MS211 - Cálculo Numérico
Turma K - Prof João Batista Florindo

Projeto 2
"Aproximação Numérica para a Solução de EDOs"

Gabriel Borin Macedo	197201
Leonardo Drago	201150

Neste segundo projeto, trabalhamos com aproximações numéricas para solucionar EDO's. Foi utilizado no projeto a linguagem de programação Python [*última versão: 3.7.0 - 27 de junho de 2018*]. Foi criado, inicialmente, um programa seguindo a ideia do Método de Euler onde, definidos $f(x,y) = \frac{dy}{dx}$ e $y(x_0) = y_0$, aproximamos $y(x_0)$ por uma reta r_0 passando pelos pontos (x_0, y_0) com coeficiente angular $y'(x_0)$, dessa forma, sendo h o passo $(x_{k+1} - x_k)$ sabendo y_k, ficamos com uma aproximação de y_{k+1} dada pela fórmula: $y_{k+1} = y_k + h \cdot f(x_k, y_k)$. A fórmula deste método se assemelha com o polinômio de Taylor de grau 1 centrada em x_k, podendo assim, ser utilizado para definir o erro desta aproximação, tendo em vista o erro local do mesmo é descrito como $|y''(\xi)| \cdot \frac{h^2}{2}$, fazendo como que a fórmula com seu respectivo erro fique $y(x_{k+1}) = y(x_k) + f(x_k, y_k) \cdot h + y''(\xi) \cdot \frac{h^2}{2}$.

Resolvendo um problema onde, dado um intervalo de tempo I e a função $y(t) = \frac{10 \cdot e^{0.5 \cdot t}}{10 + 1(e^{0.5 \cdot t} - 1)}$, foi utilizado os Métodos de Euler e de Runge-Kutta de 4 ordem para encontrar a solução numérica do problema.

1 : Método de Euler

1.1 : Análise do método com dados igualmente espaçados de h = 0.05, r = 0.5, k = 10, yo = 1 e intervalo I = [0, 4]

Partindo destes dados iniciais, obtivemos alguns dos valores dos dados da solução analítica do problema e o valor da aproximação numérica do problema que estão apresentados abaixo :

Tabela com aproximações dos pontos do Método de Euler

x	y da aproximação	y da solução analítica
0	1	1
0.05	1.02295	1.02273
0.1	1.04637	1.04591
0.15	1.07025	1.06955
0.2	1.0946	1.09367
0.25	1.11943	1.11826
0.3	1.14474	1.14333
0.35	1.17055	1.16889
0.4	1.19685	1.19495
0.45	1.22366	1.2215
0.5	1.25098	1.24856
0.55	1.27881	1.27614
0.6	1.30716	1.30423
0.65	1.33604	1.33285
0.7	1.36545	1.36199
0.75	1.3954	1.39167
0.8	1.4259	1.42189

0.85	1.45694	1.45266
0.9	1.48853	1.48398
0.95	1.52068	1.51585
1	1.5534	1.54828
1.05	1.58668	1.58128
1.1	1.62053	1.61484
1.15	1.65496	1.64898
1.2	1.68996	1.6837
2	2.33073	2.31969
3	3.34077	3.32428
4	4.5282	4.50853

Por possuir muitas iterações, não foi colocado na tabela todos os valores obtidos, porém como se pode ver no gráfico gerado pelo software Wolfram Mathematica [*última versão 11.3.0 - 8 de março de 2018*], com todos os pontos medidos, podemos perceber que o método gerou uma boa aproximação dos pontos, com um erro médio dos dados de 0.057702317261262515:

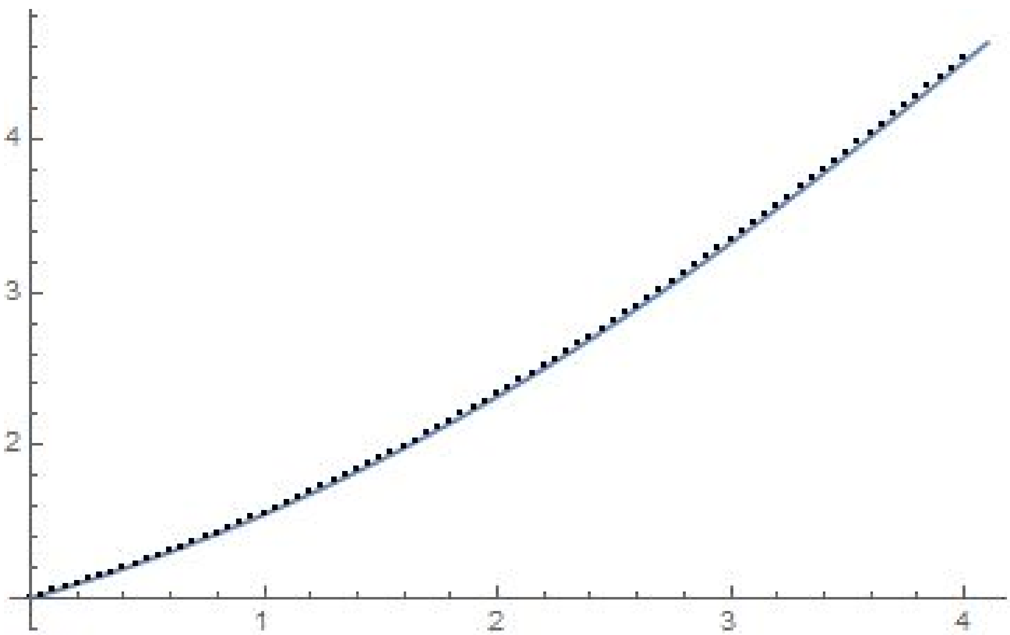

Gráfico das aproximações pelo Método de Euler.

1.2 : Análise do método para outros valores de h no mesmo intervalo.

Foi observado, no decorrer do projeto que variando o valor de *h* para valores menores, as aproximações ficam cada vez melhores do que para passos grandes, ou seja, para uma diferença pequena de x, os valores são cada vez mais precisos. Isso se dá pois o Método de Euler trabalha com as derivadas em pontos, isto faz com que, para valores próximos o valor da função seja próxima da sua derivada e para valores maiores não se pode ter esta certeza.

Tabela com aproximações dos pontos do Método de Euler para diferentes h

Método de Euler para h=0.01		
x	valor obtido	valor analítico
1	1.5493	1.54828
2	2.3219	2.31969
3	3.32758	3.32428
4	4.51247	3.32428
Método de Euler para h=1		
1	1.65428	1.54828
2	2.54508	2.31969
3	3.65468	3.32428
4	4.8926	3.32428

2 : Método de Runge-Kutta de 4 ordem

2.1 : Análise do método com dados igualmente espaçados de h = 0.05, r = 0.5, k = 10, yo = 1 e intervalo I = [0, 4]

Como segunda parte do projeto, foi estudado o método de Runge-Kutta de 4 ordem para intervalos igualmente espaçados, que seguem a idéia básica dos métodos de série de Taylor, tentando eliminar o cálculo de suas derivadas, já que muitas vezes, o custo computacional seria muito alto. Os métodos de Runge-Kutta de ordem *n* se caracterizam por terem passo $h = 1$, após desenvolver certa álgebra na equação, se coincide com o método de Taylor e, assim como dito anteriormente, não exigirem o uso de derivadas.

Assim, aplicado o método de Runge-Kutta de 4 ordem no intervalo I e com o PVI do problema, obtivemos o gráfico de comparação dos dados da solução analítica do problema e o valor da aproximação numérica do problema que está apresentado abaixo :

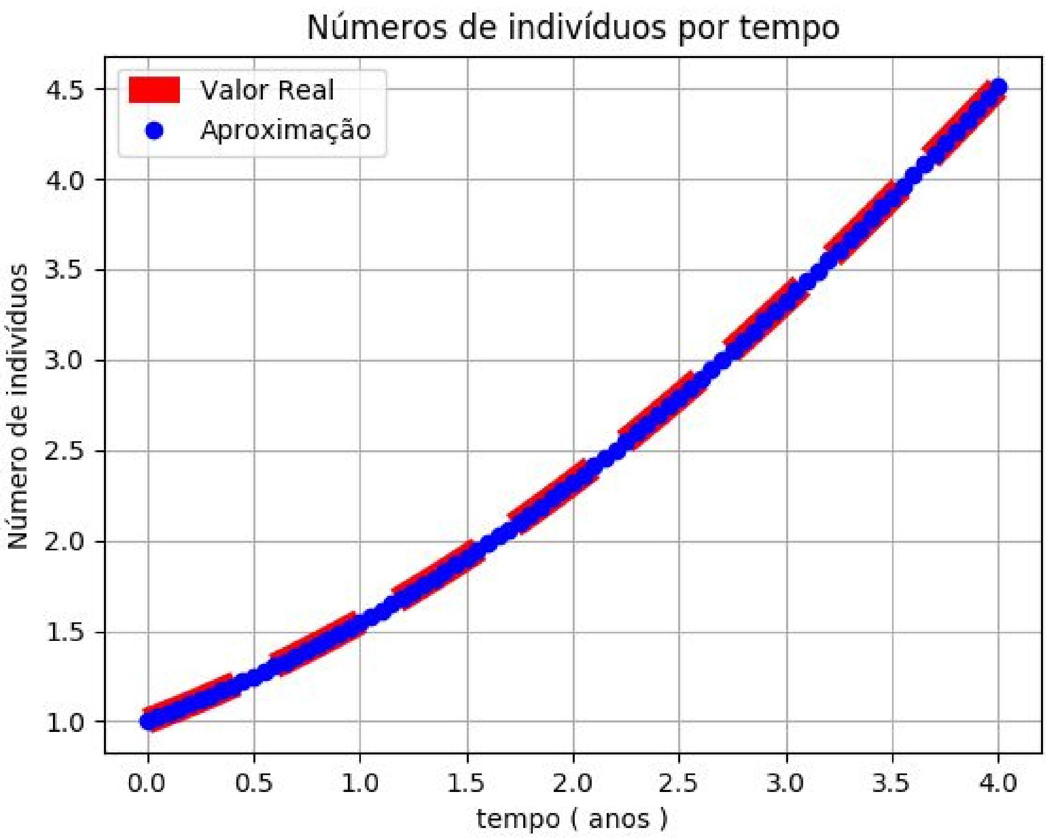

Gráfico de comparação do Método de Runge-Kutta de 4ª ordem com a solução analítica

Além disso, alguns dos valores de cada interação também estão apresentados abaixo :

x	y esperado	y real
0	1	1
0.05	1.02272608	1.02272608
0.1	1.04590861	1.04590861
0.15	1.06955402	1.06955402
0.2	1.0936687	1.0936687
0.25	1.11825901	1.11825901
0.3	1.14333123	1.14333123

0.35	1.16889161	1.16889161
0.4	1.19494632	1.19494632
0.45	1.22150146	1.22150146
0.5	1.24856305	1.24856305
0.55	1.27613702	1.27613702
0.6	1.3042292	1.3042292
0.65	1.3328453	1.3328453
0.7	1.36199093	1.36199093
0.75	1.39167155	1.39167155
0.8	1.42189251	1.42189251
0.85	1.45265899	1.45265899
0.9	1.48397602	1.48397602
0.95	1.51584846	1.51584846
1	1.54828099	1.54828099
3	3.32427862	3.32427861
3.05	3.379989	3.37998899
3.10	3.43615245	3.43615244
3.15	3.49275675	3.49275675
3.20	3.54978923	3.54978923
3.25	3.60723674	3.60723673
3.30	3.66508568	3.66508567
3.35	3.723322	3.723322
3.40	3.78193125	3.78193124
3.45	3.84089851	3.84089851
3.50	3.9002085	3.90020849
3.55	3.95984551	3.95984551
3.60	4.01979347	4.01979347
3.65	4.08003595	4.08003594

3.70	4.14055615	4.14055615
3.75	4.20133697	4.20133697
3.80	4.26236098	4.26236098
3.85	4.32361046	4.32361046
3.90	4.38506743	4.38506742
3.95	4.44671363	4.4467136
4	4.5085306	4.5085306

2.2 : Comparação entre os modelos de Runge-Kutta de 4 ordem e Euler

Para este problema, obtivemos que o erro médio dos dados para o algoritmo de Runge-Kutta de 4 ordem foi de 2.3909687563161697e-09, enquanto que para o algoritmo de euler, foi apresentado um erro médio de 0.057702317261262515.

Com isto, podemos perceber que, para este intervalo e dados de PVI da secção 1.1, o método de Runge-Kutta de 4 ordem mostrou-se claramente mais superior comparado ao euler, com a precisão de 8 casas decimais.
Podemos ainda visualizar esta comparação pelos gráficos abaixo :

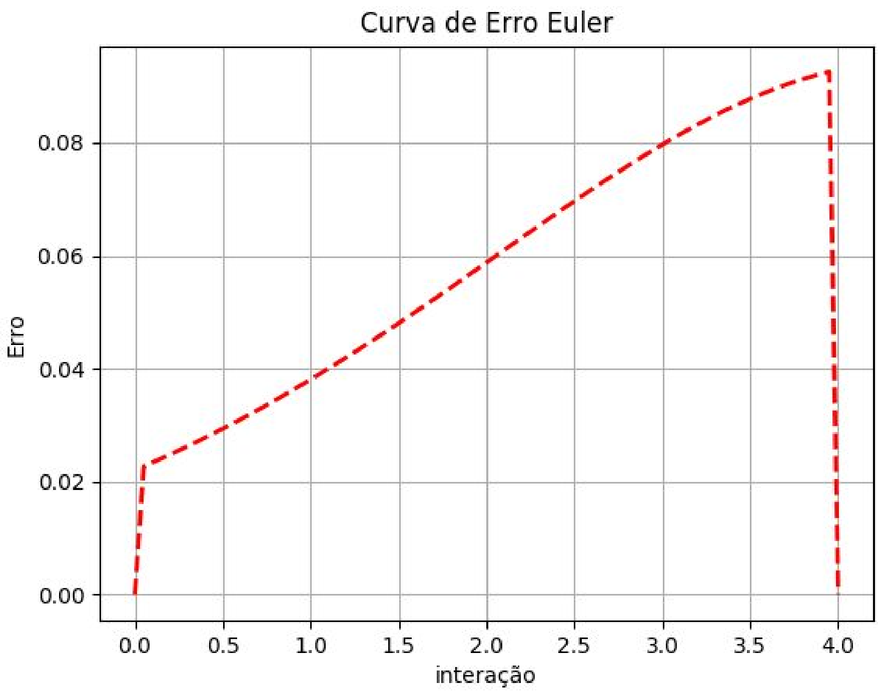

Gráfico de erro a cada passo do intervalo

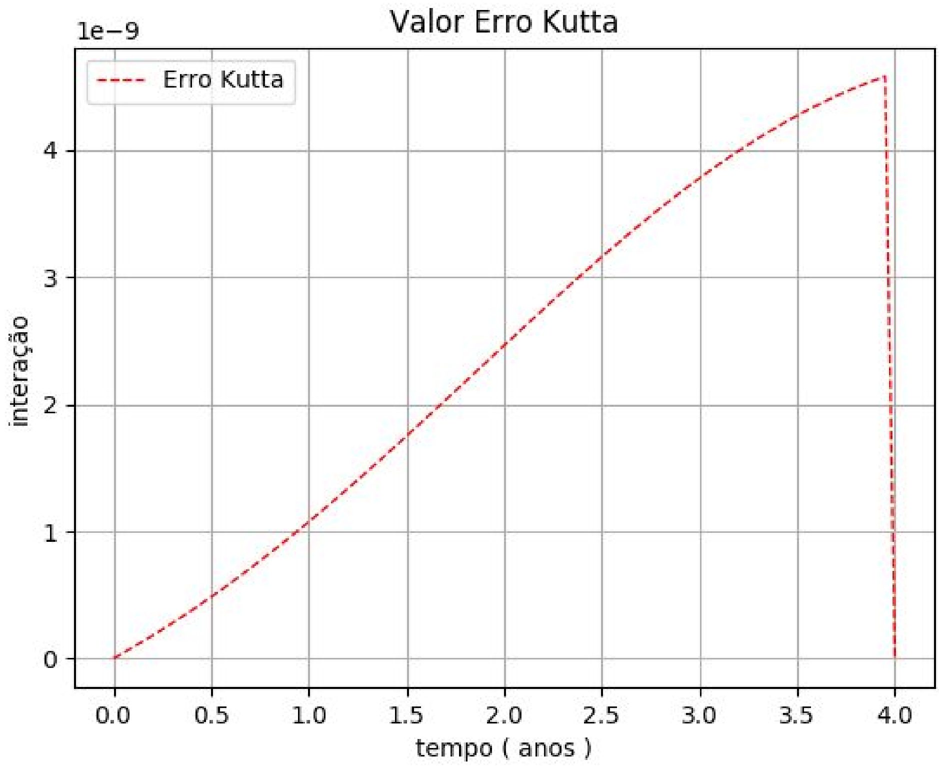

Gráfico de erro a cada passo do intervalo

2.3 : Análise do método com dados igualmente espaçados de h = 0.05, r = 0.5, k = 10, yo = 1 e intervalo I = [0, 10]

Para o intervalo I e pelo PVI do problema, obtivemos o gráfico de comparação entre a solução analítica e numérica do problema :

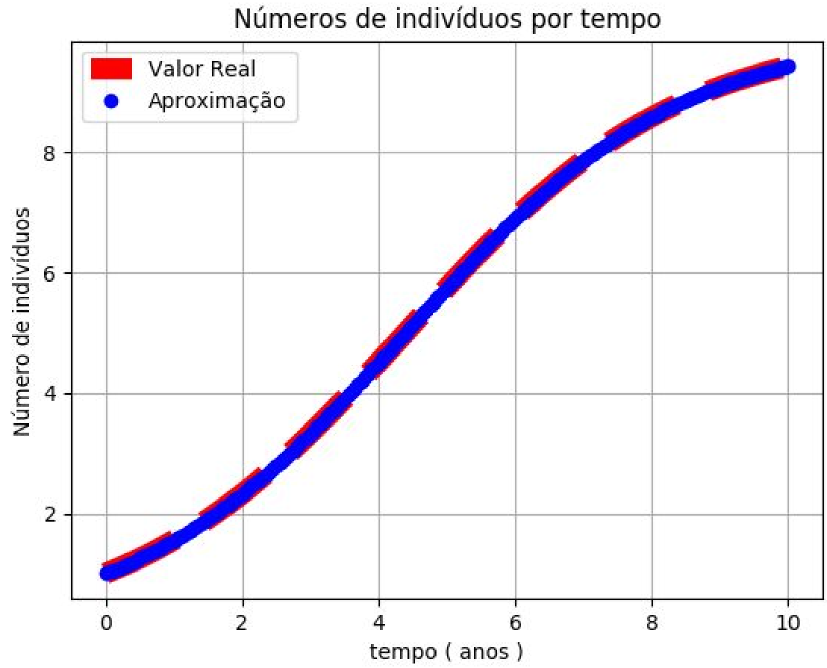

Gráfico de comparação do Método de Runge-Kutta de 4 ordem com a solução analítica

Alguns dos dados tabelados pelo método foram :

x	y aproximado	y real
0	1	1
0.05	1.02272608	1.02272608
0.5	1.24856305	1.24856305
0.75	1.39167155	1.39167155
1	1.54828099	1.54828099
10	9.42825619	9.42825618

.

A precisão deste algoritmo foi o mesmo obtido pelo resultado anterior, portanto com um erro médio de 2.3909687563161697e-09.

3 : Comparação entre os métodos

Comparando os métodos, percebemos o método de Runge-Kutta de 4 ordem foi mais condizente com a solução analítica. Isto de deve pois a expressão de erro do algoritmo de Runge é de ordem 4 , enquanto que Euler é de ordem linear. Logo, o método de Runge-Kutta de 4 ordem acumula um erro menor comparado ao método de Euler.

Sendo assim, o modelo de Runge-Kutta de 4 ordem pode ser o mais recomendado para abordagem do problema, devido sua boa precisão numérica e baixo custo computacional..

(Colocar as referências)

[1] - Cálculo Numérico - Aspectos Teóricos E Computacionais - 2ª Edição
[Márcia A. Gomes Ruggiero e Vera Lúcia Da Rocha Lopes]
[2] **http://www.decom.ufop.br/marcone/Disciplinas/CalculoNumerico/Equacoes.pdf**