

# Funkcije

Bor Bregant

Funkcija ali preslikava  $f$  iz množice  $A$  v množico  $B$  je predpis, ki vsakemu elementu iz  $A$  priredi natanko en element iz množice  $B$ .

**Zgled.** Zapiši definicijsko območje in ničle za funkcijo  $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$  in  $g(x) = \log(x(x-1)(x+1))$ . Ob grafu funkcije zapiši zalogo vrednosti intervale naraščanja in obravnavaj konveksnost za  $h(x) = \cos(x - \frac{\pi}{2}) - 4$ . Obravnavaj sodost / lihost za  $f(x) = x^2 + x^6$  in  $g(x) = x + x^3$ . Zapiši ničle in začetno vrednost za  $g(x) = 2^{\frac{x}{2}} - (\frac{1}{2})^4$ .

## 1 Računanje s funkcijami

i Vsota  $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$

ii Razlika  $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$

iii Produkt  $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

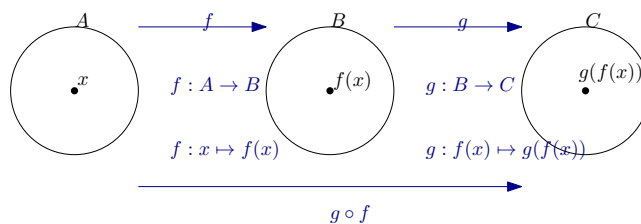
iv Kvocient  $(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$  za  $g(x) \neq 0, \forall x \in D_g$

v Produkt s številom  $(k \cdot f)(x) = k \cdot f(x)$

**Zgled.** Zapiši vsoto, razliko, produkt in kvocient funkcij  $f(x) = x - 3$  in  $g(x) = -2x + 1$ .

**Naloga 1.** DN 569c, 576, 578ad

## Kompozitum funkcij



$$\begin{aligned} g \circ f &: A \rightarrow C \\ g \circ f &: x \mapsto g(f(x)) \\ (g \circ f)(x) &= g(f(x)) \end{aligned}$$

**Zgled.** Izračunaj  $f \circ g$  in  $g \circ f$  za  $f(x) = \ln(x^2 + 2)$  in  $g(x) = 3x - 1$  in pokaži, da ta operacija ni komutativna.

**Zgled.** Poišči inverzno funkcijo za  $f(x) = \sqrt[3]{x} + 1$  in pokaži, da velja  $(f \circ f^{-1})(x) = (f^{-1} \circ f)(x) = x$  Za bijektivne  $f$ .

**Zgled.** Dani sta funkciji  $f(x) = 2x - 3$  in  $g(x) = -x + 2$ . Za katera realna števila  $x$  je  $f(2x) = g(x)$  in za katera  $f(-2) = g(x^2)$ .

**Zgled.** Dani sta funkciji  $f(x) = 3x + 2$  in  $g(x) = 2x + n$ . Za katera števila  $n$  velja  $f(g(x)) = g(f(x))$ ?

**Zgled.** Določi  $k$ , da bo  $f(g(x)) = g(f(x))$ , kjer  $f(x) = kx + 3$  in  $g(x) = kx - 1$ .

**Naloga 2.** DN 574, 573ace, 587, 592ac

## Limita in zveznost

### Zveznost

**Zgled.** Narišimo funkcije

$$\begin{aligned} f(x) &= \begin{cases} 2 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -x - 1 & x < 0 \end{cases} \\ g(x) &= \begin{cases} |x + 1| & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \\ h(x) &= \begin{cases} x + 1 & x \leq 0 \\ e^x & x > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Opazimo, da  $f$  in  $g$  ista zvezni v  $x = 0$ , ampak lahko  $g$  popravimo v zvezno če dopolnimo z 1.  $h$  je zvezna.  $g$  ima v  $x = 0$  limito,  $f$  pa ne.

Funkcije, ki lahko narišemo z eno potezo so **zvezne**, sicer pa **nezvezne**.

Funkcija  $f$  je zvezna v točki  $a$ , če in samo če:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

$f$  je zvezna na  $[a, b]$ , če je zvezna v vsaki točki tega intervala. Vse elementarne funkcije so zvezne, kjer so definirane.

**Zgled.** *Nariši graf*

$$f(x) = \begin{cases} 2^x & x \leq 0 \\ x^{-1} & 0 < x < 1 \\ 2x - 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} \sin x & x \leq 0 \\ \tan x & x > 0 \end{cases}$$

*in zapiši točke nezveznosti.*

**Zgled.** *Določi  $a \in \mathbb{R}$ , da bosta  $f(x) = \begin{cases} x^2 & x > 4 \\ x + a & x \leq 4 \end{cases}$  in  $g(x) = \begin{cases} 2^{x+a} & x < -1 \\ -x & x \geq -1 \end{cases}$  zvezni.*

**Naloga 3.** DN 597bčef, 598abc

## Limita

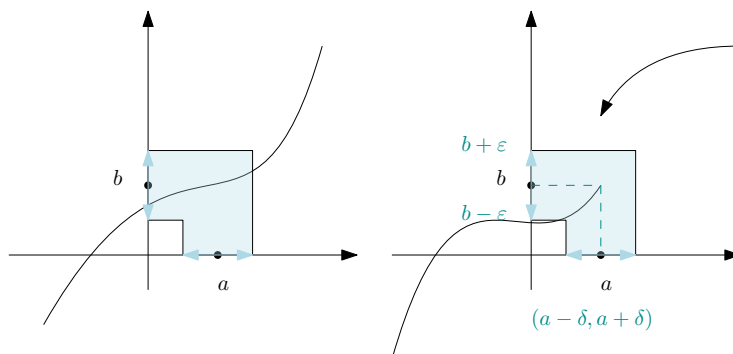
**Zgled.** *Nariši  $f(x) = \tan x$  in  $g(x) = \frac{x+1}{(x-1)^2}$  in opazuj točke nedefiniranosti.*

*Enako za  $f(x) = \begin{cases} x + 2 & x < -1 \\ -1 & x \geq -1 \end{cases}$ .*

Limita je neke vrste nadomestek za vrednost funkcije.

$$b = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$$

Število  $b$  je limita funkcije  $f$ , ko gre  $x$  proti  $a$ , če za poljubno  $\varepsilon$  okolico točke  $b$  obstaja taka  $\delta$  okolica točke  $a$ , da brž ko je  $x$  v  $\delta$  okolici točke  $a$ , je tudi  $f(x)$  v  $\varepsilon$  okolici točke  $b$ .



**Zgled.** Izračunaj  $\lim_{x \rightarrow -1} (2x^2 + x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\log_2 x}{4^x}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 4}$  in  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x + x^2}{x}$ .

**Zgled.** Izračunaj  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 100} - 10}{x^2}$  in korenska limita  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}{x}$ .

**Naloga 4.** DN 606bč, 607bdc, 608c, 624bč

### Limita v neskončnosti in neskončna limita

$$\lim_{x \rightarrow a} = \infty \iff \forall M \in \mathbb{R} \exists \delta > 0 : |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > M$$

**Zgled.** Izračunaj  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2}$  in  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-1}{(x+2)^2}$ .

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} \iff \forall \varepsilon > 0 \exists M \in \mathbb{R} : x > M \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$$

**Zgled.** Izračunaj  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x}$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \arctan x + 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} 3^{-x+2}$  in  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+x^3}{-2x-2x^2-2x^3}$ .

**Naloga 5.** DN 614d, 615ac, 619cč

### Pravila za računanje z limitami

i  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x)$

ii  $\lim_{x \rightarrow a} kf(x) = k \lim_{x \rightarrow a} f(x)$

iii  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$

iv Enako za kvocient, potenco, koren

v  $\lim_{x \rightarrow a} c = c$

**Limita  $e$  in  $\frac{\sin x}{x}$**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

**Zgled.** Izračunaj  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^x$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{3x}$  in  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{4x}\right)^{5x}$ .

**Zgled.** Izračunaj  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x+3}{5x-7}\right)^x$  in  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-1}{x+2}\right)^x$  in  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x+5}\right)^{x+1}$

**Naloga 6.** DN 625bc

**Zgled.** Izračunaj  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}$  in  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{5x}$ .

**Zgled.** Izračunaj  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 4x}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$  razširimo s konjugirano in  $\lim_{x \rightarrow 0} x^{-1} \tan x \cos x$ .

**Naloga 7.** DN 621acče, 623če, 626c

**Zgled.** Pokaži, da je funkcija  $f(x) = \sqrt{x}$  zvezna povsod, kjer je definirana.

Po definiciji  $|f(x) - f(a)| = |\sqrt{x} - \sqrt{a}| = \left| \frac{x-a}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} \right| \leq \frac{|x-a|}{\sqrt{a}}$

Izberemo lahko  $\delta = \varepsilon \sqrt{a}$

V  $x = 0$  posebej  $|f(x) - f(0)| = \sqrt{x}$  pa izberemo  $\delta = \varepsilon^2$