Eksponentna funkcija

Bor Bregant

1 Funkcija $f(x) = a^x$, kjer je $a > 0$ in $a = 1$.

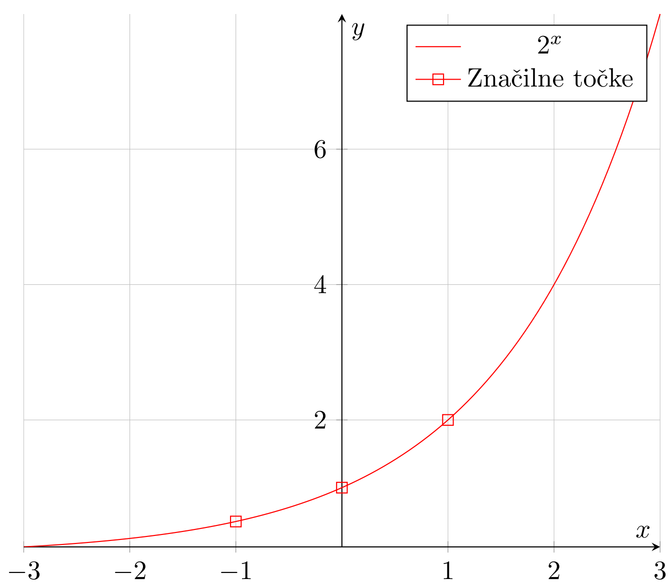
Primeri:

- $f(x) = 2^x$
- $x \mapsto 4^x$
- $f(x) = \left(\frac{\sqrt{3}}{10}\right)^x$

1.1 Družina funkcija $f(x) = a^x; a > 1$

Oglejmo si primer $a = 2$, torej $f(x) = 2^x$. Tabelirajmo vrednosti in narišimo graf.

x	$y = 2^x$
-2	$\frac{1}{4}$
-1	$\frac{1}{2}$
0	1
1	2
2	4



Lastnosti funkcij $f(x) = a^x; a > 1$

- $D_f = \mathbb{R}$
- $Z_f = (0, \infty)$
- začetna vrednost $f(0) = 1$

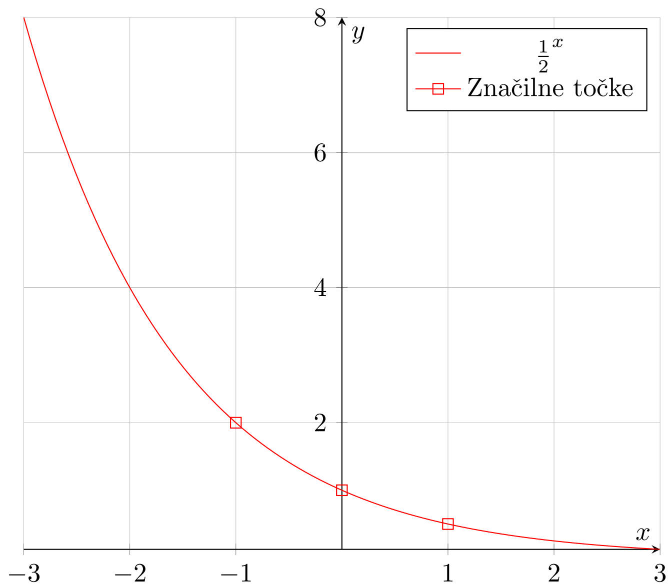
- značilne točke $(0,1), (1,a), \left(-1, \frac{1}{a}\right)$
- naraščajoča
- navzdol omejene z 0, navzgor neomejene
- graf se proti $-\infty$ asimptotsko približuje abscisni osi
- so bijektivne
- so konveksne.

Pomembna je tudi funkcija e^x, kjer je $e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots \approx 2,72$ iracionalno *eulerjevo* število.

1.2 Družina funkcija $f(x) = a^x; 0 < a < 1$

Oglejmo si $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$. Ker je $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^{-x}$, lahko ta graf dobimo z zrcaljenjem grafa $y = 2^x$ čez ordinatno osjo.

x	$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
-1	2
0	1
1	$\frac{1}{2}$



Lastnosti funkcij $f(x) = a^x; a > 1$

- $D_f = \mathbb{R}$
- $Z_f = (0, \infty)$
- začetna vrednost $f(0) = 1$
- značilne točke $(0,1), (-1,a), \left(1, \frac{1}{a}\right)$
- padajoča
- navzdol omejene z 0, navzgor neomejene

- graf se proti ∞ asimptotsko približuje abscisni osi
- so bijektivne
- so konveksne.

Zgled. • *Določimo eksponentno funkcijo f, katere graf poteka skozi $A(2,9)$. Nato v isti koordnatni sistem narišimo $f(x), f(x+1), f(x+1)-1, f(-x)$, $|f(x)-3|$.*

Naloga 1. Poišči predpis za eksponentno funkcijo $f(x)=a^x$, za katero je:
(a) $f\left(\frac{1}{2}\right)=2$ (b) $f\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{27}{125}$ (c) $f(-2)=\frac{9}{4}$

Naloga 2. V isti koordinatni sistem nariši grafe funkcij
(a) $f(x)=3^x, g(x)=3^x-2, h: x \mapsto 3^{x-2}$ (b) $f(x)=2^{-x}, g(x)=\frac{3}{2}2^{-x}$

Naloga 3. Zapiši tri čim lepše točke grafa $f(x)=2^{x-2}-1$. Nato nariši grafe $f(x)$, $g(x)=|f(x)|$ in $h(x)=f(|x|)$.

Naloga 4. Za funkcijo $f(x)=-2^x+2$ zapiši začetno vrednost, ničle, enačbo vodoravne asimptote in nariši njen graf. Poišči še predpis funkcije g, ki je dobljena tako, da graf f premaknemo za vektor $(1,-1)$.

1.3 Eksponentna enačba

Tri skupine eksponentnih enačb in postopek reševanja:

Vrsta enačbe	Postopek reševanja	Primer
$a^{f(x)}=a^{g(x)}$	$f(x)=g(x)$	$3^{x-1}=3^{2x+2}$
$a^{f(x)}=b^{f(x)}$	$f(x)=0$	$5^{2x}=(\frac{1}{2})^{2x}$
$a^{f(x)}=b$	*Logaritmiranje*	$2^{x-3}=16$

Zgled. *Rešimo enačbo $9^{x-3}=3\sqrt{3}$. (naloga z mature)*

Zgled. *Rešimo enačbo $4\cdot 2^{2x+1}=\frac{1}{8}$.*

Zgled. *Rešimo enačbo $5^{x+1}+5^{x+2}=6$.*

Zgled. *Rešimo enačbo $2\cdot 7^x-11=21\cdot 7^{-x}$.*

Zgled. *Rešimo neenačbo $3^{x-1}>3$.*

Naloga 5. Reši enačbe:
(a) $5^x=125$ (b) $4^{x-1}=16$ (c) $2^{x-3}=4^3$ (d) $5^{x-1}=\frac{1}{25}$
(e) $\left(\frac{8}{27}\right)^x=\frac{3}{2}$ (f) $4^x=-8$ (g) $\sqrt{27})9^{1-x}$ (h) $5^{3x}=5^{7x-2}$
(i) $4^{t^2}=4^{6-t}$

Naloga 6. Reši enačbe:
(a) $5^x=7^x$ (b) $4^{x-4}=6^{4-x}$ (c) $2^{x^2-x-6}=1$

Naloga 7. Reši enačbe:
(a) $3^{x+2}+3^x=90$ (b) $2^{2x-1}+3\cdot 2^{2x}-2^{2x+2}+1=0$ (c) $3^{2x}+3^x=12$
(d) $4^x+1=17\cdot 2^{x-2}$

Naloga 8. Reši neenačbe (pomagaj si z grafom):
(a) $3^{x+2}-1>0$ (b) $5^{x+1}\leq \frac{1}{5}$ (c) $2^x>1-x$.

Naloga 9. V isti koordinatni sistem nariši grafa funkcij $f(x)=e^{-x-2}$ in $g(x)=e^x$ in izračunaj njuno presečišče.

2 Logaritem

Defincija: $\log_a x = y \iff a^y = x$, kjer $x>0, a>0, a\neq 1$. Število a imenujemo *osnova logaritma*, x pa *logaritmand.*
Posebej označimo $\log x = \log_{10} x$ (desetiški logaritem) in $\ln x = \log_e x$ (naravni logaritem).

Zgled.

- $\log_2 16 = 4$, *saj je* $2^4=16$
- $\log_2 \frac{1}{4} = -2$, *saj je* $2^{-2}=\frac{1}{4}$
- $\log_{\frac{1}{5}} 1 = 0$
- $\log_5(-10)$ *ne obstaja, saj je logaritmand negativen*
- $\ln e = 1$

Zgled. *Izrazimo in določimo x, če je $\log_8 x = -\frac{2}{3}$.*
Izrazimo in določimo x, če je $0.7^x = 0.49$.

Pravili:

$$a^{\log_a x} = x \qquad \text{in} \qquad \log_a a^x = x$$

Zgled. *Izračunajmo* $\log_3 3^{0.4}$ *in* $4^{\log_4 8}$

Naloga 1. Izračunaj brez kalukatorja in nato preveri s kalkulatorjem:
(a) $\log_2 32$ (b) $\log_{\frac{1}{2}} 16$ (c) $\log 0.001$.

Naloga 2. Določi x, če je:
(a) $2^x=16$ (b) $\log_x 16 = 4$ (c) $\log_x 64 = 3$

Naloga 3. Izračunaj:
(a) $2^{\log_2 4}$ (b) $7^{\log_7 0.6}$

Naloga 4. Med katerima zaporednima celima številoma leži število:
(a) $\log 49$ (brez kalukatorja) (b) $\ln(8.9\cdot 10^9)$ (pomagaj si s kalkulatorjem)

Naloga 5. S kalkulatorjem izračunaj na dve decimalki natančno:
(a) $2\log 6 - 13\ln 2 + \log_3 5$

2.1 Pravila za računanje logaritmov

- $\log_a(x_1 \cdot x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$
- $\log_a \frac{x_1}{x_2} = \log_a x_1 - \log_a x_2$
- $\log_a x^r = r \cdot \log_a x$
- $\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$

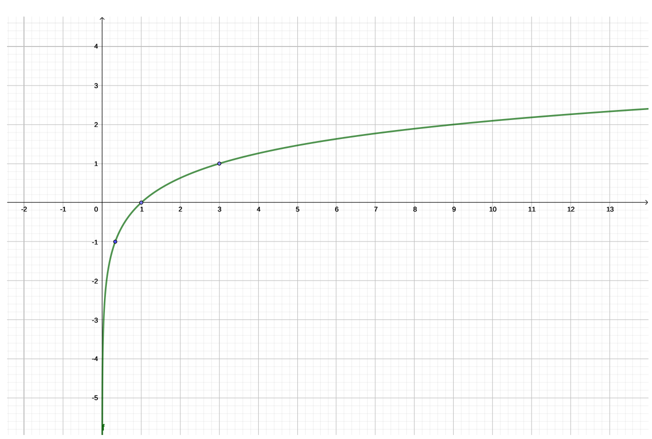
Zgled. *Uporabi pravila logaritmov:*
$\log_5 x + \log_5 \frac{1}{x}$
$\log_a 10 - \log_a 2$
$\log_2(x+1)^2$
$\log_3 x + 6\log_3(x+1)$
Z novo osnovo izračunaj $\log_5 2 \cdot \log_2 5$ *in* $\log_{\frac{1}{2}} 5 \cdot \log_5 4$.

2.2 Logaritemska funkcija

Loagritemska funkcija $f(x) = \log_a x (a > 0)$ je inverzna funkcija eksponentni funkciji $f(x) = a^x$.

Zgled. *Poiščimo inverzno funkcijo funkciji* $f(x) = 3^{\frac{x}{2}-1}$.

2.2.1 Družina funkcij $f(x) = \log_a x, a > 1$

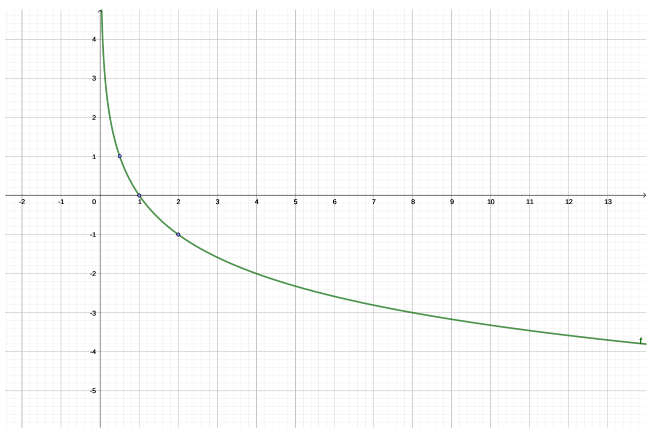


Lastnosti funkcij $f(x) = \log_a x, a > 1$

- $D_f = (0, \infty)$
- $Z_f = \mathbb{R}$
- ničla $x = 1$

- značilne točke $(1,0), (a,1), (\frac{1}{a}, -1)$
- naraščajoče
- navpična asimptota $x = 0$
- neomejene navzgor in navzdol
- bijektivne
- konkavne

Naloga 6. Ob grafu funkcije $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ napiši lastnosti družine funkcij $f(x) = \log_a x, 0 < a < 1$.



Zgled. *Izračunajmo ničlo , narišimo graf in zapišimo definicijsko območje funkcije* $f(x) = 2\log_3(x+3)$

Naloga 7. Določi predpis funkcije $f(x) = \log_a x$, za katero velja $f(8) = 3$. Nato tej funkciji poišči njen inverz. Funkcijo f tudi nariši.

2.3 Logaritemska enačba

Pri teh enačbah je pomembno napraviti preizkus!

Zgled. *Rešimo naslednje enačbe:*
(a) $\log_{\frac{1}{5}}(3x-2) = -2$ *(naloga z mature)*
(b) $\log(x-1) - \log x = \log(x+3) - \log(x-4)$
(c) $\log_2(x+1) + \log_2 x = 1$
(d) $2\log^2 x - 5\log x = 3$
(e) $x^{\log x} = 10$

Naloga 8. Kje graf funkcije $f(x) = 1 + \log_5(x+2)$ seka premico $y = 2$ in kje abscisno os.

Naloga 9. Reši enačbe:
(a) $\log(3x+1) = 2$ (b) $\log_2 \sqrt{2x+1} = 0.5$
(c) $\log x + \log(x+1) = \log 6$ (d) $\log_3(x+4) - \log_3 x = 2$
(e) $\ln(1-4x) - \ln x = 1$ (f) $(\log x)(\log x + 1) = 2$
(g) $\log_3(1 + \log_2(x+3)) = 1$ (h) $x^{1+\log x} = 10^2$

Naloga 10. Reši neenačbe:
(a) $\log_3 x > 0$ (b) $0 < \log_2(x+1) < 3$

Naloga 11. Reši enačbe:
(a) $\log_3 x + \log_9 x = 3$ (b) $2\log_7 x + \log_x 49 = 4$
(c) $2^{\frac{x}{2}} = 16$ (d) $2^x = 3^{x+2}$