

APPUNTI DI

# FONDAMENTI DI AUTOMATICA

Dalle lezioni del Prof. Carlo Piccardi  
per il corso di Ingegneria Matematica

di Teo Bucci

Politecnico di Milano  
A.A. 2019/2020

# *Appunti di Fondamenti di Automatica*

© Gli autori, tutti i diritti riservati

Sono proibite tutte le riproduzioni senza autorizzazione scritta degli autori.

Revisione del 20 febbraio 2022

Developed by Teo Bucci - [teobucci8@gmail.com](mailto:teobucci8@gmail.com)

Compiled with ♥

Per segnalare eventuali errori o suggerimenti potete contattare gli autori.

# Indice

<b>1</b>	<b>Sistemi dinamici lineari a tempo continuo e a tempo discreto</b>	<b>1</b>
1.1	Sistemi a tempo continuo . . . . .	1
1.2	Sistemi a tempo discreto . . . . .	1
1.3	Linearità . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Modello interno</b>	<b>3</b>
2.1	Movimento e traiettoria . . . . .	3
2.2	Equilibrio: esistenza e unicità . . . . .	3
2.3	Casi critici . . . . .	4
2.4	Formula di Lagrange e sovrapposizione degli effetti . . . . .	4
2.5	Modello esterno e funzione di trasferimento . . . . .	5
2.6	Problema della realizzazione . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Stabilità</b>	<b>9</b>
3.1	Riassunto della stabilità a tempo continuo . . . . .	12
3.2	Integratore . . . . .	13
3.3	Riassunto della stabilità a tempo discreto . . . . .	13
3.4	Sistemi discreti: sistemi a memoria finita . . . . .	13
3.5	Test di stabilità . . . . .	13
3.5.1	Test della traccia . . . . .	14
3.5.2	Test della traccia e del determinante . . . . .	14
3.5.3	Test dei coefficienti del polinomio caratteristico . . . . .	14
3.6	Test di Hurwitz (sistemi a tempo continuo) . . . . .	15
3.7	Criterio righe/colonne . . . . .	16
<b>4</b>	<b>Sistemi aggregati</b>	<b>17</b>
4.1	Cascata . . . . .	17
4.2	Parallelo . . . . .	17
4.3	Retroazione . . . . .	18
<b>5</b>	<b>Studio delle traiettorie</b>	<b>19</b>
<b>6</b>	<b>Sistemi non lineari</b>	<b>23</b>
6.1	Equilibrio: esistenza e unicità . . . . .	23
6.2	Stabilità dell'equilibrio . . . . .	23
6.3	Isocline . . . . .	24
6.4	Metodo di linearizzazione . . . . .	24
<b>7</b>	<b>Raggiungibilità</b>	<b>27</b>
7.1	Legge di controllo . . . . .	28
7.2	Scomposizione in parte raggiungibile e non raggiungibile . . . . .	29
<b>8</b>	<b>Osservabilità</b>	<b>31</b>
8.1	Ricostruzione dello stato . . . . .	32
8.2	Scomposizione in parte osservabile e non osservabile . . . . .	33
<b>9</b>	<b>Teorema di separazione e sintesi del regolatore</b>	<b>35</b>

<b>10 Stabilità esterna</b>	<b>37</b>
<b>11 Risposte canoniche</b>	<b>39</b>
11.1 Risposta all'impulso (tempo continuo)	39
11.2 Risposta all'impulso (tempo discreto)	39
11.3 Trasformata di Laplace	40
11.4 Relazione tra funzione di trasferimento e risposta all'impulso	41
11.5 Relazione tra risposta allo scalino e risposta all'impulso	41
11.6 Calcolo di risposte canoniche	41
11.7 Risposta allo scalino	42
<b>12 Regime sinusoidale</b>	<b>47</b>
12.1 Risposta in frequenza	48
12.2 Diagrammi di Bode	49
12.2.1 Diagrammi di Bode del modulo	49
12.2.2 Diagrammi di Bode dell'argomento	51
12.3 Poli complessi coniugati	51
<b>13 Sistemi di controllo</b>	<b>55</b>
13.1 Stabilità asintotica	56
13.2 Banda passante e tempo di risposta	56
13.3 Errore a regime	57
13.4 Disturbo sinusoidale	58

# Capitolo 1

## Sistemi dinamici lineari a tempo continuo e a tempo discreto

Relazioni causa-effetto tra segnali. Un segnale è una funzione continua del tempo.

- a tempo continuo  $t \in \mathbb{R}$ ,  $i \ t \in [0, +\infty)$ ,
- a tempo discreto  $t \in \mathbb{N}$ ,  $t \in \{0, 1, 2, \dots\}$

### 1.1 Sistemi a tempo continuo

Sono fatti così.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ y(t) = g(x(t), u(t)) \end{cases}$$

Questo definisce un sistema dinamico.  $\dot{x}$  denota la derivata rispetto al tempo. In generale  $x(t)$  è un vettore di dimensione  $n$

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

*Esempio (circuito elettrico).* Vediamo un modello di ordine 2

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \frac{1}{L}(x_2(t) - Rx_1(t)) \\ \dot{x}_2(t) = \frac{1}{C}(u(t) - x_1(t)) \end{cases}$$

### 1.2 Sistemi a tempo discreto

Un'equazione alle differenze è del tipo

$$x(t+1) = f(x(t), u(t)), \ t = 0, 1, 2, \dots$$

*Esempio (scuola media)*

È un sistema compartimentale. Come transitano gli individui da un sistema all'altro? Ho 3 compartimenti

$$\begin{aligned} x_1(t+1) &= \alpha_1 x_1(t) + u(t) \\ x_2(t+1) &= \alpha_2 x_2(t) + \beta_1 x_1(t) \\ x_3(t+1) &= \alpha_3 x_3(t) + \beta_1 x_2(t) \end{aligned}$$

Questo rappresenta il totale degli studenti, ma a posso essere interessato a diverse quantità.

La forma generale è

$$\begin{cases} x(t+1) = f(x(t), u(t)) \\ y(t) = g(x(t), u(t)) \end{cases}$$

La  $u(t)$  nella  $y$  c'è in pochissimi modelli, il sistema si dice **improprio** ed è quasi sempre figlia di semplificazioni modellistiche. Scriviamo i vettori

$$u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m, \quad y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_q(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^q, \quad x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

$n$  è l'ordine del sistema.

Se  $m = 1, q = 1$  il sistema è *SISO* (single input single output), studieremo questi. Altrimenti è *MIMO* (multi input multi output).

Siano dati

- $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$  con  $f$  abbastanza regolare
- lo stato iniziale  $x(0)$
- un ingresso applicato  $u(\tau), 0 \leq \tau < t$

Allora  $\exists! x(\tau), 0 \leq \tau < t, \exists! y(\tau) = g(x(\tau), u(\tau))$  e possiamo estendere  $t$  quanto vogliamo. Discorso analogo per quelli a tempo discreto. Per trovare la soluzione ci servono solo lo stato iniziale e l'ingresso applicato.

### 1.3 Linearità

Un sistema a tempo continuo è lineare se

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, u) = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + b_1u \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n, u) = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + b_2u \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, u) = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n + b_nu \\ y(t) &= g(x(t), u(t)) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n + du \end{aligned}$$

Ovvero scriviamo tutto come

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t) \\ y(t) = cx(t) + du(t) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n} & b &= \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times 1} \\ c &= [c_1 \quad \dots \quad c_n] \in \mathbb{R}^{1 \times n} & d &= [d] \end{aligned}$$

Un sistema a tempo discreto è lineare se

$$\begin{aligned} x_1(t+1) &= a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \dots + a_{1n}x_n(t) + b_1u(t) \\ x_2(t+1) &= a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \dots + a_{2n}x_n(t) + b_2u(t) \\ &\vdots \\ x_n(t+1) &= a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \dots + a_{nn}x_n(t) + b_nu(t) \\ y(t) &= c_1x_1(t) + c_2x_2(t) + \dots + c_nx_n(t) + du(t) \end{aligned}$$

Ovvero scriviamo tutto come

$$\begin{cases} x(t+1) = Ax(t) + bu(t) \\ y(t) = cx(t) + du(t) \end{cases}$$

## Capitolo 2

# Modello interno

### 2.1 Movimento e traiettoria

Il **movimento** è la soluzione. La **traiettoria** è il movimento proiettato sullo spazio di stato. Se  $u(t) = \bar{u} \forall t \geq 0$ , cioè l'ingresso è costante, non si intersecano le traiettorie.

Supponendo  $u(t) = \bar{u} \forall t \geq 0$ , consideriamo sistemi lineari del tipo

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + bu(t) \\ x(t+1) &= Ax(t) + bu(t)\end{aligned}$$

### 2.2 Equilibrio: esistenza e unicità

**Definizione 2.1.** Si dice che  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$  è un equilibrio se  $x(0) = \bar{x} \Rightarrow x(t) = \bar{x} \forall t \geq 0$ .

Ovvero, se è in uno stato e poi ci rimane per sempre, quello è uno stato di equilibrio. Esistono tanti tipi di situazioni di questo tipo.

A tempo continuo l'equilibrio si traduce in

$$0 = \dot{x}(t) = \underbrace{Ax(t)}_{\bar{x}} + bu(t) \Rightarrow A\bar{x} = -b\bar{u}$$

È un sistema lineare, ricordiamo quindi i risultati di Rouché-Capelli-Cramer

1. se  $\det A \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$  e  $\boxed{\bar{x} = -A^{-1}b\bar{u}}$
2. se  $\det A = 0 \Rightarrow \nexists A^{-1}$ 
  - (a)  $\nexists \bar{x}$ , non esiste nessuno stato di equilibrio
  - (b)  $\exists \infty \bar{x}$ , esistono infiniti equilibri

**Definizione 2.2.** Si dice **guadagno** la quantità  $\mu$

$$\bar{y} = \mu \bar{u} \Rightarrow \boxed{\mu = \frac{\bar{y}}{\bar{u}}}$$

La si può ricavare dalle relazioni del sistema a tempo continuo in questo modo

$$\begin{aligned}\bar{y} &= c\bar{x} + d\bar{u} \\ &= -cA^{-1}b\bar{u} + d\bar{u} \Rightarrow \boxed{\mu = -cA^{-1}b + d} \\ &= (-cA^{-1}b + d)\bar{u}\end{aligned}$$

Nel caso a tempo discreto l'equilibrio significa

$$\bar{x} = A\bar{x} + b\bar{u} \Rightarrow I\bar{x} - A\bar{x} = b\bar{u} \Rightarrow (I - A)\bar{x} = b\bar{u}$$

È un sistema lineare, valgono gli stessi risultati di prima:

1. se  $\det(I - A) \neq 0 \Rightarrow \exists (I - A)^{-1}$  e  $\boxed{\bar{x} = (I - A)^{-1} b \bar{u}}$
2. se  $\det(I - A) = 0 \Rightarrow \nexists (I - A)^{-1}$ 
  - (a)  $\nexists \bar{x}$ , non esiste nessuno stato di equilibrio
  - (b)  $\exists \infty \bar{x}$ , esistono infiniti equilibri

Mentre per il guadagno è (si noti che è diverso dal caso a tempo continuo)

$$\begin{aligned} \bar{y} &= c\bar{x} + d\bar{u} \\ &= c(I - A)^{-1}b\bar{u} + d\bar{u} \Rightarrow \boxed{\mu = c(I - A)^{-1}b + d} \\ &= (c(I - A)^{-1}b + d)\bar{u} \end{aligned}$$

Nota: nei casi in cui le matrici (rispettivamente  $A$  nel caso continuo e  $(I - A)$  nel caso discreto) non siano invertibili, **il guadagno non è definito**.

## 2.3 Casi critici

**Richiamo di Algebra.** Data una qualunque matrice quadrata  $A$ , il determinante è uguale al prodotto degli autovalori:

$$\det A = \prod_{i=1}^n \lambda_i$$

Quindi:

- tempo continuo:  $\det A = 0 \Leftrightarrow \exists \lambda_i = 0$  (se ne esiste almeno uno nullo)
- tempo discreto:  $\det(I - A) = 0 \Leftrightarrow \exists \lambda_i = 1$  (se ne esiste almeno uno unitario)

## 2.4 Formula di Lagrange e sovrapposizione degli effetti

Nei sistemi dinamici lineari a tempo continuo abbiamo già detto che il movimento è univocamente determinato. Vale allora la formula di Lagrange, la quale ci dice che il movimento è separabile in due fattori additivi, movimento libero e movimento forzato:

$$\boxed{\begin{aligned} x(t) &= e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}bu(\tau)d\tau \\ &= \phi(t)x(0) + \psi(t)u_{[0,t)} \\ &= x_L(t) + x_F(t) \end{aligned}} \quad (1)$$

Ricordiamo che il termine  $e^{At}$  vale

$$e^{At} = I + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \frac{1}{3!}A^3t^3 \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!} = \phi(t)$$

ed è detto **matrice di transizione**. Non si pone il problema di convergenza della serie, in quanto si ha che ciò è garantito qualunque siano  $A, t$ .

Il **movimento libero** è quello che abbiamo se il sistema funziona ad ingresso  $u = 0$ .

Il **movimento forzato** è quello che osserviamo se il sistema parte dallo stato iniziale  $x(0) = 0$ .

**Teorema 2.3 — Sovrapposizione di cause-effetti.**

$$\left. \begin{matrix} x_1(0) \\ u_1(t) \end{matrix} \right\} \Rightarrow x_1(t) \quad \left. \begin{matrix} x_2(0) \\ u_2(t) \end{matrix} \right\} \Rightarrow x_2(t)$$



Allora

$$\left. \begin{aligned} x_3(0) &= \alpha x_1(0) + \beta x_2(0) \\ u_3(t) &= \alpha u_1(t) + \beta u_2(t) \end{aligned} \right\} \Rightarrow x_3(t) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t)$$

**Richiamo di Algebra.** Una matrice  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  si dice **nilpotente** se ha tutti gli autovalori nulli, in particolare in tal caso si ha  $A^n = 0$ .

**Formula di Lagrange per sistemi a tempo discreto.** Il caso discreto è più facile da trattare e si può ricavare a partire da  $x(t+1) = Ax(t) + bu(t)$

$$\begin{aligned} x(0) & \\ x(1) &= Ax(0) + bu(0) \\ x(2) &= Ax(1) + bu(1) = A^2x(0) + Abu(0) + bu(1) \\ x(3) &= Ax(2) + bu(2) = A^3x(0) + A^2bu(0) + Abu(1) + bu(2) \end{aligned}$$

Allora

$$\begin{aligned} x(t) &= A^t x(0) + \sum_{i=0}^{t-1} A^{t-i-1} bu(i) \\ &= \phi(t)x(0) + \psi(t)u_{[0,t)} \\ &= x_L(t) + x_F(t) \end{aligned} \tag{2}$$

## 2.5 Modello esterno e funzione di trasferimento

Per i sistemi a tempo continuo, introduciamo l'operatore  $s$  (trasformata di Laplace)

$$\frac{dv(t)}{dt} = sv, \quad \frac{d^2v(t)}{dt^2} = s^2v, \dots, \quad \frac{d^k v(t)}{dt^k} = s^k v,$$

Il modello esterno esprime la relazione tra l'ingresso e l'uscita usando un polinomio dipendente da  $s$ .

$$D(s)y = N(s)u$$

Si può poi definire la funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

A tempo discreto si introduce la trasformata zeta, codifica lo *shift* del segnale

$$v(t+1) = zv, \quad v(t+2) = z^2v, \dots, \quad v(t+k) = z^k v$$

Quindi riassumendo entrambi i casi:

- t. continuo

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + bu \\ y = cx + du \end{cases} \rightarrow \begin{cases} sx = Ax + bu \\ y = cx + du \end{cases}$$

- t. discreto

$$\begin{cases} x(t+1) = Ax(t) + bu(t) \\ y(t) = cx(t) + du(t) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} zx = Ax + bu \\ y = cx + du \end{cases}$$

Sviluppiamo il caso continuo

$$\begin{cases} (sI - A)x = bu \\ y = cx + du \end{cases}$$

Se  $\det(sI - A) \neq 0$

$$\begin{cases} x = (sI - A)^{-1}bu \\ y = \underbrace{[c(sI - A)^{-1}b + d]}_{G(s)} u \end{cases}$$

Vediamo com'è fatta  $(sI - A)^{-1}$ , sappiamo che al denominatore c'è il polinomio caratteristico di  $A$  calcolato in  $s$ , che moltiplica  $P(s)$ , cioè una matrice di polinomi in  $s$  di grado  $< n$  strettamente. Il polinomio caratteristico ha grado  $n$ .

$$(sI - A)^{-1} = \frac{P(s)}{\Delta_A(s)}$$

Sostituiamola in  $y$

$$y = \left[ c \frac{P(s)}{\Delta_A(s)} b + d \right] u = \left[ \frac{cP(s)b + d\Delta_A(s)}{\Delta_A(s)} \right] u = G(s)u$$

Il grado di  $cP(s)b$  è  $< n$ , mentre il grado di  $d\Delta_A(s)$  è  $n$ . Di conseguenza il grado del numeratore complessivo è  $n$  se  $d \neq 0$  (sistema improprio), mentre è strettamente minore di  $n$  se  $d = 0$ . Scriviamo quindi la funzione di trasferimento come rapporto di polinomi.

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N(s)}{\Delta_A(s)} = \frac{\beta_0 s^n + \beta_1 s^{n-1} + \dots + \beta_n}{s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \dots + \alpha_n}$$

Il denominatore ha sempre grado  $n$ , mentre il numeratore ha grado  $\leq n$ . Indichiamo con  $\beta_m$  il primo coefficiente non nullo.

$$G(s) = \frac{\beta_m s^{n-m} + \dots + \beta_n}{s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \dots + \alpha_n}$$

e fattorizziamo questi polinomi

$$G(s) = \frac{\beta_m (s - q_1)(s - q_2) \dots (s - q_{n-m})}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)} \begin{matrix} \rightarrow \text{zeri} \\ \rightarrow \text{poli} \end{matrix} \quad (3)$$

I  $p_i$  sono le radici del denominatore e sono dette **poli**, i  $q_i$  sono le radici del numeratore e sono detti **zeri**. Se dovessero esserci poli e zeri uguali, ci sarebbe una terrificante semplificazione e perdita di grado.

Notiamo infine un risultato importante:

t. continuo:	$\mu = G(0)$
t. discreto:	$\mu = G(1)$

Nel caso continuo, questo risultato non vale se  $s = 0$  è un polo, cioè è a denominatore, infatti si dividerebbe per 0; anche in questo caso **il guadagno non è definito**. Analogamente si ragiona per il caso discreto.

## 2.6 Problema della realizzazione

Da modello interno  $(A, b, c, d)$  a esterno  $(G(s))$  il passaggio è univoco  $G(s) = c(sI - A)^{-1}b + d$ , il passaggio inverso si chiama realizzazione.

Data  $G(s)$  la quaterna non è unica. Se ne abbiamo una, qualunque altra ottenuta facendo un cambiamento di base nello spazio di stato è una quaterna valida.

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n \rightarrow z = Tx$$

dove  $T \in \mathcal{M}(n \times n)$ ,  $\det T \neq 0$  e quindi  $x = T^{-1}z$ .

Le relazioni di stato e uscita del sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + bu \\ y &= cx + du \end{aligned}$$

diventano

$$\begin{aligned}\dot{z} &= T\dot{x} = T(Ax + bu) = T(AT^{-1}z + bu) = TAT^{-1}z + Tbu = \tilde{A}z + \tilde{b}u \\ y &= c(T^{-1}z) + du = \tilde{c}z + \tilde{d}u\end{aligned}$$

ovvero

$$\boxed{\tilde{A} = TAT^{-1}, \quad \tilde{b} = Tb, \quad \tilde{c} = cT^{-1}, \quad \tilde{d} = d}$$

Dimostriamo che il sistema originale e quello trasformato hanno la stessa funzione di trasferimento

$$\begin{aligned}\tilde{G}(s) &= \tilde{c} \left( sI - \tilde{A} \right)^{-1} \tilde{b} + \tilde{d} \\ &= cT^{-1} \left( sI - TAT^{-1} \right)^{-1} Tb + d && \text{(sostituzione)} \\ &= cT^{-1} \left( sTIT^{-1} - TAT^{-1} \right)^{-1} Tb + d && \text{(furbata)} \\ &= cT^{-1} \left( T(sI - A)T^{-1} \right)^{-1} Tb + d && \text{(raccoglimento)} \\ &= cT^{-1}T(sI - A)^{-1}T^{-1}Tb + d && \text{(inv. di prod. = prod. di inv. al contr.)} \\ &= c(sI - A)^{-1}b + d = G(s)\end{aligned}$$

Tra tutte le forme, con  $d = 0$ , la forma canonica è

$$\begin{aligned}A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ -\alpha_n & \cdots & \cdots & -\alpha_2 & -\alpha_1 \end{bmatrix} & b &= \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ c &= [\beta_n \quad \cdots \quad \cdots \quad \beta_2 \quad \beta_1] & d &= [0]\end{aligned}$$



## Capitolo 3

# Stabilità

Chiamiamo  $\Sigma$  il sistema lineare che stiamo studiando. Studiare la stabilità significa chiedersi cosa succede al sistema per  $t \rightarrow \infty$  quando non si parte dall'equilibrio. Sappiamo che la soluzione si può scrivere come somma di movimento libero e movimento forzato:

$$x(t) = x_L(t) + x_F(t)$$

La stabilità riguarda solo il movimento libero.

1.  $\Sigma$  è **asintoticamente stabile** se  $\lim_{t \rightarrow \infty} x_L(t) = 0 \forall x(0)$ , ovvero se  $\phi(t)x(0) \rightarrow 0$ . Tutte le funzioni dentro  $\phi(t)$  devono tendere a 0, quindi  $x(t) \rightarrow x_F(t)$ , si perde la memoria iniziale del sistema.
2.  $\Sigma$  è **semplicemente stabile** se  $x_L(t) = \phi(t)x(0)$  è limitato  $\forall x(0)$  ma esiste almeno un  $x(0)$  per cui  $\phi(t)x(0) \not\rightarrow 0$  (il limite o non esiste o non tende a zero).
3.  $\Sigma$  è **instabile** se esiste un  $x(0)$  per cui  $x_L(t) = \phi(t)x(0)$  è illimitato (diverge).

Queste definizioni generano una partizione fra i tipi di sistemi. *La stabilità non dipende dall'ingresso  $u$  o da  $b$ , ma solo dalla matrice  $A$ .*

**Teorema 3.1.**  $\Sigma$  asintoticamente stabile se e solo se

$$u(t) = \bar{u} \forall t \geq 0, \begin{cases} \bar{x} \exists! \\ \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \bar{x} \forall x(0) \end{cases}$$

**Stabilità a t. continuo con  $n = 1$**

$$\dot{x} = ax + bu \Rightarrow x_L(t) = \phi(t)x(0) = e^{at}x(0)$$

- se  $a < 0$  è asint. stabile. Se inoltre l'ingresso è costante il valore a equilibrio si trova

$$0 = a\bar{x} + b\bar{u} \Rightarrow \bar{x} = -\frac{b}{a}\bar{u}$$

Introduciamo la **costante di tempo a t. continuo**

$$T = -\frac{1}{a} > 0$$

Dopo circa  $5T$  il valore della funzione è meno dell'1%, quindi il **tempo di risposta** vale

$$T_R \simeq 5T = -\frac{5}{a}$$

- se  $a = 0$  è sempl. stabile,  $x_L(t) = e^{at}x(0) = x(0)$
- se  $a > 0$  è instabile

**Stabilità a t. discreto con  $n = 1$**

- se  $|a| < 1$  è asint. stabile con **costante di tempo a t. discreto**

$$\boxed{T = -\frac{1}{\log |a|}} \Rightarrow \boxed{T_R \simeq 5T = -\frac{5}{\log |a|}}$$

- se  $|a| = 1$  è sempl. stabile
- se  $|a| > 1$  è instabile

In particolare, se  $a < 0$  ci sono oscillazioni.

**Stabilità a t. continuo con  $n \geq 1$  generico.** Facciamo l'ipotesi che  $A$  sia diagonalizzabile e  $\dot{x}(t) = Ax(t)$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n \quad z = \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n \quad z = Tx, \quad x = T^{-1}z, \quad \det T \neq 0$$

Allora  $\dot{z} = \tilde{A}z$ ,  $\tilde{A} = TAT^{-1}$  e  $\sigma(A) = \sigma(\tilde{A})$  con

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Una matrice è diagonalizzabile quando ammette  $n$  autovettori linearmente indipendenti, cioè quando gli autovalori sono regolari. In particolare la condizione è soddisfatta se gli autovalori sono distinti. Si ha che

$$\dot{z} = \tilde{A}z \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{z}_1 = \lambda_1 z_1 \\ \vdots \\ \dot{z}_n = \lambda_n z_n \end{cases}$$

sono  $n$  sistemi di ordine 1 che evolvono in maniera indipendente come  $z_i(t) = e^{\lambda_i t} z_i(0)$ . Allora, se  $A$  è diagonalizzabile,

1.  $A$  è asint. stabile  $\Leftrightarrow \Re(\lambda_i) < 0 \forall i$
2.  $A$  è sempl. stabile  $\Leftrightarrow \Re(\lambda_i) \leq 0 \forall i, \exists i : \Re(\lambda_i) = 0$
3.  $A$  è instabile  $\Leftarrow \exists i : \Re(\lambda_i) > 0$

Gli autovalori sono le radici del polinomio caratteristico

$$\Delta_A(\lambda) = \Delta_{\tilde{A}}(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \dots + \alpha_n$$

Ci può essere un certo  $\lambda_i = a + ib$ , ma dato che stiamo lavorando con matrici a valori reali in quel caso c'è anche il suo complesso coniugato  $\lambda_j = a - ib$  (anche le corrispondenti  $z$  sarebbero complesse). Per capire cosa succede, ricordiamo la formula di Eulero

$$\begin{aligned} z_i(t) &= e^{(a+ib)t} z_i(0) = e^{at} e^{ibt} z_i(0) \\ &= e^{at} [\cos(bt) + i \sin(bt)] z_i(0) \end{aligned}$$

La convergenza è descritta dalla parte reale di  $\lambda_i$ . Studiamo la coppia coniugata  $\lambda_{1,2} = a \pm ib$ :

$$\gamma_1 e^{\lambda_1 t} + \gamma_2 e^{\lambda_2 t} = \gamma_1 e^{at} e^{ibt} + \gamma_2 e^{at} e^{-ibt} = \dots = \alpha e^{at} (\sin(bt) + \beta)$$

con  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Vale la discussione sul valore del parametro  $a$ .

La soluzione è una combinazione lineare di esponenziali, pertanto gli esponenziali più lenti sono quelli che governano la risposta. Chiamiamo il **tempo di risposta dominante**:

$$\boxed{T_D = \max_i T_i} \quad \boxed{T_R \simeq 5T_D}$$

È determinato dall'autovalore più a destra, detto **autovalore dominante**.

Se gli autovalori dominanti sono una coppia complessa coniugata la costante di tempo vale

$$\boxed{T_{1,2} = -\frac{1}{\Re(\lambda_{1,2})}}$$

**Richiamo di Algebra.** Se  $A$  è triangolare a blocchi, il suo spettro è l'unione degli spettri dei blocchi.

$$A = \begin{bmatrix} a & b & f \\ c & d & g \\ 0 & 0 & e \end{bmatrix} \Rightarrow \sigma(A) = \sigma\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) \cup \sigma([e])$$

**Richiamo di Algebra.** Se la matrice è a coefficienti reali, allora se ci sono autovalori complessi, questi sono per forza coniugati.

Se invece  $A$  non è diagonalizzabile, studiamo  $\dot{x} = Ax$  e ricordiamo alcuni risultati.

**Richiamo di Algebra.** Il polinomio caratteristico può essere fattorizzato come un polinomio monico come segue

$$\begin{aligned} \Delta_A(\lambda) &= \det(\lambda I - A) = \lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \dots + \alpha_n \\ &= (\lambda - \lambda_1) \dots (\lambda - \lambda_n) \\ &= \prod_{i=1}^n (\lambda - \lambda_i) \\ &= \prod_{i=1}^k (\lambda - \lambda_i)^{a_i} \end{aligned}$$

con  $k$  il numero di autovalori distinti e  $a_i$  la loro molteplicità algebrica.

**Richiamo di Algebra.** Ogni polinomio caratteristico è annullato dalla propria matrice (teorema di Cayley-Hamilton):

$$\Delta_A(A) = A^n + \alpha_1 A^{n-1} + \dots + \alpha_n I = 0$$

Ci chiediamo allora: esistono polinomi di grado  $< n$  che comunque annullano la matrice? In generale no, ma molte matrici lo hanno e si dice **polinomio minimo** di  $A$ :  $\psi_A(\lambda)$  tale che  $\psi_A(A) = 0$ . Ha la seguente struttura, molto simile al polinomio caratteristico, cambia l'esponente

$$\psi_A(\lambda) = \prod_{i=1}^k (\lambda - \lambda_i)^{b_i}, \quad 1 \leq b_i \leq a_i \quad (4)$$

$b_i$  è l'indice dell'autovalore  $\lambda_i$ . Ha le stesse radici di  $\Delta_A(\lambda)$ , ma in generale la molteplicità può essere più bassa. Andiamo ora a definire la **forma canonica di Jordan**. Nuovamente facciamo un cambio di coordinate  $z = Tx$  che ci porta in  $\dot{z} = \tilde{A}z$ , ma stiamo considerando  $A$  non diagonalizzabile, quindi non troviamo una  $\tilde{A}$  diagonale, tuttavia la cosa più vicina ad essa è la forma di Jordan, che ci permette di capire quando il sistema è stabile o instabile. È una matrice diagonale a blocchi: ci sono  $k$  blocchi distinti, ciascuno di dimensione  $a_1, a_2, \dots, a_k$  relativa all'autovalore

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \boxed{J_1} & & & \\ & \boxed{J_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{J_k} \end{bmatrix}$$

Facciamo uno zoom sul singolo blocco associato all'autovalore  $\lambda_i$ , dentro al quale ci sono altri blocchi che possiamo riordinare liberamente dal più grande al più piccolo. Il più grande ha dimensione  $b_i$ .

$$J_i = \underbrace{\begin{bmatrix} \boxed{J_i^1} \\ \vdots \\ \boxed{J_i^{n_i}} \end{bmatrix}}_{a_i}$$

Questi mini-blocchi quanto sono grandi? Diciamo subito cosa sono  $a_i, b_i, n_i$ :

- $a_i$  molteplicità algebrica nel polinomio caratteristico
- $b_i$  molteplicità algebrica nel polinomio minimo
- $n_i$  molteplicità geometrica di  $\lambda_i$  nel polinomio caratteristico ed è il numero di mini-blocchi interni, cioè la dimensione dell'autospazio associato a  $\lambda_i$ , il numero di autovettori linearmente indipendenti associati a  $\lambda_i$ .

Dire che l'autovalore  $\lambda_i$  è **regolare** significa dire che la molteplicità algebrica è uguale alla molteplicità geometrica, ovvero che ogni mini-blocco deve essere unitario

$$\lambda_i \text{ regolare} \Leftrightarrow n_i = a_i \Leftrightarrow b_i = 1$$

Guardiamo ora il singolo mini-blocco

$$J_i^l = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{bmatrix}$$

A cosa ci è servito questo? Se la matrice è diagonalizzabile riusciamo a decomporre  $z$  in  $n$  sottosistemi tra loro indipendenti, se non lo è posso fare questa decomposizione in sistemi che tra loro non interagiscono, quindi si tratta di capire come funziona il singolo  $J_i^l$ : la sua micro-equazione di stato è fatta così

$$\dot{z}_i^l = J_i^l z_i^l$$

applicando la formula di Lagrange a questo diventa

$$z_i^l(t) = e^{J_i^l t} z_i^l(0)$$

Si tratta ora di capire com'è fatta  $e^{J_i^l t}$ , si può dimostrare che è fatta così

$$e^{J_i^l t} = \begin{bmatrix} 1 & t & t^2/2 & \dots \\ & 1 & t & \ddots & \vdots \\ & & 1 & \ddots & t^2/2 \\ & & & \ddots & t \\ & & & & 1 \end{bmatrix} e^{\lambda_i t}$$

Contiene esponenziali ed esponenziali moltiplicati per potenze di  $t$ , quello che fanno dipende dalla parte reale di  $\lambda_i$ . Si noti che se  $\lambda_i = 0$ , si ha solo la matrice, e ciò che fa *dipende dalla dimensione della matrice!* Se avesse dimensione 1 sarebbe formata solo da

$$[1]$$

che non diverge. Dalla dimensione 2 in poi si includono i  $t$  e diverge. La dimensione della matrice dipende dalla regolarità dell'autovalore, che a sua volta dipende da  $b_i$ . La dimensione della matrice è 1 se  $b_i = 1$ .

### 3.1 Riassunto della stabilità a tempo continuo

Sia  $\dot{x} = Ax$ , allora

- $\Re(\lambda_i) < 0 \forall i \Leftrightarrow A$  asint. stabile
- $\exists i : \Re(\lambda_i) > 0 \Rightarrow A$  instabile (instabilità forte)
- $\Re(\lambda_i) \leq 0 \forall i, \exists i : \Re(\lambda_i) = 0$ 
  - $b_i = 1$  (ossia  $a_i = n_i$ )  $\forall i : \Re(\lambda_i) = 0 \Leftrightarrow A$  sempl. stabile
  - $b_i > 1$  per almeno un  $i$ , cioè l'autovalore è irregolare e tale che  $\Re(\lambda_i) = 0 \Rightarrow A$  instabile (instabilità debole)

Sono presenti oscillazioni se  $\exists \lambda_i$  complessi coniugati.

La morale è che in caso di autovalori nulli dobbiamo distinguere tra semplice stabilità e instabilità, dobbiamo vedere se gli autovalori sono tutti regolari o se almeno uno è irregolare.

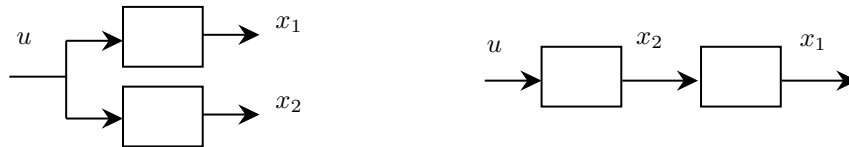


## 3.2 Integratore

È un sistema tale che  $\dot{x} = u$ .

Se lo equipaggiamo con  $y = x$ , quindi  $\dot{y} = u \Rightarrow sy = u \Rightarrow G(s) = \frac{1}{s}$ .

Costruiamo due configurazioni con degli integratori, una in cascata e una in parallelo



- parallelo:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= u \\ \dot{x}_2 &= u \end{aligned} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- cascata

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= u \end{aligned} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

In entrambi i casi gli autovalori sono  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$  con molteplicità algebrica  $a = 2$ . Per capire in che situazioni siamo studiamo quanti autovettori abbiamo tali che  $Ax = \lambda x$  oppure guardiamo il polinomio minimo.  $\Delta_A(\lambda) = \lambda^2$  in entrambi. Il polinomio minimo può essere, tentandoli tutti,  $\psi_A(\lambda) = \Delta_A(\lambda) = \lambda^2$  oppure  $\psi_A(\lambda) = \lambda$ . Il polinomio minimo è quello che si annulla in  $A$ .

- parallelo: se  $\psi_A(\lambda) = \lambda$ , vediamo se valutato in  $A$  si annulla.  $\psi_A(A) = A = 0$ . Il polinomio minimo è  $\lambda$ ,  $b_1 = 1$  allora abbiamo *semplice stabilità*.
- cascata: se  $\psi_A(\lambda) = \lambda$ , vediamo se valutato in  $A$  si annulla.  $\psi_A(A) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq 0$ . Non è il polinomio minimo, allora  $b_1 = 2$  e abbiamo *instabilità*.

## 3.3 Riassunto della stabilità a tempo discreto

Sia  $x(t+1) = Ax(t)$ , allora

- $|\lambda_i| < 1 \forall i \Leftrightarrow A$  asint. stabile
- $\exists i : |\lambda_i| > 1 \Rightarrow A$  instabile (instabilità forte)
- $|\lambda_i| \leq 1 \forall i, \exists i : |\lambda_i| = 1$ 
  - se  $b_i = 1$  ( $a_i = n_i$ )  $\forall i$   $|\lambda_i| = 1$ , cioè quelli critici sono regolari,  $\Rightarrow A$  sempl. stabile
  - se  $b_i > 1$  ( $a_i \neq n_i$ ) per almeno un  $i : |\lambda_i| = 1 \Rightarrow A$  instabile (debolmente)

Sono presenti oscillazioni se si verifica almeno una delle due condizioni

- $\exists \lambda_i \in \mathbb{R}, \lambda_i < 0$
- $\exists \lambda_i$  complessi coniugati

## 3.4 Sistemi discreti: sistemi a memoria finita

Consideriamo  $x_L(t) = A^t x(0)$ . Un sistema discreto si dice **a memoria finita** se  $\exists \bar{t} > 0 : x_L(\bar{t}) = 0 \forall x(0)$ , ossia stiamo chiedendo che  $A^t$  diventi 0 in un tempo finito, ossia  $A$  è nilpotente ( $A^{\bar{t}} = 0$ ), ossia tutti gli autovalori sono nulli  $\lambda_i = 0 \forall i$ .

In tal caso il tempo di risposta è sempre  $\leq n$ , dato che  $A^n = 0$ .

## 3.5 Test di stabilità

Un modo furbo per vedere se è stabile.

### 3.5.1 Test della traccia

**Richiamo di Algebra.** Data una qualunque matrice quadrata  $A$ , la traccia, che per definizione è la somma degli elementi sulla diagonale, è uguale al prodotto degli autovalori

$$\text{tr } A = \sum_{i=1}^n a_{ii} = \sum_{i=1}^n \lambda_i$$

Consideriamo i sistemi a *tempo continuo*  $\dot{x} = Ax$ .

- Se  $\text{tr } A > 0$ , ovvero  $(\lambda_1 + \dots + \lambda_n > 0)$ , allora esiste almeno un autovalore positivo  $\Rightarrow A$  instabile.
- Se  $\text{tr } A = 0 \Rightarrow A$  non è asintoticamente stabile.
- Se  $\text{tr } A < 0$  non possiamo dedurre niente.

Consideriamo i sistemi a *tempo discreto*  $x(t+1) = Ax(t)$ .

- Se  $|\text{tr } A| > n$ , allora almeno uno di loro è maggiore di 1 in modulo  $\Rightarrow A$  instabile.
- Se  $|\text{tr } A| = n \Rightarrow A$  non è asintoticamente stabile.
- Se  $|\text{tr } A| < n$  non possiamo dedurre niente.

### 3.5.2 Test della traccia e del determinante

Lo si usa nel caso  $n = 2$ .

Consideriamo i sistemi a *tempo continuo*  $\dot{x} = Ax$ .

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad \text{tr } A = a_{11} + a_{22} \quad \det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Ricordiamo che la traccia si può anche vedere come la somma degli autovalori, e il determinante come il prodotto degli autovalori. Allora il polinomio caratteristico di  $A$  vale

$$\begin{aligned} \Delta_A(\lambda) &= \det(\lambda I - A) \\ &= (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \\ &= \lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda + \lambda_1\lambda_2 \\ &= \lambda^2 - \text{tr } A \lambda + \det A \end{aligned}$$

Si vede quindi che

- $A$  è asint. stabile se e solo se stanno entrambi a sinistra dell'asse immaginario, quindi  $\text{tr } A < 0$  e  $\det A > 0$  per assicurarsi che abbiano lo stesso segno
- $A$  è instabile se e solo se  $\det A < 0$ , in tal caso si avrebbe un autovalore strettamente positivo e uno strettamente negativo
- $A$  è sempl. stabile se e solo se (non ci sono problemi di regolarità essendo  $n = 2$ )  $\det A = 0$ ,  $\text{tr } A < 0$ , cioè uno è nullo e l'altro è negativo

Consideriamo i sistemi a *tempo discreto*  $x(t+1) = Ax(t)$ .

Non lo dimostriamo perché è rognoso ma si verifica che

$$A \text{ asint. stabile} \Leftrightarrow \begin{cases} |\text{tr } A| < 1 + \det A \\ |\det A| < 1 \end{cases}$$

### 3.5.3 Test dei coefficienti del polinomio caratteristico

Si tratta del caso a *tempo continuo* con  $n \geq 2$ . Se il polinomio caratteristico di  $A$  vale

$$\Delta_A(\lambda) = \lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \dots + \alpha_n$$

si può dire che

$$\boxed{\text{se } A \text{ è asint. stabile} \Rightarrow \alpha_i > 0 \forall i}$$

La coimplicazione vale solo per  $n = 2$ . La dimostrazione è la seguente:

$$\begin{aligned}\Delta_A(\lambda) &= (\lambda - \lambda_1) \cdots (\lambda - \lambda_n) \\ &= \lambda^n + \lambda^{n-1}(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \dots) + \lambda^{n-2}(\lambda_1\lambda_2\lambda_3 + \dots) + \dots + (-1)^n \lambda_1\lambda_2 \dots \lambda_n\end{aligned}$$

Se tutti i  $\lambda$  sono negativi ( $A$  asint. stabile) il loro prodotto è positivo se sono in numero pari, negativo se sono dispari, ma in tal caso c'è  $-1$ . I prodotti a coppie, i prodotti a terne, e tutti gli altri, danno luogo a coefficienti positivi. Non vale il contrario in generale, ma solo per  $n = 2$ . È un test rapido per escludere l'asint. stabilità. Ad esempio, se almeno un coefficiente di  $\Delta_A(\lambda)$  fosse nullo o negativo, possiamo escludere l'asint. stabilità subito.

### 3.6 Test di Hurwitz (sistemi a tempo continuo)

Consideriamo  $\dot{x} = Ax$  e il polinomio caratteristico

$$\Delta_A(\lambda) = \lambda^n + \alpha_1\lambda^{n-1} + \dots + \alpha_n$$

Costruiamo la matrice  $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , ciascuna riga comincia con i coefficienti dispari, e prosegue in ordine decrescente coi rimanenti, poi un 1 e infine 0 fino in fondo. Riempiamo righe fino alla fine. Se arriviamo a riempire tutti gli  $\alpha_i$  si pongono  $\alpha_i = 0, \forall i > n$ .

$$H = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 & 1 & 0 & \dots \\ \alpha_5 & \alpha_4 & \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 & 1 & 0 \\ \vdots & & & & & & \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

Se consideriamo le sottomatrici appoggiate all'angolo Nord-Ovest, di dimensione crescente  $D_1, D_2, \dots, D_n = H$  il criterio di Hurwitz afferma che

$$A \text{ asint. stabile} \Leftrightarrow \det D_i > 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$$

Non sappiamo nulla su dinamiche oscillatorie, tempi di risposta ecc. Vediamo anche nello specifico due casi:

- $n = 2$ , il polinomio caratteristico è  $\Delta_A(\lambda) = \lambda^2 + \alpha_1\lambda + \alpha_2$ , la matrice  $H$  è quindi

$$H = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 1 \\ 0 & \alpha_2 \end{bmatrix}$$

di conseguenza per il criterio di Hurwitz

$$A \text{ asint. stabile} \Leftrightarrow \alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0$$

- $n = 3$ , il polinomio caratteristico è  $\Delta_A(\lambda) = \lambda^3 + \alpha_1\lambda^2 + \alpha_2\lambda + \alpha_3$ , la matrice  $H$  è quindi

$$H = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 1 & 0 \\ \alpha_3 & \alpha_2 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{bmatrix}$$

di conseguenza per il criterio di Hurwitz  $A$  è asint. stabile se e solo se

$$\begin{cases} \alpha_1 > 0 \\ \alpha_2\alpha_1 > \alpha_3 \text{ (cioè } \det D_2 > 0) \\ \alpha_3 (\det D_2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_i > 0, \forall i \\ \alpha_2\alpha_1 > \alpha_3 \end{cases}$$

### 3.7 Criterio righe/colonne

Consideriamo due tipi di matrici, rispettivamente per i sistemi a tempo continuo e discreto:

- t. continuo: **matrici di Metzler** (o matrici essenzialmente non negative), sono tali che  $a_{ij} \geq 0, \forall i \neq j$
- t. discreto: **matrici non negative**, sono tali che  $a_{ij} \geq 0$

Se sussistono queste cose, vale la seguente proprietà: *se tutte le componenti del vettore di stato  $x_i(t)$  sono non negative allo stato iniziale, allora si mantengono tali* (**sistemi positivi**); questa proprietà è molto comune, ad esempio nei sistemi compartimentali. Vediamo un'altra interessante proprietà di questi sistemi, parte del lavoro sviluppato da Frobenius e Perron. Ricordiamo che

- t. continuo: un sistema è asint. stabile se e solo se  $\Re(\lambda_D) < 0$
- t. discreto: un sistema è asint. stabile se e solo se  $|\lambda_D| < 1$

L'autovalore dominante è un po' particolare nel caso di queste matrici:

- t. continuo:  $\lambda_D$  è reale.
- t. discreto:  $\exists \lambda_D$  reale non negativo.

Rimanendo nel caso di queste matrici, enunciamo il **criterio righe/colonne**. La seguente cosa vale per tutte le matrici, sia derivanti da sistemi continui che discreti, poi starà a noi discutere  $\lambda_D$  in base al tipo di sistema. Scriviamo la matrice  $A$ , le somme di riga e le somme di colonna:

$$A = \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & r_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & r_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & r_n \\ c_1 & c_2 & \dots & c_n & \end{array}$$

Allora valgono le seguenti 4 disuguaglianze

$\begin{array}{l} \min r_i \leq \lambda_D \leq \max r_i \\ \min c_i \leq \lambda_D \leq \max c_i \end{array}$
---

## Capitolo 4

# Sistemi aggregati



### 4.1 Cascata

In questo caso  $u_2 = y_1 = c_1 x_1$  e  $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n_1+n_2}$ . Quindi complessivamente lo stato

$$\begin{aligned}
 \dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_1 x_1 + b_1 u_1 \\ A_2 x_2 + b_2 u_2 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} A_1 x_1 + b_1 u_1 \\ A_2 x_2 + b_2 c_1 x_1 \end{bmatrix} \\
 &= \underbrace{\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ b_2 c_1 & A_2 \end{bmatrix}}_{\tilde{A}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\tilde{b}} u
 \end{aligned}$$

mentre l'uscita

$$y = y_2 = c_2 x_2 = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & c_2 \end{bmatrix}}_{\tilde{c}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Osserviamo che  $\tilde{A}$  è triangolare a blocchi

$$\sigma(\tilde{A}) = \sigma(A_1) \cup \sigma(A_2)$$

**Quindi  $\tilde{A}$  è asint. stabile se e solo se  $A_1, A_2$  sono asint. stabili, mentre  $\tilde{A}$  è instabile se e solo se almeno uno tra  $A_1, A_2$  è instabile.**

Per quanto riguarda le funzioni di trasferimento vale

$$y = G_2 u_2 = G_2 y_1 = G_2 G_1 u_1 \Rightarrow \boxed{G(s) = G_1(s) G_2(s)}$$

### 4.2 Parallelo

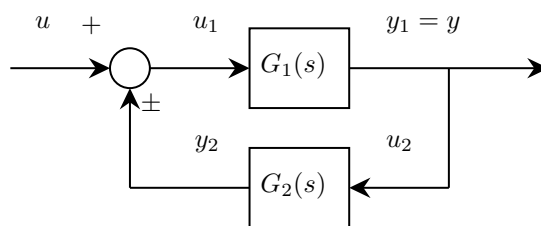
In questo caso  $u_1 = u_2 = u$ . Si verifica

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$$

Il discorso sulla stabilità è uguale. Per la funzione di trasferimento vale

$$y = y_1 + y_2 = G_1 u_1 + G_2 u_2 = (G_1 + G_2) u \Rightarrow \boxed{G(s) = G_1(s) + G_2(s)}$$

### 4.3 Retroazione



In questo caso  $y = y_1 = u_2$  e  $u_1 = u \pm y_2$ . Quindi

$$\begin{aligned} \dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_1 x_1 + b_1 u_1 \\ A_2 x_2 + b_2 u_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A_1 x_1 + b_1 (u \pm y_2) \\ A_2 x_2 + b_2 y_1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A_1 x_1 + b_1 u \pm b_1 c_2 x_2 \\ A_2 x_2 + b_2 c_1 x_1 \end{bmatrix} \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} A_1 & \pm b_1 c_2 \\ b_2 c_1 & A_2 \end{bmatrix}}_{\tilde{A}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\tilde{b}} u \end{aligned}$$

mentre l'uscita

$$y = y_1 = c_1 x_1 = \underbrace{\begin{bmatrix} c_1 & 0 \end{bmatrix}}_{\tilde{c}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

La matrice  $\tilde{A}$  non ha strutture particolari. **Le matrici  $A_1, A_2$  non dicono nulla a priori sulla stabilità dell'aggregato.** Bisogna studiare caso per caso.

Per la funzione di trasferimento vale

$$\begin{aligned} y = y_1 &= G_1 (u \pm y_2) \\ &= G_1 u \pm G_1 y_2 \\ &= G_1 u \pm G_1 G_2 u_2 \\ &= G_1 u \pm G_1 G_2 y \end{aligned}$$

Possiamo raccogliere la  $y$

$$y (1 \mp G_1 G_2) = G_1 u \Rightarrow y = \frac{G_1}{1 \mp G_1 G_2} u \Rightarrow \boxed{G(s) = \frac{G_1(s)}{1 \mp G_1(s) G_2(s)}}$$

Si dice **funzione di trasferimento d'anello**.

## Capitolo 5

# Studio delle traiettorie

Studieremo le traiettorie per i sistemi a t. continuo e con  $n = 2$ . Il sistema che studiamo è

$$\dot{x} = Ax + bu$$

ma possiamo semplificare il nostro studio supponendo  $u(t) = \bar{u} = 0, \forall t \geq 0$ . Non perdiamo generalità in quanto a meno di un cambio di coordinate possiamo traslare il movimento. Infatti se  $\bar{u} \neq 0$  e  $\bar{x}$  è il nostro equilibrio, si ha

$$\begin{aligned} z = x - \bar{x} &\Rightarrow \dot{z} = \dot{x} \\ &= Ax + b\bar{u} \\ &= A(z + \bar{x}) + b\bar{u} \\ &= Az + \underbrace{A\bar{x} + b\bar{u}}_{=0} \end{aligned}$$

infatti  $\bar{x}$  è equilibrio. Quindi possiamo studiare semplicemente

$$\dot{x} = Ax$$

Matricialmente abbiamo

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad \sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2\}$$

Consideriamo l'equazione agli autovettori

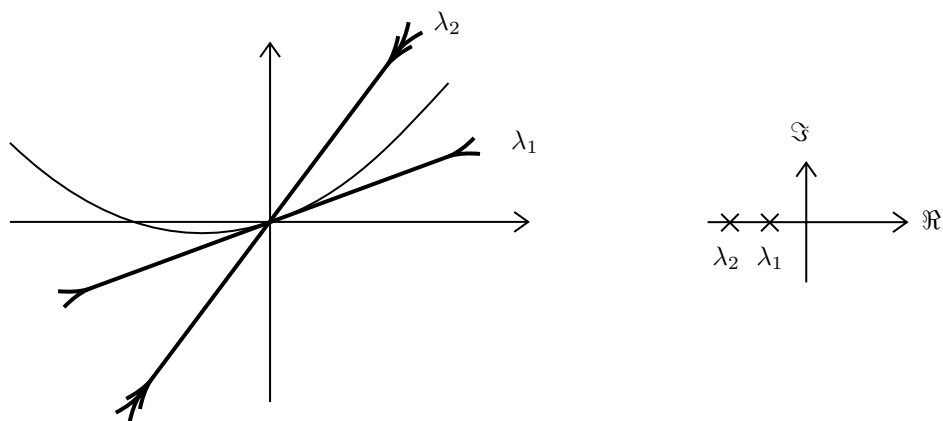
$$\boxed{Ax = \lambda_i x}$$

Se  $x$  è l'autovettore relativo all'autovalore  $\lambda_i$ , allora anche  $\alpha x$  lo è ( $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0$ ). Inoltre, sempre se  $x$  è l'autovettore, l'equazione agli autovettori si può pensare come

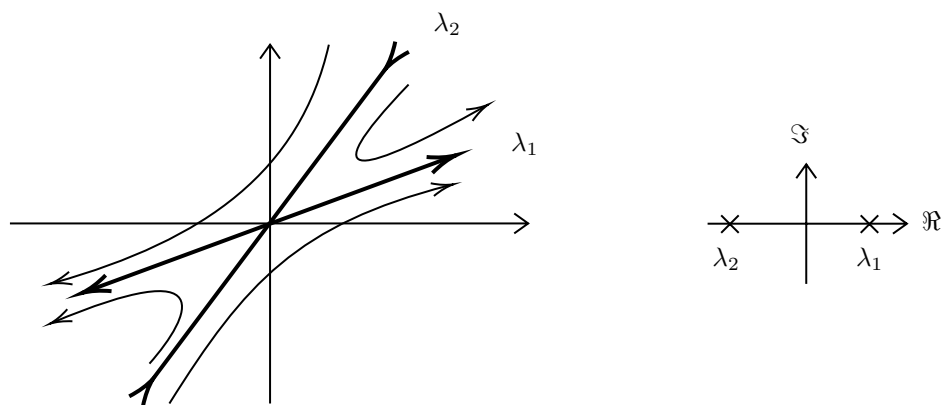
$$\dot{x} = Ax = \lambda_i x \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_i x_1 \\ \lambda_i x_2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{aligned} x_1(t) &= e^{\lambda_i t} x_1(0) \\ x_2(t) &= e^{\lambda_i t} x_2(0) \end{aligned}$$

deduciamo che **gli autovettori sono gli unici luoghi di traiettorie rettilinee**: se  $\lambda$  è negativo, è percorso verso 0, se è positivo è percorso verso  $+\infty$ , se è nullo rimane costante. Partendo da un qualunque altro punto si ha combinazione lineare di tutti i modi. Analizziamo una serie di casi per capire cosa succede, sempre nel caso  $\dot{x} = Ax$ .

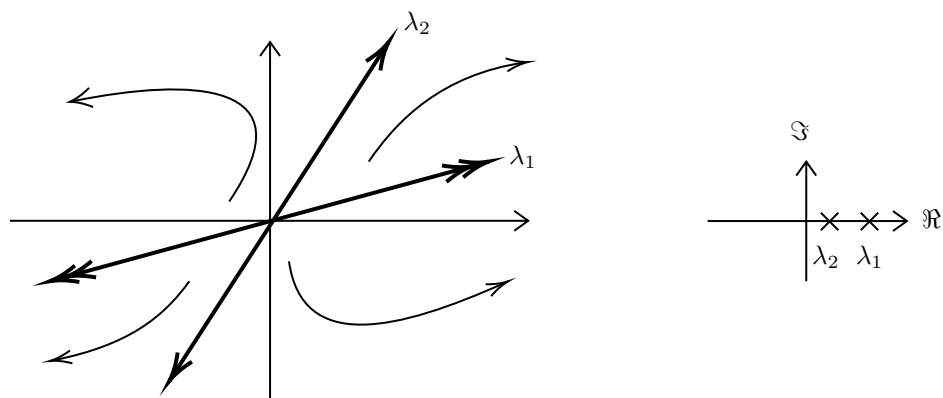
- **Autovalori reali negativi.** Le traiettorie tendono all'equilibrio, 0 in questo caso, tangenti all'autovalore dominante, ovvero quello più lento, quello più a destra possibile. Si dice *nodo stabile*.



- **Autovalori reali, uno negativo e uno positivo.** Si ha divergenza ovunque fuorché lungo l'autovettore relativo all'autovalore negativo. Si dice *sella*.

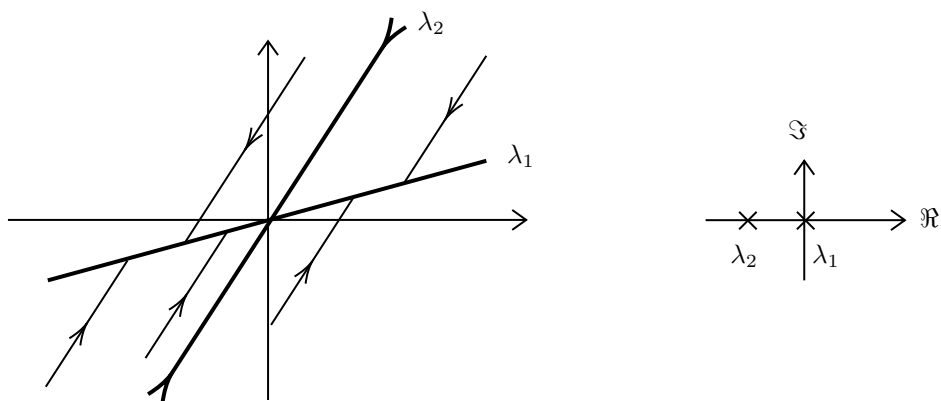


- **Autovalori reali positivi.** C'è divergenza ovunque, tendendo a essere paralleli a quello dominante. Si dice *nodo instabile*.



- **Autovalori reali, uno negativo e uno nullo.** Quello nullo dà contributo statico, per cui ogni stato su tale autovettore rimane lì, mentre quello negativo fa tendere asintoticamente in modo parallelo alla sua linea. Muoiono asintoticamente sull'autovettore relativo all'autovalore nullo.

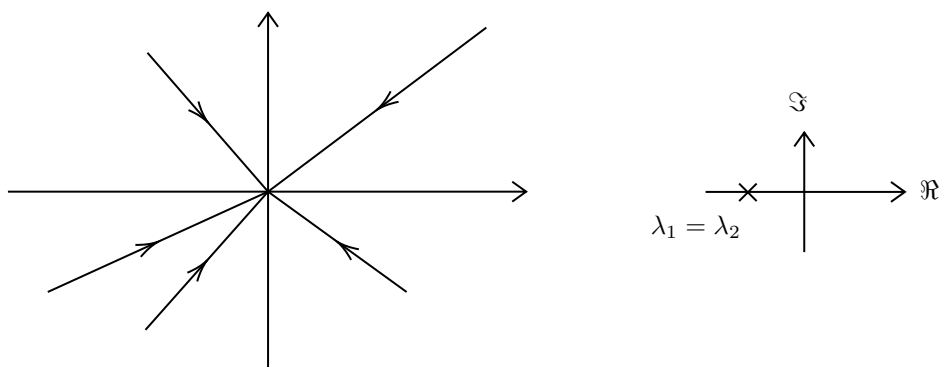




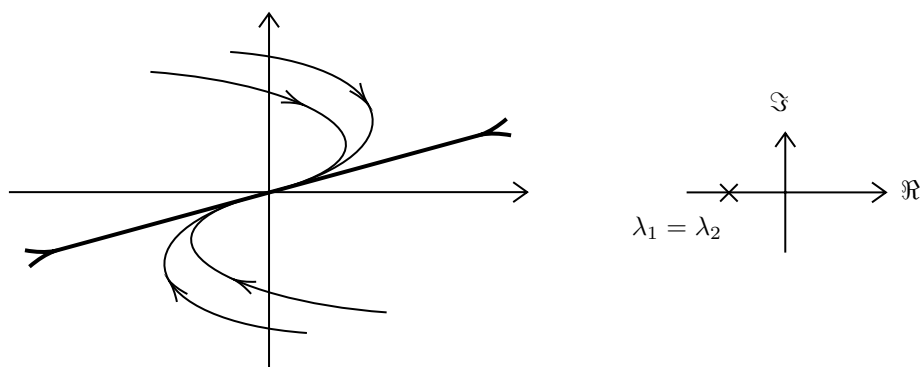
- **Autovalori negativi, coincidenti.** Qui si deve distinguere se  $A$  è diagonalizzabile o meno. È simile, rispettivamente, a una di queste due matrici.

$$\tilde{A}_1 = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad \tilde{A}_2 = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

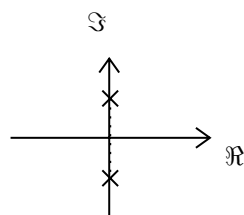
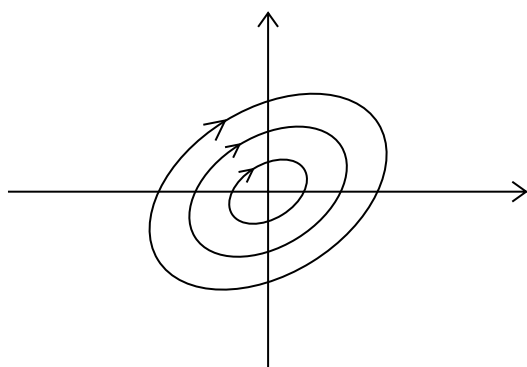
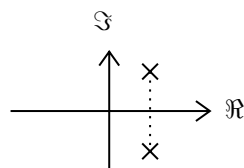
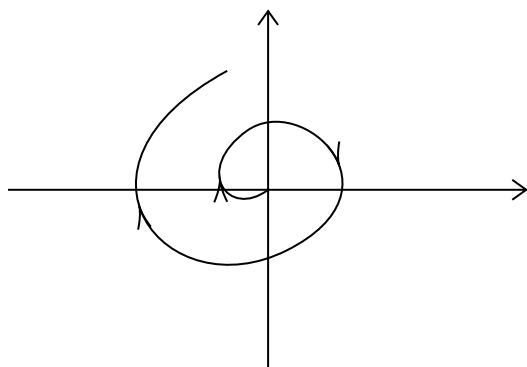
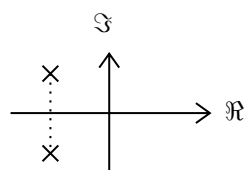
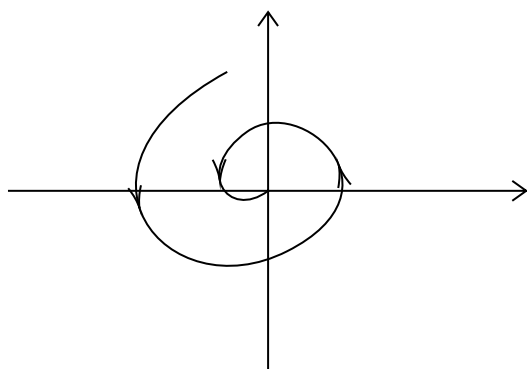
- Nel primo caso, l'equazione agli autovettori è  $\tilde{A}x = \lambda x \Rightarrow \lambda Ix = \lambda x$ , tutti i punti si trovano su degli autovettori. Si dice *nodo stellato*.



- Nel secondo caso, si ha un solo autovettore.



- **Autovettori complessi.** Si ha una dinamica oscillatoria, la configurazione dipende dalla parte reale degli autovalori. Se è negativa si ha un *fuoco stabile*, se è positiva si ha un *fuoco instabile*, se è nulla si ha un *centro*.



In dimensione 3 si può ragionare analogamente.

# Capitolo 6

## Sistemi non lineari

Ricordiamo che in generale i sistemi si scrivono come

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(x(t), u(t)) \\ x(t+1) &= f(x(t), u(t))\end{aligned}$$

Rinnoviamo l'ipotesi di ingresso costante  $u(t) = \bar{u} \forall t \geq 0$ . Dato che lo possiamo considerare come un parametro, studieremo

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(x(t)) \\ x(t+1) &= f(x(t))\end{aligned}$$

### 6.1 Equilibrio: esistenza e unicità

Gli equilibri, analogamente ai sistemi lineari, li troviamo imponendo

$$\begin{aligned}f(x(t)) &= 0 \\ f(x(t)) &= x\end{aligned}$$

### 6.2 Stabilità dell'equilibrio

La trattazione di equilibrio è dovuta a Liapunov. Un equilibrio è

- **stabile** se  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0$  tale che

$$\|x(0) - \bar{x}\| < \delta_\varepsilon \Rightarrow \|x(t) - \bar{x}\| < \varepsilon \quad \forall x(0) : \|x(0) - \bar{x}\| < \delta_\varepsilon, \forall t \geq 0$$

cioè tale per cui per stati iniziali vicini all'equilibrio, non mi allontanano

- **asintoticamente stabile** se

- è stabile

- $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \bar{x} \quad \forall x(0) : \|x(0) - \bar{x}\| < \delta_\varepsilon$

sono un sottoinsieme di quelli stabili. Col passare del tempo non solo non mi devo allontanare, ma mi devo riavvicinare all'equilibrio.

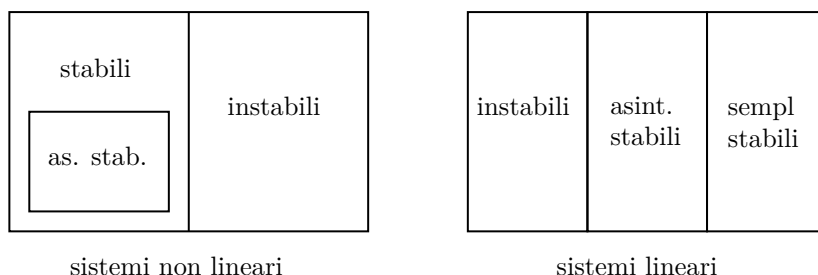
- **instabile** se non è stabile

Se un equilibrio è asint. stabile si definisce il suo **bacino di attrazione**

$$B(\bar{x}) = \{x(0) : x(t) \rightarrow \bar{x}\}$$

Si può poi dire che  $\bar{x}$  asint. stabile è **globalmente stabile** se  $B(\bar{x}) = \mathbb{R}^n$ , ma possiamo dare una definizione più morbida:  $\bar{x}$  asint. stabile è **quasi globalmente stabile** se  $B(\bar{x}) = \mathbb{R}^n$  a meno di un insieme di misura nulla.

Nei sistemi non lineari la classificazione è diversa dai sistemi lineari:



Nei sistemi lineari la stabilità è attributo del sistema, nei sistemi non lineari la stabilità è attributo dell'equilibrio.

Si presenta una casistica, i cui primi 3 casi erano presenti anche per i sistemi lineari

- $\nexists \bar{x}$ , non esistono equilibri (pallina su superficie obliqua)
- $\exists! \bar{x}$ , equilibrio unico (pallina in una conca)
- $\exists \infty \bar{x}$ , infiniti (non numerabili) equilibri (pallina in piano)
- $\exists$  un numero finito maggiore di 1 di equilibri  $\bar{x}$  (più conche)
- $\exists \infty \bar{x}$ , infiniti (numerabili) di equilibri (infinite conche)

*Esempio: crescita logistica.* Parto dal modello di Malthus e arrivo alla crescita logistica. Sia  $x(t)$  la dimensione della popolazione.

$$\dot{x}(t) = rx(t), \quad r > 0 \quad \Rightarrow \quad x(t) = e^{rt}x(0)$$

La popolazione crescerebbe all'infinito, ma le risorse dopo un po' scarseggiano, quindi non è lecito supporre  $r$  costante, ma dipende da  $x$  e decresce con essa.

$$r = r_0 \left(1 - \frac{x}{k}\right)$$

Quindi la relazione diventa

$$\dot{x}(t) = r_0 \left(1 - \frac{x}{k}\right) x = f(x)$$

non è lineare. Siamo nel caso di 2 equilibri:  $\bar{x} = 0, \bar{x} = k$ . Matematicamente se siamo tra 0 e  $k$ ,  $f(x)$  è positiva, quindi  $\dot{x}(t)$ . Invece se siamo oltre  $k$  uno dei due fattori diventa negativo e quindi  $\dot{x}(t)$ . Ipotizzando di considerare anche  $x$  negativi, si deduce anche che 0 è un equilibrio instabile.  $k$  è un equilibrio stabile, viene detto capacità portante. Il bacino di attrazione di  $\bar{x} = k$  è  $B(\bar{x}) = \mathbb{R}_+$ .

## 6.3 Isocline

Studiare le isocline significa studiare

$$f_i(x_1, x_2) = k$$

Nello specifico, se studiamo il caso  $k = 0$ , stiamo sostanzialmente cercando i punti a tangente nulla rispetto a una specifica variabile.

## 6.4 Metodo di linearizzazione

Vediamo il caso a tempo continuo. Sia  $\dot{x}(t) = f(x(t))$ ,  $\dot{x} \in \mathbb{R}^n$  e sia  $\bar{x} : f(\bar{x}) = 0$  uno stato di equilibrio. Consideriamo  $z(t) = x(t) - \bar{x}$ . Si ha

$$\dot{z} = \dot{x} = f(x) = f(\bar{x} + z)$$

Facciamo lo sviluppo di Taylor nell'intorno di  $\bar{x}$

$$\dot{z} = \underbrace{f(\bar{x})}_{=0} + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{z=0, x=\bar{x}} z + \dots = A(\bar{x})z + \dots$$

dove

$$\frac{\partial f}{\partial x} = A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

è la **matrice jacobiana**. Butto via i termini superiori al primo, e definisco il **sistema linearizzato nell'intorno di  $\bar{x}$**

$$\dot{z} = A(\bar{x})z$$

Consideriamo ora  $\dot{x} = f(x)$  con  $\bar{x}$  equilibrio e il suo sistema linearizzato  $\dot{z} = A(\bar{x})z$ . Dobbiamo introdurre il concetto di varietà, ne esistono tre tipi

- stabile
- instabile
- centro

È un insieme definito, in  $\mathbb{R}^n$ , localmente nell'intorno di un punto, tale da essere localmente in corrispondenza biunivoca con uno spazio di  $\mathbb{R}^m, m \leq n$ . Per esempio una curva in un piano.

Gli autovalori del sistema linearizzato sono

$$\sigma(A(\bar{x})) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$$

e li partizioniamo in base al segno della loro parte reale

- ce ne sono  $n^-$  con  $\Re(\lambda) < 0$
- ce ne sono  $n^+$  con  $\Re(\lambda) > 0$
- ce ne sono  $n^0$  con  $\Re(\lambda) = 0$

ovviamente  $n^- + n^+ + n^0 = n$ . Si possono dimostrare i seguenti risultati

1. Esistono nell'intorno di  $\bar{x}$  le tre varietà
  - (a)  $W^s$  varietà stabile,  $\dim W^s = n^-$
  - (b)  $W^u$  varietà instabile,  $\dim W^u = n^+$
  - (c)  $W^0$  varietà centro,  $\dim W^0 = n^0$
2.  $W^s, W^u, W^0$  includono  $\bar{x}$  e sono tangenti in  $\bar{x}$  alle corrispondenti varietà del sistema linearizzato
3.  $W^s, W^u, W^0$  sono invarianti rispetto a  $\dot{x} = f(x)$
4. Su  $W^s, W^u$  la dinamica è equivalente a quella di  $\dot{z} = A(\bar{x})z$
5. Su  $W^0$  la dinamica è governata dai termini di ordine superiore dello sviluppo di Taylor

Valgono inoltre i seguenti importanti risultati (non sono coimplicazioni)

- $A(\bar{x})$  asint. stabile  $\Rightarrow \bar{x}$  asint. stabile
- $A(\bar{x})$  fortemente instabile  $\Rightarrow \bar{x}$  instabile

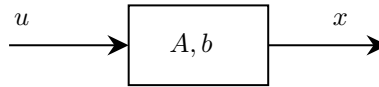
Se ci sono autovalori nulli e nessuno strettamente positivo in  $A(\bar{x})$  non possiamo dire nulla su  $\bar{x}$  proprio per il problema che la dinamica sulle varietà centro è governata da termini di ordine superiore al primo.

Se non ci sono autovalori nulli, ovvero non ci sono varietà centro, l'equilibrio si dice anche *iperbolico*.



## Capitolo 7

# Raggiungibilità



Consideriamo sistemi del tipo

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + bu \\ x(t+1) &= Ax(t) + bu(t)\end{aligned}$$

Non ci serve mettere in evidenza l'uscita. Ci interroghiamo su come l'ingresso influenza lo stato. Ricordiamo che se conosciamo  $x(0)$  e l'ingresso  $u_{[0,t]}$  possiamo determinare lo stato e scomporlo in due parti

$$x(t) = \phi(t)x(0) + \psi(t)u_{[0,t]}$$

ricordiamo che  $\psi$  è un operatore, non una matrice. Se  $x(0) = 0 \Rightarrow x(t) = \psi(t)u_{[0,t]}$

**Definizione 7.1.**  $\tilde{x}$  è uno **stato raggiungibile** all'istante  $t$  se esiste  $u_{[0,t]}$  tale che  $x(t) = \tilde{x}$ , con  $x(0) = 0$ .

Chiamiamo **insieme di raggiungibilità**

$$X_R(t) = \{\text{insieme degli } \tilde{x} \text{ raggiungibili in } t\} = \Im(\psi(t)) \subseteq \mathbb{R}^n$$

$X_R(t)$  è un sottospazio di  $\mathbb{R}^n$ , quindi gode ad esempio della proprietà

$$v_1, v_2 \in S \Rightarrow \alpha v_1 + \beta v_2 \in S \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

quindi sono rette, piani, iperpiani, ecc.

Un'altra proprietà è che: se  $t_2 > t_1 \Rightarrow X_R(t_2) \supset X_R(t_1)$ , l'insieme di raggiungibilità tende a diventare più grande, includendo sempre i precedenti. In particolare, si espande con *discontinuità*.

**Definizione 7.2.**  $(A, b)$  è completamente raggiungibile se  $X_R = \mathbb{R}^n$ , ovvero  $\dim X_R = n$ .

Introduciamo la **matrice di raggiungibilità**  $R$ :

$$R = \begin{bmatrix} b & Ab & A^2b & \dots & A^{n-1}b \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

Si dimostra che

$$X_R = \Im(R) = \text{span}(R)$$

da cui si deduce anche

$$\dim(X_R) = \text{rank}(R)$$

e che

$$(A, b) \text{ compl. ragg.} \Leftrightarrow \text{rank}(R) = n \Leftrightarrow \det R \neq 0$$

*Dimostrazione a tempo discreto (perché più facile).*

Se parto in  $x(0) = 0$ , cosa posso raggiungere all'istante  $t = 1$ ? Siccome  $u(0)$  è arbitrario, posso raggiungere l'immagine di  $b$

$$\begin{aligned}
 x(0) &= 0 \\
 x(1) &= Ax(0) + bu(0) & X_R(1) &= \mathfrak{S}(b) \\
 x(2) &= Abx(0) + bu(1) \\
 &= [b \quad Ab] \begin{bmatrix} u(1) \\ u(0) \end{bmatrix} & X_R(2) &= \mathfrak{S}([b \quad Ab]) \\
 &\vdots \\
 x(t) &= A^{t-1}bu(0) + A^{t-2}bu(1) + \dots + Abx(t-2) + bu(t-1) \\
 &= [b \quad Ab \quad \dots \quad A^{t-2}b \quad A^{t-1}b] \begin{bmatrix} u(t-1) \\ u(t-2) \\ \vdots \\ u(1) \\ u(0) \end{bmatrix} & X_R(t) &= \mathfrak{S}([b \quad \dots \quad A^{t-1}b])
 \end{aligned}$$

Qui si vede bene che il sottospazio tende ad espandersi, se il nuovo vettore è linearmente indipendente dagli altri. Perché ci fermiamo in  $n-1$ ? Perché tutti quelli successivi saranno sicuramente combinazioni lineari dei precedenti. Questo vale per il teorema di Cayley-Hamilton

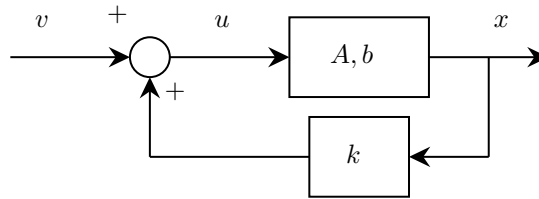
$$\begin{aligned}
 \Delta_A(\lambda) &= \lambda^n + \alpha_1\lambda^{n-1} + \dots + \alpha_n \\
 \Rightarrow \Delta_A(A) &= A^n + \alpha_1A^{n-1} + \dots + \alpha_nI = 0
 \end{aligned}$$

Possiamo moltiplicare tutto per  $b$

$$A^n b + \alpha_1 A^{n-1} b + \dots + \alpha_n b = 0 \Rightarrow A^n b = -\alpha_1 A^{n-1} b - \dots - \alpha_n b$$

È inutile andare avanti, all' $n$ -esimo iniziano a essere combinazioni dei precedenti. Tutti gli stati raggiungibili sono raggiungibili in al più  $n$  passi, dopo quelli non apriamo più nuove direzioni.

## 7.1 Legge di controllo



Scriviamo il caso a tempo continuo.

$$\dot{x} = Ax + bu \quad \boxed{u = kx + v} = [k_1 \quad k_2 \quad \dots \quad k_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + v$$

Come si mette a funzionare il sistema? Sostituiamo  $u$  nel sistema

$$\boxed{\dot{x} = (A + bk)x + bv}$$

Evolve con la matrice  $A + bk$ , ma possiamo cambiarla? Sì, col seguente teorema.



**Teorema 7.3.** Teorema di assegnamento degli autovalori. Per ogni polinomio  $\Delta^*(\lambda) = \lambda^n + \alpha_1^* \lambda^{n-1} + \dots + \alpha_n^*$  esiste  $k$  tale che  $\Delta_{A+bk}(\lambda) = \Delta^*(\lambda)$ , se e solo se  $(A, b)$  è completamente raggiungibile.

## 7.2 Scomposizione in parte raggiungibile e non raggiungibile

Studiamo il caso di non completa raggiungibilità, cioè  $\text{rank}(R) = r < n$ . Definiamo  $X_{NR}$  **sottospazio di non raggiungibilità**

$$X_{NR} = X_R^\perp \Rightarrow \dim X_{NR} = n - r$$

è il complemento ortogonale di  $X_R$ . Qualunque sistema non completamente raggiungibile si scompone in 2 sistemi di cui uno compl. raggi. e uno non compl. raggi. Questa scomposizione si vede facendo un cambio di coordinate, che esiste sempre:

$$z = Tx$$

La  $T^{-1}$  si costruisce prendendo vettori linearmente indipendenti,  $r$  da  $X_R$  e  $n - r$  da  $X_{NR}$

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} x^1 & \dots & x^r & x^{r+1} & \dots & x^n \end{bmatrix}$$

Il nuovo vettore di stato  $z$  lo potremo sempre vedere come

$$z = \begin{bmatrix} z_R \\ z_{NR} \end{bmatrix}$$

Partendo da  $z(0) = 0$  possiamo raggiungere stati del tipo  $z = \begin{bmatrix} z_R \\ 0 \end{bmatrix}$

Il cambio di coordinate permette di guardare  $A$  e  $b$  in modo diverso:

$$(A, b) \rightarrow \left( \underbrace{TAT^{-1}}_{\tilde{A}}, \underbrace{Tb}_{\tilde{b}}, \underbrace{cT^{-1}}_{\tilde{c}} \right)$$

Algebricamente

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} \dot{z}_R \\ \dot{z}_{NR} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A_R & A_{R,NR} \\ 0 & A_{NR} \end{bmatrix}}_{\tilde{A}} \begin{bmatrix} z_R \\ z_{NR} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} b_R \\ 0 \end{bmatrix}}_{\tilde{b}} u$$

Dove  $A_R, b_R$  è un sistema completamente raggiungibile.

**Definizione 7.4.**  $(A, b)$  si dice stabilizzabile se  $\exists k$  tale che  $(A + bk)$  è asint. stabile.

Segue quindi che

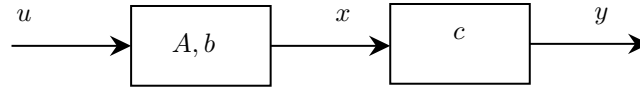
- se  $(A, b)$  è completamente raggiungibile, allora è stabilizzabile
- se  $(A, b)$  non è completamente raggiungibile, si induce la scomposizione e vuol dire che possiamo assegnare liberamente solo gli autovalori della parte raggiungibile. Pertanto è stabilizzabile se e solo se  $A_{NR}$  è di suo asint. stabile.



# Capitolo 8

## Osservabilità

È il duale della raggiungibilità.



La  $y$  consiste in una misurazione, che di solito è costosa e vogliamo farne poche. Sotto certe ipotesi, possiamo *ricostruire* lo stato a partire dall'uscita.

**Definizione 8.1.**  $\tilde{x}$  è uno **stato non osservabile** in  $[0, t]$  se lasciando evolvere il sistema di movimento libero, trovo in uscita  $y(\tau) = 0 \ \forall \tau \in [0, t]$ .

Chiamiamo **insieme di non osservabilità**

$$X_{NO}(t) = \{\tilde{x} : c\phi(\tau)\tilde{x} = 0 \ \forall \tau \in [0, t]\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

$X_{NO}(t)$  è un sottospazio di  $\mathbb{R}^n$ .

Se  $t_2 > t_1 \Rightarrow X_{NO}(t_2) \subset X_{NO}(t_1)$ . Se l'uscita è nulla in  $[0, t_2]$ , allora lo è anche in  $[0, t_1]$ . Al passare del tempo tende a diventare più piccolo, con discontinuità perché è un sottospazio. Definiamo  $t^*$  l'ultimo istante in cui non cambia  $X_{NO}$ , cioè

$$X_{NO}(t) = X_{NO}(t^*) \ \forall t \geq t^*$$

Questo spazio  $X_{NO}(t^*)$  lo chiamiamo semplicemente **sottospazio di non osservabilità**.

**Definizione 8.2.**  $(A, c)$  è completamente osservabile se  $X_{NO} = \{0\}$ , ovvero  $\dim X_{NO} = 0$ .

Introduciamo la **matrice di osservabilità**  $O$

$$O = \begin{bmatrix} c \\ cA \\ \vdots \\ cA^{n-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

Si dimostra che

$$X_{NO} = \ker(O) = [\Im(O^T)]^\perp$$

da cui si deduce anche

$$\dim(X_{NO}) = \dim(\ker(O)) = n - \text{rank}(O)$$

e che

$$(A, b) \text{ compl. oss.} \Leftrightarrow \text{rank}(O) = n \Leftrightarrow \det O \neq 0$$

*Dimostrazione a tempo discreto (perché più facile).*

Ribadiamo che consideriamo il movimento libero, ovvero  $u = 0$ , ovvero  $x(t+1) = Ax(t) + bu(t)$  e misuriamo  $y(t) = cx(t)$

$$\begin{aligned} x(0) &= \tilde{x} & y(0) &= c\tilde{x} \\ x(1) &= A\tilde{x} & y(1) &= cA\tilde{x} \\ &\vdots & &\vdots \\ x(t) &= A^t\tilde{x} & y(t) &= cA^t\tilde{x} \end{aligned}$$

Possiamo riscrivere le uscite come

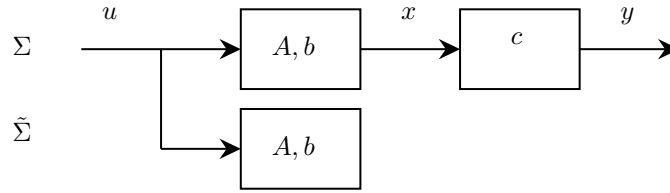
$$\begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ \vdots \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ cA \\ \vdots \\ cA^t \end{bmatrix} \tilde{x}$$

Gli stati  $\tilde{x}$  che danno luogo a  $y = 0$ , ovvero sono tutti e soli gli  $\tilde{x}$  che compongono lo spazio nullo di quella matrice, cioè il suo nucleo. Mi fermo a  $cA^{n-1}$  per il discorso fatto per la raggiungibilità con il teorema di Cayley-Hamilton.

## 8.1 Ricostruzione dello stato

Chiamiamo  $\hat{x}(t)$  la nostra ricostruzione dello stato. Se  $\Sigma$  è il processo/impianto originale, diciamo che  $\hat{\Sigma}$  è un ricostruttore asintotico di  $\Sigma$  se

$$(\hat{x}(t) - x(t)) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0 \quad \forall \hat{x}(0), x(0)$$



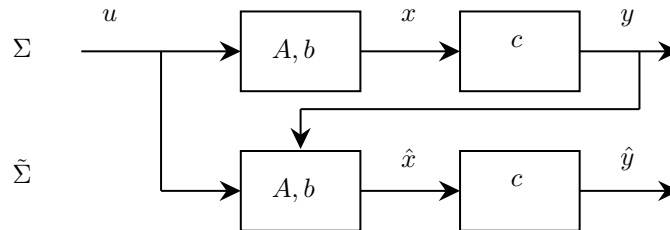
Questi due sistemi sono descritti da

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + bu \\ \dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + bu \end{aligned}$$

facciamo la differenza e definiamo un errore

$$\underbrace{\dot{\hat{x}} - \dot{x}}_{\dot{e}(t)} = A \underbrace{(\hat{x} - x)}_{e(t)} \Rightarrow \dot{e}(t) = Ae(t)$$

L'errore che vorremmo far tendere a 0 è governato dalla matrice  $A$ . Se  $A$  è asint. stabile,  $e(t) \rightarrow 0 \forall e(0)$  e cioè  $\hat{x}(t) \rightarrow x(t) \forall \hat{x}(0), x(0)$ , che è il requisito affinché  $\hat{\Sigma}$  sia un ricostruttore asintotico. Non ci soddisfa perché non tutti i sistemi sono asint. stabili e il tempo che ci mette ad andare a regime è governato sempre dal sistema  $A$ . L'approccio giusto è sfruttare l'informazione dell'uscita.



L'impianto  $\Sigma$  funziona così

$$\dot{x} = Ax + bu$$

$$y = cx$$

Proponiamo un ricostruttore fatto così

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + bu + l(\hat{y} - y) \\ \hat{y} &= c\hat{x} \end{aligned}$$

$\hat{y}$  è l'uscita stimata, quella genererebbe lo stimatore attraverso un'equazione di uscita identica a quella dell'impianto. Come prima possiamo trovare come evolve l'errore

$$\begin{aligned} \dot{e} = \dot{\hat{x}} - \dot{x} &= A\hat{x} + bu + l(\hat{y} - y) - [Ax + bu] \\ &= A(\hat{x} - x) + l(\hat{y} - y) \\ &= Ae + l(c\hat{x} - cx) \\ &= Ae + lc(\hat{x} - x) \\ &= Ae + lce \\ &= (A + lc)e \\ &\Downarrow \\ \dot{e}(t) &= (A + lc)e(t) \end{aligned}$$

con

$$l = \begin{bmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_n \end{bmatrix}$$

**Teorema 8.3.** Teorema di assegnamento degli autovalori. Per ogni polinomio  $\Delta^*(\lambda) = \lambda^n + \alpha_1^*\lambda^{n-1} + \dots + \alpha_n^*$  esiste  $l$  tale che  $\Delta_{A+lc}(\lambda) = \Delta^*(\lambda)$ , se e solo se  $(A, c)$  è completamente osservabile.

## 8.2 Scomposizione in parte osservabile e non osservabile

Studiamo il caso di non completa osservabilità, cioè  $\text{rank}(O) = o < n$ . Definiamo  $X_O$  **sottospazio di osservabilità**

$$X_O = X_{NO}^\perp \Rightarrow \dim X_O = \text{rank}(O) = o$$

è il complemento ortogonale di  $X_{NO}$ . Qualunque sistema non completamente osservabile si scompone in 2 sistemi di cui uno compl. oss. e uno non compl. oss. Questa scomposizione si vede facendo un cambio di coordinate, che esiste sempre:

$$z = Tx$$

Il nuovo vettore di stato  $z$  lo potremo sempre vedere come

$$z = \begin{bmatrix} z_O \\ z_{NO} \end{bmatrix}$$

Gli stati non osservabili sono del tipo del tipo  $z = \begin{bmatrix} 0 \\ z_{NO} \end{bmatrix}$

Il cambio di coordinate permette di guardare  $A$  e  $b$  in modo diverso:

$$(A, b) \rightarrow \left( \underbrace{TAT^{-1}}_{\tilde{A}}, \underbrace{Tb}_{\tilde{b}}, \underbrace{cT^{-1}}_{\tilde{c}} \right)$$

Algebricamente

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A_O & 0 \\ A_{O,NO} & A_{NO} \end{bmatrix} \quad \tilde{c} = [c_O \quad 0]$$

Dove  $A_O, c_O$  è un sistema completamente osservabile.

**Definizione 8.4.**  $(A, c)$  si dice rivelabile se  $\exists l$  tale che  $(A + lc)$  è asint. stabile, cioè se ammette un ricostruttore asintotico.

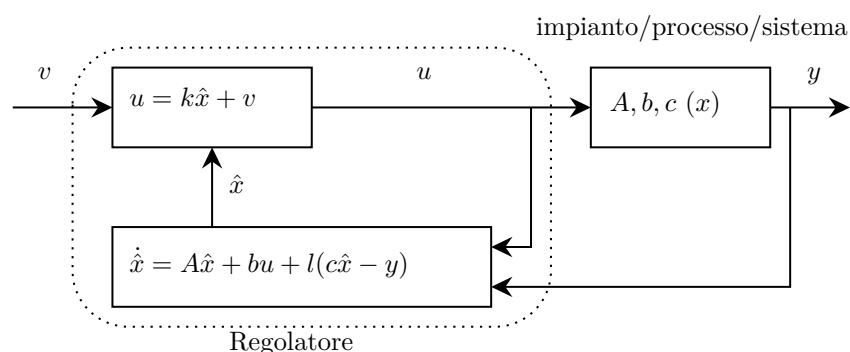
Segue quindi che

- se  $(A, c)$  è completamente osservabile, allora è rivelabile
- se  $(A, b)$  non è completamente osservabile, si induce la scomposizione e vuol dire che possiamo assegnare liberamente solo gli autovalori della parte osservabile. Pertanto è rivelabile se e solo se  $A_{NO}$  è di suo asint. stabile.

## Capitolo 9

# Teorema di separazione e sintesi del regolatore

Legge di controllo + ricostruttore dello stato.



Complessivamente ha  $2n$  variabili di stato

$$\begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix}$$

Da cosa è governato?

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\hat{x}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} Ax + bu \\ A\hat{x} + bu + l(c\hat{x} - cx) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} Ax + bk\hat{x} + bv \\ A\hat{x} + bk\hat{x} + bv + lc\hat{x} - lc x \end{bmatrix} \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} A & bk \\ -lc & A + bk + lc \end{bmatrix}}_{A_{\text{reg}}} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix}}_{b_{\text{reg}}} + \underbrace{\begin{bmatrix} b \\ b \end{bmatrix}}_{b_{\text{reg}}} v \end{aligned}$$

In questo modo non ha nessuna struttura comoda che ci dice come sia la sua struttura spettrale. Facciamo un cambio di coordinate per svelare la verità

$$\begin{bmatrix} x \\ \hat{x} - x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -I & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix}$$

Quindi  $\tilde{A}_{\text{reg}} = T A_{\text{reg}} T^{-1}$

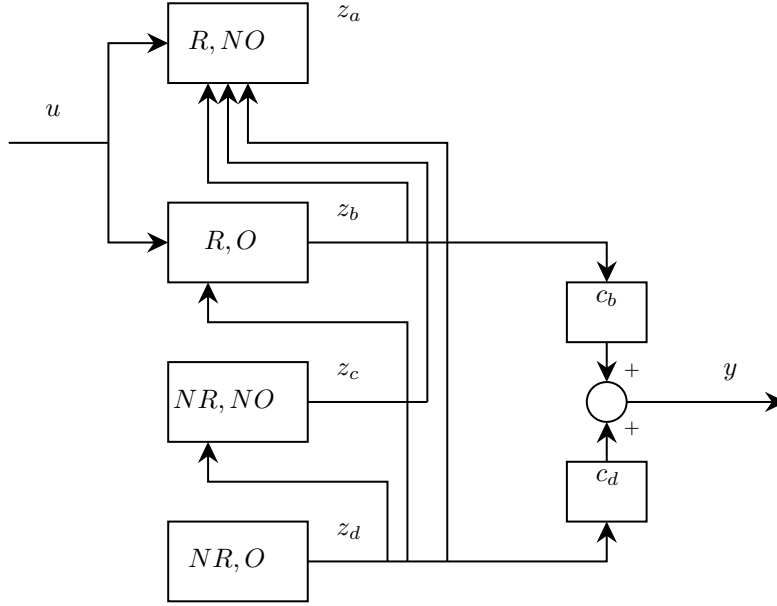
$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ -I & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & bk \\ -lc & A + bk + lc \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & I \end{bmatrix} = \dots = \begin{bmatrix} A + bk & bk \\ 0 & A + lc \end{bmatrix}$$

Miracolo, capiamo la struttura spettrale perché è triangolare a blocchi

$$\sigma(\tilde{A}_{\text{reg}}) = \sigma(A + bk) \cup \sigma(A + lc)$$

Questo si chiama **Teorema di Separazione**: se è compl. oss. e compl. ragg. possiamo progettare gli autovalori di entrambi questi blocchi **separatamente**, e il lo spettro complessivo sarà l'unione degli spettri di questi due sistemi.

Vediamo ora la scomposizione in 4 parti, o **scomposizione di Kalman**.



Ci dice che partendo da un certo  $(A, b, c)$  e con una trasformazione  $z = Tx$  lo possiamo scomporre in 4 sottosistemi,  $(R, NO)$ ,  $(R, O)$ ,  $(NR, NO)$ ,  $(NR, O)$ , e scrivere  $z$  come

$$z = \begin{bmatrix} z_a \\ z_b \\ z_c \\ z_d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

E le altre matrici

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A_a & A_{ab} & A_{ac} & A_{ad} \\ 0 & A_b & 0 & A_{bd} \\ 0 & 0 & A_c & A_{cd} \\ 0 & 0 & 0 & A_d \end{bmatrix} \quad \tilde{b} = \begin{bmatrix} b_a \\ b_b \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \tilde{c} = [0 \quad c_b \quad 0 \quad c_d]$$

Questa coppia è compl. ragg.

$$\left( \begin{bmatrix} A_a & A_{ab} \\ 0 & A_b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b_a \\ b_b \end{bmatrix}, - \right)$$

Questa coppia è compl. oss.

$$\left( \begin{bmatrix} A_b & A_{bd} \\ 0 & A_d \end{bmatrix}, -, [c_b \quad c_d] \right)$$

Questo blocco è compl. ragg. e compl. oss

$$(A_b, b_b, c_b)$$

La funzione di trasferimento descrive solo la parte  $b$

$$G(s) = c(sI - A)^{-1}b = c_b(sI - A_b)^{-1}b_b = G_b(s)$$

Quindi concludiamo che perde di grado se il sistema non è compl. oss. e compl. ragg. Gli  $n$  autovalori della matrice  $A$  si distribuiscono tra i vari sottosistemi.



## Capitolo 10

# Stabilità esterna

La stabilità interna è quella che abbiamo descritto come  $\phi(t)x(0) \rightarrow 0 \forall x(0)$ .

**Definizione 10.1.**  $(A, b, c)$  è **esternamente stabile** se l'uscita forzata  $y_{\text{for}}(t)$  è limitata  $\forall u(t)$  limitato.

C'è un'ipotesi di stato iniziale nullo  $x(0) = 0$ . Il movimento forzato lo scriviamo come  $x_F(t) = \psi(t)u_{[0,t]}$ , quindi l'uscita forzata è  $y_{\text{for}}(t) = cx_F(t)$

**Teorema 10.2.**  $(A, b, c)$  esternamente stabile  $\Leftrightarrow R, O$  asint. stabile  $\Leftrightarrow A_b$  asint. stabile.

Ma i suoi autovalori sono i poli della funzione di trasferimento.

$$A_b \text{ asint. stabile.} \Leftrightarrow \begin{cases} \Re(p_i) < 0 \quad \forall i & \text{t.c.} \\ |p_i| < 1 \quad \forall i & \text{t.d.} \end{cases}$$

Se  $A$  è asint. stabile, tutti i suoi autovalori negativi si distribuiscono nelle quattro parti, quindi la funzione di trasferimento avrà poli negativi,  $\Rightarrow (A, b, c)$  esternamente stabile. Non vale l'opposto in generale, non sappiamo nulla sulle tre parti al di fuori di quella  $(O, R)$ . Se  $(A, b, c)$  è compl. oss. e compl. ragg. vale la complicazione

$$A \text{ asint. stabile.} \Leftrightarrow (A, b, c) \text{ esternamente stabile}$$

Salvo quasi critici, sono quasi sempre compl. oss. e compl. ragg. Il fatto che l'ingresso non influenzi uno stato e che l'uscita non dipenda da qualcuno di questi, è in qualche modo una cosa anomala.

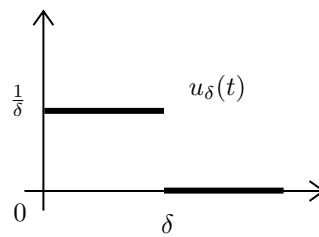


# Capitolo 11

## Risposte canoniche

Studiamo il movimento forzato, ovvero la risposta del sistema a specifici ingressi, impulso, scalino, rampa e senoide (risposta in frequenza). Quindi ipotizziamo  $x(0) = 0$ .

### 11.1 Risposta all'impulso (tempo continuo)



Si ha  $\int_0^{+\infty} u_\delta(t) dt = 1$ . Facciamo tendere  $\delta \rightarrow 0$  e troviamo l'impulso. Ha queste proprietà:

- $\text{imp}(t) = 0 \quad \forall t \neq 0$
- $\int_{0-}^{0+} \text{imp}(t) dt = 1$

Studiamo l'uscita

$$\begin{aligned} y(t) = cx(t) &= c \int_0^t e^{A(t-\tau)} bu(\tau) d\tau \\ &= c \int_{0-}^{0+} e^{A(t-\tau)} b \text{imp}(\tau) d\tau \\ &= ce^{At} b \int_{0-}^{0+} \text{imp}(\tau) d\tau \\ &= \boxed{ce^{At} b = c\phi(t)b = g(t)} \end{aligned}$$

### 11.2 Risposta all'impulso (tempo discreto)

Si definisce come

$$\text{imp}(t) = \begin{cases} 1, & t = 0 \\ 0, & t > 0 \end{cases}$$

L'uscita all'istante 0 vale

$$y(0) = cx(0) + du(0) = d$$

quindi se il sistema è improprio c'è questa unica differenza. Quindi assumiamo  $d = 0$ , per il resto

$$\begin{aligned} x(0) &= 0 & y(0) &= 0 \\ x(1) &= Ax(0) + bu(0) = b & y(1) &= cx(1) = cb \\ x(2) &= Ax(1) + bu(1) = Ab & y(2) &= cx(2) = cAb \end{aligned}$$

In generale

$$g(t) = \begin{cases} 0, & t = 0 \\ cA^{t-1}b = c\phi(t-1)b, & t > 0 \end{cases}$$

### 11.3 Trasformata di Laplace

Notiamo ora che

$$\begin{aligned} y(t) = cx(t) &= c \int_0^t e^{A(t-\tau)} bu(\tau) d\tau \\ &= \int_0^t \boxed{ce^{A(t-\tau)}b} u(\tau) d\tau \\ &= \int_0^t \boxed{g(t-\tau)} u(\tau) d\tau \end{aligned}$$

è detto **integrale di convoluzione**

$$y(t) = g(t) * u(t) \quad (5)$$

La trasformata di Laplace è definita come

$$F(s) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \quad F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (6)$$

In particolare

$$\mathcal{L}^{-1}[\mathcal{L}[f(t)]] = f(t)$$

Consideriamo ora la trasformata di Laplace di alcuni ingressi  $u(t)$  canonici

- $u(t) = \text{imp}(t)$ , allora

$$\begin{aligned} U(s) &= \int_0^{+\infty} \text{imp}(t)e^{-st} dt \\ &= \int_{0^-}^{0^+} \text{imp}(t) dt = 1 \end{aligned}$$

- $u(t) = \text{sca}(t)$ , allora

$$\begin{aligned} U(s) &= \int_0^{+\infty} 1 \cdot e^{-st} dt \\ &= -\frac{1}{s} [e^{-st}]_0^{+\infty} = \frac{1}{s}, \quad \text{se } \Re(s) > 0 \end{aligned}$$

- $f(t) = e^{at}$ ,  $a \in \mathbb{R}$ , allora

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^{+\infty} e^{at} e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} e^{(a-s)t} dt \\ &= \frac{1}{a-s} [e^{(a-s)t}]_0^{+\infty} \\ &= \frac{1}{s-a}, \quad \text{se } \Re(s) > \Re(a) \end{aligned}$$

- $f(t) = te^{at}$ , allora  $F(s) = \frac{1}{(s-a)^2}$
- $f(t) = \frac{1}{2}t^2e^{at}$ , allora  $F(s) = \frac{1}{(s-a)^3}$
- $u(t) = \text{ramp}(t)$ , allora  $U(s) = \frac{1}{s^2}$

$u(t)$	$\text{imp}(t)$	$\text{sca}(t)$	$e^{at}$	$te^{at}$	$\frac{1}{2!}t^2e^{at}$	$\text{ramp}(t)$
$U(s)$	1	$\frac{1}{s}$	$\frac{1}{s-a}$	$\frac{1}{(s-a)^2}$	$\frac{1}{(s-a)^3}$	$\frac{1}{s^2}$

La trasformata gode delle seguenti **proprietà**

- **linearità**, siano  $f_1(t) \rightarrow F_1(s)$ ,  $f_2(t) \rightarrow F_2(s)$  e siano  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\alpha f_1(t) + \beta f_2(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \alpha F_1(s) + \beta F_2(s)$$

- **derivazione**, sia  $f(t) \rightarrow F(s)$

$$h(t) = \frac{df(t)}{dt} \xrightarrow{\mathcal{L}} H(s) = \mathcal{L} \left[ \frac{df(t)}{dt} \right] = sF(s) - f(0)$$

$$\mathcal{L} \left[ \frac{d^2 f(t)}{dt^2} \right] = s \mathcal{L} \left[ \frac{df(t)}{dt} \right] - f'(0) = s^2 F(s) - s f(0) - f'(0)$$

il termine  $f(0), \dots$  è quasi sempre 0 nei nostri casi.

- **integrazione**, sia  $f(t) \rightarrow F(s)$

$$h(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau \xrightarrow{\mathcal{L}} H(s) = \frac{1}{s} F(s)$$

- **traslazione**, sia  $f(t) \rightarrow F(s)$

$$h(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < T \\ f(t-T), & t > T \end{cases} \xrightarrow{\mathcal{L}} H(s) = F(s)e^{-sT} \quad (7)$$

- **convoluzione**, siano  $f(t) \rightarrow F(s), h(t) \rightarrow H(s)$

$$f(t) * h(t) = \int_0^t f(t-\tau)h(\tau) d\tau \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s)H(s)$$

Con la trasformata di Laplace (e da qui alla fine del corso) analizzeremo solo sistemi a tempo continuo.

## 11.4 Relazione tra funzione di trasferimento e risposta all'impulso

Abbiamo visto che la risposta all'impulso  $u(t) = \text{imp}(t)$  è  $y(t) = ce^{At}b = g(t)$  che ha una sua trasformata di Laplace

$$\mathcal{L}[g(t)] = \mathcal{L}[ce^{At}b] = c\mathcal{L}[e^{At}]b = c(sI - A)^{-1}b = G(s)$$

La sua funzione di trasferimento è la trasformata di Laplace della risposta all'impulso, ponte importantissimo!

## 11.5 Relazione tra risposta allo scalino e risposta all'impulso

Si ha che la risposta all'impulso è uguale alla derivata della risposta allo scalino:

$$y_{\text{imp}}(t) = \frac{d}{dt}[y_{\text{sca}}(t)]$$

## 11.6 Calcolo di risposte canoniche

Ricordiamo che l'uscita si può vedere come convoluzione e possiamo passare alle trasformate

$$y(t) = \int_0^t g(t-\tau)u(\tau) d\tau \xrightarrow{\mathcal{L}} \boxed{Y(s) = G(s)U(s)}$$

Il percorso che dovremmo fare in generale è

$$u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} U(s) \Rightarrow Y(s) = G(s)U(s) \Rightarrow Y(s) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y(t)$$

In generale le trasformate sono rognose, ma **se l'ingresso è canonico, la sua trasformata è razionale fratta**. Tutto diventa più facile.

## 11.7 Risposta allo scalino

*Esempio.* Sia

$$G(s) = \frac{2(s-1)}{(s+1)(s+2)^2} \quad u(t) = \text{sca}(t) \Rightarrow U(s) = \frac{1}{s}$$

Introduciamo il **grado relativo**

$$r = \# \text{poli} - \# \text{zeri} = \deg(D) - \deg(N)$$

qui  $r = 2$ . Calcoliamo agevolmente l'uscita

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{2(s-1)}{s(s+1)(s+2)^2}$$

ora dobbiamo antitrasformare, facciamo lo **sviluppo di Heaviside**. Scomponiamo in tante frazioni quant'è il grado del denominatore.

$$Y(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+2} + \frac{D}{(s+2)^2} \quad (8)$$

che è facile da antitrasformare

$$\begin{aligned} y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] &= A\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] + B\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right] + C\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+2}\right] + D\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+2)^2}\right] \\ &= A + Be^{-t} + Ce^{-2t} + Dte^{-2t} \end{aligned}$$

La scomposizione (8) si fa così:

$$\frac{A(s+1)(s+2)^2 + Bs(s+2)^2 + Cs(s+1)(s+2) + Ds(s+1)}{s(s+1)(s+2)^2} = \frac{2(s-1)}{s(s+1)(s+2)^2}$$

- Se  $s = -1 \Rightarrow -B = -4 \Rightarrow B = 4$ .
- Se  $s = -2 \Rightarrow 2D = -6 \Rightarrow D = -3$ .
- Se  $s = 0 \Rightarrow 4A = -2 \Rightarrow A = -\frac{1}{2}$ .
- Se  $s = 1 \Rightarrow 18A + 9B + 6C + 2D = 0 \Rightarrow C = -\frac{7}{2}$ .

Si ottiene quindi l'uscita

$$y(t) = -\frac{1}{2} + 4e^{-t} - \frac{7}{2}e^{-2t} - 3te^{-2t}$$

Che si può studiare:

- valore iniziale

$$y(0) = -\frac{1}{2} + 4 - \frac{7}{2} = \frac{-1+8-7}{2} = 0$$

- valore asintotico

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = -\frac{1}{2}$$

questo risultato lo sapevamo già ( $\bar{u} = 1$  perché stiamo considerando lo scalino unitario)

$$\bar{y} = \mu \bar{u} = G(0) \cdot 1 = -\frac{1}{2}$$

- derivata prima

$$\begin{aligned} y'(t) &= -4e^{-t} + 7e^{-2t} - 3(e^{-2t} - 2te^{-2t}) = -4e^{-t} + 4e^{-2t} + 6te^{-2t} \\ &\Rightarrow y'(0) = -4 + 4 = 0 \end{aligned}$$

- derivata seconda

$$\begin{aligned} y''(t) &= 4e^{-t} - 8e^{-2t} + 6[e^{-2t} - 2te^{-2t}] = 4e^{-t} - 2e^{-2t} - 12te^{-2t} \\ &\Rightarrow y''(0) = 4 - 2 = 2 \end{aligned}$$

**Calcolo qualitativo delle risposte canoniche**

- valore finale/asintotico  $y(\infty)$
- tempo di risposta
- valore iniziale  $y(0)$
- derivate iniziali
- estremi (massimi e minimi)
- oscillazioni (poli complessi)

**Teorema 11.1.** Teorema del valore iniziale. Sia  $f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s)$  allora

$$f(0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{\Re(s) \rightarrow \infty} [sF(s)]$$

Lo possiamo usare insieme ad altri teoremi, come quello della derivazione

$$f'(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} s\mathcal{L}[f'(t)] = \lim_{s \rightarrow \infty} s(sF(s) - f(0))$$

**Teorema 11.2.** Teorema del valore finale. Sia  $f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s)$  allora

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{\Re(s) \rightarrow 0} [sF(s)]$$

*Esempio.* Sia  $T > 0$

$$G(s) = \frac{\mu}{1 + sT}$$

che è asint. stabile. Il polo è  $s = -\frac{1}{T}$ , la costante di tempo è

$$-\frac{1}{-\frac{1}{T}} = T$$

Invece

$$G(0) = \mu$$

Questo modo mette in evidenza costante di tempo e guadagno. Com'è la risposta allo scalino? Usiamo il teorema del valore iniziale e ricordiamo che con lo scalino si ha  $U(s) = \frac{1}{s}$  per ottenere:

$$y(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} sY(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} sG(s)U(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \frac{\mu}{1 + sT} \frac{1}{s} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\mu}{1 + sT} = 0$$

Vediamo la derivata prima

$$\dot{y}(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s(sY(s) - y(0)) = \lim_{s \rightarrow \infty} s^2 Y(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} s^2 \frac{\mu}{1 + sT} \frac{1}{s} = \frac{\mu}{T}$$

*Complichiamo:*

$$G(s) = \frac{\mu}{(1 + sT_1)(1 + sT_2)}$$

supponiamo  $T_1, T_2 > 0 \Rightarrow$  è asint. stabile.  $r = 2$ .

$$y(\infty) = G(0) \cdot 1 = \mu$$

$$y(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} sY(s)$$

$$= \lim_{s \rightarrow \infty} s \frac{1}{s} \frac{\mu}{(1 + sT_1)(1 + sT_2)} = 0$$

$$\dot{y}(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} s(sY(s) - y(0))$$

$$= \lim_{s \rightarrow \infty} s^2 \frac{1}{s} \frac{\mu}{(1 + sT_1)(1 + sT_2)} = 0$$

$$\ddot{y}(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} s(s^2 Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0)) = \lim_{s \rightarrow \infty} s^3 \frac{1}{s} \frac{\mu}{(1 + sT_1)(1 + sT_2)} = \frac{\mu}{T_1 T_2}$$

Generalizziamo. Se stiamo analizzando la risposta allo scalino e se abbiamo una  $G(s)$  di grado relativo  $r$

$$G(s) = \frac{\beta_r^{n-r} + \dots}{s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \dots}$$

Allora

$$\begin{array}{l} y(0) = 0 \\ \dot{y}(0) = 0 \\ \vdots \\ y^{(r-1)}(0) = 0 \\ y^{(r)}(0) = \beta_r \end{array}$$

Complichiamo:

Siano  $T_1, T_2 > 0, \mu > 0, \tau > 0, T_D = T_1 > T_2, u(t) = \text{sca}(t)$

$$G(s) = \frac{\mu(1 + s\tau)}{(1 + sT_1)(1 + sT_2)}$$

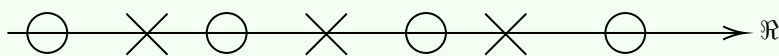
C'è uno zero in posizione  $s = -\frac{1}{\tau}$ , che può trovarsi in diverse posizioni rispetto ai poli.

$$y(\infty) = G(0) \cdot \bar{u} = \mu \cdot 1 = \mu$$

$r = 1$ , allora

$$\begin{array}{l} y(0) = 0 \\ \dot{y}(0) = \frac{\mu\tau}{T_1 T_2} > 0 \end{array}$$

**Teorema 11.3.** Estremi della risposta allo scalino. Sia  $G(s)$  **propria**, cioè  $r > 0$ , con **tutti i poli e gli zeri reali distinti**.

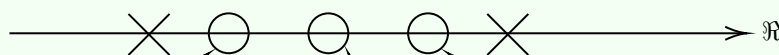


zeri inferiori

zeri inquadrati

zeri superiori =  $m_s$

Uno zero è bene-inquadrato se tra i poli tra cui è compreso vede tanti zeri a destra quanti a sinistra



male inquadrato

bene inquadrato

male inquadrato

Chiamiamo

$\delta$  il numero degli zeri male inquadrati

$m_s$  il numero degli zeri superiori

$N$  il numero degli estremi.

Allora

$$m_s \leq N \leq m_s + \delta$$

Corollario:

$$\begin{array}{l} m_s \text{ dispari} \Rightarrow N \text{ dispari} \\ m_s \text{ pari} \Rightarrow N \text{ pari} \end{array}$$

Consideriamo un caso con lo zero instabile.

$$G(s) = \frac{\mu(1 + s\tau)}{(1 + sT_1)(1 + sT_2)}$$

con  $T_1, T_2 > 0$  per la stabilità,  $\mu > 0$  a piacere, ma  $\tau < 0$ . Si ha quindi

$$y(0) = 0 \quad \dot{y}(0) = \frac{\mu\tau}{T_1 T_2} < 0$$



parte verso il basso, con un estremo dato che  $1 \leq N \leq 1$ .

Consideriamo un altro caso con zero nell'origine

$$G(s) = \frac{\mu s}{(1 + sT_1)(1 + sT_2)}$$

con  $T_1, T_2 > 0$  per la stabilità,  $\mu > 0$  a piacere. Si ha quindi

$$y(0) = 0 \quad \dot{y}(0) = \frac{\mu}{T_1 T_2} > 0$$

Notiamo che è un sistema a guadagno nullo  $G(0) = 0$

$$\bar{y} = G(0)\bar{u} = 0$$

Qui  $\mu$  non coincide col guadagno.

Cosa succede quando la  $G(s)$  ha poli complessi? Introduciamo una forma standard da usare quando ha due poli complessi. Con  $\alpha_1, \alpha_2 > 0$  per la stabilità

$$G(s) = \frac{\beta_2}{s^2 + \alpha_1 s + \alpha_2} = \mu \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

Con  $\omega_n > 0$  **pulsazione naturale** e  $\xi$  **smorzamento**.

La presenza di  $\mu$  e  $\omega_n^2$  a numeratore permette di lasciare a  $\mu$  il ruolo di guadagno:

$$G(0) = \mu \frac{\omega_n^2}{\omega_n^2} = \mu$$

I poli valgono

$$\begin{aligned} p_{1,2} &= -\xi\omega_n \pm \sqrt{\xi^2\omega_n^2 - \omega_n^2} \\ &= -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1} \end{aligned}$$

L'ipotesi affinché siano *complessi* e che ci sia *stabilità* è  $0 < \xi < 1$

$$p_{1,2} = -\xi\omega_n \pm i\omega_n\sqrt{1 - \xi^2} \Rightarrow T = -\frac{1}{\Re(p)} = \frac{1}{\xi\omega_n}$$

Qui  $r = 2$ , allora

$$\begin{aligned} y(0) &= 0 \\ \dot{y}(0) &= 0 \\ \ddot{y}(0) &= \mu\omega_n^2 > 0 \end{aligned}$$

Si hanno oscillazioni, la distanza tra gli estremi (che sono infiniti) rimane costante e vale

$$\tau = \frac{2\pi}{\Im(p)}$$

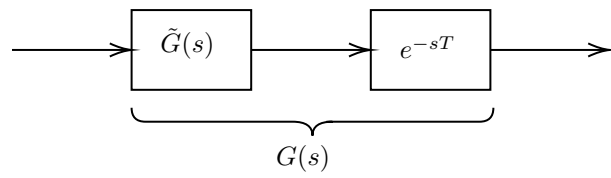
ci sfugge anche qui l'ampiezza della sovraelongazione, che si quantifica con

$$S = \frac{y_{\max} - y(\infty)}{y(\infty)}$$

Cosa significa invece avere una  $G(s)$  fatta come

$$G(s) = \tilde{G}(s)e^{-sT}, \quad T > 0$$

con  $\tilde{G}(s)$  razionale fratta? Ricordiamo il risultato della traslazione (7). Possiamo pensare il sistema come una cascata



Vediamo quindi che il termine  $e^{-sT}$  induce un ritardo di  $T$ , si chiama **ritardatore puro**.

## Capitolo 12

# Regime sinusoidale

Consideriamo ingressi del tipo

$$u_T(t) = U \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$$

Si introducono altre grandezze

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \quad f = \frac{1}{T}$$

allora

$$u_T(t) = U \sin(\omega t) = U \sin(2\pi f \cdot t)$$

Studiare il regime sinusoidale significa studiare tutti i regimi periodici che possono essere scritti come somma di sinusoidi per Fourier:

$$u(t) = U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_k \sin\left(k \frac{2\pi}{T}t + \varphi_k\right), \quad k \in \mathbb{N}$$

Affinché ci sia convergenza della serie è necessario, ma non sufficiente, che  $U_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ .

**Teorema 12.1.** Sia  $G(s) = \frac{N(s)}{\Delta(s)}$ , immaginiamo che sia compl. oss. e compl. ragg., quindi il modello esterno descrive completamente il sistema, altrimenti potremmo fare poco. Supponiamo che risponda all'ingresso  $u_T(t) = U \sin(\omega t)$ ,  $\omega = 2\pi/T$ . Allora  $\exists!$  uscita sinusoidale

$$y_T(t) = Y \sin(\omega t + \varphi) \Leftrightarrow \Delta(i\omega) \neq 0$$

In tal caso

$$\frac{Y}{U} = R(\omega), \quad \varphi = \varphi(\omega)$$

$R(\omega), \varphi(\omega)$  sono dette **risposta in frequenza**.

La condizione  $\Delta(i\omega) \neq 0$  chiede che **non ci siano autovalori di modulo  $\omega$** .

Possiamo scrivere  $G(s) = \frac{N(s)}{\Delta(s)}$  come

$$\Delta(s)y = N(s)u \Leftrightarrow y^{(n)}(t) + \dots + \alpha_n y(t) = \beta_0 u^{(n)}(t) + \dots + \beta_n u(t)$$

e ognuna di queste equazioni differenziali, per ogni set di condizioni iniziali diverse, produrrà diverse uscite, che possiamo genericamente chiamare  $y$ , mentre una sola di queste sarà quella sinusoidale  $y_T$ . Scriviamole

$$\Delta(s)y_T = N(s)u_T$$

$$\Delta(s)y = N(s)u_T$$

Sottraiamo

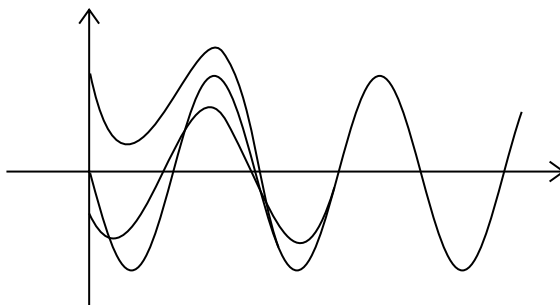
$$\Delta(s)(y - y_T) = 0$$

$$\Delta(s)e = 0$$

Ma se il sistema è asint. stabile

$$e(t) \rightarrow 0 \quad \forall e(0) \quad \Leftrightarrow \quad y(t) \rightarrow y_T(t)$$

Quindi per ogni condizione iniziale tendiamo alla sinusoidale.



**Teorema 12.2.** Se  $\Delta(i\omega) \neq 0$  e  $u_T(t) = U \sin(\omega t)$  sappiamo che  $y_T(t) = Y \sin(\omega t + \varphi)$ . Allora

$$\frac{Y}{U} = |G(i\omega)| \quad \varphi = \arg G(i\omega), \quad \varphi \in [-\pi, \pi)$$

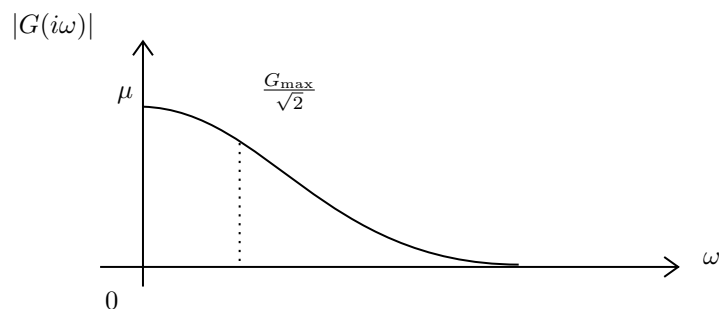
## 12.1 Risposta in frequenza

Studiamo per ora

$$G(s) = \frac{\mu}{1+s}, \quad \mu > 0$$

Allora

$$G(i\omega) = \frac{\mu}{1+i\omega} \Rightarrow \frac{Y}{U} = |G(i\omega)| = \frac{\mu}{\sqrt{1+\omega^2}}, \quad \varphi = \arg G(i\omega) = -\arctan \omega$$



Si dice **filtro passa basso**.

$$\text{Banda passante} = \left\{ \omega : \frac{G_{\max}}{\sqrt{2}} \leq |G(i\omega)| \leq G_{\max} \right\}$$

Se studiamo

$$G(s) = \frac{\mu s}{1+s}, \quad \mu > 0$$

Allora

$$G(i\omega) = \frac{\mu i\omega}{1+i\omega} \Rightarrow |G(i\omega)| = \frac{\mu\omega}{\sqrt{1+\omega^2}}, \quad \arg G(i\omega) = \frac{\pi}{2} - \arctan \omega$$

È un **filtro passa alto**.

Se studiamo

$$G(s) = \frac{\mu s}{(1+s)(1+0.1s)}, \quad \mu > 0$$

Allora

$$G(i\omega) = \frac{\mu i\omega}{(1+i\omega)(1+0.1i\omega)}$$

$$\Downarrow$$

$$|G(i\omega)| = \frac{\mu\omega}{\sqrt{1+\omega^2}\sqrt{1+0.01\omega^2}}, \quad \arg G(i\omega) = \frac{\pi}{2} - \arctan \omega - \arctan(0.1\omega)$$

È un **filtro passa banda**.

## 12.2 Diagrammi di Bode

Ipotizziamo di avere poli e zeri tutti reali, introduciamo una forma standard di  $G(s)$

$$G(s) = \frac{\mu}{s^h} \cdot \frac{\prod_j (1 + s\tau_j)}{\prod_j (1 + sT_j)}$$

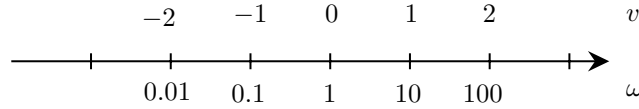
I poli e zeri saranno della forma

$$z_j = -\frac{1}{\tau_j} \quad p_j = -\frac{1}{T_j}$$

Il valore  $h$  si dice **tipo** del sistema, è intero. Se  $h = 1$  c'è un **polo dell'origine**, se  $h = 2, 3, \dots$  ci sono poli multipli in 0. Se  $h = -1$  c'è uno **zero nell'origine**.  $\mu$  si dice **guadagno generalizzato**, è parente del guadagno che avevamo introdotto, ma non sempre lo stesso proprio perché c'è quel  $s^h$  che dà problemi ogni volta che  $h \neq 0$ .

Introduciamo un asse logaritmico in base 10

$$v = \log_{10} \omega \Leftrightarrow \omega = 10^v$$

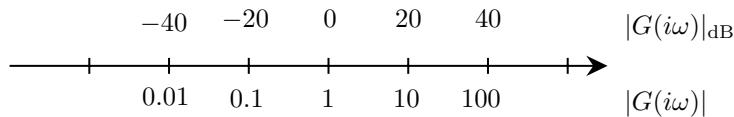


Si noti che non troviamo mai  $\omega = 0$ . L'intervallo tra due tacchette del grafico si chiama **decade**.

### 12.2.1 Diagrammi di Bode del modulo

Sull'asse delle ordinate rappresenteremo il modulo di  $G(i\omega)$  in decibel

$$|G(i\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log_{10} |G(i\omega)|$$



Consideriamo

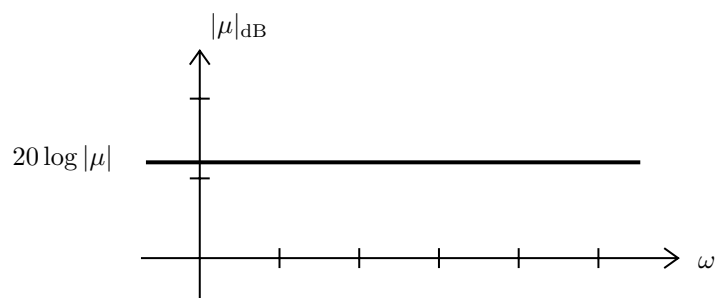
$$|G(i\omega)| = \frac{|\mu|}{\omega^h} \cdot \frac{\prod_j |1 + i\omega\tau_j|}{\prod_j |1 + i\omega T_j|}$$

Il logaritmo trasforma prodotti e divisioni in somme e sottrazioni

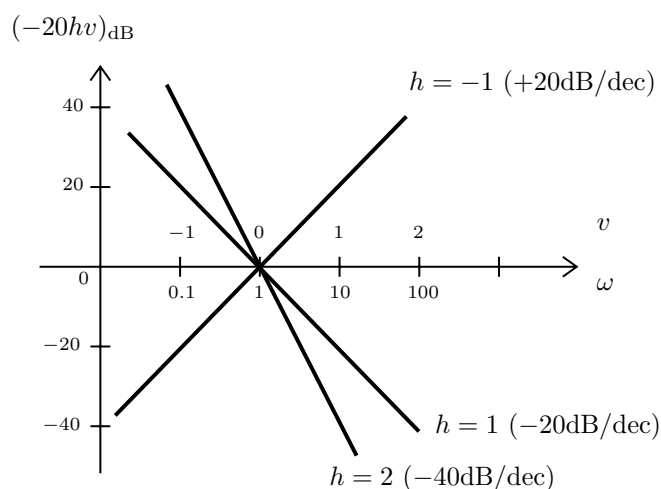
$$|G(i\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log |\mu| - 20h \log \omega + \sum_j 20 \log |1 + i\omega\tau_j| - \sum_j 20 \log |1 + i\omega T_j|$$

Se riusciamo a rappresentarle individualmente sarà la somma di ciascuna di queste, è un'ottima notizia.

- pezzo  $20 \log |\mu|$ , è costante

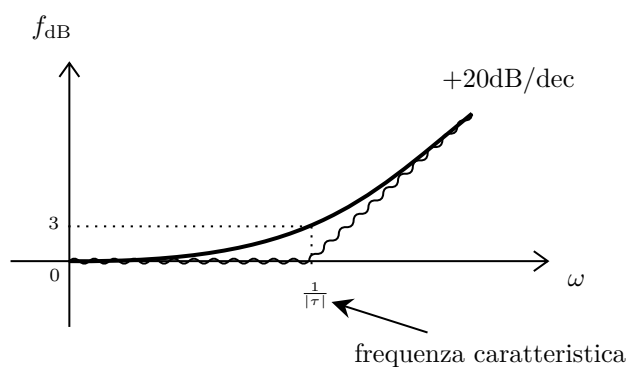


- pezzo  $-20h \log \omega = -20hv$ , su un'asse che in  $v$  è lineare! È una retta con pendenza  $-20h$ . Se  $h = 1$ , ogni unità in  $v$ , cala di 20 e passa per 0 quando  $v = 0$ , cioè quando  $\omega = 1$ . Si dice che la pendenza è 20dB/dec



Sommando i primi due pezzi si vede che a  $\omega = 1$ , il modulo vale  $\mu$  espresso in decibel.

- pezzo  $f = 20 \log |1 + i\omega\tau| = 20 \log \sqrt{1 + \omega^2\tau^2}$   
 se  $\omega \rightarrow 0, f \rightarrow 0$   
 se  $\omega \rightarrow +\infty, f \rightarrow 20 \log(\omega|\tau|) = 20 \log \omega + 20 \log |\tau|$ , questa quantità è 0 per  $\omega = \frac{1}{|\tau|}$



nel punto di massimo errore abbiamo

$$f|_{\omega=\frac{1}{|\tau|}} = 20 \log 2 \simeq 3 \text{ dB}$$

Bode propone proprio l'approssimazione spezzata, anziché quella *vera*.

Altro passo importante, ogni termine  $f$  **non conta niente prima della sua frequenza caratteristica**, dopo quella c'è un aumento/diminuzione di 20 dB a seconda che sia zero/polo.

- il grado relativo  $r$  rappresenta il **bilancio finale** tra i poli e gli zeri, alla fine ci aspettiamo una pendenza di  $-20r$  dB/dec.

### 12.2.2 Diagrammi di Bode dell'argomento

Si ha

$$\arg G(i\omega) = \arg \mu - h \arg(i\omega) + \sum_j \arg(1 + i\omega\tau_j) - \sum_j \arg(1 + i\omega T_j)$$

Studiamo i pezzi singolarmente

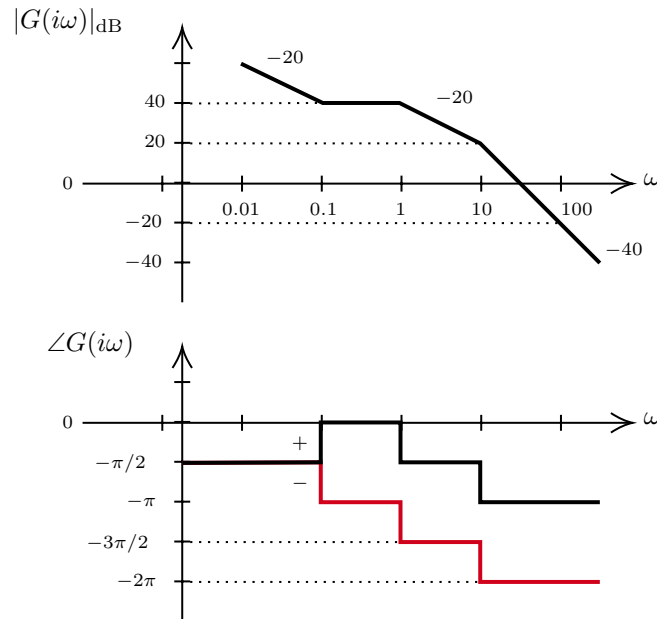
- $\arg \mu$ :
  - se  $\mu > 0$ , vale 0
  - se  $\mu < 0$ , vale  $-\pi$
- $\arg(i\omega)$  è sempre  $\frac{\pi}{2}$
- pezzi del tipo  $\arg(1 + i\omega\tau) = \arctan(\omega\tau)$ , in cui  $\tau$  può essere positivo o negativo

	$\tau, T > 0$	$\tau, T < 0$
zero	$\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$
polo	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$

Notiamo che il segno di  $\tau, T$  non conta nel modulo, ma conta se è un polo o uno zero.

Consideriamo ora la seguente funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{10(1 \pm 10s)}{s(1+s)(1+0.1s)}$$



Il diagramma di Bode del modulo non basta per realizzare la funzione di trasferimento, lascia incertezze sulle costanti di tempo. Serve o l'informazione sulla fase o qualche altra informazione, anche minimale, per escludere le ambiguità.

In realtà ne esistono infinite che hanno lo stesso diagramma, basta considerare una

$$\tilde{G}(s) = G(s) \cdot \frac{1 - s\tau}{1 + s\tau}$$

Il secondo oggetto si chiama **sfasatore puro**. Sul modulo non cambia niente, ma sfasa la fase di  $-\pi$ , concentrato in  $\frac{1}{|\tau|}$ .

## 12.3 Poli complessi coniugati

Supponiamo  $\mu = 1$  e scriviamo la  $G(s)$  come

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

Ricordiamo che per avere stabilità e poli complessi coniugati dobbiamo avere

$$0 < \xi < 1 \Rightarrow p_{1,2} = -\omega_n \xi \pm i\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$$

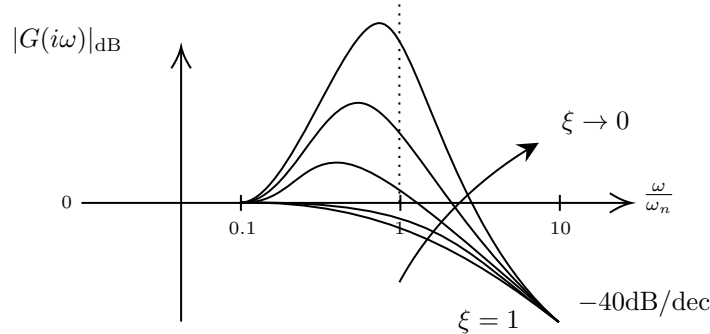
$G(i\omega)$  possiamo scriverla in forma normalizzata

$$G(i\omega) = \frac{\omega_n^2}{-\omega^2 + i2\xi\omega_n\omega + \omega_n^2} = \frac{1}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right] + i\left[2\xi\frac{\omega}{\omega_n}\right]}$$

Scriviamo il modulo

$$|G(i\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left[2\xi\frac{\omega}{\omega_n}\right]^2}}$$

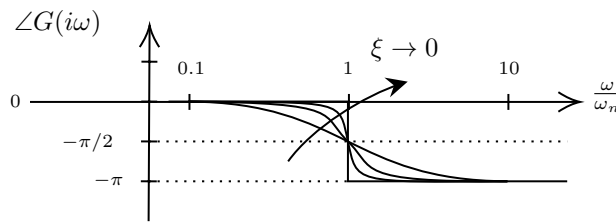
Ci accorgiamo che si forma un massimo per  $\xi < \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,707$  e il massimo ha valore  $|G(i\omega_{\max})| = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$  in corrispondenza di  $\omega_{\max} = \omega_n\sqrt{1-2\xi^2}$



Questo fenomeno si chiama **risonanza**.

L'argomento invece vale

$$\arg G(i\omega) = -\arctan \left[ \left(2\xi\frac{\omega}{\omega_n}\right) / \left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right) \right]$$



Nello studio di queste funzioni di trasferimento è importante mettere in evidenza il termine  $\omega_n^2$  a numeratore per valutare correttamente il  $\mu$  del sistema, cercando la cosiddetta **forma standard**, in modo che il termine non influisca prima della sua frequenza caratteristica  $\omega_n$

$$G(s) = \frac{\mu}{s^h} \cdot \frac{\prod_j (1 + sT_j)}{\prod_j (1 + sT_j)} \cdot \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

*Esempio.*

$$G(s) = \frac{10^3 s}{(1+s)(s^2 + s + 100)} = 10s \cdot \frac{1}{1+s} \cdot \frac{100}{s^2 + s + 100}$$

pertanto ricaviamo i valori della **pulsazione naturale**  $\omega_n$  e dello **smorzamento**  $\xi$

$$\omega_n^2 = 100 \Rightarrow \omega_n = 10$$



$$2\xi\omega_n = 1 \Rightarrow \xi = \frac{1}{20} = 0.05$$

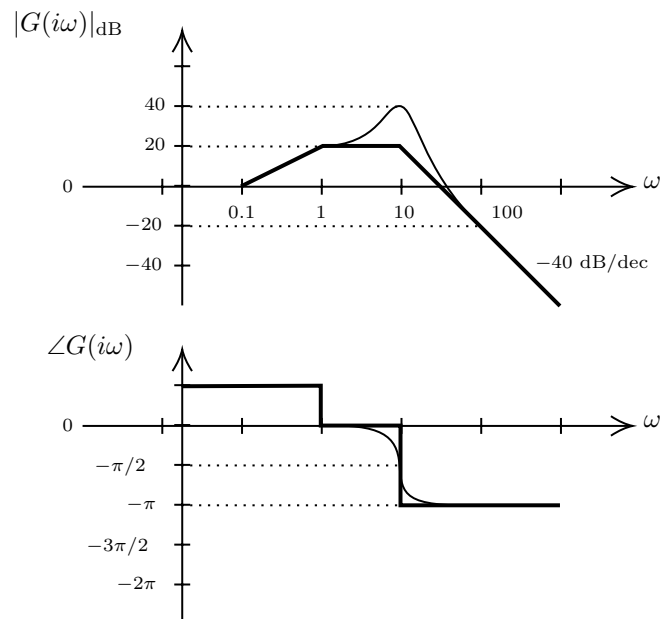
Alle basse frequenze abbiamo che il tipo è  $h = -1$ , quindi saliamo di  $+20$  dB/dec, mentre per  $\omega = 1$  deve valere 10, cioè 20 dB. Alla frequenza  $\omega = 1$  interviene un polo. Alla frequenza  $\omega = 10$  interviene la coppia di poli facendo scendere di  $-40$  dB/dec. Questa conferma si ha dal fatto che  $r = 2$ .

Per assicurarci che in  $\omega = 10$  ci sia risonanza, calcoliamo l'incremento

$$\frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} = \frac{1}{2(0.05)\sqrt{1-(0.05)^2}} \approx \frac{1}{2(0.05)} = 10 = 20 \text{ dB}$$

Ciò significa che in realtà il diagramma si trova 20 dB più in alto rispetto a ciò che abbiamo disegnato nel diagramma di Bode.

Essendo inoltre  $\xi$  molto prossimo a 0, il diagramma reale della fase sarà prossimo alla discontinuità.



Nel caso di **zeri complessi coniugati**, si ha la situazione opposta

$$G(s) = \frac{\mu}{s^h} \cdot \frac{\prod_j (1 + s\tau_j)}{\prod_j (1 + sT_j)} \cdot \frac{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}{\omega_n^2}$$

Anche qui è importante studiare la forma standard. Nei diagrammi si ritrova lo stesso discorso, simmetrico rispetto all'asse delle ascisse.



## Capitolo 13

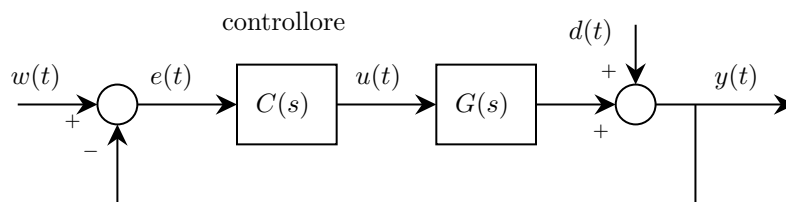
# Sistemi di controllo

Se il guadagno è ben definito e non nullo, allora

$$\bar{y} = G(0)\bar{u}$$

C'è un problema, affinché  $y(t) \rightarrow \bar{y}$  serve che  $G(s)$  sia asintoticamente stabile, ma la  $G(s)$  reale è in generale diversa dalla  $\hat{G}(s)$  approssimata del modello. Quindi usiamo sistemi in **retroazione**.

La differenza tra il valore desiderato di  $y$  e la  $y(t)$  va a zero? La retroazione, come sappiamo, può non mantenere la stabilità. Chiamiamo  $w(t)$  l'uscita desiderata,  $e(t)$  l'errore commesso e  $d(t)$  un eventuale disturbo in uscita.



$$\begin{aligned} y &= d + CGe \\ &= d + CG(w - y) \Rightarrow y = \frac{1}{1 + CG}d + \frac{CG}{1 + CG}w \\ y(1 + CG) &= d + CGw \end{aligned}$$

Definiamo la **funzione di trasferimento d'anello**

$$L(s) = C(s)G(s)$$

Allora possiamo descrivere l'uscita come

$$y = \frac{1}{1 + L}d + \frac{L}{1 + L}w$$

E analogamente possiamo anche descrivere l'errore come

$$\begin{aligned} e &= w - y \\ &= w - (d + Le) \Rightarrow e = \frac{1}{1 + L}w - \frac{1}{1 + L}d \\ e(1 + L) &= w - d \end{aligned}$$

In base alla grandezza che vorremo descrivere (errore o uscita di solito) e agli elementi che lo influenzano, vari tipi di disturbi che vedremo più avanti, avremo diverse funzioni di  $L$ .

**Requisiti di un sistema di controllo:**

- stabilità asintotica
- stabilità robusta (stabile per  $G$  vicine a quella vera)

- velocità di risposta elevata
- parsimonia di  $u(t)$
- attenuazione dei disturbi
- piccolo errore a regime

### 13.1 Stabilità asintotica

Non dobbiamo studiare  $L$  ma  $H(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)}$ . Usiamo il **criterio di Bode**. Immaginiamo  $L(s)$  propria e

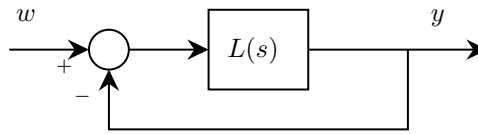
- $\Re(p_i) \leq 0 \forall i$  (poli di  $L(s)$ )
- $|L(i\omega)|$  attraversa 0 dB una sola volta in  $\omega = \omega_c$  (quindi per forza dall'alto verso il basso)

Allora  $H(s)$  è asint. stabile se e solo se

- $\mu > 0$
- $\varphi_m > 0$ , dove  $\varphi_m$  è il **margin di fase** e vale  $\varphi_m = \pi - |\varphi_c|$ , dove  $\varphi_c$  è la **fase critica** e vale  $\varphi_c = \arg L(i\omega_c)$ 
  - ovvero se  $|\varphi_c| < \pi$

### 13.2 Banda passante e tempo di risposta

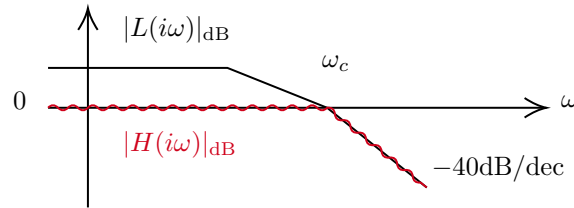
Consideriamo un semplice sistema di controllo



$$H(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)} \Rightarrow |H(i\omega)| = \left| \frac{L(i\omega)}{1+L(i\omega)} \right| = \frac{|L(i\omega)|}{|1+L(i\omega)|}$$

$$= \begin{cases} \frac{|L(i\omega)|}{|L(i\omega)|} = 1 = 0 \text{ dB}, & |L(i\omega)| \gg 1 \text{ (0dB)} \\ |L(i\omega)|, & |L(i\omega)| \ll 1 \text{ (0dB)} \end{cases}$$

Lontano da  $\omega_c$  possiamo approssimare  $H$  così, ipotizzando quella specifica  $L$



È un filtro passa-basso, con banda  $\{\omega : 0 < \omega < \omega_c\}$ . Questo induce una stima del tempo di risposta. Indurre uno scalino alla  $w$  significa chiedere quello specifico valore. Non conosciamo i poli di  $H$ , ma possiamo fare un esercizio di identificazione. Tipo 0 e guadagno 0dB, cioè 1.

$$H(s) = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{\omega_c} s\right)^2}$$

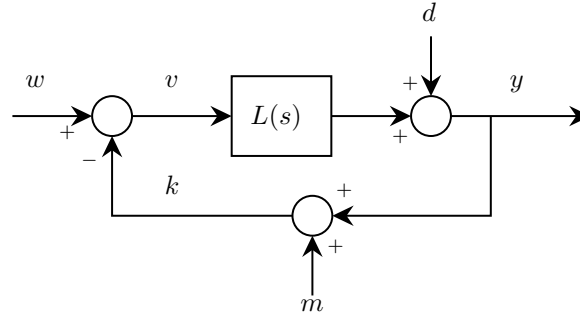
L'esponente è 2 perché nell'esempio considerato la pendenza finale è  $-40$ , in generale è diverso, ma la struttura è quella. Il primo cambio di pendenza è alla  $\omega_c$  e la prima ci dice il tempo dominante.

$$T_R \simeq 5T_D = \frac{5}{\omega_c}$$

### 13.3 Errore a regime

Consideriamo un sistema asint. stabile. In generale i disturbi presenti saranno dovuti a

- la specifica  $w(t)$  che richiediamo
- un disturbo in uscita  $d(t)$
- un disturbo di misura  $m(t)$  dovuto alla misurazione stessa dell'uscita



Supponiamo  $d(t), m(t), w(t)$  costanti e calcoliamo l'errore.

$$\begin{aligned}
 e &= w - y \\
 &= w - (d + Lv) \\
 &= w - (d + L(w - kv)) \\
 &= w - (d + L(w - (m + y))) \Rightarrow \boxed{e = \frac{1}{1+L}w - \frac{1}{1+L}d + \frac{L}{1+L}m} \\
 &= w - d + Lm - L(w - y) \\
 &= w - d + Lm - Le \\
 e(1+L) &= w - d + Lm
 \end{aligned}$$

Studiamola nello spirito della sovrapposizione degli effetti

- effetto di  $\bar{w}$  costante. I termini delle produttorie nella  $L(s)$  non contano nel limite per  $s \rightarrow 0$

$$\begin{aligned}
 \bar{e} &= F(0)\bar{w} = \frac{1}{1+L(0)}\bar{w} = \left( \frac{1}{1+\frac{\mu}{s^h}}\bar{w} \right)_{s=0} = \left( \frac{s^h}{s^h+\mu}\bar{w} \right)_{s=0} \\
 &= \begin{cases} \text{se } h=0, & \frac{1}{1+\mu}\bar{w} \\ \text{se } h>0, & 0 \\ \text{se } h<0, & \bar{w} \end{cases}
 \end{aligned}$$

- se ha tipo 0 l'errore può essere abbattuto prendendo  $\mu$  grande
- se ha tipo  $> 0$  l'errore è nullo, cioè ha (almeno) un integratore. Ciò ci fa partire già da fasi negative e ci consuma già 90 gradi di margine di fase (nel criterio di Bode)
- se ha tipo  $< 0$ , sei nella cacca, non accettabile. D'ora in poi quindi non consideriamo più questi casi, dato che il disturbo non può essere attenuato.

- effetto di  $\bar{d}$  costante

$$\bar{e} = \begin{cases} \text{se } h=0, & -\frac{1}{1+\mu}\bar{d} \\ \text{se } h>0, & 0 \end{cases}$$

- effetto di  $\bar{m}$  costante

$$\begin{aligned}
 \bar{e} &= F(0)\bar{m} = \frac{L(0)}{1+L(0)}\bar{m} = \left( \frac{\frac{\mu}{s^h}}{1+\frac{\mu}{s^h}}\bar{m} \right)_{s=0} = \left( \frac{\mu}{s^h+\mu}\bar{m} \right)_{s=0} \\
 &= \begin{cases} \text{se } h=0, & \frac{\mu}{1+\mu}\bar{m} \xrightarrow{\mu \rightarrow \infty} \bar{m} \\ \text{se } h>0, & \bar{m} \end{cases}
 \end{aligned}$$

**Nell'errore ritroviamo interamente l'errore di misura**, non siamo in grado di abbatterlo, infatti non dipende dal sistema, non altera il valore dell'uscita.

Questa trattazione è stata fatta sull'errore, ma analogamente si può ragionare su come reagisce l'uscita  $y$  e giungere a risultati concordi:

$$\begin{aligned}
 y &= d + Lv \\
 &= d + L(w - k) \\
 &= d + L(w - (m + y)) \Rightarrow \boxed{y = \frac{L}{1+L}w + \frac{1}{1+L}d - \frac{L}{1+L}m} \\
 &= d + Lw - Lm - Ly \\
 y(1+L) &= Lw + d - Lm
 \end{aligned}$$

Vale poi l'analogo studio dei disturbi a regime.

## 13.4 Disturbo sinusoidale

Analizziamo cosa succede se il disturbo che consideriamo è sinusoidale. Abbiamo visto che l'errore si può genericamente scrivere come

$$e = \frac{1}{1+L}w - \frac{1}{1+L}d + \frac{L}{1+L}m = F_1(s)d_1 + F_2(s)d_2 + F_3(s)d_3$$

Supponiamo quindi che un certo disturbo sia

$$d(t) = D \sin(\omega t + T)$$

Allora si dimostra che

$$\boxed{e_\infty(t) = D|F(i\omega)| \sin(\omega t + T + \arg F(i\omega))} \quad (9)$$

Se per esempio il termine  $F(s)$  fosse

$$F(s) = -\frac{1}{1+L(s)}$$

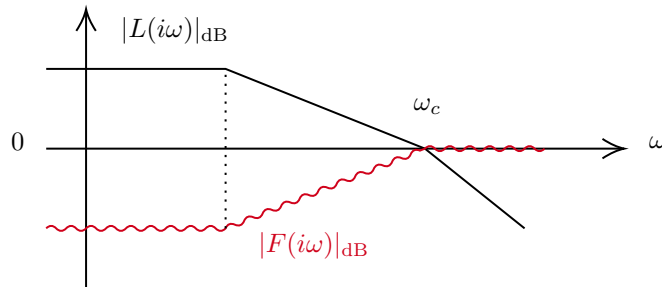
lo potremmo approssimare come

$$|F(i\omega)| = \left| -\frac{1}{1+L(i\omega)} \right| = \frac{1}{|1+L(i\omega)|} = \begin{cases} \text{se } |L(i\omega)| \gg 1, & \frac{1}{|L(i\omega)|} \\ \text{se } |L(i\omega)| \ll 1, & 1 \text{ (0 dB)} \end{cases}$$

Attenzione che

$$\left( \frac{1}{|L(i\omega)|} \right)_{\text{dB}} = 20 \log \frac{1}{|L(i\omega)|} = -20 \log |L(i\omega)|$$

pertanto prima di  $\omega_c$  si ha un ribaltamento nell'approssimazione della  $F$ .



Una nota importante: se il disturbo è **somma di uno sinusoidale e uno costante** lo si tratta come sinusoidale e la parte a costante si considera con  $\omega = 0$  nella formula (9).

### Comandi Matlab

- `inv(A)` calcola l'inversa di una matrice
- `SYS = ss(A,B,C,D)` crea il modello di stato a tempo continuo
- `SYS = ss(A,B,C,D,1)` crea il modello di stato a tempo discreto
- Per creare il sistema con il modello esterno si può procedere come segue  

```
num = [10,2]
den = poly([-1,-1,-1]) (polinomio con queste radici)
SYS = tf(num,den)
```
- `K = dcgain(SYS)` restituisce il guadagno del sistema a regime
- `poli = roots([1 0.7 0.12 -0.09])` calcola le radici di un polinomio
- Per trovare il sistema in forma di stato a partire dalla funzione di trasferimento basta utilizzare il comando `tf2ss`  

```
[A,B,C,D] = tf2ss([0 3 -0.1 -0.43],[1 0.7 0.12 -0.09])
```
- Per costruire i sistemi non lineari su simulink si usa il blocco FCN. Questo riceve in ingresso un vettore colonna `[u(1) u(n)]`.
- Per calcolare la risposta allo scalino:  

```
[out_sca,time_sca] = step(S) (dove S è il Sistema)
```
- Per calcolare la risposta all'impulso:  

```
[out_imp,time_imp] = impulse(S)
```
- Per calcolare la matrice di raggiungibilità: `R = ctrb(A,B)`
- Per calcolare la matrice di osservabilità: `O = obsv(A,C)`
- Per calcolare il vettore riga `k` della legge di controllo:  

```
k = acker(A, -B, autov_controllore);
```
- Per calcolare il vettore colonna `l` del ricostruttore:  

```
lT = acker(A', -C', autov_ricostruttore)
```
- `bode(SYS)` disegna i diagrammi di Bode e il range di frequenze è scelto in automatico.
- `bode(SYS, {WMIN,WMAX})` disegna i diagrammi di bode nel range di frequenze indicato.
- `bode(SYS,W)` valuta la risposta in frequenza nei punti indicati dal vettore `W`.
- `bode(SYS1,SYS2,...,W)` disegna i diagrammi di Bode sovrapposti di tutti i sistemi indicati (`W` è opzionale)  

Chiamate:

  - `[MOD,FASE] = bode(SYS,W)` e `[MOD,FASE,W] = bode(SYS)`  
Restituiscono le risposte in modulo e argomento (in gradi centigradi) ma non disegnano i diagrammi.
  - Per ottenere i valori di MOD in dB:  

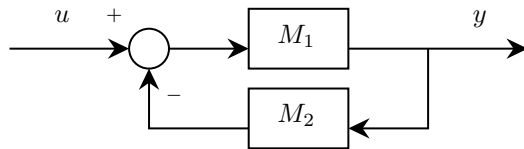
```
MODDB = 20*log10(MOD)
```
- `conv` Restituisce i coefficienti del polinomio prodotto di due polinomi in ingresso. Ad esempio, per i coefficienti di  $(1+s)^3$ :  

```
den = conv(conv([1 1],[1 1]),[1 1])
```
- `lsim` simula la risposta nel tempo del sistema dinamico per ingressi arbitrari.
- `lsim(SYS,U,T)` simula la risposta di SYS all'ingresso U nel tempo T.
- `lsim(SYS,U,T,X0)` simula la risposta di SYS quando lo stato iniziale è X0, altrimenti è zero di default.
- `lsim(SYS1,SYS2,...,U,T,X0)` simula la risposta di numerosi sistemi in un singolo plot.

Chiamate:

- `Y = lsim(SYS,U,T)` restituisce l'uscita  $Y$  e non disegna nulla sullo schermo.
- `[Y,T,X] = lsim(SYS,U,T,X0)` restituisce  $Y$ , il vettore tempo  $T$  e i vettori di stato  $X$  (in una matrice dove la colonna  $i$  è il vettore  $x_i(t)$ ).
- con il comando `margin` è possibile valutare il margine di fase di  $L(s)$ .
  - Chiamata: `margin(L)`
- `feedback` collega in retroazione due sistemi.

Ad esempio, `M = feedback(M1,M2)` è il sistema  $y = Mu$



- Per visualizzare i poli e gli zeri del sistema sotto controllo con guadagno  $\mu$ :  
`pzmap(SYS), axis([-a a -b b])`