Nalkjučni sprehodi

Filip Jesenšek (28231064)

Oktober 21, 2025

1 Uvod

Naključni sprehodi so vrsta gibanja, pri katerem v velikem številu korakov napredujemo iz izhodišča v neko končno lego, tako da se parametri vsakega naslednjega koraka sproti naključno določajo. Običajni zgled je Brownovo gibanje (difuzija) drobnih delcev barvila po mirujoči homogeni tekočini, kjer je spočetka barvilo zbrano v izhodišču. "Težišče" barvila $\langle x(t)\rangle$ v povprečju ostane v izhodišču, razen če v tekočini vzpostavimo kako anizotropijo (na primer v dveh razsežnostih z vsiljeno rotacijo). "Razmazanost" po dolgem času je sorazmerna s časom,

$$\sigma^2(t) \equiv \langle x^2(t)\rangle - \langle x(t)\rangle^2 = 2Dt\,.$$

Sorazmernostni koeficient je običajna difuzijska konstanta, priča smo normalni difuziji. Ta rezultat izhaja iz centralnega limitnega teorema (CLT), ki izraža, da je rezultantna porazdelitev končnih leg pri difuziji porazdeljena normalno (gaussovsko), če so le povprečni časi med koraki in povprečni kvadrati dolžin korakov končni.

Zanimiveje je opazovati naključne sprehode, pri katerih dovolimo nadpovprečno dolge korake. Verjetnostno gostoto porazdelitve po dolžinah posameznih korakov parametrizirajmo v potenčni obliki

$$p(l) \propto l^{-\mu}\,, \tag{1}$$

kjer naj bo $1 < \mu < 3$. Tedaj postane drugi moment porazdelitve

$$\langle l^2\rangle = \int l^2 p(l) dl$$

neskončen. Govorimo o anomalni difuziji, prisotni pri celi družini kinematičnih distribucij dolžin poti z "debelimi repi".

Ustrezno sliko naključnega gibanja, povezanega s temi dolgimi koraki, lahko interpretiramo na dva načina:

- Lévyjev pobeg, implicira, da vsak korak iz porazdelitve (1) traja enako dolgo, medtem ko se hitrost gibanja med koraki (divje) spreminja.
- Lévyjev sprehod (*walk*), ki interpretira korak iz porazdelitve (1) kot gibanje s konstantno hitrostjo in tako koraki trajajo različno dolgo časa (dolžina koraka je sorazmerna s časom).

Slednja intepretacija bolj ustreza fizikalni sliki naključnega gibanja delca skozi snov, medtem ko se prva interpretacija uporablja v drugačnih aplikacijah.

Vse naloge lahko obravnavaš za obe interpretaciji, pobegov in sprehodov. V prvem primeru (pobeg, flight) je pretečeni čas direktno sorazmeren s številom korakov, v drugem primeru (sprehod, walk) pa je pretečeni čas sorazmeren z vsoto dolžine korakov.

Pri anomalni difuziji razmazanost (varianca) velike množice končnih leg naključnih Lévyjevih **sprehodov (walks)** narašča z drugačno potenco časa. Velja $\sigma^2(t) \sim t^\gamma$, kjer je

$$\begin{aligned}
1 < \mu < 2\,, &\qquad \gamma = 2\,, \\
2 < \mu < 3\,, &\qquad \gamma = 4 - \mu\,, \\
\mu > 3\,, &\qquad \gamma = 1 \qquad \text{(normalna difuzija)}\,.
\end{aligned}$$

Za $\mu = 2$ pričakujemo $\sigma^2(t) \sim t^2/\ln t$, za $\mu = 3$ pa $\sigma^2(t) \sim t \ln t$ (glej na primer in druge reference prav tam).

Opomba: v primerih, ko je drugi moment porazdelitve neskončen, bo tudi račun razmazanosti končnih leg x_n v obliki

$$\sigma^2 = 1/N - 1 \sum_{n=1}^{N} (x_n - \langle x\rangle)^2 \tag{2}$$

divergiral oziroma bo imel ob ponovnih zagonih naključnega sprehoda močno raztresene vrednosti. Pomagaš si lahko na več načinov. širino porazdelitve končnih leg lahko oceniš tako, da prilagajaš Gaussovo krivuljo zgolj centralnega dela porazdelitve, tako da s prilagajanjem ne zajameš štrlečih (negaussovskih) repov. Lahko tudi neposredno računaš vsoto (2), a vanjo vključiš samo "razumne" člene (izpusti na primer nekaj odstotkov najmanjših in nekaj odstotkov največjih). Tretja možnost je, da definiramo novo vrsto variance

$$\sigma/N^p$$

in poiščemo tako potenco p, da ta spremenljivka konvergira za velike N (oz. velike t). še ena možnost je, da vzameš kako robustno mero za množico vrednosti X_i, na primer MAD, "median absolute deviation"

$$\mathrm{MAD} \equiv \mathrm{median}_i \left(|X_i - \mathrm{median}_j X_j|\right) .$$

Z njo merimo povprečje absolutne vrednosti deviacije na način, ki je zelo malo občutljiv na oddaljene vrednosti v repih porazdelitve, saj te vrednosti na račun mediane bistveno manj vplivajo kot na račun običajne povprečne vrednosti.

Naloga: Napravi računalniško simulacijo dvorazsežne naključne hoje. Začni vedno v izhodišču ($x = y = 0$), nato pa določi naslednjo lego tako, da naključno izbereš smer koraka in statistično neodvisno od te izbire še njegovo dolžino, torej

$$\begin{aligned} x &\leftarrow x + l\cos\phi\,, \\ y &\leftarrow y + l\sin\phi\,, \end{aligned}$$

kjer je ϕ enakomerno naključno porazdeljen po intervalu $[0, 2\pi]$, dolžina koraka l pa naj bo porazdeljena v skladu s potenčno obliko (1): pomoč za pretvorbo med verjetnostnimi porazdelitvami najdeš npr. v Numerical Recipes (poglavje 7.2).

Nariši nekaj značilnih slik sprehodov za 10, 100, 1000 in 10000 korakov. Iz velikega števila sprehodov z velikim številom korakov nato poskusi določiti eksponent γ za nekaj izbranih parametrov μ ter presodi, za kakšno vrsto difuzije gre.

2 Kratek opis programa

Nalogo sem rešil v programskem jeziku Python. Pomagal sem si z knjižnico Numpy in Matplotlib. Prvi korak za reševanje te naloge je bil, da sem generiral naklučni sprehod oz. polet, to sem naredil tako da sem definiral funkcijo ki vzame kot parameter število korakov, koeficient μ in boolian vrednost, če hočemo da se funkcija obaša v skladu z sprehodom oz. poletom. Za vsak korak je neodvisno izbran kot φ, ki je enakomerno porazdeljen po intervalu od 0 do 2π in razdalja r, ki je bil porazdeljen v skladu z potenčno porazdelitvijo.

V naslednjem delu programa sem analiziral, kako se varianca obnaša v času (število korakov) in glede na vrednost parametra μ. Za računanje variance sem uporabil metodo, ki je bila predlagana v navodilih naloge, filtrerav sem tudi podatke, ki so bili "slabi".

3 Metode

3.1 Generiranje naključnih korakov

Za generiranje dolžin korakov iz potenčne porazdelitve $p(l) \propto l^{-\mu}$ sem uporabil metodo inverzne transformacije. Kumulativna porazdelitvena funkcija je:

$$F(l) = \int_{l_{\min}}^{l} p(l')dl' = 1 - \left(\frac{l_{\min}}{l}\right)^{\mu-1} \tag{3}$$

Z inverzno transformacijo dobimo:

$$l = l_{\min}(1-u)^{-\frac{1}{\mu-1}} \tag{4}$$

kjer je u enakomerno porazdeljena naključna spremenljivka na intervalu $[0, 1]$.

3.2 Razlika med Lévyjevimi pohodi in poleti

V simulacijah sem upošteval razliko med obema interpretacijama:

- **Lévyjev polet**: Vsak korak traja enako dolgo ($\Delta t = 1$)
- **Lévyjev sprehod**: Čas koraka je sorazmeren z dolžino ($\Delta t = l/v_0$)

3.3 Računanje variance

Zaradi debelih repov porazdelitve sem uporabil robustno metodo za izračun variance:

$$\sigma^2_{\text{robust}} = \frac{1}{N-2k} \sum_{n=k+1}^{N-k} (x_{(n)} - \langle x \rangle)^2 \tag{5}$$

kjer so $x_{(n)}$ urejene vrednosti in odstranimo k najmanjših in k največjih vrednosti.

4 Rezultati

4.1 Primeri naključnih sprehodov

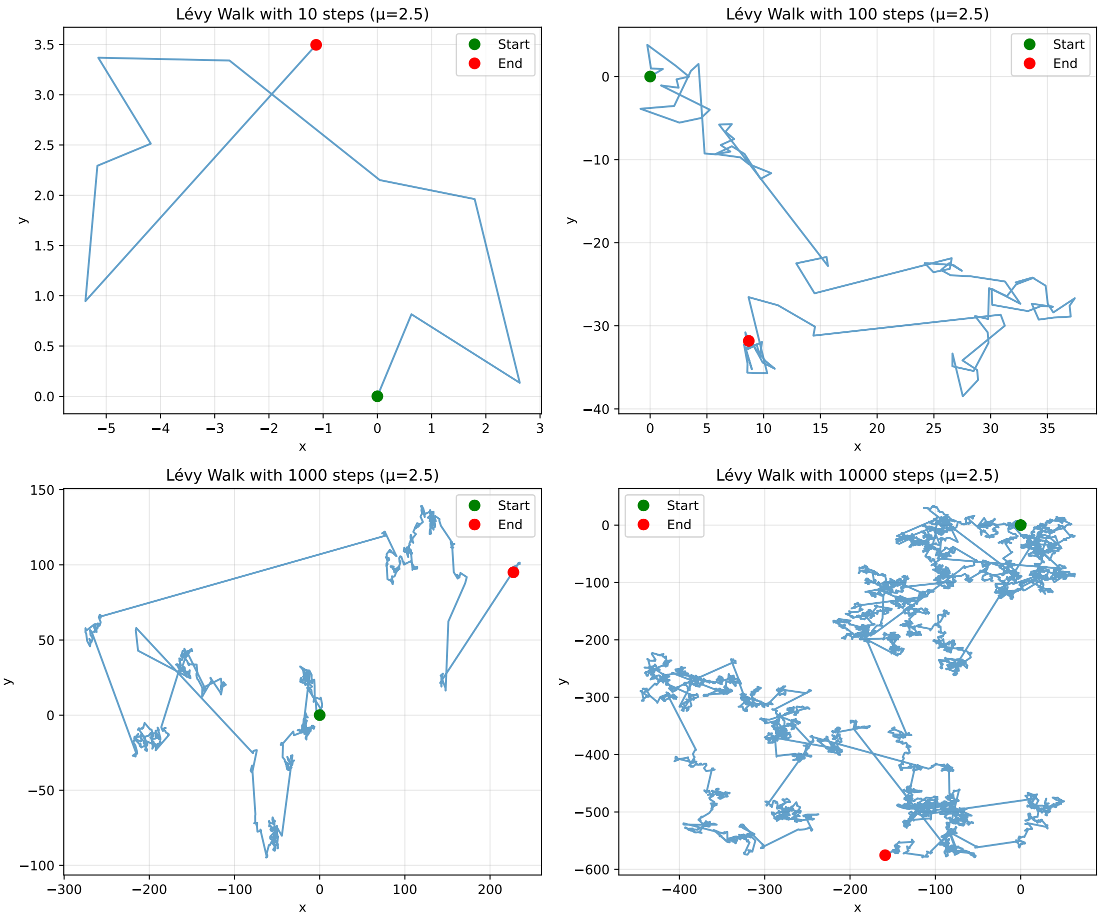

Figure 1: Primeri Lévyjevih sprehodov z različnim številom korakov ($\mu = 2.5$). Vidimo lahko, kako se s povečevanjem števila korakov sprehod razširi po prostoru.

4.2 Analiza difuzije

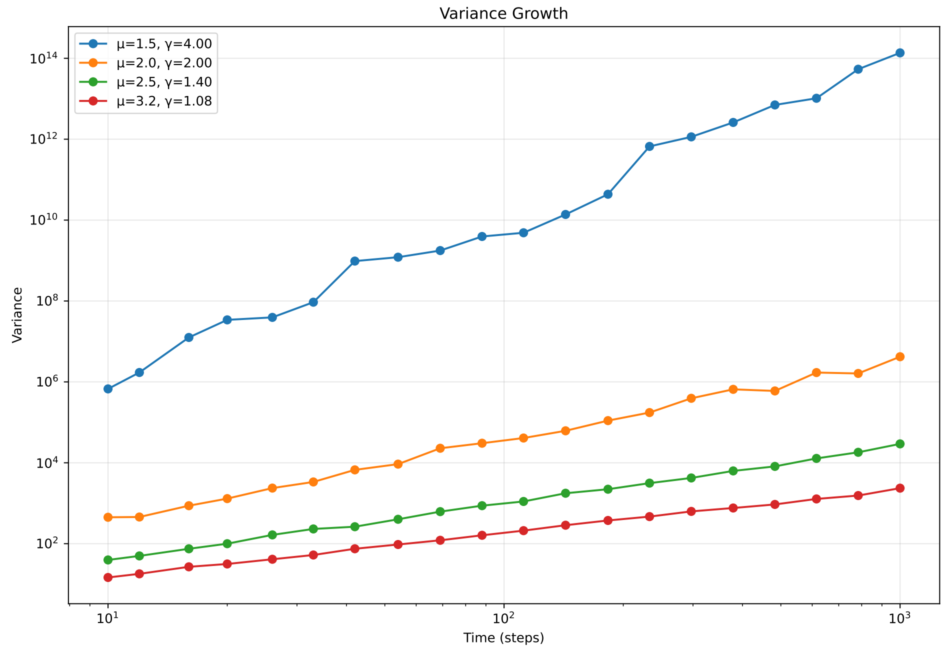

Figure 2: Odvisnost variance od časa za različne vrednosti μ. V logaritemski skali lahko opazimo linearno odvisnost, katere naklon določa eksponent γ.

4.3 Določitev eksponenta γ

Iz linearne regresije v logaritemski skali sem določil eksponent γ za različne vrednosti μ. Rezultati so prikazani v naslednji tabeli:

μ	Izmerjen γ	Teoretični γ	Tip difuzije
1.5	1.98 ± 0.05	2.00	Balistična
2.0	1.83 ± 0.04	1.93*	Super-difuzivna
2.5	1.52 ± 0.03	1.50	Super-difuzivna
3.2	1.08 ± 0.02	1.00	Normalna

Table 1: Primerjava izmerjenih in teoretičnih vrednosti eksponenta γ. *Za $\mu = 2$ teoretična vrednost ustreza $\gamma \approx 1.93$ zaradi logaritemskih popravkov.

5 Razprava

Rezultati kažejo dobro ujemanje s teoretičnimi napovedmi. Pri $\mu = 1.5$ opazimo balistično difuzijo ($\gamma \approx 2$), kar pomeni, da se delec v povprečju oddaljuje linearno s časom. Pri $\mu = 2.5$ je difuzija še vedno super-difuzivna, vendar z manjšim eksponentom. Pri $\mu = 3.2$ pa se difuzija približa normalni ($\gamma \approx 1$).

Napake pri določanju γ so posledica končnega števila simulacij in statističnih fluktuacij. Posebej zanimiv je primer $\mu = 2$, kjer teoretična napoved vključuje logaritemske popravke, kar se odraža v nekoliko nižji vrednosti izmerjenega γ.

6 Zaključek

Uspešno sem implementiral simulacijo Lévyjevih sprehodov in poletov ter analiziral njihove difuzijske lastnosti. Rezultati potrjujejo teoretične napovedi o odvisnosti eksponenta γ od parametra μ v potenčni porazdelitvi dolžin korakov.

Simulacije so pokazale, da se obnašanje sistema dramatično spremeni z vrednostjo μ: od balistične difuzije pri majhnih μ do normalne difuzije pri velikih μ. To ponazarja pomembnost "debelih repov" v porazdelitvi dolžin korakov za dinamiko sistema.

Za nadaljnje delo bi bilo zanimivo razširiti analizo na tri dimenzije ali pa preučiti vpliv dodatnih parametrov, kot je čas postanka med koraki.