1. Runde

des

Bundeswettbewerbs
Mathematik
2024

Bearbeitet

von

26. September 2024

Aufgabe 1

Antwort: Renate (Schwarz) kann verhindern, dass Arthur (Rot) gewinnt.

Definition 1: Spielbrett

Das Spielbrett wird modelliert, indem die $7 \cdot 7 = 49$ Spielfelder durch ihre Koordinaten bezeichnet werden. Dabei hat das Spielfeld unten links die Koordinate $(0,\ 0)$, das Spielfeld unten rechts Koordinate $(6,\ 0)$, das Spielfeld oben links die Koordinate $(0,\ 6)$ und das Spielfeld oben rechts die Koordinate $(6,\ 6)$. Von unten nach oben besteht die i-te Zeile fuer $i = 0,\ 1,\ \ldots\ 6$ von links nach rechts aus den Koordinaten $(0,\ i),\ (1,\ i),\ \ldots\ (6,\ i)$.
Die Menge aller Spielfelder Ω ist dann wie folgt definiert:

$$\Omega := \Big\{(x,\ y) : x,\ y \in \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}\Big\}$$

Definition 2: Erlaubte Zuege

Es seien vier unterschiedliche Steine auf dem Spielbrett: $(x_0,\ y_0),\ (x_1,\ y_1),\ (x_2,\ y_2),\ (x_3,\ y_3)$. Fuer einen dieser Steine $(x_0,\ y_0) \in \Omega$ besteht die Menge der erlaubten Zuege mit diesem Stein genau aus der Menge der vier anliegenden Felder, sofern diese existieren, ohne die bereits besetzten Felder:

$$\Omega_{(x,\ y)} := \Big(\Omega \cap \big\{(x-1,\ y),\ (x+1,\ y),\ (x,\ y-1),\ (x,\ y+1)\big\}\Big) - \Big\{(x_1,\ y_1),\ (x_2,\ y_2),\ (x_3,\ y_3)\Big\}$$

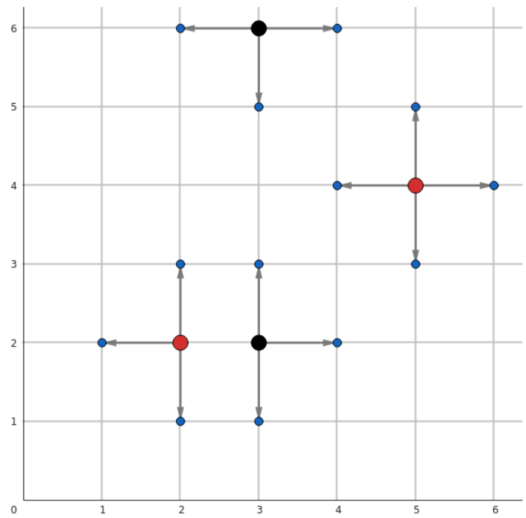


Abbildung 1: Darstellung des Spielbretts durch Koordinaten und der erlaubten Zuege

Definition 3: Sigma-Rechteck

Es seien vier Steine auf paarweise unterschiedlichen Koordinaten gegeben: Die schwarzen Steine auf den Koordinaten $S_0 = (x_0,\ y_0) \in \Omega$ und $S_1 = (x_1,\ y_1) \in \Omega$ und die Roten Steine auf den Koordinaten $R_0 = (x_2,\ y_2) \in \Omega$ und $R_1 = (x_3,\ y_3) \in \Omega$.
Man sagt, dass $S_0,\ S_1,\ R_0$ und R_1 ein Sigma-Rechteck bilden, wenn $a,\ b,\ c,\ d \in \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ existieren, mit

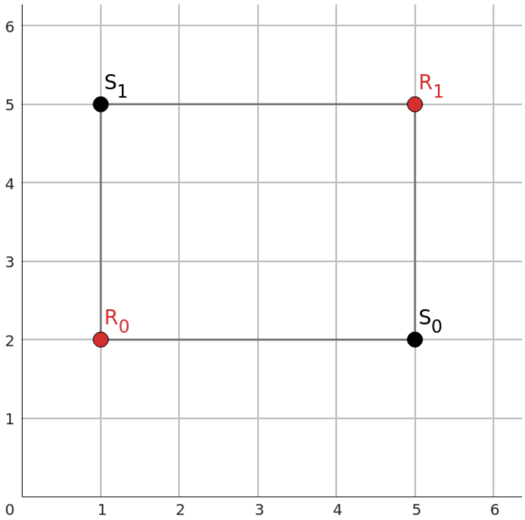
1. $R_0 = (a,\ b)$, $R_1 = (c,\ d)$, $S_0 = (c,\ b)$, und $S_1 = (a,\ d)$, sowie
2. $b < d$, und $a < c$.

Dies bedeutet, dass

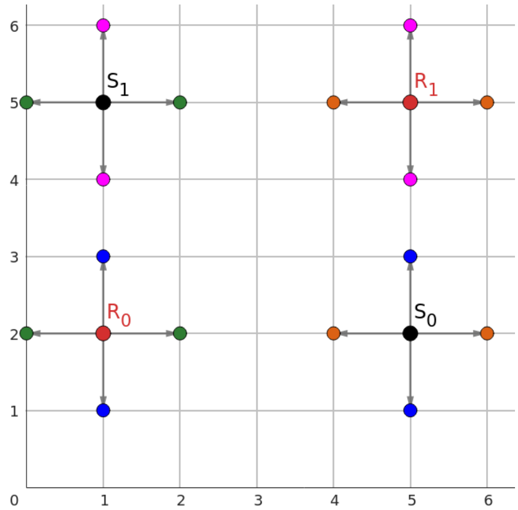
1. S_0 und R_0, bzw. S_1 und R_1 dieselbe y-Koordinate haben: $y_0 = y_2$ und $y_1 = y_3$, wobei S_0 und R_0 eine kleinere y-Koordinate als S_1 und R_1 besitzen: $y_0 = y_2 < y_1 = y_3$, und
2. S_1 und R_0, bzw. S_0 und R_1 dieselbe x-Koordinate haben: $x_1 = x_2$ und $x_0 = x_3$, wobei S_1 und R_0 eine kleinere x-Koordinate als S_0 und R_1 besitzen: $x_1 = x_2 < x_0 = x_3$.

Definition 4: Sigma-Strategie

Schwarz kann folgende Strategie verwenden, um zu verhindern, dass Schwarz gewinnt: Ausgehend von einem Sigma-Rechteck, wird Schwarz unabhaenig davon, welchen Zug Rot waehlt, wieder ein Sigma-Rechteck erzeugen. Dabei ist insbesondere zu beachten, dass die Startposition bereits ein Sigma-Rechteck bildet.
O.B.d.A. bewege Rot den Stein auf R_0 zu einer der Koordinaten $(x,\ y) \in \Omega_{R_0}$. Dann veraendert sich entweder die x-Koordinate oder die y-Koordiante um 1. Veraendert sich die x-Koordinate, so muss Schwarz S_1 in dieselbe Richtung ziehen. Veraendert sich hingegen die y-Koordinate, so muss Schwarz S_0 in dieselbe Richtung ziehe. Analog funktioniert es, wenn Rot R_1 zieht.



(a) Darstellung eines Sigma-Rechtecks mit $a = 1$, $c = 5$ $b = 2$ und $d = 5$



(b) Darstellung der Strategie

In Abbildung (b) ist farbig Dargestellt, welcher schwarze Stein, wohin gezogen werden muss, abhaenig von Rots Zug. Wird beispielsweise R_1 nach oben, bzw. unten gezogen, so muss auch S_1 nach oben, bzw. unten gezogen werden (pink). Die eindeutigen Zuege fuer Schwarz abhaenig von Rots Zuegen werden in den folgenden Tabellen festgehalten:

1. Falls R_0 bewegt wird:

$R_0 = (a,\ b)$	$(a+1,\ b)$	$(a-1,\ b)$	$(a,\ b+1)$	$(a,\ b-1)$
$S_0 = (c,\ b)$			$(c,\ b+1)$	$(c,\ b-1)$
$S_1 = (a,\ d)$	$(a+1,\ d)$	$(a-1,\ d)$		

2. Falls R_1 bewegt wird:

$R_1 = (c,\ d)$	$(c+1,\ d)$	$(c-1,\ d)$	$(c,\ d+1)$	$(c,\ d-1)$
$S_0 = (c,\ b)$	$(c+1,\ b)$	$(c-1,\ b)$		
$S_1 = (a,\ d)$			$(a,\ d+1)$	$(a,\ d-1)$

Lemma 5:

Mit Verwendung der Sigma-Strategie gilt vor jedem Zug k von Rot, dass ein Sigma-Rechteck vorhanden ist. Dabei ist in der Strategie jeder Zug von Schwarz ein erlaubter Zug.

Beweis:

1. Induktionsanfang: $(k = 1)$
   Vor dem ersten Zug von Rot ist bereits ein Sigma-Rechteck vorhanden.

2. Induktionsschritt:

   (a) Induktionsvorraussetzung:
   Es ist ein Sigma-Rechteck nach obiger Definition vorhanden und Rot ist am Zug

(b) Induktionsbehauptung:
Fuer jeden erlaubten Zug von Rot ist es Schwarz moeglich, einen erlaubten schwarzen Zug zu waehlen, sodass wieder ein Sigma-Rechteck nach obiger Definition entsteht.

Beweis:
Es seien $S_0,\ S_1,\ R_0$ und R_1 die Steine in der aktuellen Position, die ein Sigma-Rechteck bilden. Dann gilt $R_0 = (a,\ b)$, $R_1 = (c,\ d)$, $S_0 = (c,\ b)$, und $S_1 = (a,\ d)$ fuer $a,\ b,\ c,\ d \in \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$, sodass auch $b < d$ und $a < c$.
O.B.d.A. sind zwei Faelle fuer eine Zug von $R_0 = (a,\ b)$ auf der x-Koordinate zu betrachten. Fuer einen Zug von R_0 auf der y-Koordiante ist in dem folgenden Beweis S_0 mit einer Veraenderung auf der y-Koordinate analog zu betrachten. Weiter sind die vier moeglichen Zuege von R_1 symetrisch zu denen von R_0 (Rotation um 180°).

1. Der Zug von Schwarz ist stets erlaubt:
   Hier bei ist zu beachten, dass vorausgesetzt werden kann, dass Rots Zug erlaubt war.
   (a) R_0 wird auf $(a+1,\ b)$ gesetzt. Dann wird S_1 auf $(a+1,\ d)$ gesetzt. Dann gilt $a+1 < c$, da $(a+1,\ b)$ ein erlaubter Zug von R_0 ist. Wegen $b < d$ ist dann auch $(a+1,\ d)$ ein erlaubter Zug von S_1.
   (b) R_0 wird auf $(a-1,\ b)$ gesetzt. Dann wird S_1 auf $(a-1,\ d)$ gesetzt.
   Dann gilt $0 \leq a-1$, da $(a-1,\ b)$ ein erlaubter Zug von R_0 ist. Wegen $a < c$ und $b < d$ ist $(a-1,\ d)$ ein erlaubter Zug von S_1.
2. Es entsteht stets erneut ein Sigma-Rechteck:
   (a) R_0 wird auf $(a+1,\ b)$ gesetzt. Dann wird S_1 auf $(a+1,\ d)$ gesetzt.
   (b) R_0 wird auf $(a-1,\ b)$ gesetzt. Dann wird S_1 auf $(a-1,\ d)$ gesetzt.

   Dadurch wird je die x-Koordiante von R_0 und S_1 wieder gleich. Weiter ist die x-Koordinate von S_0 und R_1 immer noch gleich, da sie nicht veraendert wurden. Selbiges gilt fuer die y-Koordinate von R_0 und S_0, bzw. S_1 und R_1. Somit ist in der Tat erneut ein Sigma-Rechteck entstanden.

Satz 6:
Bei Verwendung der Sigma-Strategie kann Rot niemals gewinnen.

Beweis:
Es wird gezeigt, dass in jeder Stellung, bei der Rot am Zug ist, Rot nicht gewinnen kann:
Gegeben sei eine aktuelle Stellung $S_0,\ S_1,\ R_0$ und R_1 bei der Rot am Zug ist. Durch Benutzung der Sigma-Strategie von Schwarz ist bekannt, dass dann $S_0,\ S_1,\ R_0$ und R_1 ein Sigma-Rechteck bilden (dies gilt insbesondere auch vor dem ersten Zug von Rot).
Insbesondere gilt mit Verwendung der Sigma-Strategie, dass nach dem Zug von Rot, gefolgt von einem Zug von Schwarz wieder ein Sigma-Rechteck gegeben sein wird.
Dieses Sigma-Rechteck werde druch die Steine $\tilde{R_0}$, $\tilde{R_1}$, $\tilde{S_0}$ und $\tilde{S_1}$ gebildet, wobei $\tilde{R_0} = (\tilde{a},\ \tilde{b})$, $\tilde{R_1} = (\tilde{c},\ \tilde{d})$, $\tilde{S_0} = (\tilde{c},\ \tilde{b})$ und $\tilde{S_1} = (\tilde{a},\ \tilde{d})$ fuer $\tilde{a},\ \tilde{b},\ \tilde{c},\ \tilde{d} \in \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ mit $\tilde{b} < \tilde{d}$, und $\tilde{a} < \tilde{c}$.
Angenommen, Rot wurde durch seinen Zug gewinnen koenen. Dann gilt nach dem Zug von Rot genau eines dieser Kriterien:

1. $\tilde{a} = \tilde{c}$ und $\tilde{b} = \tilde{d} + 1$,
2. $\tilde{a} = \tilde{c}$ und $\tilde{d} = \tilde{b} + 1$,
3. $\tilde{b} = \tilde{d}$ und $\tilde{a} = \tilde{c} + 1$, oder
4. $\tilde{b} = \tilde{d}$ und $\tilde{c} = \tilde{a} + 1$.

Dabei ist zu beachten, dass der Zug von Schwarz, der dem von Rot folgt, keinen Einfluss auf $\tilde{R_0}$ und $\tilde{R_1}$ hat.
Gilt allerdings 1. oder 2., so besteht ein Widerspruch zu $\tilde{a} < \tilde{c}$ und gilt 3. oder 4., so besteht ein Widerspruch zu $\tilde{b} < \tilde{d}$. Somit war die Annahme, dass Rot gewinnen kann falsch.

Aufgabe 2

Definition 7:

Fuer diese Aufgabe betrachte man zunaechst eine Zahl, deren Dezimaldarstellung aus $n \in \mathbb{N}$ (mit $n \geq 1$) mal derselben Ziffer $a \in \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$ besteht:

$$a_n := \overline{a \ldots a} = \sum_{i=0}^{n-1} a \cdot 10^i \tag{1}$$

Definition 8:

Dann ist die, in der Aufgabenstellung beschriebene Zahl $(44 \ldots 41)$, die aus einer ungraden Anzahl an Ziffern 4 gefolgt von einer Ziffer 1 besteht, gegeben durch $4_{2n} - 3$. Es sei

$$\sigma_n := 4_{2n} - 3 \tag{2}$$

Lemma 9:

Fuer alle $n \in \mathbb{N}_0$ mit $n \geq 0$ gilt:

$$\sum_{i=0}^{n} 10^i = \frac{10^{n+1} - 1}{9} \tag{3}$$

Beweis durch vollstaendige Induktion:

1. Induktionsanfang ($n = 0$):
   Fuer $n = 0$ gilt:
   $$\sum_{i=0}^{n} 10^i = \sum_{i=0}^{0} 10^i = 10^0 = 1 = \frac{9}{9} = \frac{10^1 - 1}{9} = \frac{10^{n+1} - 1}{9}$$

2. Induktionsschritt:

   (a) Induktionsvorraussetzung:
   Es sei $n \in \mathbb{N}_0$ mit $n \geq 0$ fest aber beliebig und es gelte:
   $$\sum_{i=0}^{n} 10^i = \frac{10^{n+1} - 1}{9}$$

   (b) Induktionsbehauptung:
   Dann gilt auch:
   $$\sum_{i=0}^{n+1} 10^i = \frac{10^{n+2} - 1}{9}$$

   Beweis: Es gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n+1} 10^i &= \left(\sum_{i=0}^{n} 10^i \right) + 10^{n+1} \\ &\overset{\text{IV}}{=} \frac{10^{n+1} - 1}{9} + 10^{n+1} \\ &= \frac{10^{n+1} - 1 + 9 \cdot 10^{n+1}}{9} \\ &= \frac{10 \cdot 10^{n+1} - 1}{9} \\ &= \frac{10^{n+2} - 1}{9} \end{aligned}$$

Nach dem Beweisprinzip der vollstaendigen Induktion gilt die Aussage fuer alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Lemma 10:

Fuer alle $a \in \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$a_n = a \cdot \frac{10^n - 1}{9} \tag{4}$$

Beweis:
Es sei $a \in \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$ und $n \in \mathbb{N}$ fest aber beliebig mit $n \geq 1$. Dann gilt $n - 1 \geq 0$, sowie:

$$\begin{aligned} a_n &\overset{(1)}{=} \overline{a \dots a} \overset{(1)}{=} \sum_{i=0}^{n-1} a \cdot 10^i \\ &= a \cdot \sum_{i=0}^{n-1} 10^i \\ &\overset{(3)}{=} a \cdot \frac{10^{(n-1)+1} - 1}{9} \\ &= a \cdot \frac{10^n - 1}{9} \end{aligned}$$

Lemma 11:

Fuer alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$ gilt:

$$4_{2n} = 6_n^2 + 8_n \tag{5}$$

Beweis:
Fuer $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$ fest aber beliebig gilt nach Lemma 11:

$$\begin{aligned} 4_{2n} &= 4 \cdot \frac{10^{2n} - 1}{9} = \frac{4}{9} \cdot (10^{2n} - 1), \\ 6_n &= 6 \cdot \frac{10^n - 1}{9} = \frac{6}{9} \cdot (10^n - 1) = \frac{2}{3} \cdot (10^n - 1), \text{ sowie} \\ 8_n &= 8 \cdot \frac{10^n - 1}{9} = \frac{8}{9} \cdot (10^n - 1) \end{aligned}$$

Somit gilt weiter

$$6_n^2 = \frac{4}{9} \cdot (10^n - 1)^2,$$

sowie

$$\begin{aligned} 6_n^2 + 8_n &= \frac{4}{9} \cdot (10^n - 1)^2 + \frac{8}{9} \cdot (10^n - 1) \\ &= \frac{4}{9} \cdot (10^n - 1)^2 + 2 \cdot \frac{4}{9} \cdot (10^n - 1) \\ &= \frac{4}{9} \cdot (10^n - 1) \cdot ((10^n - 1) + 2) \\ &= \frac{4}{9} \cdot (10^n - 1) \cdot (10^n + 1) \\ &= \frac{4}{9} \cdot ((10^n)^2 - 1) \\ &= \frac{4}{9} \cdot (10^{2n} - 1) \\ &= 4_{2n} \end{aligned}$$

Somit gilt fuer alle $n \in \mathbb{N}$:

$$4_{2n} = 6_n^2 + 8_n$$

Lemma 12:

Fuer alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$ gilt:

$$6_n^2 < \sigma_n < (6_n + 1)^2 \tag{6}$$

Beweis:
Es sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$ fest aber beliebig.

1. Teil. Zu zeigen: $6_n^2 < \sigma_n = 4_{2n} - 3$.
   Nach Lemma 5 gilt:

   $$4_{2n} = 6_n^2 + 8_n \iff 4_{2n} - 3 = 6_n^2 + (8_n - 3)$$

   Da fuer alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, dass $8_n \geq 8_1 = 8 > 3$, gilt weiter fuer alle $n \in \mathbb{N}$:

   $$\begin{aligned} 8_n > 3 &\iff 8_n - 3 > 0 \\ &\iff 6_n^2 + (8_n - 3) > 6_n^2 \\ &\iff 4_{2n} - 3 > 6_n^2 \\ &\iff \sigma_n > 6_n^2 \end{aligned}$$

2. Teil. Zu zeigen: $4_{2n} - 3 = \sigma_n < (6_n + 1)^2$
   Wie in Lemma 5 gezeigt gilt $6_n = \frac{2}{3} \cdot (10^n - 1)$ und $8_n = \frac{8}{9} \cdot (10^n - 1)$. Daraus folgt:

   $$\frac{4}{3} \cdot 6_n = \frac{4}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot (10^n - 1) = \frac{8}{9} \cdot (10^n - 1) = 8_n$$

   Weiter gilt nach Lemma 5:

   $$4_{2n} = 6_n^2 + 8_n \iff 6_n^2 = 4_{2n} - 8_n$$

   Dann gilt weiter:

   $$\begin{aligned} (6_n + 1)^2 &= 6_n^2 + 2 \cdot 6_n + 1 \\ &= (4_{2n} - 8_n) + 2 \cdot 6_n + 1 \\ &> 4_{2n} - 8_n + \frac{4}{3} \cdot 6_n + 1 \\ &= 4_{2n} - 8_n + 8_n + 1 \\ &= 4_{2n} + 1 \\ &> 4_{2n} - 3 = \sigma_n \end{aligned}$$

Nach Teil 1 und Teil 2 gilt fuer alle $n \in \mathbb{N}$:

$$6_n^2 < \sigma_n < (6_n + 1)^2$$

Satz 13:

$\sigma_n = 4_{2n} - 3$ ist keine Quadratzahl.

Beweis:
Fuer alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$ gilt:

$$6_n^2 < \sigma_n < (6_n + 1)^2$$

Angenommen, es gaebe ein $x \in \mathbb{N}$ mit $x^2 = \sigma_n$. Dann gaelte:

$$6_n^2 < x^2 < (6_n + 1)^2$$

Wegen $6_n,\ x,\ 6_n + 1 > 0$ folgt:

$$6_n < x < 6_n + 1.$$

Da keine natuerliche Zahl, die groeszer als 6_n und kleiner als $6_n + 1$ ist, existiert, besteht ein Widerspruch zu Annahme. Somit existiert kein $x \in \mathbb{N}$ mit $x^2 = \sigma_n$. Somit ist $\sigma_n = 4_{2n} - 3$ keine Quadratzahl.

Aufgabe 3

Lemma 1:

$ABME$ und $DEFM$ sind Sehnenvierecke.

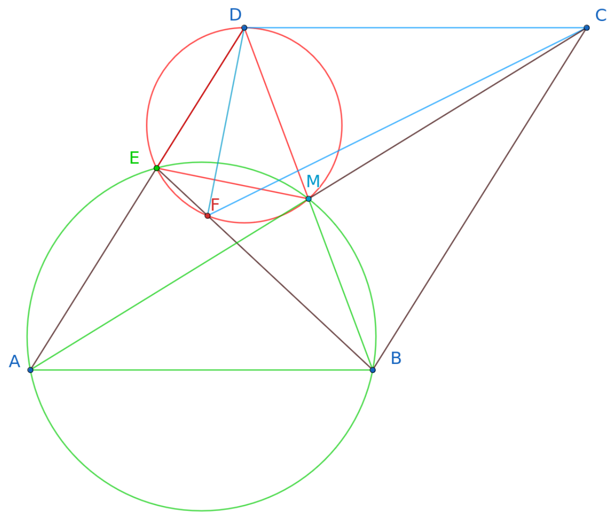


Abbildung 3: $ABME$ und $DEFM$ sind Sehnenvierecke

Beweis:

1. Nach der Konstruktion liegt E auf dem Umkreis des Dreiecks ABM, sodass $ABME$ ein Sehnenviereck ist, da A, B, M und E auf demselben Kreis liegen.
2. Nach der Konstruktion liegt F auf dem Umkreis des Dreiecks EMD, sodass $FMDE$ ein Sehnenviereck ist, da F, M, D, und E auf demselben Kreis liegen.

Lemma 2:

$BCDF$ ist ein Sehnenviereck.

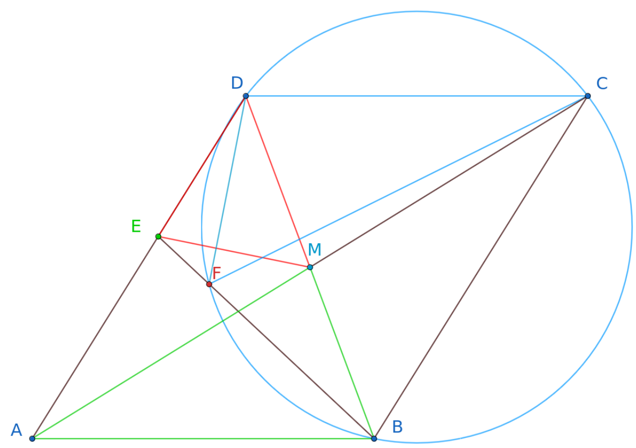


Abbildung 4: $BCDF$ ist ein Sehnenviereck

Beweis:
1. Teil. Zunaechst wird gezeigt, dass

$$\angle BCD = \angle BAD = \angle BAE = \angle DME = \angle DFE.$$

Da $ABCD$ nach Konstruktion ein Parallelogramm ist, sind die gegenueberliegenden Winkel $\angle BCD$ und $\angle BAD$ gleich. D.h., es gilt:

$$\angle BCD = \angle BAD$$

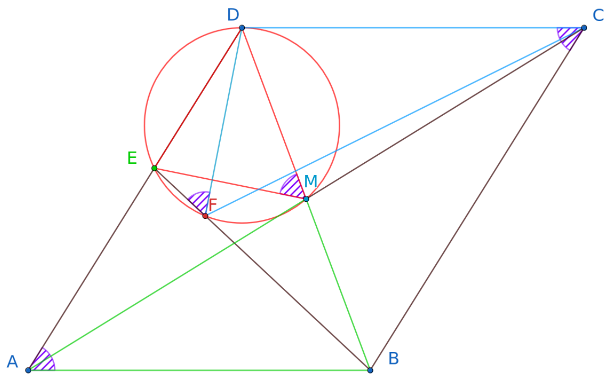


Abbildung 5: Die Winkel $\angle BCD$, $\angle BAD$, $\angle BAE$, $\angle DME$ und $\angle DFE$ sind gleich.

Da nach der Konstruktion E auf AD liegt, gilt

$$\angle BAD = \angle BAE.$$

Da $ABME$ ein Sehnenviereck ist, ergaenzen sich gegenueberliegenden Winkel zu π. Deswegen gilt $\angle BAE + \angle BME = \pi$. Da der Mittlepunkt M des Parallelogramms per Definition auf der Diagonalen BD liegt, gilt auch $\angle BME + \angle EMD = \pi$. Daraus folgt, dass

$$\angle BAE = \angle EMD.$$

Da auch $DEFM$ ein Sehnenviereck ist, gilt nach dem Peripheriewinkelsatz mit der Sehne ED, dass

$$\angle DME = \angle DFE.$$

2. Teil. Nun wird gezeigt, dass $BCDF$ ein Sehnenviereck ist.

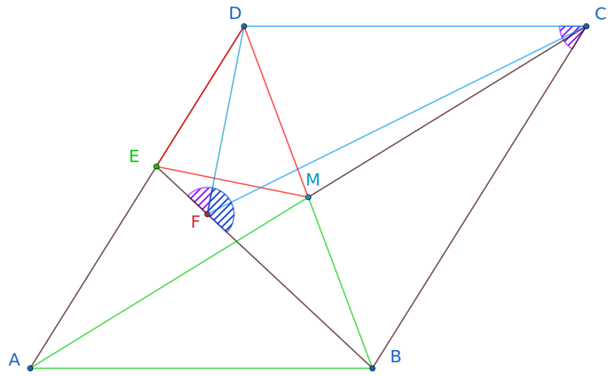


Abbildung 6: Es gilt $\angle BCD + \angle BFD = \pi$

Es gilt, dass $\angle DFE = \angle BCD$. Da nach Konstruktion F auf BE liegt, gilt $\angle EFD + \angle BFD = \pi$. Somit gilt auch, dass $\angle BCD + \angle BFD = \pi$. Da fuer das Viereck $BCDF$ die Innenwinkelsumme 2π ist, gilt

$$\angle BCD + \angle CDF + \angle BFD + \angle FBC = 2\pi$$

Somit gilt auch

$$\angle CDF + \angle FBC = \pi$$

Somit ergaenzen sich die gegenueberliegenden Winkel des Vierecks $BCDF$ zu π. Somit ist $BCDF$ ein Sehnenviereck. D.h., es existiert ein Kreis auf welchem die Punkte B, C, D und F liegen.

Satz 3:

Es gilt $\angle ACB = \angle DCF$.

Beweis:
Nun wird gezeigt, dass $\angle ACB = \angle CAD = \angle MAE = \angle EBM = \angle FBD = \angle DCF$.

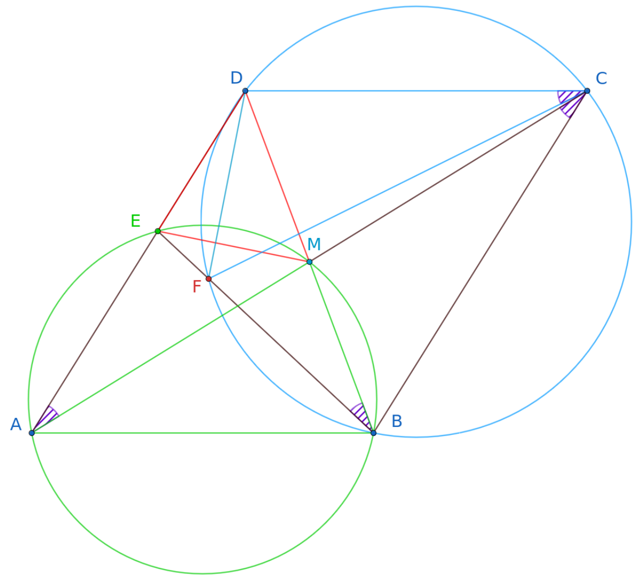


Abbildung 7: Die Winkel $\angle ACB$, $\angle CAD$, $\angle MAE$, $\angle EBM$, $\angle FBD$, $\angle DCF$ sind gleich.

Da $ABCD$ ein Parallelogramm ist, sind die Strecken AD und BC parallel. Somit sind auch die Graden, die durch die Punkte A und D, sowie B und C gehen, parallel. Nach dem Wechselwinkelsatz gilt mit der Grade durch A und C dann:

$$\angle ACB = \angle CAD$$

Da E auf AD und M auf AC liegt, gilt:

$$\angle CAD = \angle MAE$$

Da nach Lemma 1 $ABME$ ein Sehnenviereck ist, gilt nach dem Peripheriewinkelsatz mit der Sehne ME, dass

$$\angle MAE = \angle EBM.$$

Da F auf BE und M auf BD liegt, gilt weiter, dass

$$\angle EBM = \angle FBD.$$

Da nach Lemma 2 auch $BCDF$ ein Sehnenviereck ist, gilt mit der Sehne DF nach dem Peripheriewinkelsatz, dass

$$\angle FBD = \angle DCF.$$

Somit gilt in der Tat

$$\angle ACB = \angle CAD = \angle MAE = \angle EBM = \angle FBD = \angle DCF,$$

sodass

$$\angle ACB = \angle DCF.$$