na poltrakih koordinatnih osi  $x, y$  in  $z$ .

V tej standardni bazi, lahko vsako točko  $A(a_1, a_2, a_3)$  predstavimo s krajevnim vektorjem  $\vec{r}_A = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ . Pišemo  $\vec{r}_A = (a_1, a_2, a_3)$ . Posebej  $\vec{i} = (1, 0, 0)$ ,  $\vec{j} = (0, 1, 0)$  in  $\vec{k} = (0, 0, 1)$ .



**Zgled.** Poiščimo eno ortogonalno in eno neoortogonalno bazo kocke.

**Računanje s krajevnimi vektorji:**

$$(a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$$

$$n(a_1, a_2, a_3) = (na_1, na_2, na_3); n \in \mathbb{R}$$

**Zgled.** Zapišimo vektor daljice  $AB$  in krajevni vektor razpolovišča te daljice.

[Video rešitve](#)

**Zgled.** Dani sta točki  $A(-2, 2, 6)$  in  $B(3, 2, -4)$ . Točka  $T$  leži na daljici  $AB$ , da  $|AT| : |TB| = 4 : 1$ . Izračunajmo koordinate  $T$ . [Video rešitve](#)

**Zgled.** Dana sta vektorja  $\vec{a} = (3, -2, 0)$  in  $\vec{b} = (-1, 4, 3)$ . Zapišimo linearne kombinacije  $\vec{a} + \vec{b}$  in  $2\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$ .

**Zgled.** V prostoru sta točki  $A(1, 4, -1)$  in  $S(0, 2, -2)$ . Določi točko  $B$ , da bo  $S$  središče daljice  $AB$ . Določi še vektor  $\vec{AB}$  in  $\vec{BA}$ . Naj bo točka  $T$  na daljici  $AS$ , da velja  $|AT| : |TS| = 2 : 1$ . Določi  $\vec{r}_T$ .

**Zgled.** Določimo parameter  $u$ , da bosta vektorja  $\vec{a} = (4, -6, u)$  in  $\vec{b} = (-6, 9, 4)$  kolinearna. [Video rešitve](#)

**Zgled.** Pokažimo, da so vektorji  $\vec{a} = (1, -1, 3)$ ,  $\vec{b} = (2, 1, 0)$  in  $\vec{c} = (0, -3, 6)$  koplanarni. [Video rešitve](#) in, da so  $(0, 1, 1)$ ,  $(1, 0, 1)$  in  $(-1, -1, 1)$  nekoplanarni.

**Zgled.** Vektor  $\vec{c} = (3, 14)$  zapiši z vektorjema  $\vec{a} = (3, 4)$  in  $\vec{b} = (-1, 2)$  in jih nariši v ravnini.

**Zgled.** Na sliki so v koordinatnem sistemu točke  $A$ ,  $B$  in  $C$  nariši. Zapiši vektor  $\vec{AB}$  in vektor  $\vec{CA}$  po komponentah in s pomočjo standardne baze  $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ .

Velja še, da je krajevni vektor  $r_T$  težišča  $T$  trikotnika  $ABC$  enak  $r_T = \frac{1}{3}(r_A + r_B + r_C)$ .

**Zgled.** Določi koordinate točke  $B$ , če je  $T(-1, 3, 3)$  težišče trikotnika in ostali oglišči  $A(1, 4, -2)$  in  $C(-1, 2, 6)$ .

**Naloga 1.** NALOGI 321, 322, 324, 330, 340a

### 3 Skalarni produkt

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \varphi, \text{ kjer je } \varphi \text{ vmesni kot}$$

**Zgled.** Izračunaj  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ , če je  $|\vec{a}| = 2$ ,  $|\vec{b}| = 3$  in  $\varphi = 150^\circ$ .

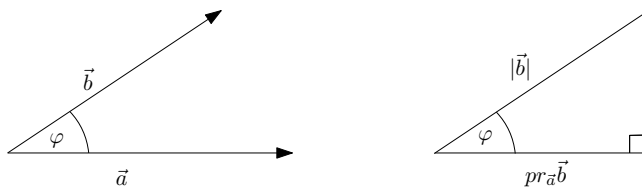
Dolžina pravokotne projekcije  $\vec{b}$  na  $\vec{a}$  je  $pr_{\vec{a}}\vec{b} = |\vec{b}| \cos \varphi$ .

Za skalarni produkt velja komutativnost, distributivnost in homogenost.

$$\vec{a} \perp \vec{b} \iff \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$$\text{Dolžina vektorja } |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$$

$$\text{Kosinusni izrek } c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$



**Zgled.** Izračunajmo dolžino vektorja  $\vec{a}$ , če ima  $\vec{b}$  dolžino 6, njun skalarni produkt je enak 21, njun vmesni kot pa  $60^\circ$ . Izračunajmo še  $pr_{\vec{a}}\vec{b}$ . [Video rešitve](#)

**Zgled.** Izračunaj  $(\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot (\vec{a} + 3\vec{b})$ , če je  $|\vec{a}| = 2$ ,  $|\vec{b}| = 3$  in  $\varphi = 150^\circ$ . Določi še  $|\vec{a} + \vec{b}|$ .

**Zgled.** Dolžina vektorja  $\vec{a}$  je 3,  $|\vec{b}| = 4$ , dolžina  $2\vec{a} - \vec{b}$  pa  $\sqrt{76}$ . Izračunajmo kot med  $\vec{a}$  in  $\vec{b}$ . [Video rešitve](#)

**Zgled.** Izračunaj kot med vektorjema  $\vec{a}$  in  $\vec{a} - \vec{b}$ , če je  $|\vec{a}| = 6$ ,  $|\vec{b}| = 5$  in njun vmesni kot  $\frac{2\pi}{3}$ .

**Zgled.** Izračunaj dolžino stranice  $a$  in kot  $\beta$  v trikotniku, če je  $b = 4\text{cm}$ ,  $c = 8\text{cm}$  in  $\alpha = 120^\circ$ .

**Zgled.** V paralelogramu  $ABCD$  je  $a = 7\text{cm}$ ,  $b = 4\text{cm}$ ,  $\alpha = 36^\circ$ . Izračunajmo dolžino diagonale  $f$ . [Video rešitve](#)

**Zgled.** Z vektorji pokažimo, da je kot med diagonalama romba pravi.

**Naloga 1.** 357a, 360c, 366, 375b, 377b

### 3.1 Skalarni produkt v ortonormirani bazi

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} &= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \\ |\vec{a}| &= \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \\ \cos \varphi &= \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}\end{aligned}$$

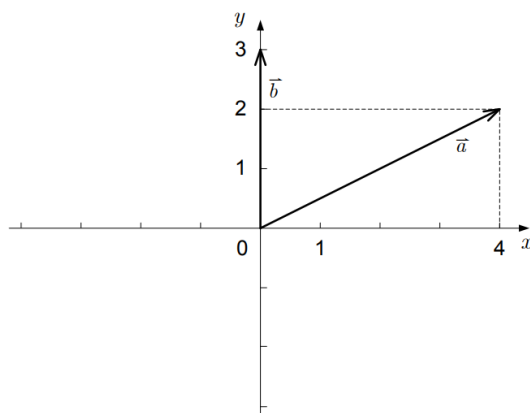
**Zgled.** Za vektorja  $\vec{a} = (-1, 4)$  in  $\vec{b} = (-1, -3)$  izračunaj njun skalarni produkt.

**Zgled.** Za vektorja  $\vec{a} = (2, 1, 4)$  in  $\vec{b} = (1, 0, -1)$  izračunajmo  $(2\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{b}$ . [Video rešitve](#)

**Zgled.** Določimo komponento  $u$ , da bosta  $\vec{a} = (-3, 2u, 5)$  in  $\vec{b} = (6, u, 2)$  pravokotna. [Video rešitve](#)

**Zgled.** Naloga z mature 2021. [Video rešitve](#)

V ravnini, opremljeni s koordinatnim sistemom, sta narisana vektorja  $\vec{a}$  in  $\vec{b}$ . Narišite vektor  $\vec{c} = \frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b}$ . Kolikšni sta dolžini vektorjev  $\vec{a}$  in  $\vec{b}$ ? Koliko meri kot  $\varphi$  med  $\vec{a}$  in  $\vec{b}$ ? Rezultat zaokrožite na stotinko stopinje.



**Zgled.** Zapiši razdaljo med točkama  $A$  in  $B$  ter enotski vektor  $\vec{e}$  v smeri vektorja  $\vec{AB}$ , če je  $A(1, 4)$  in  $B(-1, 8)$ .

**Zgled.** Določi  $y$ , da bosta vektorja  $(2, y, 0)$  in  $(0, 2, 2)$  oklepala kot  $60^\circ$ .

**Naloga 2.** NALOGE 388, 389, 390ac, 393, 399, 405, 408, 414