2. Runde

des

Bundeswettbewerbs Mathematik 2024

Bearbeitet

von

Hilfsmittel:
Bis auf Folgende Hilfsmittel wurden keine weiteren verwendet.

1. Aufgabe: Eigenes Computerprogramm zum Finden von Loesungen zwecks Ideenfindung.
2. Aufgabe: Eigenes Computerprogramm zur Generierung eines Beispiels für $r = 2$.
3. Aufgabe: Geogebra zur Ideenfindung; Online Literatur (Wikipedia, Mathepedia) zu Seitenhalbierenden und dem Schwerpunkt in Dreiecken. Insbesondere zur Existenz des Schwerpunkts, Zerteilung der Seitenhalbierenden durch diesen im Verhaeltnis $2 : 1$, und der Länge der Seitenhalbierenden in Abhaenigkeit der Seitenlaengen des Dreiecks; Univorlesung: Grundlagen der Analysis (Zwischenwertsatz).
4. Aufgabe: Keine Hilfsmittel.

Aufgabe 1

Antwort: $(x,\ y) = (-1,\ 0)$ ist die einzige ganzzahlige Loesung der Gleichung.

Beweis: Es sei $(x,\ y) \in \mathbb{Z}^2$ eine Loesung der Gleichung. Dann gilt:

$$\begin{aligned}(x+2)^4 - x^4 = y^3 &\iff (x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 32x + 16) - x^4 = y^3 \\ &\iff 8x^3 + 24x^2 + 32x + 16 = y^3 \\ &\iff 8 \cdot (x^3 + 3x^2 + 4x + 2) = y^3\end{aligned}$$

Daraus folgt $8 \mid y^3$. Wegen $8 = 2^3$ folgt damit, dass mindestens $2 \mid y$. Also existiert ein $y_0 \in \mathbb{Z}$ mit $y = 2y_0$. Somit ergibt sich die Gleichung

$$8 \cdot (x^3 + 3x^2 + 4x + 2) = (2y_0)^3 \iff x^3 + 3x^2 + 4x + 2 = y_0^3$$

Auszerdem gilt fuer $x_0 = x + 1$:

$$\begin{aligned}x^3 + 3x^2 + 4x + 2 &= (x^3 + 3x^2 + 3x + 1) + (x + 1) \\ &= (x+1)^3 + (x+1) \\ &= x_0^3 + x_0\end{aligned}$$

Also gilt

$$x_0^3 + x_0 = y_0^3$$

Also gilt auch $x_0 \cdot (x_0^2 + 1) = y_0^3$. Daraus folgt $x_0 y_0 \geq 0$. Denn $x_0^2 + 1 > 0$, sodass x_0 und $x_0 \cdot (x_0^2 + 1)$ dasselbe Vorzeichen haben. Ebenso haben y_0 und y_0^3 dasselbe Vorzeichen, sodass x_0 und y_0 dasselbe Vorzeichen haben. D.h., je, dass entweder beide Zahlen negativ oder beide Zahlen nichtnegativ sind, sodass das Produkt nichtnegativ ist. Weiter gilt

$$\begin{aligned}x_0^3 + x_0 = y_0^3 &\iff y_0^3 - x_0^3 = x_0 \\ &\iff (y_0 - x_0) \cdot (x_0^2 + x_0 y_0 + y_0^2) = x_0\end{aligned}$$

D.h., $x_0^2 + x_0 y_0 + y_0^2$ teilt x_0. Nun sind zwei Faelle zu betrachten.

1. Fall: $x_0 = 0$. Dann gilt $y_0^3 = 0 \iff y_0 = 0$. Somit ist $x = x_0 - 1 = -1$ und $y = 2y_0 = 0$ eine ganzzahlige Loesung der Gleichung.

2. Fall: $x_0 \neq 0$. Aus der Teilbarkeit folgt dann, dass

   $$|x_0^2 + x_0 y_0 + y_0^2| \leq |x_0|$$

   Da insbesondere $x_0^2 \geq 0$, $x_0 y_0 \geq 0$ und $y_0^2 \geq 0$, folgt:

   $$x_0^2 + x_0 y_0 + y_0^2 \leq |x_0|$$

   und ebenfalls

   $$x_0^2 \leq x_0^2 + x_0 y_0 + y_0^2 \leq |x_0|$$

   Also $|x_0|^2 \leq |x_0|$. Das gilt allerdings nur fuer $|x_0| \leq 1 \iff x_0 \in \{-1,\ 0,\ 1\}$. Da $x_0 = 0$ ausgeschlossen ist, bleibt es $x_0 = -1$ und $x_0 = 1$ zu pruefen:

   (a) $x_0 = -1$. Dann gilt wegen $x_0^3 + x_0 = y_0^3$, dass $-2 = y_0^3$.

   (b) $x_0 = 1$. Dann gilt wegen $x_0^3 + x_0 = y_0^3$, dass $2 = y_0^3$.

   Das ist je nicht möglich, da 2 keine Kubikzahl ist.

Somit ist $(x,\ y) = (-1,\ 0)$ die einzige ganzzahlige Loesung der Gleichung.

Aufgabe 2

Antwort: Eine solche Folge existiert fuer alle $r \in \mathbb{R}$ mit $r \geq 2$.

Beweis: Um dies zu beweisen, werden wir als erstes zeigen, dass es fuer $r < 2$ keine solche Folge geben kann. Als zweites zeigen wir, dass es fuer $r = 2$ eine solche Folge gibt. Denn somit gibt es auch eine solche Folge fuer jedes $r > 2$, da man fuer solche r dieselbe Folge waehlen kann, wie fuer $r = 2$.

Lemma 1. Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $a_1,\ a_2,\ \dots\ a_{n+1} \in \mathbb{N}$ seien $n+1$ verschiedene Zahlen mit $1 \leq a_i \leq 2n-1$ fuer alle $i \in \{1,\ 2,\ \dots\ ,\ n+1\}$. Dann haben zwei verschiedene der $n+1$ Zahlen die Summe $2n$. Denn wir koennen die $2n-1$ natuerlichen Zahlen

$$1,\ 2,\ \dots\ (n-1),\ n, (n+1),\ \dots\ (2n-2),\ (2n-1)$$

in die n Gruppen

$$1 \text{ und } 2n-1; \text{ sowie } 2 \text{ und } 2n-2; \text{ sowie } \dots\ n-1 \text{ und } n+1; \text{ sowie } n$$

aufteilen. Waehlt man nun aus den $2n-1$ Zahlen $n+1$ verschiedene Zahlen beliebig aus, so wird nach dem Schubfachprinzip mindestens eines der Paare vollstaendig gewaehlt (n kann nicht zwei Mal gewaehlt werden). Dieses hat die Summe $2n$.

Teil 1. Nun sei sei $r \in \mathbb{R}$. Fuer $r \leq 1$, folgt $a_1 < r \leq 1$. Aber $a_1 \geq 1$, da a_1 eine positive ganze Zahl ist. Somit besteht ein Wiederspruch. Nun sei $r \in (1,\ 2)$. Dann ist $r = 2 - \varepsilon$ fuer ein $\varepsilon \in (0, 1)$. Angenommen, es existiert eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit den Eigenschaften (1)-(3). Wir waehlen $k \in \mathbb{N}$ ausreichend grosz mit $2^k \geq \frac{2}{\varepsilon} - 1$ und definieren $N = 2^k$. Dann gilt

$$1 \leq a_{N+1} < r \cdot (N+1) = (2^k + 1) \cdot (2 - \varepsilon) \leq 2^{k+1},$$

weil

$$\begin{aligned} 2^k \geq \frac{2}{\varepsilon} - 1 &\Longleftrightarrow \varepsilon \cdot 2^k \geq 2 - \varepsilon \\ &\Longleftrightarrow 2^{k+1} \geq 2^{k+1} + 2 - \varepsilon \cdot 2^k - \varepsilon \\ &\Longleftrightarrow 2^{k+1} \geq (2^k + 1) \cdot (2 - \varepsilon) \end{aligned}$$

Also $1 \leq a_{N+1} \leq 2^{k+1} - 1 = 2 \cdot N - 1$. Dann gilt insb. auch $1 \leq a_i < r \cdot i \leq r \cdot (N+1) \leq 2^{k+1}$, sodass auch $1 \leq a_i \leq 2 \cdot N - 1$ fuer jedes $i \in \{1,\ 2,\ \dots\ ,\ N+1\}$. Da die $N+1$ Folgenglieder $a_1,\ a_2,\ \dots\ ,\ a_{N+1}$ nach Eigenschaft (1) insbesondere paarweise verschieden sind, gilt nach Lemma 1, dass zwei verschiedene der Folgenglieder die Summe $2 \cdot N = 2^{k+1}$ haben. Also besteht ein Widerspruch zu Eigenschaft (2) der Folge.

Teil 2. Vorbemerkung: Im Folgenden werden die Notationen $[a, b]$, $[a, b)$, für $a, b \in \mathbb{N}$ mit $a \leq b$ verwendet, wobei jeweils die Menge der natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ mit $a \leq n \leq b$, bzw. $a \leq n < b$ gemeint ist. Wir wollen nun eine Folge mit den Eigenschaften (1)-(3) fuer $r = 2$ konstruieren. Dazu zeigen wir, per Induktion ueber $k \in \mathbb{N}_0$, dass fuer jedes $k \in \mathbb{N}_0$ eine endliche Folge an Zahlen $(a_1,\ a_2,\ \dots\ ,\ a_{2^k})$ mit den Eigenschaften (2)-(3) existiert, welche zusaetzlich streng monoton wachsend ist, sodass implizit Eigenschaft (1) erfuellt ist. Daraus folgt, dass die dadurch definierte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ebenfalls die Eigenschaften (1)-(3) erfuellt. Denn wäre eine Eigenschaft verletzt, so würde eine hinreichend grosze endliche Folge dieselbe Eigenschaft auch nicht erfuellen.

1. Induktionsanfang ($k = 0$). Die endliche Folge (a_1) muss nur die Eigenschaft $1 \leq a_1 < 2$ erfuellen. Dies ist durch $a_1 = 1$ moeglich.

2. Induktionsschritt. Es existiere eine endliche, streng monoton wachsende Folge $(a_1,\ a_2,\ \dots\ a_{2^k})$ mit den Eigenschaften (2)-(3). Dann existieren Zahlen $a_{2^k+1},\ a_{2^k+2},\ \dots\ ,\ a_{2^{k+1}} \in \mathbb{N}$, sodass die endliche Folge

$$(a_1,\ a_2,\ \dots\ a_{2^k},\ a_{2^k+1},\ a_{2^k+2},\ \dots\ a_{2^{k+1}})$$

streng monoton wachsend ist und Eigenschaften (2)-(3) erfuellt.

Beweis: Wie suchen die 2^k verschiedenen Zahlen $a_{2^k+1},\ a_{2^k+2},\ \dots\ a_{2^{k+1}}$. Dabei setzen wir $2^{k+1} \leq a_{2^k+1},\ a_{2^k+2},\ \dots\ a_{2^{k+1}} < 2^{k+2}$ vorraus. Um Eigenschaft (2) zu erfuellen bemerken wie drei Faelle:

1. $a_i + a_j$ fuer $i,\ j \in \{1,\ 2,\ \dots\ ,\ 2^k\}$ mit $i \neq j$. Nach der Induktionsvorraussetzung wird keine Zweierpotenz angenommen.
2. $a_i + a_j$ fuer $i,\ j \in \{2^k+1,\ 2^k+2,\ \dots\ ,\ 2^{k+1}\}$ mit $i \neq j$. In diesem Fall gilt
$$2^{k+2} = 2^{k+1} + 2^{k+1} < a_i + a_j < 2^{k+2} + 2^{k+2} = 2^{k+3},$$
da beide Zahlen groszer gleich 2^{k+1} und echt kleiner als 2^{k+2} sind und insb. eine der Zahlen echt groeszer als 2^{k+1} ist. Es kann also keine Zweierpotenz angenommen werden.
3. $a_i + a_j$ fuer $i \in \{1,\ 2,\ \dots\ ,\ 2^k\}$ und $j \in \{2^k+1,\ 2^k+2,\ \dots\ ,\ 2^{k+1}\}$. Dann gilt
$$2^{k+1} < 2^{k+1} + 1 \leq a_i + a_j < 2^{k+1} + 2^{k+2} = 3 \cdot 2^{k+1} < 2^{k+3}.$$
Somit ist in diesem Fall nur $a_i + a_j = 2^{k+2}$ moeglich. Deswegen muss man genau die 2^k verschiedenen Zahlen $2^{k+2} - a_i$ fuer $i \in \{1,\ 2,\ \dots\ ,\ 2^k\}$ in der Wahl der 2^k neuen Zahlen ausschlieszen.

Wir betrachten nun die Menge der 2^k verschiedenen Zahlen
$$M_k = \left\{2^{k+2} - a_i\ :\ i \in \{1,\ 2,\ \dots,\ 2^k\}\right\},$$
wobei $1 \leq a_i < 2^{k+1} \iff 2^{k+1} < 2^{k+2} - a_i < 2^{k+2}$ fuer $i \in \{1,\ 2,\ \dots\ ,\ 2^k\}$. Es existieren genau $2^{k+2} - 2^{k+1} = 2^{k+1}$ natuerliche Zahlen im Intervall $[2^{k+1},\ 2^{k+2})$. Schlieszt man die Zahlen der Menge M_k aus, so bleiben 2^k verschiedene Zahlen, mit denen Eigenschaft (2) erfuellt wird. Nun definieren wir die 2^k gesuchten Zahlen $a_{2^k+1},\ a_{2^k+2},\ \dots,\ a_{2^{k+1}}$ als die 2^k verschiedenen Zahlen der Menge $[2^{k+1},\ 2^{k+2}) - M_k$ in aufsteigender Reihenfolge. Dadurch ist sofort die strenge Monotonie erfuellt, da die ersten 2^k Folgenglieder nach Vorraussetzung streng monoton wachsen und nun auch die letzten 2^k Folgenglieder per Definition streng monoton wachsen. Insbesondere gilt auch $a_{2^k} < 2^{k+1} \leq a_{2^k+1}$, sodass die strenge Monotonie auch bei diesem Ubergang gilt. Nun bleibt zu zeigen, dass $a_{2^k+i} < 2^{k+1} + 2i$ für alle $i \in \{1,\ \dots\ ,2^k\}$ gilt.
Dazu bemerken wir, dass M_k maximal i Zahlen enthält, die echt kleiner als $2^{k+1} + 2i$ sind, fuer $i \in \{1,\ 2,\ \dots\ ,\ 2^k\}$. Dazu sei $i \in \{1,\ 2,\ \dots\ ,\ 2^k\}$ fixiert. Fuer $2^k - i$ Indizes $j \in \{1,\ \dots\ ,\ 2^k - i - 1,\ 2^k - i\}$ gilt, wegen der strengen Monotonie insbesondere $a_j \leq a_{2^k-i}$ wegen $j \leq 2^k - i$, sodass $a_j \leq a_{2^k-i} < 2^{k+1} - 2i$. Also
$$a_j < 2^{k+1} - 2i \implies 2^{k+2} - a_j > 2^{k+1} + 2i$$
Also existieren maximal i Elemente in M_k die echt kleiner als $2^{k+1} + 2i$ sind. Sei nun $i \in \{1, 2,\ \dots\ ,\ 2^k\}$ fest aber beliebig. Wir betrachten die $2i$ Zahlen $2^{k+1},\ 2^{k+1}+1,\ \dots\ ,\ 2^{k+1}+2i-1$. Dann sind von diesen maximal i in M_k. Somit existieren mindestens $2i - i = i$ Zahlen in der Menge
$$[2^{k+1},\ 2^{k+1} + 2i - 1] - M_k$$
Das bedeutet, dass die Menge $[2^{k+1},\ 2^{k+2}) - M_k$ mindestens i Zahlen enthaelt, die echt kleiner als $2^{k+1} + 2i$ sind, sodass insbesondere die i-te Zahl in der aufsteigender Reihenfolge, d.h., a_{2^k+i}, echt kleiner als $2^{k+1} + 2i$ ist.
Somit wurde nun gezeigt, dass die endliche Folge Eigenschaft (3) erfuellt wird. Eigenschaft (2) ist nach den zuvor behandelten drei Faellen gegeben, da stets M_k ausgeschlossen wurde und wie oben festgestellt, ist die endliche Folge streng monoton wachsend.

Beispiel: Wir beginnen mit $a_1 = 1$.

k	$[2^{k+1}, 2^{k+2})$	M_k	$a_{2^k+1},\ \dots,\ a_{2^{k+1}}$
0	$[2,\ 4)$	$\{3\}$	2
1	$[4,\ 8)$	$\{7,\ 6\}$	4, 5
2	$[8,\ 16)$	$\{15,\ 14,\ 12,\ 11\}$	8, 9, 10, 13
3	$[16,\ 32)$	$\{31,\ 30,\ 28,\ 27,\ 24,\ 23,\ 22,\ 19\}$	16, 17, 18, 20, 21, 25, 26, 29

Somit beginnt die oben konstruktiv definierte Folge mit
$$1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 8,\ 9,\ 10,\ 13,\ 16,\ 17,\ 18,\ 20,\ 21,\ 25,\ 26,\ 29.$$

Aufgabe 3

Antwort: Der Term $\frac{[D_A]}{[V_A]} + \frac{[D_B]}{[V_B]} + \frac{[D_C]}{[V_C]}$ nimmt alle Werte im halboffenen Intervall $[\frac{3}{2},\ \infty)$ an, wenn P im Inneren variiert.

Beweis: Wir zeigen zunaechst, dass dieser Term immer groeszer oder gleich $\frac{3}{2}$ ist und anschlieszend, dass tatsaechlich jeder Wert in $[\frac{3}{2},\ \infty)$ fuer mind. ein P im Inneren des Dreiecks angenommen wird.

Teil 1. Es sei $\triangle ABC$ ein Dreieck mit den Seitenlaengen $a = |\overline{BC}|$, $b = |\overline{CA}|$ und $c = |\overline{AB}|$ und P ein Punkt im Inneren des Dreiecks mit Graden g_a, g_b bzw. g_c durch P parellel zu $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, bzw. $\overline{AB}$. Diese Graden schneiden je die zwei anderen Seiten des Dreiecks. Wir benennen die Schnittpunkte der Graden mit den Kanten des Dreiecks wie folgt (s. Abb. 1):

1. D ist der Schnittpunkt von g_b und $\overline{AB}$; und E ist der Schnittpunkt von g_a und $\overline{AB}$.
2. F ist der Schnittpunkt von g_c und $\overline{BC}$; und G ist der Schnittpunkt von g_b und $\overline{BC}$.
3. H ist der Schnittpunkt von g_a und $\overline{CA}$; und I ist der Schnittpunkt von g_c und $\overline{CA}$.

Dann liegen die Punkte D und E, F und G, bzw. H und I jeweils in dieser Reihenfolge auf den Strecken $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, bzw. $\overline{CA}$. Denn g_a zerlegt das Dreieck in zwei Haelften und schneidet $\overline{AB}$ im Punkt E, sodass inbsesondere bereits A und B auf unterschiedlichen Haelften liegen. Weiter schneidet g_b die Grade g_a, sodass D und G auf unterschiedlichen Seiten von g_a liegen muessen. Dann liegt D auf der anderen Seite von g_a wie B. Daraus folgt, dass D zwischen A und E liegt. Analog für die anderen beiden Seiten. Dementspraechend zerlegen die Punkte die jeweilige Seite in je drei Strecken, welche wir wie folgt definieren:

1. Auf der Seite $\overline{AB}$ sei $x_C = |\overline{AD}|$, $y_C = |\overline{DE}|$ und $z_C = |\overline{EB}|$.
2. Auf der Seite $\overline{BC}$ sei $x_A = |\overline{BF}|$, $y_A = |\overline{FG}|$ und $z_A = |\overline{GH}|$.
3. Auf der Seite $\overline{CA}$ sei $x_B = |\overline{CH}|$, $y_B = |\overline{HI}|$ und $z_B = |\overline{IA}|$.

D.h., es gilt $a = x_A + y_A + z_A$, $b = x_B + y_B + z_B$, $c = x_C + y_C + z_C$. Nun seien V_A, V_B,

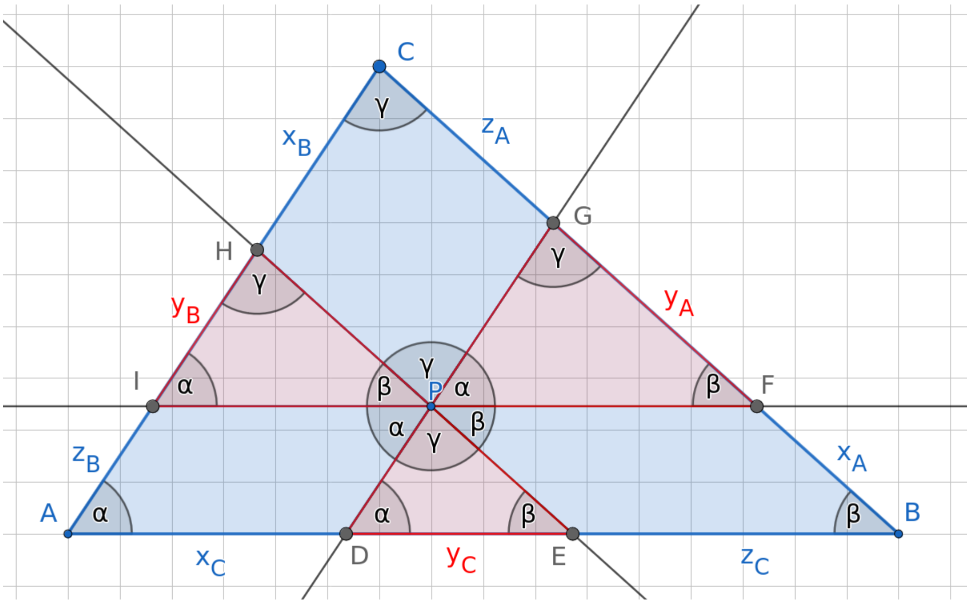


Abbildung 1: $\triangle ABC$ mit Punkt P und eingetragenen Winkeln, sowie benannten Teilstrecken.

und V_C die Vierecke und D_A, D_B, und D_C die Dreiecke aus der Aufgabenstellung wobei hier nicht der Flaecheninhalt, sondern das Viereck, bzw. das Dreieck selbst gemeint ist. Wir wollen nun die Flaecheninhalte $[V_A]$, $[V_B]$, $[V_C]$, $[D_A]$, $[D_B]$, und $[D_C]$ bestimmen.
Zunaechst bemerken wir, dass die Vierecke $V_A = ADPI$, $V_B = BFPE$, bzw. $V_C = CHPG$ Parallelogramme sind, da die Vierecke einfach sind (P liegt im Inneren des Dreiecks, sodass

die Seiten der Vierecke sich nicht auszerhalb der Ecken schneiden) und die gegenueberliegenden Seiten jeweils parallel sind, da es sich je um Teilstrecken der Seiten des Dreiecks und der dazugehoerigen Parallen handelt.
Nun sei $\alpha = \measuredangle BAC$, $\beta = \measuredangle CBA$ und $\gamma = \measuredangle ACB$, sodass insbesondere $\alpha = \measuredangle DAI$, $\beta = \measuredangle FBE$ und $\gamma = \measuredangle HCG$ die Winkel der Parallelogramme V_A, V_B, bzw. V_C an den Ecken A, B, bzw. C sind. Da es sich um Parallelogramme handelt, sind die gegenueberliegenden Winkel gleich. Also gilt $\alpha = \measuredangle IPD$, $\beta = \measuredangle EPF$, bzw. $\gamma = \measuredangle GPH$. Weiter wollen wir die Winkel in den Dreiecken D_A, D_B und D_C bestimmen:

1. $D_A = \triangle PFG$. Dann ist $\measuredangle FPG = \measuredangle IPD = \alpha$, da es sich um den Scheitelwinkel handelt, der durch die Graden g_b und g_c erzeugt wird. Weiter ist $\measuredangle GFP = \measuredangle CBA = \beta$, da es sich um den Stufenwinkel handelt, der durch die parallelen Graden AB und g_c und die Grade BC erzeugt wird. Daraus folgt schlieszlich, dass $\measuredangle PGF = \gamma$.

2. $D_B = \triangle HPI$. Dann ist $\measuredangle HPI = \measuredangle EPF = \beta$, da es sich um den Scheitelwinkel handelt, der durch die Graden g_a und g_c erzeugt wird. Weiter ist $\measuredangle PIH = \measuredangle BAC = \alpha$, da es sich um den Stufenwinkel handelt, der durch die parallelen Graden AB und g_c und die Grade CA erzeugt wird. Daraus folgt schlieszlich, dass $\measuredangle IHP = \gamma$.

3. $D_C = \triangle DPE$. Dann ist $\measuredangle DPE = \measuredangle GPH = \gamma$, da es sich um den Scheitelwinkel handelt, der durch die Graden g_a und g_b erzeugt wird. Weiter ist $\measuredangle EDP = \measuredangle BAC = \alpha$, da es sich um den Stufenwinkel handelt, der durch die parallelen Graden CA und g_b und die Grade AB erzeugt wird. Daraus folgt schlieszlich, dass $\measuredangle PED = \beta$.

Somit ergeben sich die Winkel, wie sie in der Abbildung eingetragen sind. Nun lassen sich die Flaecheninhalte bestimmen: Es gilt $[V_A] = x_C \cdot z_B \cdot \sin(\alpha)$, $[V_B] = x_A \cdot z_C \cdot \sin(\beta)$, und $[V_C] = x_B \cdot z_A \cdot \sin(\gamma)$, sowie $[D_A] = \frac{1}{2} \cdot z_C \cdot x_B \cdot \sin(\alpha)$, $[D_B] = \frac{1}{2} \cdot z_A \cdot x_C \cdot \sin(\beta)$, und $[D_C] = \frac{1}{2} \cdot z_B \cdot x_A \cdot \sin(\gamma)$. Bei den Dreicke wurde dabei benutzt, dass die Seiten des Dreiecks, die nicht auf einer Seite des Dreiecks $\triangle ABC$ liegen, die Seiten eines der drei Parallelogrammen ist, sodass die jeweilige Seitenlaenge bekannt ist. Nun folgt:

$$\begin{aligned}\frac{[D_A]}{[V_A]} + \frac{[D_B]}{[V_B]} + \frac{[D_C]}{[V_C]} &= \frac{\frac{1}{2} \cdot z_C \cdot x_B \cdot \sin(\alpha)}{x_C \cdot z_B \cdot \sin(\alpha)} + \frac{\frac{1}{2} \cdot z_A \cdot x_C \cdot \sin(\beta)}{x_A \cdot z_C \cdot \sin(\beta)} + \frac{\frac{1}{2} \cdot z_B \cdot x_A \cdot \sin(\gamma)}{x_B \cdot z_A \cdot \sin(\gamma)} \\ &= \frac{z_C \cdot x_B}{2 \cdot x_C \cdot z_B} + \frac{z_A \cdot x_C}{2 \cdot x_A \cdot z_C} + \frac{z_B \cdot x_A}{2 \cdot x_B \cdot z_A}\end{aligned}$$

Da die Dreiecke D_A, D_B, D_C und $\triangle ABC$ je die Innenwinkel α, β und γ haben, sind diese Dreiecke aehnlich. Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke D_A, D_B, D_C mit $\triangle ABC$ folgt insbesondere:

1. Da D_A und $\triangle ABC$ aehnlich sind: $\frac{y_A}{a} = \frac{x_B}{b} = \frac{z_C}{c}$, also $x_B = \frac{b}{a} y_A$, und $z_C = \frac{c}{a} y_A$.
2. Da D_B und $\triangle ABC$ aehnlich sind: $\frac{z_A}{a} = \frac{y_B}{b} = \frac{x_C}{c}$, also $z_A = \frac{a}{b} y_B$ und $x_C = \frac{c}{b} y_B$.
3. Da D_C und $\triangle ABC$ aehnlich sind: $\frac{x_A}{a} = \frac{z_B}{b} = \frac{y_C}{c}$, also $x_A = \frac{a}{c} y_C$ und $z_B = \frac{b}{c} y_C$.

Somit lassen sich die Streckenlaengen x_A, x_B, x_C, z_A, z_B und z_C durch y_A, y_B und y_C ausdruecken. Damit folgt:

$$\begin{aligned}\frac{[D_A]}{[V_A]} + \frac{[D_B]}{[V_B]} + \frac{[D_C]}{[V_C]} &= \frac{z_C \cdot x_B}{2 \cdot x_C \cdot z_B} + \frac{z_A \cdot x_C}{2 \cdot x_A \cdot z_C} + \frac{z_B \cdot x_A}{2 \cdot x_B \cdot z_A} \\ &= \frac{\frac{c}{a} y_A \cdot \frac{b}{a} y_A}{2 \cdot \frac{c}{b} y_B \cdot \frac{b}{c} y_C} + \frac{\frac{a}{b} y_B \cdot \frac{c}{b} y_B}{2 \cdot \frac{a}{c} y_C \cdot \frac{c}{a} y_A} + \frac{\frac{b}{c} y_C \cdot \frac{a}{c} y_C}{2 \cdot \frac{b}{a} y_A \cdot \frac{a}{b} y_B} \\ &= \frac{bc \cdot y_A^2}{2a^2 \cdot y_B \cdot y_C} + \frac{ac \cdot y_B^2}{2b^2 \cdot y_C \cdot y_A} + \frac{ba \cdot y_C^2}{2c^2 \cdot y_A \cdot y_B}\end{aligned}$$

Nun definieren wir $x = \frac{y_A}{a}$, $y = \frac{y_B}{b}$ und $z = \frac{y_C}{c}$. Dann gilt:

$$\frac{[D_A]}{[V_A]} + \frac{[D_B]}{[V_B]} + \frac{[D_C]}{[V_C]} = \frac{x^2}{2yz} + \frac{y^2}{2xz} + \frac{z^2}{2xy}$$

Dabei sind $x,\ y,\ z \in \mathbb{R}$ mit $x,\ y,\ z > 0$, weil $y_A,\ y_B,\ y_C > 0$ (da P im Inneren liegt, sodass der einzige Schnittpunkt der je zwei Graden nicht auf der jeweiligen Seite des Dreiecks liegt). Dann auch $x^3,\ y^3, z^3 > 0$, sodass die AM-GM-Ungleichung gilt:

$$\frac{x^3 + y^3 + z^3}{3} \geq \sqrt[3]{x^3 y^3 z^3} \iff x^3 + y^3 + z^3 \geq 3 \cdot xyz$$

Division durch $2xyz > 0$ gibt:

$$\frac{x^2}{2yz} + \frac{y^2}{2xz} + \frac{z^2}{2xy} \geq \frac{3}{2}$$

Also gilt in der Tat

$$\frac{[D_A]}{[V_A]} + \frac{[D_B]}{[V_B]} + \frac{[D_C]}{[V_C]} \geq \frac{3}{2}.$$

Teil 2. Es sei $\triangle ABC$ ein Dreieck mit Schwerpunkt S. D.h., fuer die Mittelpunkte M_a, M_b, bzw. M_c der Seiten $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, bzw. $\overline{AB}$ ist S der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden $s_a = \overline{M_aA}$, $s_b = \overline{M_bB}$, und $s_c = \overline{M_cC}$ (s.u.). Nun sei $t \in (0,\ 1]$ fest aber beliebig. Wir definieren den Punkt P in Abhaenigkeit von t als den Punkt auf $\overline{M_cS}$ mit Abstand $t \cdot |M_cS|$ zu M_c (bzw. $P = M_c + t \cdot \overrightarrow{M_cS}$). Da S im Inneren von $\triangle ABC$ liegt, und $t > 0$, sodass $P \neq M_c$, liegt P im Inneren von $\triangle ABC$. Wir wollen nun den Wert des Ausdrucks $\frac{[D_A]}{[V_A]} + \frac{[D_B]}{[V_B]} + \frac{[D_C]}{[V_C]}$ in Abhaenigkeit von t bestimmen, und anschlieszend zeigen, dass dieser jeden Wert im Intervall $[\frac{3}{2},\ \infty)$ annimmt. Wir nutzen die Notationen wie in Teil 1. Nach Teil 1 genuegt es

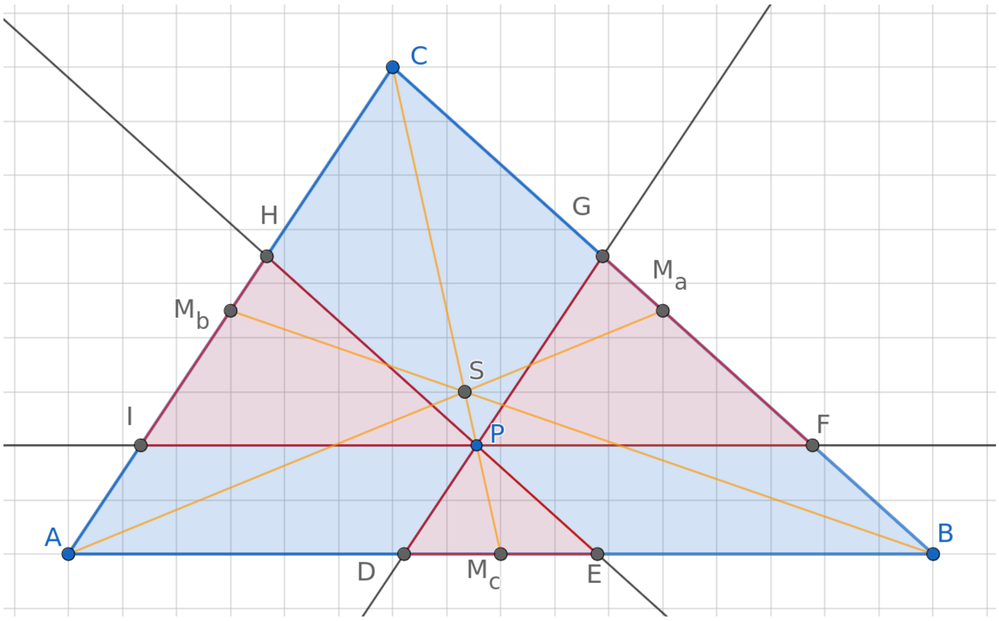


Abbildung 2: $\triangle ABC$ mit Punkt P und eingetragenen Winkeln, sowie benannten Teilstrecken.

die Werte von y_A, y_B und y_C zu bestimmen.

Wir bemerken zunaechst, dass D, M_c und E in dieser Reihenfolge auf $\overline{AB}$ liegen; dafür genügt es zu zeigen, dass M_c zwischen D und E liegt: P liegt auf s_c und s_c zerteilt $\triangle ABC$ in zwei Haelften, wobei g_a die Seiten $\overline{AC}$ und $\overline{AB}$ schneidet und durch P geht, sodass g_a insbesondere s_c schneidet. D.h., H und E liegen auf verschiedenen Seiten von s_c. Analog schneidet g_b die Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{BC}$ und geht durch P, sodass g_b insbesondere s_c schneidet. D.h., G und D liegen auf verschiedenen Seiten von s_c. Da H und G auf verschiedenen Seiten von s_c liegen, folgt dass auch D und E auf verschiedenen Seiten von s_c liegen. Also liegt ebenfalls M_c zwischen D und E auf der Seite $\overline{AB}$.

Lemma 1. Es gilt $|\overline{DM_c}| = |\overline{M_cE}|$. Dafuer bemerken wir, dass die Dreicke $\triangle M_cEP$ und $\triangle M_cBC$, sowie die Dreiecke $\triangle M_cDP$ und $\triangle M_cAC$ aehnlich sind. Denn offensichtlich gilt $\measuredangle EM_cP = \measuredangle BM_cC$, sowie $\measuredangle PM_cD = \measuredangle CM_cA$. Weiter ist bereits gezeigt worden, dass $\measuredangle M_cDP = \alpha$ und $\measuredangle PEM_c = \beta$. Somit stimmen die Dreiecke jeweils in zwei, also auch in drei Winkeln ueberein. Aus den zwei Aehnlichkeiten folgt:

$$\frac{|\overline{M_cE}|}{|\overline{M_cB}|} = \frac{|\overline{PM_c}|}{|\overline{CM_c}|} \quad \text{und} \quad \frac{|\overline{M_cD}|}{|\overline{M_cA}|} = \frac{|\overline{PM_c}|}{|\overline{CM_c}|}$$

Mit $|\overline{M_cA}| = |\overline{M_cB}|$ folgt daraus, dass $|\overline{DM_c}| = |\overline{M_cE}|$.

Lemma 2. Man kann den Termn vollstaendig durch $z = \frac{y_C}{c}$ ausdruecken. Genauer gilt

$$\begin{aligned}\frac{[D_A]}{[V_A]} + \frac{[D_B]}{[V_B]} + \frac{[D_C]}{[V_C]} &= \frac{x^2}{2yz} + \frac{y^2}{2xz} + \frac{z^2}{2xy} = \frac{x}{2z} + \frac{x}{2z} + \frac{z^2}{2x^2} \\ &= \frac{x}{z} + \frac{z^2}{2x^2} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot z}{z} + \frac{z^2}{2(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot z)^2} = \frac{1-z}{2z} + \frac{2z^2}{(1-z)^2}\end{aligned}$$

Es genügt zu zeigen, dass $x = y$ und $x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot z$. Aus der Definition von M_c und da D, M_c und E in dieser Reihenfolge auf $\overline{AB}$ liegen folgt, dass

$$|\overline{AD}| + |\overline{DM_c}| = |\overline{AM_c}| = |\overline{M_cB}| = |\overline{M_cE}| + |\overline{EB}|,$$

sodass wegen $|\overline{DM_c}| = |\overline{M_cE}|$ weiter $x_C = |\overline{AD}| = |\overline{EB}| = z_C$. Dann gilt auch $\frac{c}{b} y_B = \frac{c}{a} y_A \iff \frac{y_B}{b} = \frac{y_A}{a}$, d.h., $x = y$. Auch gilt

$$\frac{y_A}{a} + \frac{y_B}{b} + \frac{y_C}{c} = \frac{z_C}{c} + \frac{x_C}{c} + \frac{y_C}{c} = \frac{z_C + x_C + y_C}{c} = \frac{c}{c} = 1$$

Daraus folgt sofort, dass

$$\frac{2y_B}{b} + \frac{y_C}{c} = 1 \iff \frac{y_B}{b} = \frac{1}{2} - \frac{y_C}{2c} \iff y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot z$$

Somit genuegt es y_C bzw. z zu bestimmen.

Lemma 3. Es gilt $z = \frac{y_C}{c} = \frac{t}{3}$. Dafuer bemerken wir, dass wegen $|\overline{DM_c}| = |\overline{M_cE}|$, M_c der Mittelpunkt der Seite $\overline{DE}$ des Dreiecks D_C ist. Also ist $\overline{M_cP}$ die Seitenhalbierende der Seite $\overline{DE}$ des Dreiecks D_C. Also gilt fuer die Laenge der Seitenhalbierenden (s.u.):

$$\begin{aligned}|\overline{M_cP}| &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2z_B^2 + 2x_A^2 - y_C^2} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{2b^2}{c^2} y_C^2 + \frac{2a^2}{c^2} y_c^2 - y_C^2} \\ &= \frac{y_C}{2} \cdot \sqrt{\frac{2b^2}{c^2} + \frac{2a^2}{c^2} - \frac{c^2}{c^2}} \\ &= \frac{y_C}{2c} \cdot \sqrt{2b^2 + 2a^2 - c^2}\end{aligned}$$

Analog gilt fuer die Laenge der Seitenhalbierenden $s_c = \overline{M_cC}$ des Dreiecks $\triangle ABC$:

$$|\overline{M_cC}| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2b^2 + 2a^2 - c^2}$$

Also gilt $|\overline{M_cP}| = \frac{y_C}{c} \cdot |\overline{M_cC}|$. Wegen der Definition von P und wegen $|\overline{M_cS}| = \frac{1}{3} \cdot |\overline{M_cC}|$ (der Schwerpunkt zerteilt die Seitenhalbierende im Verhaeltnis $2:1$, s.u.) gilt auch

$$|\overline{M_cP}| = t \cdot |\overline{M_cS}| = t \cdot \frac{1}{3} \cdot |\overline{M_cC}|.$$

Daraus folgt

$$\frac{y_C}{c} \cdot |\overline{M_cC}| = \frac{t}{3} \cdot |\overline{M_cC}| \iff \frac{y_C}{c} = \frac{t}{3}$$

Wir können nun den Term in t ausdruecken und zeigen, dass jeder Wert in $[\frac{3}{2}, \infty)$ durch $t \in (0,1]$ angenommen wird. Mit $z = \frac{t}{3}$ ergibt sich:

$$\begin{aligned}\frac{[D_A]}{[V_A]} + \frac{[D_B]}{[V_B]} + \frac{[D_C]}{[V_C]} &= \frac{1 - \frac{t}{3}}{2 \cdot \frac{t}{3}} + \frac{2 \cdot (\frac{t}{3})^2}{(1 - \frac{t}{3})^2} \\ &= \frac{3-t}{2t} + \frac{2 \cdot t^2}{(3-t)^2}\end{aligned}$$

Wir betrachten nun die Funktion $f : (0,\ 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \frac{3-x}{2x} + \frac{2 \cdot x^2}{(3-x)^2}$$

Nach Teil 1 ist bekannt, dass $f(x) \geq \frac{3}{2}$ fuer alle $x \in (0,\ 1]$ gelten muss. Weiter ist f auf $(0,\ 1]$ offensichtlich stetig, da sie elementar ist. Weiter gilt $f(1) = \frac{3}{2}$. Nun sei $y_0 \in (\frac{3}{2},\ \infty)$. Wir wollen zeigen, dass f den Wert y_0 annimmt. Nun sei $x_0 = \frac{3}{2y_0+1}$. Dann gilt $x_0 > 0$ und

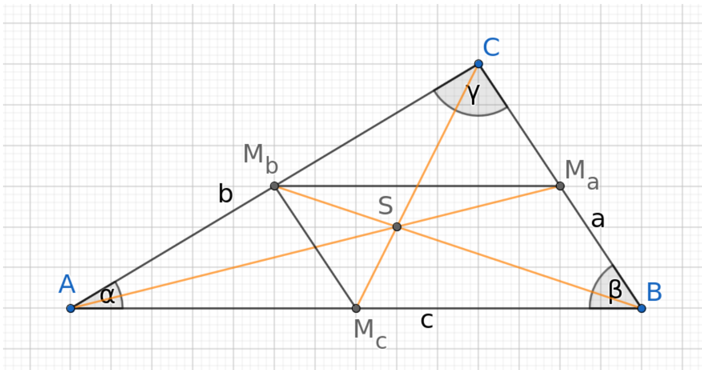
$$y_0 > \frac{3}{2} \iff 2y_0 + 1 > 4 \iff \frac{3}{2y_0+1} < \frac{3}{4}.$$

Also gilt $0 < x_0 < \frac{3}{4} < 1$, sodass $x_0 \in (0,\ 1]$. Nun betrachten wir $f(x_0)$:

$$f(x_0) = \frac{3-x_0}{2x_0} + \frac{2 \cdot x_0^2}{(3-x_0)^2} > \frac{3-x_0}{2x_0} = \frac{3}{2x_0} - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{2y_0+1}{3} - \frac{1}{2} = y_0.$$

Also gilt $f(x_0) > y_0 > \frac{3}{2} = f(1)$. Da f stetig auf $[x_0,\ 1]$ ist, existiert nach dem Zwischenwertsatz ein $x \in (x_0,\ 1)$ mit $f(x) = y_0$. Somit nimmt f in der Tat jeden Wert in $[\frac{3}{2}, \infty)$ fuer mind. ein $x \in (0, 1]$ an, wobei $\frac{3}{2}$ bei $x = 1$ angenommen wird.

Bemerkung: Schwerpunkt und Seitenhalbierende. Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck mit den Seitenlaengen $a = |\overline{BC}|$, $b = |\overline{CA}|$ und $c = |\overline{AB}|$, den Winkeln $\alpha = \measuredangle BAC$, $\beta = \measuredangle CBA$ und $\gamma = \measuredangle ACB$, sowie den Mittelpunkten M_a, M_b, bzw. M_c der Seiten $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, bzw. $\overline{AB}$. Dann schneiden sich die Seitenhalbierenden $s_a = \overline{M_aA}$, $s_b = \overline{M_bB}$, und $s_c = \overline{M_cC}$ in einem Punkt (diesen nennt man Schwerpunkt). Dabei teilt der Schwerpunkt die Seitenhalbierenden im Verhaeltnis $2:1$ vom Eckpunkt aus gesehen. Weiter gilt $|s_a| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$ und analog $|s_b| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}$, sowie $|s_c| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$. Wir betrachten den



Schnittpunkt S der Seitenhalbierende s_a und s_b. Nach Definition der Mittelpunkte gilt

$$\frac{a}{|\overline{CM_a}|} = \frac{b}{|\overline{CM_b}|} = \frac{2}{1}$$

Nach der Umkehrung des 1. Strahlensatzes folgt $\overline{AB} \| \overline{M_bM_a}$, wobei nach dem 2. Strahlensatz $\frac{c}{|\overline{M_bM_a}|} = \frac{2}{1}$. Nun sind die Dreiecke $\triangle M_bSM_a$ und $\triangle ABS$ aehnlich, wegen des Scheitelwinkels $\measuredangle M_aSM_b = \measuredangle ASB$ und dem Wechselwinkel $\measuredangle BAS = \measuredangle BAD = \measuredangle EDS$. Aufgrund der Aehnlichkeit gilt dann

$$\frac{|\overline{AS}|}{|\overline{SM_a}|} = \frac{|\overline{BS}|}{|\overline{SM_b}|} = \frac{c}{|\overline{M_bM_a}|} = \frac{2}{1}.$$

Somit schneidet S die Seitenhalbierenden s_b und s_a je im Verhaeltnis $2:1$. Analog kann man S' als den Schnittpunkt der Seitenhalbierende s_c und s_b definieren und zeigen, dass auch dieser Punkt s_b (und s_c) im Verhaeltnis $2:1$ teilt. Dann muss aber bereits $S = S'$ sein, weil nur ein Punkt existieren kann, der die Strecke $\overline{BM_b}$ im Verhaeltnis $2:1$ teilt. Somit schneiden sich die drei Seitenhalbierenden in einem Punkt S.
Wir berechnen $|s_a|$, die anderen Seitenhalbierenden funktionieren analog. Nach dem Kosinussatz in $\triangle ABC$ gilt

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos(\beta) \iff 2ac \cdot \cos(\beta) = a^2 - b^2 + c^2.$$

Dann gilt weiter mit dem Kosinussatz in $\triangle ABM_A$:

$$|s_a|^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + c^2 - 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot c \cdot \cos(\beta) = \frac{a^2}{4} + c^2 - \frac{1}{2} \cdot (a^2 - b^2 + c^2) = -\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{2} + \frac{c^2}{2}$$

Daraus folgt

$$|s_a|^2 = \frac{1}{4} \cdot (2b^2 + 2c^2 - a^2) \iff |s_a| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$$

Aufgabe 4

Es seien $2m$ Staedte gegeben, wobei $m \in \mathbb{N}$. Wir modellieren das beschriebene Problem durch einen Graphen mit $2m$ Knoten und einer beliebigen Anzahl an ungerichteten Kanten, wobei zwei verschiedene Knoten maximal durch eine Kante verbunden sind. Auszerdem gibt es keine Kanten von einem Knoten zu sich selbst. Fuer einen solchen Graphen definieren wir zwei Eigenschaften:

(a) Kein Knoten hat eine Kante zu jedem der anderen Knoten.

(b) In Abhaenigkeit eines $n \in \mathbb{N}$ gilt, dass es zu beliebigen n Knoten stets einen weiteren Knoten gibt, der eine Kante zu allen n Knoten hat.

Antwort: $n = m - 1$ ist der groszt moegliche Wert bei dem sowohl Eigenschaft (a) als auch Eigenschaft (b) gelten kann. D.h., bei $2m = 2024$ ist $n = 1012 - 1 = 1011$ der groszt moegliche Wert.

Beweis: Wir zeigen zunaechst, dass $n = m - 1$ moeglich ist, indem ein Graph konstruiert wird, der sowohl Eigenschaft (a) als auch Eigenschaft (b) erfuellt. Anschlieszend zeigen wir, dass fuer $n \geq m$ kein solcher Graph existieren kann, indem fuer einen beliebigen Graphen mit $2m$ Knoten, der Eigenschaft (b) erfuellt, gezeigt wird, dass Eigenschaft (a) nicht erfuellt ist.

Teil 1. Es sei $n = m - 1$. Wir konstruieren einen Graphen, der beide Eigenschaften erfuellt wie folgt: Wir nennen die $2m$ Knoten 1, ... $2m - 1$ und $2m$. Wir beginnen mit dem vollstaendigen Graphen (d.h., der Graph in dem zwischen allen Paaren an Knoten eine Kante existiert). Fuer $i \in \{1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ m-1,\ m\}$ betrachte man nun die Knotenpaare $(2i-1,\ 2i)$. Die m Kante zwischen allen m Knotenpaaren werden nun entfernt (s. Abb. 3).

(a) Diese Definition erfuellt Eigenschaft (a), weil fuer jeden Knoten x genau ein weiterer Knoten y existiert, zu welchem ersterer keine Kante hat. Wobei x und y dann eines der m oben genannten Knotenpaare bilden.

(b) Weiter wird Eigenschaft (b) erfuellt: Es seien $n = m-1$ Knoten gegeben. Dann koennen dadurch maximal $m - 1$ verschiedene der oben genannten Knotenpaare ausgewaehlt werden. Somit existiert ein Knotenpaar, welches nicht ausgewaehlt wurde. Nun kann man einen der beiden Knoten in diesem Knotenpaar betrachten. Nach der Konstruktion des Graphen hat dieser eine Kante zu jedem der ausgewaehlten $m - 1$ Knoten, da diese in anderen Knotenpaaren liegen.

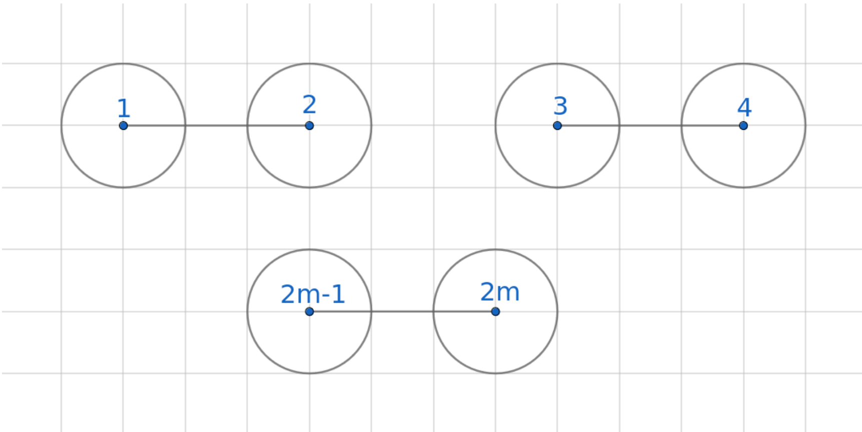


Abbildung 3: Oben definierter Graph - invertiert. D.h., zwei Knoten sind verbunden gdw. sie urspruenglich nicht verbunden sind.

Teil 2. $n \geq m$ ist nicht moeglich. Zunaechst muss $n < 2m$ gelten. Denn sonst wuerde man mehr Staedte auswaehlen muessen als vorhanden sind; oder fuer $n = 2m$ bliebe kein Knoten uerbig. Nun zeigen wir, dass jeder Graph mit $2m$ Knoten und Eigenschaft (b) fuer ein festes $n \in \mathbb{N}$ mit $2m > n \geq m$ nicht Eigenschaft (a) erfuellt, indem ein Knoten konstruiert wird, welcher eine Kante zu allen anderen Knoten besitzt.

1. Zunaechst soll eine $(n+1)$-Clique konstruiert werden. Dazu beginnt man mit einer 2-Clique. Diese existiert, da ein Graph ohne Kanten nicht Eigenschaft (b) erfuellen kann. Weiter sei eine k-Clique fuer $2 \leq k \leq n$ gegeben. Nun soll eine $(k+1)$-Clique konstruiert werden. Wegen $k \leq n$ gilt $n-k \geq 0$ und wegen $2m > n$ gilt $2m-k > n-k$. Also gilt $0 \leq n-k < 2m-k$. Also kann man von den $2m-k$ Knoten, die nicht in der Clique sind, $n-k$ Knoten auswählen. Somit lassen sich $n = k + (n-k)$ Knoten auswählen, von denen k Knoten eine k-Clique bilden. Wegen Eigenschaft (b) existiert nun in den restlichen $2m-n > 0$ Knoten ein Knoten A, welcher eine Kante zu jedem der n Knoten hat. Also hat Knoten A insbesondere eine Kante zu jedem der k Knoten der Clique. Somit ist die Menge der k Knoten der k-Clique zusammen mit A eine $(k+1)$-Clique (s. Abb. 4). Durch dieses Verfahren laesst sich itereativ eine $n+1$ Clique konstruieren.

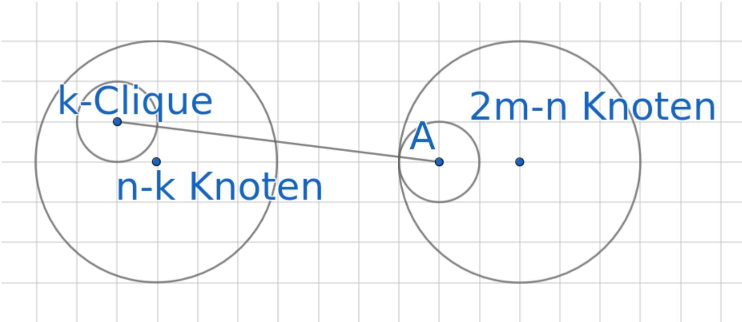


Abbildung 4: k-Clique wird ergaenzt zu n Knoten und Knoten A hat Kante zu jedem Knoten der Clique.

2. Wir konstruieren nun einen Knoten, der eine Kante zu jedem anderen Knoten hat. Dazu sei $k = 2m - n$. Dann gilt wegen $2m > n \geq m$, dass $0 < k = 2m - n \leq m \leq n$. Somit existiert insb. eine k-Clique, da eine $(n+1)$-Clique existiert. Waehlt man nun die $2m-k = n$ restlichen Knoten, die nicht in der Clique sind, so existiert nach Eigenschaft (b) ein Knoten B in der k-Clique, der eine Kante zu jedem der $2m-k = n$ Knoten auszerdhalb der Clique hat. B hat also eine Kante zu jedem Knoten in der k-Clique und eine Kante zu jedem Knoten auszerhalb der k-Clique. Also existiert ein Knoten, der eine Kante zu jedem anderen Knoten hat (s. Abb. 5). Somit wird Eigenschaft (a) nicht erfuellt.

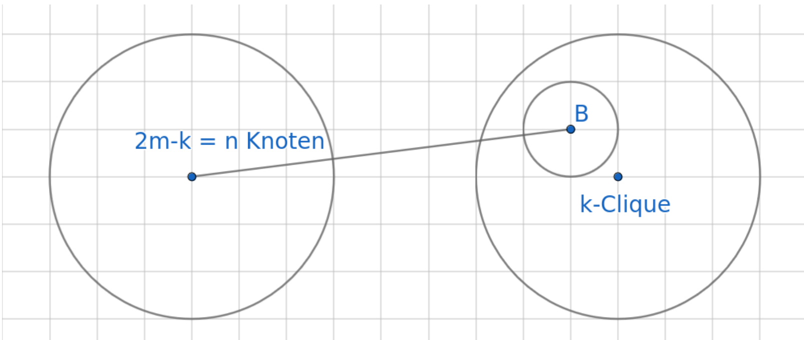


Abbildung 5: Knoten B in der k-Clique hat Kante zu jedem der weiteren Knoten.

Das bedeutet, dass jeder Graph mit $2m$ Knoten und Eigenschaft (b) nicht Eigenschaft (a) erfuellt, wenn $2m > n \geq m$ gilt. Also muss $n < m$ gelten.