

# Vektorji

Bor Bregant

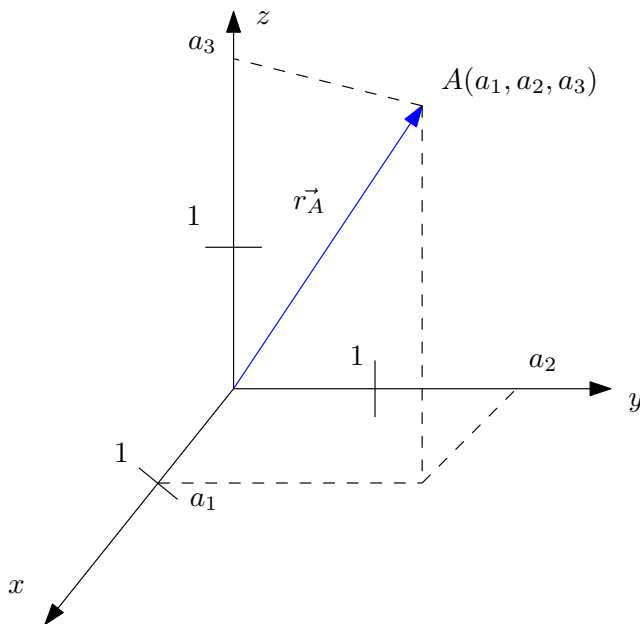
## 1 Vektorji v prostoru

Bazo prostora sestavljajo trije neodvisni vektorji. Vsak vektor v prostoru lahko torej enolično zapišemo kot njihovo linearno kombinacijo.

Baza je ortogonalna, če so vektorji baze med sabo pravokotni. Baza je ortonormirana, če so vektorji pravokotni med sabo in dolžine 1.

Standardna baza je ortonormirana baza  $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ , kjer ti vektorji ležijo zaporedno na poltrakih koordinatnih osi  $x, y$  in  $z$ .

V tej standardni bazi, lahko vsako točko  $A(a_1, a_2, a_3)$  predstavimo s krajevnim vektorjem  $r_{\vec{A}} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ . Pišemo  $r_{\vec{A}} = (a_1, a_2, a_3)$ . Posebej  $\vec{i} = (1, 0, 0)$ ,  $\vec{j} = (0, 1, 0)$  in  $\vec{k} = (0, 0, 1)$ .



**Zgled.** Poiščimo eno ortogonalno in eno neoortogonalno bazo kocke.

**Računanje s krajevnimi vektorji:**

$$(a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$$

$$n(a_1, a_2, a_3) = (na_1, na_2, na_3); n \in \mathbb{R}$$

**Zgled.** Zapišimo vektor daljice  $AB$  in krajevni vektor razpolovišča te daljice.  
[Video rešitve](#)

**Zgled.** Dani sta točki  $A(-2, 2, 6)$  in  $B(3, 2, -4)$ . Točka  $T$  leži na daljici  $AB$ , da  $|AT| : |TB| = 4 : 1$ . Izračunajmo koordinate  $T$ . [Video rešitve](#)

**Zgled.** Dana sta vektorja  $\vec{a} = (3, -2, 0)$  in  $\vec{b} = (-1, 4, 3)$ . Zapišimo linearne kombinacije  $\vec{a} + \vec{b}$  in  $2\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$ .

**Zgled.** Določimo parameter  $u$ , da bosta vektorja  $\vec{a} = (4, -6, u)$  in  $\vec{b} = (-6, 9, 4)$  kolinearna. [Video rešitve](#)

**Zgled.** Pokažimo, da so vektorji  $\vec{a} = (1, -1, 3)$ ,  $\vec{b} = (2, 1, 0)$  in  $\vec{c} = (0, -3, 6)$  koplanarni. [Video rešitve](#)

Velja še, da je krajevni vektor  $r_T$  težišča  $T$  trikotnika  $ABC$  enak  $r_T = \frac{1}{3}(r_A + r_B + r_C)$ .

**Naloga 1.** NALOGE 321, 322, 324, 330, 340

## 2 Skalarni produkt

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \varphi$ , kjer je  $\varphi$  vmesni kot

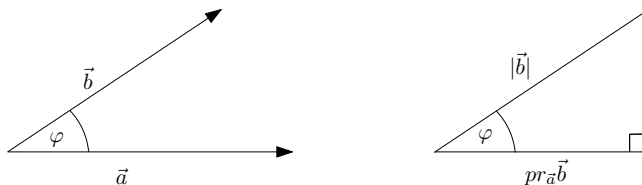
Dolžina pravokotne projekcije  $\vec{b}$  na  $\vec{a}$  je  $pr_{\vec{a}}\vec{b} = |\vec{b}| \cos \varphi$ .

Za skalarni produkt velja komutativnost, distributivnost in homogenost.

$$\vec{a} \perp \vec{b} \iff \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

Dolžina vektorja  $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$

Kosinusni izrek  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$



**Zgled.** Izračunajmo dolžino vektorja  $\vec{a}$ , če ima  $\vec{b}$  dolžino 6, njun skalarni produkt je enak 21, njun vmesni kot pa  $60^\circ$ . Izračunajmo še  $pr_{\vec{a}}\vec{b}$ . [Video rešitve](#)

**Zgled.** Dolžina vektorja  $\vec{a}$  je 3,  $|\vec{b}| = 4$ , dolžina  $2\vec{a} - \vec{b}$  pa  $\sqrt{76}$ . Izračunajmo kot med  $\vec{a}$  in  $\vec{b}$ . [Video rešitve](#)

**Zgled.** V paralelogramu  $ABCD$  je  $a = 7\text{cm}$ ,  $b = 4\text{cm}$ ,  $\alpha = 36^\circ$ . Izračunajmo dolžino diagonale  $f$ . [Video rešitve](#)

**Naloga 1.** 357a, 360c, 366 ampak izračunaj kot med  $a$  in  $b$ , 375ab, 377ab

## 2.1 Skalarni produkt v ortonormirani bazi

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

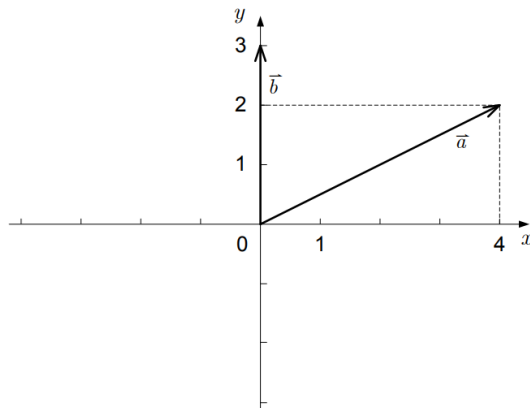
$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

**Zgled.** Za vektorja  $\vec{a} = (2, 1, 4)$  in  $\vec{b} = (1, 0, -1)$  izračunajmo  $(2\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{b}$ . [Video rešitve](#)

**Zgled.** Določimo komponento  $u$ , da bosta  $\vec{a} = (-3, 2u, 5)$  in  $\vec{b} = (6, u, 2)$  pravokotna. [Video rešitve](#)

**Zgled.** Naloga z mature 2021. [Video rešitve](#)

V ravnini, opremljeni s koordinatnim sistemom, sta narisana vektorja  $\vec{a}$  in  $\vec{b}$ . Narišite vektor  $\vec{c} = \frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b}$ . Kolikšni sta dolžini vektorjev  $\vec{a}$  in  $\vec{b}$ ? Koliko meri kot  $\varphi$  med  $\vec{a}$  in  $\vec{b}$ ? Rezultat zaokrožite na stotinko stopinje.



**Naloga 2.** NALOGE 388 (razdalja=dolžina vektorja), 389 (enotski vektor=vektor/dolžina), 390ac, 393, 399, 405, 408, 414