Reconhecimento de Padrões

Teste de hipótese

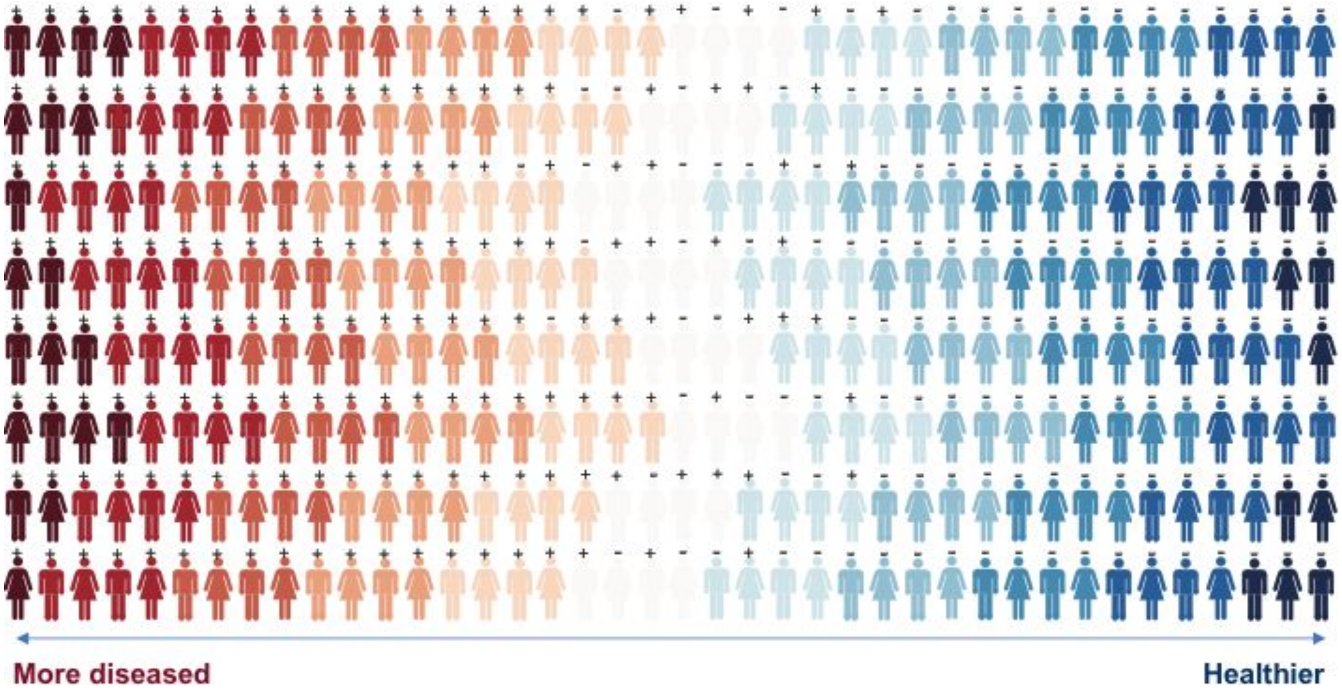
Profa: Deborah Magalhães

“

*Teste de hipótese consiste em tomar decisões sobre a distribuição desconhecida de uma **população** ou os parâmetros populacionais inerentes a essa distribuição a partir de uma **amostra**.*

Kandethody M. Ramachandran, Chris P. Tsokos, in Mathematical Statistics with Applications in R (Third Edition), 2021

População



Fonte: https://medium.com/@ruhandong/summary-for-neyman-pearson-classification-algorithms-a0c9595632a9

Amostra

Fonte: https://medium.com/@ruhandong/summary-for-neyman-pearson-classification-algorithms-a0c9595632a9

Teste de Hipótese
ou
Teste de significância
ou
Regras de decisão

- Hipótese nula: 5% dos pacientes com COVID-19 vão para unidade intensiva de tratamento

$$H_0 : p \geq 0.05$$

- Hipótese alternativa: < 5% dos paciente com COVID-19 vão para unidade intensiva de tratamento.

$$H_1 \ ou \ H_a : p < 0.05$$

Teste de Hipótese
ou
Teste de significância
ou
Região crítica

- Variáveis aleatórias (features):

$$X = (X_1, \cdots, X_n)$$

- Função de probabilidade conjunta:

$$f_\theta(x)\ para\ algum\ \theta \in \Theta$$

- Observação sobre o espaço paramétrico:

$$\theta_0 \cup \theta_1 = \Theta\ e\ \theta_0 \cap \theta_1 = \phi$$

$$\begin{cases} H_0 : \theta = \theta_0 \\ H_1 : \theta = \theta_1 \end{cases}$$

Região crítica

- Região crítica: um teste de hipótese divide o espaço amostral, definindo um subconjunto (C):

$$\begin{cases} Se\ X \in C,\ \ entao\ rejeita\ H_0 \\ Se\ X \notin C, entao\ aceita\ H_0 \end{cases}$$

Tipos de Erro

***Tipo I:** rejeitar H_0,*
*sendo esta **verdadeira**.*

***Tipo II:** aceitar H_0,*
*sendo esta **falsa**.*

Decisão estatística	Verdadeiro estado de H_0	
	H_0 verdadeira	H_0 falsa
Não Rejeita H_0	Correto	**Tipo II**
Rejeita H_0	**Tipo I**	Correto

Probabilidades dos Erros

Nível de significância (α): *probabilidade do erro do **Tipo I***

Perda (β): *probabilidade do erro do Tipo II*

Confiabilidade do teste (γ): *1 - α*

Poder (P): *1 - β*

$$P(rejeita\ H_0|H_0\ verdadeiro) = \alpha$$
$$P(nao\ rejeita\ H_0|H_0\ falso) = \beta$$

$$n \to \infty \Rightarrow \downarrow \alpha \simeq \beta \downarrow \qquad \downarrow \alpha \Rightarrow \beta \uparrow$$

Decisão estatística	Verdadeiro estado de H_0	
	H_0 verdadeira	H_0 falsa
Não Rejeita H_0	γ	β
Rejeita H_0	α	P

Exemplo: uma loja de brinquedos afirma que pelo menos 80% das meninas com menos de 8 anos preferem bonecas a outros brinquedos. Depois de observar o padrão de compra de meninas com idade inferior a 8 anos, notou-se que essa afirmação é inflada. A fim de descartar esta afirmação, foi observado o padrão de compra de **20** meninas selecionadas aleatoriamente com menos de 8 anos, e observamos X que corresponde ao número de meninas que compram bonecas. Desse modo, a seguinte hipótese será avaliada: $\mathbf{H_0: p=0.8}$ e $\mathbf{H_1: p<0.8}$. Se $\mathbf{X > 12}$, $\mathbf{H_0}$ é **aceita** e, se $\mathbf{X \leq 12}$, $\mathbf{H_0}$ é **rejeitada**.

Determine o nível de significância (α) :

$$\alpha = P(rejeitar\ H_0 \mid H_0\ verdadeira)$$
$$= P(X \leq 12 \mid 0.8)$$
$$= \sum_{x=0}^{12} \binom{20}{x} (0.8)^x (0.2)^{20-x}$$

Determine o nível de significância (α) :

$$\alpha = P(rejeitar\ H_0 \mid H_0\ verdadeira)$$
$$= P(X \leq 12 \mid 0.8)$$
$$= \sum_{x=0}^{12} \binom{20}{x} (0.8)^x (0.2)^{20-x}$$
$$= \mathbf{0.032142}$$

Determine a perda (β) com H_1: p=0.6

$$\beta = P(aceitar\ H_0 \mid H_0\ falsa)$$
$$= P(X > 12 \mid 0.6)$$
$$= 1 - P(X \leq 12 \mid 0.6)$$
$$= 1 - \sum_{x=0}^{12} \binom{20}{x} (0.6)^x (0.4)^{20-x}$$
$$= \mathbf{0.415892}$$

Encontrar em C {X ≤ C} e nível significância (∝ = 0.01):

$$\alpha = P\{X \leq C \mid p = 0.8\} = 0.01$$

Binomial probabilities:

$\binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$

n	x	0.1	0.2	0.25	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.75	0.8	0.9
15	0	0.206	0.035	0.013	0.005	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	1	0.343	0.132	0.067	0.031	0.005	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	2	0.267	0.231	0.156	0.092	0.022	0.003	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	3	0.129	0.250	0.225	0.170	0.063	0.014	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000
	4	0.043	0.188	0.225	0.219	0.127	0.042	0.007	0.001	0.000	0.000	0.000
	5	0.010	0.103	0.165	0.206	0.186	0.092	0.024	0.003	0.001	0.000	0.000
	6	0.002	0.043	0.092	0.147	0.207	0.153	0.061	0.012	0.003	0.001	0.000
	7	0.000	0.014	0.039	0.081	0.177	0.196	0.118	0.035	0.013	0.003	0.000
	8	0.000	0.003	0.013	0.035	0.118	0.196	0.177	0.081	0.039	0.014	0.000
	9	0.000	0.001	0.003	0.012	0.061	0.153	0.207	0.147	0.092	0.043	0.002
	10	0.000	0.000	0.001	0.003	0.024	0.092	0.186	0.206	0.165	0.103	0.010
	11	0.000	0.000	0.000	0.001	0.007	0.042	0.127	0.219	0.225	0.188	0.043
	12	0.000	0.000	0.000	0.000	0.002	0.014	0.063	0.170	0.225	0.250	0.129
	13	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.003	0.022	0.092	0.156	0.231	0.267
	14	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.005	0.031	0.067	0.132	0.343
	15	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.005	0.013	0.035	0.206
20	0	0.122	0.012	0.003	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	1	0.270	0.058	0.021	0.007	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	2	0.285	0.137	0.067	0.028	0.003	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	3	0.190	0.205	0.134	0.072	0.012	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	4	0.090	0.218	0.190	0.130	0.035	0.005	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	5	0.032	0.175	0.202	0.179	0.075	0.015	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000
	6	0.009	0.109	0.169	0.192	0.124	0.037	0.005	0.000	0.000	0.000	0.000
	7	0.002	0.055	0.112	0.164	0.166	0.074	0.015	0.001	0.000	0.000	0.000
	8	0.000	0.022	0.061	0.114	0.180	0.120	0.035	0.004	0.001	0.000	0.000
	9	0.000	0.007	0.027	0.065	0.160	0.160	0.071	0.012	0.003	0.000	0.000
	10	0.000	0.002	0.010	0.031	0.117	0.176	0.117	0.031	0.010	0.002	0.000
	11	0.000	0.000	0.003	0.012	0.071	0.160	0.160	0.065	0.027	$\boxed{0.007}$	0.000
	12	0.000	0.000	0.001	0.004	0.035	0.120	0.180	0.114	0.061	0.022	0.000
	13	0.000	0.000	0.000	0.001	0.015	0.074	0.166	0.164	0.112	0.055	0.002
	14	0.000	0.000	0.000	0.000	0.005	0.037	0.124	0.192	0.169	0.109	0.009
	15	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.015	0.075	0.179	0.202	0.175	0.032
	16	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.005	0.035	0.130	0.190	0.218	0.090
	17	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.012	0.072	0.134	0.205	0.190
	18	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.003	0.028	0.067	0.137	0.285
	19	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.007	0.021	0.058	0.270
	20	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.003	0.012	0.122

Questão (0.5): Seja X uma variável aleatória que segue uma distribuição binomial. Queremos testar a hipótese H_0: p=0.8 e H_1: p=0.6 com nível de significância fixo $\propto$=0.01. Defina a perda (β) para n=10, n=20, n=30 e implemente a função em python e escreva uma conclusão do comportamento da perda à medida que o tamanho da amostra varia.

Muito Obrigada!

Se você tiver qualquer dúvida ou sugestão:

- deborah.vm@ufpi.edu.br

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ