Algebra

Bor Brudar

Contents

Chapter 1

1.1 Osnovne

Definicija 1.1.1: Linearna Kombinacija

Naj bodo $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \ldots, \vec{a_n}$ poljubni vektorji. Vsak vektor oblike $\alpha_1\vec{a_1} + \alpha_2\vec{a_2} \ldots$, kjer so $\alpha_1 \ldots \in \mathbb{R}$, imenujemo linearna kombinacija vektorjev $\vec{a_1} \ldots \vec{a_n}$. Primer: $2\vec{a_1} + \frac{3}{2}\vec{a_2} - \vec{a_3}$ je linearna kombinacija vektorjev $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3}$.

Definicija 1.1.2: Linearna odvisnost

Vektorji $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \ldots, \vec{a_n}$ so linearno odvisni, kadar lahko enega od njih izrazimo kot linearno kombinacijo ostalih. Vektorji, ki niso linearno odvisni, so linearno neodvisni.

Kadar sta 2 vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ linearno odvisna, velja $\vec{b} = \alpha\vec{a}$ ali $\vec{a} = \beta\vec{b}$. $\vec{a}$ in $\vec{b}$ sta vzporedna (t.j. vsaka usmerjena daljica, ki doloca $\vec{a}$, je vzporedna vsaki usmerjeni daljici, ki doloca $\vec{b}$. (Ko krajevna vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ (skozi izhodisce) lezita na isti premici).

Ce sta $\vec{a}$ in $\vec{b}$ linearno neodvisna, potem vektor $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$ lezi v ravnini, ki jo dolocata ta dva krajevna vektorja.

Vprasanje 1

Velja tudi obratno? Je vsak vektor iz te ravnine oblike $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$?

Resitev: Skozi koncno tocko vektorja $\vec{r}$ potegnemo vzporednico $\vec{b}$. Ker sta $\vec{a}$ in $\vec{b}$ linearno neodvisna, to ta premica seka premico, ki jo doloca $\vec{a}$ v natanko eni tocki. Vektor od $\vec{0}$ do te tocke je $\alpha\vec{a}$ za $\alpha \in \mathbb{R}$. Vektor od te tocke do konca $\vec{r}$ je oblike $\beta\vec{b}, \beta \in \mathbb{R}$. Od tod sledi $\vec{r} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$.

Dokazali smo, da je ravnina napeta med $\vec{a}$ in $\vec{b}$ mnozica vseh vektorjev oblike $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$,kjer sta $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Posledica 1.1.1

Trije krajevni vektorji so linearno odvisni natanko tedaj, ko lezijo na isti ravnini.

Definicija 1.1.3: Baza prostora

Trije linearno odvisni vekotrji so baza prostora $\mathbb{R}^3$. (Baza prostora $\mathbb{R}^3$ je mnozica, ki jo sestavljajo 3 linearno neodvisni vektorji.)

Opomba:

Baza ravnine $\mathbb{R}^2$ je mnozica, ki jo sestavljata 2 linearno neodvisna vektorja.

Trditev 1.1.1

Naj bo $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ baza prostora $\mathbb{R}^3$. Vsak vektor $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$ lahko zapisemo v obliki $\vec{r} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}; \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^3$. Tak zapis je enolicen.

Dokaz: (obstoj in enolicnost): Lahko predpostavimo, da so $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{r}$ krajevni vektorji.

Potegnemo premico, ki je vzporedna $\vec{c}$ in poteka skozi koncno tocko $\vec{r}$. Ta premica seka ravnino, ki jo dolocata $\vec{a}$ in $\vec{b}$ v natanko eni tocki. Ker ta tocka lezi na ravnini, je vektor od $\vec{c}$ do te tocke $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}; \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, kot smo dokazali prej. Vektor od te tocke do koncne tocke $\vec{r}$ je $\gamma\vec{c}, \gamma \in \mathbb{R} \implies \vec{r} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$.

Enolicnost: Recimo, da je $\vec{r} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \alpha'\vec{a} + \beta'\vec{b} + \gamma'\vec{c}$
$= (\alpha - \alpha')\vec{a} + (\beta - \beta')\vec{b} + (\gamma - \gamma')\vec{c} = \vec{0}$.

Ce je npr. $\alpha \neq \alpha'$ lahko izrazimo $\vec{a}$ kot linearno kombinacijo $\vec{b}$ in $\vec{c}$:

$$\vec{a} = -\frac{\beta - \beta'}{\alpha - \alpha'}\vec{b} - \frac{\gamma - \gamma'}{\alpha - \alpha'}\vec{c}.$$

Kar je v protislovju z linerano neodvisnostjo $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Sledi da $\alpha = \alpha'$. Enako za $\beta = \beta'$ in $\gamma = \gamma'$. ☺

Posledica 1.1.2

Stirje vektorji v $\mathbb{R}^3$ so vedno linearno odvisni.

Primer 1.1.1 (Primer baze)

Definirajmo $\vec{i} = (1, 0, 0), \vec{j} = (0, 1, 0)$ in $\vec{k} = (0, 0, 1)$. Mnozica $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ je baza prostora $\mathbb{R}^3$,ki ji pravimo standardna baza.
Ce $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, ga razvijemo po standardni bazi tako:

$$(x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

Opomba:

Standardna baza v $\mathbb{R}^2$ je $\vec{i}, \vec{j}$. Kjer je $\vec{i} = (1, 0), \vec{j} = (0, 1)$.

Trditev 1.1.2

Vektorji $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ so linearno neodvisni natanko takrat, ko velja naslednje:
Ce je $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0}$, potem je $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

Opomba:

Ce $\alpha = \beta = \gamma = 0$, potem je $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0}$. To je obratno od trditve. Ce so linerano odvisne, so lahko $\vec{0}$, tudi ce niso vsi $\alpha, \beta, \gamma = 0$.

Dokaz: ($\implies$) Predpostavimo, da so $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ linearno neodvisni.

Recimo, da velja $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0}$ za $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

Ce je $\alpha \neq 0$, lahko $\vec{a} = -\frac{\beta}{\alpha}\vec{b} - \frac{\gamma}{\alpha}\vec{c}$, kar je v protislovju z linerano neodvisnostjo $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Isto za β, γ.

($\impliedby$) Predpostavimo, da velja sklep, da iz $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0}$. Sledi $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Dokazujemo da so $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ linearno neodvisni.

Recimo, da niso : potem je eden od njih linearna kombinacija ostalih dveh. Predpostavimo lahko, da je to $\vec{a}$.

$$\vec{a} = \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \implies -\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = 0.$$

To je v nasprotju z zacetno predpostavko. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ so torej linearno neodvisni. ☺

1.2 Skalarni produkt

Definicija 1.2.1: Skalarni produkt vektorjev

Skalarni produkt vektorjev $\vec{a_1} = (x_1, y_1, y_1)$ in $\vec{a_2} = (x_2, y_2, z_2)$ je stevilo $\vec{a_1}\vec{a_2} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$.

Lastnosti skalarnega produkta:

1. Komutativnost: $\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a}; \forall \vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$
2. Distributivnost: $\vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}\vec{b} + \vec{a}\vec{c}; \forall \vec{c}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$
3. Homogenost: $(\alpha\vec{a})\vec{b} = \alpha(\vec{a}\vec{b}) = \beta(\alpha\vec{b}); \alpha \in \mathbb{R}$
4. Pozitivna definitnost: $\vec{a}\vec{a} = 0, \forall \vec{a} \in \mathbb{R}^3$. In pa $\vec{a}\vec{a} = 0$, kadar $\vec{a} = \vec{0}$

Asociativnost je neumnost: $(\vec{a}\vec{b})\vec{c} \neq \vec{a}(\vec{b}\vec{c})$. (Prvi oklepaj je vzporeden $\vec{c}$, drugi pa vzporeden $\vec{a}$.
Lastnosti dokazemo tako, da vektorje napisemo po komponentah in poracunamo obe strani enakosti.
Npr. (4) : Naj bo $\vec{a} = (x, y, z)$

$$\vec{a}\vec{a} = xx + yy + zz = x^2 + y^2 + z^2 \geq 0.$$

(1) do (4) so aksiomi za skalarni produkt, ko obravnavamo vektorske prostore s skalarnim produktom.

Definicija 1.2.2: Dolzina (norma) vektorja

Dolzina (norma) vektorja $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ je stevilo $\|\vec{a}\| = \sqrt{\vec{a}\vec{a}}$.

Ce $\vec{a} = (x, y, z)$ krajevni vektor je $\|\vec{a}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, kar je dolzina usmerjene daljice, ki pripada temu vektorju.
Dolzina vektorja je torej enaka dolzini vsake usmerejene daljice, ki pripada temu vektorju.

Izrek 1.2.1

$$\vec{a}\vec{b} = \|\vec{a}\|\|\vec{b}\| \cos\phi,$$

ϕ je kot (med 0 in π) med usmerjenima daljicama s skupnim zacetkom.

Dokaz: Slikca manka lol
Kosinusni izrek: $\|\vec{b} - \vec{a}\| = \|\vec{b}\|^2 + \|\vec{a}\|^2 - 2\|\vec{a}\|\|\vec{b}\| \cos\phi$.
Upostevamo, da je $\|\vec{b} - \vec{a}\|^2 = (\vec{b} - \vec{a})(\vec{b} - \vec{c})$ in to poracunamo po distributivnosti.

$$\vec{b}\vec{b} - \vec{a}\vec{b} - \vec{b}\vec{a} + \vec{a}\vec{a} = \vec{b}\vec{b} + \vec{a}\vec{a} - 2\|\vec{a}\|\|\vec{b}\| \cos\phi$$

$$-2\vec{a}\vec{b} \implies \vec{a}\vec{b} = \|\vec{a}\|\|\vec{b}\| \cos\phi.$$

😄

Dokaz kosinusnega izreka brez skalarnega produkta: (slika lol)
Pitagorov izrek :

$$a^2 = (b\sin\alpha)^2 + (c - \cos\alpha)^2 = b^2\sin^2\alpha + c^2 - 2bc\cos\alpha + b^2\cos^2\alpha) = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha.$$

Razmislek za topokotni trikotnik??
Dokaz Pitagorejskega izreka brez kosinusnega izreka in brez vektorjev. (spet slika)

$$P = (a + b)^2 = c^2 + 4\frac{ab}{2} = a^2 + b^2 + 2ab = c^2 + 2ab = a^2 + b^2 = c^2.$$

Dogovorimo se, da je $\vec{0}$ pravokoten na vsak vektor.

Posledica 1.2.1

$$\vec{a}\vec{b} = 0 \iff \vec{a} \perp \vec{b}.$$

Primer 1.2.1

1. $$\vec{i}\vec{j} = \vec{i}\vec{k} = \vec{j}\vec{k} = 0.$$

   Standardni bazni vektorji so si med sabo pravokotni.

2. Izracunaj kot med $\vec{a} = (1, 1, 2)$ in $\vec{b} = (1, 0, 1)$

   $$\vec{a}\vec{b} = \|\vec{a}\|\|\vec{b}\| \cos\phi.$$

   $$\cos\phi = \frac{\vec{a}\vec{b}}{\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|} = \frac{11 + 10 + 21}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} = \frac{3}{2\sqrt{3}}.$$

3. $\vec{a_1} = (x_1, y_1, 0)$ in $\vec{a_2} = (x_2, y_2, 0)$ vektorja v ravnini $z = 0$. Z $\vec{a_1}$ in $\vec{a_2}$ izrazi ploscino P paralelograma vpetega med $\vec{a_1}$ in $\vec{a_2}$.

   (slikca)

   Naj po ϕ kot med $\vec{a_1}$ in $\vec{a_2}$. Potem $\phi = \|\vec{a_1}\|\|\vec{a_2}\| \sin\phi$.

   Predpostavimo da je par $\vec{a_1}, \vec{a_2}$ pozitivno orientiran. Vektor $\vec{a_1}$ zavrtimo za $\frac{\pi}{2}$ v + smer. Dobljeni vektor ke $\vec{a_1}'$ in naj bo ψ kot med $\vec{a_1}'$ in $\vec{a_2}$.

   $$\psi = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \phi; \phi \leq \frac{\pi}{2} \text{V obeh primerih je } \cos\psi = \sin\phi \\ \phi - \frac{\pi}{2}; \phi > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

   $$\implies P = \|\vec{a_1}\|\|\vec{a_2}\| \sin\phi = \|\vec{a_1}\|\|\vec{a_2}\| \cos\phi = \vec{a_1}'\vec{a_2}$$

   Naj bo θ kot med $\vec{a}1$ in x-osjo.

   (slika spet omfg wtffdsdasdas)

   Potem je $\vec{a_1} = (\|\vec{a_1}\| \cos\theta, \|\vec{a_1}\| \sin\theta, 0) \implies \vec{a_1}' = (\|\vec{a_1}\| \cos\phi + \frac{\pi}{2}, \|\vec{a_1}\| \sin\phi + \frac{\pi}{2}, 0) = (-\|\vec{a_1}\| \sin\phi, \|\vec{a_1}\| \cos\theta, 0) = (-y_1, x_1, 0) \implies P = \vec{a_1}'\vec{a_2} = -y_1x_2 + x_1y_2$.

   Opomba:

   Ce bi bil par $\vec{a_1}, \vec{a_2}$ negativno orientiran, bi dobili $P = y_1x_2 - x_1y_2$.

Izraz $x_1y_2 - y_1x_2$ nam torej pove produkt ploscin paralelograma in orientacije para vektorjev $\vec{a_1}, \vec{a_2}$.
Izraz $x_1y_2 - y_1x_2$ imenujemo determinanta reda 2 in jo oznacimo z

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

Determinanta je torej produkt ploscine paralelograma in orientacije.
Sledi tudi: Vektorja $(\vec{x_1}, \vec{y_1}$ in $(\vec{x_2}, \vec{y_2}$ sta linearno odvisna natanko tedaj, ko

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0 \ .$$

1.3 Vektorski produkt

Definicija 1.3.1: Vektorski produkt

Vektorski produkt $\vec{a}$ in $\vec{b}$ je vektor $\vec{a} \times \vec{b}$, za katerega veljajo naslednje lastnosti:

1. $\vec{a} \times \vec{b}$ je pravokoten na $\vec{a}$ in na $\vec{b}$
2. dolzina je ploscina paralelograma, napetega na krajevna vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$
3. Trojica $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}$ je pozitivno orientirana. To pomeni: ce s konca $\vec{a} \times \vec{b}$ pogledamo na ravnino, ki jo dolocata $\vec{a}$ in $\vec{b}$, potem se $\vec{a}$ zavrti v pozitivni smeri za kot manjsi ali enak 180°, da dobimo vektor, ki kaze v enako smer kot $\vec{b}$.

Posledica 1.3.1

Ce $\vec{a} \parallel$, potem je $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$. Dogovorimo se, da je nicelni vektor vzporeden vsakemu vektorju. Potem velja $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \iff \vec{a} \parallel \vec{b}$.

Naj bo $\vec{a_1} = (x_1, y_1, z_1)$ in $\vec{a_2} = (x_2, y_2, z_2)$. Radi bi izracunali komponente vektorja $\vec{a} \times \vec{b}$. Naj bo $\vec{a} \times \vec{b} = (x_3, y_3, z_3)$. Izracunali bomo z_3.

$z_3 = (\vec{a} \times \vec{b})\vec{k}$

Naj bo θ kot med $(\vec{a_1} \times \vec{a_2}$ in $\vec{k}$. Potem $z_3 = \|\vec{a_1} \times \vec{a_2}\| \|\vec{k}\| \cos\theta = \|\vec{a_1} \times \vec{a_2}\| \cos\theta$.

Naj bosta $\vec{a_1}'$ in $\vec{a_2}'$ pravokotni projekciji vektorjev $\vec{a_1}$ in $\vec{a_2}$ na ravnino $z = 0$.

Ocitno je $\vec{a_1}' = (x_1, y_1, 0)$ in $\vec{a_2}' = (x_2, y_2, 0)$. Ogljisca paralelograma med $\vec{a_1}$ in $\vec{a_2}$ so

$$(0,0,0), (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)\text{in}(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2).$$

Ce te tocke projeciramo na ravnino $z = 0$, dobimo tocke $(0,0,0), (x_1, y_1, 0), (x_2, y_2, 0), (x_1 + x_2, y_1 + y_2, 0)$ kar so natanko ogljisca paralelograma, napetega na vektorja $\vec{a_1}'$ in $\vec{a_2}'$. Po primeru iz skalarnega produkta je ploscina tega projeciranega paralelograma enaka

$$P' = \begin{cases} x_1 y_2 - x_2 y_1; (\vec{a_1}', \vec{a_2}') \text{ pozitivna orientacija} \\ -x_1 y_2 + x_2 y_1; (\vec{a_1}', \vec{a_2}') \text{ negativna orientacija} \end{cases}$$

Kaksna je zveza med originalnim in projeciranim paralelogramom?

(pol je ena neberjljiva slika holy shit ne vem kaj je gor narisanuasjdhaskdjhasj)

Kot med ravnino, ki jo dolocata $\vec{a_1}$ in $\vec{a_2}$ in ravnino, ki jo dolocata $(\vec{i}, \vec{j})$ (oz. $(\vec{a_1}', \vec{a_2}')$) je tudi θ.

Naj bo A koncna tocka vektorja $\vec{a_1}$, B pa koncna tocka vektorja $\vec{a_2}$, C pa naj bo presecisce premice OB in vzporednice (skozi A) presecisca ravnine, napete med $\vec{a_1}$ in $\vec{a_2}$ in ravnine $z = 0(\vec{i}, \vec{j})$???? (dobr kle nevem glih kaj pise pr men lmao)

Tocke A, B, C projeciramo na ravnino $z = 0$ in dobljene tocke oznacimo z crticami. Daljica $A'C'$ in AC sta vzporedni in enako dolgi. Kot med visino na AC in visina na $A'C'$ je tudi 0.

$$\implies V_{A'C'} = V_{AC} * |\cos\theta|$$

$$P_{OA'C'} = P_{OAC}|\cos\theta|.$$

(abs. zaradi topih kotov) Na enak nacin bi dokazali, da je ploscina:

$$P_{A'B'C'} = P_{ABC}|\cos\theta|.$$

Ploscina trikotnika OAB je vsota ali razlika ploscin trikotnikov OAC in ABC. Isto velja za projeciran trikotnik.

$$\implies P_{OA'B'} = P_{OAB}|\cos\theta|.$$

Isto velja za ploscine ustreznih paralelogramov. Torej:

$$P' = \|\vec{a_1} \times \vec{a_2}\| |\cos\theta| \implies z_3 = \|\vec{a_1} \times \vec{a_2}\| \cos\theta = \begin{cases} P'\text{ce je } \theta \text{ ostri} = + \text{ orientacija} \\ -P'\text{ce je } \theta \text{ topi} = \text{- orientacija} \end{cases} = x_1 y_2 - x_2 y_1 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

Na enak nacin dobimo se $x_3 = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}$ in $y_3 = \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & z_2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}$
(x,y,z) ciklicno zamenjamo.

$$(x_1, y_1, z_1) \times (x_2, y_2, z_2) = \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right).$$

Determinante reda 3. je definirana s predpisom:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \implies (x_1, y_1, z_1) \times (x_2, y_2, z_2) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

Lastnosti vektorskega produkta:

1. Anti-komutativnost : $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$
2. Distributivnost: $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}ali(\vec{b} + \vec{c}) \times \vec{a} = \vec{b} \times \vec{a} + \vec{c} \times \vec{a}$
3. Homogenost: $(\alpha\vec{a}) \times \vec{b} = \alpha(\vec{a} \times \vec{b})$

Primer 1.3.1

Izracunaj ploscino trikotnika z ogljisci $A(1, 0, 2), B(2, 2, 0), C(3, -2, 1)$. Po definiciji vektorskega produkta je $\vec{p} = \frac{1}{2}\|\vec{AB} \times \vec{AC}\|$.

$\vec{AB} = (1, 2, -2)$, $\vec{AC} = (2, -2, -1)$. $\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \right) = (-6, -3, -6)$

$p = \frac{1}{2}\|(-6, -3, -6)\| = \frac{1}{2}\sqrt{36 + 9 + 36} = \frac{1}{2}9 = \frac{9}{2}$.

1.4 Mesani produkt

Mesani produkt vektorjev $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ je stevilo $(\vec{a} \times \vec{b})\vec{c}$. Oznacili ga bomo z $\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right]$.

$$\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right] = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}.$$

(Ok zdj sm opazu da sm posazu pisat cdot tk da shikatanai).
Naj bo $\vec{a_1} = (x_1, y_1, z_1), \vec{a_2} = (x_2, y_2, z_2), \vec{a_3} = (x_3, y_3, z_3)$.

$$(\vec{a_1} \times \vec{a_2}) \cdot \vec{a_3} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} \cdot (x_3, y_3, z_3) = \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \right) \cdot (x_3, y_3, z_3) =$$

$$= x_3 \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, -y_3 \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}, z_3 \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_3 & y_3 & z_3 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

Geometrijska interpretacija mesanega produkta: paralelepepid je geometrijsko telo, doloceno s tremi cetvericami paroma vzporednih robov. (nagnjen kvader).

Prostornina V parelepepida je produkt osnovene ploske p in visine v. Ppp. je dolocen s tremi vektorji (slike galore) :
$V = pv$

Kot med $\vec{c}$ in visino oznacino z δ.

$$V = pv = \|\vec{a}\times\vec{b}\|\cdot v = \|\vec{a}\times\vec{b}\|\|\vec{c}\||\cos\delta|.$$

(abs vrednost ce vektor c kaze navzdol). (torej + ce (a,b,c) pozitivno orientirani) ali - v nasprotnem primeru).

$\implies (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$; $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)$ kadar so $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)$ pozitivno orientirani in $-\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}$ sicer.

Mesani produkt $\left[\vec{a},\vec{b},\vec{b}\right]$ je torej produkt prostornine paralepeptida, napetega na $\vec{a},\vec{b}$ in $\vec{c}$ ter orientacije vektorjev.

Posledica 1.4.1

$$\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right] = \left[\vec{c},\vec{a},\vec{b}\right] = \left[\vec{b},\vec{c},\vec{a}\right] = -\left[\vec{b},\vec{a},\vec{c}\right] = -\left[\vec{c},\vec{b},\vec{a}\right] = -\left[\vec{a},\vec{c},\vec{b}\right].$$

Ciklicno menjanje ne spremeni orientacije, menjava dveh elementov pa spremeni.

Posledica 1.4.2

$$[(x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2),(x_3,y_3,z_3)] = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Posledica 1.4.3

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0$$

natanko tedaj, ko so vektorji $(x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2),(x_3,y_3,z_3)$ linearno odvisni.

Lastnosti mesanega produkta:

1. Distributivnost v vseh treh faktorjih: $\left[\vec{a}_1+\vec{a}_2,\vec{b},\vec{c}\right] = \left[\vec{a}_1,\vec{b},\vec{c}\right] = \left[\vec{a}_2,\vec{b},\vec{c}\right]$ enako za ostala dva vektorja.

2. Homogenost v vseh treh faktorjih: $\left[\alpha\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right] = \left[\vec{a},\alpha\vec{b},\vec{c}\right] = \left[\vec{a},\vec{b},\alpha\vec{c}\right] = \alpha\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right]$. Preverimo z racunom in upostevamo lastnosti skalarnega in vektorskega produkta.

1.5 Dvojni vektorski produkt

$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c} = (\vec{a}\cdot\vec{c})\cdot\vec{b} - \left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right)\times\vec{a}$

Dokaz: izracunamo.

Delni geometrijski premislek:

$\vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{a},\vec{b}$

$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c}\parallel\vec{a}\times\vec{b}$

$\left(am,\times\vec{b}\right)\times\vec{c}$ lezi v ravnini, ki ga dolocata $\vec{a}$ in $\vec{b}$.

$\implies \left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c} = \alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$

$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c}\perp\vec{c} \implies \alpha\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)+\beta\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right) = 0$

$\implies \alpha = \gamma\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right), \beta = \gamma\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)$ za nek γ. Racun pokaze, da $\gamma = 1$.

Posledica 1.5.1 Langrangova identiteta

1. V zgornjo formulo vstavimo $\vec{c} \times \vec{d}$ namesto $\vec{c}$.

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \times \left(\vec{c} \times \vec{d}\right) = \left(\vec{a} \cdot \left(\vec{c} \times \vec{d}\right)\right) \cdot \vec{b} = \left(\vec{b} \cdot \left(\vec{c} \times \vec{d}\right)\right) \cdot \vec{a}$$

$$\implies \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \times \left(\vec{c} \times \vec{d}\right) = \left[\vec{a}, \vec{c}, \vec{d}\right] \cdot \vec{b} - \left[\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}\right] \cdot \vec{a}.$$

2. S pomocjo tega izpeljemo:

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \left(\vec{c} \times \vec{d}\right) = \left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \times \vec{d}\right] = \vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \left(\vec{c} \times \vec{d}\right)\right) = -\vec{a} \cdot \left(\left(\vec{c} \times \vec{d}\right) \times \vec{b}\right) =$$

$$-\vec{a} \cdot \left(\left(\vec{c} \cdot \vec{b}\right) \cdot \vec{d} - \left(\vec{b} \cdot \vec{d}\right) \cdot \vec{c}\right) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \cdot \left(\vec{b} \cdot \vec{d}\right) - \left(\vec{a} \cdot \vec{d}\right) \cdot \left(\vec{b} \cdot \vec{c}\right) = \begin{vmatrix} \vec{a} \cdot \vec{c} & \vec{a} \cdot \vec{d} \\ \vec{b} \cdot \vec{c} & \vec{b} \cdot \vec{d} \end{vmatrix}.$$

Langrangova identiteta:

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \left(\vec{c} \times \vec{d}\right) = \begin{vmatrix} \vec{a} \cdot \vec{c} & \vec{a} \cdot \vec{d} \\ \vec{b} \cdot \vec{c} & \vec{b} \cdot \vec{d} \end{vmatrix}$$

Poseben primer: $\vec{c} = \vec{a}, \vec{d} = \vec{b}$:

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 - \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)^2$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos \phi$$

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \sin \phi.$$

1.6 Premica in ravnina v $\mathbb{R}^3$

Definicija 1.6.1: Enacba ravnine

Enacba ravnine Σ je taka enacba v spremenljivkah (x, y, z), da za vsako tocko $T(a, b, c)$ velja: ce $T \in \Sigma$, potem trojica (a, b, c) zadosca enacbi, ce pa tocka ni element ravnine, pa ta trojica ne zadosca enacbi.

Definicija 1.6.2: Normala ravnine

Normala ravnine Σ je vsak nenicelen vektor, ki je pravokoten na Σ. Normala ravnine ne doloci enolicno. Vzporedne ravnine imajo isto normalo. Ravnina je enolicno dolocena z normalo in eno tocko na ravnini.

Naj bo Σ ravnina z normalo $\vec{a} = (a, b, c)$ in naj na tej ravnini lezi tocka $T(x_0, y_0, z_0)$. Naj bo se $T(x, y, z)$ poljubna tocka v prostoru.

(slika)

$$T \in \Sigma \iff \text{vektor } \vec{T_0 T} \text{ lezi na } \Sigma \iff \vec{T_0 T} \perp \vec{n} \iff \vec{T_0 T} \cdot \vec{n} = 0 \iff \left(\vec{r} - r_0\right) \cdot \vec{n} = 0.$$

*Naj bo vektor $\vec{r_0}$ krajevni vektor tocke T_0 in $\vec{r}$ krajevni vektor tocke T.
Enacbi $\vec{n} \cdot \left(\vec{r} - \vec{r_0}\right) = 0$ pravimo vektorska enacba ravnine.
Po komponentah:

$$(a, b, c) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$$

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

$$ax + by + cz - ax_0 - by_0 - cz_0 = 0$$

Oznacimo $d = -ax_0 - by_0 - cz_0 = -\vec{n} \cdot \vec{r_0}$. Potem dobimo enacbo ravnine:

$$ax + by + cz + d = 0.$$

Enacba ravnine je torej linerana enacba v spremenljivkah x, y, z. Velja tudi obratno: vsaka linearna enacba (v x, y, z) je enacba neke ravnine. Normala ravnine z enacbo $ax + by + cz + d = 0$ je vektor (a, b, c). Vec ravnine ima lahko isto normalo - v tem primeru se enacbe razlikujejo v koeficientu d.

Enacba ravnine (ax..) ni enolicno dolocena z ravnino. Ce jo pomnozimo s poljubno nenicelno konstanto, dobimo enacbo iste ravnine.

Pogosto je koristno najti enacbo ravnine za katero je dolzina normala enaka 1. Ce je $\vec{n} = (a, b, c)$ poljubna normala, potem je

$$\frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} = \frac{(a, b, c)}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

enotska normala (dolzine 1).

Potem dobimo enacbo:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} y + \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} + \frac{d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = 0.$$

Kjer $\|\vec{n}\|^2 = a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$. Tej enacbi obicajno recemo normalna enacba ravnine. Normalna enacba ravnine je dolocena do mnozenja z -1 natancno.

Enacba ravnine, podane s tremi nekolinearnimi tockami: Naj bodo $T_0(x_0, y_0, z_0)$, $T_1(x_1, y_1, z_1)$ in $T_2(x_2, y_2, z_2)$ nekolinearne tocke na ravnini Σ. Naj bodo $\vec{r_0}, \vec{r_1}, \vec{r_2}$ njihovi krajevni vektorji.

(slika siaksdmaksjdkas0)

$\vec{T_0T_1}$ in $\vec{T_0T_2}$ lezita na isti ravnini in sta linearno neodvisna. Njun vektorski produkt je nenicelni vektor, ki je pravokoten na ravnino $\Sigma \implies$ Za normalo lahko vzamemo $\vec{T_0T_1} \times \vec{T_0T_2}$.

Po enacbi ravnine $\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r_0}) = 0$

$$\implies (\vec{T_0T_1} \times \vec{T_0T_2} \cdot (\vec{r} - \vec{r_0}) = 0$$
$$(r_1 \vec{-} r_0 \times r_2 \vec{-} r_0) \cdot (\vec{r} - \vec{r_0}) = 0$$
$$[\vec{r_1} - \vec{r_0}, \vec{r_2} - \vec{r_0}, \vec{r} - \vec{r_0}] = 0.$$

Enacba ravnine skozi tocke T_0, T_1, T_2 je torej:

$$[\vec{r} - \vec{r_0}, \vec{r_1} - \vec{r_0}, \vec{r_2} - \vec{r_0}] = 0.$$

Po komponentah:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0.$$

Ko to 3x3 determinanto razpisemo, dobimo enacbo oblike $ax + by + cz + d = 0$,kjer so a, b, c ustrezne poddeterminante reda 2.

Primer 1.6.1

Doloci enacbo ravnine skozi tocke: $T_0(1, -1, 3), T_1(2, 0, 5), T_2(-3, -1, 4)$.

Enacba je

$$0 = \begin{vmatrix} x - 1 & y + 1 & z - 3 \\ 2 - 1 & 0 + 1 & 5 - 3 \\ -3 - 1 & -1 + 1 & 4 - 3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x - 1 & y + 1 & z - 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (x - 1)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - (y + 1)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} + (z - 3)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = x - 9(y+1) + 4(z-3) = x - 9y + 4z - 22.$$

Enacba ravnine je $x - 9y = 4z - 22 = 0$.

1.7 Razdalja do ravnine