Deljivost

Bor Bregant

1 Relacija deljivosti

$$a|b \iff b = k \cdot a$$

2 Kriteriji deljivosti

Izpeljava deljivost, da izpostavljamo 10^i, razcepino na prafaktorje 10^i. S to izpeljavo pokrijemo 2, 4, 5, 8

Deljivost s 3:

$$\begin{aligned}
\overline{a_4a_3a_2a_1a_0} &= \\
&= a_4 \cdot 10000 + \ldots + a_0 \\
&= a_4(9999+1) + a_3(999+1) + a_2(99+1) + a_1(9+1) + a_0 \\
&= 9999a_4 + a_4 + \ldots + 9a_1 + a_1 + a_0 \\
&= 9999a_4 + 999a_3 + 99a_2 + 9a_1 + a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + a_0 \\
&= 9(1111a_4 + 111a_3 + 11a_2 + a_1) + a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + a_0
\end{aligned}$$

Če bo vsota števk deljiva s 3 (ali z 9), bo celotno število deljivo s 3 (ali z 9).

Zgled. *Ali je* 32154032 *deljivo s* $2, 3, 4, 5, 6$.

Zgled. *Določi števko* a*, da bo število* $35167a2$ *deljivo s* 6. $a \in \{0, 3, 6, 9\}$

Zgled. *Določi števki* a *in* b*, da bo število* $1573a4b$ *deljivo s* 6.

Zgled. *Določi števki* a *in* b*, da bo število* $504a347b$ *deljivo s* 36. *Pazimo, da sta v 36 razcepu tuja torej 9, 4*

Zgled. *Določi števko* a*, da bo število* $32a5a4a$ *deljivo s* 36.

Zgled. *Določi števko* a*, da bo število* $32a5a4a$ *deljivo s* 3.

Zgled. *Dokaži* $6|n^3 - 3n^2 + 2n$ *za vsak* $n \in \mathbb{N}$. *Razstavimo na 3 zaporedna naravna števila*

Zgled. *Pokaži, da je razlika dveh dvomestnih števil, ki imata zamenjani števki* $9|\left(\overline{ab} - \overline{ba}\right)$. $10a + b - 10b - a$

Zgled. *Poišči dvomestno število, ki je petkratnih vsote svojih števk.*

Zgled. *Poišči dvomestno število, ki je dvakratnik produkta svojih števk.* *Sprehodimo se po $a = 1, \dots$*

Naloga 1. DN

2.1 Praštevila in sestavljena števila

Praštevila so števila, ki imajo natanko dva delitelja: Število 1 in samega sebe. Število 1 ni niti praštevilo, niti sestavljeno število. Število 2 je edino sodo praštevilo.
Praštevil je neskončno mnogo z dokazom pogledamo $P = p_1 \cdot \ldots \cdot p_n + 1$
Eratostenovo sito.

Na koliko načinov lahko 24 zapišemo kot produkt?

Osnovni izrek aritmetike

...

3 Osnovni izrek o deljenju

Če število $a \in \mathbb{N}$ delimo s številom $b \in \mathbb{N}$, potem obstajata dve taki števili $k \in \mathbb{N}$ in $r \in \mathbb{N}_0$, da velja:

$$a = k \cdot b + r;\ 0 \leq r < b$$

a imenujemo deljenec, b delitelj, k količnik (kvocient), r ostanek.

Če je $r = 0$, potem b deli a.

Zgled. 52 *deli s* 15 *in zapiši osnovni izrek o deljenju*

Zgled. *Pri deljenju nekega števila n s številom* 13 *dobimo kvocient* 7 *in ostanek* 8. *Katero število smo delili?*

Zgled. *Zapiši vsa naravna števila, ki dajo pri deljenju s* 5 *ostanek* 1. $1, 6, 11, \dots \rightarrow n = k \cdot 5 + 1$

Zgled. *Če neko število n delimo z* 8 *ostanek 7. Kakšen bo stanek, če delimo n s* 4*?*

Zgled. *Ostanek števila pri deljenju s* 24 *je* 19. *Kakšen bo ostanek pri deljenju s* 6*?*

Zgled. *Če vsoto kvadratov dveh zaporednih števil delimo s* 4 *dobimo ostanek* 1. *Pokaži, da to velja za vsa števila.*

Največji skupni delitelj dveh števil je največje tako število, ki deli obe (ali vsa) števili. Pišemo $D(a, b)$. (v razcepu vzamemo najmanjše potence)

Zgled. *Poišči največji skupni delitelj* 52 *in* 130 *ter* 240 *in* 186.

Naloga 1. 203, 206, 209, 210, 215

Zgled. *Poišči največji skupni delitelj* $2^5 \cdot 3^2 \cdot 7^4$ *in* $2^3 \cdot 7^5$ *ter* 13 *in* 16.

Dve števili za kateri je $D(a, b) = 1$ imenujemo tuji števili.

Najmanjši skupni večratnik dveh ali več števil je najmanjše tako število, ki je deljivo z obema (ali vsemi). (v razcepu vzamemo največje potence)

Zgled. *Poišči najmanjši skupni večkratnik* $v(52, 130)$ *in vse večkratnike obeh števil.*

Velja $a \cdot b = D(a, b) \cdot v(a, b)$.

Zgled. *Neca gre v knjižnico vsakih 14 dni, Nace vsakih 10 dni. Če se srečata danes, čez koliko dni se bosta srečala.* *Iščemo lcm*

Zgled. *Klemen peče piškote. Če jih v vsako vrsto zloži 7 mu dva ostaneta. Če naredi eno vrsto več in jih v vsako položi le 6 ima vse vrste polne. Koliko piškotov ima.* *Najprej jih imamo* $k \cdot 7 + 2$, *nato* $(k + 1) \cdot 6$. k *je število vrst*