

Risoluzione di sistemi lineari Ax = b con metodi diretti

Metodi diretti: Fattorizzazione LU $A = LU$, $\det A \neq 0$
Ly = b, forward substitution ($\simeq n^2$).
Ux = y, backward substitution ($\simeq n^2$).
 $\exists ! \Leftrightarrow A_i, i = 1, \dots, n$ non singolari
A dominanza diagonale stretta per righe o colonne $\Rightarrow \exists !$
A simmetrica e definita positiva $\Rightarrow \exists !$

Metodo di eliminazione gaussiana (MEG) Costo: $\simeq 2/3\ n^3$.

Tecniche di Pivoting. PA = LU, P matrice di permutazione. Se P = I non c'è pivoting.
Ly = Pb, Ux = y

Casi particolari di Fattorizzazioni LU $\begin{cases} \text{ } \end{cases}$ i Matrici simmetriche e definite positive (SDP): fattorizzazione di Cholesky $\exists ! H$ triangolare inferiore tale che $A = HH^T$ $\Rightarrow H\mathbf{y} = \mathbf{b}, H^T\mathbf{x} = \mathbf{y}$.
Costo: $\simeq 1/3\ n^3$.
i Matrici tridiagonali: algoritmo di Thomas.
Costo: $\simeq n$.

Norme di vettori, norme matriciali e numero di condizionamento
Norma di vettore: $\|\mathbf{z}\|_p = (\sum_{i=1}^n |z_i|^p)^{1/p} \quad \forall p \in [1, +\infty)$
Norma (indotta) di una matrice:
 $\|A\|_p = \sup_{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{z} \neq \mathbf{0}} \frac{\|A\mathbf{z}\|_p}{\|\mathbf{z}\|_p} \quad \forall p \in [1, +\infty)$
Se $p = 2$, si chiama **norma spettrale**: $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)} \equiv \sqrt{\rho(AA^T)}$.
 $\rho(M)$: **raggio spettrale** di M: $\rho(M) := \max_{i=1, \dots, n} |\lambda_i(M)|$

Se $p = 2$ e A è SDP, allora $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^2)} = \sqrt{\rho(A)^2} = \rho(A) = \lambda_{\max}(A)$.
Proprietà: $\|A\|_2 \geq 0, \|\alpha A\|_2 = \alpha \|A\|_2, \|A + B\|_2 \leq \|A\|_2 + \|B\|_2,$
 $\|A\mathbf{v}\|_2 \leq \|A\|_2 \|\mathbf{v}\|_2$ con \mathbf{v} vettore

Numero di condizionamento $K_p(A) = \|A\|_p \left\| A^{-1} \right\|_p$,

$p = 1, 2, \dots, +\infty$
Se $p = 2$ si dice **numero di condizionamento spettrale**.
Condizionamento grande \rightarrow matrice brutta.
Proprietà: $K_p(A) \geq 1, K_p(I) = 1, K_p(A) = K_p(A^{-1}),$
 $K_p(\alpha A) = K_p(A), \forall \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0$

Condizionamento spettrale: Se A è SDP, allora $K_2(A) = \frac{\lambda_{\max}(A)}{\lambda_{\min}(A)}$

Analisi di stabilità Teorema di stabilità. Sia $\delta A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una perturbazione tale che $\left\| A^{-1} \right\|_p \|\delta A\|_p < 1$. Allora se $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ è soluzione di (PO) con $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ e $\mathbf{x} + \delta \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ è soluzione di (PP) per $\delta \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$

allora
$$\frac{\|\delta \mathbf{x}\|_p}{\|\mathbf{x}\|_p} \leq \left[\frac{K_p(A)}{1 - K_p(A) \frac{\|\delta A\|_p}{\|A\|_p}} \right] \left(\frac{\|\delta \mathbf{b}\|_p}{\|\mathbf{b}\|_p} + \frac{\|\delta A\|_p}{\|A\|_p} \right)$$

Corollario. Se $\delta A = 0$ allora $\frac{1}{K_p(A)} \frac{\|\delta \mathbf{b}\|_p}{\|\mathbf{b}\|_p} \leq \frac{\|\delta \mathbf{x}\|_p}{\|\mathbf{x}\|_p} \leq K_p(A) \frac{\|\delta \mathbf{b}\|_p}{\|\mathbf{b}\|_p}$

Problema del fill-in Matrice sparsa: se il numero di elementi non nulli è circa $O(n)$.

Risoluzione di sistemi lineari con metodi iterativi

Forma generale: $\text{Dato } \mathbf{x}^{(0)}, \quad \mathbf{x}^{(k+1)} = B\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{g}, \quad k \geq 0$
B: matrice di iterazione, dipende solo dalla matrice A di partenza, invece g dipende sia da A che da b.
Convergenza: $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{e}^{(k)} = 0$, con $\mathbf{e}^{(k)} = \mathbf{x} - \mathbf{x}^{(k)}$
Consistenza: $\mathbf{x} = B\mathbf{x} + \mathbf{g}, (\Rightarrow \mathbf{g} = (I - B)A^{-1}\mathbf{b})$
La consistenza non implica la convergenza.

$\text{convergenza} \quad \Leftrightarrow \quad \rho(B) < 1$

Se $\rho(B) \ll 1$ allora la convergenza è più veloce.

Equazione dell'errore: $\mathbf{e}^{(k)} = B^k \mathbf{e}^{(0)}$

Costruzione di metodi iterativi $A = P - N$
P matrice di preconditionamento. Il metodo allora si scrive in due modi

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \underbrace{P^{-1}N}_{B} \mathbf{x}^{(k)} + \underbrace{P^{-1}\mathbf{b}}_{\mathbf{g}}$$

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \underbrace{P^{-1}(\mathbf{b} - A\mathbf{x}^{(k)})}_{\text{residuo } \mathbf{r}^{(k)}}$$

converge $\Leftrightarrow \rho(I - P^{-1}A) < 1$
 $A = D - E - F$ D parte diagonale, $-E$ triangolare bassa, $-F$ triangolare alta

Metodo di Jacobi $P = D$ $N = E + F$ \Rightarrow $B_J = P^{-1}N = D^{-1}(E + F)$

Metodo di Gauss-Seidel $P = D - E$ $N = F$ \Rightarrow $B_{GS} = P^{-1}N = (D - E)^{-1}F$

2 volte più veloce di Jacobi.
Convergenza.
A è a dominanza diagonale stretta per righe \Rightarrow J e GS convergono
A è simmetrica e definita positiva \Rightarrow GS converge
A tridiagonale: J converge \Leftrightarrow GS converge, se convergono
 $\rho(B_{GS}) = [\rho(B_J)]^2$

Metodi di rilassamento

JOR (Jacobi Over Relaxation)

$P = \frac{1}{\omega}D, \quad 0 < \omega < 1$

$B_{JOR} = \omega B_J + (1 - \omega)I = I - \omega D^{-1}A$

Se $\omega = 1$ si ritrova il metodo di Jacobi.
 $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \omega D^{-1}\mathbf{r}^{(k)} \quad k = 0, 1, 2, \dots$

SOR (Successive Over Relaxation)

$P = \frac{1}{\omega}D - E, \quad 0 < \omega < 1$

$B_{SOR} = (I - \omega D^{-1}E)^{-1} [(1 - \omega)I + \omega D^{-1}F]$

Se $\omega = 1$ si ritrova il metodo di Gauss-Seidel.
 $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + (\frac{1}{\omega}D - E)^{-1}\mathbf{r}^{(k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$

Convergenza.
JOR, A SDP \Rightarrow JOR converge $\Leftrightarrow 0 < \omega < \frac{2}{\rho(D^{-1}A)}$

Se Jacobi converge, allora il metodo JOR converge purché $0 < \omega \leq 1$.
SOR, A SDP \Rightarrow SOR converge $\Leftrightarrow 0 < \omega < 2$, se A è anche tridiagonale allora $\omega_{opt} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \rho^2(B_J)}}$

SOR, A a dominanza diagonale stretta per righe:
 $0 < \omega \leq 1 \Rightarrow$ SOR converge

Metodo di Richardson Metodo di Richardson stazionario,
 $\alpha_k = \alpha \quad \forall k \Rightarrow \mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + [\alpha]P^{-1}\mathbf{r}^{(k)}$
Metodo di Richardson dinamico $\Rightarrow \mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + [\alpha_k]P^{-1}\mathbf{r}^{(k)}$
Jacobi, Gauss-Seidel, JOR sono tutti casi particolari di Richardson con $\alpha = 1$.
Se $P = I$ otteniamo il metodo di Richardson non preconditionato.
Se $P \neq I$ otteniamo il metodo di Richardson preconditionato.

Matrice di iterazione $B_{\alpha_k} = I - \alpha_k P^{-1}A$

Convergenza.
Richardson stazionario, P invertibile.
converge $\Leftrightarrow \frac{2 \operatorname{Re}(\lambda_i)}{\alpha |\lambda_i|^2} > 1, \quad \forall i = 1, \dots, n, \lambda_i$ gli autovalori di $P^{-1}A$.

Se $P^{-1}A$ con autovalori reali e positivi, ordinati come $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n > 0$ allora converge $\Leftrightarrow 0 < \alpha < \frac{2}{\lambda_1}$ e $\alpha_{opt} = \frac{2}{\lambda_1 + \lambda_n}$.

Metodo del gradiente (Richardson dinamico) Energia del sistema,
 $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad \Phi(\mathbf{y}) = \frac{1}{2} \mathbf{y}^T A \mathbf{y} - \mathbf{y}^T \mathbf{b},$
 \mathbf{x} soluzione di $A\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \Leftrightarrow \quad \Phi(\mathbf{x}) = \min_{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n} \Phi(\mathbf{y})$.

$$\alpha_k = \frac{[\mathbf{r}^{(k)}]^T \mathbf{r}^{(k)}}{[\mathbf{r}^{(k)}]^T A \mathbf{r}^{(k)}}$$

Convergenza.
A e P SDP, il metodo del gradiente (con o senza preconditionatore) converge per ogni scelta di $\mathbf{x}^{(0)}$ e la convergenza è monotona:

$$\left\| \mathbf{e}^{(k+1)} \right\|_A \leq \left[\frac{K_2(P^{-1}A) - 1}{K_2(P^{-1}A) + 1} \right] \left\| \mathbf{e}^{(k)} \right\|_A$$
 dove $\|\cdot\|_A$ è la norma

dell'energia definita come $\forall \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n \quad \|\mathbf{w}\|_A = \sqrt{\mathbf{w}^T A \mathbf{w}}$.

I vettori del residuo sono a due a due ortogonali: $(\mathbf{r}^{(k+1)})^T \mathbf{r}^{(k)} = 0$

Metodo del gradiente coniugato, CG (Conjugate Gradient)
 $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \alpha_k \mathbf{p}^{(k)}$

Scelta della direzione di discesa

$$\begin{cases} \mathbf{p}^{(0)} = \mathbf{r}^{(0)} \\ \mathbf{p}^{(k+1)} = \mathbf{r}^{(k+1)} - \beta_k \mathbf{p}^{(k)} \end{cases} \quad \beta_k = \frac{(\mathbf{r}^{(k)})^T \mathbf{r}^{(k+1)}}{(\mathbf{r}^{(k)})^T \mathbf{p}^{(k)}}$$

La soluzione $\mathbf{x}^{(k+1)}$ è ottimale rispetto a tutte le direzioni di discesa precedenti
 $\mathbf{x}^{(n)}$ è la soluzione esatta.

Scelta del parametro di accelerazione

$$\alpha_k = \frac{[\mathbf{p}^{(k)}]^T \mathbf{r}^{(k)}}{[\mathbf{p}^{(k)}]^T A \mathbf{p}^{(k)}}$$

Convergenza.
A SDP in aritmetica esatta, CG converge in al più n passi e

$$\left\| \mathbf{e}^{(k)} \right\|_A \leq \left[\frac{2c^k}{1 + c^{2k}} \right] \left\| \mathbf{e}^{(0)} \right\|_A \quad \text{con} \quad c = \frac{\sqrt{K_2(A)} - 1}{\sqrt{K_2(A)} + 1}$$

Nel caso preconditionato, uguale ma con $c = \frac{\sqrt{K_2(P^{-1}A)} - 1}{\sqrt{K_2(P^{-1}A)} + 1}$

Criteri di arresto Criterio sul residuo. $\frac{\|\mathbf{r}^{(k+1)}\|}{\|\mathbf{b}\|} \leq \text{TOL}$

Criterio sull'incremento. $\left\|\mathbf{x}^{(k+1)}-\mathbf{x}^{(k)}\right\| \leqslant \text{TOL}$
Criterio di controllo. Arrestiamo il ciclo dopo n_{\max} iterazioni.

Aprossimazione di funzioni e dati

Polinomio di interpolazione di Lagrange **Polinomio di Lagrange**

$\mathcal{L}_i(x)$ è un polinomio di grado n e
$$\mathcal{L}_i(x)=\begin{cases}1 & \text{se } x=x_i \\ 0 & \text{se } x=x_j, \; j \neq i\end{cases}$$

$$\mathcal{L}_i(x)=\prod_{j=0,j\neq i}^n\frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)} \qquad i=0,\ldots,n$$

$\Pi_n(x)=y_0\mathcal{L}_0(x)+y_0\mathcal{L}_1(x)+\ldots+y_n\mathcal{L}_n(x)$
Polinomio di interpolazione di Lagrange $\Pi_n(x)=\sum_{i=0}^ny_i\mathcal{L}_i(x)$
 $\mathcal{L}_i(x)=\frac{w_{n+1}(x)}{(x-x_i)w_{n+1}(x_i)} \qquad i=0,\ldots,n$ dove $w_{n+1}(x)$ è il **polinomio**

nodale
$$w_{n+1}(x)=\prod_{i=0}^n(x-x_i)$$

Errore di interpolazione. x_0,\ldots,x_n $n+1$ punti, $f\in C^{n+1}(I)$ allora

$$E(x)=f(x)-\Pi_nf(x)=\frac{\omega_{n+1}(x)}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi), \; \xi(x)\in I$$

Stabilità del polinomio di interpolazione

$$\left\|\Pi_nf(x)-\tilde{\Pi}_nf(x)\right\|_{\infty}\leqslant\underbrace{\left\|\sum_{i=0}^n\mathcal{L}_i(x)\right\|_{\infty}}_{\Lambda_n(x)}\cdot\underbrace{\max_{i=1,\ldots,n}\left|f(x_i)-\tilde{f}(x_i)\right|}_{\text{dipende solo dalla perturbazione}}$$

$\Lambda_n(x)$ **costante di Lebesgue**, cresce per $n\rightarrow+\infty$. Se nodi *equispaziati*, allora $\Lambda_n(x)=\left\|\sum_{i=0}^n\mathcal{L}_i(x)\right\|_{\infty}\simeq\frac{2^{n+1}}{en(\log n+\gamma)}, \qquad \gamma\simeq\frac{1}{2}.$

Utilizzo dei nodi non equispaziati

Nodi di Chebyshev-Gauss-Lobatto

$$x_i=-\cos\left(\frac{\pi i}{n}\right), \qquad i=0,\ldots,n.$$

$$E_n=|\Pi_nf-f|\overset{n\rightarrow\infty}{\rightarrow}0$$

$$\Lambda_n(x)\leqslant\frac{2}{\pi}\left[\log n+\gamma+\log\frac{8}{\pi^2}\right]+\frac{\pi}{72n^2}$$

Nodi di Chebyshev-Gauss

$$x_i=-\cos\left(\frac{\pi(2i+1)}{2(n+1)}\right), \qquad i=0,\ldots,n.$$

$$E_n=|\Pi_nf-f|\overset{n\rightarrow\infty}{\rightarrow}0$$

$$\Lambda_n(x)\leqslant\frac{2}{\pi}\left[\log(n+1)+\gamma+\log\frac{8}{\pi}\right]+\frac{\pi}{72(n+1)^2}$$

Sull'intervallo generico $[a,b]$:
$$\hat{x}_i=\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}x_i, \qquad i=0,\ldots,n.$$

Interpolazione composita Sia $f\in C^{k+1}(I)$, $I=[a,b]$ e sia $\Pi_h^kf(x)$ il suo polinomio di interpolazione composita. Allora:

$$\left\|f(x)-\Pi_h^kf(x)\right\|_{\infty}\leqslant C\;h^{k+1}\;\left\|f^{(k+1)}\right\|_{\infty}$$

Aprossimazione nel senso dei minimi quadrati

$$\sum_{i=0}^n(y_i-p_m(x_i))^2\leqslant\sum_{i=0}^n(y_i-q_m(x_i))^2, \qquad \forall q_m\in\mathbb{P}^m$$

Se $m=1$ si chiama **retta dei minimi quadrati** o **retta di regressione**.

Sistemi sovradeterminati Data $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$, $m\geqslant n$, e $\mathbf{b}\in\mathbb{R}^m$, diciamo che $\mathbf{x}^*\in\mathbb{R}^n$ è soluzione di $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ nel senso dei minimi quadrati se

$$\Phi(\mathbf{x}^*)=\min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n}\Phi(\mathbf{x})$$

Si trova con le equazioni ortonormali
$$A^T A \mathbf{x}^* = A^T \mathbf{b}$$

Fattorizzazione QR

Sia $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$, $m\geqslant n$. A ammette una fattorizzazione QR se esistono:
- $Q\in\mathbb{R}^{m\times m}$ ortogonale ($Q^{-1}=Q^T$ o ugualmente $Q^TQ=I$)
- $R\in\mathbb{R}^{m\times n}$ trapeziodale superiore con le righe dalla $n+1$ in poi tutte nulle
tali che $A=QR$.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}}_{A\in\mathbb{R}^{m\times n}}=\underbrace{\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}}_{Q\in\mathbb{R}^{m\times m}}\underbrace{\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{R\in\mathbb{R}^{m\times n}}$$

Fattorizzazione QR ridotta. Sia $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$, $m\geqslant n$, di rango massimo di cui sia data la fattorizzazione QR . Allora $\exists!$ fattorizzazione di A della forma: $A=\tilde{Q}\;\tilde{R}$

In tal caso $\exists!$ soluzione $\mathbf{x}^*\in\mathbb{R}^n$ nel senso dei minimi quadrati del sistema sovradimensionato $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ data da:

$$\mathbf{x}^*=\tilde{R}^{-1}\tilde{Q}^T\mathbf{b}$$

Formula di quadratura
$$I_n(f)=\sum_{i=0}^nf(x_i)\alpha_i$$

$x_i, i=0,\ldots,n$ si chiamano *nodì di quadratura*
 $\alpha_i, i=0,\ldots,n$ si chiamano *pesi di quadratura*

Formule di quadratura semplici Formula del punto medio

$$I_0(f)=(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

Formula del trapezio
$$I_1(f)=(b-a)\left[\frac{f(a)+f(b)}{2}\right]$$

Formula di Cavalieri-Simpson
$$I_2(f)=\frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]$$

Errore delle formule di quadratura semplici **Errore di quadratura:**

$$E_n(f)=I(f)-I_n(f)$$

Grado di esattezza $r\geqslant 0$ se: $E_n(p_r)=0 \quad \forall p_r\in\mathbb{P}^r$

Punto medio. Sia $f\in C^2([a,b])$, allora $\exists\xi\in(a,b)$ tale che

$$E_0(x)=\frac{1}{24}f''(\xi)(b-a)^3$$

Trapezio. Sia $f\in C^2([a,b])$, allora $\exists\xi_2\in(a,b)$ tale che

$$E_1(x)=-\frac{1}{12}f''(\xi_2)(b-a)^3$$

Cavalieri-Simpson. Sia $f\in C^4([a,b])$, allora $\exists\xi_3\in(a,b)$ tale che

$$E_2(x)=-\frac{1}{90}\frac{1}{32}f^{(4)}(\xi_3)(b-a)^5$$

Se n è pari, il g.d.e. è $n+1$, se n è dispari il g.d.e. è n .

Formule di quadratura composte

$$I(f)=\int_a^bf(x)dx\simeq I(f)=\int_a^b\Pi_H^kf(x)dx=I_k^c(f)$$
 con $H=\frac{b-a}{N}$

Punto medio composito.

Ogni nodo è $x_k=a+kH$.
$$I_0^c(f)=\sum_{k=0}^{N-1}Hf\left(\frac{x_k+x_{k+1}}{2}\right)$$

Sia $f\in C^2([a,b])$ allora $\exists\xi\in(a,b)$

$$E_0^c(f)=I(f)-I_0^c(f)=-\frac{b-a}{24}H^2f''(\xi)$$

ODA: 2, GDE: 1.

L'esponente di H è detto **ordine di accuratezza della formula di quadratura**.

Trapezio composito.

Ogni nodo è $x_k=a+kH$.
$$I_1^c(f)=\sum_{k=0}^{N-1}\frac{H}{2}[f(x_k)+f(x_{k+1})]$$

Sia $f\in C^2([a,b])$ allora $\exists\eta\in(a,b)$

$$E_1^c(f)=I(f)-I_1^c(f)=-\frac{b-a}{12}H^2f''(\eta)$$

ODA: 2, GDE: 1.

Cavalieri-Simpson composito

$$I_2^c(f)=\sum_{k=0}^{N-1}\frac{H}{6}\left[f(x_k)+4f\left(\frac{x_k+x_{k+1}}{2}\right)+f(x_{k+1})\right]$$

Sia $f\in C^4([a,b])$ allora $\exists\zeta\in(a,b)$

$$E_2^c(f)=I(f)-I_2^c(f)=-\frac{b-a}{180}\frac{1}{16}H^4f^{(4)}(\zeta)$$

ODA: 4, GDE: 3.

Formule di Newton-Cotes Interpolazione di Lagrange su nodi

equispaziati.
$$I_n(f)=\sum_{i=0}^n\alpha_if(x_i)$$

Formule aperte, $x_0=a+h, x_n=b-h, h=\frac{b-a}{n+2}$ ($n\geqslant 0$) (*esempio*: punto medio.);

$$I_n(f)=h\sum_{i=0}^nw_if(x_i), \qquad w_i=\int_{-1}^{n+1}\varphi_i(t)dt$$

Formule chiuse, $x_0=a, x_n=b, h=\frac{b-a}{n}$ ($n\geqslant 1$) (*esempio*: trapezi, Cavalieri-Simpson).

$$I_n(f)=h\sum_{i=0}^nw_if(x_i), \qquad w_i=\int_0^n\varphi_i(t)dt$$

n pari, $f\in C^{n+2}([a,b])$ $E_n(f)=\frac{M_n}{(n+2)!}h^{n+3}f^{(n+2)}(\xi)$	
aperte	chiuse
$M_n=\int\limits_{-1}^{n+1}t\;\pi_{n+1}(t)dt>0$	$M_n=\int\limits_0^n t\;\pi_{n+1}(t)dt<0$
ODA: $n+3$ GDE: $n+1$	
n dispari, $f\in C^{n+1}([a,b])$ $E_n(f)=\frac{K_n}{(n+1)!}h^{n+2}f^{(n+1)}(\eta)$	
aperte	chiuse
$K_n=\int\limits_{-1}^{n+1}\pi_{n+1}(t)dt>0$	$K_n=\int\limits_0^n\pi_{n+1}(t)dt<0$
ODA: $n+2$ GDE: n	

Consistenza di un metodo RK a s stadi

Definiamo l'errore di troncamento locale $\tau_{n+1}(h)$ nell'istante temporale t_{n+1}

$$h\tau_{n+1}(h) = y(t_{n+1}) - y(t_n) - h \sum_{i=1}^s b_i K_i$$

Il metodo RK è consistente se l'errore di troncamento globale

$\tau(h) = \max_n |\tau_n(h)| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$
Diciamo inoltre che l'errore di troncamento globale è di ordine $p \geq 1$ se $\tau(h) = O(h^p)$ per $h \rightarrow 0$.

Un metodo RK a s stadi è consistente se e solo se $\sum_{i=1}^s b_i = 1$. Essendo metodi a un passo la consistenza implica la 0-stabilità e quindi la convergenza.

Un metodo RK esplicito a s stadi non può avere ordine maggiore di s. Inoltre, non esistono metodi RK espliciti a s stadi con ordine s, per $s \geq 5$.

ordine richiesto	1	2	3	4	5	6	7	8
numero di stadi necessario s	1	2	3	4	6	7	9	11

Regione di assoluta stabilità dei metodi RK

$$u_{n+1} = \left[1 + h\lambda \mathbf{b}^T (I - h\lambda A)^{-1} \mathbf{1}\right] u_n = R(h\lambda) u_n$$

avendo denotato con $R(h\lambda)$ la **funzione di stabilità**.
Il metodo RK è assolutamente stabile se e solo se $|R(h\lambda)| < 1$. La sua regione di assoluta stabilità è $\mathcal{A} = \{z = h\lambda \in \mathbb{C} \text{ tali che } |R(h\lambda)| < 1\}$.

Metodi multi-step Un metodo si dice a q passi ($q \geq 1$) se $\forall n \geq q - 1$, u_{n+1} dipende da u_{n+1-q} , ma non da valori u_k con $k < n + 1 - q$.
Forma generale di un *metodo multistep lineare* a $p + 1$ passi, con $p \geq 0$:

$$u_{n+1} = \sum_{j=0}^p a_j u_{n-j} + h \sum_{j=0}^p b_j f_{n-j} + hb_{-1} f_{n+1}, \quad n = p, p + 1, \dots$$

se $b_{-1} = 0$: metodo multistep esplicito
se $b_{-1} \neq 0$: metodo multistep implicito

Se $p = 0$: metodi a un passo.

Errore di troncamento locale:

$$h\tau_{n+1}(h) = y(t_{n+1}) - \left[\sum_{j=0}^p a_j y(t_{n-j}) + h \sum_{j=-1}^p b_j y'(t_{n-j}) \right], \quad n \geq p$$

Un metodo multistep è consistente se $\tau(h) = \max_n |\tau_n(h)| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$
Inoltre se $\tau(h) = O(h^q)$, per qualche $q \geq 1$, allora il metodo si dirà di ordine q.

Metodi di Adams

$$u_{n+1} = u_n + h \sum_{j=1}^p b_j f(t_{n-j}, u_{n-j})$$

se $b_{-1} = 0$, stiamo interpolando su $p + 1$ nodi, ovvero $t_n, t_{n-1}, \dots, t_{n-p}$, otteniamo i metodi di Adams espliciti (Adams-Bashforth)
se $b_{-1} \neq 0$, stiamo interpolando su $p + 2$ nodi, ovvero $t_{n+1}, t_n, t_{n-1}, \dots, t_{n-p}$, otteniamo i metodi di Adams impliciti (Adams-Moulton)

Esempi.
AB, cioè esplicito, con $p = 1$, cioè 2 passi

$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{2} [3f(t_n, u_n) - f(t_{n-1}, u_{n-1})]$$

Si dimostra che è uno schema con ordine di convergenza 2.

AM, cioè implicito, con $p = 1$, cioè 2 passi

$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{12} [5f(t_{n+1}, u_{n+1}) + 8f(t_n, u_n) - f(t_{n-1}, u_{n-1})]$$

Si dimostra che è uno schema con ordine di convergenza 3.

AB, $p = 0$ è (EE)

AM, $p = 0$ è (CN)

Metodi BDF (Backward Differentiation Formula)

$$u_{n+1} = \sum_{j=0}^p a_j u_{n-j} + hb_{-1} f(t_{n+1}, u_{n+1}), \quad b_{-1} \neq 0$$

Analisi dei metodi multistep

AB a $p + 1$ passi ha ordine $p + 1$.

AM a $p + 1$ passi ha ordine $p + 2$.

Un metodo multistep è **consistente** se e solo se i coefficienti $\{a_j\}$ e $\{b_j\}$ soddisfano la seguente condizione

$$\sum_{j=0}^p a_j = 1, \quad - \sum_{j=0}^p j a_j + \sum_{j=-1}^p b_j = 1$$

Se la soluzione $y \in C^{q+1}(I)$, $q \geq 1$, allora il metodo multistep è di ordine q se e solo se vale la consistenza e e inoltre

$$\sum_{j=0}^p (-j)^i a_j + i \sum_{j=-1}^p (-j)^{i-1} b_j = 1, \quad i = 2, \dots, q$$

Risoluzione di equazioni e sistemi non lineari

Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua e tale che $f(a)f(b) < 0$, allora esiste almeno un punto $\alpha \in (a, b)$ tale che $f(\alpha) = 0$.

Scegliamo $x^{(0)} \in [a, b]$ e costruiamo una successione $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(k)}$ tale che $\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = \alpha$.

Metodo di bisezione

- Se $f(x^{(0)}) = 0$ abbiamo finito, $\alpha = x^{(0)}$.
- Se $f(a^{(0)}) f(b^{(0)}) < 0$ allora $\alpha \in (a^{(0)}, x^{(0)})$ quindi ridefiniamo $a^{(1)} = a^{(0)}, b^{(1)} = x^{(0)}, I^{(1)} = (a^{(1)}, b^{(1)}), x^{(1)} = \frac{a^{(1)} + b^{(1)}}{2}$
- Se $f(x^{(0)}) f(b^{(0)}) < 0$ allora $\alpha \in (x^{(0)}, b^{(0)})$ quindi ridefiniamo $a^{(1)} = x^{(0)}, b^{(1)} = b^{(0)}, I^{(1)} = (a^{(1)}, b^{(1)}), x^{(1)} = \frac{a^{(1)} + b^{(1)}}{2}$

Si ha $|I^{(k)}| = |b^{(k)} - a^{(k)}| = \frac{1}{2} |b^{(k-1)} - a^{(k-1)}| = \dots = \frac{1}{2^k} (b - a)$

$$\text{quindi } 0 \leq |e^{(k)}| \leq \frac{1}{2^{k+1}} (b - a) \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} |e^{(k)}| = 0$$

Se vogliamo calcolare l'errore a meno di una precisione ε , cioè vogliamo essere sicuri che $|e^{(k)}| \leq \varepsilon$, ci basta fermare l'algoritmo alla k_{\min}

$$\text{interazione } k_{\min} = \left\lceil \log_2 \frac{b - a}{\varepsilon} - 1 \right\rceil$$

In generale la successione degli errori $e^{(k)}$ generata dal metodo di bisezione non converge a zero *monotonamente*.

Convergenza. Diciamo che la successione $\{x^{(k)}\}_{k \geq 0}$ converge ad α con ordine $p \geq 1$ se $\exists C > 0$ tale che

$$\frac{|x^{(k+1)} - \alpha|}{|x^{(k)} - \alpha|^p} \leq C, \quad \forall k \geq k_0, \quad k_0 \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}.$$

Approccio geometrico per l'approssimazione di radici

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{1}{q^{(k)}} f(x^{(k)}), \quad \forall k \geq 0$$

Metodo di Newton

Se $f \in C^1(a, b)$, scegliamo $q^{(k)} = f'(x^{(k)})$, $\forall k \geq 0$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}, \quad \forall k \geq 0$$

Metodo delle secanti

Scegliamo $q_k = \frac{f(x^{(k)}) - f(x^{(k-1)})}{x^{(k)} - x^{(k-1)}}$, $\forall k \geq 1$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{x^{(k)} - x^{(k-1)}}{f(x^{(k)}) - f(x^{(k-1)})} f(x^{(k)}), \quad \forall k \geq 1$$

Metodo delle corde

Scegliamo $q_k = q = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$, $\forall k \geq 0$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{b - a}{f(b) - f(a)} f(x^{(k)}), \quad \forall k \geq 0$$

Sono tutti metodi che convergono *localmente*.

Metodo delle iterazioni di punto fisso Cercare gli zeri di f è equivalente a cercare i **punti fissi** della *funzione di iterazione* $\Phi(x) = x - f(x)$, infatti

$$f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \Phi(\alpha) = \alpha$$

$$x^{(k+1)} = \Phi(x^{(k)}), \quad k \geq 0$$

Il metodo delle corde e il metodo di Newton possono essere scritti come metodi di iterazione di punto fisso:

$$\Phi_{\text{corde}}(x) = x - \frac{b-a}{f(b)-f(a)} f(x)$$
$$\Phi_{\text{Newton}}(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Convergenza.

Supponiamo Φ continua in $[a, b]$ e tale che $\Phi(x) \in [a, b]$ per ogni $x \in [a, b]$; allora esiste almeno un punto fisso $\alpha \in [a, b]$. Se supponiamo inoltre che Φ sia una contrazione, cioè che

$\exists L < 1$ t.c. $|\Phi(x_1) - \Phi(x_2)| \leq L|x_1 - x_2| \quad \forall x_1, x_2 \in [a, b]$. Allora Φ ha un unico punto fisso $\alpha \in [a, b]$ e la successione converge ad α , qualunque sia la scelta del dato iniziale $x^{(0)} \in [a, b]$.

Teorema di Ostrowski. Sia α un punto fisso di una funzione Φ continua e derivabile con continuità in un opportuno intorno I di α . Se risulta $|\Phi'(\alpha)| < 1$, allora esiste $\delta > 0$ in corrispondenza del quale la successione $\{x^{(k)}\}$ converge ad α , per ogni $x^{(0)}$ tale che $|x^{(0)} - \alpha| < \delta$. Inoltre si ha

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x^{(k+1)} - \alpha}{x^{(k)} - \alpha} = \Phi'(\alpha)$$

La quantità $|\Phi'(\alpha)|$ è detta **fattore asintotico di convergenza** e, in analogia con il caso dei metodi iterativi per la risoluzione di sistemi lineari, si definisce la **velocità asintotica di convergenza**

$$R = -\log(|\Phi'(\alpha)|)$$

Se $\Phi \in C^{p+1}(I)$ per un opportuno intorno I di α e per un intero $p \geq 1$, e se $\Phi^{(i)}(\alpha) = 0$ per $i = 1, \dots, p$ mentre $\Phi^{(p+1)}(\alpha) \neq 0$, allora il metodo di punto fisso con funzione di iterazione Φ ha ordine $p + 1$ e risulta inoltre

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x^{(k+1)} - \alpha}{(x^{(k)} - \alpha)^{p+1}} = \frac{\Phi^{(p+1)}(\alpha)}{(p+1)!}$$

Analisi di convergenza del metodo delle corde

Converge se

⎧ f'(α) ≠ 0
 b-a
 f(b)-f(a) e f'(α) concordi
⎨
 b-a < 2[f(b)-f(a)]
 f'(α)

Analisi di convergenza del metodo di Newton

Se α è uno zero con molteplicità 1 per f (zero semplice), cioè f(α) = 0, f'(α) ≠ 0, converge localmente con ordine 2.
Se α è uno zero con molteplicità m > 1, converge localmente con ordine 1.
Abbiamo perso un ordine, ma possiamo ripristinarlo utilizzando il metodo di Newton modificato.

x^(k+1) = x^(k) - m * (f(x^(k)) / f'(x^(k)))

Criteri di arresto

Controllo del residuo

Fissiamo una tolleranza ε > 0. Terminiamo il ciclo quando |f(x^(k))| ≤ ε
Si può dimostrare che

- 1. Se |f'(α)| ≈ 1 allora |e^(k)| ≈ ε e quindi il criterio di arresto è affidabile
- 2. Se |f'(α)| ≪ 1 allora |e^(k)| ≫ ε e quindi il criterio di arresto è inaffidabile
- 3. Se |f'(α)| ≫ 1 allora |e^(k)| ≪ ε e quindi il criterio di arresto è

troppo stringente

Controllo sull'incremento

Fissiamo una tolleranza ε > 0. Terminiamo il ciclo quando |x^(k+1) - x^(k)| < ε

Si può dimostrare che

- 1. Se -1 < Φ'(α) < 0 allora il criterio è soddisfacente
- 2. Per i metodi del secondo ordine, se Φ'(α) = 0 allora il criterio è soddisfacente
- 3. Se Φ'(α) ≈ 1 allora il criterio è insoddisfacente

Sistemi di equazioni non lineari Consideriamo lo stesso tipo di problema, ma in versione vettoriale. Sia assegnata F : R^n → R^n, vogliamo trovare x* ∈ R^n tale che F(x*) = 0.

Ricordiamo che la matrice jacobiana associata a F e valutata nel punto x = (x1, x2, ..., xn)^T è data da (JF(x))ij = ∂Fi/∂xj(x), i, j = 1, ..., n

Nel seguito supporremo sempre che F sia una funzione continua e con derivate parziali positive.

Convergenza metodo di Newton per sistemi di equazioni non lineari. Sia F : R^n → R^n, F ∈ C^1(D), dove D è un aperto convesso di R^n che contiene x*. Supponiamo inoltre che JF^-1(x*) esista che esistano delle

costanti positive R, C, L tali che ||JF^-1(x*)|| ≤ C e

||JF(z) - JF(y)|| ≤ L||z - y||, ∀z, y ∈ B(x*, R) avendo indicato con lo stesso simbolo ||·|| una norma vettoriale ed una norma matriciale consistenti. Esiste allora r > 0 tale che, per ogni x^(0) ∈ B(x*, r) il metodo di Newton è univocamente definito, converge a x* e

||x^(k+1) - x*|| ≤ CL ||x^(k) - x*||^2.