

# Zaključna naloga mafija 1

Filip Jesenšek

September 1, 2025

# Contents

|          |   |          |
|----------|---|----------|
| <b>1</b> | <b>Definicije</b>                               | <b>3</b> |
| <b>2</b> | <b>Teoretično ozadje</b>                        | <b>3</b> |
| 2.1      | Teorija za gravitacijskim potencialom . . . . . | 3        |
| 2.1.1    | Reševanje Poissonove enačbe . . . . .           | 4        |
| 2.1.2    | Gravitacijski potencial elipsoidov . . . . .    | 4        |
| 2.2      | Teorija za rotacijskim potencialom . . . . .    | 5        |
| 2.3      | Reševanje hidrostatske enačbe . . . . .         | 6        |
| <b>3</b> | <b>Analiza različnih elipsoidov</b>             | <b>7</b> |
| 3.1      | Maclaurinovi sferoidi . . . . .                 | 7        |
| <b>4</b> | <b>Zaključek</b>                                | <b>9</b> |

## Abstract

V tej študiji raziskujemo gravitacijsko polje homogenih elipsoidov z različnimi razmerji polosi ter analiziramo hidrostatsko ravnovesje vrtečih se planetov. S pomočjo Poissonove enačbe izpeljemo gravitacijski potencial elipsoidov in preko hidrostatske enačbe pridobimo pogoje za ravnovesje vrtečega se telesa. Podrobno analiziramo Maclaurinove sferoide, kjer izpeljemo eksplicitno zvezo med ekscentričnostjo in kotno hitrostjo vrtenja. Rezultati kažejo, da se oblike elipsoidov v hidrostatskem ravnovesju določajo z medsebojnim vplivom gravitacijskih in centrifugalnih sil, kar omogoča napovedovanje oblike planetov na podlagi njihove vrtilne količine.

## 1 Definicije

Elipsoid bomo označili z

$$\Omega = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \sum_{i=1}^3 \frac{x_i^2}{a_i^2} \leq 1 \right\} \quad (1)$$

Elipsoidi imajo veliko zanimivih matematičnih lastnosti, mi se bomo predvsem ukvarjali z ekscentričnost, ki bo definirna na naslednji način:

$$e_{ij}^2 = 1 - \frac{a_j^2}{a_i^2} \quad (2)$$

Definiral bom tudi povprečno polos.

$$a_0^3 = a_1 a_2 a_3 \quad (3)$$

Po tej definiciji se volumen elipsoida poenostavi:

$$V = \frac{4}{3} \pi a_0^3 \quad (4)$$

Vstrajnostni moment se preprosto pokaže da je

$$I = \frac{1}{5} M \begin{bmatrix} a_2^2 + a_3^2 & 0 & 0 \\ 0 & a_1^2 + a_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & a_1^2 + a_2^2 \end{bmatrix} \quad (5)$$

## 2 Teoretično ozadje

### 2.1 Teorija za gravitacijskim potencialom

Privzamemo lahko Newtonov gravitacijski zakon.

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = -G \frac{m}{r^2} \mathbf{e}_r$$

Ta zakon velja za točkasto maso. Za splošnejše oblike lahko seštejemo male prispevke gravitacijskega pospeška  $\mathbf{g}$  za vsak košček mase  $dm$ .

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} d\mathbf{g} = -G \int_{\Omega} dm \frac{\mathbf{x} - \mathbf{s}}{|\mathbf{x} - \mathbf{s}|^3} = -G \int_{\Omega} dV \rho(\mathbf{s}) \frac{\mathbf{x} - \mathbf{s}}{|\mathbf{x} - \mathbf{s}|^3}$$

Zgornjemu izrazu iz obeh strani "pomnožimo nablo" (na obeh straneh naredimo operacijo divergence). Dobimo izraz:

$$\nabla \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x}) = -G \int_{\Omega} dV \rho(\mathbf{s}) \nabla \cdot \frac{\mathbf{x} - \mathbf{s}}{|\mathbf{x} - \mathbf{s}|^3} = -4\pi G \int_{\Omega} dV \rho(\mathbf{s}) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{s})$$

Končni izraz je potem:

$$\nabla \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x}) = -4\pi G \rho(\mathbf{x})$$

Ker je  $\mathbf{g}$  potencialno vektorsko polje, ga lahko zapišemo kot

$$\mathbf{g} = -\nabla \phi$$

Tukaj je  $\phi$  gravitacijski potencial.

Če to vstavimo v prejšni izraz, dobimo Poissonovo enačbo.

$$\Delta \phi = 4\pi G \rho$$

Za lepoto lahko uporabljamo enote kjer je  $G = \frac{1}{4\pi}$  in dobimo najbolj klasično Poissonovo enačbo.

$$\Delta \phi = \rho$$

### 2.1.1 Reševanje Poissonove enačbe

Zdaj ko smo dobili enačbo, ki nam povezuje obliko (gostota) in gravitacijski potencial, jo lahko probamo rešiti, da dobimo gravitacijsko polje poljubne dovolj lepe porazdelitve gostote.

V našem primeru bodo te oblike elipsoidi z različnimi razmerji.

Poissonovo enačbo se reši s pomočjo Greenove funkcije v 3D. Rešitev je pa naslednja

$$\phi(\mathbf{x}) = -G \int_{\Omega} \frac{\rho(\mathbf{s})}{|\mathbf{x} - \mathbf{s}|} dV$$

### 2.1.2 Gravitacijski potencial elipsoidov

Zdaj ko imamo splošno rešitev gravitacijskega potenciala, ga lahko izračunamo za raznovrstne elipsoide z polosmi  $a_1, a_2, a_3$ . Recimo da so vse polosmi med seboj različne  $a_1 \neq a_2 \neq a_3$  in da je elipsoid homogen  $\rho(\mathbf{x}) = \rho_0$ . Integral seveda ni analitično rešljiv, lahko ga pa spravimo v bolj elegantno obliko.

$$\phi(\mathbf{x}) = \pi G \rho_0 a_1 a_2 a_3 \int_0^\infty \left( 1 - \sum_{i=1}^3 \frac{x_i^2}{a_i + u} \right) \frac{du}{\Xi}$$

Kako smo prišli to tega izraza, je opisano v knjigi The theory of the potential, William Duncan.

Tukaj je notacija  $x_i$  mišljena kot pri indeksni notaciji.

Kjer je

$$\Xi = \frac{1}{\sqrt{(a_1^2 + u^2)(a_2^2 + u^2)(a_3^2 + u^2)}}$$

Še bolj prikladne so naslednje oznake,

$$\phi = -\frac{3}{4}GM \left( \alpha_0 - \sum_{i=1}^3 \alpha_i x_i^2 \right)$$

Kjer je  $M$  masa elipsoida in

$$\alpha_0 = \int_0^\infty \frac{du}{\Xi}$$

$$\alpha_i = \int_0^\infty \frac{du}{(a_i^2 + u)\Xi}$$

Te integrali so v resnici znani, to so Carlson-ove simetrične forme eliptičnih integralov. In sicer

$$\alpha_0 = \frac{1}{2}R_F(a_1^2, a_2^2, a_3^2)$$

$$\alpha_i = \frac{3}{2}R_J(a_1^2, a_2^2, a_3^2, a_i^2)$$

## 2.2 Teorija za rotacijskim potencialom

Rotacijski potencial je tukaj še najlažji za izpeljati. Recimo da se elipsoid vrti okoli osi  $z$  z hitrostjo  $\omega$ . Tedaj na vsak košček elipsoida deluje centrifugalna sila,  $\mathbf{F}_c = m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x})$ . Ker je  $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{e}_z$ . Se centrifugalna sila poeostavi v:

$$\mathbf{F}_c = m\omega^2(x, y, 0)$$

Zdaj lahko poiščemo rotacijski potencial  $\psi$ , tako da bo veljalo  $\mathbf{F}_c = -m\nabla\psi$ . Potencial dobimo preprosto z integracijo.

$$\psi = -\frac{1}{2}\omega^2(x_1^2 + x_2^2)$$

(Notacija  $x_1, x_2$  je uporabljena samo zato da sem konsistenten)

### 2.3 Reševanje hidrostatske enačbe

Privzamemo da se planet obnaša kot kapljevina. To bo veljalo na velikih časovnih skalah in velikih dimenzijah planeta. Poglejmo si 2 Newtonov zakon.

$$V\nabla p = \mathbf{F} = m\mathbf{a} = m(\mathbf{g} + \mathbf{g}_{\text{rot}}) = -m(\nabla\phi + \nabla\psi) \quad (6)$$

Tedaj dobimo hidrostatsko enačbo:

$$0 = \nabla p + \rho\nabla(\phi + \psi) \quad (7)$$

Smisleno je, da predpostavimo homogenost elipsoida, torej  $\rho(\mathbf{x}) = \rho_0$ . Tedaj se lahko znebimo gradientov pri hidrostatski enačbi.

$$0 = \nabla [p + \rho_0(\phi + \psi)] \iff p'_0 = p + \rho_0(\phi + \psi)$$

Če zdaj enačbo raspišemo v celoti dobimo

$$p = p'_0 - \frac{1}{2}\rho_0 \left[ \frac{3}{2}GM\alpha_0 + (\frac{3}{2}GM\alpha_1 - \omega^2)x_1^2 + (\frac{3}{2}GM\alpha_2 - \omega^2)x_2^2 + \frac{3}{2}GM\alpha_3x_3^2 \right]$$

Zdaj lahko najdemo tlak na sredini tega elipsoida  $p_0$ , torej pri  $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ .

$$p_0 = p'_0 - \frac{3}{4}\rho_0GM\alpha_0$$

Enačbo lahko zdaj zapišemo malo krajše:

$$p = p_0 - \frac{1}{2}\rho_0 \left[ (\frac{3}{2}GM\alpha_1 - \omega^2)x_1^2 + (\frac{3}{2}GM\alpha_2 - \omega^2)x_2^2 + \frac{3}{2}GM\alpha_3x_3^2 \right]$$

Na tem mestu lahko upoštevamo še robni pogoj pri katerem je tlak na robu elipsoidu enak 0,  $p|_{\partial\Omega} = 0$

$$p_0 = \frac{1}{2}\rho_0 \left[ (\frac{3}{2}GM\alpha_1 - \omega^2)x_1^2 + (\frac{3}{2}GM\alpha_2 - \omega^2)x_2^2 + \frac{3}{2}GM\alpha_3x_3^2 \right]$$

Pri pogoju

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} = 1$$

Če enačimo koeficiente pred  $x_i^2$  se pokaže, da bosta enačbi veljali natanko takrat ko bo:

$$\left( \alpha_1 - \frac{2}{3GM}\omega^2 \right) a_1^2 = \left( \alpha_2 - \frac{2}{3GM}\omega^2 \right) a_2^2 = \alpha_3 a_3^2 \quad (8)$$

Če se osredotočimo na prvo in tretjo zvezo in jo raspišemo po definicijah  $\alpha_i$ .

$$\frac{2}{3GM}\omega^2 = \frac{\alpha_1 a_1^2 - \alpha_3 a_3^2}{a_1^2} = \frac{1}{a_1^2} \int_0^\infty \left( \frac{a_1^2}{a_1^2 + u} - \frac{a_2^2}{a_2^2 + u} \right) \frac{du}{\Xi} \quad (9)$$

Tukaj je koristno nazaj razpisati maso kot  $M = \rho_0 \frac{4}{3} \pi a_1 a_2 a_3$ . Zdaj lahko zapišemo eno iz med končnih enačb. Od tukaj naprej je smiselno definirati brez dimenzijsko kotno hitrost  $\tilde{\omega}^2 = \frac{\omega^2}{2\pi G \rho_0}$ .

$$\tilde{\omega}^2 = a_1 a_2 a_3 \left(1 - \frac{a_3^2}{a_1^2}\right) \int_0^\infty \frac{u du}{(a_1^2 + u)(a_2^2 + u)\Xi} \quad (10)$$

Ker smo začeli z eno enačbo in enim robnim pogojem moramo tudi tukaj imeti eno enačbo in en pogoj (ena enačba ne more biti dovolj za rešitev).

Vrnimo se nazaj na prejšnjo zvezo (8). Vzemimo prvo in drugo zvezo in vanje vstavimo (9), da se znebimo  $\omega^2$ .

$$\left(\alpha_1 - \frac{\alpha_1 a_1^2 - \alpha_3 a_3^2}{a_1^2}\right) a_1^2 = \left(\alpha_2 - \frac{\alpha_1 a_1^2 - \alpha_3 a_3^2}{a_2^2}\right) a_2^2 \quad (11)$$

Na tej točki lahko spet upoštevamo definicije  $\alpha_i$ .

$$(a_1^2 - a_2^2) \int_0^\infty \frac{du}{\Xi} \left( \frac{a_2^2 a_1^2}{(a_1^2 + u)(a_2^2 + u)} - \frac{a_3^2}{a_3^2 + u} \right) = 0 \quad (12)$$

V enačbi ne nastopa nič drugega razen polosi elipsoida, tako da ta enačba nam nekaj pove o geometriji, ki jo mora elipsoid upoštevati.

### 3 Analiza različnih elipsoidov

Zdaj lahko analiziramo enačbi, ki smo ju pridobili v prejšnjem poglavju.

$$\tilde{\omega}^2 = a_1 a_2 a_3 \left(1 - \frac{a_3^2}{a_1^2}\right) \int_0^\infty \frac{u du}{(a_1^2 + u)(a_2^2 + u)\Xi} \quad (13)$$

$$(a_1^2 - a_2^2) \int_0^\infty \frac{du}{\Xi} \left( \frac{a_2^2 a_1^2}{(a_1^2 + u)(a_2^2 + u)} - \frac{a_3^2}{a_3^2 + u} \right) = 0 \quad (14)$$

Kot že povedano, prva enačba nam podaja zvezo med kotno hitrostjo  $\omega$  in obliko elipsoida. Druga enačba je pa geometrijska omejitev na elipsoidu.

#### 3.1 Maclaurinovi sferoidi

Predstavljajmo is, da imamo v prostoru nek dovolj velik (večji od krompirjevega radija), ne vrteč, tog planet. Tak planet bo, zaradi lastnega gravitacijskega privlaka, seveda sferičen. (Obrazloženo v appendix-u). Izberimo si koordinatni sistem in na nek način zavrtimo planet okoli osi  $z$ . Ob vrtenju se nam simetrija zlomi. Planet je rotacijsko simetričen le po  $z$  osi. Tak planet je zdaj bolj podoben elipsoidu  $\Omega$ , z polosmi  $a_1, a_2, a_3$ , vendar zaradi simetrije planeta velja  $a_1 = a_2$ . Takim elipsoidom pravimo Maclaurinovi sferoidi. Če se vrnemo nazaj na enačbi (10) in (12), vidimo da je enačba, ki opisuje geometrijsko omejitev avtomatsko izpolnjena. Druga se pa poenostavi v (tukaj bomo tudi začeli uporabljati že prej definirano ekscentričnost 2):

$$\tilde{\omega}^2 = a_1^2 a_3 e_{13}^2 \int_0^\infty \frac{u du}{(a_1^2 + u)^2 (a_3^2 + u)^{3/2}} \quad (15)$$

Relativno očitna substitucija tukaj je  $\lambda = \frac{u}{a_1^2}$ .

$$\tilde{\omega}^2 = e_{13}^2 \sqrt{1 - e_{13}^2} \int_0^\infty \frac{\lambda d\lambda}{(1 + \lambda)^2 (1 + \lambda - e_{13}^2)^{3/2}} \quad (16)$$

Na tej točki naredimo še eno, a malo manj očitno substitucijo  $1 + \lambda = \frac{e_{13}^2}{t^2}$ . Po malo premetavanja dobimo naslednji izraz

$$\tilde{\omega}^2 = 2 \frac{\sqrt{1 - e_{13}^2}}{e_{13}^3} \int_0^{e_{13}} \frac{(e_{13}^2 - t^2) t^2 dt}{(1 + t)^2} \quad (17)$$

Ta integral je po nekem čudežu (ukvarjamo se z elipsoidi) analitično, rešljiv. Lahko se poslužujemo raznih trikov, da rešimo ta integral. Jaz sem se odločil za še eno substitucijo  $t = \sin \theta$ . Po tej substituciji in nekaj popisanih listov pridemo do končne zveze.

$$\tilde{\omega}^2 = \frac{(3 - 2e_{13}^2) \sqrt{1 - e_{13}^2}}{e_{13}^3} \arcsin e_{13} - \frac{3}{e_{13}^2} (1 - e_{13}^2) \quad (18)$$

Poglejmo še, kako se obnaša vrtilna količina pri Maclaurinovih sferoidih.

$$L = \frac{2}{5} M a_1^2 \omega \quad (19)$$

Zveza, ki nam tukaj pride prav je naslednje:

$$a_1 = a_0 (1 - e_{13}^2)^{-1/6} \quad (20)$$

To zvezo se trivialno izpelje z upoštevanjem definicije  $a_0$  in  $e_{13}$ . Po malo preproste algebre se pokaže, da velja naslednje.

$$\tilde{L} = \frac{\sqrt{6}}{5} (1 - e_{12}^2)^{-1/3} \tilde{\omega} \quad (21)$$

Kjer je  $\tilde{L}$  brezdimenzijska vrtilna količina definirana kot  $\tilde{L} = \frac{L}{\sqrt{M^3 G a_0}}$ .



## 4 Zaključek

V tej nalogi smo uspešno analizirali gravitacijsko polje elipsoidov in povezavo med vrtilno količino ter obliko togega planeta. Ključna ugotovitev je, da se oblike elipsoidov v hidrostatskem ravnovesju določajo z ravnovesjem med gravitacijskimi in centrifugalnimi silami. Za Maclaurinove sferoide smo izpeljali analitično rešitev, ki eksplicitno povezuje ekscentričnost in kotno hitrost vrtenja. Pri tem smo pokazali, da z naraščajočo ekscentričnostjo hitrost vrtenja dosega maksimum in nato upada, kar nakazuje na obstoj meje stabilnosti za vrteče se planete. Nadaljnje raziskave bi se lahko osredotočile na analizo Jacobijevih elipsoidov in njihovih stabilnostnih lastnosti, kar bi omogočilo bolj splošno razumevanje oblik nebesnih teles v vrtenju.

## References

- [1] MacMillan, W. D. *The Theory of Potential*. New York: Dover Publications.
- [2] Dassios, G. *Ellipsoidal Harmonics: Theory and Applications*. New York: Cambridge University Press.
- [3] Fitzpatrick, R. *Theoretical Physics Notes*. Dostopno: <https://farside.ph.utexas.edu/teaching.html>