

Geometrija

Bor Bregant

1 Trikotnik

Višina trikotnika je daljica, pravokotna na stranico... Višinska točka (ortocenter).

Težiščnica trikotnika je daljica, ki povezuje oglišče in razpolovišče stranice. Težišče trikotnika razdeli težiščnice 1 : 2.

...

2 Krog in krožnica

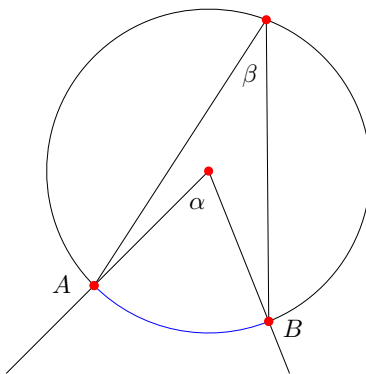
Krožnica je množica točk v ravnini, ki so enako oddaljene (za polmer) od fiksne točke, ki jo imenujemo središče. $K = \{T; d(T, S) = r\}$. Krog podobno, le \leq .

Tangenta ali dotikalnica je premica, ki ima s krožnico eno samo skupno točko in je pravokotna na radij.

Sekanta je premica, ki ima s krožnico dve skupni točki. Tetiva je daljica, ki povezuje dve točki na krožnici. Lok

Skupna slika vsega zgoraj

Središčni kot je kot, ki ima vrh v središču kroga, kraka pa potekata skozi dve točki na krožnici. Obodni kot nad lokom AB . Središčni kot je še enkrat večji od obodnega kota nad istim lokom z dokazom.



Posledica: Vsi obodni koti nad istim lokom so skladni.

Posledica: Če je središčni kot iztegnjeni kot, je njegov obodni kot pravi kot (Talesov izrek).

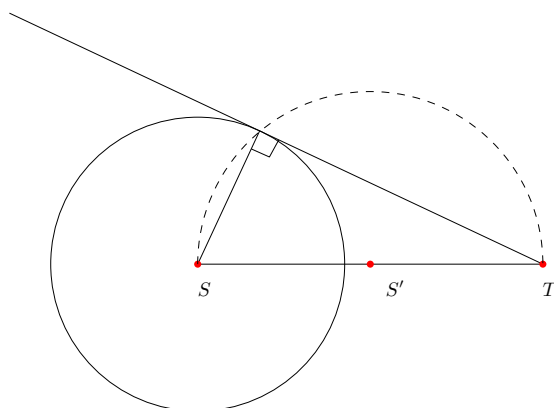
Risanje tangente na krožnico skozi poljubno točko s pomočjo Talesovega izreka

i Poveži S (središče) in T (zunanja točka).

ii Razpolovišče $ST \rightarrow S'$

iii Polkrog iz S' , radij $|SS'|$

iv Dobimo dve tangenti



Merjenje kotov:

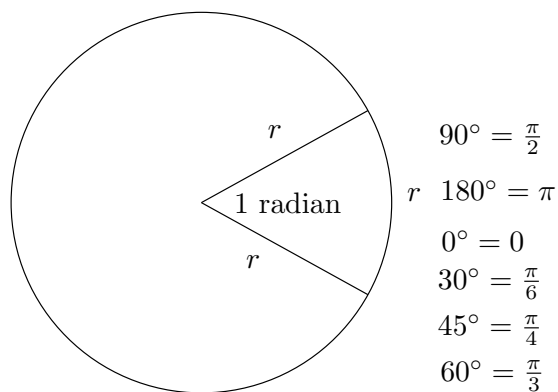
Stopinje, minute, sekunde

1° je $\frac{1}{360}$ polnega kota

$1^\circ = 60'$ in $1' = 60''$.

Radiani:

Kot meri en radian, če mu priprada lok z dolžino radija



Polni kot: 2π radianov

Zgled. Nariši $\triangle ABC$, v katerem $c = 6\text{cm}$, $v_c = 2\text{cm}$, $\gamma = 60^\circ$.

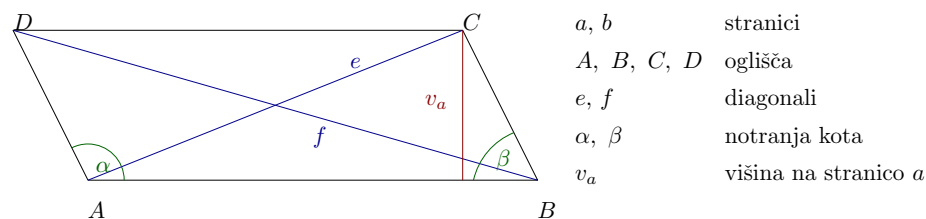
Ideja: Začnemo s c in naredimo vzporednico za višino. Želimo središčni kot 120° . Ker je središčni enakokrak, bosta ostala kota 30° . γ bo torej obodni kot za krožnico s središčem S in polmerom AS .

Naloga 1. DN Konstruiraj trikotnik s podatki $a = 5\text{cm}$, $t_a = 4\text{cm}$, $\alpha = 30^\circ$.

3 Štirikotnik in pravilni n -kotnik

Vsota notranjih kotov štirikotnika je 360° . *dokaz s triangulacijo*

Paralelogram



- i Dva para vzporednih stranic
- ii Diagonali se razpolavljata
- iii Poljubna sosednja kota sta suplementarna
- iv Poljubna nasprotna kota sta enako velika

Pravokotnik = pravokotni paralelogram

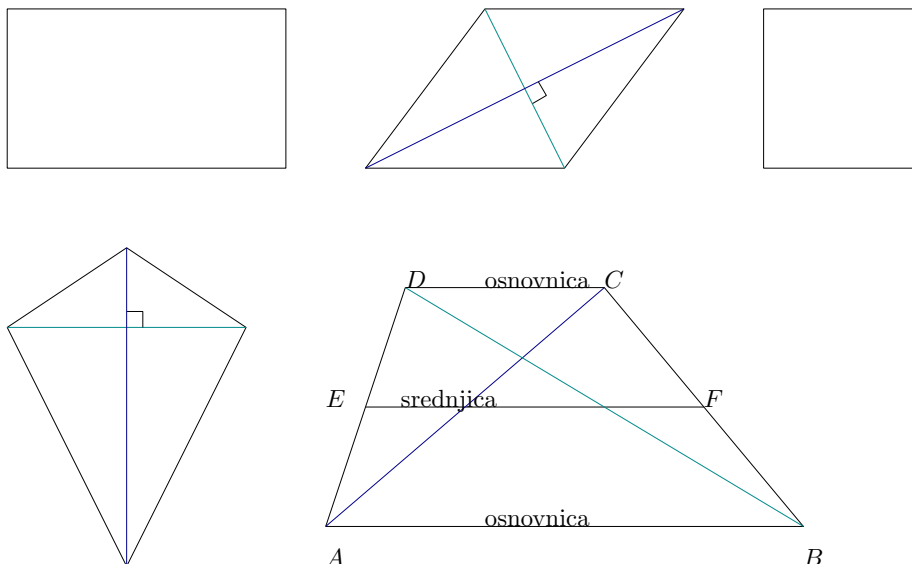
Romb = enakostranični paralelogram (diagonali se razpolavljata pod pravim kotom)

Kvadrat = enakostranični pravokotnik

Trapez = štirikotnik, ki ima par vzporednih stranic (α in δ suplementarna) (enakokraki trapez)

Srednjica trapeza (povezuje razpolovišči krakov in je vzporedna osnovnicama) ima dolžino $s = \frac{a+c}{2}$

Deltoid = štirikotnik, ki ima dva para sosednjih enako dolgih stranic (diagonali sta pravokotni, ena se z drugo razpolavlja & dva notranja kota sta skladna).



Zgled. Nariši paralelogram $ABCD$, za katerega velja $\alpha = 120^\circ$, $e = 2.5\text{cm}$, $v_a = 2\text{cm}$.

Zgled. Nariši romb $ABCD$, katerega diagonali merita $e = 5\text{cm}$ in $f = 4\text{cm}$.

Zgled. Nariši pravokotnik $ABCD$, za katerega velja $a = 4\text{cm}$ in $f = 6\text{cm}$.

Zgled. Nariši trapez $ABCD$, za katerega velja $a = 4.5\text{cm}$, $\beta = 45^\circ$, $e = 3.3\text{cm}$ in $f = 5\text{cm}$. *dve rešitvi*

Zgled. Nariši trapez $ABCD$, za katerega velja $\alpha = 60^\circ$, $d = 3\text{cm}$, $c = 2\text{cm}$ in $f = 6\text{cm}$.

Zgled. Nariši deltoid $ABCD$, za katerega velja $e = 4\text{cm}$, $f = 7\text{cm}$ in $a = 5\text{cm}$.

Zgled. S pomočjo srednjice nariši trikotnik ABC , kjer $b = 4\text{cm}$, $t_a = 4.5\text{cm}$ in $\alpha = 75^\circ$.

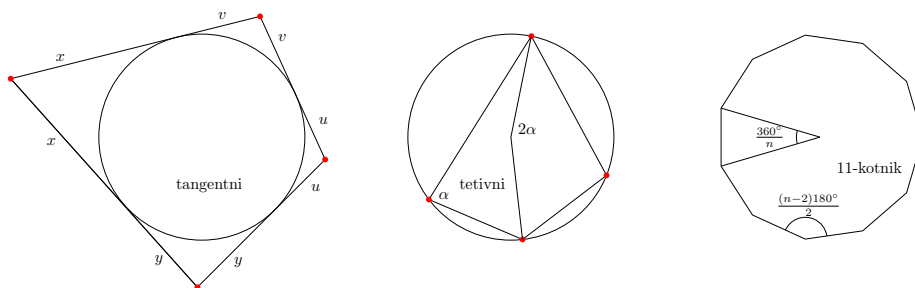
α, b , skozi razpolovišče b vzporednico c in iz A odmerimo t_a

Naloga 1. DN 119, 121b, 128acd, 132a, 133ac

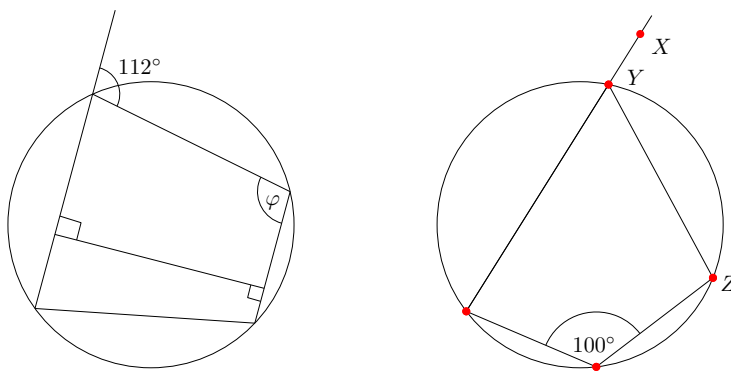
Tangentni štirikotnik (včrtamo krožnico, $a + c = b + d$ z dokazom)

Tetivni štirikotnik (očrtamo krožnico, $\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180^\circ$ z dokazom)

Pravilni n -kotnik - vse stranice in notranji koti enaki. Vsota kotov $= (n-2)180^\circ$.



Zgled. Glede na sliko določi φ in $\angle XYZ$.



Zgled. Načrtaj tangenten trapez s podatki $a = 6\text{cm}$, $\alpha = 60^\circ$ in polmerom včrtane krožnice $r = 2\text{cm}$.

a , $\alpha \rightarrow$ simetrala α , vzporednica a oddaljena za r , $\rightarrow S$

Zgled. Pravični večkotnik ima dvanajstkrat več diagonal kot stranic. Izračunaj, koliko meri notranji kot tega večkotnika.

Zgled. Če n -kotniku podvojimo število stranic, se njegovo število diagonal pomnoži z 5. Kateri n -kotnik je to. $5 \frac{n(n-3)}{2} = \frac{2n(2n-3)}{2}$

Zgled. Načrtaj trapez s podatki $a = 6\text{cm}$, $b = c = 4\text{cm}$ in $d = 5\text{cm}$. Naredimo paralelogram $a - c$ in iz točke X in B točko C

Naloga 2. DN Kateri n kotnik ima 3 diagonale več kot stranic?, 135bc

4 Podobnost

Zgled. Daljici AB in CD sta v razmerju $5 : 4$, vsota njunih dolžin pa je 63cm . Izračunaj dolžini AB in CD .

Zgled. Daljico AC razdeli na dva dela, da bo veljalo $|AB| : |BC| = 3 : 4$, kjer $|AC| = 5\text{cm}$.

Trikotnika ABC in $A_1B_1C_1$ sta podobna, če imata enaka razmerja vseh stranic in enake vse notranje kote ali ekvivalentno če se ujemata v:

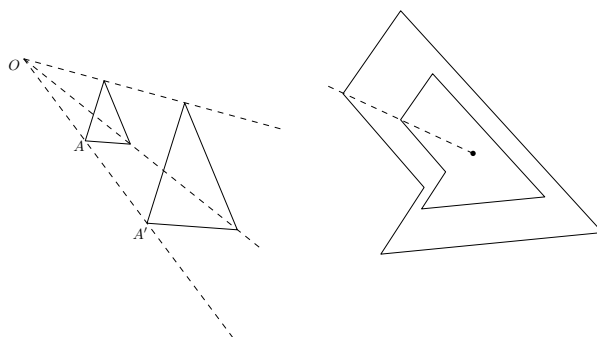
- i razmerju po dveh enakoležnih stranic $a : a_1 = b : b_1 = c : c_1$.
- ii dveh notranjih kotih npr. $\alpha = \alpha_1, \beta = \beta_1$.
- iii razmerju dveh stranic in vmesni kot npr. $\alpha = \alpha_1, b : b_1 = c : c_1$.
- iv razmerju dveh stranic in v kotu nasproti daljše stranice.

Relacija podobnosti je ekvivalenčna:

- i Refleksivnost $L \sim L$
- ii Simetričnost $L_2 \sim L_1 \Rightarrow L_1 \sim L_2$
- iii Tranzitivnost $L_1 \sim L_2 \wedge L_2 \sim L_3 \Rightarrow L_1 \sim L_3$.

Središčni razteg (homotetija) s središčem v točki O in faktorjem k je preslikava, ki daljico OA preslika v daljico OA' , da velja $|OA'| = k \cdot |OA|$.

- i Ohranja kote (oblike, tudi vzporednost)
- ii $|k| > 1$ pomeni razteg, $|k| < 1$ pomeni skrčitev, $k < 0$ doda še zrcaljenje.
- iii Podobnostna preslikava, saj like slika v njim podobne like.



Geometrijska sredina $a : x = x : b \rightarrow x = \sqrt{ab}$

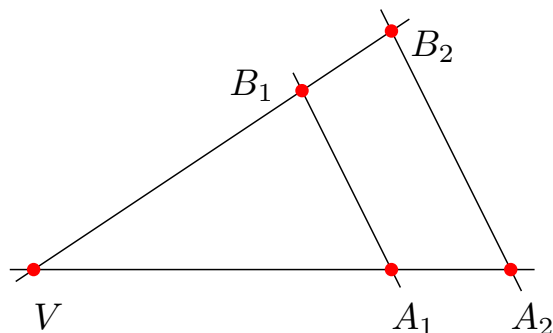
Primer: Geometrijska sredina 2 in 18 je 6. Velja $2 \times 18 = 6 \times 6$ (ploščina)

Primer kasneje: Višinski izrek

Razmerje = kvocient dveh količin (npr. dolžin daljic)

Sorazmerje = enakost dveh razmerij

Talesov izrek:



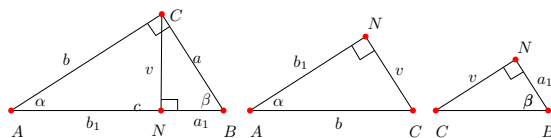
Zgled. Stranice $\triangle ABC$ so v razmerju $2 : 5 : 4$, njegov obseg pa meri 5.5cm . Kako dolge so stranice trikotnika.

Zgled. V $\triangle ABC$ narišemo daljico BD tako, da točka D razdeli stranico AC na odseka $|AD| = 7\text{cm}$ in $|DC| = 9\text{cm}$, ter da je $\angle BDC = \angle ABC$. Izračunaj $|BC|$ in $|BD| : |AB|$.

Zgled. V trapezu $ABCD$ sta kota $\angle ADC$ in $\angle ACB$ skladna. Izračunaj $|AC|$, če je $|AB| = 27\text{cm}$ in $|DC| = 12\text{cm}$.

Naloga 1. DN 143ac, 145abc, 148

Višinski izrek $v^2 = a_1b_1$, Evklidov izrek $a^2 = a_1c$, $b^2 = b_1c$, Pitagorov izrek $c^2 = a^2 + b^2$.



Višinski $v : b_1 = a_1 : v$

Evklidov $a : c = a_1 : a$ in podobno za b

Pitagorov $a^2 + b^2 = a_1c + b_1c = (a_1 + b_1)c = c^2$.

Zgled. Narišimo daljico dolžine $\sqrt{15}$.

Zgled. V pravokotnem trikotniku izračunaj pravokotno projekcijo katete b na hipotenuzo, če je $b = 7\text{cm}$ in $a = 4\text{cm}$.

Zgled. Izračunaj dolžini višine na hipotenuzo in projekcije neznane katete na hipotenuzo v pravokotnem trikotniku ABC , pri katerem je $c = 9\text{cm}$ in $b = 5\text{cm}$.

Zgled. Izračunaj velikost diagonale kvadrata in višine enakostraničnega trikotnika, če je obakrat stranica enaka a .

Zgled. Dve ladji sta ob isti uri izpluli iz пристanišča, ena proti vzhodu, druga proti jugu. Po nekaj urah sta bili 17 milj narazen. Pri tem je ladja proti jugu naredila 7 milj več kot ladja, ki pluje proti vzhodu. Kolikšno pot sta prevozili.

Zgled. *Nariši $\triangle ABC$, kjer $a : b = 3 : 4$, $\gamma = 60^\circ$ in $t_c = 2\text{cm}$.*

Naloga 2. DN 149, 153, 164aceg, 167, 172