# Izračun Ariyjevih funkcij

Filip Jesenšek (28231064)

Oktober 15, 2025

# Contents

# 1 Uvod

Airyjevi funkciji Ai in Bi se v fiziki pojavljata predvsem v optiki in kvantni mehaniki. Definirani sta kot neodvisni rešitvi enačbe

$$y''(x) - xy(x) = 0$$

in sta predstavljivi v integralski obliki

$$\mathrm{Ai}(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \cos(t^3/3 + xt)\,\mathrm{d}t\,,\ \mathrm{Bi}(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left[\mathrm{e}^{-t^3/3+xt} + \sin(t^3/3 + xt)\right]\,\mathrm{d}t\,.$$

Za majhne $x$ lahko funkciji Ai in Bi izrazimo z Maclaurinovima vrstama

$$\mathrm{Ai}(x) = \alpha f(x) - \beta g(x)\,, \qquad \mathrm{Bi}(x) = \sqrt{3}\left[\alpha f(x) + \beta g(x)\right]\,,$$

kjer v $x = 0$ veljata zvezi $\alpha = \mathrm{Ai}(0) = \mathrm{Bi}(0)/\sqrt{3} \approx 0.355028053887817239$ in $\beta = -\mathrm{Ai}'(0) = \mathrm{Bi}'(0)/\sqrt{3} \approx 0.258819403792806798$. Vrsti za $f$ in $g$ sta

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)_k \frac{3^k x^{3k}}{(3k)!}\,, \qquad g(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)_k \frac{3^k x^{3k+1}}{(3k+1)!}\,,$$

kjer je

$$(z)_n = \Gamma(z+n)/\Gamma(z)\,, \qquad (z)_0 = 1\,.$$

Za velike vrednosti $|x|$ Airyjevi funkciji aproksimiramo z njunima asimptotskima razvojema. Z novo spremenljivko $\xi = \frac{2}{3}|x|^{3/2}$ in asimptotskimi vrstami

$$L(z) \sim \sum_{s=0}^{\infty}\frac{u_s}{z^s}\,, \qquad P(z) \sim \sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\frac{u_{2s}}{z^{2s}}\,, \qquad Q(z) \sim \sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\frac{u_{2s+1}}{z^{2s+1}}\,,$$

s koeficienti

$$u_s = \frac{\Gamma(3s+\frac{1}{2})}{54^s s!\,\Gamma(s+\frac{1}{2})}$$

za velike pozitivne $x$ izrazimo

$$\mathrm{Ai}(x) \sim \frac{\mathrm{e}^{-\xi}}{2\sqrt{\pi}x^{1/4}}\,L(-\xi)\,, \qquad \mathrm{Bi}(x) \sim \frac{\mathrm{e}^{\xi}}{\sqrt{\pi}x^{1/4}}\,L(\xi)\,,$$

za po absolutni vrednosti velike negativne $x$ pa

$$\mathrm{Ai}(x) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}(-x)^{1/4}}\left[\ \ \sin(\xi - \pi/4)\,Q(\xi) + \cos(\xi - \pi/4)\,P(\xi)\right]\,,$$
$$\mathrm{Bi}(x) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}(-x)^{1/4}}\left[-\sin(\xi - \pi/4)\,P(\xi) + \cos(\xi - \pi/4)\,Q(\xi)\right]\,.$$

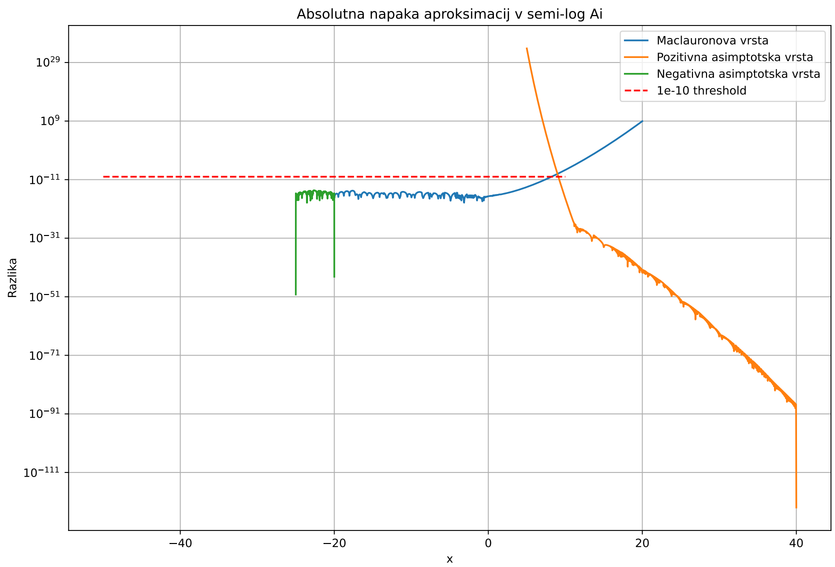
*Naloga:* Z uporabo kombinacije Maclaurinove vrste in asimptotskega razvoja poišči čim učinkovitejši postopek za izračun vrednosti Airyjevih funkcij Ai in Bi na vsej realni osi z **absolutno** napako, manjšo od $10^{-10}$. Enako naredi tudi z **relativno** napako in ugotovi, ali je tudi pri le-tej dosegljiva natančnost, manjša od $10^{-10}$. Pri oceni napak si pomagaj s programi, ki znajo računati s poljubno natančnostjo, na primer z Mathematico in/ali paketi mpmath in decimal v programskem jeziku Python.

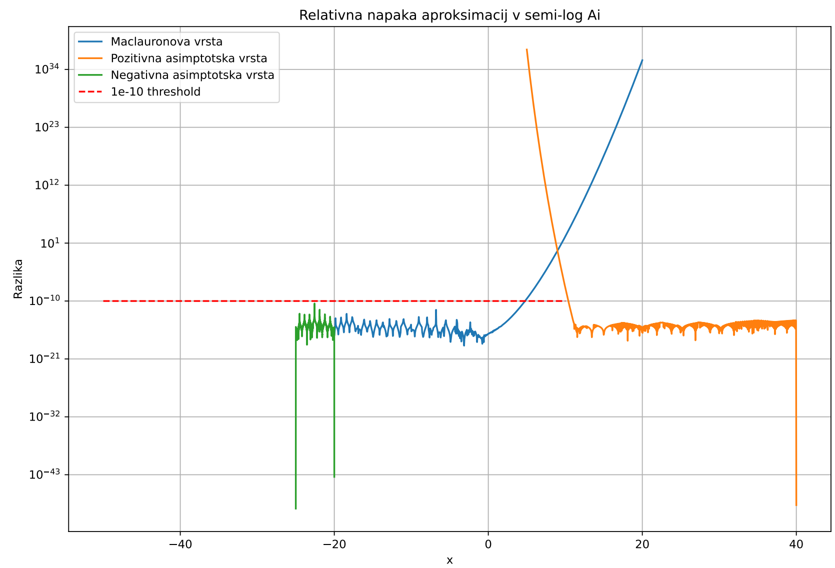
# 2 Potek dela

Za rešitev te naloge sem uporbil programski jezik Python. Ideja mojega reševanja je bila naslednja. Najprej sem vpleljal vse funckije, v moj program kar po definiciji, da bom imel za nadalnje korake neko referenco. Računanje sem optimiziral, tako da sem vse vrste prevedel v rekurzivni zapis, s pomočjo katerega sem znižal število operacij. Za rekurzivni zapis sem moral poenostaviti ulomek oblike $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ za vse aprokcimacijske funkcije $f, g, L, P, Q$, kjer so $a_n$ koeficienti pred vsakim členom v dani vrsti. Ko sem imel vse funkcije zapisane rekurzivno, sem začel računati in si izrisovati absolutne in relativne napake med referenčno funkcijo in aproksimirano funkcijo.

## 2.1 Funkcija Ai

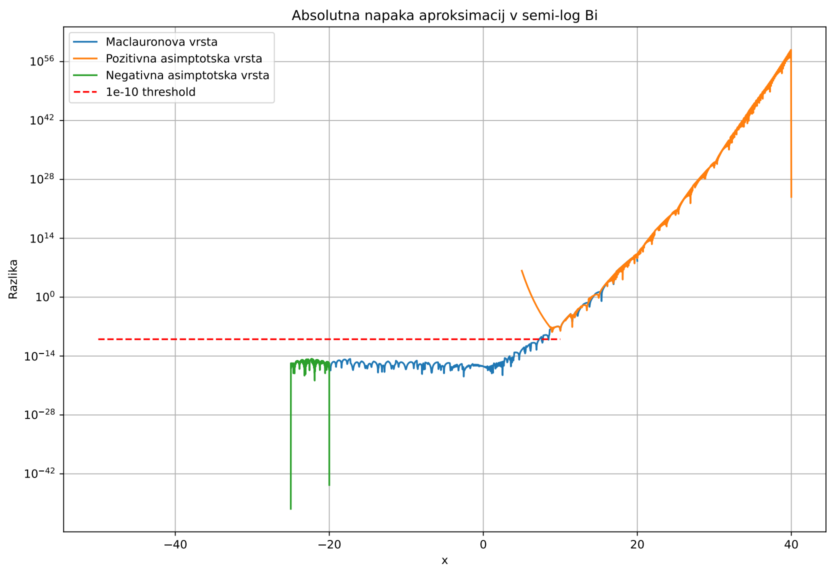
Funkcija Ai se je iskazala, kot bolj pohlevna v primerjavi z Bi. Zanimivo je obnašanje v obeh ekstremih. Ko gremo proti $-\infty$ izgleda, kot da sta absolutna in relativna napaka konstantni glede na $x$. Proti $+\infty$ se pa absolutna napaka ustrajno niža, med tem ko relativna napaka ostaja konstantna.

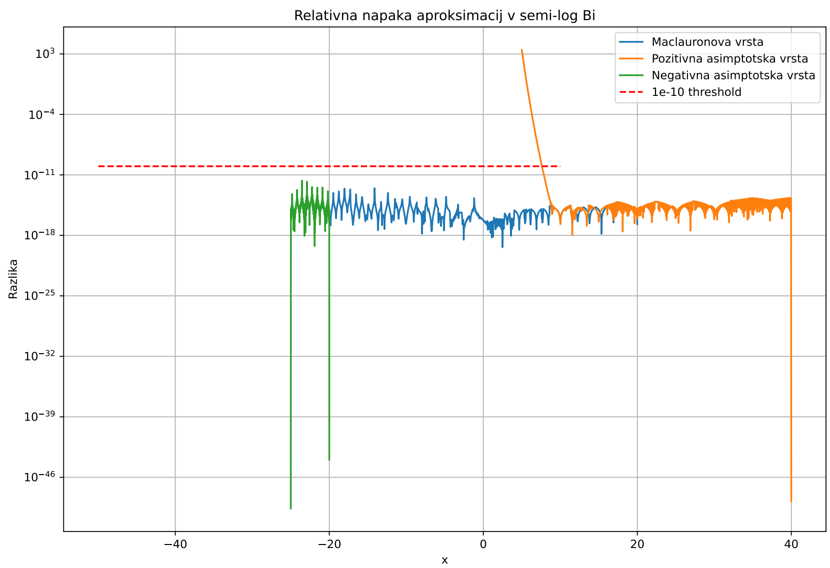


## 2.2 Funkcija Bi

Iz grafa za absolutno napako je razvidno, da njegova vrednost divergira, kar je ravno nasprotno od funkcije Ai. Nasprotno vedenje lahko pričakujemo, saj se sami funkciji obnašata čisto drugače v pozitivnih eksremih, ena se ustali in konvergira proti 0, med tem ko druga ekplodira v $\infty$. Ampak ko pogledamo relativno napako, vidimo da se ne spreminja in je konstantno pod vrednostjo $10^{-10}$, kar je praktično identično vedenje, kot pri funkcij Ai.



## 3 Izpolšave

Mogoče najbolj trivialna izpolšava, bi bila znižanje natančnost mest, saj bi s tem pohitril računanje. Poleg tega, bi lahko pogledal kakšno odstopanje ima sami referenčni funkciji glede na ta pravi $\mathrm{Ai}, \mathrm{Bi}$. Lahko bi tudi dodal logiko, ki bi mi omejila, do katerega člena bi računal svojo vrsto, s tem bi si prihranil čas, ki bi ga drugač uporabil za prazno računanje. Naletel sem tudi na težavo, da so zelo velike številke v pythonu interperirane kot neskončno. Ta problem bi se dalo rešiti, če bi računal svoje vrednosti pod logaritmom.

## 4 Zaključek

Opazil sem, da pri relativnem odsopanju je preprosto priti do vrednosti pod $10^{-10}$, pri funkciji Ai in Bi. Absolutna napaka, se pa obnaša dosti drugače, pri Ai se spušča in pri Bi raste čez vse meje.