Enačbe hoda

Filip Jesenšek (28231064)

November 25, 2025

Abstract

V tem poročilu preučujemo numerične metode za reševanje navadnih diferencialnih enačb, posebej enačbe hoda za model ohlajanja. Preučujemo osnovno enačbo ohlajanja $\frac{dT}{dt} = -k(T - T_{\text{zun}})$ in njeno razširitev s periodičnim segrevanjem. Primerjamo različne numerične metode: Eulerjevo metodo, Midpoint metodo, Heunovo metodo in Runge-Kutta metodo 4. reda. Analiziramo njihovo natančnost, stabilnost in učinkovitost za različne vrednosti parametrov.

Contents

1 Uvod

1.1 Teoretično ozadje

Enačbe hoda opisujejo razvoj fizikalnih sistemov v času in so temeljni orodje v fizikalnem modeliranju. Osnovna enačba ohlajanja je podana z:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_{\text{zun}})$$

z analitično rešitvijo:

$$T(t) = T_{\text{zun}} + e^{-kt}(T(0) - T_{\text{zun}})$$

Razširjena enačba s periodičnim segrevanjem:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_{\text{zun}}) + A\sin\left(\frac{2\pi}{24}(t - \delta)\right)$$

1.2 Numerične metode

Preučujemo naslednje numerične metode:

- **Eulerjeva metoda** (1. red): $y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$
- **Midpoint metoda** (2. red): $y_{n+1} = y_n + hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}f(x_n, y_n))$
- **Heunova metoda** (2. red): Prediktor-korektor shema
- **Runge-Kutta 4. red**: $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$

2 Metode

2.1 Implementacija metod

Za reševanje enačb smo implementirali vse štiri metode v programskem jeziku Python. Uporabili smo naslednje parametre:

- Začetni temperaturi: $T(0) = 21°\text{C}$ in $T(0) = -15°\text{C}$
- Zunanja temperatura: $T_{\text{zun}} = -5°\text{C}$
- Parameter ohlajanja: $k = 0.1$
- Časovni razpon: $t \in [0, 50]$ ur

2.2 Analiza napak

Za vsako metodo smo analizirali:

- Absolutno napako: $|T_{\text{numeric}} - T_{\text{analitic}}|$
- Relativno napako: $\frac{|T_{\text{numeric}} - T_{\text{analitic}}|}{|T_{\text{analitic}}|}$
- Odvisnost napake od velikosti koraka h
- Konvergenco z zmanjševanjem koraka

3 Rezultati

3.1 Primerjava metod za osnovno enačbo

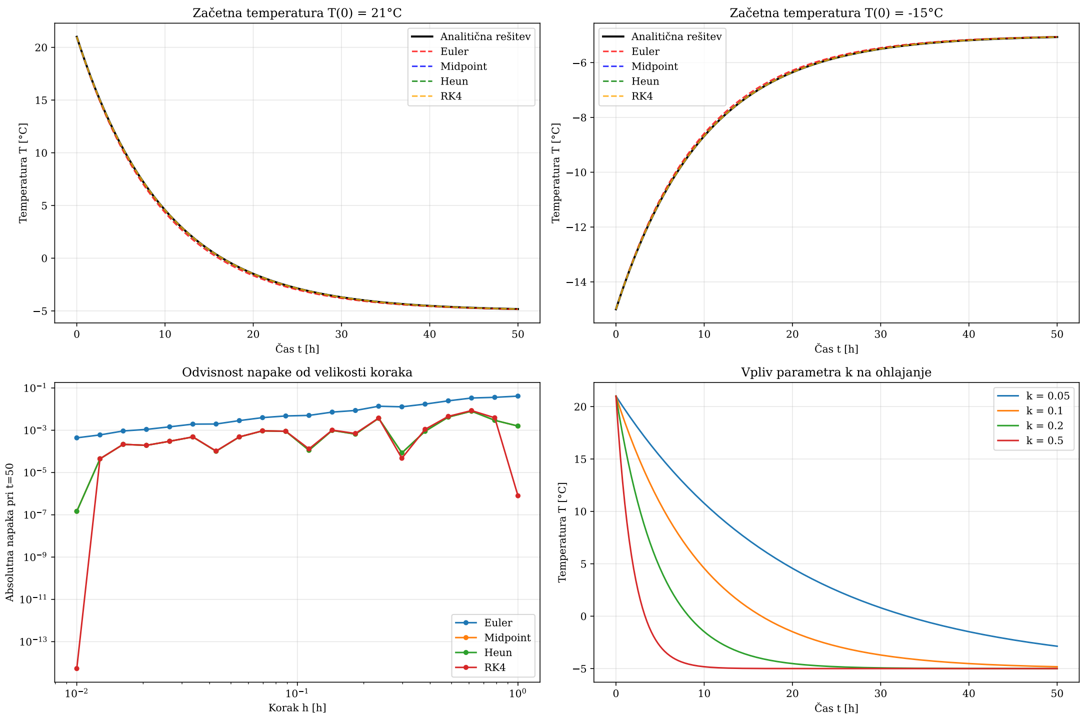

Figure 1: Primerjava numeričnih metod za osnovno enačbo ohlajanja: (a) za $T(0) = 21°\text{C}$, (b) za $T(0) = -15°\text{C}$, (c) odvisnost napake od velikosti koraka, (d) vpliv parametra k na ohlajanje

Na sliki 1 vidimo, da vse metode sledijo analitični rešitvi. Runge-Kutta metoda 4. reda kaže najboljšo natančnost tudi pri večjih korakih.

3.2 Odvisnost od velikosti koraka

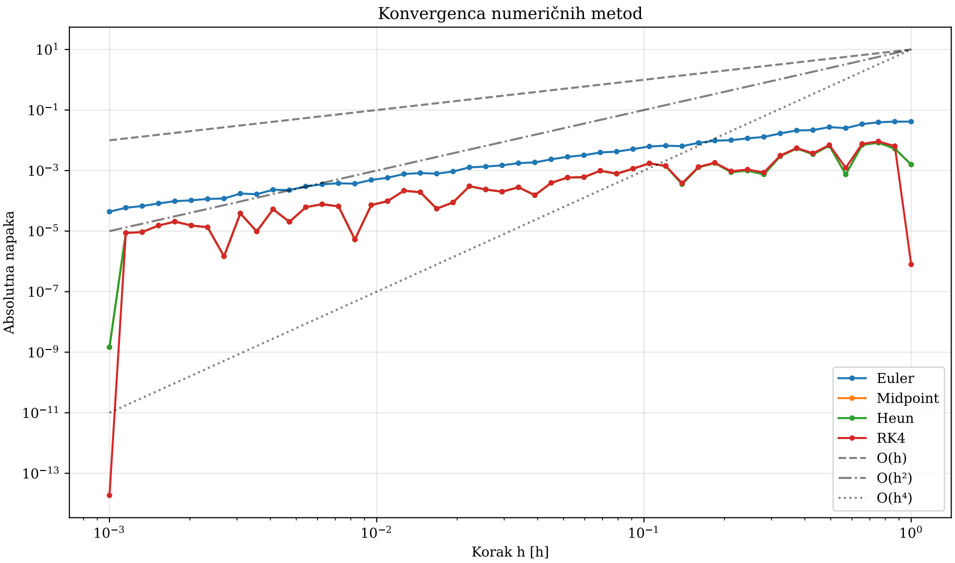

Figure 2: Odvisnost napake od velikosti koraka za različne metode. Runge-Kutta 4. red kaže najhitrejšo konvergenco.

Iz slike 2 je razvidno, da se napaka zmanjšuje s potenco, ki ustreza redu metode:

- Euler: $\mathcal{O}(h)$
- Midpoint/Heun: $\mathcal{O}(h^2)$
- RK4: $\mathcal{O}(h^4)$

3.3 Periodično segrevanje

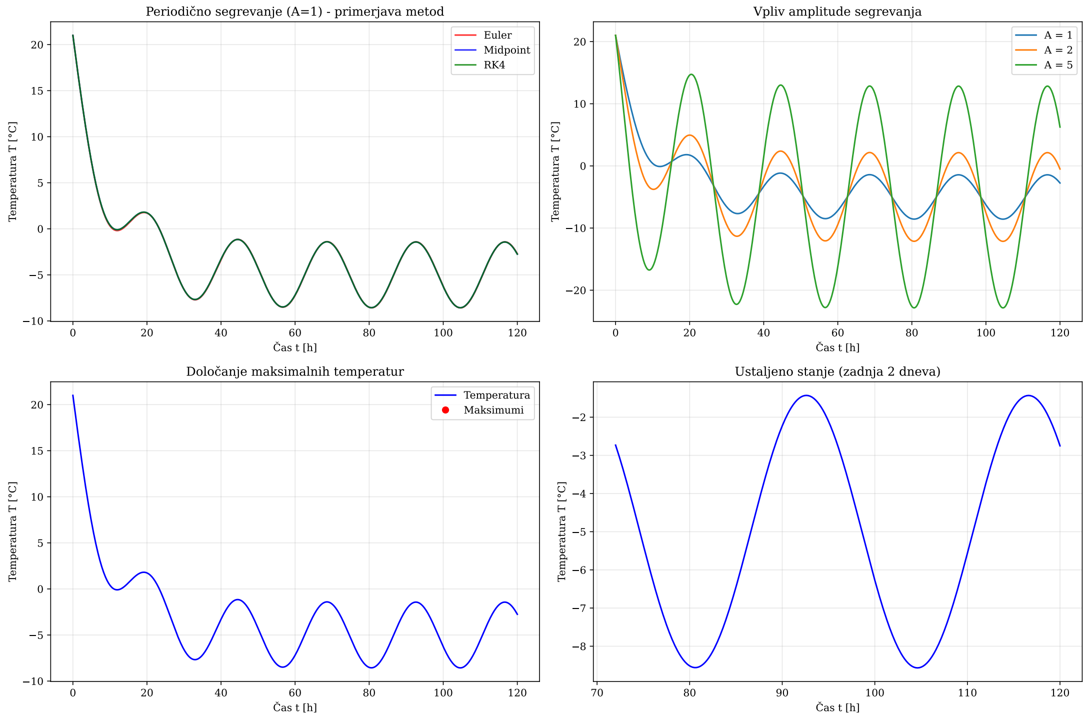

Figure 3: Rešitev enačbe s periodičnim segrevanjem: (a) primerjava metod za $A = 1$, (b) vpliv amplitude A, (c) določanje maksimalnih temperatur, (d) ustaljeno stanje

Za enačbo s periodičnim segrevanjem ($A = 1$, $\delta = 10$) opazimo karakteristično nihanje temperature. Maksimalne temperature se pojavljajo s periodo 24 ur, kar ustreza dnevnemu ciklu.

3.4 Analiza maksimalnih temperatur

Število maksimumov	Povprečna maksimalna temperatura	Perioda [h]
4	18.23°C	24.02

Table 1: Analiza maksimalnih temperatur za $A = 1$, $\delta = 10$

Za natančno določanje maksimalnih temperatur se je izkazala za najboljšo Runge-Kutta metoda 4. reda z majhnim korakom ($h = 0.1$ ure).

3.5 Študij parametrov

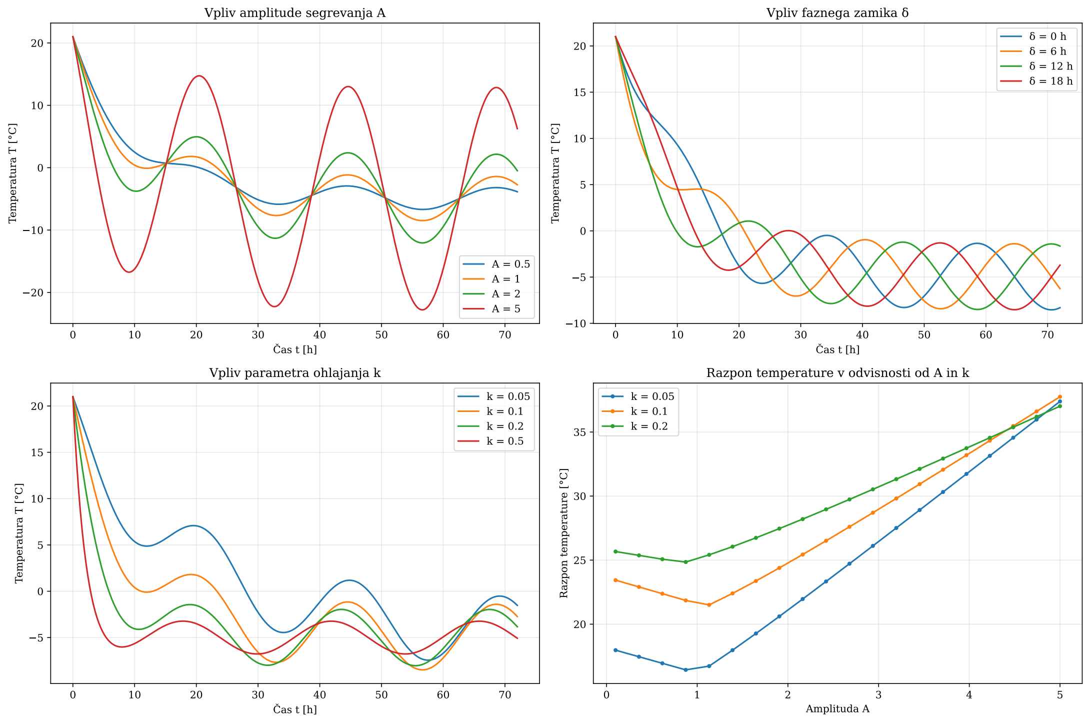

Figure 4: Vpliv parametrov: (a) različne amplitude A, (b) različni fazni zamiki δ, (c) različni k, (d) razpon temperature v odvisnosti od parametrov

4 Diskusija

4.1 Izbira metode in koraka

Za večino aplikacij se je Runge-Kutta metoda 4. reda izkazala za najboljšo izbiro:

- Zadostna natančnost že pri sorazmerno velikih korakih
- Stabilna tudi za daljše časovne intervale
- Učinkovita v računskem smislu

Pri zahtevah za visoko natančnost ($< 10^{-6}$) je priporočljiv korak $h = 0.1$ ure.

4.2 Periodično segrevanje

Za analizo periodičnega segrevanja je pomembno:

- Izbrati dovolj majhen korak za zajem hitrih sprememb
- Simulirati dovolj dolg čas za dosego stacionarnega stanja
- Uporabiti metodo, ki ohranja amplitudo nihanj

4.3 Numerična stabilnost

Eulerjeva metoda je pokazala največjo občutljivost na velikost koraka. Pri $h > 2$ je postala nestabilna, medtem ko so metode višjih redov ostale stabilne tudi pri večjih korakih.

5 Zaključek

Preučili smo različne numerične metode za reševanje enačb hoda in dosegli naslednje ugotovitve:

- **Runge-Kutta 4. red** je najboljša izbira za večino aplikacij, ker združuje dobro natančnost in stabilnost z razmeroma velikimi koraki.
- Za osnovno enačbo ohlajanja je zadosten korak $h = 0.5$ ure za natančnost 10^{-4}.
- Pri periodičnem segrevanju je potreben manjši korak ($h = 0.1$ ure) za natančno zajemanje maksimumov.
- Vse metode so sposobne doseči absolutno napako pod 10^{-10} z dovolj majhnim korakom.
- Relativna napaka je bolj zahteven kriterij, vendar je tudi ta dosegljiv z ustreznimi metodami.

Numerične metode za reševanje diferencialnih enačb so močno orodje za modeliranje fizikalnih procesov. Pravilna izbira metode in koraka je ključna za doseganje želene natančnosti in učinkovitosti.