

# Statistika

Bor Bregant

15. avgust 2024



# Kazalo

0.1	Predgovor . . . . .	1
<b>1</b>	<b>Uvod</b>	<b>3</b>
1.1	Podatki in informacije . . . . .	3
1.1.1	Enote opazovanja in Spremenljivke . . . . .	3
1.1.2	Tipi spremenljivk glede na vrednost in glede na mersko lestvico . . . . .	3
1.2	Populacija in vzorec . . . . .	5
1.3	Vrste statistične analize . . . . .	5
1.4	Koraki statistične analize . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Opisna statistika in vizualizacija</b>	<b>9</b>
2.1	Absolutna, relativna in grupirana frekvenčna porazdelitev . . . . .	9
2.2	Grafična predstavitev frekvenčnih porazdelitev za nominalne in ordinalne spremenljivke . . . . .	9
2.3	Grafična predstavitev frekvenčnih porazdelitev za intervalne in razmernostne spremenljivke . . . . .	10
2.4	Normalna porazdelitev . . . . .	12
2.4.1	Asimetričnost (skewness) . . . . .	12
2.4.2	Sploščenost (kurtosis) . . . . .	12
2.5	Rangiranje . . . . .	13
2.5.1	Kvantili . . . . .	13
2.6	Mere centralne tendence . . . . .	14
2.7	Mere variabilnosti (dispersije) . . . . .	15
2.8	Inferenčna statistika . . . . .	17
<b>3</b>	<b>Bivariantna analiza</b>	<b>23</b>
3.1	T-test . . . . .	23
3.1.1	T-test za (parne) odvisne vzorce . . . . .	23
3.1.2	T-test za neodvisne vzorce . . . . .	23
3.2	Analiza variance (ANOVA) . . . . .	24
3.3	Neparametrične alternative . . . . .	25
3.3.1	Hi-kvadrat test . . . . .	25
3.3.2	Spearmanov koeficient . . . . .	26
3.3.3	Pearsonov koeficient . . . . .	27
3.4	Povezanost . . . . .	27
3.4.1	Kovarianca . . . . .	28
<b>4</b>	<b>Multivariantna statistika</b>	<b>31</b>
4.1	Multipla regresijska analiza (linearna) . . . . .	31
4.2	Multipla regresijska analiza (logistična) . . . . .	32
4.3	Razvrščanje v skupine (clustering) . . . . .	33
4.4	Metode zmanjšanja dimenzionalnosti podatkov . . . . .	34
4.5	Analiza zanesljivosti . . . . .	35
4.6	Druge multivariantne metode . . . . .	35

**5 Tabele****37**

## 0.1 Predgovor

Statistika je veda, ki se ukvarja z zbiranjem, analiziranjem, interpretacijo, predstavitvijo in organizacijo podatkov. Izhaja iz *statisticum* (državni), saj je prvotno označevala analizo podatkov o državi. Njene uporabe presegajo matematiko in je temeljno orodje za raziskovanje na vseh področjih znanosti. Pomembno je, da jo uporabljamo odgovorno in etično ter kritično ocenjujemo kontekst in vir statističnih informacij, da se izognemo napačnim interpretacijam in zavajanju (zgled zavajanja).

Kljub temu, da je bilo gradivo pregledano, boste gotovo našli v njem napake. Vesel bom, če me boste nanje opozorili.



# Poglavje 1

## Uvod

Statistika je veda, ki se ukvarja z zbiranjem, analiziranjem, interpretacijo, predstavitvijo in organizacijo podatkov. Izhaja iz *statisticum* (državni), saj je prvotno označevala analizo podatkov o državi. Njene uporabe presegajo matematiko in je temeljno orodje za raziskovanje na vseh področjih znanosti. Pomembno je, da jo uporabljamo odgovorno in etično ter kritično ocenjujemo kontekst in vir statističnih informacij, da se izognemo napačnim interpretacijam in zavajanju (zgled zavajanja).

### 1.1 Podatki in informacije

**Podatki** so niz vrednosti kvalitativnih spremenljivk.

**Informacije** so obdelani in interpretirani podatki.

Primer: temperatura po vsem svetu za zadnjih 100 let so podatki; analiza, ki ugotavlja, da globalna temperatura narašča, je informacija

#### 1.1.1 Enote opazovanja in Spremenljivke

Enote opazovanja, za katere se zbirajo podatki, npr. oseba, gospodinjstvo, podjetje, izdelek, stavba, dogodek, država ...

Spremenljivka je katero koli značilno število ali količina, ki jo je mogoče izmeriti ali prešteti, na primer:

- Spol, starost, izobrazba, poklic, dohodek, narodnost ... (za osebo)
- Število članov, vrsta, lastništvo stanovanja, dohodek, internetna povezava ... (za gospodinjstvo)
- Število zaposlenih, lokacija, vrsta, sektor, prihodki ... (za podjetje)
- Dimenzije, teža, starost, barva, temperatura, cena ... (za izdelek)
- Dimenzije, lokacija, starost, lastništvo, materiali, cena ... (za stavbo)
- Površina, prebivalstvo, število podjetij, politična ureditev ... (za državo)

#### 1.1.2 Tipi spremenljivk glede na vrednost in glede na mersko lestvico

**Glede na vrednost**

**Kategorične** (atributne) spremenljivke, npr. spol, izobrazba, barva, sektor, vrsta, regija

**Številske** spremenljivke:

- Zvezne (lahko imajo poljubne vrednosti), npr. točna starost, dohodek, cena, dimenzije, dolžina, širina, trajanje ...
- Diskretne (imajo le celoštevilске vrednosti), npr. letnica rojstva, velikost gospodinjstva, velikost podjetja, število udeležencev ...

### Glede na mersko lestvico

- **Nominalne** spremenljivke: vrednosti se lahko razlikujejo le med seboj, razvrščanje ni možno, npr. spol, poklic, sektor, narodnost, regija ...
- **Ordinalne** spremenljivke: vrednosti so lahko razvrščene od najmanjše do največje, vendar razdalje med vrednostmi niso znane, npr. izobrazba, šolska ocena, stopnja strinjanja, stopnja zadovoljstva, tesnoba ...
- **Intervalne** spremenljivke: razlika med dvema vrednostma je smiselna, vendar ni dejanske ničelne vrednosti, je samo arbitrarna, npr. temperatura na lestvici Celzija, pH, koledarsko leto ...
- **Razmernostne** spremenljivke: imajo edinstveno in nearbitrarno ničelno vrednost, zato lahko izračunamo tudi razmerja, npr. temperatura po Kelvinovi lestvici, starost, dolžina, širina, višina, teža, velikost razreda, število udeležencev dogodka, dohodek ...

Kaj lahko izračunamo	Nominalna	Ordinalna	Intervalna	Razmernostna
Frekvenčna porazdelitev	✓	✓	✓	✓
Modus	✓	✓	✓	✓
Vrsti red vrednosti		✓	✓	✓
Mediana		✓	✓	✓
Povprečje			✓	✓
Razlika med vrednostmi			✓	✓
Seštevanje in odštevanje			✓	✓
Množenje in deljenje				✓

### Python Example:

```

1      # Import necessary libraries
2      import pandas as pd
3
4      # Step 1: Read the CSV file
5      # Assume the CSV file is named 'data.csv' and located in the same
        directory as the script
6      df = pd.read_csv('data.csv')
7
8      # Step 2: Print the first few rows of the dataframe
9      print("First few rows of the dataframe:")
10     print(df.head())
11
12     # Step 3: Check the data types of each column
13     print("\nData types of each column:")
14     print(df.dtypes)
15
16     # Step 4: Convert a specific column to float (if necessary)
17     # Let's assume we have a column named 'income' which we want to convert
        to float
18     df['income'] = df['income'].astype(float)
19
20     # Verify the conversion
21     print("\nData types after conversion:")
22     print(df.dtypes)
23
24     # Step 5: Calculate the range of data in a numeric column
25     # Let's calculate the range for the 'income' column
26     income_range = df['income'].max() - df['income'].min()
27     print("\nRange of the 'income' column:")

```



```

28     print(income_range)
29
30     # Step 6: Label encoding for an ordinal categorical variable
31     # Let's assume we have an ordinal variable named 'education_level'
32     education_levels = {'High School': 1, 'Bachelor': 2, 'Master': 3, 'PhD'
: 4}
33     df['education_level'] = df['education_level'].map(education_levels)
34
35     # Verify the encoding
36     print("\nData after label encoding 'education_level':")
37     print(df.head())
38
39     # Step 7: One-hot encoding for a nominal categorical variable
40     # Let's assume we have a nominal variable named 'region'
41     df = pd.get_dummies(df, columns=['region'], prefix='region')
42
43     # Verify the one-hot encoding
44     print("\nData after one-hot encoding 'region':")
45     print(df.head())
46
47     # Additional Step: Descriptive statistics summary
48     print("\nDescriptive statistics of the dataframe:")
49     print(df.describe())
50
51     # Save the modified dataframe to a new CSV file
52     df.to_csv('modified_data.csv', index=False)
53
54     print("\nModified dataframe saved to 'modified_data.csv'.")

```

## 1.2 Populacija in vzorec

**Populacija** se nanaša na skupni niz opazovanj; pomembno jo je prostorsko in časovno opredeliti, npr.

- študenti Univerze na Primorskem v študijskem letu 2023/2024
- javni vrtci v Obalno-Kraški regiji na 1. 9. 2023
- gledališke predstave v Sloveniji v tednu od 19. do 25. 2. 2024
- knjige izdane v EU v januarju 2024

**Vzorec** se nanaša na niz podatkov, izbranih iz statistične populacije po določenem postopku, npr.

- sistematični vzorec 400 študentov UP
- naključni vzorec 200 knjig

## 1.3 Vrste statistične analize

Glede na namen:

- Opisna (deduktivna) statistika: analiza in opis zbranih podatkov brez težnje po posploševanju teh podatkov izven njihovega obsega
- Inferenčna (induktivna) statistika: sklepanje iz vzorca na populacijo

Glede na število sočasno analiziranih spremenljivk:

- Univariatna statistika: analiza ene spremenljivke
- Bivariatna statistika: analiza dveh spremenljivk, npr. hi-kvadrat, mere povezanosti, t-test, ANOVA, regresija, ...
- Multivariatna statistika: analiza več spremenljivk, npr. multipla regresija, analiza glavnih komponent, faktorska analiza, diskriminantna analiza ...

## 1.4 Koraki statistične analize

- i Določitev vsebine in namena statistične študije, opredelitev objekta (enota in populacija) in vsebino opazovanja (spremenljivke)
- ii Statistično opazovanje (celotne populacije ali vzorca)
- iii Enostavna obdelava (urejanje, soritrnanje podatkov in izračun osnovnih karakteristik)
- iv Analitična obravnava

## Vaje

### Vaja 1

Za naslednje spremenljivke definirajte nekaj možnih vrednosti in navedite, ali so zvezne ali diskretne, ter kakšna je raven merjenja:

- Število dnevnih poslov na ljubljanski borzi
- Temperatura v Kopru v stopinjah Celzija
- Življenjska doba osebnega računalnika
- Število dni letnega dopusta za zaposlene
- Dnevno prehojena razdalja:
  - a. kilometrih
  - b. korakov
- Leto neto dohodek učitelja
- Teža solate v gramih
- Število polic v knjižni omari
- Strinjanje s trditvijo na lestvici od 1 (Sploh se ne strinjam) do 5 (Povsem se strinjam)

### Vaja 2

Za naslednje enote navedite nekaj primerov spremenljivk in določite njihovo mersko lestvico:

- Učenec
- Učitelj
- Razred
- Šola
- Učbenik

**Vaja 3**

Predstavljajte si, da proučujete pojav besede “trajnostni razvoj” v slovenskih srednješolskih učbenikih izdanih v obdobju od 2010 do 2020. Med njimi naključno izberete 250 učbenikov, v katerih preštejete, kolikokrat se pojavi beseda trajnostni razvoj.

- Kaj je enota analize in kaj je spremenljivka?
- Kaj je merska lestvica spremenljivke?
- Kakšen je vzorec in kako velik je?
- Kakšna je populacija?

**Vaja 4**

Recimo, da je imel Pokrajinski muzej v Kopru v letu 2023 natanko 20.000 obiskovalcev. Predstavljate si, da je vsak deseti obiskovalec muzeja prejel in izpolnil kratek vprašalnik:

- Kako velika je populacija?
- Kako velik je vzorec?
- Napiši vsaj štiri vprašanja, na podlagi katerih bi lahko definirali eno nominalno, eno ordinalno, eno intervalno in eno razmernostno spremenljivko.

**Vaja 5**

Razišči bazo podatkov raziskave PISA na spletni strani OECD



## Poglavje 2

# Opisna statistika in vizualizacija

### 2.1 Absolutna, relativna in grupirana frekvenčna porazdelitev

- **Frekvenčna porazdelitev** je matematična funkcija, ki prikazuje število primerov, v katerih spremenljivka zavzame vsako od svojih možnih vrednosti.
- **Frekvenca** je število pojavov podatkovne vrednosti.
- **Relativna frekvenca** je odstotek enot med vsemi enotami, ki imajo določeno vrednost spremenljivke, in se izračuna tako, da se absolutna frekvenca deli s številom vseh enot.

#### Primer

$x_i$	$f_i$	$f_i$ (%)
Koper	60	20
Izola	150	50
Piran	90	30
<b>Skupaj</b>	<b>300</b>	<b>100</b>

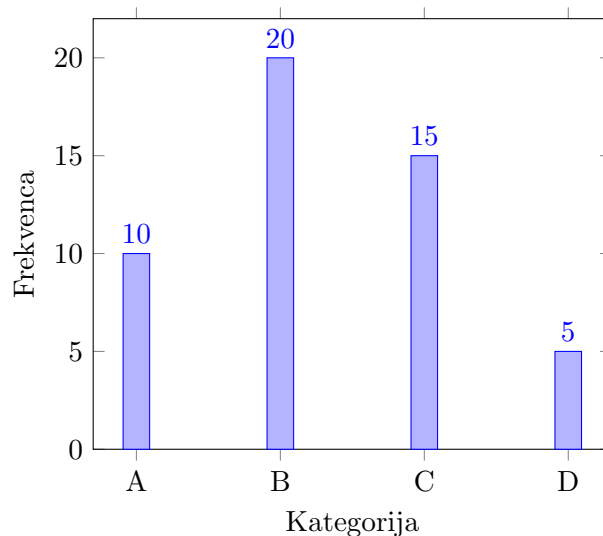
Tabela 2.1: Relativna frekvenca najljubših slovenskih obalnih mest. Enota je turist, spremenljivka pa najljubše slovensko obalno mesto.

Kumulativna frekvenca je seštevek vseh frekvenc za določene vrednosti spremenljivke do vključno določene vrednosti. Prikazuje, koliko primerov ima vrednost spremenljivke manjšo ali enako določeni vrednosti. Kumulativna frekvenca je koristna za prikazovanje porazdelitve podatkov in ugotavljanje, koliko enot dosega ali presega določeno vrednost.

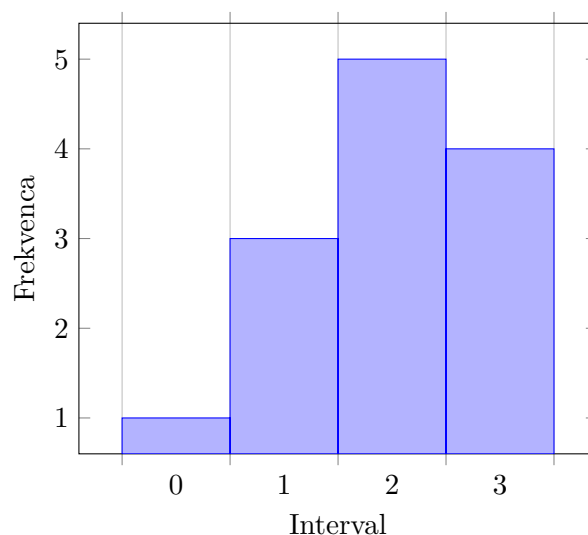
Grupirane frekvence se uporabljajo, kadar so podatki razdeljeni v skupine ali razrede. Namesto da bi beležili frekvence za vsako posamezno vrednost, združimo vrednosti v skupine, kar omogoča bolj pregledno analizo podatkov, še posebej pri velikih naborih podatkov. Relativne frekvence se lahko izračunajo tudi za te skupine, da dobimo odstotek primerov v vsaki skupini.

### 2.2 Grafična predstavitev frekvenčnih porazdelitev za nominalne in ordinalne spremenljivke

Stolpčni grafikon prikazuje frekvence posameznih kategorij z navpičnimi ali vodoravnimi stolpci, kjer višina oziroma dolžina stolpca predstavlja frekvenco določene kategorije. Prednost stolpčnih grafikonov je v tem, da omogočajo enostavno primerjavo med kategorijami in so primernejši za prikaz večjih množic podatkov od tortnega grafikona.



Slika 2.1: Stolpčni grafikon frekvenc za nominalne spremenljivke.



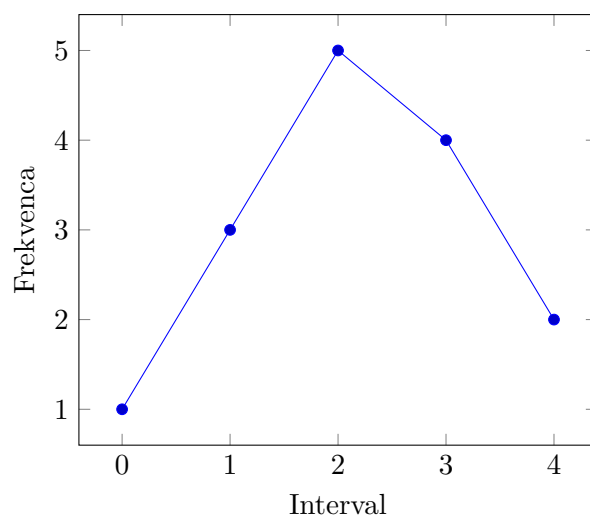
Slika 2.2: Histogram frekvenc za intervalne spremenljivke.

## 2.3 Grafična predstavitev frekvenčnih porazdelitev za intervalne in razmernostne spremenljivke

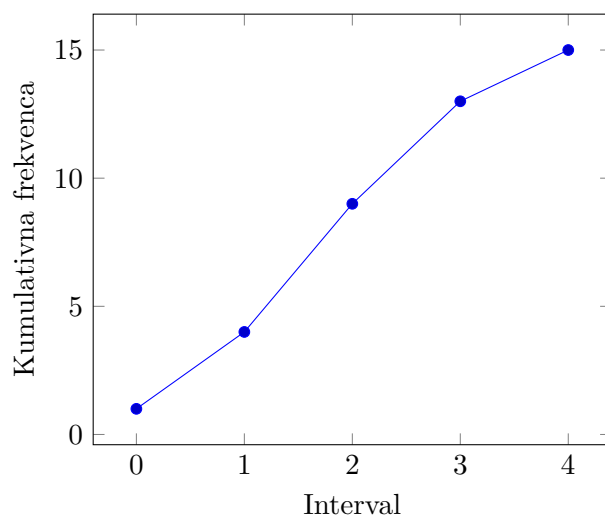
Histogram je vrsta stolpčnega grafikona, kjer stolpci predstavljajo frekvence podatkov v določenih intervalih. Histogram je uporaben za prikaz razpršenosti podatkov in za ugotavljanje oblik porazdelitev, kot so normalna, enakomerno porazdeljena ali pristranska porazdelitev.

Poligon frekvenc je črtni grafikon, ki povezuje sosednje točke, ki predstavljajo frekvence intervalov. Uporablja se za prikaz porazdelitve podatkov in omogoča enostavno primerjavo z drugimi porazdelitvami.

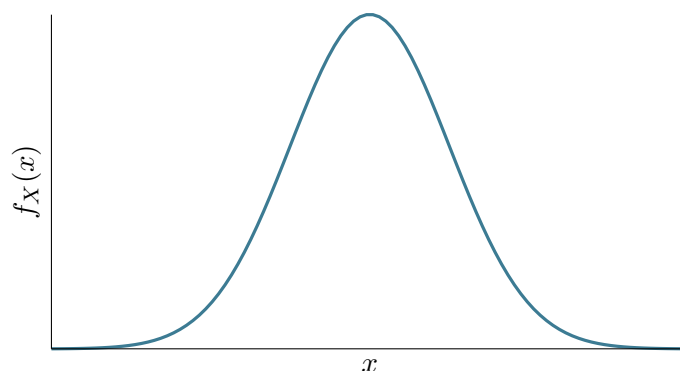
Ogiva je črtni grafikon, ki prikazuje kumulativne frekvence. To pomeni, da vsaka točka na grafu predstavlja vsoto vseh prejšnjih frekvenc do določene vrednosti. Ogiva je uporabna za določanje percentilov in za primerjavo kumulativnih porazdelitev med različnimi skupinami podatkov.



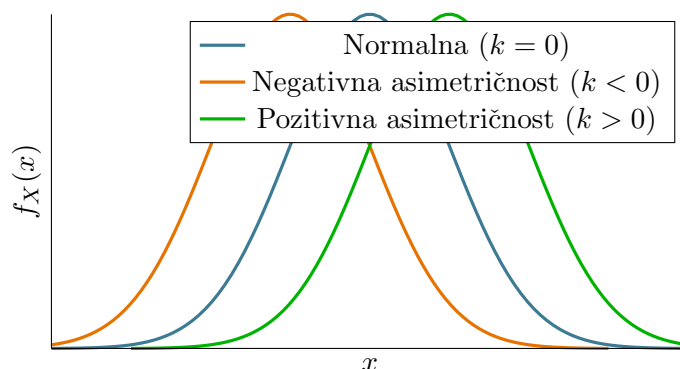
Slika 2.3: Poligon frekvenc za intervalne spremenljivke.



Slika 2.4: Ogiva za kumulativne frekvence.



Slika 2.5: Gostotna funkcija normalne porazdelitve.



Slika 2.6: Grafi normalne porazdelitve s pozitivno in negativno asimetričnostjo.

## 2.4 Normalna porazdelitev

Normalna porazdelitev je ena izmed najpomembnejših verjetnostnih porazdelitev v statistiki in se pogosto uporablja pri modeliranju različnih naravnih in družbenih pojavov. Gostotna funkcija normalne porazdelitve je podana z naslednjo enačbo:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}},$$

kjer je  $\mu$  povprečje (aritmetična sredina) in  $\sigma$  standardni odklon. Graf normalne porazdelitve je zvonaste oblike in simetričen glede na povprečje  $\mu$ .

### 2.4.1 Asimetričnost (skewness)

Asimetričnost meri, kako je porazdelitev nagnjena v levo ali desno. Normalna porazdelitev je popolnoma simetrična in ima koeficient asimetričnosti  $k = 0$ . Vendar pa v realnih podatkih pogosto srečamo porazdelitve, ki niso povsem simetrične:

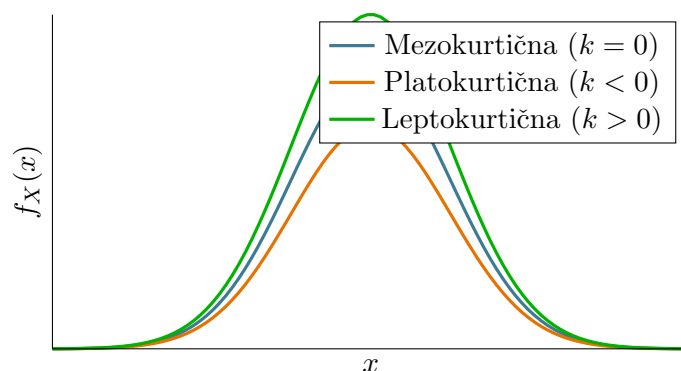
- Negativna asimetričnost (v levo,  $k < 0$ ): Rep porazdelitve je daljši na levi strani.
- Pozitivna asimetričnost (v desno,  $k > 0$ ): Rep porazdelitve je daljši na desni strani.

Če je  $k$  med -1 in 1, se porazdelitev še vedno lahko šteje za normalno.

### 2.4.2 Sploščenost (kurtosis)

Sploščenost meri, kako visoka in ostra je konica porazdelitve v primerjavi z normalno porazdelitvijo:





Slika 2.7: Grafi normalne porazdelitve s pozitivno in negativno sploščenostjo.

- Leptokurtična ( $k > 0$ ): Porazdelitev ima ožjo in višjo konico ter debelejšše repe.
- Mezokurtična ( $k = 0$ ): Porazdelitev je normalno zvonaste oblike.
- Platokurtična ( $k < 0$ ): Porazdelitev ima ploščato konico in tanjše repe.

Če je  $k$  med -1 in 1, se porazdelitev še vedno lahko šteje za normalno.

## 2.5 Rangiranje

Rangiranje vključuje razvrščanje podatkovnih točk v naraščajočem ali padajočem vrstnem redu. Rang določene vrednosti v podatkovnem naboru je njeno mesto v tem vrstnem redu. Rangiranje je uporabno za prepoznavanje relativnega položaja podatkovne točke znotraj nabora podatkov.

**Primer:**

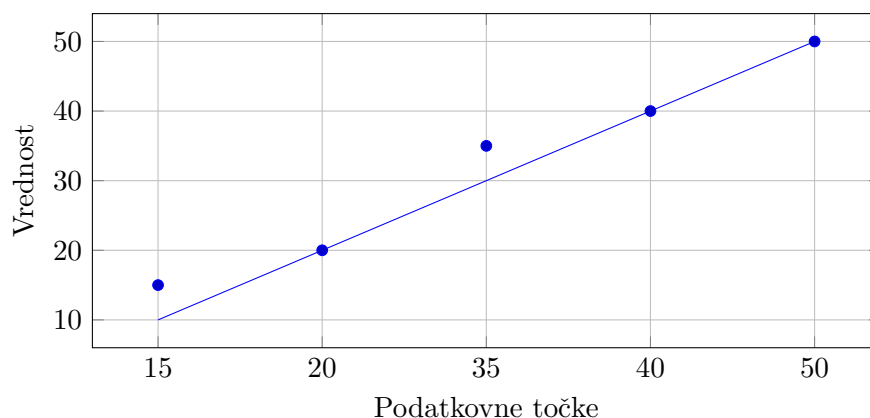
- Podatkovni niz: 45, 32, 67, 23, 89, 56
- Urejeni podatkovni niz: 23, 32, 45, 56, 67, 89
- Rangiranje:
  - 23 ima rang 1
  - 32 ima rang 2
  - 45 ima rang 3
  - 56 ima rang 4
  - 67 ima rang 5
  - 89 ima rang 6

### 2.5.1 Kvantili

Kvantili so vrednosti, ki delijo urejen niz podatkov na enake dele. Najpogosteje uporabljeni kvantili so kvartili, decili in percentili.

**Kvartili:** Kvartili delijo podatkovni niz na štiri enake dele:

- Prvi kvartil ( $Q_1$ ): 25. percentil
- Drugi kvartil ( $Q_2$ ): 50. percentil (median)
- Tretji kvartil ( $Q_3$ ): 75. percentil



Slika 2.8: Prikaz podatkovnega niza in kvantilov.

**Decili:** Decili delijo podatkovni niz na deset enakih delov:

- Prvi decil ( $D_1$ ): 10. percentil
- Drugi decil ( $D_2$ ): 20. percentil
- Tretji decil ( $D_3$ ): 30. percentil
- itd.

**Percentili:** Percentili delijo podatkovni niz na sto enakih delov:

- 10. percentil: vrednost pod katero leži 10% podatkov
- 50. percentil: vrednost pod katero leži 50% podatkov (median)
- 90. percentil: vrednost pod katero leži 90% podatkov

**Primer:** Podatkovni niz: 15, 20, 35, 40, 50

- $Q_1$  (25. percentil):  $20 + 0.25 \times (35 - 20) = 23.75$
- $Q_2$  (50. percentil): Median = 35
- $Q_3$  (75. percentil):  $35 + 0.75 \times (50 - 35) = 46.25$

## 2.6 Mere centralne tendence

- **Modus** - vrednost, ki se najpogosteje pojavi v nizu vrednosti podatkov
- **Mediana** - vrednost, ki ločuje zgornjo polovico obsega razpona vrednosti od spodnje polovice
- **Aritmetična sredina** - povprečje niza vrednosti
- Druge mere (geometrijska, harmonična sredina, ...)

Primerjava med modusom, mediano in aritmetično za unimodalne asimetrične - slika

## 2.7 Mere variabilnosti (disperzije)

V kolikšni meri se vrednosti razlikujejo med seboj ter razlikujejo in odstopajo od povprečja. Delimo jih na:

- Absolutne mere (razpon, interkvartilni rang, absolutna deviacija aritmetične sredine/mediane, varianca in standardni odklon)
- Relativne mere (absolutne mere deljene s pripadajočo mero centralne tendence) se izračunajo samo za razmernostne spremenljivke; uporabljamo jih, ko želimo primerjati:
  - Dve porazdelitvi z zelo različno vrednostjo za nek mero centralne tendence;
  - Dve spremenljivki z različnima merskima enotama.

### Razpon

Absolutni razpon

$$R_{abs} = x_{max} - x_{min}$$

Relativni razpon

$$R_{rel} = \frac{2(x_{max} - x_{min})}{x_{max} + x_{min}}$$

### Interkvartilni rang

$$IQR = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$$

### Absolutna deviacija mediane/aritmetične sredine

$$AD_{Me, \mu} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |x_i - Me, \mu|$$

### Varianca in standardni odklon

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \mu)^2$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

### Variabilnost normalne porazdelitve

Slika naslednjega

- 68,3% enot je znotraj enega standardnega odklona od povprečja  $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$
- 95,4% enot je znotraj dveh standardnih odklonov od povprečja  $[\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]$
- 99,7% enot je znotraj treh standardnih odklonov od povprečja  $[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$

## Standardizacija

$$z_i = \frac{x_i - \mu_X}{\sigma_X}$$

Rezultat je standardizirana spremenljivka  $Z$ , kjer standardizirane vrednosti  $z_i$  predstavljajo relativna odstopanja od aritmetične sredine. Standardizacija nam omogoča primerjavo vrednosti različnih spremenljivk, ki praviloma niso primerljive.

Primer primerjave teže in višine dojenčkov, kjer standardiziramo glede na spol.

Dojenček	Spol	Teža (kg)	$\mu_X$ (kg)	$\sigma_X$ (kg)	$z_i$
1	Moški	3.5	3.4	0.5	$z_1 = \frac{3.5-3.4}{0.5} = 0.2$
2	Ženski	3.0	3.2	0.4	$z_2 = \frac{3.0-3.2}{0.4} = -0.5$
3	Moški	4.0	3.4	0.5	$z_3 = \frac{4.0-3.4}{0.5} = 1.2$
4	Ženski	2.8	3.2	0.4	$z_4 = \frac{2.8-3.2}{0.4} = -1.0$

Tabela 2.2: Standardizacija teže dojenčkov glede na spol.

## Vaja 1

Učence smo testirali v znanju matematike in dosegli so naslednje rezultate:

20 17 25 20 12 25 18 16 25  
 17 21 22 22 16 17 22 20 19 16  
 24 20 15 14 23 15 19 21 26  
 18 29 30 20 16 12 24 30 27 25  
 15 25 24 23 26 21

1. Poišči rezultat z rangom 8 (od najslabšega).
2. Koliko % učencev je doseglo več kot 22 točk?
3. Kateri rezultat (ali rezultati) se najpogosteje pojavlja?
4. Rezultate testiranja razvrsti v frekvenčno porazdelitev.
5. Podatke prikaži grafično.

## Vaja 2

Skupino desetih učencev smo testirali s psihodiagnostičnim testom in dobili naslednje rezultate:

17 26 22 15 18 27 16 20 18 24

1. Izračunaj kvartile.
2. Določi kvantilni rang vrednosti  $x = 22.50$ .
3. Določi kvantilni rang rezultata  $x = 22.00$ .

## Vaja 3

Na eni izmed avtošol smo se pozanimali, Koliko ur vožnje so kandidati potrebovali, preden so uspešno opravili vozniški izpit. Izračunaj aritmetično sredino, varianco in standardni odklon.

## 2.8 Inferenčna statistika

Metode sklepanja iz vzorca na populacijo. Uporabljamo teorijo verjetnosti, da ocenimo, koliko lahko zaupamo rezultatom, pridobljenim na verjetnostnem vzorcu.

### Vzorčenje

Je postopek izbire dela populacije, ki jo vključimo v raziskavo. Enote, ki so že izbrane pogosto ne vračamo v populacijo, če pa je velikost vzorca majhna, lahko to naredimo.

### Metode vzorčenja

- **Verjetnostni vzorci:** Vsaka enota v populaciji ima znano neničelno verjetnost, da bo vključena v vzorec.
  - *Enostavno slučajno vzorčenje:* Vsaka enota ima enako in znano verjetnost izbire, ki ni enaka nič, notej so vsi možni vzorci enako verjetni. Primer: Z računalnikom naključno ustvarimo vzorec 100 dijakov, vpisanih na neko šolo v šolskem leti 2025/26 na podlagi seznama dijakov.
  - *Sistematično vzorčenje:* Iz vzorčnega okvirja vzamemo vsako  $k$ -to enoto. Vsaka enota ima enako verjetnost, da je izbrana v populacijo, toda vsi vzorci niso enako verjetni (npr. ne moremo hkrati izbrati četrte in pete enote, torej vzorčenje ni enostavno). Primer: Na podlagi seznama dijakov šole, ki je urejen po abecedi izberemo vsako deseto enoto. Naključno izberemo le prvo enoto npr. 2 in nadaljujemo z 12, 22, ....
  - *Stratificirano vzorčenje:* Populacijo stratificiramo na podlagi vnaprej znanih informacij in nato izvedemo vzorčenje za vsak stratum posebej. Primer: Če ima šola 70% dijakov in 30% dijakinj, lahko vzamemo v vzorec enote proporcionalno glede na spol.
  - *Vzorčenje v skupinah:* Enote v populaciji so pogosto združene v skupinah, npr. učenci v razrede, razredi v šole, šole v države, itd. Tako lahko najprej izberemo vzorec skupin (npr. razredov) in naprej na temu vzorcu vzorčimo naprej. Primer: Na univerzi izberemo 5 od 15 programov in za vsakega od teh slučajno izberemo vzorec 100 študentov.
- **Neverjetnostni vzorci:** Verjetnosti izbir ne moremo izračunati.
  - *Priložnostni vzorci:* Primer: Državljanom pošljemo 1 milijon vprašalnikov. (slabo)
  - *Ekspertna izbira:* Vzorec, ki naj bi bil reprezentativen izbire strokovnjak področja raziskave.
  - *Kvotno vzorčenje:* Primer: Med vzorčenjem nadziramo demografske značilnosti vzorca.

Nauk: Velikost vzorca ni vse. Pomembnejša je njegova reprezentativnost. V idealni situaciji bi uporabljali verjetnostno vzorčenje. Ko to ni možno, je kvotno vzorčenje boljša izbira kot priložnostno.

Natančnost in točnost s sliko. (precision, accuracy)

### Velikost vzorca

Standardna napaka statistike je odvisna od velikosti vzorca.

Velikost vzorca za ocenjevanje aritmetične sredine navadno zahtevamo:

$$n > \left( \frac{z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma}{E} \right)^2,$$

kjer  $E$  označuje smiselno razliko med opazovanimi vrednostmi (navadno 1)  
nekeje nekeje statistika

## Intervali zaupanja

Parametre lahko ocenimo točkovno ali z intervalom. Intervali zaupanja kažejo na točnost ocene in podajo informacijo o njeni zanesljivosti.

S tveganjem  $\alpha$  lahko rečemo, da interval  $(a, b)$  vsebuje parameter  $\gamma$ .

Slika normalne.

Širina intervala zaupanja je odvisna od:

- *Stopnje tveganja*: Višja je stopnja tveganja  $\alpha$ , ožji je interval
- *Velikosti vzorca*: Večja je velikost vzorca  $n$ , ožji je interval.

## Testiranje hipotez

Znanstvena metoda:

1. Opazovanje pojava
2. Postavljanje raziskovalnih vprašanj
3. Oblikovanje hipotez
4. Zbiranje podatkov
5. Sprejemanje hipotez in razvoj teorij in zakonitosti

Primer: Raziskovalno vprašanje: Ali obstajajo razlike med spoloma v matematični anksioznosti?

Hipoteza: Ženske imajo več matematične anksionosti kot moški ( $H_0 : \mu_z - \mu_m > 0$ ).

Opomba: Hipoteza je vedno trditev, ki jo lahko poskušamo zavrniti. Hipoteza ni potrjena in tehnično ni pravilno reči, da je hipoteza sprejeta. Hipotezo lahko ali zavrnemo ali ne zavrnemo.

Ničelno hipotezo  $H_0$  lahko neposredno preverimo in če je zavrnjena, je alternativna hipoteza pravilna (to je običajno naš cilj)

Alternativno hipotezo  $H_1$  preverimo le posredno: če ničelne hipoteze ne moremo zavrniti, ničelne hipoteze ne sprejmemo, ampak sklenemo, da ni dovolj podatkov, da bi rekli, ali je razlika statistično pomembna

Primer: Ničelna hipoteza: Med ženskami in moškimi ni razlike v sposobnosti večopravilnosti. Alternativna hipoteza: Obstajajo razlike v sposobnosti večopravilnosti med ženskami in moškimi (dvostranski test). Alternativna hipoteza: Ženske so boljše pri večopravilnosti kot moški (enostransko testiranje)

V statistiki ločimo med dvema vrstama napak, ki ju lahko naredimo pri testiranju hipotez:

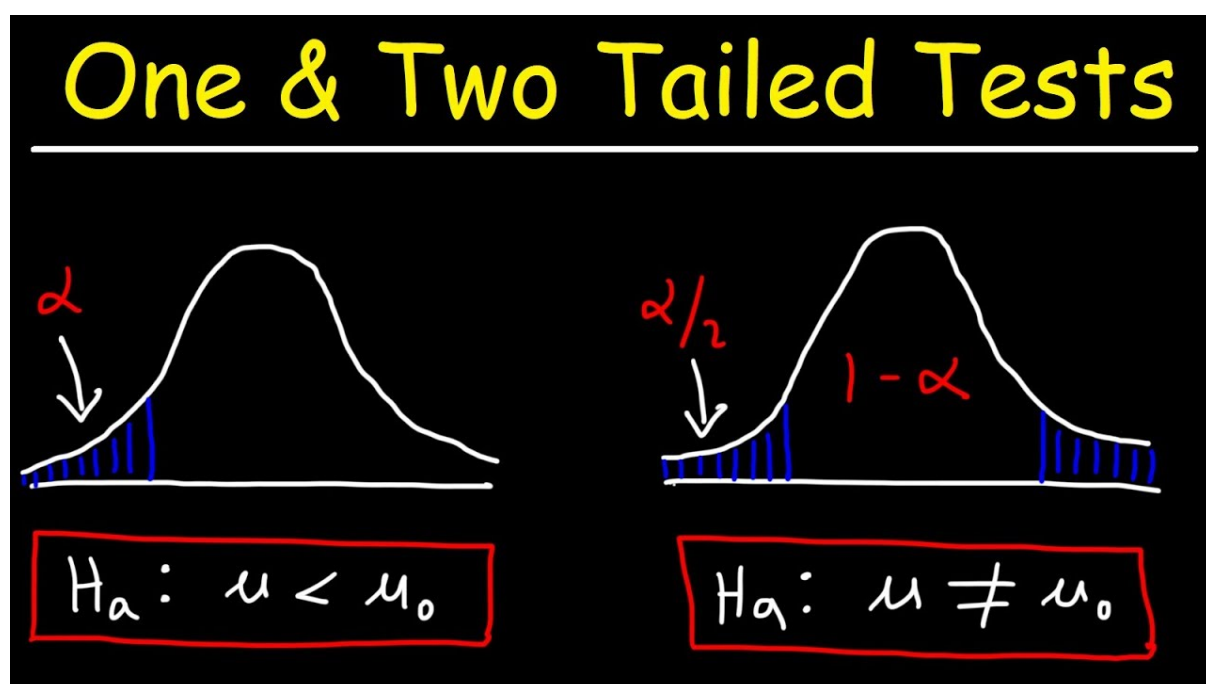
- **Napaka prve vrste ( $\alpha$ -napaka)**: To je napaka, ki jo naredimo, ko zavrnemo ničelno hipotezo ( $H_0$ ), čeprav je v resnici resnična. Gre torej za "lažno pozitivni" rezultat. Verjetnost, da se zgodi napaka prve vrste, imenujemo raven značilnosti  $\alpha$ , ki je običajno nastavljena na 0,05 ali 5 %. To pomeni, da obstaja 5-odstotna možnost, da napačno zavrnemo resnično ničelno hipotezo.

- **Napaka druge vrste ( $\beta$ -napaka):** To je napaka, ki jo naredimo, ko ne zavrnemo ničelne hipoteze ( $H_0$ ), čeprav je v resnici napačna. Gre za "lažno negativni" rezultat. Verjetnost, da se zgodi napaka druge vrste, označujemo z  $\beta$ . Komplement te verjetnosti ( $1 - \beta$ ) predstavlja moč testa, ki je verjetnost, da bomo pravilno zavrnili napačno ničelno hipotezo.

V praksi se moramo zavedati, da je zmanjšanje verjetnosti ene vrste napake običajno povezano s povečanjem verjetnosti druge vrste napake, zato je pomembno, da testiranje hipotez izvedemo premišljeno in uravnotežimo tveganja za obe vrsti napak.

### Stopnja značilnosti

Izberemo največjo verjetnost  $\alpha$  stopnjo, do katere smo pripravljeni tvegati napako tipa I. Običajno se odločimo za 5% stopnjo značilnosti ( $\alpha = 0.05$ ), lahko pa je tudi 1% ( $\alpha = 0.01$ ) ali nižja. Na podlagi izbranega  $\alpha$  določimo kritično območje, kjer bo ničelna hipoteza zavrnjena. Pri tem upoštevamo, ali gre za dvostranski ali enostranski test



Slika 2.9: This is a caption for the figure.

### Studentova $t$ porazdelitev

Razpršenost je odvisna od tako imenovanih prostostnih stopenj (*angl. degrees of freedom, df*), ki so opredeljene kot velikost vzorca minus število parametrov populacije, ki jih je treba oceniti na podlagi vzorca.

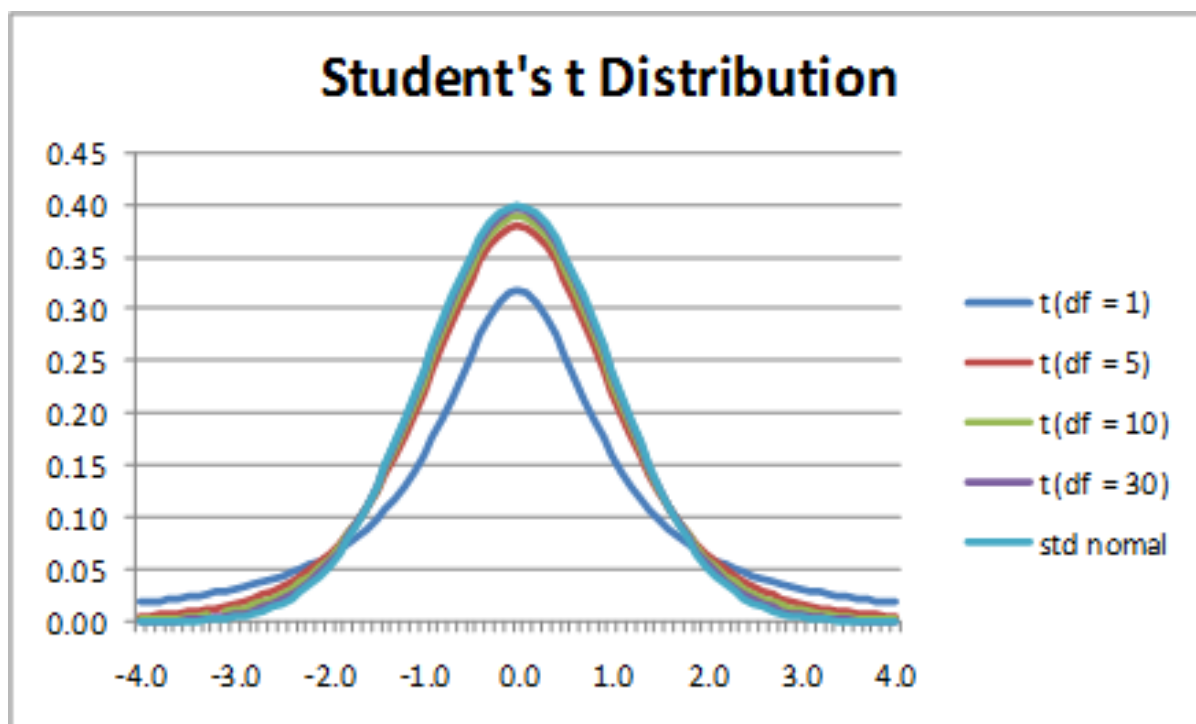
Večji kot je vzorec, bližje je  $t$  porazdelitev normalni  $Z$  porazdelitvi

### $T$ test za en vzorec

Primerjava povprečja na vzorcu z določeno vrednostjo (npr. populacijskim parametrom ali nevtralno točko na lestvici)

$$t = \frac{\text{mean} - \text{comparison}}{\text{standarderror}}$$

Predpostavke:



Slika 2.10: This is a caption for the figure.

- Slučajno vzorčenje, neodvisni vzorci
- Normalna porazdelitev podatkov (če je  $N < 30$ )

Primer: Ali se študenti pri preizkusu odrežejo bolje od naključja?

28 študentov je opravilo test s 100 vprašanji o besedilu, ki ga niso prebrali.

Vsako vprašanje je imelo 5 možnih odgovorov, zato bi pri povsem naključni izbiri pričakovali, da bo pravilno izbranih 20 postavk.

Vendar so v povprečju pravilno odgovorili na 46,57 vprašanj. S t-testom za en vzorec (angl. one-sample t-test) pokažemo, da so se študenti odrezali statistično značilno bolje od naključja ( $M = 46.57, t(27) = 20.6, p < 0.001$ ).

### Vaja 1

Izbrali smo vzorec šestnajstih otrok in jih stehtali. Določi interval zaupanja za pravo vrednost aritmetične sredine s 5% tveganja.

X: 35 37 29 26 31 32 28 40 27 33 33 34 31 30 29 38

### Vaja 2

Imamo podatke za vzorec učencev o tem, koliko ur tedensko porabijo za učenje doma. 78 jih je odgovorilo, da se pripravljajo na pouk 2 do 3 ure tedensko, 125 s jih uči 3 do 4 ure na teden, 103 se učijo vsak teden več kot 4 ure. Določi odstotek tistih učencev, ki tedensko posvečajo učenju najmanj časa in oceni ta odstotek v osnovni množici (z 1% tveganjem).

### Vaja 3



Učitelja matematike zanima, ali je povprečno število točk njegovih učencev na preizkusu znanja višje od nacionalnega povprečja, ki je 75. Izračunajte vrednost  $t$ -statistike pri stopnji tveganja 5%, določite kritično območje in sklepajte o rezultati za naslednje podatke:

Za sodelovanje v raziskavi je bil izbran vzorec 25 učencev.

Povprečna ocena iz matematičnega izpita v vzorcu je 80.

Standardni odklon v vzorcu je 6.

#### Vaja 4

Želimo določiti minimalno velikost vzorca za pilotno študijo novega izobraževalnega programa. Standardni odklon učinka programa na bralne sposobnosti je 3 točke. Želite imeti 95% stopnjo zaupanja, da bo vaša ocena učinka natančna. Izračunajte minimalno velikost vzorca.



## Poglavje 3

# Bivariantna analiza

### 3.1 T-test

#### 3.1.1 T-test za (parne) odvisne vzorce

Primerjava povprečij dveh pogojev, v katerih so sodelovale iste enote.

Primer: 20 študentov je dobilo test v izpolnjevanje pred študijem določenega predmeta in nato ponovno po zaključku tega predmeta.

Testna statistika  $t = \frac{\bar{d}}{SE(\bar{d})}$ .

Izračun:

1. Postavimo ničelno in alternativno hipotezo:
  - $H_0$ : Ni razlik v znanju študentov pred in po študiju tega modula.
  - $H_1$ : Obstajajo razlike v znanju študentov pred in po študiju tega modula.
2. Izračunamo razlike med pari opazovanj:  $d_i = y_i - x_i$  (za vajo lahko to naredimo v SPSS).
3. Izračunamo povprečje razlik:  $\bar{d}$ .
4. Standardni odklon razlik:  $s_d$ .
5. Standardna napaka povprečne razlike:  $SE(\bar{d}) = \frac{s_d}{\sqrt{n}}$ .
6. T-statistika:  $t = \frac{\bar{d}}{SE(\bar{d})}$  (empirična vrednost);  $df = n - 1$ .
7. V tabeli poiščemo kritično vrednost pri  $\alpha = 5\%$ .
8. Empirična vrednost  $t$  pade v kritično območje, ki ga določa teoretična vrednost  $t$  pri dani stopnji zaupanja, zato lahko zavrnilo ničelno hipotezo in sprejmemo alternativno. Napiši kaj, če ne pade v kritično območje!
9. Interval zaupanja za resnično vrednost razlike povprečij je:

$$\bar{d} \pm (t \cdot SE(\bar{d}))$$

#### 3.1.2 T-test za neodvisne vzorce

Primerjava preizkusa domneve o srednjih vrednostih dveh skupin enot.

Primer: Primerjava kalorične vrednosti dveh vrst štrudlja.

Testna statistika  $t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{SE(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)}$ .

Opomba: Test predpostavi enakost varianc neodvisnih vzorcev. Če to ni zagotovljeno, uporabimo Welchov test  $t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$ .

Izračun:

1. Postavimo ničelno in alternativno hipotezo:

- $H_0$ : Ni razlik v kalorični vsebnosti med dvema vrstama hotdoga.
- $H_1$ : So razlike v kalorični vsebnosti med dvema vrstama hotdoga.

2. Razlika med povprečnima vrednostima:  $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$ .

3. Skupni standardni odklon (pod predpostavko enakih varianc):

$$s_p = \sqrt{\frac{(n_1 - 1) \cdot s_1^2 + (n_2 - 1) \cdot s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}$$

4. Standardna napaka:

$$SE(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) = s_p \cdot \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$$

5. Empirična t-vrednost:

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{SE(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)}$$

6. Prostostne stopnje:  $df = n_1 + n_2 - 2$ .

7. V tabeli poiščemo kritično vrednost pri  $\alpha = 5\%$ .

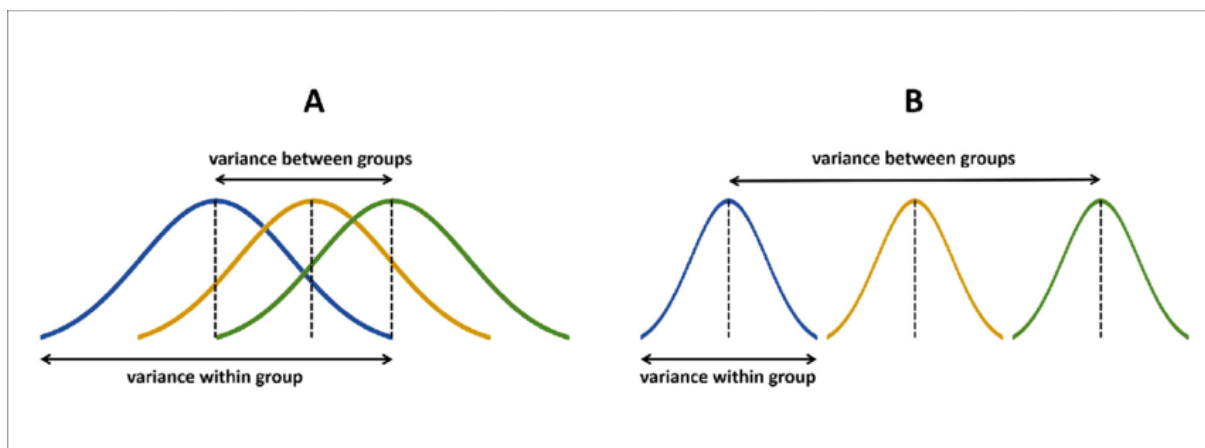
8. Interval zaupanja za resnično vrednost razlike povprečij:

$$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 \pm (t \cdot SE(\bar{x}_1 - \bar{x}_2))$$

## 3.2 Analiza variance (ANOVA)

Primerjava povprečij večih skupin (če sta samo dve skupini, je ANOVA enaka T testu).

$F$  porazdelitev ima dve prostorski skopnji.



Slika 3.1: This is a caption for the figure.

Primer: Tri skupine desetih slučajno izbranih študentov so postavljene v tri različne učilnice. A ima konstantno glasbo v ozadju, B variabilno glasbo v ozadju, C brez glasbe. Po enem mesecu nas zanima, ali glasba pomaga pri učenju.

Izračun:

1. Postavimo ničelno in alternativno hipotezo:

- $H_0$ : Med skupinami ni razlik v vsrkavanju informacij.
  - $H_1$ : Med skupinami so razlike v vsrkavanju informacij.
2. Izračunamo povprečja. Skupno povprečje je  $\bar{x} = 5,1$ , povprečja posameznih skupin pa so  $\bar{x}_1 = 7$ ,  $\bar{x}_2 = 4$ , in  $\bar{x}_3 = 4,3$ .
  3. Vsota kvadratov:
    - Med skupinami:  $SS_{between} = 54,6$
    - Znotraj skupin:  $SS_{within} = 90,1$
  4. Prostostne stopnje:
    - Med skupinami:  $df_{between} = 2$
    - Znotraj skupin:  $df_{within} = 27$
  5. Povprečni kvadrat:
    - Med skupinami:  $MS_{between} = \frac{SS_{between}}{df_{between}} = \frac{54,6}{2} = 27,3$
    - Znotraj skupin:  $MS_{within} = \frac{SS_{within}}{df_{within}} = \frac{90,1}{27} = 3,34$
  6. Empirična F-vrednost:
 
$$F = \frac{MS_{between}}{MS_{within}} = \frac{27,3}{3,34} = 8,18$$
  7. V tabeli poiščemo kritično vrednost pri  $\alpha = 5\%$ :  $F_{critical} = 2,03$ .
  8. Ker je empirična F-vrednost (8,18) večja od kritične vrednosti (2,03), zavrnilo ničelno hipotezo  $H_0$ .
  9. Izračunamo eta kvadrat ( $\eta^2$ ), ki je merilo učinka:

$$\eta^2 = \frac{SS_{between}}{SS_{between} + SS_{within}} = \frac{54,6}{54,6 + 90,1} = 0,38$$

$$\eta = \sqrt{\eta^2} = \sqrt{0,38} \approx 0,62$$

### 3.3 Neparametrične alternative

Če podatki niso normalno porazdeljeni, moramo parametrični test zamenjati z ustreznim neparametričnim testom.

Cilj	Parametrični test	Neparametrični test
Testiranje razlike med dvema odvisnima nizoma enot	Odvisni $t$ -test	Wilcoxon test predznačen
Testiranje razlike med dvema neodvisnima nizoma enot	Neodvisni $t$ -test	Mann-Whitney $U$ test
Testiranje razlike med tremi ali več neodvisnimi nizi enot	ANOVA	Kruskal-Wallis $H$ test

Tabela 3.1: Pregled parametričnih in neparametričnih testov

#### 3.3.1 Hi-kvadrat test

Uporablja se za ugotavljanje, ali obstaja statistično značilna razlika med pričakovanimi in opazovanimi frekvencami v eni ali več kategorijah (torej če imamo nominalne spremenljivke)

Ničelna hipoteza  $H_0$ : V populaciji ni povezanosti med spremenljivkama.

Slika hi kvadrat porazdelitve

**Izračunavanje stopnje prostosti ( $df$ ):** Stopnja prostosti ( $df$ ) za hi-kvadrat test se izračuna po formuli:

$$df = (\text{vrstice} - 1) \cdot (\text{stolpci} - 1)$$

**Postopek izračuna:**

1. Zberemo podatke in uredimo frekvence v kontingenčni tabeli.
2. Izračunamo pričakovane frekvence za vsako celico tabele.
3. Uporabimo formulo za hi-kvadrat vrednost:

$$\chi^2 = \sum \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$$

kjer je  $O_i$  opazovana frekvenca,  $E_i$  pa pričakovana frekvenca.

**Uporaba kontingenčnih koeficientov:** Ker vrednosti hi-kvadrat same po sebi niso primerljive med različnimi tabelami, pogosto uporabimo kontingenčne koeficiente, kot je Cramérjev  $V$ , ki ga izračunamo po formuli:

$$V = \sqrt{\frac{\chi^2}{N \cdot (k - 1)}},$$

kjer je  $\chi^2$  hi-kvadrat vrednost,  $N$  skupno število opazovanj,  $k$  pa število kategorij v najbolj številni spremenljivki.

### 3.3.2 Spearmanov koeficient

Spearmanov koeficient korelacije meri moč in smer monotone povezave med dvema spremenljivkama. Uporablja se za ordinalne spremenljivke ali za kvantitativne spremenljivke, ki niso nujno normalno porazdeljene.

**Ničelna hipoteza  $H_0$ :** Med dvema spremenljivkama ni monotone povezave.

**Formula:** Spearmanov koeficient ( $\rho$ ) se izračuna po formuli:

$$\rho = 1 - \frac{6 \sum d_i^2}{n(n^2 - 1)},$$

kjer je  $d_i$  razlika med vrstnimi številkami vsakega opazovanja in  $n$  število opazovanj.

**Postopek izračuna:**

1. Razvrstimo podatke v naraščajočem vrstnem redu za vsako spremenljivko.
2. Izračunamo vrstne številke za vsako spremenljivko.
3. Izračunamo razlike med vrstnimi številkami ( $d_i$ ) za vsako opazovanje.
4. Uporabimo zgornjo formulo za izračun Spearmanovega koeficienta.

**Interpretacija:** Spearmanov koeficient se giblje med -1 in 1. Vrednost blizu 1 kaže na močno pozitivno monotono povezavo, vrednost blizu -1 kaže na močno negativno monotono povezavo, vrednost blizu 0 pa kaže na odsotnost monotone povezave.

**Zaključek:** Spearmanov koeficient je uporaben za analizo povezav med ordinalnimi ali kvantitativnimi spremenljivkami, ki niso normalno porazdeljene. Pomaga nam razumeti moč in smer monotone povezave med spremenljivkami.

### 3.3.3 Pearsonov koeficient

Pearsonov koeficient korelacije meri linearno povezanost med dvema kvantitativnima spremenljivkama. Uporablja se za intervalne ali razmerne spremenljivke, ki so normalno porazdeljene.

**Ničelna hipoteza  $H_0$ :** Med dvema spremenljivkama ni linearne povezave.

**Formula:** Pearsonov koeficient ( $r$ ) se izračuna po formuli:

$$r = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum (x_i - \bar{x})^2 \sum (y_i - \bar{y})^2}},$$

kjer je  $x_i$  in  $y_i$  vsaka opazovanja za spremenljivki  $x$  in  $y$ ,  $\bar{x}$  in  $\bar{y}$  pa povprečji za spremenljivki  $x$  in  $y$ .

**Postopek izračuna:**

1. Izračunamo povprečje za vsako spremenljivko.
2. Izračunamo odstopanja vsakega opazovanja od povprečja.
3. Pomnožimo odstopanja za ustrezna opazovanja in izračunamo vsoto.
4. Izračunamo kvadrate odstopanj za vsako spremenljivko in vsoto kvadratov.
5. Uporabimo zgornjo formulo za izračun Pearsonovega koeficienta.

**Interpretacija:** Pearsonov koeficient se giblje med -1 in 1. Vrednost blizu 1 kaže na močno pozitivno linearno povezavo, vrednost blizu -1 kaže na močno negativno linearno povezavo, vrednost blizu 0 pa kaže na odsotnost linearne povezave.

## 3.4 Povezanost

Povezanost med dvema spremenljivkama pomeni, da spremembe v eni spremenljivki sovpadajo s spremembami v drugi spremenljivki. Povezanost lahko merimo na različne načine, odvisno od narave spremenljivk in vrste povezave.

### Funkcionalna povezanost

Funkcionalna povezanost pomeni, da obstaja točno določena matematična funkcija, ki povezuje dve spremenljivki. Na primer, če  $y = f(x)$ , potem je  $y$  popolnoma določeno s  $x$ . To je najmočnejša oblika povezanosti, saj vsaka vrednost ene spremenljivke določa točno eno vrednost druge spremenljivke.

### Korelacijska povezanost

Korelacijska povezanost meri stopnjo in smer linearne povezave med dvema kvantitativnima spremenljivkama. Najpogosteje uporabljamo Pearsonov koeficient korelacije ( $r$ ), ki meri linearno povezanost, in Spearmanov koeficient korelacije ( $\rho$ ), ki meri monotono povezanost.

### Močna in šibka povezanost

Moč povezanosti se nanaša na velikost koeficienta korelacije.

- **Močna povezanost:** Koeficient korelacije blizu 1 ali -1 kaže na močno povezanost.
- **Šibka povezanost:** Koeficient korelacije blizu 0 kaže na šibko povezanost.

### Linearna in nelinearna povezanost

- **Linearna povezanost:** Povezanost, kjer lahko povezavo med spremenljivkama najbolj opišemo z ravno črto. Pearsonov koeficient korelacije ( $r$ ) je primeren za merjenje linearne povezanosti.
- **Nelinearna povezanost:** Povezanost, kjer je povezava med spremenljivkama bolj zapletena in je ni mogoče opisati z ravno črto. Spearmanov koeficient korelacije ( $\rho$ ) je primeren za merjenje monotone (nelinearne) povezanosti.

### Pozitivna in negativna povezanost

- **Pozitivna povezanost:** Ko se ena spremenljivka povečuje, se druga spremenljivka tudi povečuje. Koeficient korelacije je pozitiven.
- **Negativna povezanost:** Ko se ena spremenljivka povečuje, se druga spremenljivka zmanjšuje. Koeficient korelacije je negativen.

#### 3.4.1 Kovarianca

Kovarianca je mera, ki opisuje, kako se dve spremenljivki sočasno spreminjata. Pozitivna kovarianca pomeni, da se večje vrednosti ene spremenljivke povezujejo z večjimi vrednostmi druge spremenljivke, medtem ko negativna kovarianca pomeni, da se večje vrednosti ene spremenljivke povezujejo z manjšimi vrednostmi druge spremenljivke.

**Formula** Kovarianca dveh spremenljivk  $X$  in  $Y$  se izračuna po formuli:

$$\text{Cov}(X, Y) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y}),$$

kjer:

- $X_i$  in  $Y_i$  sta posamezni opazovanji spremenljivk  $X$  in  $Y$ ,
- $\bar{X}$  in  $\bar{Y}$  sta povprečji spremenljivk  $X$  in  $Y$ ,
- $n$  je število opazovanj.

### Interpretacija

- **Pozitivna kovarianca:** Ko se vrednosti ene spremenljivke povečujejo, se povečujejo tudi vrednosti druge spremenljivke.
- **Negativna kovarianca:** Ko se vrednosti ene spremenljivke povečujejo, se vrednosti druge spremenljivke zmanjšujejo.
- **Kovarianca blizu nič:** Ni jasno izražene povezave med spremenljivkama.



**Razlika med kovarianco in korelacijo** Kovarianca meri le smer sočasnih sprememb dveh spremenljivk, vendar ni standardizirana, zato njena vrednost ni omejena. Po drugi strani pa je korelacija standardizirana mera, ki pove, kako močna in v katero smer je linearna povezava med dvema spremenljivkama, njena vrednost pa je vedno med -1 in 1.

### Vaja 1

V datoteki `data_cleaned.xlsx` določi naslednje:

- Ali obstaja povezava med matematično anksioznostjo in motivacijo za matematiko? Če je povezava znatna, določi še enačbo linearne regresije, kjer si sam izbereš odvisno in neodvisno spremenljivko.
- Ali obstaja povezava med spolom in anksioznostjo?
- Ali obstaja povezava med profesorjem in razredom?

Imej v mislih, da so kategorične spremenljivke v dokumentu kodirane označevalno.



## Poglavje 4

# Multivariantna statistika

Povezanost med spremenljivkama ne pomeni nujno, da med njima obstaja vzročna povezava. Spremenljivke so lahko povezane tudi navidezno, pri čemer se pojasni uvedba tretje spremenljivke (npr. poletni čas pojasni povezavo med napadi morskih psov in prodajo sladoleda).

### 4.1 Multipla regresijska analiza (linearna)

Multipla regresijska analiza je metoda za preučevanje razmerja med odvisno spremenljivko in dvema ali več neodvisnimi spremenljivkami. Namen je napovedovanje vrednosti odvisne spremenljivke z nizom neodvisnih spremenljivk.

Regresijski model je podan kot:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \dots + \beta_k X_k,$$

kjer je:

- $Y$  odvisna spremenljivka,
- $X_1, \dots, X_k$  neodvisne spremenljivke,
- $\beta_0$  presečišče (intercept),
- $\beta_1, \dots, \beta_k$  regresijski koeficienti, ki kažejo na spremembo v  $Y$  pri enotni spremembi  $X_i$ ,
- $\epsilon$  napaka modela.

**Izračun koeficientov  $\beta_i$**  Regresijski koeficienti  $\beta_i$  se izračunajo z metodo najmanjših kvadratov, ki minimizira vsoto kvadratov odstopanj predvidenih vrednosti od dejanskih vrednosti:

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y$$

kjer je  $X$  matrica neodvisnih spremenljivk,  $Y$  pa vektor odvisne spremenljivke.

**Koeficient determinacije  $R^2$**  Delež variabilnosti, ki ga model pojasni, je izražen z  $R^2$ , ki ga izračunamo kot:

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2}{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2},$$

kjer:

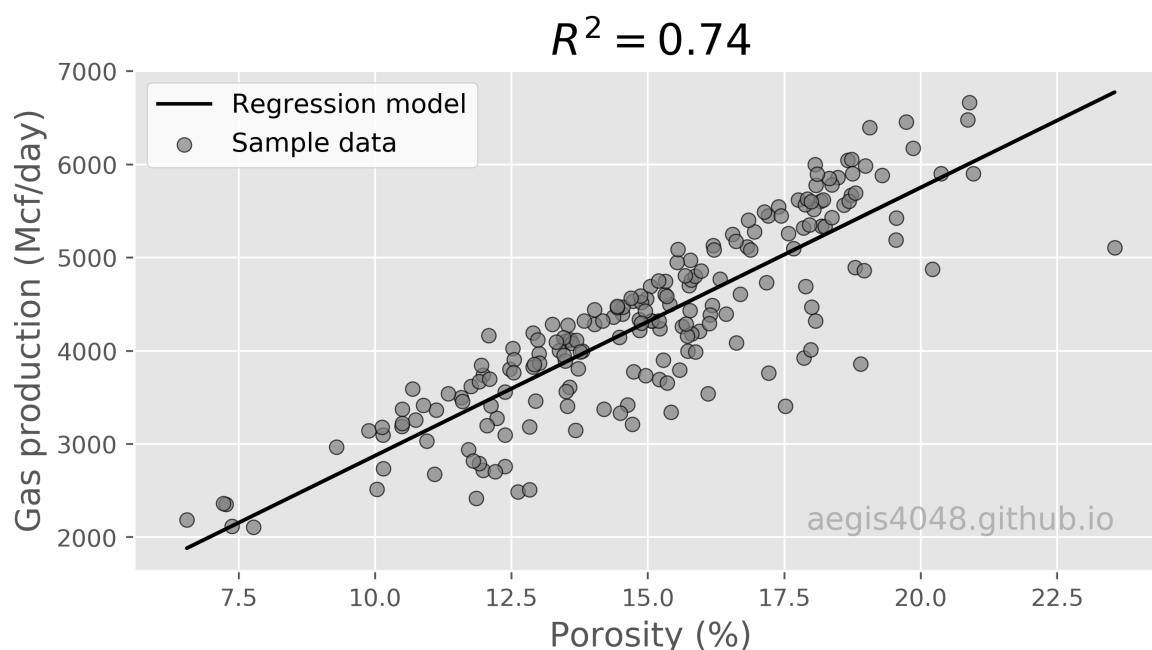
- $\hat{Y}_i$  so napovedane vrednosti odvisne spremenljivke,
- $Y_i$  so dejanske vrednosti odvisne spremenljivke,
- $\bar{Y}$  je povprečje odvisne spremenljivke.

$R^2$  meri delež skupne variabilnosti v odvisni spremenljivki, ki jo je mogoče pojasniti z regresijskim modelom. Vrednost  $R^2$  se giblje med 0 in 1, pri čemer 1 pomeni popolno prileganje modela podatkom.

Pomembno je, da velikost vzorca zadostuje za stabilnost ocenjenih koeficientov. Priporočeno je, da je velikost vzorca vsaj 10-krat večja od števila neodvisnih spremenljivk.

### Predpostavke multiple linearne regresije

- **Neodvisnost:** Opazovanja so neodvisna.
- **Normalnost:** Napake v regresijskem modelu so normalno porazdeljene.
- **Homoskedastičnost:** Variabilnost napak je konstantna pri vseh nivojih neodvisnih spremenljivk.
- **Linearnost:** Obstaja linearna povezava med odvisno in neodvisnimi spremenljivkami.



Slika 4.1: 2D regresijski model, ki ga bomo seveda spremenili v avtorsko delo.

## 4.2 Multipla regresijska analiza (logistična)

Logistična regresija se uporablja, kadar je odvisna spremenljivka nominalna (ali binarna). Namesto linearne funkcije se uporablja logistična funkcija, ki omogoča napovedovanje kategorije odvisne spremenljivke.

Logistični model je podan kot:

$$\text{logit}(p) = \log\left(\frac{p}{1-p}\right) = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \dots + \beta_k X_k,$$

kjer je  $p$  verjetnost, da se odvisna spremenljivka pojavi v določeni kategoriji.

**Izračun koeficientov  $\beta_i$**  Regresijski koeficienti  $\beta_i$  se izračunajo z metodo največjega verjetja (Maximum Likelihood Estimation, MLE), ki išče koeficiente, ki maksimizirajo verjetnost opazovanih podatkov glede na model.

**Interpretacija koeficientov  $\beta_i$**  Koeficient  $\beta_i$  predstavlja spremembo v  $\text{logit}(p)$  (logaritmu verjetnostnega razmerja) za enoto spremembe v  $X_i$ . Ekspontentiranje koeficientov daje t.i. *odds ratio* (razmerje verjetnosti):

$$\text{OR} = e^{\beta_i}$$

Odnos razmerja verjetnosti razlaga, kako se verjetnost pojavitve dogodka spremeni z enoto spremembe v  $X_i$ . Če je  $\text{OR} > 1$ , se verjetnost dogodka poveča, če je  $\text{OR} < 1$ , se verjetnost zmanjša.

**Pseudo- $R^2$**  Za oceno kakovosti prileganja modela se v logistični regresiji pogosto uporablja t.i. pseudo- $R^2$ . Ena izmed pogosto uporabljenih formul je McFaddenov pseudo- $R^2$ :

$$R_{\text{McFadden}}^2 = 1 - \frac{\log L_{\text{model}}}{\log L_{\text{null}}}$$

kjer je:

- $\log L_{\text{model}}$  logaritmična verjetnost ustreznosti modela,
- $\log L_{\text{null}}$  logaritmična verjetnost modela brez neodvisnih spremenljivk (samo z intercep-  
tom).

McFaddenov pseudo- $R^2$  se giblje med 0 in 1, pri čemer višje vrednosti nakazujejo boljše prileganje modela.

### Predpostavke logistične regresije

- **Neodvisnost opazovanj:** Vsako opazovanje mora biti neodvisno od drugih.
- **Neprekinjenost neodvisnih spremenljivk:** Neodvisne spremenljivke morajo biti kontinuirane ali binarne.
- **Linearnost logit transformacije:** Obstajati mora linearna povezava med  $\text{logit}(p)$  in neodvisnimi spremenljivkami.

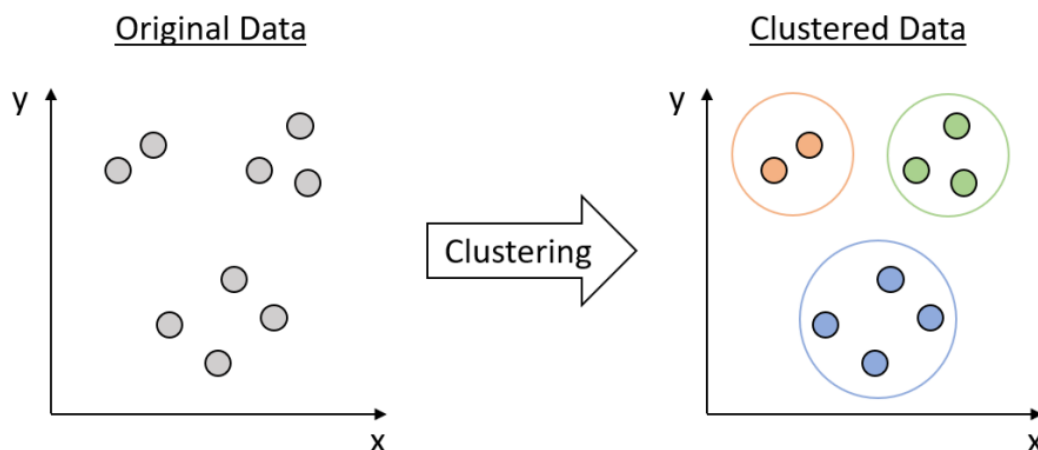
## 4.3 Razvrščanje v skupine (clustering)

Razvrščanje v skupine ali clustering je metoda za razdelitev podatkov v več homogenih skupin na podlagi podobnosti med posameznimi podatkovnimi točkami. Najpogostejše metode vključujejo *k-means*, *hierarhično razvrščanje* in *DBSCAN*.

**K-means clustering** *K-means* je ena najpogostejše uporabljenih metod za razvrščanje v skupine. Cilj algoritma je razdeliti podatke na  $k$  skupin tako, da se minimizira vsota kvadratov odstopanj podatkovnih točk od njihovega pripadajočega centroida (povprečne vrednosti v skupini). Algoritem iterativno prilagaja centriodi do konvergence:

$$\min \sum_{i=1}^k \sum_{x \in C_i} \|x - \mu_i\|^2,$$

kjer je  $C_i$  skupina in  $\mu_i$  centroid skupine  $i$ .



Slika 4.2: clustering, ki ga bomo seveda spremenili v avtorsko delo.

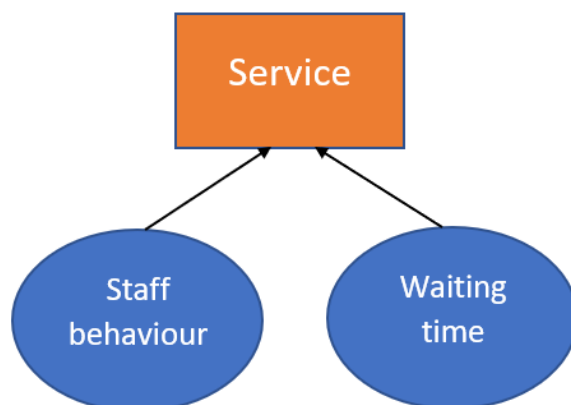
## 4.4 Metode zmanjšanja dimenzionalnosti podatkov

**Analiza glavnih komponent (PCA):** PCA je tehnika za zmanjšanje dimenzionalnosti podatkov, ki pretvori več povezanih spremenljivk v manj nepovezanih komponent. To omogoča lažjo vizualizacijo in analizo podatkov.

**Faktorska analiza:** Faktorska analiza identificira latentne spremenljivke ali faktorje, ki pojasnjujejo vzorce korelacij med opazovanimi spremenljivkami. Model faktorske analize predpostavlja, da vsako opazovano spremenljivko  $X_i$  lahko izrazimo kot linearno kombinacijo faktorjev  $F_j$  in napake  $\epsilon_i$ :

$$X_i = \lambda_{i1}F_1 + \lambda_{i2}F_2 + \dots + \lambda_{im}F_m + \epsilon_i,$$

kjer so  $\lambda_{ij}$  faktorski uteži, ki kažejo na vpliv faktorja  $F_j$  na spremenljivko  $X_i$ . Faktorska analiza se uporablja za zmanjšanje števila spremenljivk, hkrati pa ohranja interpretabilne latentne strukture.



Slika 4.3: faktorska analiza.

## 4.5 Analiza zanesljivosti

**Cronbachov  $\alpha$  koeficient:** Cronbachov  $\alpha$  koeficient je mera za notranjo konsistenco (zanesljivost) skale ali vprašalnika. Visoka vrednost  $\alpha$  (bližje 1) nakazuje na visoko zanesljivost skale.

### Formula za izračun Cronbachovega $\alpha$ koeficienta

Cronbachov  $\alpha$  se izračuna s pomočjo naslednje formule:

$$\alpha = \frac{k}{k-1} \left( 1 - \frac{\sum_{i=1}^k \sigma_i^2}{\sigma_{\text{skupaj}}^2} \right),$$

kjer:

- $k$  je število postavk (vprašanj) v lestvici,
- $\sigma_i^2$  je varianca posamezne postavke,
- $\sigma_{\text{skupaj}}^2$  je varianca celotne lestvice (skupne ocene).

### Interpretacija Cronbachovega $\alpha$

- $\alpha \geq 0.9$ : Odlična (zelo visoka) zanesljivost
- $0.8 \leq \alpha < 0.9$ : Dobra zanesljivost
- $0.7 \leq \alpha < 0.8$ : Sprejemljiva zanesljivost
- $0.6 \leq \alpha < 0.7$ : Vprašljiva zanesljivost
- $0.5 \leq \alpha < 0.6$ : Slaba zanesljivost
- $\alpha < 0.5$ : Nesprejemljiva zanesljivost

### Pomembne točke

- **Uporaba Cronbachovega  $\alpha$ :** Najpogosteje se uporablja v psihometriji, pri preučevanju zanesljivosti vprašalnikov in testov. Pomembno je, da je lestvica homogena, kar pomeni, da vse postavke merijo en sam koncept.
- **Omejitve Cronbachovega  $\alpha$ :** Čeprav je  $\alpha$  priljubljena mera, ni popolna. Visoka vrednost  $\alpha$  ne pomeni nujno, da lestvica meri tisto, kar namerava meriti (validnost). Poleg tega lahko visoka vrednost  $\alpha$  nastane tudi zaradi velikega števila postavk, ne pa nujno zaradi dejanske notranje konsistence.
- **Alternativne mere:** V nekaterih primerih se uporabljajo tudi druge mere zanesljivosti, kot je McDonaldov  $\omega$ , ki lahko poda natančnejšo sliko zanesljivosti v primerih, ko so postavke lestvice med seboj različno povezane.

## 4.6 Druge multivariantne metode

**Kanonična korelacijska analiza:** Kanonična korelacijska analiza je metoda za preučevanje povezave med dvema sklopoma spremenljivk. Omogoča določitev linearnih kombinacij spremenljivk iz obeh sklopov, ki so medsebojno najbolj povezane.

**Diskriminantna analiza:** Diskriminantna analiza je tehnika za razvrščanje opazovanj v predhodno določene skupine na podlagi neodvisnih spremenljivk. Uporablja se za napovedovanje kategorijske odvisne spremenljivke.

**Strukturni modeli:** Strukturni modeli so kompleksni statistični modeli, ki omogočajo preučevanje vzročnih odnosov med več spremenljivkami. Združujejo elemente regresijske analize, faktorske analize in poti.

### Vaja 1

V datoteki ... združi stolpce ... v eno spremenljivko ... in določi notranjo konsistentnost vprašalnika.



# Poglavje 5

## Tabele

Za preostale tabele glej:

<https://www.york.ac.uk/depts/maths/tables/pdf.htm> (ali pa še bolje implementiraj v programu in naj delo opravi računalnik)

STUDENT'S  $t$  PERCENTAGE POINTS

$\nu$	60.0%	66.7%	75.0%	80.0%	87.5%	90.0%	95.0%	97.5%	99.0%	99.5%	99.9%
1	0.325	0.577	1.000	1.376	2.414	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	318.31
2	0.289	0.500	0.816	1.061	1.604	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	22.327
3	0.277	0.476	0.765	0.978	1.423	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.215
4	0.271	0.464	0.741	0.941	1.344	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173
5	0.267	0.457	0.727	0.920	1.301	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.893
6	0.265	0.453	0.718	0.906	1.273	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208
7	0.263	0.449	0.711	0.896	1.254	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785
8	0.262	0.447	0.706	0.889	1.240	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	4.501
9	0.261	0.445	0.703	0.883	1.230	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.297
10	0.260	0.444	0.700	0.879	1.221	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144
11	0.260	0.443	0.697	0.876	1.214	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025
12	0.259	0.442	0.695	0.873	1.209	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.930
13	0.259	0.441	0.694	0.870	1.204	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852
14	0.258	0.440	0.692	0.868	1.200	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787
15	0.258	0.439	0.691	0.866	1.197	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733
16	0.258	0.439	0.690	0.865	1.194	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.686
17	0.257	0.438	0.689	0.863	1.191	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.646
18	0.257	0.438	0.688	0.862	1.189	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.610
19	0.257	0.438	0.688	0.861	1.187	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.579
20	0.257	0.437	0.687	0.860	1.185	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.552
21	0.257	0.437	0.686	0.859	1.183	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.527
22	0.256	0.437	0.686	0.858	1.182	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.505
23	0.256	0.436	0.685	0.858	1.180	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.485
24	0.256	0.436	0.685	0.857	1.179	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.467
25	0.256	0.436	0.684	0.856	1.178	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.450
26	0.256	0.436	0.684	0.856	1.177	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.435
27	0.256	0.435	0.684	0.855	1.176	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.421
28	0.256	0.435	0.683	0.855	1.175	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.408
29	0.256	0.435	0.683	0.854	1.174	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.396
30	0.256	0.435	0.683	0.854	1.173	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.385
35	0.255	0.434	0.682	0.852	1.170	1.306	1.690	2.030	2.438	2.724	3.340
40	0.255	0.434	0.681	0.851	1.167	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.307
$\infty$	0.253	0.431	0.674	0.842	1.150	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090

## CHI-SQUARED PERCENTAGE POINTS

$\nu$	0.1%	0.5%	1.0%	2.5%	5.0%	10.0%	12.5%	20.0%	25.0%	33.3%	50.0%
1	0.000	0.000	0.000	0.001	0.004	0.016	0.025	0.064	0.102	0.186	0.455
2	0.002	0.010	0.020	0.051	0.103	0.211	0.267	0.446	0.575	0.811	1.386
3	0.024	0.072	0.115	0.216	0.352	0.584	0.692	1.005	1.213	1.568	2.366
4	0.091	0.207	0.297	0.484	0.711	1.064	1.219	1.649	1.923	2.378	3.357
5	0.210	0.412	0.554	0.831	1.145	1.610	1.808	2.343	2.675	3.216	4.351
6	0.381	0.676	0.872	1.237	1.635	2.204	2.441	3.070	3.455	4.074	5.348
7	0.598	0.989	1.239	1.690	2.167	2.833	3.106	3.822	4.255	4.945	6.346
8	0.857	1.344	1.646	2.180	2.733	3.490	3.797	4.594	5.071	5.826	7.344
9	1.152	1.735	2.088	2.700	3.325	4.168	4.507	5.380	5.899	6.716	8.343
10	1.479	2.156	2.558	3.247	3.940	4.865	5.234	6.179	6.737	7.612	9.342
11	1.834	2.603	3.053	3.816	4.575	5.578	5.975	6.989	7.584	8.514	10.341
12	2.214	3.074	3.571	4.404	5.226	6.304	6.729	7.807	8.438	9.420	11.340
13	2.617	3.565	4.107	5.009	5.892	7.042	7.493	8.634	9.299	10.331	12.340
14	3.041	4.075	4.660	5.629	6.571	7.790	8.266	9.467	10.165	11.245	13.339
15	3.483	4.601	5.229	6.262	7.261	8.547	9.048	10.307	11.037	12.163	14.339
16	3.942	5.142	5.812	6.908	7.962	9.312	9.837	11.152	11.912	13.083	15.338
17	4.416	5.697	6.408	7.564	8.672	10.085	10.633	12.002	12.792	14.006	16.338
18	4.905	6.265	7.015	8.231	9.390	10.865	11.435	12.857	13.675	14.931	17.338
19	5.407	6.844	7.633	8.907	10.117	11.651	12.242	13.716	14.562	15.859	18.338
20	5.921	7.434	8.260	9.591	10.851	12.443	13.055	14.578	15.452	16.788	19.337
21	6.447	8.034	8.897	10.283	11.591	13.240	13.873	15.445	16.344	17.720	20.337
22	6.983	8.643	9.542	10.982	12.338	14.041	14.695	16.314	17.240	18.653	21.337
23	7.529	9.260	10.196	11.689	13.091	14.848	15.521	17.187	18.137	19.587	22.337
24	8.085	9.886	10.856	12.401	13.848	15.659	16.351	18.062	19.037	20.523	23.337
25	8.649	10.520	11.524	13.120	14.611	16.473	17.184	18.940	19.939	21.461	24.337
26	9.222	11.160	12.198	13.844	15.379	17.292	18.021	19.820	20.843	22.399	25.336
27	9.803	11.808	12.879	14.573	16.151	18.114	18.861	20.703	21.749	23.339	26.336
28	10.391	12.461	13.565	15.308	16.928	18.939	19.704	21.588	22.657	24.280	27.336
29	10.986	13.121	14.256	16.047	17.708	19.768	20.550	22.475	23.567	25.222	28.336
30	11.588	13.787	14.953	16.791	18.493	20.599	21.399	23.364	24.478	26.165	29.336
35	14.688	17.192	18.509	20.569	22.465	24.797	25.678	27.836	29.054	30.894	34.336
40	17.916	20.707	22.164	24.433	26.509	29.051	30.008	32.345	33.660	35.643	39.335
45	21.251	24.311	25.901	28.366	30.612	33.350	34.379	36.884	38.291	40.407	44.335
50	24.674	27.991	29.707	32.357	34.764	37.689	38.785	41.449	42.942	45.184	49.335
55	28.173	31.735	33.570	36.398	38.958	42.060	43.220	46.036	47.610	49.972	54.335
60	31.738	35.534	37.485	40.482	43.188	46.459	47.680	50.641	52.294	54.770	59.335

## CHI-SQUARED PERCENTAGE POINTS

$\nu$	60.0%	66.7%	75.0%	80.0%	87.5%	90.0%	95.0%	97.5%	99.0%	99.5%	99.9%
1	0.708	0.936	1.323	1.642	2.354	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828
2	1.833	2.197	2.773	3.219	4.159	4.605	5.991	7.378	9.210	10.597	13.816
3	2.946	3.405	4.108	4.642	5.739	6.251	7.815	9.348	11.345	12.838	16.266
4	4.045	4.579	5.385	5.989	7.214	7.779	9.488	11.143	13.277	14.860	18.467
5	5.132	5.730	6.626	7.289	8.625	9.236	11.070	12.833	15.086	16.750	20.515
6	6.211	6.867	7.841	8.558	9.992	10.645	12.592	14.449	16.812	18.548	22.458
7	7.283	7.992	9.037	9.803	11.326	12.017	14.067	16.013	18.475	20.278	24.322
8	8.351	9.107	10.219	11.030	12.636	13.362	15.507	17.535	20.090	21.955	26.125
9	9.414	10.215	11.389	12.242	13.926	14.684	16.919	19.023	21.666	23.589	27.877
10	10.473	11.317	12.549	13.442	15.198	15.987	18.307	20.483	23.209	25.188	29.588
11	11.530	12.414	13.701	14.631	16.457	17.275	19.675	21.920	24.725	26.757	31.264
12	12.584	13.506	14.845	15.812	17.703	18.549	21.026	23.337	26.217	28.300	32.910
13	13.636	14.595	15.984	16.985	18.939	19.812	22.362	24.736	27.688	29.819	34.528
14	14.685	15.680	17.117	18.151	20.166	21.064	23.685	26.119	29.141	31.319	36.123
15	15.733	16.761	18.245	19.311	21.384	22.307	24.996	27.488	30.578	32.801	37.697
16	16.780	17.840	19.369	20.465	22.595	23.542	26.296	28.845	32.000	34.267	39.252
17	17.824	18.917	20.489	21.615	23.799	24.769	27.587	30.191	33.409	35.718	40.790
18	18.868	19.991	21.605	22.760	24.997	25.989	28.869	31.526	34.805	37.156	42.312
19	19.910	21.063	22.718	23.900	26.189	27.204	30.144	32.852	36.191	38.582	43.820
20	20.951	22.133	23.828	25.038	27.376	28.412	31.410	34.170	37.566	39.997	45.315
21	21.991	23.201	24.935	26.171	28.559	29.615	32.671	35.479	38.932	41.401	46.797
22	23.031	24.268	26.039	27.301	29.737	30.813	33.924	36.781	40.289	42.796	48.268
23	24.069	25.333	27.141	28.429	30.911	32.007	35.172	38.076	41.638	44.181	49.728
24	25.106	26.397	28.241	29.553	32.081	33.196	36.415	39.364	42.980	45.559	51.179
25	26.143	27.459	29.339	30.675	33.247	34.382	37.652	40.646	44.314	46.928	52.620
26	27.179	28.520	30.435	31.795	34.410	35.563	38.885	41.923	45.642	48.290	54.052
27	28.214	29.580	31.528	32.912	35.570	36.741	40.113	43.195	46.963	49.645	55.476
28	29.249	30.639	32.620	34.027	36.727	37.916	41.337	44.461	48.278	50.993	56.892
29	30.283	31.697	33.711	35.139	37.881	39.087	42.557	45.722	49.588	52.336	58.301
30	31.316	32.754	34.800	36.250	39.033	40.256	43.773	46.979	50.892	53.672	59.703
35	36.475	38.024	40.223	41.778	44.753	46.059	49.802	53.203	57.342	60.275	66.619
40	41.622	43.275	45.616	47.269	50.424	51.805	55.758	59.342	63.691	66.766	73.402
45	46.761	48.510	50.985	52.729	56.052	57.505	61.656	65.410	69.957	73.166	80.077
50	51.892	53.733	56.334	58.164	61.647	63.167	67.505	71.420	76.154	79.490	86.661
55	57.016	58.945	61.665	63.577	67.211	68.796	73.311	77.380	82.292	85.749	93.168
60	62.135	64.147	66.981	68.972	72.751	74.397	79.082	83.298	88.379	91.952	99.607

PERCENTAGE POINTS OF THE  $F$  DISTRIBUTION

$\nu_2 \backslash \nu_1$		2	3	4	5	6	7	8	10	12	15	20	30	50	$\infty$
	$q$														
1	0.500	1.50	1.71	1.82	1.89	1.94	1.98	2.00	2.04	2.07	2.09	2.12	2.15	2.17	2.20
	0.600	2.63	2.93	3.09	3.20	3.27	3.32	3.36	3.41	3.45	3.48	3.52	3.56	3.59	3.64
	0.667	4.00	4.42	4.64	4.78	4.88	4.95	5.00	5.08	5.13	5.18	5.24	5.29	5.33	5.39
	0.750	7.50	8.20	8.58	8.82	8.98	9.10	9.19	9.32	9.41	9.50	9.58	9.67	9.74	9.85
	0.800	12.0	13.1	13.6	14.0	14.3	14.4	14.6	14.8	14.9	15.0	15.2	15.3	15.4	15.6
2	0.500	1.00	1.13	1.21	1.25	1.28	1.30	1.32	1.35	1.36	1.38	1.39	1.41	1.42	1.44
	0.600	1.50	1.64	1.72	1.76	1.80	1.82	1.84	1.86	1.88	1.89	1.91	1.92	1.94	1.96
	0.667	2.00	2.15	2.22	2.27	2.30	2.33	2.34	2.37	2.38	2.40	2.42	2.43	2.45	2.47
	0.750	3.00	3.15	3.23	3.28	3.31	3.34	3.35	3.38	3.39	3.41	3.43	3.44	3.46	3.48
	0.800	4.00	4.16	4.24	4.28	4.32	4.34	4.36	4.38	4.40	4.42	4.43	4.45	4.47	4.48
3	0.500	0.88	1.00	1.06	1.10	1.13	1.15	1.16	1.18	1.20	1.21	1.23	1.24	1.25	1.27
	0.600	1.26	1.37	1.43	1.47	1.49	1.51	1.52	1.54	1.55	1.56	1.57	1.58	1.59	1.60
	0.667	1.62	1.72	1.77	1.80	1.82	1.83	1.84	1.86	1.87	1.88	1.89	1.90	1.90	1.91
	0.750	2.28	2.36	2.39	2.41	2.42	2.43	2.44	2.44	2.45	2.46	2.46	2.47	2.47	2.47
	0.800	2.89	2.94	2.96	2.97	2.97	2.97	2.98	2.98	2.98	2.98	2.98	2.98	2.98	2.98
4	0.500	0.83	0.94	1.00	1.04	1.06	1.08	1.09	1.11	1.13	1.14	1.15	1.16	1.18	1.19
	0.600	1.16	1.26	1.31	1.34	1.36	1.37	1.38	1.40	1.41	1.42	1.43	1.43	1.44	1.45
	0.667	1.46	1.55	1.58	1.61	1.62	1.63	1.64	1.65	1.65	1.66	1.67	1.67	1.68	1.68
	0.750	2.00	2.05	2.06	2.07	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08
	0.800	2.47	2.48	2.48	2.48	2.47	2.47	2.47	2.46	2.46	2.45	2.44	2.44	2.43	2.43
5	0.500	0.80	0.91	0.96	1.00	1.02	1.04	1.05	1.07	1.09	1.10	1.11	1.12	1.13	1.15
	0.600	1.11	1.20	1.24	1.27	1.29	1.30	1.31	1.32	1.33	1.34	1.34	1.35	1.36	1.37
	0.667	1.38	1.45	1.48	1.50	1.51	1.52	1.53	1.53	1.54	1.54	1.54	1.55	1.55	1.55
	0.750	1.85	1.88	1.89	1.89	1.89	1.89	1.89	1.89	1.89	1.89	1.88	1.88	1.88	1.87
	0.800	2.26	2.25	2.24	2.23	2.22	2.21	2.20	2.19	2.18	2.18	2.17	2.16	2.15	2.13
6	0.500	0.78	0.89	0.94	0.98	1.00	1.02	1.03	1.05	1.06	1.07	1.08	1.10	1.11	1.12
	0.600	1.07	1.16	1.20	1.22	1.24	1.25	1.26	1.27	1.28	1.29	1.29	1.30	1.31	1.31
	0.667	1.33	1.39	1.42	1.44	1.44	1.45	1.45	1.46	1.46	1.47	1.47	1.47	1.47	1.47
	0.750	1.76	1.78	1.79	1.79	1.78	1.78	1.78	1.77	1.77	1.76	1.76	1.75	1.75	1.74
	0.800	2.13	2.11	2.09	2.08	2.06	2.05	2.04	2.03	2.02	2.01	2.00	1.98	1.97	1.95
7	0.500	0.77	0.87	0.93	0.96	0.98	1.00	1.01	1.03	1.04	1.05	1.07	1.08	1.09	1.10
	0.600	1.05	1.13	1.17	1.19	1.21	1.22	1.23	1.24	1.24	1.25	1.26	1.26	1.27	1.27
	0.667	1.29	1.35	1.38	1.39	1.40	1.40	1.41	1.41	1.41	1.41	1.41	1.42	1.42	1.42
	0.750	1.70	1.72	1.72	1.71	1.71	1.70	1.70	1.69	1.68	1.68	1.67	1.66	1.66	1.65
	0.800	2.04	2.02	1.99	1.97	1.96	1.94	1.93	1.92	1.91	1.89	1.88	1.86	1.85	1.83
8	0.500	0.76	0.86	0.91	0.95	0.97	0.99	1.00	1.02	1.03	1.04	1.05	1.07	1.07	1.09
	0.600	1.03	1.11	1.15	1.17	1.19	1.20	1.20	1.21	1.22	1.22	1.23	1.24	1.24	1.25
	0.667	1.26	1.32	1.35	1.36	1.36	1.37	1.37	1.37	1.37	1.38	1.38	1.38	1.37	1.37
	0.750	1.66	1.67	1.66	1.66	1.65	1.64	1.64	1.63	1.62	1.62	1.61	1.60	1.59	1.58
	0.800	1.98	1.95	1.92	1.90	1.88	1.87	1.86	1.84	1.83	1.81	1.80	1.78	1.76	1.74

PERCENTAGE POINTS OF THE  $F$  DISTRIBUTION

$\nu_2 \backslash \nu_1$		2	3	4	5	6	7	8	10	12	15	20	30	50	$\infty$
	$q$														
9	0.500	0.75	0.85	0.91	0.94	0.96	0.98	0.99	1.01	1.02	1.03	1.04	1.05	1.06	1.08
	0.600	1.02	1.10	1.13	1.15	1.17	1.18	1.18	1.19	1.20	1.21	1.21	1.22	1.22	1.22
	0.667	1.24	1.30	1.32	1.33	1.34	1.34	1.34	1.34	1.35	1.35	1.35	1.34	1.34	1.34
	0.750	1.62	1.63	1.63	1.62	1.61	1.60	1.60	1.59	1.58	1.57	1.56	1.55	1.54	1.53
	0.800	1.93	1.90	1.87	1.85	1.83	1.81	1.80	1.78	1.76	1.75	1.73	1.71	1.70	1.67
10	0.500	0.74	0.85	0.90	0.93	0.95	0.97	0.98	1.00	1.01	1.02	1.03	1.05	1.06	1.07
	0.600	1.01	1.08	1.12	1.14	1.15	1.16	1.17	1.18	1.18	1.19	1.19	1.20	1.20	1.21
	0.667	1.23	1.28	1.30	1.31	1.32	1.32	1.32	1.32	1.32	1.32	1.32	1.32	1.32	1.31
	0.750	1.60	1.60	1.59	1.59	1.58	1.57	1.56	1.55	1.54	1.53	1.52	1.51	1.50	1.48
	0.800	1.90	1.86	1.83	1.80	1.78	1.77	1.75	1.73	1.72	1.70	1.68	1.66	1.65	1.62
11	0.500	0.74	0.84	0.89	0.93	0.95	0.96	0.98	0.99	1.01	1.02	1.03	1.04	1.05	1.06
	0.600	1.00	1.07	1.11	1.13	1.14	1.15	1.16	1.17	1.17	1.18	1.18	1.18	1.19	1.19
	0.667	1.22	1.27	1.29	1.30	1.30	1.30	1.30	1.30	1.30	1.30	1.30	1.30	1.30	1.29
	0.750	1.58	1.58	1.57	1.56	1.55	1.54	1.53	1.52	1.51	1.50	1.49	1.48	1.47	1.45
	0.800	1.87	1.83	1.80	1.77	1.75	1.73	1.72	1.69	1.68	1.66	1.64	1.62	1.60	1.57
12	0.500	0.73	0.84	0.89	0.92	0.94	0.96	0.97	0.99	1.00	1.01	1.02	1.03	1.04	1.06
	0.600	0.99	1.07	1.10	1.12	1.13	1.14	1.15	1.16	1.16	1.17	1.17	1.17	1.18	1.18
	0.667	1.21	1.26	1.27	1.28	1.29	1.29	1.29	1.29	1.29	1.29	1.29	1.28	1.28	1.27
	0.750	1.56	1.56	1.55	1.54	1.53	1.52	1.51	1.50	1.49	1.48	1.47	1.45	1.44	1.42
	0.800	1.85	1.80	1.77	1.74	1.72	1.70	1.69	1.66	1.65	1.63	1.61	1.59	1.57	1.54
13	0.500	0.73	0.83	0.88	0.92	0.94	0.96	0.97	0.98	1.00	1.01	1.02	1.03	1.04	1.05
	0.600	0.98	1.06	1.09	1.11	1.13	1.13	1.14	1.15	1.15	1.16	1.16	1.16	1.17	1.17
	0.667	1.20	1.25	1.26	1.27	1.28	1.28	1.28	1.28	1.28	1.28	1.27	1.27	1.27	1.26
	0.750	1.55	1.55	1.53	1.52	1.51	1.50	1.49	1.48	1.47	1.46	1.45	1.43	1.42	1.40
	0.800	1.83	1.78	1.75	1.72	1.69	1.68	1.66	1.64	1.62	1.60	1.58	1.56	1.54	1.51
14	0.500	0.73	0.83	0.88	0.91	0.94	0.95	0.96	0.98	0.99	1.00	1.01	1.03	1.04	1.05
	0.600	0.98	1.05	1.09	1.11	1.12	1.13	1.13	1.14	1.14	1.15	1.15	1.16	1.16	1.16
	0.667	1.19	1.24	1.26	1.26	1.27	1.27	1.27	1.27	1.27	1.26	1.26	1.26	1.25	1.24
	0.750	1.53	1.53	1.52	1.51	1.50	1.49	1.48	1.46	1.45	1.44	1.43	1.41	1.40	1.38
	0.800	1.81	1.76	1.73	1.70	1.67	1.65	1.64	1.62	1.60	1.58	1.56	1.53	1.51	1.48
15	0.500	0.73	0.83	0.88	0.91	0.93	0.95	0.96	0.98	0.99	1.00	1.01	1.02	1.03	1.05
	0.600	0.97	1.05	1.08	1.10	1.11	1.12	1.13	1.13	1.14	1.14	1.15	1.15	1.15	1.15
	0.667	1.18	1.23	1.25	1.25	1.26	1.26	1.26	1.26	1.26	1.25	1.25	1.25	1.24	1.23
	0.750	1.52	1.52	1.51	1.49	1.48	1.47	1.46	1.45	1.44	1.43	1.41	1.40	1.38	1.36
	0.800	1.80	1.75	1.71	1.68	1.66	1.64	1.62	1.60	1.58	1.56	1.54	1.51	1.49	1.46
16	0.500	0.72	0.82	0.88	0.91	0.93	0.95	0.96	0.97	0.99	1.00	1.01	1.02	1.03	1.04
	0.600	0.97	1.04	1.08	1.10	1.11	1.12	1.12	1.13	1.13	1.14	1.14	1.14	1.14	1.14
	0.667	1.18	1.22	1.24	1.25	1.25	1.25	1.25	1.25	1.25	1.25	1.24	1.24	1.23	1.22
	0.750	1.51	1.51	1.50	1.48	1.47	1.46	1.45	1.44	1.43	1.41	1.40	1.38	1.37	1.34
	0.800	1.78	1.74	1.70	1.67	1.64	1.62	1.61	1.58	1.56	1.54	1.52	1.49	1.47	1.43
17	0.500	0.72	0.82	0.87	0.91	0.93	0.94	0.96	0.97	0.98	0.99	1.01	1.02	1.03	1.04
	0.600	0.97	1.04	1.07	1.09	1.10	1.11	1.12	1.12	1.13	1.13	1.13	1.14	1.14	1.14
	0.667	1.17	1.22	1.23	1.24	1.24	1.24	1.24	1.24	1.24	1.24	1.23	1.23	1.22	1.21
	0.750	1.51	1.50	1.49	1.47	1.46	1.45	1.44	1.43	1.41	1.40	1.39	1.37	1.36	1.33
	0.800	1.77	1.72	1.68	1.65	1.63	1.61	1.59	1.57	1.55	1.53	1.50	1.48	1.46	1.42

PERCENTAGE POINTS OF THE  $F$  DISTRIBUTION

$\nu_2 \backslash \nu_1$		2	3	4	5	6	7	8	10	12	15	20	30	50	$\infty$
	$q$														
18	0.500	0.72	0.82	0.87	0.90	0.93	0.94	0.95	0.97	0.98	0.99	1.00	1.02	1.02	1.04
	0.600	0.96	1.04	1.07	1.09	1.10	1.11	1.11	1.12	1.12	1.13	1.13	1.13	1.13	1.13
	0.667	1.17	1.21	1.23	1.24	1.24	1.24	1.24	1.24	1.23	1.23	1.23	1.22	1.22	1.21
	0.750	1.50	1.49	1.48	1.46	1.45	1.44	1.43	1.42	1.40	1.39	1.38	1.36	1.34	1.32
	0.800	1.76	1.71	1.67	1.64	1.62	1.60	1.58	1.55	1.53	1.51	1.49	1.46	1.44	1.40
19	0.500	0.72	0.82	0.87	0.90	0.92	0.94	0.95	0.97	0.98	0.99	1.00	1.01	1.02	1.04
	0.600	0.96	1.03	1.07	1.09	1.10	1.10	1.11	1.12	1.12	1.12	1.13	1.13	1.13	1.13
	0.667	1.16	1.21	1.22	1.23	1.23	1.23	1.23	1.23	1.23	1.23	1.22	1.22	1.21	1.20
	0.750	1.49	1.49	1.47	1.46	1.44	1.43	1.42	1.41	1.40	1.38	1.37	1.35	1.33	1.30
	0.800	1.75	1.70	1.66	1.63	1.61	1.58	1.57	1.54	1.52	1.50	1.48	1.45	1.43	1.39
20	0.500	0.72	0.82	0.87	0.90	0.92	0.94	0.95	0.97	0.98	0.99	1.00	1.01	1.02	1.03
	0.600	0.96	1.03	1.06	1.08	1.09	1.10	1.11	1.11	1.12	1.12	1.12	1.12	1.12	1.12
	0.667	1.16	1.21	1.22	1.23	1.23	1.23	1.23	1.23	1.22	1.22	1.22	1.21	1.20	1.19
	0.750	1.49	1.48	1.47	1.45	1.44	1.43	1.42	1.40	1.39	1.37	1.36	1.34	1.32	1.29
	0.800	1.75	1.70	1.65	1.62	1.60	1.58	1.56	1.53	1.51	1.49	1.47	1.44	1.41	1.37
21	0.500	0.72	0.81	0.87	0.90	0.92	0.94	0.95	0.96	0.98	0.99	1.00	1.01	1.02	1.03
	0.600	0.96	1.03	1.06	1.08	1.09	1.10	1.10	1.11	1.11	1.12	1.12	1.12	1.12	1.12
	0.667	1.16	1.20	1.22	1.22	1.22	1.22	1.22	1.22	1.22	1.22	1.21	1.20	1.20	1.19
	0.750	1.48	1.48	1.46	1.44	1.43	1.42	1.41	1.39	1.38	1.37	1.35	1.33	1.32	1.28
	0.800	1.74	1.69	1.65	1.61	1.59	1.57	1.55	1.52	1.50	1.48	1.46	1.43	1.40	1.36
22	0.500	0.72	0.81	0.87	0.90	0.92	0.93	0.95	0.96	0.97	0.99	1.00	1.01	1.02	1.03
	0.600	0.96	1.03	1.06	1.08	1.09	1.10	1.10	1.11	1.11	1.11	1.12	1.12	1.12	1.12
	0.667	1.16	1.20	1.21	1.22	1.22	1.22	1.22	1.22	1.21	1.21	1.21	1.20	1.19	1.18
	0.750	1.48	1.47	1.45	1.44	1.42	1.41	1.40	1.39	1.37	1.36	1.34	1.32	1.31	1.28
	0.800	1.73	1.68	1.64	1.61	1.58	1.56	1.54	1.51	1.49	1.47	1.45	1.42	1.39	1.35
23	0.500	0.71	0.81	0.86	0.90	0.92	0.93	0.95	0.96	0.97	0.98	1.00	1.01	1.02	1.03
	0.600	0.95	1.02	1.06	1.07	1.09	1.09	1.10	1.10	1.11	1.11	1.11	1.11	1.11	1.11
	0.667	1.15	1.20	1.21	1.22	1.22	1.22	1.22	1.21	1.21	1.21	1.20	1.19	1.19	1.17
	0.750	1.47	1.47	1.45	1.43	1.42	1.41	1.40	1.38	1.37	1.35	1.34	1.32	1.30	1.27
	0.800	1.73	1.68	1.63	1.60	1.57	1.55	1.53	1.51	1.49	1.46	1.44	1.41	1.38	1.34
24	0.500	0.71	0.81	0.86	0.90	0.92	0.93	0.94	0.96	0.97	0.98	0.99	1.01	1.01	1.03
	0.600	0.95	1.02	1.06	1.07	1.08	1.09	1.10	1.10	1.10	1.11	1.11	1.11	1.11	1.11
	0.667	1.15	1.19	1.21	1.21	1.21	1.21	1.21	1.21	1.21	1.20	1.20	1.19	1.18	1.17
	0.750	1.47	1.46	1.44	1.43	1.41	1.40	1.39	1.38	1.36	1.35	1.33	1.31	1.29	1.26
	0.800	1.72	1.67	1.63	1.59	1.57	1.55	1.53	1.50	1.48	1.46	1.43	1.40	1.38	1.33
25	0.500	0.71	0.81	0.86	0.89	0.92	0.93	0.94	0.96	0.97	0.98	0.99	1.00	1.01	1.03
	0.600	0.95	1.02	1.05	1.07	1.08	1.09	1.09	1.10	1.10	1.11	1.11	1.11	1.11	1.11
	0.667	1.15	1.19	1.21	1.21	1.21	1.21	1.21	1.21	1.20	1.20	1.19	1.19	1.18	1.16
	0.750	1.47	1.46	1.44	1.42	1.41	1.40	1.39	1.37	1.36	1.34	1.33	1.31	1.29	1.25
	0.800	1.72	1.66	1.62	1.59	1.56	1.54	1.52	1.49	1.47	1.45	1.42	1.39	1.37	1.32
26	0.500	0.71	0.81	0.86	0.89	0.91	0.93	0.94	0.96	0.97	0.98	0.99	1.00	1.01	1.03
	0.600	0.95	1.02	1.05	1.07	1.08	1.09	1.09	1.10	1.10	1.10	1.10	1.11	1.11	1.10
	0.667	1.15	1.19	1.20	1.21	1.21	1.21	1.21	1.20	1.20	1.20	1.19	1.18	1.18	1.16
	0.750	1.46	1.45	1.44	1.42	1.41	1.39	1.38	1.37	1.35	1.34	1.32	1.30	1.28	1.25
	0.800	1.71	1.66	1.62	1.58	1.56	1.53	1.52	1.49	1.47	1.44	1.42	1.39	1.36	1.31

PERCENTAGE POINTS OF THE  $F$  DISTRIBUTION

$\nu_2 \backslash \nu_1$		2	3	4	5	6	7	8	10	12	15	20	30	50	$\infty$
	$q$														
27	0.500	0.71	0.81	0.86	0.89	0.91	0.93	0.94	0.96	0.97	0.9a	0.99	1.00	1.01	1.03
	0.600	0.95	1.02	1.05	1.07	1.08	1.08	1.09	1.10	1.10	1.10	1.10	1.10	1.10	1.10
	0.667	1.14	1.19	1.20	1.21	1.21	1.21	1.20	1.20	1.20	1.19	1.19	1.18	1.17	1.16
	0.750	1.46	1.45	1.43	1.42	1.40	1.39	1.38	1.36	1.35	1.33	1.32	1.30	1.28	1.24
	0.800	1.71	1.66	1.61	1.58	1.55	1.53	1.51	1.48	1.46	1.44	1.41	1.3a	1.35	1.30
28	0.500	0.71	0.81	0.86	0.89	0.91	0.93	0.94	0.96	0.97	0.98	0.99	1.00	1.01	1.02
	0.600	0.95	1.02	1.05	1.07	1.08	1.08	1.09	1.09	1.10	1.10	1.10	1.10	1.10	1.10
	0.667	1.14	1.18	1.20	1.20	1.20	1.20	1.20	1.20	1.20	1.19	1.19	1.18	1.17	1.15
	0.750	1.46	1.45	1.43	1.41	1.40	1.39	1.38	1.36	1.34	1.33	1.31	1.29	1.27	1.24
	0.800	1.71	1.65	1.61	1.57	1.55	1.52	1.51	1.48	1.46	1.43	1.41	1.37	1.35	1.30
29	0.500	0.71	0.81	0.86	0.89	0.91	0.93	0.94	0.96	0.97	0.98	0.99	1.00	1.01	1.02
	0.600	0.95	1.02	1.05	1.06	1.08	1.08	1.09	1.09	1.10	1.10	1.10	1.10	1.10	1.10
	0.667	1.14	1.18	1.20	1.20	1.20	1.20	1.20	1.20	1.19	1.19	1.18	1.17	1.17	1.15
	0.750	1.45	1.45	1.43	1.41	1.40	1.38	1.37	1.35	1.34	1.32	1.31	1.29	1.27	1.23
	0.800	1.70	1.65	1.60	1.57	1.54	1.52	1.50	1.47	1.45	1.43	1.40	1.37	1.34	1.29
30	0.500	0.71	0a1	0.86	0.89	0.91	0.93	0.94	0.96	0.97	0.98	0.99	1.00	1.01	1.02
	0.600	0.94	1.01	1.05	1.06	1.07	1.08	1.08	1.09	1.09	1.10	1.10	1.10	1.10	1.09
	0.667	1.14	1.18	1.19	1.20	1.20	1.20	1.20	1.19	1.19	1.19	1.18	1.17	1.16	1.15
	0.750	1.45	1.44	1.42	1.41	1.39	1.38	1.37	1.35	1.34	1.32	1.30	1.28	1.26	1.23
	0.800	1.70	1.64	1.60	1.57	1.54	1.52	1.50	1.47	1.45	1.42	1.39	1.36	1.34	1.28
60	0.500	0.70	0.80	0.85	0.88	0.90	0.92	0.93	0.94	0.96	0.97	0.98	0.99	1.00	1.01
	0.600	0.93	1.00	1.03	1.04	1.05	1.06	1.06	1.07	1.07	1.07	1.07	1.07	1.07	1.06
	0.667	1.12	1.16	1.17	1.17	1.17	1.17	1.17	1.16	1.16	1.15	1.14	1.13	1.12	1.10
	0.750	1.42	1.41	1.38	1.37	1.35	1.33	1.32	1.30	1.29	1.27	1.25	1.22	1.20	1.15
	0.800	1.65	1.59	1.55	1.51	1.48	1.46	1.44	1.41	1.38	1.35	1.32	1.29	1.25	1.18
80	0.500	0.70	0.80	0.85	0.88	0.90	0.91	0.93	0.94	0.95	0.96	0.97	0.99	1.00	1.01
	0.600	0.93	0.99	1.02	1.04	1.05	1.06	1.06	1.06	1.07	1.07	1.07	1.06	1.06	1.05
	0.667	1.11	1.15	1.16	1.17	1.17	1.16	1.16	1.16	1.15	1.14	1.13	1.12	1.11	1.08
	0.750	1.41	1.40	1.38	1.36	1.34	1.32	1.31	1.29	1.27	1.26	1.23	1.21	1.18	1.12
	0.800	1.64	1.58	1.53	1.50	1.47	1.44	1.42	1.39	1.37	1.34	1.31	1.27	1.23	1.16
100	0.500	0.70	0.79	0.84	0.88	0.90	0.91	0.92	0.94	0.95	0.96	0.97	0.98	0.99	1.01
	0.600	0.92	0.99	1.02	1.04	1.05	1.05	1.06	1.06	1.06	1.06	1.06	1.06	1.06	1.04
	0.667	1.11	1.15	1.16	1.16	1.16	1.16	1.16	1.15	1.15	1.14	1.13	1.12	1.10	1.07
	0.750	1.41	1.39	1.37	1.35	1.33	1.32	1.30	1.28	1.27	1.25	1.23	1.20	1.17	1.11
	0.800	1.64	1.58	1.53	1.49	1.46	1.43	1.41	1.38	1.36	1.33	1.30	1.26	1.22	1.14
120	0.500	0.70	0.79	0.84	0.88	0.90	0.91	0.92	0.94	0.95	0.96	0.97	0.98	0.99	1.01
	0.600	0.92	0.99	1.02	1.04	1.04	1.05	1.05	1.06	1.06	1.06	1.06	1.06	1.05	1.04
	0.667	1.11	1.15	1.16	1.16	1.16	1.16	1.15	1.15	1.14	1.13	1.13	1.11	1.10	1.06
	0.750	1.40	1.39	1.37	1.35	1.33	1.31	1.30	1.28	1.26	1.24	1.22	1.19	1.16	1.10
	0.800	1.63	1.57	1.52	1.48	1.45	1.43	1.41	1.37	1.35	1.32	1.29	1.25	1.21	1.12
$\infty$	0.500	0.69	0.79	0.84	0.87	0.89	0.91	0.92	0.93	0.95	0.96	0.97	0.98	0.99	1.00
	0.600	0.92	0.98	1.01	1.03	1.04	1.04	1.04	1.05	1.05	1.05	1.05	1.04	1.04	1.00
	0.667	1.10	1.13	1.14	1.15	1.14	1.14	1.14	1.13	1.13	1.12	1.11	1.09	1.07	1.00
	0.750	1.39	1.37	1.35	1.33	1.31	1.29	1.28	1.25	1.24	1.22	1.19	1.16	1.13	1.00
	0.800	1.61	1.55	1.50	1.46	1.43	1.40	1.38	1.34	1.32	1.29	1.25	1.21	1.16	1.00

PERCENTAGE POINTS OF THE  $F$  DISTRIBUTION

$\nu_2 \backslash \nu_1$		2	3	4	5	6	7	8	10	12	15	20	30	50	$\infty$
	$q$														
1	0.900	49.5	53.6	55.8	57.2	58.2	59.1	59.7	60.5	61.0	61.5	62.0	62.6	63.0	63.3
	0.950	199.	216.	225.	230.	234.	237.	239.	242.	244.	246.	248.	250.	252.	254.
	0.975	800.	864.	900.	922.	937.	948.	957.	969.	977.	985.	993.			
	0.990														
	0.999														
2	0.900	9.00	9.16	9.24	9.29	9.33	9.35	9.37	9.39	9.41	9.43	9.44	9.46	9.47	9.49
	0.950	19.0	19.2	19.2	19.3	19.3	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.5	19.5	19.5
	0.975	39.0	39.2	39.2	39.3	39.3	39.4	39.4	39.4	39.4	39.4	39.4	39.5	39.5	39.5
	0.990	99.0	99.2	99.2	99.3	99.3	99.4	100.	100.	100.	100.	100.	100.	100.	99.5
	0.999	999.	999.												
3	0.900	5.46	5.39	5.34	5.31	5.28	5.27	5.25	5.23	5.22	5.20	5.18	5.17	5.15	5.13
	0.950	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.79	8.74	8.70	8.66	8.62	8.58	8.53
	0.975	16.0	15.4	15.1	14.9	14.7	14.6	14.5	14.4	14.3	14.3	14.2	14.1	14.0	13.9
	0.990	30.8	29.5	28.7	28.2	27.9	27.7	27.5	27.2	27.1	26.9	26.7	26.5	26.4	26.1
	0.999	149.	141.	137.	135.	133.	132.	131.	129.	128.	127.	126.	125.	125.	123.
4	0.900	4.32	4.19	4.11	4.05	4.01	3.98	3.95	3.92	3.90	3.87	3.84	3.82	3.79	3.76
	0.950	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	5.96	5.91	5.86	5.80	5.75	5.70	5.63
	0.975	10.6	9.98	9.60	9.36	9.20	9.07	8.98	8.84	8.75	8.66	8.56	8.46	8.38	8.26
	0.990	18.0	16.7	16.0	15.5	15.2	15.0	14.8	14.5	14.4	14.2	14.0	13.8	13.7	13.5
	0.999	61.2	56.2	53.4	51.7	50.5	49.7	49.0	48.0	47.4	46.8	46.1	45.4	44.9	44.1
5	0.900	3.78	3.62	3.52	3.45	3.40	3.37	3.34	3.30	3.27	3.24	3.21	3.17	3.15	3.10
	0.950	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.74	4.68	4.62	4.56	4.50	4.44	4.36
	0.975	8.43	7.76	7.39	7.15	6.98	6.85	6.76	6.62	6.52	6.43	6.33	6.23	6.14	6.02
	0.990	13.3	12.1	11.4	11.0	10.7	10.5	10.3	10.1	9.89	9.72	9.55	9.38	9.24	9.02
	0.999	37.1	33.2	31.1	29.8	28.8	28.2	27.6	26.9	26.4	25.9	25.4	24.9	24.4	23.8
6	0.900	3.46	3.29	3.18	3.11	3.05	3.01	2.98	2.94	2.90	2.87	2.84	2.80	2.77	2.72
	0.950	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.06	4.00	3.94	3.87	3.81	3.75	3.67
	0.975	7.26	6.60	6.23	5.99	5.82	5.70	5.60	5.46	5.37	5.27	5.17	5.07	4.98	4.85
	0.990	10.9	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.87	7.72	7.56	7.40	7.23	7.09	6.88
	0.999	27.0	23.7	21.9	20.8	20.0	19.5	19.0	18.4	18.0	17.6	17.1	16.7	16.3	15.7
7	0.900	3.26	3.07	2.96	2.88	2.83	2.78	2.75	2.70	2.67	2.63	2.59	2.56	2.52	2.47
	0.950	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.64	3.57	3.51	3.44	3.38	3.32	3.23
	0.975	6.54	5.89	5.52	5.29	5.12	4.99	4.90	4.76	4.67	4.57	4.47	4.36	4.28	4.14
	0.990	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.62	6.47	6.31	6.16	5.99	5.86	5.65
	0.999	21.7	18.8	17.2	16.2	15.5	15.0	14.6	14.1	13.7	13.3	12.9	12.5	12.2	11.7
8	0.900	3.11	2.92	2.81	2.73	2.67	2.62	2.59	2.54	2.50	2.46	2.42	2.38	2.35	2.29
	0.950	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.35	3.28	3.22	3.15	3.08	3.02	2.93
	0.975	6.06	5.42	5.05	4.82	4.65	4.53	4.43	4.29	4.20	4.10	4.00	3.89	3.81	3.67
	0.990	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.81	5.67	5.52	5.36	5.20	5.07	4.86
	0.999	18.5	15.8	14.4	13.5	12.9	12.4	12.0	11.5	11.2	10.8	10.5	10.1	9.80	9.33



PERCENTAGE POINTS OF THE  $F$  DISTRIBUTION

$\nu_2 \backslash \nu_1$		2	3	4	5	6	7	8	10	12	15	20	30	50	$\infty$
	$q$														
9	0.900	3.01	2.81	2.69	2.61	2.55	2.51	2.47	2.42	2.38	2.34	2.30	2.25	2.22	2.16
	0.950	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.14	3.07	3.01	2.94	2.86	2.80	2.71
	0.975	5.71	5.08	4.72	4.48	4.32	4.20	4.10	3.96	3.87	3.77	3.67	3.56	3.47	3.33
	0.990	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.26	5.11	4.96	4.81	4.65	4.52	4.31
	0.999	16.4	13.9	12.6	11.7	11.1	10.7	10.4	9.89	9.57	9.24	8.90	8.55	8.26	7.81
10	0.900	2.92	2.73	2.61	2.52	2.46	2.41	2.38	2.32	2.28	2.24	2.20	2.16	2.12	2.06
	0.950	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	2.98	2.91	2.84	2.77	2.70	2.64	2.54
	0.975	5.46	4.83	4.47	4.24	4.07	3.95	3.85	3.72	3.62	3.52	3.42	3.31	3.22	3.08
	0.990	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.85	4.71	4.56	4.41	4.25	4.11	3.91
	0.999	14.9	12.6	11.3	10.5	9.93	9.52	9.20	8.75	8.45	8.13	7.80	7.47	7.19	6.76
11	0.900	2.86	2.66	2.54	2.45	2.39	2.34	2.30	2.25	2.21	2.17	2.12	2.08	2.04	1.97
	0.950	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.85	2.79	2.72	2.65	2.57	2.51	2.40
	0.975	5.26	4.63	4.28	4.04	3.88	3.76	3.66	3.53	3.43	3.33	3.23	3.12	3.03	2.88
	0.990	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.54	4.40	4.25	4.10	3.94	3.81	3.60
	0.999	13.8	11.6	10.3	9.58	9.05	8.66	8.35	7.92	7.63	7.32	7.01	6.68	6.42	6.00
12	0.900	2.81	2.61	2.48	2.39	2.33	2.28	2.24	2.19	2.15	2.10	2.06	2.01	1.97	1.90
	0.950	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.75	2.69	2.62	2.54	2.47	2.40	2.30
	0.975	5.10	4.47	4.12	3.89	3.73	3.61	3.51	3.37	3.28	3.18	3.07	2.96	2.87	2.72
	0.990	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.30	4.16	4.01	3.86	3.70	3.57	3.36
	0.999	13.0	10.8	9.63	8.89	8.38	8.00	7.71	7.29	7.00	6.71	6.40	6.09	5.83	5.42
13	0.900	2.76	2.56	2.43	2.35	2.28	2.23	2.20	2.14	2.10	2.05	2.01	1.96	1.92	1.85
	0.950	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.67	2.60	2.53	2.46	2.38	2.31	2.21
	0.975	4.97	4.35	4.00	3.77	3.60	3.48	3.39	3.25	3.15	3.05	2.95	2.84	2.74	2.60
	0.990	6.70	5.74	5.21	4.86	4.62	4.44	4.30	4.10	3.96	3.82	3.66	3.51	3.37	3.17
	0.999	12.3	10.2	9.07	8.35	7.86	7.49	7.21	6.80	6.52	6.23	5.93	5.63	5.37	4.97
14	0.900	2.73	2.52	2.39	2.31	2.24	2.19	2.15	2.10	2.05	2.01	1.96	1.91	1.87	1.80
	0.950	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.60	2.53	2.46	2.39	2.31	2.24	2.13
	0.975	4.86	4.24	3.89	3.66	3.50	3.38	3.29	3.15	3.05	2.95	2.84	2.73	2.64	2.49
	0.990	6.51	5.56	5.04	4.69	4.46	4.28	4.14	3.94	3.80	3.66	3.51	3.35	3.22	3.00
	0.999	11.8	9.73	8.62	7.92	7.44	7.08	6.80	6.40	6.13	5.85	5.56	5.25	5.00	4.60
15	0.900	2.70	2.49	2.36	2.27	2.21	2.16	2.12	2.06	2.02	1.97	1.92	1.87	1.83	1.76
	0.950	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.54	2.48	2.40	2.33	2.25	2.18	2.07
	0.975	4.77	4.15	3.80	3.58	3.41	3.29	3.20	3.06	2.96	2.86	2.76	2.64	2.55	2.40
	0.990	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.80	3.67	3.52	3.37	3.21	3.08	2.87
	0.999	11.3	9.34	8.25	7.57	7.09	6.74	6.47	6.08	5.81	5.53	5.25	4.95	4.70	4.31
16	0.900	2.67	2.46	2.33	2.24	2.18	2.13	2.09	2.03	1.99	1.94	1.89	1.84	1.79	1.72
	0.950	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.49	2.42	2.35	2.28	2.19	2.12	2.01
	0.975	4.69	4.08	3.73	3.50	3.34	3.22	3.12	2.99	2.89	2.79	2.68	2.57	2.47	2.32
	0.990	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89	3.69	3.55	3.41	3.26	3.10	2.97	2.75
	0.999	11.0	9.01	7.94	7.27	6.80	6.46	6.19	5.81	5.55	5.27	4.99	4.70	4.45	4.06
17	0.900	2.64	2.44	2.31	2.22	2.15	2.10	2.06	2.00	1.96	1.91	1.86	1.81	1.76	1.69
	0.950	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.45	2.38	2.31	2.23	2.15	2.08	1.96
	0.975	4.62	4.01	3.66	3.44	3.28	3.16	3.06	2.92	2.82	2.72	2.62	2.50	2.41	2.25
	0.990	6.11	5.18	4.67	4.34	4.10	3.93	3.79	3.59	3.46	3.31	3.16	3.00	2.87	2.65
	0.999	10.7	8.73	7.68	7.02	6.56	6.22	5.96	5.58	5.32	5.05	4.77	4.48	4.24	3.85

PERCENTAGE POINTS OF THE  $F$  DISTRIBUTION

$\nu_2 \backslash \nu_1$		2	3	4	5	6	7	8	10	12	15	20	30	50	$\infty$
	$q$														
18	0.900	2.62	2.42	2.29	2.20	2.13	2.08	2.04	1.98	1.93	1.89	1.84	1.78	1.74	1.66
	0.950	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.41	2.34	2.27	2.19	2.11	2.04	1.92
	0.975	4.56	3.95	3.61	3.38	3.22	3.10	3.01	2.87	2.77	2.67	2.56	2.44	2.35	2.19
	0.990	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.84	3.71	3.51	3.37	3.23	3.08	2.92	2.78	2.57
	0.999	10.4	8.49	7.46	6.81	6.35	6.02	5.76	5.39	5.13	4.87	4.59	4.30	4.06	3.67
19	0.900	2.61	2.40	2.27	2.18	2.11	2.06	2.02	1.96	1.91	1.86	1.81	1.76	1.71	1.63
	0.950	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.38	2.31	2.23	2.16	2.07	2.00	1.88
	0.975	4.51	3.90	3.56	3.33	3.17	3.05	2.96	2.82	2.72	2.62	2.51	2.39	2.30	2.13
	0.990	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.77	3.63	3.43	3.30	3.15	3.00	2.84	2.71	2.49
	0.999	10.2	8.28	7.27	6.62	6.18	5.85	5.59	5.22	4.97	4.70	4.43	4.14	3.90	3.51
20	0.900	2.59	2.38	2.25	2.16	2.09	2.04	2.00	1.94	1.89	1.84	1.79	1.74	1.69	1.61
	0.950	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.35	2.28	2.20	2.12	2.04	1.97	1.84
	0.975	4.46	3.86	3.51	3.29	3.13	3.01	2.91	2.77	2.68	2.57	2.46	2.35	2.25	2.09
	0.990	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.37	3.23	3.09	2.94	2.78	2.64	2.42
	0.999	9.95	8.10	7.10	6.46	6.02	5.69	5.44	5.08	4.82	4.56	4.29	4.00	3.76	3.38
21	0.900	2.57	2.36	2.23	2.14	2.08	2.02	1.98	1.92	1.87	1.83	1.78	1.72	1.67	1.59
	0.950	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.32	2.25	2.18	2.10	2.01	1.94	1.81
	0.975	4.42	3.82	3.48	3.25	3.09	2.97	2.87	2.73	2.64	2.53	2.42	2.31	2.21	2.04
	0.990	5.78	4.87	4.37	4.04	3.81	3.64	3.51	3.31	3.17	3.03	2.88	2.72	2.58	2.36
	0.999	9.77	7.94	6.95	6.32	5.88	5.56	5.31	4.95	4.70	4.44	4.17	3.88	3.64	3.26
22	0.900	2.56	2.35	2.22	2.13	2.06	2.01	1.97	1.90	1.86	1.81	1.76	1.70	1.65	1.57
	0.950	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.30	2.23	2.15	2.07	1.98	1.91	1.78
	0.975	4.38	3.78	3.44	3.22	3.05	2.93	2.84	2.70	2.60	2.50	2.39	2.27	2.17	2.00
	0.990	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.26	3.12	2.98	2.83	2.67	2.53	2.31
	0.999	9.61	7.80	6.81	6.19	5.76	5.44	5.19	4.83	4.58	4.33	4.06	3.78	3.54	3.15
23	0.900	2.55	2.34	2.21	2.11	2.05	1.99	1.95	1.89	1.84	1.80	1.74	1.69	1.64	1.55
	0.950	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.27	2.20	2.13	2.05	1.96	1.88	1.76
	0.975	4.35	3.75	3.41	3.18	3.02	2.90	2.81	2.67	2.57	2.47	2.36	2.24	2.14	1.97
	0.990	5.66	4.76	4.26	3.94	3.71	3.54	3.41	3.21	3.07	2.93	2.78	2.62	2.48	2.26
	0.999	9.47	7.67	6.70	6.08	5.65	5.33	5.09	4.73	4.48	4.23	3.96	3.68	3.44	3.05
24	0.900	2.54	2.33	2.19	2.10	2.04	1.98	1.94	1.88	1.83	1.78	1.73	1.67	1.62	1.53
	0.950	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.25	2.18	2.11	2.03	1.94	1.86	1.73
	0.975	4.32	3.72	3.38	3.15	2.99	2.87	2.78	2.64	2.54	2.44	2.33	2.21	2.11	1.94
	0.990	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.17	3.03	2.89	2.74	2.58	2.44	2.21
	0.999	9.34	7.55	6.59	5.98	5.55	5.23	4.99	4.64	4.39	4.14	3.87	3.59	3.36	2.97
25	0.900	2.53	2.32	2.18	2.09	2.02	1.97	1.93	1.87	1.82	1.77	1.72	1.66	1.61	1.52
	0.950	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.24	2.16	2.09	2.01	1.92	1.84	1.71
	0.975	4.29	3.69	3.35	3.13	2.97	2.85	2.75	2.61	2.51	2.41	2.30	2.18	2.08	1.91
	0.990	5.57	4.68	4.18	3.85	3.63	3.46	3.32	3.13	2.99	2.85	2.70	2.54	2.40	2.17
	0.999	9.22	7.45	6.49	5.89	5.46	5.15	4.91	4.56	4.31	4.06	3.79	3.52	3.28	2.89
26	0.900	2.52	2.31	2.17	2.08	2.01	1.96	1.92	1.86	1.81	1.76	1.71	1.65	1.59	1.50
	0.950	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.22	2.15	2.07	1.99	1.90	1.82	1.69
	0.975	4.27	3.67	3.33	3.10	2.94	2.82	2.73	2.59	2.49	2.39	2.28	2.16	2.05	1.88
	0.990	5.53	4.64	4.14	3.82	3.59	3.42	3.29	3.09	2.96	2.81	2.66	2.50	2.36	2.13
	0.999	9.12	7.36	6.41	5.80	5.38	5.07	4.83	4.48	4.24	3.99	3.72	3.44	3.21	2.82

PERCENTAGE POINTS OF THE  $F$  DISTRIBUTION

$\nu_2 \backslash \nu_1$		2	3	4	5	6	7	8	10	12	15	20	30	50	$\infty$
	$q$														
27	0.900	2.51	2.30	2.17	2.07	2.00	1.95	1.91	1.85	1.80	1.75	1.70	1.64	1.58	1.49
	0.950	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.20	2.13	2.06	1.97	1.88	1.81	1.67
	0.975	4.24	3.65	3.31	3.08	2.92	2.80	2.71	2.57	2.47	2.36	2.25	2.13	2.03	1.85
	0.990	5.49	4.60	4.11	3.78	3.56	3.39	3.26	3.06	2.93	2.78	2.63	2.47	2.33	2.10
	0.999	9.02	7.27	6.33	5.73	5.31	5.00	4.76	4.41	4.17	3.92	3.66	3.38	3.14	2.75
28	0.900	2.50	2.29	2.16	2.06	2.00	1.94	1.90	1.84	1.79	1.74	1.69	1.63	1.57	1.48
	0.950	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.19	2.12	2.04	1.96	1.87	1.79	1.65
	0.975	4.22	3.63	3.29	3.06	2.90	2.78	2.69	2.55	2.45	2.34	2.23	2.11	2.01	1.83
	0.990	5.45	4.57	4.07	3.75	3.53	3.36	3.23	3.03	2.90	2.75	2.60	2.44	2.30	2.06
	0.999	8.93	7.19	6.25	5.66	5.24	4.93	4.69	4.35	4.11	3.86	3.60	3.32	3.09	2.69
29	0.900	2.50	2.28	2.15	2.06	1.99	1.93	1.89	1.83	1.78	1.73	1.68	1.62	1.56	1.47
	0.950	3.33	2.93	2.70	2.55	2.43	2.35	2.28	2.18	2.10	2.03	1.94	1.85	1.77	1.64
	0.975	4.20	3.61	3.27	3.04	2.88	2.76	2.67	2.53	2.43	2.32	2.21	2.09	1.99	1.81
	0.990	5.42	4.54	4.04	3.73	3.50	3.33	3.20	3.00	2.87	2.73	2.57	2.41	2.27	2.03
	0.999	8.85	7.12	6.19	5.59	5.18	4.87	4.64	4.29	4.05	3.80	3.54	3.27	3.03	2.64
30	0.900	2.49	2.28	2.14	2.05	1.98	1.93	1.88	1.82	1.77	1.72	1.67	1.61	1.55	1.46
	0.950	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.16	2.09	2.01	1.93	1.84	1.76	1.62
	0.975	4.18	3.59	3.25	3.03	2.87	2.75	2.65	2.51	2.41	2.31	2.20	2.07	1.97	1.79
	0.990	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	2.98	2.84	2.70	2.55	2.39	2.25	2.01
	0.999	8.77	7.05	6.12	5.53	5.12	4.82	4.58	4.24	4.00	3.75	3.49	3.22	2.98	2.59
60	0.900	2.39	2.18	2.04	1.95	1.87	1.82	1.77	1.71	1.66	1.60	1.54	1.48	1.41	1.29
	0.950	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	1.99	1.92	1.84	1.75	1.65	1.56	1.39
	0.975	3.93	3.34	3.01	2.79	2.63	2.51	2.41	2.27	2.17	2.06	1.94	1.82	1.70	1.48
	0.990	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.63	2.50	2.35	2.20	2.03	1.88	1.60
	0.999	7.77	6.17	5.31	4.76	4.37	4.09	3.86	3.54	3.32	3.08	2.83	2.55	2.32	1.89
80	0.900	2.37	2.15	2.02	1.92	1.85	1.79	1.75	1.68	1.63	1.57	1.51	1.44	1.38	1.24
	0.950	3.11	2.72	2.49	2.33	2.21	2.13	2.06	1.95	1.88	1.79	1.70	1.60	1.51	1.32
	0.975	3.86	3.28	2.95	2.73	2.57	2.45	2.35	2.21	2.11	2.00	1.88	1.75	1.63	1.40
	0.990	4.88	4.04	3.56	3.26	3.04	2.87	2.74	2.55	2.42	2.27	2.12	1.94	1.79	1.49
	0.999	7.54	5.97	5.12	4.58	4.20	3.92	3.70	3.39	3.16	2.93	2.68	2.41	2.16	1.72
100	0.900	2.36	2.14	2.00	1.91	1.83	1.78	1.73	1.66	1.61	1.56	1.49	1.42	1.35	1.21
	0.950	3.09	2.70	2.46	2.31	2.19	2.10	2.03	1.93	1.85	1.77	1.68	1.57	1.48	1.28
	0.975	3.83	3.25	2.92	2.70	2.54	2.42	2.32	2.18	2.08	1.97	1.85	1.71	1.59	1.35
	0.990	4.82	3.98	3.51	3.21	2.99	2.82	2.69	2.50	2.37	2.22	2.07	1.89	1.74	1.43
	0.999	7.41	5.86	5.02	4.48	4.11	3.83	3.61	3.30	3.07	2.84	2.59	2.32	2.08	1.62
120	0.900	2.35	2.13	1.99	1.90	1.82	1.77	1.72	1.65	1.60	1.54	1.48	1.41	1.34	1.19
	0.950	3.07	2.68	2.45	2.29	2.18	2.09	2.02	1.91	1.83	1.75	1.66	1.55	1.46	1.25
	0.975	3.80	3.23	2.89	2.67	2.52	2.39	2.30	2.16	2.05	1.94	1.82	1.69	1.56	1.31
	0.990	4.79	3.95	3.48	3.17	2.96	2.79	2.66	2.47	2.34	2.19	2.03	1.86	1.70	1.38
	0.999	7.32	5.78	4.95	4.42	4.04	3.77	3.55	3.24	3.02	2.78	2.53	2.26	2.02	1.54
$\infty$	0.900	2.30	2.08	1.94	1.85	1.77	1.72	1.67	1.60	1.55	1.49	1.42	1.34	1.26	1.00
	0.950	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.83	1.75	1.67	1.57	1.46	1.35	1.00
	0.975	3.69	3.12	2.79	2.57	2.41	2.29	2.19	2.05	1.94	1.83	1.71	1.57	1.43	1.00
	0.990	4.61	3.78	3.32	3.02	2.80	2.64	2.51	2.32	2.18	2.04	1.88	1.70	1.52	1.00
	0.999	6.91	5.42	4.62	4.10	3.74	3.47	3.27	2.96	2.74	2.51	2.27	1.99	1.73	1.00