Izračun Ariyjevih funkcij

Filip Jesenšek

Oktober 15, 2025

Contents

1 Uvod

Airyjevi funkciji Ai in Bi se v fiziki pojavljata predvsem v optiki in kvantni mehaniki. Definirani sta kot neodvisni rešitvi enačbe

$$y''(x) - xy(x) = 0$$

in sta predstavljivi v integralski obliki

$$\mathrm{Ai}(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \cos(t^3/3 + xt)\,\mathrm{d}t, \; \mathrm{Bi}(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left[\mathrm{e}^{-t^3/3+xt} + \sin(t^3/3 + xt)\right]\,\mathrm{d}t.$$

Za majhne x lahko funkciji Ai in Bi izrazimo z Maclaurinovima vrstama

$$\mathrm{Ai}(x) = \alpha f(x) - \beta g(x)\,, \qquad \mathrm{Bi}(x) = \sqrt{3}\left[\alpha f(x) + \beta g(x)\right]\,,$$

kjer v $x = 0$ veljata zvezi $\alpha = \mathrm{Ai}(0) = \mathrm{Bi}(0)/\sqrt{3} \approx 0.355028053887817239$ in $\beta = -\mathrm{Ai}'(0) = \mathrm{Bi}'(0)/\sqrt{3} \approx 0.258819403792806798$. Vrsti za f in g sta

$$f(x) = \sum_{k=0}^\infty \left(\frac{1}{3}\right)_k \frac{3^k x^{3k}}{(3k)!}\,, \qquad g(x) = \sum_{k=0}^\infty \left(\frac{2}{3}\right)_k \frac{3^k x^{3k+1}}{(3k+1)!}\,,$$

kjer je

$$(z)_n = \Gamma(z+n)/\Gamma(z)\,, \qquad (z)_0 = 1\,.$$

Za velike vrednosti $|x|$ Airyjevi funkciji aproksimiramo z njunima asimptotskima razvojema. Z novo spremenljivko $\xi = \frac{2}{3}|x|^{3/2}$ in asimptotskimi vrstami

$$L(z) \sim \sum_{s=0}^\infty \frac{u_s}{z^s}\,, \qquad P(z) \sim \sum_{s=0}^\infty (-1)^s \frac{u_{2s}}{z^{2s}}\,, \qquad Q(z) \sim \sum_{s=0}^\infty (-1)^s \frac{u_{2s+1}}{z^{2s+1}}\,,$$

s koeficienti

$$u_s = \frac{\Gamma(3s + \frac{1}{2})}{54^s s!\,\Gamma(s + \frac{1}{2})}$$

za velike pozitivne x izrazimo

$$\mathrm{Ai}(x) \sim \frac{\mathrm{e}^{-\xi}}{2\sqrt{\pi}x^{1/4}}\,L(-\xi)\,, \qquad \mathrm{Bi}(x) \sim \frac{\mathrm{e}^{\xi}}{\sqrt{\pi}x^{1/4}}\,L(\xi)\,,$$

za po absolutni vrednosti velike negativne x pa

$$\mathrm{Ai}(x) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}(-x)^{1/4}}\left[\sin(\xi - \pi/4)\,Q(\xi) + \cos(\xi - \pi/4)\,P(\xi)\right]\,,$$
$$\mathrm{Bi}(x) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}(-x)^{1/4}}\left[-\sin(\xi - \pi/4)\,P(\xi) + \cos(\xi - \pi/4)\,Q(\xi)\right]\,.$$

Naloga: Z uporabo kombinacije Maclaurinove vrste in asimptotskega razvoja poišči čim učinkovitejši postopek za izračun vrednosti Airyjevih funkcij Ai in Bi na vsej realni osi z **absolutno** napako, manjšo od 10^{-10}. Enako naredi tudi z **relativno** napako in ugotovi, ali je tudi pri le-tej dosegljiva natančnost, manjša od 10^{-10}. Pri oceni napak si pomagaj s programi, ki znajo računati s poljubno natančnostjo, na primer z Mathematico in/ali paketi mpmath in decimal v programskem jeziku Python.

2 Potek dela

Za rešitev te naloge sem uporbil programski jezik Python. Ideja mojega reševanja je bila naslednja. Najprej sem vpleljal vse funckije, v moj program kar po definiciji, da bom imel za nadalnje korake neko referenco. Računanje sem optimiziral, tako da sem vse vrste prevedel v rekurzivni zapis, s pomočjo katerega sem znižal število operacij. Za rekurzivni zapis sem moral poenostaviti ulomek oblike $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ za vse aprokcimacijske funkcije f, g, L, P, Q, kjer so a_n koeficienti pred vsakim členom v dani vrsti. Ko sem imel vse funkcije zapisane rekurzivno, sem začel računati in si izrisovati absolutne in relativne napake med referenčno funkcijo in aproksimirano funkcijo. Na tej točki sem dodal pogoj, da se moje seštevanje členov konča, ko dosežem želeno toleranco, ki sem jo nastavil na 10^{-11}.

3 Izpolšave

Poleg tega, da bi moral popravit funkcijo Bi, je da bi lahko znižal natančnost mest in bi s tem še pohitril program. Poleg tega, bi lahko pogledal kakšno odstopanje ima sami referenčni funkciji glede na ta pravi Ai, Bi.