

## Содержание

<b>1</b>	<b>Бинарное дерево поиска</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Scapegoat tree</b>	<b>3</b>
2.1	Структура дерева . . . . .	3
2.2	Время работы . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Splay tree</b>	<b>5</b>
3.1	Общая структура дерева . . . . .	5
3.2	Splay . . . . .	6
<b>4</b>	<b>Об оффлайн деревьях поиска: введение</b>	<b>11</b>
4.1	Оффлайн деревья поиска и геометрическое представление . . . . .	11
4.2	Эквивалентность BST-алгоритмов и arborally satisfiable множеств . . . . .	13
4.3	«Онлайн-эквивалентность» BST-алгоритмов и arborally satisfiable множеств . . . . .	17
<b>5</b>	<b>Об оффлайн деревьях поиска: нижняя граница времени работы, геометрическое представление</b>	<b>23</b>
5.1	Основные определения и предваряющие результаты . . . . .	23
5.2	Оценка снизу числа OPT . . . . .	24
5.3	Более практичная оценка снизу . . . . .	27
5.4	Оценка снизу через число перебежек . . . . .	27
<b>6</b>	<b>Tango деревья</b>	<b>28</b>
6.1	Описание работы структуры . . . . .	29
<b>7</b>	<b>Link-Cut trees</b>	<b>31</b>
7.1	Описание структуры, план действий . . . . .	31
7.2	Выражение операций на дереве через операции на путях . . . . .	32
7.3	Операции на путях . . . . .	33
<b>8</b>	<b>Mergeable trees</b>	<b>35</b>
8.1	Описание структуры и чего мы хотим от этой структуры . . . . .	35
8.2	Реализация merge . . . . .	37
8.3	Merge без операций cut . . . . .	39
8.3.1	Новая структура дерева . . . . .	40
8.3.2	Link . . . . .	41
8.3.3	Merge . . . . .	43
8.3.4	Поисковая структура на путях . . . . .	44
<b>9</b>	<b>Динамизация структур данных</b>	<b>46</b>
9.1	Динамизация для decomposable задач поиска . . . . .	46
9.2	Динамизация для invertible задач поиска . . . . .	49
9.3	Динамизация для других задач поиска . . . . .	50

<b>10 Структуры данных и путешествия во времени</b>	<b>51</b>
10.1 Персистентность . . . . .	51
10.2 Ретроактивность . . . . .	54
10.3 Нижняя оценка на ретроактивизацию структуры в модели word RAM .	57
<b>11 От частичной ретроактивности к полной</b>	<b>58</b>
11.1 Пессимистический результат . . . . .	58
11.2 Позитивные результаты . . . . .	59
<b>12 Ретроактивность для конкретных структур данных</b>	<b>61</b>
12.1 Двухнаправленная очередь . . . . .	61
12.2 Очередь с приоритетом: описание работы с элементами . . . . .	63
12.3 Очередь с приоритетом: основная теорема . . . . .	64
<b>13 Структуры целочисленных данных</b>	<b>65</b>
13.1 Деревья ван Эмде Боаса . . . . .	65
13.2 X- и Y-быстрые деревья . . . . .	68
<b>14 Static Fusion Tree</b>	<b>68</b>
14.1 Случай, когда $x$ и $x_i$ имеют длину не более $\frac{w}{B}$ . . . . .	69
14.2 Случай больших $x_i$ . . . . .	70
14.2.1 Как понять, какие биты «интересные»? . . . . .	70
14.2.2 Поиск старшего бита в числе $s$ . . . . .	71
14.2.3 Нахождение позиции $x$ среди $x_i$ . . . . .	72

## 1 Бинарное дерево поиска

*Записал: Борис Золотов*

В каждом узле бинарного дерева поиска хранятся *ключ*  $a$  и два поддерева, правое и левое. Все ключи в левом поддереве не превосходят  $a$ , а в правом — не меньше  $a$ . Алгоритм поиска — начиная с корня, сравниваем искомый ключ с ключом в узле, в зависимости от сравнения спускаемся в правое или в левое поддерево.

Вставка в бинарное дерево — поиск + вставляем туда, куда пришёл поиск. Чтобы удалить элемент — ставим на его место самый левый элемент в его правом поддереве.

Проблема такой наивной структуры — может вместо дерева получиться палка (если, например, ключи приходят в порядке по убыванию), и поиск будет занимать  $\mathcal{O}(n)$ . Красно-чёрные деревья, например, следят за тем, чтобы дерево всегда имело высоту  $\mathcal{O}(\log n)$ .

**Определение 1.** Дерево называется идеально сбалансированным (perfectly balanced tree), если размеры детей каждой ее вершины отличаются не больше, чем на 1.

Хотим научиться поддерживать  $\pm$ баланс, не храня много дополнительной информации (такой, как атрибуты red/black) — в идеале,  $\mathcal{O}(1)$  дополнительных данных, какие-нибудь несколько чисел про дерево в целом. Это умеют две структуры.

## 2 Scapegoat tree

Записал: Борис Золотов

Источники: [GR93; And89]. Мы в основном опираемся на [GR93].

### 2.1 Структура дерева

Зафиксируем константу  $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ . Будем рассматривать структуру данных, в которой хранится дерево *tree*. Также будем хранить текущее количество узлов в дереве — *size*. У каждого узла *node* есть дети *left*, *right* и ключ *key*.

**structure** TREE

*root*

*size*

*maxSize*

**structure** NODE

*left, right*

*key*

Мы хотим, чтобы глубина дерева была  $\mathcal{O}(\log n)$ , где  $n$  — количество узлов в дереве. Для этого наведем несколько условий

**condition**  $\alpha$ -WEIGHT(node  $x$ )

$$\max\{\text{size}(x.\text{left}), \text{size}(x.\text{right})\} \leq \alpha \cdot \text{size}(x)$$

**condition**  $\alpha$ -HEIGHT(node  $x$ )

$$\text{depth}(x) \leq \left\lfloor \log_{\frac{1}{\alpha}} \text{size} \right\rfloor + 1$$

**condition** WEAK  $\alpha$ -HEIGHT(node  $x$ )

$$\text{depth}(x) \leq \left\lfloor \log_{\frac{1}{\alpha}} \text{maxSize} \right\rfloor + 1 \quad \triangleright \text{maxSize will be defined later}$$

Желаемая максимальная высота дерева ( $n$  — количество узлов с ключами) —  $\mathcal{O}(\log_{\frac{1}{\alpha}} n)$ .

Если  $\alpha = \frac{1}{2}$ , то результатом будет идеально сбалансированное дерево, то есть  $\alpha$  — это, грубо говоря, разрешённое отклонение размера поддеревьев от состояния баланса.

Узел называется *глубоким*, если он нарушает weak  $\alpha$ -height condition. Глубокие узлы мы не любим и каждый раз, когда они у нас будут появляться, мы будем переподвешивать часть дерева так, чтобы они переставали быть глубокими.

Заметим, что если дерево  $\alpha$ -weight balanced, то оно и  $\alpha$ -height balanced. Обратного следствия нет, потому что может быть «один сын справа, а слева сбалансированное поддерево».

Иногда мы будем перестраивать все дерево. Чтобы реализовать вставку и удаление, нам также потребуется хранить величину *maxSize* для всего дерева *tree*. *maxSize* — штука, отвечающая какой максимальный размер был у дерева с момента последней его полной перестройки. (То есть, кроме собственно дерева с ключами, мы храним дополнительно только *size* и *maxSize* — два числа.) Также, нам понадобится еще один инвариант для нашего дерева

*Инвариант:*  $\alpha \cdot \text{maxSize} \leq \text{size} \leq \text{maxSize}$

Заметим, что из этого инварианта следует, что глубина дерева без глубоких вершин не превосходит  $\mathcal{O}(\log n)$ .

*Удаление:* просто удаляем. Проверяем, не нарушился ли инвариант. Если нарушился — просто перестроим всё дерево с нуля, сделав массив с ключами за линию и соорудив из него идеально сбалансированное дерево.  $size$  при этом уменьшается на 1, а  $maxSize = size$ .

*Вставка:* сначала стандартная вставка, добавляем ключ в лист. При этом  $size$  увеличивается на 1,

$$maxSize := \max\{maxSize, size\}.$$

Может, однако, оказаться так, что новый узел  $x$  оказался глубоким. Тогда рассмотрим путь от  $x$  до корня  $a_0 \dots a_H$  и найдём среди этих узлов (просто за линию, посчитав количество) самый нижний, не сбалансированный по весу (такой найдётся, докажем) и перестраиваем (глупо, за линию) дерево под ним.

**Теорема 1.** Среди  $a_0 \dots a_H$  всегда найдётся узел, не сбалансированный по весу (козёл отпущения).

*Доказательство.* Пусть нет, тогда  $size(a_i) \leq \alpha \cdot size(a_{i+1})$ . Тогда  $size(x) \leq \alpha^H \cdot size(T)$ . Прологарифмируем это неравенство по основанию  $\frac{1}{\alpha}$ :

$$0 \leq -H + \log_{\frac{1}{\alpha}} n$$

□

**Теорема 2.** При вставке элемента сохраняется сбалансированность по высоте.

*Доказательство.* Интересен только случай, когда вставленный элемент глубокий. Достаточно показать, что при перестройке глубина перестроенного поддерева уменьшится. Заметим, что у нас в каждый момент времени бывает не более одного глубокого элемента (при вставке может появиться только один, вот-вот вставленный, а при удалении  $maxSize$  меняется только если все дерево было перестроено), значит, глубина поддерева может остаться прежней тогда и только тогда, когда выбранное поддерево состояло из полного поддерева с добавленным к нему одним глубоким элементом. Но такое поддерево удовлетворяет условию сбалансированности по весу, а значит, мы его не могли выбрать. □

Корректность мы показали, но у нас остались операции перестройки, которые работают в худшем случае за линию. Покажем, что они хорошо амортизируются.

## 2.2 Время работы

Сначала разберемся с перестройкой дерева при удалении. Эта операция линейна и происходит не чаще, чем раз в  $\alpha \cdot size(T)$  операций удаления, а значит, ее амортизированная сложность  $\mathcal{O}(1)$ .

Осталась только операция перестройки нижнего несбалансированного поддереза при вставке. Пусть корень этого дерева —  $x$ . У этого поддереза есть больший ребенок (не умаляя общности будем считать, что он левый) и меньший (соответственно, правый). Рассмотрим все операции вставки в левое поддерево и удаления из правого поддереза с момента последней перестройки какого-либо родителя  $x$ . Для того, чтобы  $x$  перестал быть сбалансированный по высоте, их количество должно быть хотя бы линейно от  $\text{size}(x)$ . Сопоставим все эти операции перестройке дерева. Заметим, что каждая вставка и удаление была сопоставлена не более чем  $\mathcal{O}(\log n)$  перестройкам, значит, амортизированная сложность этих операций не увеличилась. При этом каждой перестройке мы сопоставили линейное количество вставок и удалений, значит, амортизированная сложность всех перестроек не превосходит  $\mathcal{O}(1)$ .

Таким образом, операции вставки и удаления работают за амортизированное время  $\mathcal{O}(\log n)$ .

### 3 Splay tree

Записал: Никита Гасево

Оригинальная статья: [ST85]

#### 3.1 Общая структура дерева

В этом дереве мы каждый раз, когда захотим что-то сделать с вершиной, будем поднимать ее до корня (операция `splay`). В самом дереве в этот раз мы можем не хранить ничего, кроме корня `root`. Но часто хочется уметь быстро считать размер дерева, для этого можно хранить отдельную переменную `size` для всего дерева.

```

structure TREE
  root
  size                                     > optional
structure NODE
  left, right
  key

```

Выразим сначала операции `insert` и `delete` через операцию `splay`, а потом будем разбираться со `splay`. Для `delete` нам понадобится операция `splay_front(node)`. Эта операция делает `splay` для наименьшего ключа в поддереве.

```

1: procedure INSERT( $x$ )
2:   standard_insert(x)
3:   splay(x)
4: procedure GET( $x$ )
5:   splay(x)
6: procedure DELETE( $x$ )
7:   splay(x)
8:   splay_front(root.right)
9:   standard_delete(x)

```

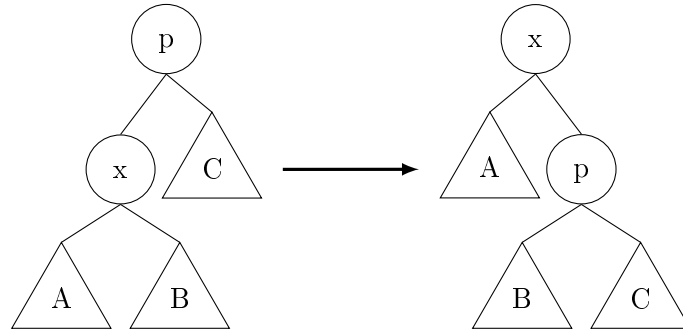


Рис. 1: Zig

Два вызова функции `splay` при удалении нужны для того, чтобы правый сын корневой вершины не имел левого сына (потому что он содержит наименьший ключ в своем поддереве) и операция `standard_delete(x)` работала за  $\mathcal{O}(1)$  (потому что она просто возьмет этого правого сына и поставит на место удаленного корня). Еще стоит отметить, что даже при простом доступе к вершине мы вызываем операцию `splay`, это нужно потому что наше дерево может иметь довольно большую глубину во время работы, а оценка у нас будет только на амортизированную сложность операции `splay`.

Ниже мы будем оценивать сложность `splay` при фиксированном множестве ключей в дереве. Покажем, что этого достаточно. Удаление вершины из дерева испортит время работы очевидно не сможет, а при добавлении мы спускаемся на полную глубину дерева и можно считать, что добавленная вершина была в дереве всегда, просто мы ее не трогали до момента добавления. Тут стоит обратить внимание на то, что с таким подходом, если у нас был какой-то ключ, мы его удалили, а потом добавили обратно, то в оценке времени работы их надо рассматривать как два различных ключа.

### 3.2 Splay

Итак, нам надо научиться понимать вершину в корень. Это делается при помощи нескольких видов вращений дерева. Все вращения в дальнейшем будем рассматривать с точностью до симметрии. Простейшее вращение называется `zig` (см. рис. 1). Легко видеть, что это вращение поднимает вершину  $x$  на один уровень выше. При помощи одного этого вращения можно поднять вершину в корень, но для амортизационного анализа нам этого не хватит, поэтому мы будем делать сразу двойные вращения.

Двойные вращения бывают двух видов: `zig-zig` (рис. 2) и `zig-zag` (рис. 3). Оба эти вращения реализуются при помощи пары вращений `zig`, но для того, чтобы выразить `zig-zig`, надо сначала выполнить `zig` от вершины  $p$ , и только потом от  $x$ . `Zig-zag` при этом выражается как два вызова `zig` от  $x$ . Стоит отметить, что при `splay` мы не сможем выполнить двойное вращение, если интересующая нас вершина непосредственный сын корня, тогда мы должны сделать `zig` и не забыть его посчитать при анализе (но он может быть только один).

Для анализа, мы воспользуемся методом потенциалов. Для начала наведем функцию  $w: \text{nodes} \rightarrow \mathbb{R}_+$ . На нее тоже будут какие-то условия. Про то, какой она может

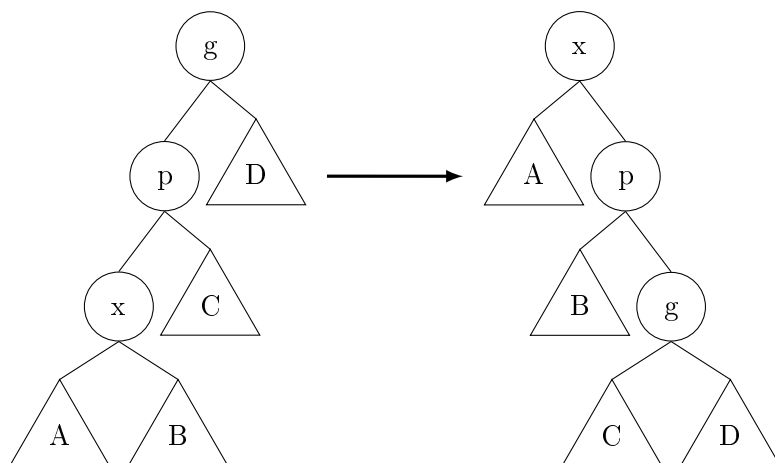


Рис. 2: Zig-zig

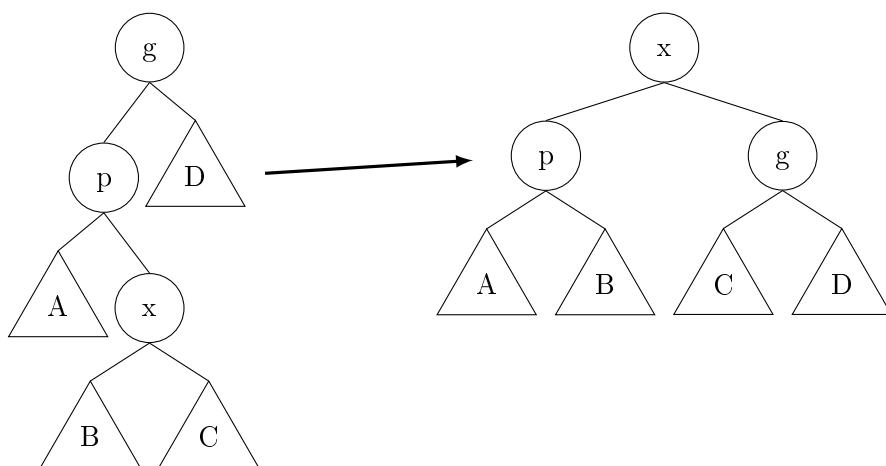


Рис. 3: Zig-zag

быть, поймем позже, пока можно считать, что она всегда возвращает 1, реально менять ее придется только для следствий. Определим функцию «размера» поддерева  $s(x) = \sum_{v \in \text{subtree of } x} w(v)$  и функцию «ранга»  $r(x) = \log_2 s(x)$  (логарифм двоичный, это неожиданно важно, но дальше основание писать не будем), а функцией потенциала всего дерева  $T$  будет  $\Phi(T) = \sum_{x \in T} r(x)$ . Для того, чтобы метод потенциалов работал, нужно чтобы  $\Phi$  всегда было неотрицательно (ну или придется оценить, насколько сильно оно бывает отрицательным и прибавить к асимптотике). При  $w \equiv 1$  это очевидно, а вообще это надо запомнить как первое ограничение на  $w$ . Амортизированная стоимость операции  $\text{splay}$   $\text{am.splay} = \Delta\Phi + \#\text{rotations}$  (да, это просто определение). Пусть мы выполнили один  $\text{splay}$ . Теперь  $r(x)$  и  $s(x)$  будут обозначать значения до вызова операции, а  $r'(x)$  и  $s'(x)$  — после. Тогда на самом деле мы хотим доказать следующую теорему:

**Теорема 3.**  $\text{am.splay} \leq 3(r'(x) - r(x)) + \mathcal{O}(1)$

*Доказательство.* Надо оценить  $\Delta\Phi$  для каждого из вращений. Узлы  $x, p, g$  как на рис. 1, 2 и 3, соответственно.

*Zig:*

$$\begin{aligned} \Delta\Phi &= r'(p) - r(p) + r'(x) - r(x) \\ &= r'(p) - r(x) && \text{поскольку } r'(x) = r(p) \\ &\leq r'(x) - r(x) && \text{поскольку } p \text{ ниже } x \text{ после вращения} \end{aligned}$$

Дополнительно стоит отметить, что  $r'(x) \geq r(x)$  поскольку слева написана сумма по большему множеству (слева суммируем все поддерево, а справа только часть), поэтому если мы вдруг захотим это умножить на какую-нибудь произвольно взятую константу 3, ничего не испортится.

*Zig-zig:*

$$\begin{aligned} \Delta\Phi &= r'(g) - r(g) + r'(p) - r(p) + r'(x) - r(x) \\ &= r'(g) + r'(p) - r(p) - r(x) \\ &\leq r'(g) + r'(x) - 2r(x) && \text{из структуры дерева} \\ &\leq 3(r'(x) - r(x)) - 2 && \text{поскольку } r'(g) + r(x) \leq 2(r'(x) - 1) \end{aligned}$$

Осталось показать, что  $r'(g) + r(x) \leq 2(r'(x) - 1)$ .

$$\begin{aligned} \frac{r'(g) + r(x)}{2} &= \frac{\log s'(g) + \log s(x)}{2} \\ &\leq \log \left( \frac{s'(g) + s(x)}{2} \right) && \text{неравенство Йенсена} \\ &= \log \left( \frac{s'(x) - w(p)}{2} \right) && \text{из структуры дерева} \\ &= \log(s'(x) - w(p)) - 1 \\ &\leq r'(x) - 1 \end{aligned}$$



*Zig-zag:*

$$\begin{aligned}
\Delta\Phi &= r'(g) - r(g) + r'(p) - r(p) + r'(x) - r(x) \\
&= r'(g) + r'(p) - r(p) - r(x) \\
&\leq r'(g) + r'(p) - 2r(x) && \text{из структуры дерева} \\
&\leq 3(r'(x) - r(x)) - 2 && \text{поскольку } r'(g) + r'(p) \leq 2(r'(x) - 1)
\end{aligned}$$

Доказательство неравенства  $r'(g) + r'(p) \leq 2(r'(x) - 1)$  в точности повторяет доказательство аналогичного неравенства выше.

Изменения потенциала от каждого двойного вращения мы оценили как  $3(r'(x) - r(x)) - 2$ . Все наши страдания были на самом деле направлены на то, чтобы получить двойку в конце. Теперь, когда мы просуммируем по всем вращениям при операции `splay`, мы получим оценку  $\Delta\Phi \leq 3(r'(x) - r(x)) - \#rotations + \mathcal{O}(1)$ , поскольку все промежуточные  $r(x)$  скомпенсируются, `zig` будет вызван не более одного раза, а в оценке двойных вращений есть слагаемое  $-2$ , которые просуммируются в количество одиночных вращений. Таким образом,  $\text{am.splay} = \Delta\Phi + \#rotations \leq 3(r'(x) - r(x)) + \mathcal{O}(1)$ , что нам и надо.  $\square$

Ниже мы будем считать, что наше дерево работает с ключами  $1, \dots, n$ , выполняет  $m$  операций, а  $W := \sum_i w(i)$ . Теперь нам надо выбрать  $w$ . Надо вспомнить какие условия ограничения мы насобирали на  $w$ . Ограничения у нас появлялись в двух местах: из определения  $w > 0$  (потому что мы потом хотим логарифмировать) и из метода потенциалов  $\Phi \geq 0$ . При  $w \geq 1$  потенциал неотрицателен автоматически, поскольку все слагаемые неотрицательны.

Теперь надо вспомнить как работает метод потенциалов. Пусть  $(x_j)$  — последовательность запросов. Воспользуемся теоремой 3.

$$\sum_{x_j} \Delta\Phi + \#rotations = \mathcal{O}\left(\sum_{x_j} r'(x_j) - r(x_j) + 1\right)$$

Тогда если потенциал находится в пределах  $\Phi_{\min} \leq \Phi \leq \Phi_{\max}$  время работы (эквивалентно, количество вращений) можно оценить следующим образом.

$$\#rotations = \mathcal{O}\left(\Phi_{\max} - \Phi_{\min} + \sum_{x_j} (r'(x_j) - r(x_j) + 1)\right) \quad (1)$$

В нашем случае  $\Phi_{\max} \leq n \log W$ , а  $r'(x_j) = \log W$ . Также, часто  $\Phi_{\min}$  будет равен нулю, но когда он будет отрицательным, это нужно будет отдельно добавить к асимптотике. Во всех дальнейших следствиях можно считать, что начальная конфигурация дерева может быть любой. А еще я буду довольно нагло писать знаки равенства между  $\mathcal{O}$ , формально их нужно понимать как равенство классов функций (да, не очень грамотно, зато понятно).

**Следствие 4** (Balance Theorem). *Время работы `splay` дерева на любой последовательности из  $m$  запросов  $\mathcal{O}(m \log n + n \log n)$ .*

*Доказательство.* Берем  $w(x) = 1$ . Воспользуемся формулой 1.

$$\mathcal{O}\left(n \log W + \sum_{x_j} (\log W + 1)\right) = \mathcal{O}(n \log n + m \log n)$$

□

**Следствие 5** (Static Optimality Theorem). Пусть  $q_x \geq 1$  — количество доступов к элементу  $x$ . Тогда время работы *splay* дерева  $\mathcal{O}\left(m + \sum_x q_x \log\left(\frac{m}{q_x}\right)\right)$ .

*Доказательство.* Берем  $w(x) = q_x$ .

$$\begin{aligned} \mathcal{O}\left(n \log W + \sum_{x_j} (\log W - \log q_{x_j} + 1)\right) &= \mathcal{O}\left(n \log m + m + \sum_{x_j} \log\left(\frac{m}{q_{x_j}}\right)\right) = \\ &= \mathcal{O}\left(n \log m + \sum_x q_x \log\left(\frac{m}{q_x}\right) + m\right) = \mathcal{O}\left(m + \sum_x q_x \log\left(\frac{m}{q_x}\right)\right) \end{aligned}$$

Последний переход следует из того факта, что  $q_x \log \frac{m}{q_x} \geq \log m$  при всех  $q_x \geq 1$ . □

Из этой теоремы следует, что *splay* деревья работают не хуже (с точностью до константного множителя, конечно), чем оптимальное статическое дерево поиска. Аналогичное утверждение про оптимальные динамические деревья остается открытой проблемой.

**Гипотеза 6** (Dynamic Optimality Conjecture). Пусть  $A$  — произвольное двоичное дерево поиска, которое может делать одиночные вращения (*Zig*, рис. 1), и обрабатывать запрос на доступ к вершине за  $\mathcal{O}(d)$ , где  $d$  — ее глубина. Обозначим  $A(S)$  — время работы  $A$  на последовательности запросов  $S$ . Тогда время работы *splay* дерева на последовательности  $S$  не превосходит  $\mathcal{O}(n + A(S))$ .

Для следующего следствия стоит вспомнить, что мы считаем, что элементы  $1 \dots n$ .

**Следствие 7** (Static Finger Theorem). Пусть  $f$  — некоторый фиксированный элемент, «*finger*». Тогда время работы  $\mathcal{O}\left(m + n \log n + \sum_{x_j} \log(|x_j - f| + 1)\right)$ .

*Доказательство.* Берем  $w(x) = \frac{1}{(|x-f|+1)^2}$ . Тогда  $W \leq \sum_{i \leq n} \frac{2}{i^2} = \mathcal{O}(1)$ , а потенциал может быть отрицательным, но не больше, чем на  $\mathcal{O}(n \log n)$ , поскольку  $w \geq \frac{1}{n^2}$ , это слагаемое мы можем просто искусственно добавить к потенциалу и, следовательно, асимптотике. □

**Теорема 8** (Dynamic Finger Theorem). Аналогично, но теперь  $f$ , «*finger*» — элемент, к которому обращались предыдущим запросом (и, следовательно, находящийся в корне). Тогда время работы  $\mathcal{O}\left(m + n + \sum_{x_j} \log(|x_j - f| + 1)\right)$ .

Мы не доказывали. Доказательство трудное и объемное, можно посмотреть в этих двух статьях: [Col+00; Col00].

**Следствие 9** (Working Set Property). Пусть  $t(x)$  — количество времени, которое прошло с последнего доступа к элементу  $x$ . Тогда время обработки последовательности запросов  $\mathcal{O}(m + n \log n + \sum_x \log(t(x) + 1))$ .

*Доказательство.* Берем  $w(x) = \frac{1}{(t+1)^2}$ . В этом случае сами веса меняются со временем, но их сумма остается постоянной. Аналогично доказательству Static Finger Theorem (следствие 7)  $W = \sum_{i \leq n} \frac{1}{i^2} = \mathcal{O}(1)$ , а потенциал бывает отрицательным не более, чем на  $\mathcal{O}(n \log n)$ .  $\square$

**Теорема 10** (Scanning Theorem or Sequential Access Theorem or Queue theorem). Доступ к элементам в порядке  $1, \dots, n$  работает  $\mathcal{O}(n)$ , т.е. за амортизированную единицу на запрос.

*Доказательство.* Следует из Dynamic Finger Theorem (Теорема 8).  $|x - f| = 1, m = n$ .  $\square$

## 4 Об оффлайн деревьях поиска: введение

*Записал: Владислав Макаров*

*Исходная статья: «The Geometry of Binary Search Trees» [Dem+09].*

### 4.1 Оффлайн деревья поиска и геометрическое представление

Пусть у нас есть двоичное дерево поиска над ключами  $1, 2, \dots, n$  (в частности, все ключи в дереве различны) и последовательность  $S = (s_1, s_2, \dots, s_m)$  запросов поиска к нему. При этом все запросы ищут ключ, который действительно есть в дереве, то есть  $1 \leq s_i \leq n$  для всех  $i$ . Запросы нам известны заранее и мы хотим построить такое дерево, чтобы минимизировать суммарное время, потраченное на то, чтобы ответить на эти запросы. При этом мы разрешаем модифицировать дерево с помощью вращений в процессе ответа на запросы.

Нам разрешено делать следующие вещи:

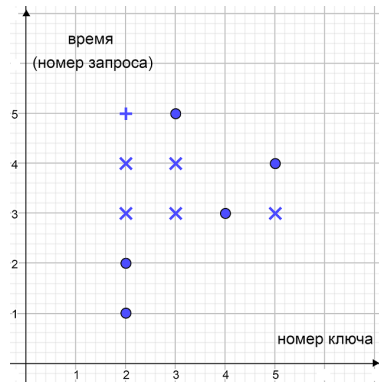
- 1) Переходить по указателю.
- 2) Делать одинарное вращение в этой вершине ( $\text{zig}(x)$ , он же  $\text{zag}(x)$ ).

Обработку каждого запроса мы начинаем в корне и хотим посетить вершину с запрошенным ключом.

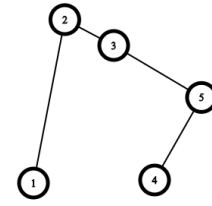
**Определение 2.** Последовательность таких действий (вместе с исходным деревом до всех запросов) для фиксированной последовательности запросов  $S$  называется *BST-алгоритмом*.

**Определение 3.** Цена операции поиска — количество посещённых узлов.

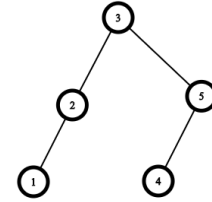
**Замечание.** Поскольку для того, чтобы сделать вращение в вершине, нам нужно её посетить, учитывать количество вращений в цене операции поиска не нужно, если мы считаем с точностью до константы.



(а) Геометрическое представление BST-алгоритма: жирными точками отмечены сами запросы, крестиками и плюсом — другие ключи, которые мы посещаем в процессе их обработки. От плюса можно избавиться, см. основной текст.



(b) Исходное дерево.



(c) Дерево после операции  $\text{zig}(3)$ .

Рис. 4: Пример геометрического представления BST-алгоритма

**Определение 4.**  $\text{OPT}(S)$  — минимальная суммарная цена выполнения BST-алгоритма, обрабатывающего  $S$ .

Значение  $\text{OPT}(S)$  мы не умеем искать (даже с точностью до мультипликативной константы) за полином от  $n$  и  $m$ . Впрочем, опровергать возможность вычисления  $\text{OPT}(S)$  за полином мы тоже не умеем, даже в предположении  $\text{P} \neq \text{NP}$ . Ясно, что задача о проверке неравенства  $\text{OPT}(S) \leq k$  лежит в  $\text{NP}$ .

Это можно переформулировать в геометрических терминах. Рассмотрим координатную плоскость с ключами по оси  $x$  и моментами времени (то есть номерами запросов) по оси  $y$ . Для данной последовательности запросов  $S$  отметим все точки  $(s_i, i)$  на плоскости (мы обязаны посетить ключ  $s_i$  при обработке  $i$ -того запроса, так как мы должны его найти). Также отметим все точки  $(k, i)$  такие, что мы посетили ключ  $k$  при обработке  $i$ -того запроса. Понятно, что стоимость данного BST-алгоритма — количество отмеченных точек.

**Определение 5.** Множество отмеченных точек — *геометрическое представление* данного BST-алгоритма.

**Замечание.** Понятно, что у разных BST-алгоритмов могут быть одинаковые представления.

На рисунке 4а видно геометрическое представление BST-алгоритма для последовательности запросов  $S = (2, 2, 4, 5, 3)$ , который не совершает никаких вращений, а в качестве исходного дерева использует дерево с рисунка 4b. От плюса (точки  $(2, 5)$ ) можно избавиться, если при обработке четвёртого запроса сделать операцию  $\text{zig}(3)$  и получить дерево с рисунка 4с (в таком дереве для обработки запроса найти ключ 3

не нужно посещать вершину с ключом 2, так как вершина с ключом 3 уже является корнем).

Про splay-деревья верят, что они оптимальны с точностью до мультипликативной константы, то есть что они посещают  $\mathcal{O}(\text{OPT}(S) + n)$  вершин при обработке любого списка запросов  $S$ . Это достаточно круто, так как splay-деревья не знают будущего, в отличие от оптимального алгоритма. Однако, доказывать это про splay-деревья не умеют.

**Определение 6.** Если  $a$  и  $b$  — точки на плоскости, то  $\text{rect}(a, b)$  — замкнутый (то есть содержащий границу) прямоугольник со сторонами, параллельными осям координат, (возможно, вырожденный), натянутый на точки  $a$  и  $b$  как на противоположные углы.

**Определение 7.** Множество  $E$  точек с целыми координатами на плоскости называется *arborally satisfiable*, если для любых точек  $a$  и  $b$  из  $E$  верно хотя бы одно из следующих трёх свойств:  $x(a) = x(b)$ ,  $y(a) = y(b)$  или  $\text{rect}(a, b)$  содержит точку из  $E \setminus \{a, b\}$ .

## 4.2 Эквивалентность BST-алгоритмов и arborally satisfiable множеств

**Теорема 11.** Если множество точек  $E$  соответствует какому-то BST-алгоритму, то оно *arborally satisfiable*.

*Доказательство.* Предположим противное. Пусть мы нашли две точки  $a$  и  $b$ , при этом  $x(a) \neq x(b)$ ,  $y(a) \neq y(b)$  и внутри  $\text{rect}(a, b)$  нет других точек  $E$ . Не умаляя общности,  $i := y(a) < y(b) =: j$ . Пусть  $c$  — наименьший общий предок  $a$  и  $b$  сразу после обработки  $i$ -того запроса. Есть два случая:

- 1) Если  $c = a$ , то мы должны были посетить  $a$  в какой-то момент из отрезка  $(i + 1, j]$ . Действительно, раз  $a$  является предком  $b$  после обработки  $i$ -того запроса, то либо  $a$  — всё ещё предок  $b$  сразу перед обработкой  $j$ -того запроса (и тогда мы должны посетить  $a$  просто для того, чтобы дойти до  $b$  из корня), либо вершина  $a$  перестала быть предком  $b$  в какой-то момент времени на отрезке  $(i + 1, j)$ , а для этого мы должны были её посетить и сделать вращение в её ребёнке. Противоречие.
- 2) Если  $c \neq a$ , то  $a$  и  $b$  лежат в разных поддеревьях  $c$ . Следовательно, по свойству двоичного дерева поиска,  $x(c) \in \langle x(a), x(b) \rangle$  (ключ вершины  $c$  должен лежать между ключами вершин  $a$  и  $b$ ; здесь  $\langle s, t \rangle$  это либо  $[s, t]$ , если  $s < t$ , либо  $[t, s]$  в противном случае). Раз мы посетили  $a$  при обработке  $i$ -того запроса, то мы посетили и её предка  $c$ , следовательно множество  $E$  содержит точку  $(x(c), i)$ , а она лежит в прямоугольнике  $\text{rect}(a, b)$ . При этом возможно, что  $c$  и  $b$  совпадают как вершины, но в этом случае мы найдём точку  $(x(c), i) = (x(b), i)$ , а не  $(x(b), y(b)) = (x(b), j)$ , то есть найденная нами точка не совпадает с углами  $\text{rect}(a, b)$ . Противоречие.

□

Стоит заметить, что мы доказали более сильный факт: если  $x(a) \neq x(b)$  и  $y(a) \neq y(b)$ , то есть точка из  $E \setminus \{a\}$ , которая попала на одну из сторону  $\text{rect}(a, b)$ , смежную с

$a$  (то, какая это сторона, зависит от того,  $c = a$  или  $c \neq a$ ). Аналогичное утверждение верно для  $E \setminus \{b\}$  и  $b$ .

Дальше мы будем постоянно пользоваться следующей леммой, утверждающей, что описанное в прошлом абзаце условие верно для любого *arborally satisfiable* множества, а не только для тех, которые являются геометрическим представлением BST-алгоритма (позже мы поймём, что каждое *arborally satisfiable* множество — геометрическое представление какого-то BST-алгоритма, но не будем торопить события).

**Лемма 12.** *Если  $E$  — arborally satisfiable, то для любых  $a$  и  $b$  из  $E$ , таких что  $x(a) \neq x(b)$  и  $y(a) \neq y(b)$ , существует точка из  $E \setminus \{a\}$ , которая попадает на одну из сторон  $\text{rect}(a, b)$ , смежных с  $a$ .*

*Доказательство.* Пусть у нас есть  $\text{rect}(a, b)$  для точек  $a$  и  $b$ , удовлетворяющих условиям  $x(a) \neq x(b)$  и  $y(a) \neq y(b)$ . Так как  $E$  — *arborally satisfiable* множество, то есть  $c \in \text{rect}(a, b)$ ,  $c \neq a$  и  $c \neq b$ . Есть два случая:

- 1)  $x(c) = x(a)$  или  $y(c) = y(a)$ . Тогда  $c$  лежит на одной стороне  $\text{rect}(a, b)$  с точкой  $a$ , то есть  $c$  — искомая точка.
- 2)  $x(c) \neq x(a)$  и  $y(c) \neq y(a)$ . Тогда в  $\text{rect}(a, c)$  тоже есть точка из  $E \setminus \{a, c\}$  по обычному *arborally satisfiable* свойству, при этом  $\text{rect}(a, c)$  строго меньше  $\text{rect}(a, b)$ . Будем повторять процесс (возьмём точку  $d \neq a$ ,  $d \neq c$  из  $\text{rect}(a, c)$ , и так далее), пока неизбежно не выполнится случай 1.

□

Немного удивительно, но верна и теорема, обратная к теореме 11: теорема 15. Для её доказательства нам понадобится понимать некоторые базовые вещи про декартовы деревья.

**Определение 8.** *Декартово дерево (treap) — это двоичное дерево поиска, в котором у каждой вершины кроме ключа есть ещё и другой параметр — приоритет, при этом декартово дерево удовлетворяет свойству кучи на минимум по приоритетам.*

**Определение 9.** Под *декартовым деревом на парах*  $(key_i, priority_i)$  будем понимать любое декартово дерево с данными мультимножеством пар «ключ–приоритет».

**Лемма 13.** *Всегда есть хотя бы одно декартово дерево на данном наборе пар. Более того, если все ключи и приоритеты в наборе различны, то декартово дерево только одно.*

*Доказательство.* По свойству кучи корнем декартова дерева должна быть одна из вершин с минимальным приоритетом. Возьмём любую вершину с минимальным приоритетом и сделаем её корнем, пусть её *ключ* равен  $x$ . Тогда все вершины с ключами меньше  $x$  должны попасть в её левое поддерево, а с ключами больше  $x$  — в правое. Куда попадут вершины с ключом ровно  $x$ , неважно. Распределим оставшиеся вершины на левое и правое поддерево корня и построим их рекурсивно. Если все ключи и приоритеты были различны, то каждый раз мы делали единственное возможное действие, поэтому в этом случае декартово дерево уникально. □

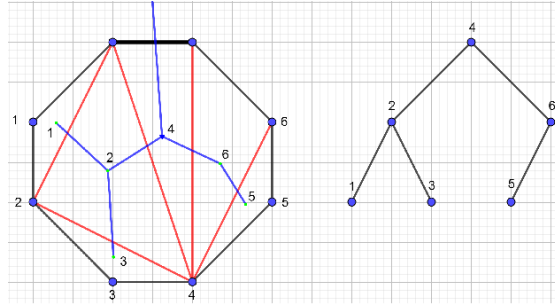


Рис. 5: Триангуляция и соответствующее ей двоичное дерево поиска.

Также нам понадобится следующая лемма.

**Лемма 14.** Пусть у нас есть два двоичных дерева поиска на одном и том же наборе из  $n$  ключей. Тогда одно из них можно перестроить в другое, сделав  $O(n)$  вращений.

*Доказательство.* Самое интуитивное доказательство этого факта использует соответствие между двоичными деревьями поиска на  $n$  вершинах и триангуляциями выпуклого  $(n + 2)$ -угольника.

Соответствие выглядит так: зафиксируем любую сторону многоугольника и назовём её *корневой стороной*. Оставшиеся  $n$  вершин, не попавшие на корневую сторону, пронумеруем по циклу числами от 1 до  $n$ .

Как построить триангуляцию по дереву? Пусть в корне дерева находится ключ  $x$ . Тогда добавим в триангуляцию треугольник, построенный на корневой стороне и вершине с номером  $x$ . Тогда по одну сторону от этого треугольника находятся вершины с номерами  $[1, x - 1]$ , а по другую — вершины с номерами  $[x + 1, n]$ . Это как раз ключи из левого и правого поддеревьев корня соответственно. Более того, в обоих полученных многоугольниках можно естественным образом выделить новую корневую сторону, а именно, соответствующую сторону исходного треугольника. Это позволяет продолжить построение триангуляции рекурсивно (см. рисунок 5).

Чтобы построить дерево по триангуляции, возьмём единственный треугольник, содержащий корневую сторону. Так мы нашли ключ, стоящий в корне дерева. Дальше запускаемся рекурсивно от частей, на которые треугольник разбил многоугольник — так мы получим левое и правые поддерева корня.

Ещё более интересное свойство этой биекции состоит в том, что вращения дерева поиска соответствуют операциям `flip` в триангуляции: поменять проведённую диагональ в четырёхугольнике (см. рисунок 6).

Вместо того, чтобы переводить одно дерево вращениями в другое, можно привести оба к одному и тому же, а потом обратить вторую последовательность вращений. В терминах триангуляций, мы хотим привести две триангуляции операциями `flip` к какой-то выделенной. В качестве выделенной триангуляции возьмём такую, в которой все треугольники содержат выделенную вершину, скажем, вершину с номером 1 (эта триангуляция выглядит как веер).

Алгоритм приведения любой триангуляции к вееру: пока выделенная вершина принадлежит хотя бы одному четырёхугольнику, в котором она не конец проведённой

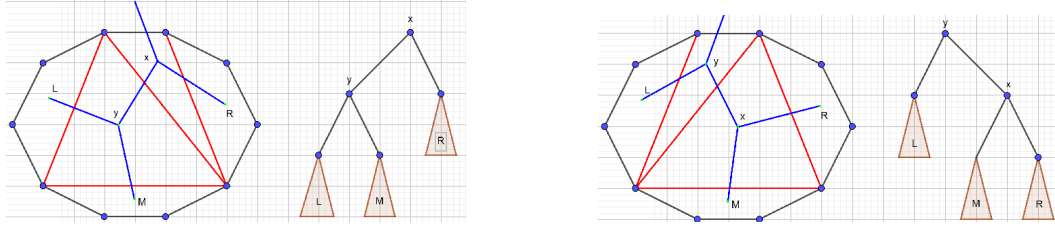


Рис. 6: Триангуляция и соответствующей ей дерево на левом изображении переходят в триангуляцию и дерево на правом изображении при операциях flip и zig соответственно.

диагонали, делаем flip этого четырёхугольника. Несложно видеть (то есть мне лень это расписывать, потому что ещё придётся картинки рисовать), что процесс завершится только когда триангуляция станет веером.  $\square$

**Замечание.** Есть и более прямолинейные способы доказать лемму 14, не сводящие деревья к триангуляциям. Но аналогия между деревьями и триангуляциями — вообще очень полезная штука.

**Теорема 15.** Если  $E$  — *arborally satisfiable*, то существует BST-алгоритм, геометрическое представление которого в точности равно  $E$ . Строго говоря, нужно ещё не забыть наложить условие, что множество  $y$ -координат точек из  $E$  — в точности отрезок целых чисел  $[1, n]$  для какого-то  $n$ . Это соответствует тому, что при каждом запросе мы должны обязательно посетить корень, то есть хотя бы одну вершину.

*Доказательство.* Обозначим за  $\tau_i$  множество из ключей, которые нам разрешено посещать на  $i$ -том шаге (то есть такие ключи  $x$ , что  $(x, i) \in E$ ).

Мы хотим, чтобы сразу перед  $i$ -тым шагом наше дерево было каким-то декартовым деревом  $T_i$  на парах  $(x, N(x, i))$ , где  $N(x, i)$  — минимальное такое  $j \geq i$ , что  $(x, j) \in E$  или  $+\infty$ , если таких  $j$  нет. Интуитивно,  $N(x, i)$  должно быть первым моментом времени, начиная с  $i$ , когда мы посетим ключ  $x$ . Чтобы добиться этого, нужно выбрать  $T_1$  в качестве исходного дерева нашего BST-алгоритма и научиться перестраивать  $T_i$  в  $T_{i+1}$ , посещая только вершины из  $\tau_i$ .

Вершины, которые мы можем посещать в момент времени  $i$  — какой-то связный кусок  $T_i$ , содержащий корень  $T_i$ . Почему? Потому что у всех вершин  $T_i$  приоритет равен  $N(x, i)$ , то есть хотя бы  $i$ , а у вершин из  $\tau_i$  приоритет равен ровно  $i$ . При этом только у вершин из  $\tau_i$  приоритет поменяется на что-то новое (так как для других ключей  $N(x, i) = N(x, i + 1)$ ). Назовём вершины из  $\tau_i$  *верхними*, а все остальные — *нижними*.

Дерево  $T_i$  устроено следующим образом: это какое-то дерево поиска (назовём его *верхней компонентой*) на вершинах из  $\tau_i$ , только вместо некоторых «пустых детей» (то есть вместо nullptr'ов) подклеены *нижние поддеревья* — поддеревья, целиком состоящие из нижних вершин. Чтобы получить  $T_{i+1}$  из  $T_i$ , перестроим верхнюю компоненту в соответствии с новыми приоритетами вершин из  $\tau_i$  (это можно сделать по лемме 14) с помощью вращений. Строго говоря, лемма даёт нам последовательность вращений



верхней компоненты, но каждое вращение верхней компоненты естественным образом является вращением и всего дерева тоже. Поскольку мы использовали только вращения, свойство двоичного дерева поиска не начало нарушаться.

Теоретически, могло нарушиться условие кучи. Поскольку все верхние вершины остались наверху, а нижние — внизу, то в  $T_{i+1}$  может быть лишь три типа пар «родитель-сын», где нарушилось условие кучи: «верх-верх», «низ-низ» и «верх-низ». Нарушений типа «верх-верх» нет, поскольку  $T_{i+1}$  строилось так, чтобы для верхних вершин в нём выполнялось условие кучи с новыми приоритетами. Нарушений типа «низ-низ» нет, так как при вращениях вершин из  $\tau_i$  нижние поддеревья могли как-то переставляться, но при этом их внутренняя структура не менялась, так как мы не трогали нижние вершины. Осталось понять, почему не могло быть нарушений вида «верх-низ». Тут-то нам и пригодится то, что  $E$  — arborally satisfiable.

Пусть в  $T_{i+1}$  есть нижняя вершина с парой «ключ-приоритет»  $(y, j)$  и её родитель — верхняя вершина с парой  $(x, k)$ . Раз эти вершины нарушают свойство кучи, то  $j < k$ . Не умаляя общности,  $x < y$ . Посмотрим на точки  $(x, i)$  и  $(y, j)$  из  $E$  и натянутый на них прямоугольник  $\text{rect}((x, i), (y, j))$ . На вертикальной стороне от  $(x, i)$  до  $(x, j)$  нет ничего из  $E \setminus \{(x, i)\}$  по определению, так как  $N(x, i+1) = k > j$ . Следовательно, по лемме 12, есть точка  $(c, i)$  на стороне от  $(x, i)$  до  $(y, i)$ . Это значит, что  $c \in \tau_i$ , то есть  $c$  — верхняя вершина.

Все наши операции при перестройке  $T_i$  в  $T_{i+1}$  были вращениями: они могли ломать свойство кучи, но не свойство двоичного дерева поиска. Поэтому, ключ  $c$  всё ещё лежит между ключами  $x$  и  $y$ . Но вершина с ключом  $x$  — родитель вершины с ключом  $y$  в  $T_{i+1}$ . Следовательно, вершина с ключом  $c$  находится где-то в левом поддереве вершины  $y$  дерева  $T_{i+1}$ . Это невозможно, так как  $c$  — верхняя вершина и должна была остаться наверху (но не осталась, так как она отделена нижней вершиной  $y$  от верхней вершины  $x$ ). Противоречие.

Таким образом, мы построили последовательность деревьев  $T$ , в которой  $T_{i+1}$  может быть получено из  $T_i$  только вращениями в вершинах из  $\tau_i$ . Это и означает, что мы построили BST-алгоритм с геометрическим представлением  $E$ .  $\square$

### 4.3 «Онлайн-эквивалентность» BST-алгоритмов и arborally satisfiable множеств

Только что мы получили оффлайн-алгоритм, который, зная arborally satisfiable множество  $E$ , строит BST-алгоритм с геометрическим представлением  $E$ . Утверждается, что есть *онлайн*-алгоритм который, получая не всё  $E$  сразу, а по строкам (получил  $\tau_1$ , сделал нужные операции, получил  $\tau_2$ , сделал нужные операции, и так далее)), строит BST-алгоритм со стоимостью  $\mathcal{O}(|E| + n)$ , геометрическое представление которого является надмножеством  $E$  (получить в точности геометрическое представление  $E$  не получится, ухудшения на мультипликативную константу не избежать). Здесь, как и в прошлом разделе, под  $\tau_i$  понимается множество таких ключей  $x$ , что  $(x, i) \in E$ .

Нам понадобится немного необычная структура данных.

**Определение 10.** *split-дерево* (split-tree) — это абстрактная структура данных, со-

стоящая из *внутреннего двоичного дерева поиска* на имеющихся ключах и какой-то *дополнительной информации*, которая может иметь любую природу. При этом она должна уметь поддерживать две операции:

- 1) `make_tree( $x_1, x_2, \dots, x_n$ )` — по отсортированному массиву ключей построить структуру данных, при этом внутреннее дерево поиска должно быть двоичным деревом поиска на данных ключах;
- 2) `split_tree( $x$ )` — найти ключ  $x$  во внутреннем двоичном дереве поиска (гарантируется, что он там есть), с помощью вращений поднять его в корень, удалить его и вернуть два новых split-дерева: левое и правое поддеревья корня (в левом все ключи меньше  $x$ , а в правом все ключи больше  $x$ ).

При этом разрешается тратить суммарно только  $\mathcal{O}(n)$  времени на построение (`make_tree`) и полное разрушение ( $n$  операций `split_tree`) дерева.

**Замечание** (Небольшое отступление о природе split-дерева). Операции «постройте структуру по списку чисел» и «найдите данное число в структуре, удалите его и разбейтесь на «до» и «после»» можно легко реализовать с помощью односвязного списка и хэш-таблицы или кучи других подобных методов.

Но суть split-дерева не в этом. Суть split-дерева в том, что оно реализует операцию `split_tree` *физически* на внутреннем двоичном дереве поиска с помощью вращений в точности так, как описано. Вся дополнительная информация, которую мы храним, существует не для того, чтобы отвечать на какие-то запросы об элементах структуры, а только для того, чтобы лучше понимать, как и когда совершать дополнительные вращения, кроме тех, которые нам нужны, чтобы пригнать ключ  $x$  в корень.

Нас интересует не столько время, которые мы потратили, сколько число вершин во внутреннем двоичном дереве, которые мы затронули. Если бы мы могли потратить  $\mathcal{O}(n^2)$  времени, но затронуть вершины только  $\mathcal{O}(n)$  раз в процессе полного разрушения внутреннего дерева, это бы нас более-менее устроило. Но оказывается, что мы можем потратить  $\mathcal{O}(n)$  времени (и, следовательно, лишь  $\mathcal{O}(n)$  раз затронуть вершины внутреннего дерева). Раз можем, то почему бы и не воспользоваться чуть лучшей версией алгоритма?

Я не буду воспроизводить принцип работы split-дерева, так как он не очень важен. Узнать его можно в исходной статье [Dem+09]. Более того, есть гипотеза (см. статью Лукас [Luc88]), что в качестве split-дерева можно использовать обыкновенное `splay`-дерево без дополнительной информации (и, соответственно, не делать никаких вращений, кроме тех, которые нужны, чтобы пригнать ключ в корень), но доказывать это не умеют.

Теперь мы будем на каждом шаге строить не обычное декартово дерево, а обобщённое декартово дерево (определение в следующем абзаце).  $G_i$  — обобщённое декартово дерево (с отличием, что теперь мы просим, чтобы декартово дерево было кучей на *максимум* по приоритетам), построенное на парах  $(x, \rho(x, i))$ , где  $\rho(x, i)$  — максимальное такое  $j < i$ , что  $(x, j) \in E$  или  $-\infty$ , если таких нет. То есть  $\rho(x, i)$  — последний момент строго перед  $i$ , когда ключ  $x$  был задет. Фактически, мы повернули вспять

течение времени и сделали так, что теперь вершины с большими  $\rho(x, i)$  находятся выше в дереве (раньше — вершины с меньшими  $N(x, i)$ ). Однако, не всё так просто, так как теперь вершины, у которых мы меняем приоритет расположены внутри дерева, на первый взгляд, как-то случайно.

**Определение 11.** *Обобщённое декартово дерево* (general treap) — это на самом деле обычное декартово дерево, вершины которого объединены в *суперузлы*:

- 1) Каждый суперузел — связное подмножество вершин дерева с одинаковым приоритетом. Для одного приоритета может быть несколько суперузлов, но вершины в них должны быть не связаны между собой (то есть соседние вершины с одинаковым приоритетом обязаны попасть в один и тот же суперузел).
- 2) Каждый суперузел — split-дерево (точнее, внутреннее двоичное дерево для split-дерева). Гарантируется, что суперузлы создаются с помощью операции `make_tree`, а потом постепенно разрушаются с помощью операций `split_tree`. Так как внутри суперузла все приоритеты одинаковые, то любое двоичное дерево поиска будет удовлетворять условию кучи.
- 3) Отношение «отец-сын» на суперузлах определяется естественным образом. При этом у суперузла (в отличие от обычной вершины) может быть много детей.

**Замечание.** Важно понимать, что суперузлов в некотором смысле «не существует» — обобщённое декартово дерево не является двумерной структурой данных в любом привычном смысле слова. Как уже было сказано, обобщённое декартово дерево по своей внутренней структуре — обычное декартово дерево. Суперузлы мы выделили сами, чтобы внутри них строить split-деревья и пользоваться амортизированной оценкой из определения split-деревьев.

На это можно смотреть так: все наши ключи различны, но среди приоритетов есть одинаковые, и их достаточно много. Поэтому в структуре декартова дерева есть некоторая свобода, связанная с тем, как именно мы располагаем соседние вершины с одинаковым приоритетом. Мы воспользовались этой свободой, чтобы построить в каждом суперузле split-дерево, которое будет нам говорить, как именно расположены вершины этого суперузла.

Изначально,  $G_1$  состоит из одного суперузла с приоритетом  $-\infty$ , который мы строим с помощью `make_tree`. Как получить  $G_{i+1}$  из  $G_i$ ? Для этого нужно взять все вершины из  $\tau_i$ , так как только для них  $\rho(x, i+1) \neq \rho(x, i)$  (а именно,  $\rho(x, i+1) = i$  для  $x \in \tau_i$ ; для других вершин  $\rho(x, i+1) = \rho(x, i) < i$ ), вырезать их из своих суперузлов с помощью `split_tree` и собрать из них новый суперузел с приоритетом  $i$  с помощью `make_tree`. Строгое понимание этих слов (в частности, то, как мы поддерживаем при всех этих операциях свойства обобщённого декартова дерева и даже то, почему  $G_{i+1}$  вообще окажется хотя бы обычным декартовым деревом) отложим на потом. А пока сделаем ещё одно полезное замечание о split-деревьях.

**Замечание.** Split-дерево в процессе своей работы производит какие-то операции вращения внутреннего двоичного дерева поиска. Но эти операции вращения (выполнить

вращения в какой-то вершине) можно совершать и со связными подмножествами большего дерева поиска, в нашем случае обобщённого декартова дерева.

То есть внутренние деревья поиска наших split-деревьев — какие-то куски нашего обобщённого декартова дерева, а именно, суперузлы. В частности, эти внутренние деревья не нужно хранить отдельно, так как они сохранены в нашем декартовом дереве. Когда split-дерево говорит, что нам нужно сделать вращение во внутреннем дереве, мы делаем вращение в соответствующей вершине нашего большого дерева.

При таком понимании у удаления вершины (операции  $\text{split\_tree}(x)$ ) появляется следующая интерпретация: мы не столько *удаляем* вершину с ключом  $x$ , сколько пригоняем её в корень куска большого дерева, соответствующего нашему split-дереву, прекращаем ассоциировать её с нашим split-деревом и чисто формально (дополнительную информацию, если она есть, нужно будет пересчитать, но менять в структуре большого дерева ничего не надо) разбиваем наше split-дерево на два.

После такой операции наша вершина перестаёт быть ассоциированной с *каким-либо* split-деревом, поэтому мы больше не будем делать вращений с центром в ней до того, как перейдём к  $(i + 1)$ -ой итерации процесса (построению  $G_{i+2}$  по  $G_{i+1}$ ).

Однако, как мы поймём позже, это не мешает ей дойти до корня.

Нам понадобится следующая лемма:

**Лемма 16.** Пусть мы посетили (то есть  $x \in \tau_i$ ) вершину с парой «ключ–приоритет»  $(x, k)$  в  $G_i$ . Пусть отец её суперузла (в  $G_i$ , всё пока в  $G_i$ ) — суперузел  $P$  с приоритетом  $j > k$ . Пусть  $\text{succ}(P, x)$  — наименьший ключ в  $P$ , больший  $x$ ,  $\text{pred}(P, x)$  — наибольший ключ в  $P$ , меньший  $x$ . Утверждается, что мы их посетили (если они существуют), то есть  $\text{succ}(P, x) = +\infty$  или  $\text{succ}(P, x) \in \tau_i$ , и, аналогично,  $\text{pred}(P, x) \in \tau_i \cup \{-\infty\}$ .

*Доказательство.* Действительно, пусть  $\text{succ}(P, x) < +\infty$  и  $\text{succ}(P, x) \notin \tau_i$ , откуда  $(\text{succ}(P, x), j + 1), (\text{succ}(P, x), j + 2), \dots, (\text{succ}(P, x), i) \notin E$ . Тогда, так как  $(x, i) \in E$  и  $(\text{succ}(P, x), j) \in E$ , то в  $E \setminus \{\text{succ}(P, x)\}$  есть точка на стороне  $(\text{succ}(P, x), j) - (x, j)$  прямоугольника  $\text{rect}((x, i), (\text{succ}(P, x), j))$ . Следовательно, есть такое  $y \in [x, \text{succ}(P, x))$ , что  $(y, j) \in E$ . Так как  $\rho(x, i) = k < j$ , то  $(x, j) \notin E$ , откуда  $y$  лежит строго между  $x$  и  $\text{succ}(P, x)$  (см. рисунок 7).

Получается, что  $\rho(y, i) \geq j$ . Почему это странно? Мы уже знаем, что ключ  $y$  каким-то образом лежит между ключом  $\text{succ}(P, x)$  и ключом  $x$ . Это означает, что он лежит в поддереве наименьшего общего предка  $\text{succ}(P, x)$  и  $y$ . Этот наименьший общий предок — какая-то вершина из  $P$  (потому что  $\text{succ}(P, x)$  лежит в  $P$  по определению, а  $P$  — отец суперузла, в котором лежит  $x$ ), следовательно его приоритет *не больше* приоритета  $P$ , то есть  $j$ . С другой стороны, мы уже доказали, что  $\rho(y, i) \geq j$ . Отсюда, приоритет  $y$  в точности равен  $j$  и  $y$  лежит в  $P$ . Но это противоречит определению  $\text{succ}(P, x)$ , так как  $x < y < \text{succ}(P, x)$ . Аналогично с  $\text{pred}(P, x)$ .

□

Что мы получили? Как минимум то, что множество посещённых суперузлов (то есть таких суперузлов, в которых есть вершина из  $\tau_i$ ), образуют связное множество,

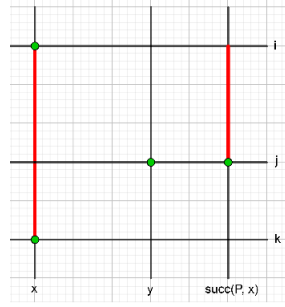


Рис. 7: Зелёные точки соответствуют точкам из  $E$ , красные отрезки — отрезкам, на которых точно нет точек из  $E$  из-за того, что мы знаем значения  $\rho(\cdot, \cdot)$ . Точка  $(y, j)$  появляется из леммы 12 для  $(x, i)$  и  $(\text{succ}(P, x), j)$ .

содержащее корень. Аналогичное утверждение про *вершины* неверно, но оно нам и не понадобится. Сейчас нам понадобится понять ещё одну интересную особенность split-дерева.

Наша цель состоит в том, чтобы небольшим количеством вращений пригнать все ключи из  $\tau_i$  в какое-то связное множество вершин, содержащее корень, не сломав при это условие кучи на других вершинах. После этого мы вызываем `make_tree` от этих вершин и делаем их приоритеты равными  $i$ . Внутреннее двоичное дерево, которое нам вернёт `make_tree` может отличаться от структуры двоичного дерева поиска на этих вершинах, которая получилась после того, как мы пригнали их всех наверх, но, как мы знаем, мы можем переделать одно в другое за линейное количество вращений.

Как мы пригоняем все вершины наверх? На удивление просто: пройдемся по суперузлам в порядке от более глубоких к менее глубоким. Внутри каждого суперузла пройдемся (скажем, в порядке возрастания, но это должно быть неважно) по всем ключам  $x$  из этого суперузла, попавшим в  $\tau_i$  и для каждого из них сделаем операцию `split_tree(x)`.

Почему это работает? Внутри каждого суперузла первый рассмотренный ключ придет в корень суперузла, второй — в один из корней двух внутренних деревьев, полученных из исходного, то есть в одного из детей корня суперузла, и так далее. То есть все рассмотренные ключи в итоге придут в какое-то связное множество, содержащее корень суперузла. Таким образом, каждый ключ «доезжает» до корня своего суперузла «своим ходом».

Однако, как мы уже отметили ранее, мы перестаём делать вращения в вершине после того, как она приехала наверх своего суперузла. Раз сама она дальше проехать не может, то её должны дальше довезти друзья (звучит позитивно)!

Чтобы понять главную идею, рассмотрим случай, когда мы затрагиваем всего два суперузла: суперузел-корень (назовём его  $P$ ) и одного из его суперузлов-сыновей. При этом в сыне мы затронули только один ключ  $x$ . Сперва мы пригоняем ключ  $x$  в корень суперузла сына. После этого ключи из  $P$ , вместе с ключом  $x$  образуют правильное двоичное дерево поиска. По лемме 16,  $\text{succ}(P, x)$  и  $\text{pred}(P, x)$  лежат в  $\tau_i$ . Когда мы пригоняем вершины из  $\tau_i \cap P$  мы на самом деле разбиваем все оставшиеся вершины из  $P$

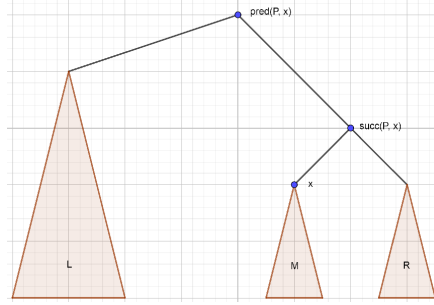


Рис. 8: Одно из двух возможных состояний суперузла  $P$  после того, как мы пригнали ключи  $\text{pred}(P, x)$  и  $\text{succ}(P, x)$  наверх. Поддерево  $L$  содержит все ключи, меньшие  $\text{pred}(P, x)$ , поддерево  $M$  содержит все ключи из интервала  $(\text{pred}(P, x), \text{succ}(P, x))$ , а поддерево  $R$  содержит все ключи, большие  $\text{succ}(P, x)$ . По определению  $\text{pred}$  и  $\text{succ}$  поддерево  $M$  было пусто до тех пор, пока к  $P$  не присоединилась вершина  $x$ .

на поддерева в зависимости от того, как они сравниваются с вершинами из  $\tau_i \cap P$  (см. рисунок 8) Но теперь в одном из этих поддеревьев появляется гостья, которой раньше не было: вершина с ключом  $x$ . Это поддерево раньше было пустым, так как соответствовало вершинам из  $P$  с ключами из интервала  $(\text{pred}(P, x), \text{succ}(P, x))$ , а таких нет по определению  $\text{pred}$  и  $\text{succ}$ . А теперь в этом поддереве будет одна вершина с ключом  $x$ . Значит, её отец лежит в верхнем связном куске, состоящем из вершин с ключами из  $\tau_i \cap P$ . Значит, мы можем подклеить вершину с ключом  $x$  к этому куску с сохранением его связности.

В общем случае, происходит следующее: внутри каждого суперузла затронутые (то есть из  $\tau_i$ ) вершины этого суперузла собираются в одну большую группу наверху «своим ходом». Более того, все группы, пришедшие из суперузлов-детей тоже подклеятся к этой большой группе. В итоге все эти группы постепенно едут наверх и постепенно склеиваются, в итоге склеиваясь в один большой снежный ком в самом верху большого дерева. Мы это, собственно, и хотели доказать.

$G_{i+1}$  — действительно обычное декартово дерево, так как все вращения внутри  $\text{split}$ -деревьев сохраняют свойство кучи. Поэтому условие кучи могло нарушиться только для вершин, которые мы удаляли из  $\text{split}$ -деревьев, а они все приехали наверх и получили наибольший приоритет.

Перед тем, как мы объявим доказательство законченным, есть ещё одна тонкость: почему в процессе сделанных нами вращений два разных суперузла для одного и того же приоритета не стали соседними и из-за этого склеились? И в формулировке, и в доказательстве леммы 16 мы неявно пользуемся тем, что у соседних суперузлов разный приоритет, так что замести это под ковёр не получится.

Чтобы разобраться с этой деталью, заметим, что для любых двух суперузлов в  $G_i$  для одного и того же приоритета есть вершина  $G_i$ , их *разделяющая*: такая вершина, что один суперузел лежит в её левом поддереве, а другой — в правом (в противном случае один суперузел — предок другого суперузла с тем же приоритетом). Аналогичным образом, когда операция  $\text{split\_tree}$  разбивает один суперузел на два, корень

split-дерева становится разделяющей вершиной для этих суперузлов. При этом приоритеты суперузлов в процессе преобразования  $G_i$  в  $G_{i+1}$  не меняются, а приоритеты разделяющих вершин либо не меняются (для разделяющих вершин не из  $\tau_i$ ), либо увеличиваются (для разделяющих вершин из  $\tau_i$ ). Следовательно, разделённые суперузлы остаются в поддереве разделившей их вершины и в дереве  $G_{i+1}$ . Более того, по свойству двоичного дерева поиска, один из этих суперузлов должен оказаться в её левом поддереве, а другой — в правом. Следовательно, суперузлы, которые были разделены в  $G_i$  или стали разделены из-за операций `split_tree`, остаются разделёнными в  $G_{i+1}$ . Наконец, разделённые суперузлы точно не могут быть соседними.

Всего мы сделали  $\mathcal{O}(|E| + n)$  вращений. Действительно, на  $i$ -том шаге мы делаем  $|\tau_i|$  операций `split_tree` (амортизированно  $\mathcal{O}(1)$  времени) и одну операцию `make_tree` на  $|\tau_i|$  вершинах ( $\mathcal{O}(|\tau_i|)$  времени). Слагаемое  $\mathcal{O}(n)$  появляется из-за амортизации: каждое не разрушенное полностью split-дерево могло «съесть»  $\mathcal{O}(\text{своего размера})$  операций. Проще всего это понять, когда  $|E| = 1$ : хоть первая операция `make_tree` и «бесплатна» (так как мы вольны выбирать, как дерево выглядит до всех запросов), она могла теоретически вернуть нам бамбук и заставить нас сделать  $(n - 1)$  вращение уже на первой итерации алгоритма.

## 5 Об оффлайн деревьях поиска: нижняя граница времени работы, геометрическое представление

*Записал: Борис Золотов*

### 5.1 Основные определения и предваряющие результаты

Пусть дано бинарное дерево поиска с  $n$  ключами. Мы знаем последовательность запросов, которые зададим этому дереву:  $P = \{s_1, s_2, \dots, s_m\}$ . В поисках ключей  $s_i$  мы будем бегать по дереву туда-сюда и в процессе спуска/подъёма пройдем через некоторые вершины, которые нам не нужны.

**Определение 12.**  $E(P)$  — множество всех вершин, которые мы посетим в процессе поиска вершин с ключами из  $P$ .  $E = P \cup X$ ,  $X$  — множество «лишних» вершин.

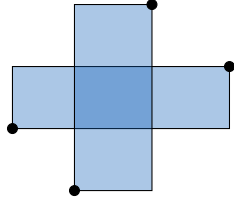
Напомним,  $\text{ОРТ}(P)$  — минимальный размер множества  $E(P)$ , в дальнейшем для краткости будем писать просто ОРТ. Также *прямоугольником, определённым точками  $a, b$*  будем называть  $\text{rect}(a, b)$ .

**Теорема 17** (Доказана ранее). *Рассмотрим последовательность запросов*

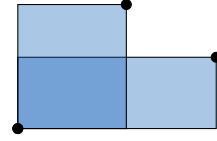
$$\{(s_1, 1), (s_2, 2), \dots, (s_m, m)\} \subset \mathbb{Z}^2.$$

*Надмножество этой последовательности может представлять из себя последовательность узлов, которые были посещены при поиске  $s_1, \dots, s_m$ , в том и только том случае, если оно arborally satisfiable.*

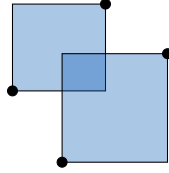
**Определение 13.** Конечное множество прямоугольников — arborally satisfiable, если внутри каждого из них лежит точка из  $E$ .



(a) Эти прямоугольники независимы



(b) Эти прямоугольники независимы



(c) Эти прямоугольники **не** независимы

Рис. 9: Примеры прямоугольников, независимых и не очень

Далее мы будем рассматривать изображение последовательности запросов на плоскости, соответственно под множеством  $P$  будем понимать  $\{(s_1, 1), (s_2, 2), \dots, (s_m, m)\}$ , аналогично вторую координату приделаем к ключам вершин из множества  $E$ .

**Определение 14.** Пусть дано множество  $P$  и его надмножество  $E$ . Два прямоугольника, определённых каждой двумя вершинами множества  $P$ , будем называть *независимыми* (смотреть Рисунок 9), если

- 1) они оба не arborally satisfiable: это значит, что им не принадлежит ни одна точка из  $E$ ,
- 2) ни одна из вершин одного из этих прямоугольников не лежит во внутренности другого.

## 5.2 Оценка снизу числа OPT

**Определение 15.** Будем говорить, что прямоугольник, определённый точками  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$ , имеет тип «+», если  $(x_1 - x_2) \cdot (y_1 - y_2) \geq 0$ , иначе прямоугольник имеет тип «-» (смотреть Рисунок 10).

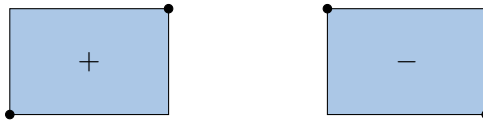
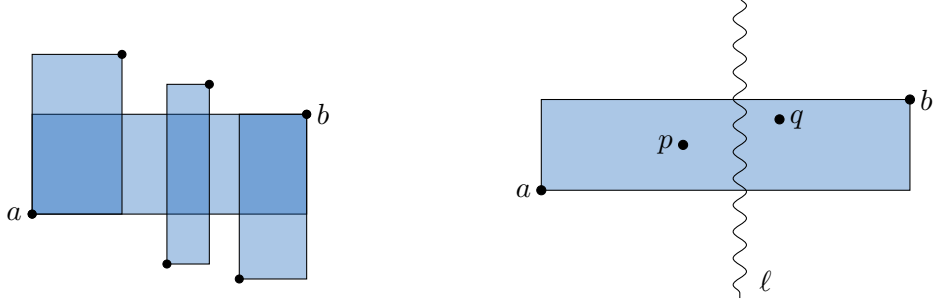


Рис. 10: Прямоугольники типа «+» и типа «-».

**Определение 16.**  $\text{MAXIND}$  — наибольшее число попарно независимых прямоугольников, определённых точками из  $P$ . Соответственно,  $\text{MAXIND}_+$ ,  $\text{MAXIND}_-$  — наибольшие количества попарно независимых прямоугольников фиксированного типа.





(a) Прямоугольники, независимые с  $\text{rect}(a, b)$

(b) Вертикальная линия, не пересекающая ни один из прямоугольников набора. Две точки, соответствующие прямоугольнику  $\text{rect}(a, b)$

Рис. 11: Доказательство Леммы 19

### Теорема 18.

$$\text{OPT} \geq |P| + \frac{1}{2} \text{MAXIND}. \quad (2)$$

Прежде чем приступить к доказательству Теоремы 18, докажем следующую лемму:

### Лемма 19.

$$\text{OPT}_+(P) \geq |P| + \text{MAXIND}_+(P). \quad (3)$$

Здесь  $\text{OPT}_+$  — количество точек в множестве  $E(P)$ , нужное для того, чтобы множество всех прямоугольников типа «+» было *arborally satisfiable*. Это более слабое условие, чем а. с. для всех прямоугольников вообще.

Далее мы забываем о том, что множества точек, с которыми мы работаем, — это вообще говоря выходы какой-то процедуры поиска, и рассматриваем произвольные конечные множества точек на плоскости.

*Доказательство Леммы 19.* Пусть все координаты точек из  $P$  различны (точки можно чуть-чуть пошевелить, чтобы это стало так и ничего больше не нарушилось). Рассмотрим максимальный по мощности набор попарно независимых «+»-прямоугольников и самый широкий из них — пусть он определён точками  $a, b$ . Некоторые прямоугольники будут пересекать наш самый широкий прямоугольник, одной из их вершин может быть  $a$  или  $b$ , либо их определяющие вершины будут лежать за границами самого широкого прямоугольника, одна выше, одна ниже, смотреть Рисунок 11а.

Прямоугольники, имеющие своей вершиной  $a$ , не пересекаются с прямоугольниками, имеющими своей вершиной  $b$ , потому что иначе получается случай прямо как на Рисунке 9с. Более того, оставшиеся прямоугольники тоже не могут никак налезать друг на друга, потому что опять же получится случай с Рисунка 9с. Поэтому существует вертикальная линия, пересекающая *только* выбранный нами широкий прямоугольник  $\text{rect}(a, b)$ , обозначим её через  $\ell$ , смотреть Рисунок 11b.

Рассмотрим самую верхнюю, самую правую точку из  $E(P)$ , которая левее  $\ell$  и принадлежит  $\text{rect}(a, b)$ , обозначим её через  $p$ . Такая точка точно существует, потому что как минимум  $a$  подойдёт, мы выбираем из непустого множества. Рассмотрим самую

нижнюю, самую левую точку из  $E(P)$ , которая правее  $\ell$ , принадлежит  $\text{rect}(a, b)$  и не ниже  $p$ , обозначим её через  $q$ . Опять же такая найдётся, потому что есть  $b$ .

**Утверждение 20.** *Точки  $p$  и  $q$  лежат на одной горизонтали.*

Иначе, так как определённый ими прямоугольник  $\text{rect}(p, q)$  должен быть arborally satisfiable, это бы значило, что мы неправильно выбрали  $p, q$  (нашлась бы точка из  $E(P)$ , принадлежащая прямоугольнику  $\text{rect}(p, q)$  и лежащая ближе к  $\ell$ ).

Сопоставим прямоугольнику  $\text{rect}(a, b)$  горизонтальный отрезок  $pq$ , удалим этот прямоугольник из набора и продолжим сопоставление.

**Утверждение 21.** *Каждый отрезок  $pq$  сопоставлен не более чем одному  $\text{rect}(a, b)$  из набора независимых прямоугольников.*

Потому что  $pq$  лежит внутри  $\text{rect}(a, b)$  и пересекает линию, которую не пересекает больше никто из прямоугольников набора, имеющих общие точки с  $\text{rect}(a, b)$ . Остальные прямоугольники из выбранных нами независимых просто не пересекаются с  $\text{rect}(a, b)$ .

Рассмотрим точки  $p_1 \dots p_t, q_1 \dots q_t$ , отрезки с концами в которых были сопоставлены некоторым прямоугольникам и которые все оказались на одной горизонтальной прямой.

**Утверждение 22.** *Точки  $p_i, q_i$  (соответствующие одному прямоугольнику) — соседние из отмеченных точек на этой горизонтальной прямой.*

В противном случае отрезок  $p_i q_i$  будет пересекать какой-то другой отрезок  $p_j q_j$ . И в процессе сопоставления точек соответствующим прямоугольникам мы бы взяли какие-то другие точки.

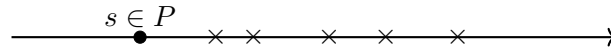


Рис. 12: Точки, добавленные в данную строку

Рассмотрим некоторую строку, в ней находится одна точка из исходного множества запросов  $P$ , смотреть Рисунок 12. Пусть мы добавили в эту строку ещё  $n$  точек, сопоставленных различным независимым прямоугольникам. Тогда точек стало  $n + 1$ , и наибольшее число прямоугольников, которое может им соответствовать, —  $n$ , потому что Утверждение 22. То есть на одну точку из  $E(P)$  добавляется не более одного прямоугольника. Лемма доказана.  $\square$

*Доказательство Теоремы 18.* Заметим, что

$$\text{OPT} \geq \max(\text{OPT}_+, \text{OPT}_-).$$

Теперь воспользуемся тем, что максимум не меньше среднего, а также леммой 19.

$$\begin{aligned} \max(\text{OPT}_+, \text{OPT}_-) &\geq |P| + \frac{1}{2}(\text{MAXIND}_+ + \text{MAXIND}_-) \geq \\ &\geq |P| + \frac{1}{2} \cdot \text{MAXIND}. \end{aligned} \quad \square$$

### 5.3 Более практичная оценка снизу

Рассмотрим пару  $(s_i, i)$  из набора поисковых запросов. Рассмотрим такие точки  $(s_j, j)$ ,  $j < i$ , которые образуют с  $(s_i, i)$  пустой прямоугольник, то есть не содержащий других точек из  $P$ . Упорядочим все такие точки по второй координате и соединим их  $y$ -монотонной ломаной сверху вниз, смотрите Рисунок 13.

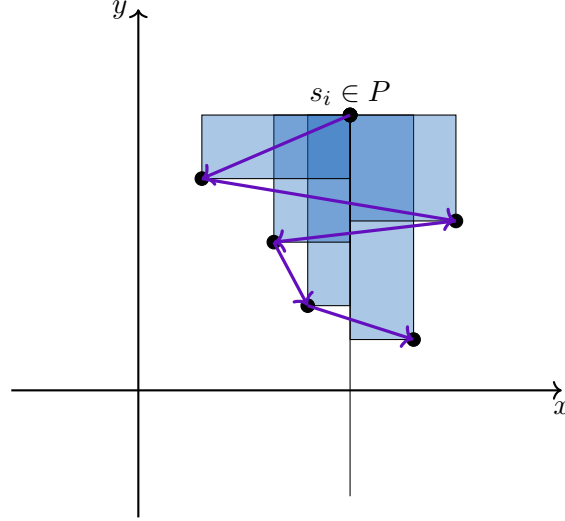


Рис. 13: Подсчёт числа пересечений с вертикальной прямой

Обозначим через  $J(s_i)$  количество пересечений этой ломаной с вертикальным лучом, идущим из  $s_i$  вниз. Понятно, что такое число можно посчитать для любого элемента последовательности запросов.

**Теорема 23.**

$$\text{OPT}(P) \geq |P| + \sum_{s_i} \frac{J(s_i)}{2} \quad (4)$$

*Доказательство.* На каждом ребре ломаной, пересекающем вертикальный луч, построим как на диагонали прямоугольник, стороны которого параллельны осям координат. Так у каждого пересечения появится свой прямоугольник. Эти прямоугольники не обязательно касаются друг друга, потому что ломаная может иметь несколько звеньев подряд с одной стороны от вертикального луча. Объединим получившиеся наборы прямоугольников, смотрите Рисунок 14.

Все прямоугольники в объединении, легко видеть, будут попарно независимы. Осталось лишь применить Теорему 18.  $\square$

### 5.4 Оценка снизу через число перебежек

Фиксируем бинарное дерево поиска  $T$  и рассмотрим его вершину  $q$ . Обозначим через  $R(q)$  количество чередований между спусками в левое поддерево  $q$  и правое поддерево  $q$ . Спуски в сам узел  $q$  и всё, что происходит вне поддерева  $q$ , при этом игнорируется.

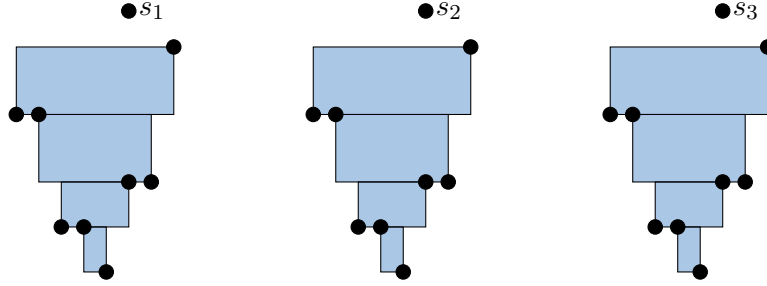


Рис. 14: Набор попарно независимых прямоугольников (на рисунке отмечены не все точки из  $P$ )

**Теорема 24.**

$$\text{OPT}(P) \geq \sum_{q \in T} R(q). \quad (5)$$

*Доказательство.* Следует из Теоремы 23.  $\square$

Мы получили нижнюю оценку на  $\text{OPT}(P)$  довольно изощрённым способом. Действительно ли эта оценка так хороша? Оказывается, есть пример последовательности запросов, который обобщается на любую глубину дерева поиска и делает эту нижнюю оценку бессмысленно большой:  $\sum R(Q) = \mathcal{O}(n \log n)$  в случае идеально сбалансированного дерева. Это так называемая bit-reversal sequence, смотреть Рисунок 15. Оценку  $\mathcal{O}(n \log n)$  так-то можно доказать для такой последовательности более простыми способами и на деревьях попроще.

0	000	000	0
1	001	100	4
2	010	010	2
3	011	110	6
4	100	001	1
5	101	101	5
6	110	011	3
7	111	111	7

Рис. 15: Bit-reversal sequence делает нижнюю оценку бессмысленно большой

## 6 Tango деревья

*Записал: Борис Золотов*

Данная структура данных получила такое название, потому что была изобретена в самолёте по пути из Нью-Йорка в Буэнос-Айрес, где танго является очень популярным танцем. Этот факт, а также объяснение принципа работы структуры данных можно найти в [Dem12].

Рассмотрим сбалансированное двоичное дерево поиска логарифмической глубины. Если «по-глупому» обработать последовательность из нескольких запросов, то на каждый из них придётся тратить  $\mathcal{O}(\log n)$  времени, чтобы (в худшем случае, когда ключ лежит в дереве достаточно глубоко) спуститься от корня к листу.

Тем временем, для данного дерева у нас есть нижняя оценка времени работы на нескольких запросах (5). Мы хотим как можно ближе к ней подойти — так, чтобы время поиска нескольких запросов отличалось от нижней границы если не в константу, то хотя бы в  $\log \log$  раз. Тогда мы будем знать, что дерево поиска не может работать быстрее, чем (5), но может работать не медленнее, чем (5) умножить на  $\log \log$ .

В сбалансированном двоичном дереве у каждого узла  $\mathcal{N}$  укажем «предпочитаемого потомка» — того, в которого происходил спуск при прошлом поисковом запросе (при котором вообще происходил спуск через  $\mathcal{N}$ ). С помощью выбора у каждого узла предпочитаемого потомка мы можем разбить дерево на предпочитаемые пути, смотреть Рисунок 16. Как это сделать — спустимся из корня по предпочитаемым потомкам, получим один путь от корня к листу. Этот путь режет всё дерево на несколько деревьев поменьше — рекурсивно вызовемся на каждом из них.

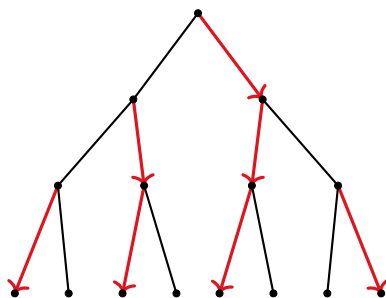


Рис. 16: Tango-дерево представлено в виде объединения путей

Пусть при реализации некоторого поискового запроса мы прошли по непредпочитаемому ребру. Это значит, что произошла *перебежка*, о которой говорилось в теореме 24: в прошлый раз мы спустились в одного потомка, а теперь спускаемся в другого. Это значит, что мы можем заплатить временем работы за проход по непредпочитаемому ребру. А вот внутри предпочитаемых путей нам нужно уметь перемещаться как можно быстрее. Если не константа, то хотя бы  $\log \log$ ...

## 6.1 Описание работы структуры

Будем хранить каждый предпочитаемый путь в виде сбалансированного двоичного дерева — вот хотя бы красно-чёрного. Нам бы *хотелось*, чтобы сортировка внутри красно-чёрного дерева была по глубине залегания элемента в оригинальном дереве — но мы будем сортировать по ключу, потому что это самая интуитивная сортировка и она не требует хранения дополнительных данных.

Делая из пути красно-чёрное дерево, мы также будем следить за сохранением ссылок между путями — чтобы они были корректно отражены как ссылки между деревьями. При этом ссылка может начать исходить из другого места: то, что раньше было «направо от  $s$ », теперь «налево от  $d$ », потому что  $s$  и  $d$  поменялись уровнями,

смотреть Рисунок 17.

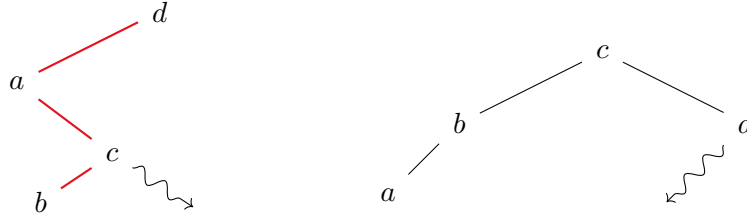


Рис. 17: Ссылки для перехода между предпочитаемыми путями сохраняются, когда мы из пути делаем дерево

Если в процессе поиска мы спустились по непредпочитаемому ребру, нам нужно перестроить структуру за  $\mathcal{O}(\log \log n)$  времени — это глубина одного красно-чёрного дерева, в котором хранится путь. Пусть мы спустились по непредпочитаемому ребру из узла  $\mathcal{N}$ . Тогда нам нужно разделить дерево пути, проходящего через  $\mathcal{N}$ , и присоединить одну из его частей к дереву пути, начинающегося из непредпочитаемого потомка  $\mathcal{N}$ .

Если бы ключи были отсортированы по глубине, split и concatenate красно-чёрных деревьев делалось бы за  $\mathcal{O}(\text{глубины})$ . Но ключи отсортированы как обычно — впрочем, это делает ситуацию не слишком сложнее. Заметим, что ключи всего предпочитаемого пути ниже узла  $\mathcal{N}$  находятся в одном промежутке между двумя ключами пути выше  $\mathcal{N}$ , смотреть Рисунок 18 (а, например,  $b$  и  $c$  на Рисунке 17 находятся между  $a$  и  $d$ ).

Иными словами, чтобы выделить ключи пути ниже  $\mathcal{N}$  в красно-чёрном дереве предпочитаемого пути, нам достаточно сделать два split — по наименьшему и наибольшему значениям на этом пути — и один concatenate. Чтобы слить два дерева, соответствующие двум путям, нам также хватит константного числа split и concatenate.

Заметим, что Tango дерево открывает ещё одну проблему оценки (5): если нас постоянно спрашивают о ключах внутри одного предпочитаемого пути, оценка возвращает нам ноль, а по факту нам нужно хотя бы  $\log \log n$  на перемещения внутри этого пути.

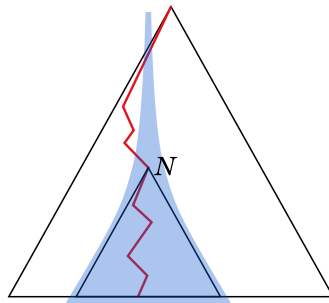


Рис. 18: Ключи всего предпочитаемого пути ниже узла  $\mathcal{N}$  находятся в одном промежутке

## 7 Link-Cut trees

### 7.1 Описание структуры, план действий

*Записала: Анастасия Софронова*

Наша цель — поддерживать структуру данных, которая умеет хранить лес корневых бинарных деревьев и производить с ними следующие операции:

- $\text{makeTree}(v)$  — создать дерево из одной вершины  $v$ .
- $\text{link}(v, w)$  — подвесить  $v$  к  $w$  (при этом  $v$  является корнем одного из деревьев леса, а у  $w$  не более одного ребёнка).
- $\text{cut}(v)$  — удалить ребро между  $v$  и её родителем.
- $\text{findRoot}(u)$  — найти корень дерева вершины  $u$ .
- $\text{findCost}(u)$  — возвращает ближайшее к корню ребро минимального веса на пути от  $u$  до корня.
- $\text{addCost}(u, x)$  — добавить  $x$  к весам всех рёбер на пути от  $u$  до корня.

При этом  $\text{findCost}$  можно адаптировать, чтобы искать не минимум на пути, а, например, сумму и т.д.

В [ST83] описано, как добиться асимптотики  $\mathcal{O}(\log n)$  на операцию в худшем случае. Мы же изучим link-cut trees, работающие за амортизированное  $\mathcal{O}(\log n)$  ([Tar84]).

В описании структуры данных и доказательстве времени работы будет две смысловых части.

- 1) Научиться реализовывать структуру для частного случая дерева — пути. А именно, нам потребуются следующие операции:

- $\text{makePath}(v)$  — создать путь из одной вершины.
- $\text{findPath}(v)$  — вернуть путь, в котором лежит вершина  $v$ .
- $\text{findTail}(p)$  — найти верхний конец пути  $p$  ( $p$  — указатель на нижний конец пути).
- $\text{join}(p, v, q)$  — объединить пути  $p$  и  $q$  в один через вершину  $v$ , т.е., верхний конец пути  $p$  и нижний конец пути  $q$  соединить с  $v$ .
- $\text{split}(v)$  — операция, обратная операции  $\text{join}$ : отрезать рёбра, ведущие из  $v$  в предка и в потомка в пути.
- $\text{findPathCost}(p)$ ,  $\text{addPathCost}(p, x)$ .

- 2) Выразить операции на лесе через операции на путях. Т.е., разобьём вершины дерева на пути. После этого некоторые рёбра лежат на путях (сплошные рёбра), а некоторые соединяют разные пути (пунктирные рёбра, состоящие из пар  $(\text{tail}(p), \text{successor}(p))$ ). Для операций на дереве нам понадобится также дополнительная функция  $\text{expose}(v)$ , которая превращает путь от  $v$  до корня дерева в один из путей разбиения (при этом рёбра, идущие из  $v$  вниз, не входят в этот путь).

## 7.2 Выражение операций на дереве через операции на путях

Мы начнём с того, что выразим операции на дереве (разбитом на пути) через операции на путях и  $\text{expose}(v)$ .

```

1: procedure MAKE_TREE( $u$ )
2:   makePath( $u$ )
3: procedure FIND_ROOT( $u$ )
4:   findTail( $\text{expose}(u)$ )
5: procedure FIND_COST( $u$ )
6:   expose( $u$ )
7:   findPathCost( $u$ )
8: procedure ADD_COST( $u, x$ )
9:   expose( $u$ )
10:  addPathCost( $u, x$ )
11: procedure LINK( $u, w$ )
12:  join( $\emptyset, \text{expose}(u), \text{expose}(w)$ )
13: procedure CUT( $v$ )
14:  expose( $v$ )
15:  split( $v$ )

```

Таким образом,  $\text{expose}$  помогает нам свести задачу на дереве к задаче на пути. Мы считаем, что функция  $\text{expose}$  возвращает указатель на путь, получившийся в результате её исполнения. Некоторых пояснений требует функция  $\text{link}$ : здесь мы отождествляем вершину и путь, состоящий только из этой вершины.

Итак, теперь нужно научиться делать  $\text{expose}$ .

```

1: procedure EXPOSE( $u$ )
2:    $p := \emptyset$  ▷ Здесь будем накапливать наш текущий путь
3:   while  $u \neq \emptyset$  do
4:      $w := \text{successor}(\text{findPath}(u))$  ▷ Запомним следующий сверху путь в дереве
5:      $(q, r) := \text{split}(u)$  ▷ Отрежем у  $u$  сплошное ребро вниз
6:     if  $q \neq \emptyset$  then ▷  $q$  — часть пути, проходящего через  $u$ , ниже  $u$ 
7:        $\text{successor}(q) := u$  ▷ Теперь ребро из  $q$  в  $u$  — пунктирное
8:        $p := \text{join}(p, u, r)$  ▷ А ребро из  $u$  в наш текущий путь — сплошное
9:        $u := w$  ▷ Перейдём к вершине следующего пути
10:   $\text{successor}(p) := \emptyset$ 

```

Операцию, которая происходит в теле **while**, назовём  $\text{splice}$ .

**Теорема 25.** Пусть выполнено  $m$  операций с лесом, из них  $n$  операций  $\text{makeTree}$  (т.е., в дереве не более  $n$  вершин). Тогда верно следующее:

- 1) Мы произвели  $\mathcal{O}(m)$  операций с путями деревьев.
- 2)  $\text{expose}$  был вызван  $\mathcal{O}(m)$  раз.
- 3) За все вызовы  $\text{expose}$  было выполнено  $\mathcal{O}(m \log n)$  операций  $\text{splice}$ .



*Доказательство.* Первые два пункта очевидно следуют из того факта, что во всех операциях на дереве `expose` вызывается константное количество раз. Докажем оценку на количество `splice`.

Обозначим  $\text{size}(v)$  количество вершин в поддереве вершины  $v$ .

Назовём ребро  $(v, w)$  тяжёлым, если  $2 \cdot \text{size}(v) > \text{size}(w)$ , и лёгким, если это неравенство не выполняется. Таким образом, на пути от любой вершины до корня дерева не более логарифма лёгких рёбер.

Мы будем рассматривать следующие величины:

- $\text{HS}$  — количество тяжёлых сплошных рёбер в текущий момент времени;
- $\text{HSC}$  — сколько раз мы создавали тяжёлые сплошные рёбра к текущему моменту времени.

Каждый `splice` превращает некоторое пунктирное ребро в сплошное. Будем рассматривать отдельно лёгкие и тяжёлые рёбра. Так как на пути от  $u$  до корня не более логарифма лёгких рёбер, то и превратить лёгкое пунктирное в лёгкое сплошное мы могли не более логарифма раз.

Тогда  $\#\text{splice} \leq m(\log n + 1) + \text{HSC}$ .

В конце  $\text{HS} \leq n - 1$ . Значит, почти все создания тяжёлых сплошных рёбер были «отменены», т.е., если мы создавали  $\text{HSC}$  тяжёлых сплошных рёбер, то по крайней мере  $\text{HSC} - n + 1$  раз мы превратили тяжёлое сплошное в тяжёлое пунктирное.

Это могло произойти во время `splice`, тогда одновременно с этим мы превратили лёгкое пунктирное в лёгкое сплошное. Из этого следует, что  $\text{HSC} \leq n - 1 + \frac{m}{2}(\log n + 1)$

Итак, мы получили нужную оценку на количество `splice`. По модулю одной маленькой детали: операции `link` и `cut` тоже влияют на наш потенциал  $\text{HSC}$ .

Во время этих операций лёгкое сплошное ребро могло превратиться в тяжёлое сплошное — такие тяжёлые рёбра можно просто не учитывать в значении  $\text{HSC}$ .

Также тяжёлое сплошное ребро могло превратиться в лёгкое сплошное. Это соответствует уменьшению потенциала, которое при этом не «уравновешивает» создание этого тяжёлого ребра в какой-то предыдущий момент времени. Однако, так как на любом пути лёгких рёбер  $\mathcal{O}(\log n)$ , то на каждую из  $m$  операций может произойти не более  $\mathcal{O}(\log n)$  «незарегистрированных» изменений потенциала.

Суммарно это внесёт в  $\text{HSC}$  (и нашу итоговую оценку) ещё  $\mathcal{O}(m \log n)$  операций.

□

### 7.3 Операции на путях

Для реализации операций на путях мы будем использовать `Splay`-дерево. Будем хранить путь в дереве таким образом, чтобы при обходе дерева `dfs`-ом мы выписывали путь слева направо, заканчивая вершиной `tail` (таким образом, `findTail` будет просто возвращать самую правую вершину дерева). Корень дерева соответствует пути. В узле дерева будем хранить также следующие величины:

- $\Delta \text{cost}(x) = \text{cost}(x) - \text{mincost}(x)$ , где  $\text{mincost}(x)$  — это минимальная стоимость вершины в поддереве  $x$ .
- $\Delta \text{min}(x) = \text{mincost}(x) - \text{mincost}(p(x))$ , а если  $x$  — корень дерева, то  $\Delta \text{min}(x) = \text{mincost}(x)$

Здесь  $p(x)$  — предок  $x$  в Splay-дереве.

```

1: procedure MAKEPATH( $u$ )
2:   makeSplayTree( $u$ )
3: procedure FINDPATH( $v$ )
4:   splay( $v$ )
5:   return( $v$ )
6: procedure FINDPATHCOST( $v$ )
7:   while right( $v$ )  $\neq$  0 and min(right( $v$ )) = 0 or left( $v$ )  $\neq$  0 and min(left( $v$ )) = 0 do
8:     if right( $v$ )  $\neq$  0 and min(right( $v$ )) = 0 then
9:        $v := \text{right}(v)$ 
10:    else
11:       $v := \text{left}(v)$ 
12:    splay( $v$ )
13:    return( $v, \Delta \text{min}(v)$ )
14: procedure ADDPATHCOST( $v, x$ )
15:    $\Delta \text{min}(v) = \Delta \text{min}(v) + x$ 
16: procedure JOIN( $p, v, q$ )
17:    $v.\text{left} = p$ 
18:    $v.\text{right} = q$ 
19: procedure SPLIT( $v$ )
20:   splay( $v$ )
21:   cut( $v, v.\text{left}$ )
22:   cut( $v, v.\text{right}$ )

```

Для анализа мы воспользуемся уже доказанной асимптотикой splay-дерева. Мы рассмотрим «виртуальное» splay-дерево, которое будет состоять из всех splay-деревьев путей, а также проведённых между путями пунктирными рёбрами.

Потенциалы будут такими же:

$$iw(v) = \begin{cases} \text{size}(v), & \text{если у } v \text{ все рёбра в детей — пунктирные} \\ \text{size}(v) - \text{size}(u), & \text{если } (u, v) \text{ — сплошное ребро} \end{cases}$$

$$tw(v) = \sum_{u \text{ — из поддерева } v \text{ в виртуальном дереве}} iw(u)$$

$$r(v) = \log tw(v)$$

$$\Phi = \sum_v r(v)$$

Тогда за одну операцию splay на одном splay-дереве мы платим  $3(r(u) - r(v)) + 1$ , что даёт амортизированный логарифм, как в анализе асимптотики splay-деревя. Но нам нужно сказать, что на все операции splay во время выполнения одного expose мы суммарно заплатим не более логарифма. Легко видеть, что операция splay не меняет структуры виртуального дерева, а значит, не меняет потенциалы. Таким образом, во время переходов от одного пути к другому во время операции expose все слагаемые  $r(v)$ , кроме двух, взаимно уничтожатся. Тогда:

$$\text{expose}(v) = 3(r(\text{root}) - r(v)) + 2\#\text{splice},$$

что есть  $\mathcal{O}(m \log n)$ .

## 8 Mergeable trees

*Записал: Елизаров Никита*

Полное описание всех структур и доказательств можно найти в [Geo+11].

### 8.1 Описание структуры и чего мы хотим от этой структуры

Будем называть **упорядоченной кучей** (или просто **кучей**) дерево, где каждой вершине  $v$  сопоставлен **рациональный** ключ  $l(v)$ , со следующим свойством:  $l(v) \geq l(\text{parent}(v))$ .

Будем говорить, что  $v > w$ , если  $l(v) > l(w)$ .

В данной секции мы будем рассматривать **лес упорядоченных куч** (то есть не одну такую кучу, а несколько). Мы хотим уметь поддерживать следующие операции:

- $\text{parent}(v)$  — узнать, кто является предком  $v$ ;
- $\text{root}(v)$  — узнать, кто является корнем дерева, в котором находится  $v$ ;
- $\text{NCA}(v, w)$  — nearest common ancestor: если в одном дереве, то возвращает первого общего предка; если  $v$  и  $w$  — не в одном дереве, то возвращает пустое множество;
- $\text{insert}(v, x)$  — создание нового дерева с одной вершиной  $v$  и ключом  $x$ ;
- $\text{delete}(v)$  — удалить  $v$ , если  $v$  — лист;
- $\text{link}(v, w)$  — подвесить  $v$  к  $w$ , причём  $v$  — корень какого-то дерева из леса, а  $w$  должна быть в другом дереве. Также  $l(v) \geq l(w)$ ;
- $\text{cut}(v)$  — удалить ребро между  $v$  и его родителем; если  $v$  является корнем, то ничего не делаем;

- $merge(v, w)$  — если  $v$  и  $w$  находятся в разных деревьях, то мы сделаем одну операцию  $link(root(v), root(w))$  (или  $link(root(w), root(v))$ , в зависимости от того, какой из корневых ключей больше). Полученное дерево (или изначальное дерево, если  $v$  и  $w$  были в одном дереве) обозначим за  $T$ . Тогда нас интересуют два пути:

- $P$  — путь от  $v$  к корню дерева  $T$ ;
- $Q$  — путь от  $w$  к корню дерева  $T$ .

Мы хотим совместить  $P$  и  $Q$ , чтобы  $v$  и  $w$  оказались на одном пути от корня  $T$  к какому-то листу. При этом, мы хотим, чтобы свойство кучи сохранилось.

Примеры двух **merge** показаны ниже:

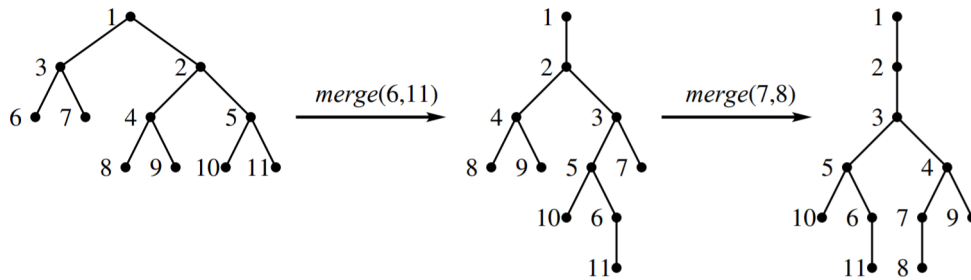


Рис. 19: merge

Теперь поговорим немного про то, как именно мы будем это реализовывать. Мы будем использовать такую же реализацию динамического дерева, как это было в **link – cut trees** (подробнее в предыдущей секции). За одним исключением: мы будем использовать небинарные **link-cut деревья**. Известно, что для них верны все те же оценки, что мы доказывали для бинарных **link-cut деревьев**. Тогда все операции, кроме **merge** и **NCA** мы делать уже умеем. Для реализации **merge** нам нужно ввести еще одну операцию — **topmost(x, w)**.

- $topmost(v, w)$  — возвращает ближайшую к  $root(v)$  вершину  $t$  на пути  $[root(v), v]$ , такую, что  $l(t) > l(w)$ . Предполагается, что  $l(v) > l(w)$ .

Покажем, что мы умеем амортизированно делать **NCA** и **topmost** за  $\mathcal{O}(\log n)$ :

```

1: procedure NCA(v, u)
2:   expose(v)
3:   expose(w)
4:   return successor(findTail(v))

1: procedure TOPMOST(v, w)
2:   expose(v)
3:   return Binary_Search(l(w), Splay_Tree(v))

```

Здесь **Binary\_Search**( $\cdot$ ,  $Splay\_Tree(v)$ ) — это бинарный поиск в **splay-дереве**, которое соответствует сплошному пути, содержащему вершину  $v$ .

Для полного понимания, нужно вспомнить, что **splay-дерево** строилось по «неявным» ключам для пути (а именно: ключом вершины был её порядковый номер в пути). Но, мы будем строить наши **splay-деревья** по ключам из кучи. В силу того, что на любом пути ключи возрастают, порядок и структура дерева не изменятся.

## 8.2 Реализация merge

Для начала заметим, что **link** — это тот же самый **merge**. Поэтому, будем считать, что все операции **link** это операции **merge**.

```

1: procedure MERGE( $v, u$ )
2:   if  $\text{root}(v) \neq \text{root}(w)$  then
3:     if  $l(v) \geq l(w)$  then
4:        $\text{link}(v, w)$ 
5:     else
6:        $\text{link}(w, v)$ 
7:    $u := \text{NCA}(v, w)$  ▷ ищем общего предка  $v$  и  $w$ 
8:   if  $u = v$  or  $u = w$  then
9:     return  $\emptyset$  ▷ если общий предок совпадает с  $v$  или  $w$ , то пути уже совмещены
10:  else
11:     $x := \text{topmost}(v, u)$ 
12:     $y := \text{topmost}(w, u)$ 
13:    if  $x < y$  then ▷ нужно, потому что будем вставлять на первом шаге
14:       $\text{swap}(x, y)$  ▷ путь от  $x$  до  $v$  в путь от  $y$  до  $w$ 
15:       $\text{swap}(v, w)$ 
16:    if  $u \neq \emptyset$  then
17:       $\text{cut}(x)$ 
18:    while  $x < u$  do ▷ начало merge step
19:       $t := \text{topmost}(w, x)$  ▷  $l(z) \leq l(x)$ , а  $l(t)$  уже нет
20:       $\text{link}(x, \text{parent}(t))$  ▷ значит  $x$  должен быть ребёнком  $z$ 
21:       $\text{cut}(t)$ 
22:       $y := x$  ▷ теперь мы хотим вставлять путь от  $t$  до  $w$ 
23:       $x := t$  ▷ в путь от  $x$  до  $v$ 
24:       $\text{swap}(v, w)$  ▷ конец merge step
25:     $\text{link}(x, w)$ 

```

Операцию, которая находится в теле **while** назовём **merge step**. Картинка к ней показана ниже:

Чтобы оценить количество шагов, достаточно оценить количество изменений родителя какой-либо вершины. Поймём, что количество изменений родителя это количество **merge steps** плюс не более чем 2: в каждом **merge step** ровно одно изменение родителя, еще одно берётся в самом конце — в **link( $x, w$ )**, и еще может быть одно, если они из разных деревьев мы делаем **initial link**.

Теперь докажем следующую лемму.

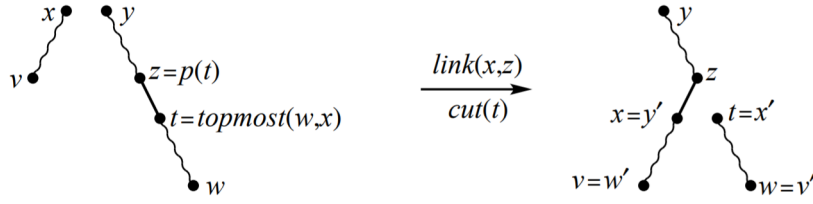


Рис. 20: merge step

**Лемма 26.** *Количество изменений родителей за все **merge** — это  $\mathcal{O}(m \log n)$ .*

*Доказательство.* Будем считать, что все наши ключи это не просто рациональные числа, а числа  $\{1, \dots, n\}$ . Для этого упорядочим все наши ключи в порядке возрастания и заменим каждый ключ на соответствующий номер.

Определим **cost** операции как количество изменений родителя.

$$\mathbf{am. cost} = cost + \Delta\Phi$$

Потенциал следующий:

- каждому ребру  $e$  даём 1 потенциала ( $\Phi_e$ );
- от каждого ребра  $(v, parent(v))$  дадим  $\log(v - parent(v))$  родителю и  $\log(v - parent(v))$  ребёнку;
- $\Phi_v$  от вершины определяется как сумма потенциалов, которая приходит ей от рёбер (из предыдущего пункта);
- $\Phi = \sum_{v \in V} \Phi_v + \sum_{e \in E} \Phi_e$ .

Заметим, что **cut** и **delete** уменьшают  $\Phi$  хотя бы на 1 и дают не более одного изменения родителя. Значит их **am. cost**  $\leq 0$ . Остаётся только **merge**.

В начале **merge** возможен **initial link** (так как вершины могут быть в разных деревьях). Заметим, что он увеличивает потенциал не более, чем на  $2 \log n + 1$ : по  $\log n$  каждой корневой вершине, которые мы соединяем, и 1 от ребра.

Как влияет **merge step**: Посмотрим на родителей  $t$  за два **merge step**: пусть  $parent'(t)$  это родитель, который будет у  $t$  на следующем **merge step** после того, который показан на рисунке 20. Тогда:

$$t > parent'(t) \geq x > parent(t)$$

Первое неравенство понятно — это просто свойство кучи, второе чуть хитрее: новый родитель  $t$  будет в ветке  $y'$ , то есть в ветке  $x$ , но вполне может так оказаться, что это будет сам  $x$ , поэтому знак нестрогий. Последнее неравенство снова видно из рисунка 20, так как  $z = parent(x)$ .

Математической магией этих трёх неравенств получаем, что:

- 1) либо  $t - \text{parent}'(t) \leq \frac{t - \text{parent}(t)}{2}$ ;
- 2) либо  $x - \text{parent}(t) \leq \frac{t - \text{parent}(t)}{2}$ .

Заметим, что гарантированно выполняется одно из этих двух условий. Более того, потенциал меняется только у вершин  $t$  и  $\text{parent}(t)$ . Разберём каждое из них:

- 1) Рассмотрим вершину  $t$ . Тогда потенциал, приходящий от родителя для неё уменьшается хотя бы на  $\log(t - \text{parent}(t)) - \log(t - \text{parent}'(t)) = \log \frac{t - \text{parent}(t)}{t - \text{parent}'(t)} \geq 1$ . Потенциал, приходящий от детей для неё не изменился. Где еще произошло изменение потенциала? Мог измениться потенциал, приходящий от детей для вершины  $\text{parent}(t)$ : он был  $\log(t - \text{parent}(t))$ , а стал  $\log(x - \text{parent}(t))$ . Но  $t - \text{parent}(t) > x - \text{parent}(t)$ , а значит он снова мог только уменьшиться. Значит одно изменение родителя скомпенсировалось уменьшением потенциала хотя бы на 1.
- 2) Рассмотрим вершину  $\text{parent}(t)$ . Тогда потенциал, приходящий от детей для неё уменьшается хотя бы на  $\log(t - \text{parent}(t)) - \log(x - \text{parent}(t)) = \log \frac{t - \text{parent}(t)}{x - \text{parent}(t)} \geq 1$ . Потенциал, приходящий от родителей для неё не меняется. Где еще произошло изменение потенциала? Мог измениться потенциал, приходящий от родителей вершины  $t$ : он был  $\log(t - \text{parent}(t))$ , а стал  $\log(t - \text{parent}'(t))$ . Но  $t - \text{parent}(t) > t - \text{parent}'(t)$ , а значит он снова мог только уменьшиться. Значит одно изменение родителя скомпенсировалось уменьшением потенциала хотя бы на 1.

Таким образом, **am. cost** за один **merge**  $= \mathcal{O}(\log n)$ . Действительно, **initial link** даёт нам  $2 \log n + 1$ , каждый **merge step** даёт нам не более 0 и, в конце произошло одно дополнительное изменение родителя.  $\square$

Наконец, итоговое изменение потенциала  $\Delta\Phi$  больше нуля, так как в начале был ноль, а в конце что-то положительное. Значит  $\text{total\_cost} \leq \text{total\_am.cost} - \Delta\Phi \leq \text{total\_am.cost} = \mathcal{O}(m \cdot \log n)$ . Теперь, вспоминая, что все операции в нашем дереве работают за  $\mathcal{O}(m \cdot \log(n))$  мы получаем оценку  $\mathcal{O}(m \cdot \log^2 n)$  на все операции **merge**.

### 8.3 Merge без операций cut

Теперь мы хотим получить амортизированный  $\mathcal{O}(\log n)$  вместо  $\mathcal{O}(\log^2 n)$ . Также как и в прошлой секции, будем представлять дерево в виде объединения непересекающихся по вершинам сплошных путей, соединённых пунктирными рёбрами.

**Определение 17.** Определим ранг вершины, как  $r(v) := \lceil \log \text{size}(v) \rceil$ , где  $\text{size}(v)$  — это сумма по ключам в поддереве  $v$ , включая саму  $v$ .

Ребро  $(v, w)$  будет сплошным, если  $r(v) = r(w)$ . Иначе ребро будет пунктирным. Пример разбиения на пути можно увидеть на рисунке 21.

Как и в прошлой подсекции, мы считаем, что все ключи это числа  $[1, \dots, n]$ . Из этого следует, что различных рангов не может быть больше, чем  $\log n + 1$ .

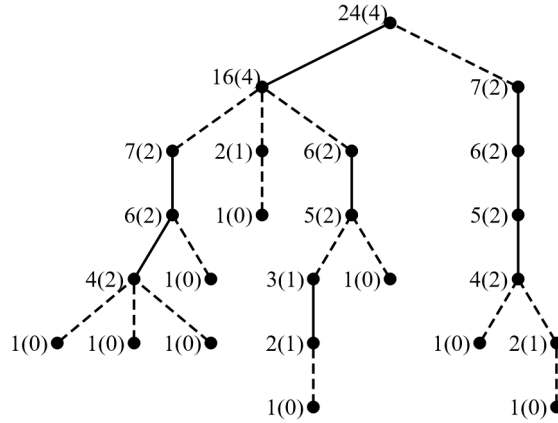


Рис. 21: разбиение дерева на пути по рангам

### 8.3.1 Новая структура дерева

Для каждого узла будем хранить следующее:

- указатель на **parent(x)**;
- указатель на **solid child(x)** (то есть указатель на ребёнка, соединённого сплошным ребром, если такой есть);
- указатель на **head(x)** — отдельная вершина, в которой хранится указатель начало сплошного пути (в будущем будем обозначать начало пути как **top**), в котором вершина находится;
- **dashed size(x) := 1 +  $\sum_{u \text{ — пунктирный ребёнок}} size(u)$**

Также, для каждого сплошного пути мы будем хранить следующее:

- **head(x)** — отдельная вершина, в которой хранится указатель на **top** пути, а также размер **top** и ранг всего пути (так как в нашем случае ранги у всех вершин из сплошных путей равны — это ровно критерий, по которому составлялись сплошные пути);
- поисковая структура — структура, которая будет уметь выполнять три функции (на ближайшие несколько подподсекций будем считать, что это чёрная коробка, которая просто умеет делать представленные функции):
  - удалять узлы в начале пути за  $\mathcal{O}(1)$ ;
  - добавлять одиночные узлы перед заданным за  $\mathcal{O}(1)$ ;
  - возвращать **topnode(x, s)** — наименьший узел на сплошном пути, содержащим  $s$ , ключ которого больше чем  $x$ .
- более того, каждый **head** хранит указатель на поисковую структуру соответствующего сплошного пути.



Тот факт, что мы храним только размер **top** пути, позволяет нам пересчитывать все остальные размеры, пользуясь формулой:

$$size(x) = size(parent(x)) - d(parent(x)).$$

На нашем дереве мы хотим поддерживать следующие операции:

- $insert(x, w)$  — просто создаём дерево, состоящее из одной вершины и одного пути. Соответственно инициализируем поисковую структуру и  $head$ . В худшем случае это делается за  $\mathcal{O}(1)$ ;
- $parent(v)$  — в нашем случае можно просто перейти по указателю за  $\mathcal{O}(1)$ ;
- $root(v)$  — мы немного изменим выход операции  $root(v)$ . Теперь мы будем возвращать не только сам корень, но стек, состоящий из **top** всех сплошных путей, которые находятся на  $[root(v), v]$ . Так как у каждого элемента есть указатель на **top** своего пути, а также беря в рассмотрение тот факт, что сплошных путей не больше, чем различных рангов (каждому сплошному пути соответствует ровно один ранг), получаем, что  $root(v)$  работает за  $\mathcal{O}(\log n)$ . Будем обозначать выход  $root(v)$  за  $S_v$ ;
- 1: **procedure**  $NCA(v, w)$   
 2:     **if**  $Top(S_w) \neq Top(S_v)$  **then**  
 3:         **return**  $\emptyset$   
 4:     **else**  
 5:         **while**  $Top(S_v) = Top(S_w)$  **do**  
 6:              $pop(S_v)$   
 7:              $pop(S_w)$   
 8:         **if**  $S_v = S_w = \emptyset$  **then**  
 9:             **return**  $\min\{v, w\}$   
 10:         **if**  $S_v = \emptyset$  and  $S_w \neq \emptyset$  **then**  
 11:             **return**  $\min\{v, parent(Top(S_w))\}$   
 12:         **if**  $S_v \neq \emptyset$  and  $S_w = \emptyset$  **then**  
 13:             **return**  $\min\{w, parent(Top(S_v))\}$   
 14:         **if**  $S_v \neq \emptyset$  and  $S_w \neq \emptyset$  **then**  
 15:             **return**  $\min\{parent(Top(S_v)), parent(Top(S_w))\}$

Заметим, что размер каждого стека  $S_v$  и  $S_w$  не превосходит  $\log n + 1$ . Во время работы **NCA** мы проходим по стекам  $S_v$  и  $S_w$  не более раза. Значит **NCA** работает за  $\mathcal{O}(\log n)$ .

- $link(v, w)$  — рассмотрим отдельно;
- $merge(v, w)$  — рассмотрим отдельно.

### 8.3.2 Link

Для начала заметим, что при операции **link(v, w)**, у каждого предка  $w$  увеличивается  $size$  на **size(v)**. Это значит, что у всех сплошных путей выше  $w$   $size$  увеличивается

одинаково, что облегчает пересчёт их рангов.

Сам **link** состоит из 4х частей:

- сначала добавляем ребро  $(v, w)$  как пунктирное ребро;
- находим множество  $Q$  — вершины, ранг которых увеличился;
- делаем все сплошные рёбра, выходящие из детей вершин из  $Q$ , пунктирными;
- делаем рёбра вершин из  $Q \cup \{v\}$  в их родителя сплошными, если у них совпадают ранги.

Теперь я постараюсь описать процесс чуть более детально:

- находим  $S_w$ , делаем  $\text{parent}(v) = w$  и добавляем  $\text{size}(v)$  к  $d(w)$  и к каждому  $\text{size}(x)$ , где  $x \in S_w$ ;
- повторяем следующее, до тех пор, пока  $S_w$  не станет пустым: вытаскиваем верхний элемент  $f \in S_w$ , вычисляем его новый ранг, если ранг увеличился, то добавляем его в конец  $Q$ . Если у  $f$  есть сплошной ребёнок, то вычисляем его новый  $\text{size}$  как  $\text{size}(f) - d(f)$  и пушим  $g$  в  $S_w$ . Так как ранг вершины не может увеличиться, без увеличения ранга её сплошного родителя, то эта операция корректна;
- идём по  $Q$  из начала в конец: смотрим на  $f \in Q$ , если у  $f$  есть сплошной ребёнок  $g$ , то делаем  $\text{solid}(f) = \text{null}$ , добавляем  $\text{size}(g)$  к  $d(f)$ , удаляем  $f$  из поисковой структуры  $\text{head}(g)$ , делаем  $\text{top}(\text{head}(g)) = g$ , а  $f$  делаем единичным сплошным путём. Мы корректно удаляем всё ненужное из поисковых структур, потому что идём по сплошным путям сверху вниз;
- идём по  $Q$  из начала в конец: смотрим на  $f \in Q$ , если у предка такой же ранг, как и у  $f$ , то делаем  $\text{solid}(\text{parent}(f)) = f$ , изменяя при этом  $d(\text{parent}(f))$ . Далее, удаляем все  $\text{head}$  и поисковые структуры для  $f$  (напомню,  $f$  — одноэлементный сплошной путь), делаем  $\text{head}(f) = \text{head}(\text{parent}(f))$  и добавляем  $f$  прямо под  $\text{parent}(f)$ . Если  $\text{rank}(f) = \text{rank}(v)$ , то делаем  $\text{head}(f) = \text{head}(v)$ ,  $\text{top}(\text{head}(v)) = f$  и добавляем  $f$  прямо над  $v$ . Завершающий шаг такой: если  $v$  и  $w$  имеют одинаковый ранг, то мы делаем ребро между ними сплошным и пересчитываем  $d(w)$ .

**Лемма 27.** Суммарное время на все операции **link** это  $\mathcal{O}(m \log n)$ .

*Доказательство.* Можем оценить время работы как константа умножить на количество вставок в  $Q$  или в  $S_w$ . Заметим, что если мы вставляем вершину в  $Q$ , то в итоге вставляем и в  $S_w$  (когда мы меняем сплошные рёбра на пунктирные; здесь мы можем считать, что мы просто добавляем их в  $S_w$ ).

Также в самом начале мы вызывали **root(w)** и поэтому мы добыли  $S_w$  размера  $\mathcal{O}(\log n)$ . Заметим, что при добавлении вершины в  $S_w$  её ранг увеличился. Так как ранг для каждой вершины увеличился не более чем на  $\mathcal{O}(\log n)$  раз и  $m > n$ , то общее время работы не более  $\mathcal{O}(m \cdot \log n)$ . **Важно!** Так как у нас нет cut, то ранги только растут.  $\square$

### 8.3.3 Merge

Я напишу основную часть алгоритма, но часть про пересчёт структуры я предлагаю прочитать в оригинальной статье (на страницах 12-13 статьи [Geo+11]).

```

1: procedure MERGE( $v, u$ )
2:   if  $\text{root}(v) \neq \text{root}(w)$  then
3:     if  $l(v) \geq l(w)$  then
4:        $\text{link}(v, w)$ 
5:     else
6:        $\text{link}(w, v)$ 
7:    $u := \text{NCA}(v, w)$  ▷ ищем общего предка  $v$  и  $w$ 
8:   if  $u = v$  or  $u = w$  then
9:     return  $\emptyset$  ▷ если общий предок совпадает с  $v$  или  $w$ , то пути уже совмещены
10:  else
11:     $S_v = \text{root}(v)$ 
12:     $S_w = \text{root}(w)$ 
13:    while  $\text{Top}(S_v) = \text{Top}(S_w)$  do
14:       $\text{pop}(S_v)$ 
15:       $\text{pop}(S_w)$ 
16:    if  $S_v \neq \emptyset$  and  $\text{parent}(\text{Top}(S_v)) = u$  then
17:       $x := \text{Top}(S_v)$ 
18:    else
19:       $x := \text{solid}(u)$ 
20:    if  $S_w \neq \emptyset$  and  $\text{parent}(\text{Top}(S_w)) = u$  then
21:       $y := \text{Top}(S_w)$ 
22:    else
23:       $y := \text{solid}(u)$ 
24:    if  $x < y$  then
25:       $x := y$ 
26:       $\text{swap}(v, w)$ 
27:       $\text{swap}(S_v, S_w)$ 
28:    while  $x < w$  do ▷ начало merge step  $z := \text{Top}(S_w)$ 
29:      while  $z \neq \text{null}$  and  $x > \text{parent}(z)$  do
30:        replace  $z$  by the node below it on  $S_w$ 
31:        Make it null if we reached bottom of  $S_w$ 
32:      if  $z = \text{null}$  then
33:         $t := \text{topnode}(x, w)$ 
34:      else
35:         $t := \text{topnode}(x, \text{parent}(z))$ 
36:       $\text{parent}(x) := \text{parent}(t)$ 
37:      Update data structure
38:       $x := t$ 
39:       $\text{swap}(v, w)$ 
40:       $\text{swap}(S_v, S_w)$  ▷ конец merge step

```

Новый **merge step** показан на рисунке 22:

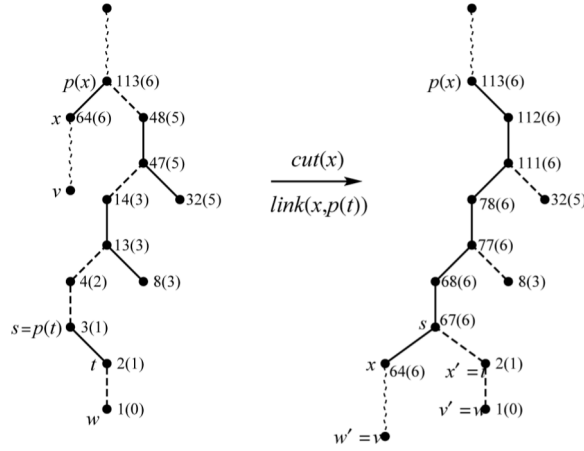


Рис. 22: new merge step

**Небольшое замечание.** Для того, чтобы понять следующую лемму, по-хорошему, надо понимать ту самую часть про **Update data structure**, которую я опустил. Но для леммы достаточно понимать, что мы обновляем снова используя очередь  $Q$ , в которую мы добавляем вершины только после того, как достаём их из одного из стеков  $S_w$  и  $S_v$ .

**Лемма 28.** *Не считая вызовов **topnode**, затраченное время на все **merge** не превосходит  $\mathcal{O}(m \cdot \log n)$ .*

*Доказательство.* Во время одного **merge** мы возможно соединяем два дерева с помощью **link**. Это мы делаем за амортизированный  $\mathcal{O}(\log n)$ .

Если не учитывать **topnode**, то время, затраченное на **merge** это  $\mathcal{O}(1)$  за каждый **merge step** плюс  $\mathcal{O}(1)$  за каждую вершину, которую мы добавляем в  $Q$ .

Из первой подсекции (лемма 26) мы знаем, что количество **merge steps** это  $\mathcal{O}(m \cdot \log n)$ . Во время **merge step** мы достаём из  $S_v$  и  $S_w$  и добавляем в  $Q$ . Как и в прошлой лемме, в начале мы добавили в  $S_v$  и  $S_w$  по  $\mathcal{O}(\log n)$  вершин, а последующие добавления снова лишь увеличивают ранг, а так как у каждой вершины не более  $\mathcal{O}(\log n)$  увеличений ранга, то мы снова получаем  $\mathcal{O}(m \cdot \log n)$ . **Важно!** Так как у нас нет **cut**, то ранги только растут.

□

### 8.3.4 Поисковая структура на путях

Мы будем использовать немного прокаченное **splay tree**.

**Определение 18.** **Finger** — узел, посещённый в **splay**-дереве последний раз.

Мы доказывали в третьей секции (теорема 8), что амортизированная стоимость операций в **splay**-дереве равна  $\mathcal{O}(\log(d+1))$ , где  $d = |f' - f|$ , а  $f'$  и  $f$  — новый и старый **fingers**.

**Определение 19.**  $\log(d+1)$  — время Коула для данной операции.

У времени Коула есть одно полезное свойство:

**Лемма 29.** *Добавление посещения узла между операциями не уменьшает время Коула.*

*Доказательство.* Несложно придумать самим. За деталями смотри доказательство леммы 3.4 на странице 16 в статье [Geo+11].  $\square$

Наша цель его амортизировать в нашей структуре. Но возникает одна проблема: в процессе **link** и **merge** мы можем несколько раз добавлять вершину вниз нашего дерева и удалять из корня поочередно, что даст нам логарифм высоты дерева (так как расстояние между **fingers** будет как раз вся высота). А мы хотим получить амортизированно получить  $\mathcal{O}(1)$ . Поэтому мы будем добавлять все вершины с задержкой. Тогда все **fingers** будут рядом при добавлениях и удалениях в структуру. Но, тогда **topnode** будет не просто бинарным поиском, а чуть сложнее.

Хранить эти дополнительные вершины будем следующим образом: на первую вершину сделаем указатель из самой правой вершины **splay**-дерева. А новые просто будем последовательно добавлять друг за другом.

Реализация **topnode(x,e)** выглядит следующим образом: мы делаем бинарный поиск  $x$  в **splay**-дереве, для пути для вершины  $e$ . Тогда ответом будет являться:

- либо последний посещённый узел в бинарном поиске;
- либо сплошной ребёнок последнего посещённого узла;
- либо вершина, которая находится не в дереве.

Если это либо первая, либо вторая ситуация, то, мы нашли и делаем **splay**. Если же это третья ситуация, то мы остановились в самой правой нижней вершине, обозначим её за  $y$ , делаем **splay(y)**, а далее просто идём по указателям по вершинам и последовательно находим **topnode**. Пока мы идём до нашего результата и находим что-то новое — добавляем это в **splay**-дерево.

**Лемма 30.** *Если поисковая структура это **splay**-дерево с задержками, как описано выше, то суммарное время на все операции с обновлением поисковых структур и на все **topnode** — это  $\mathcal{O}(m \cdot \log n)$ .*

*Доказательство.* Лемма 3.5 на странице 16 в статье [Geo+11]. Но мы считаем, что это утверждение без доказательства!  $\square$

## 9 Динамизация структур данных

Записал: Всеволод Евтушевский

Пусть у нас есть задача поиска:

$$Q : X \times 2^D \rightarrow A,$$

где  $A$  — ответы,  $D$  — объекты,  $X$  — запросы.

### 9.1 Динамизация для decomposable задач поиска

**Определение 20.** Говорим, что задача поиска является decomposable, если функция  $Q$  обладает следующим свойством:

$$Q(x, D \cup D') = Q(x, D) \blacklozenge Q(x, D'),$$

где  $\blacklozenge$  означает, операцию, которая быстро считается.

**Пример 1.** Пусть мы хотим в каком-то множестве точек узнавать ближайшего соседа от точки запроса. Ясно, что мы можем узнать ближайшего соседа в множестве  $D$ , ближайшего соседа в множестве  $D'$  и взять из них того, что ближе.

Предположим, что у нас есть такая функция  $Q$ . Давайте сформулируем задачу:

Итак, пусть существует структура данных, которая умеет только хранить и выдавать ответ на запрос, со следующими свойствами:

- В ней  $n$  объектов;
- Она занимает  $S(n)$  памяти;
- Её можно построить за время  $P(n)$ ;
- Она отвечает на вопрос за время  $Q(n)$ .

**Задача 1.** Мы хотим построить структуру данных, которая обладает следующими свойствами:

- Она занимает  $S'(n) = O(S(n))$  памяти;
- Она строится за время  $P'(n) = O(P(n))$ ;
- Она отвечает на вопрос за время  $Q'(n) = O(\log n \cdot Q(n))$ ;
- Вставка занимает время  $I'(n) = O\left(\log n \frac{P(n)}{n}\right)$ .

В данной задаче имеется ввиду амортизированное время для запроса и вставки.

Итак, давайте строить. Разбиваем наши элементы на логарифмическое количество уровней. Теперь у нас имеется  $\log n$  уровней, которые называются  $L_0, \dots, L_\ell$ :

- $L_0$ :  $\emptyset$  или структура с 1 элементом

- $L_1$ :  $\emptyset$  или структура с 2 элементами
- ...
- $L_i$ :  $\emptyset$  или структура с  $2^{i-1}$  элементами
- ...
- $L_\ell$ :  $\emptyset$  или структура с  $2^{\ell-1}$  элементами

Запрос делаем следующим образом:

```

Query(x):
  a := E (ответ на  $\emptyset$ )
  for i = 0 to  $\ell$ 
    if  $L_i \neq \emptyset$ 
      a := a  $\blacklozenge$  Q(x,  $L_i$ )
  return a

```

Ясно, что на запрос мы потратим времени

$$\sum_{i=0}^{\ell-1} Q(2^i) < \ell \cdot Q(n) = O(\log n)Q(n).$$

**Замечание.** Если  $Q(n)$  — большое, то есть  $Q(n) > n^\varepsilon$  при каком-то  $\varepsilon > 0$ , то время на запросе — это  $O(Q(n))$ .

Вставку делаем следующим образом:

```

Insert(x):
  Find min  $k : L_k = \emptyset$ 
  build  $L_k := \{x\} \cup \bigcup_{i < k} L_i$ 
  for i = 0 to  $k - 1$ 
    destroy  $L_i$ 

```

Ясно, что build происходит за  $P(2^k)$ .

Мы хотим, чтоб цена за одну вставку была

$$I'(n) = O(\log n) \frac{P(n)}{n}.$$

$$I'(n) = O(\log n) \frac{P(n)}{n} = \sum_{i=0}^{\log n} \frac{P(2^i)}{2^i}.$$

Ясно, что за  $n$  вставок у нас получится

$$\sum_{i=0}^{\log n} P(2^i) \frac{n}{2^i} = n \sum_{i=0}^{\log n} \frac{P(2^i)}{2^i} = O(\log n)P(n).$$

Что и требовалось.

**Замечание.** Если  $P(n) > n^{1+\varepsilon}$ , где  $\varepsilon > 0$ , то  $I'(n) = O\left(\frac{P(n)}{n}\right)$ .

**Задача 2.** Мы хотим получить тот же результат, что и в Задаче 1, только время для запроса и вставку теперь не амортизированное, а в худшем случае.

Теперь на каждом уровне у нас будут старые структуры и новые. То есть, на уровне  $i$  будут находиться структуры  $O_i^1, O_i^2, O_i^3, N_i$ , снова в каждой из них  $\emptyset$  или  $2^i$  объектов. Также ещё мы хотим, чтоб выполнялось:

- если  $O_i^1 = \emptyset$ , то  $O_i^2 = \emptyset$
- если  $O_i^2 = \emptyset$ , то  $O_i^3 = \emptyset$

От  $N_i$  хотим, чтоб  $N_i = \emptyset$  или  $N_i$  была частичной (то есть той, которая находится в процессе построения) структурой для  $2^i$  объектов. Также нам надо, чтоб каждый объект был ровно в одной структуре  $O$  и, может быть, в структуре  $N$ .

Запрос делаем следующим образом:

```

Query(x):
  a = E
  for i = 0 to  $\ell$ 
    if  $O_i^1 \neq \emptyset$ 
      a := a  $\blacklozenge$  Query(x,  $O_i^1$ )
    if  $O_i^2 \neq \emptyset$ 
      a := a  $\blacklozenge$  Query(x,  $O_i^2$ )
    if  $O_i^3 \neq \emptyset$ 
      a := a  $\blacklozenge$  Query(x,  $O_i^3$ )
  return a

```

Очевидно, что время запроса у нас такое же.

Вставку делаем следующим образом:

```

Insert(x):
  for i =  $\ell \dots 1$ 
    if  $O_{i-1}^1 \neq \emptyset$  and  $O_{i-1}^2 \neq \emptyset$ 
      do  $\frac{P(2^i)}{2^i}$  шагов построения  $N_i := O_{i-1}^1 \cup O_{i-1}^2$ 
    if  $N_i$  is complete
      destroy  $O_{i-1}^1, O_{i-1}^2$ 
       $O_{i-1}^1 := O_{i-1}^3$ 
      destroy  $O_{i-1}^3$ 
      Update(i)
   $N_0 := x$ 
  Update(0)

```

Что такое Update( $i$ )?



```

Update(i):
  if  $O_i^1 = \emptyset$ 
     $O_i^1 := N_i$ 
  else if  $O_i^2 = \emptyset$ 
     $O_i^2 := N_i$ 
  else  $O_i^3 := N_i$ 
  destroy  $N_i$ 

```

Все ошибки не могут быть заняты, это доказывается по индукции, но это было оставлено в качестве упражнения.

Идея в том, что мы не делаем построение сразу, а делаем столько его шагов, сколько можем себе позволить. А значит, время вставки даже в худшем случае будет  $O\left(\frac{P(n)}{n} \log n\right)$ .

## 9.2 Динамизация для invertible задач поиска

**Определение 21.** Говорим, что задача поиска является invertible, если функция  $Q$  обладает следующим свойством: Если  $D = D_1 \cup D_2$ , то

$$Q(x, D_1) = Q(x, D) - \blacklozenge Q(x, D_2),$$

где  $-\blacklozenge$  быстро считается.

Предположим, что у нас есть такая функция  $Q$ . Давайте сформулируем задачу:

**Задача 3.** Пусть у нас есть структура данных  $M$ , которая умеет вставлять и ещё другая структура данных  $G$ , в которую мы будем вставлять элемент, который хотим удалить из  $M$ . Хотим, чтоб амортизированное время удаления из  $M$  равнялось  $O\left(P(n) \frac{\log n}{n}\right)$ .

```

Query(x):
  Return  $Q(x, M) - \blacklozenge Q(x, G)$ 

```

Подвох заключается в том, что у нас может быть много удалённых элементов, поэтому весь наш анализ будет от количества элементов, которые когда-либо вставлялись. А мы хотим не этого.

Мы будем ждать момента, когда  $|G| > \frac{1}{2}|M|$ , и в это время перестраивать структуру полностью. Идея в том, что между двумя такими моментами пройдёт минимум  $\frac{n}{2}$  удалений, а значит, когда мы считаем амортизированную стоимость удаления, мы можем заключить, что цена каждого удаления — это  $O\left(\frac{P(n)}{n}\right) + O\left(P(n) \frac{\log n}{n}\right)$  (второе слагаемое — это вставки в структуру  $G$ ).

```

When  $|G| > \frac{1}{2}|M|$ 
  Build  $M := M \setminus G$ 
   $G := \emptyset$ 

```

Также есть проблема, что глобальные перестроения могут мешать локальным, то есть для работы вставок мы тоже перестраиваем систему, и надо, чтоб нам хватило ресурсов для вставки, несмотря на то, что мы потратили что-то на удаление. Для

борьбы с этим достаточно просто амортизированную стоимость удаления умножить на достаточно большую константу.

**Задача 4.** Мы хотим получить тот же результат, что и в задаче 3, только время теперь не амортизированное, а в худшем случае.

Для решения Задачи 4 мы поддерживаем три структуры:  $M, I, G$ :

Query(x):  
Return  $Q(x) = Q(x, M) \blacklozenge Q(x, I) - \blacklozenge Q(x, G)$

В какой-то момент снова перестраиваем структуру, а именно в случае, если  $|G| > \frac{1}{2}(|M| + |I|)$ . Чтоб удовлетворять запросам, придётся заморозить наши структуры. Поэтому также поддерживаем ещё три структуры:  $M', I', G'$ .

Во время работы по перестроению структуры, мы будем временно объекты, которые мы хотим удалить, вставлять в  $G'$ , которые хотим вставить, вставляем в  $I'$ .  $M'$  — это, собственно, структура, которую мы строим. Пока мы строим:

Query(x):  
Return  $Q(x) = Q(x, M) \blacklozenge Q(x, I) \blacklozenge Q(x, I') - \blacklozenge Q(x, G) - \blacklozenge Q(x, G')$

Когда мы делаем каждое удаления, мы будем делать  $c \frac{P(n)}{n}$  (для какой-то константы  $c$ ) шагов построения структуры  $M'$ .

Через  $\frac{n}{c}$  шагов  
 $M := M', I := I', G := G'$

Ясно, что время в худшем случае будет каким надо, а именно,

$$O\left(P(n) \frac{\log n}{n}\right).$$

### 9.3 Динамизация для других задач поиска

Наши запросы не всегда бывают invertible. Далее будет идея того, что нужно делать с теми запросами, которые не invertible.

Нам всё равно потребуется какое-нибудь условие, а именно, weak deletion in time  $D(n)$ . Это какая-то операция, которая даст структуре данных понять, без собственно удаления элемента, что этого элемента не должно в ней быть, и при этом не увеличит время на запрос.

Делаем то же самое для вставок — поддерживаем уровни.

Когда нам нужно удалить  $x$ : сделаем weak deletion  $x$  в каждом уровне, содержащем  $x$  (+ чтоб найти эти уровни, нам нужен какой-то словарь, который по элементу называет уровни, где он содержится).

Делаем те же глобальные перестройки, то есть когда не удаленных объектов  $< \frac{1}{2}$  удалённых — делаем global rebuild.

Из прошлого рассуждения знаем, что

- амортизированное время вставки — это  $O\left(P(n) \frac{\log n}{n} + D(n)\right)$ ;

- амортизированное время удаления — это  $O\left(\frac{P(n)}{n}\right)$ .

Это также можно несколькими структурами сделать в худшем случае. А именно, структурами:  $M, S, M', S', u$ .  $M$  — главная,  $S$  её дублирует. Когда у нас удалений становится больше, чем половина тех элементов, которые лежат в  $M$ , снова начинаем глобальное перестроение. Для этого мы заморозим структуру  $S$ , для новых запросов заведём  $u$  — очередь запросов, которую будем применять к  $M'$ .  $M'$  — это рабочая копия  $M$  на время перестроения. Когда мы закончили, у нас  $M'$  будет на правах  $M$  и  $S'$  на правах  $S$ . После этого надо сделать все обновления в очереди  $u$ . Нужно просто подобрать константы, сколько шагов построения  $S'$  и  $M'$  мы будем выполнять каждый раз, когда делаем удаление.

## 10 Структуры данных и путешествия во времени

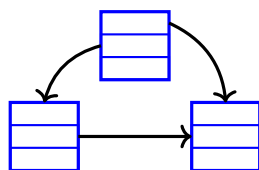
*Записала: Татьяна Белова*

Оригинальная статья: [DIL07].

В этом разделе нам будут интересны структуры данных, позволяющие осуществлять эти самые "путешествия во времени". Определить это понятие можно по-разному, мы разберем два варианта: персистентность и ретроактивность.

### 10.1 Персистентность

Мы будем рассматривать структуры данных в модели pointer machine. Структура данных рассматривается как некоторое множество узлов, в каждом узле хранится  $O(1)$  полей, в поле может быть записано число или указатель на другой узел. Иногда вводят дополнительное константное ограничение на входящую степень узла, то есть, для каждого узла, количество указателей, указывающих на него, должно быть не больше какой-то константы.



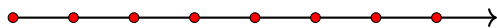
Операции, которые поддерживает структура:

- $x = \text{new node}$  — создать новый узел
- $x = y.\text{field}$  — взять значение поля
- $x = y + z$  — объединить два узла
- $\text{destroy}(x)$  — удалить узел, если на него нет указателя

Персистентность бывает разных видов:

### 1) Частичная персистентность

- изменяем только последнюю версию
- спрашиваем о любых версиях



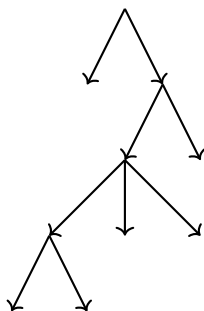
*Известные результаты.* Если у структуры данных константная входящая степень для всех узлов, то можно сделать ее частично персистентной с константным мультипликативным overhead-ом.

[Dri+86] сделали алгоритм с амортизированным  $\mathcal{O}(1)$  overhead-ом.

[Bro96] сделали алгоритм с  $\mathcal{O}(1)$  overhead-ом в худшем случае.

### 2) Полная персистентность: частичная + можем изменять прошлое.

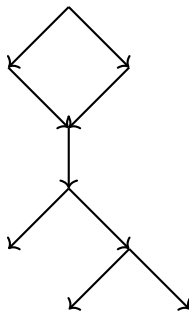
Каждый раз, когда мы изменяем прошлое, мы создаем новую версию структуры. Получается дерево версий.



*Известные результаты.* Если у структуры данных константная входящая степень для всех узлов, то ее можно наделить полной персистентностью также с константным мультипликативным overhead-ом. Правда в случае полной персистентности такого overhead-а умеют добиваться только амортизированно ([Dri+86]), и можно ли добиться его в худшем случае — открытый вопрос.

### 3) Конфлюэнтная персистентность: полная + можем комбинировать версии.

В этом случае, помимо обычных изменений структуры, можно также сливать две версии в одну. Получается ациклический граф версий.



*Известные результаты.* С конфлюентной персистентностью все сложнее, [FK03] умеют с overhead-ом  $\log(\#upd) + \max_v e(v)$ , где  $\#upd$  – это количество всех сделанных к этому моменту изменений,  $v$  – вершина в графе версий, а  $e(v) = 1 + \log\#(\text{путей из корня в } v)$ .

Открытый вопрос: можно ли сделать overhead  $\mathcal{O}(\log n)$ ? При этом  $\mathcal{O}(\log n)$  умеют получать для частного случая задачи, когда мы хотим сливать только версии, в которых нет общих полей ([CIL12]).

- 4) **Функциональная персистентность:** комбинированная + нельзя модифицировать узлы

*Известные результаты.* В общем виде задачу решать не умеют. Умеют только для частных случаев. Например, Balanced BST и Link-cut-tree умеют делать функционально персистентными с overhead-ом  $\mathcal{O}(\log n)$  ([DLP08]).

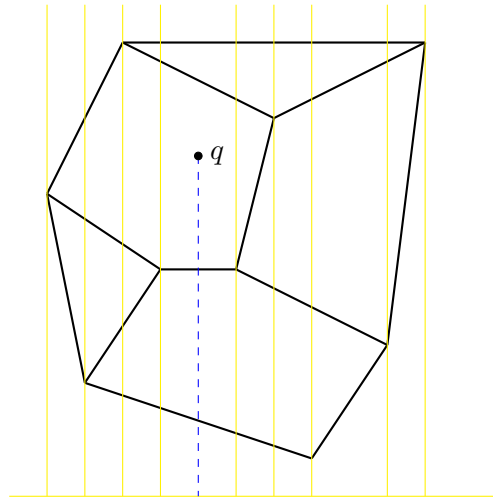
## Приложения частичной персистентности

### Задача Point location

Дан плоский граф  $G$  с ребрами-отрезками. Запросы: по данной точке  $q$  на плоскости определить, в какой грани  $G$  она находится. Можно сделать предобработку.

#### Решение с помощью частичной персистентности.

Отсортируем вершины графа по координате  $x$ . Будем в этом порядке добавлять вершины и поддерживать множество ребер, которые пересекают вертикальную полосу от этой вершины до следующей. Ребра будем хранить в каком-нибудь сбалансированном BST  $T$ . Таким образом, у нас появилось  $n$  версий этого BST, по версии для каждой точки.



Когда приходит запрос на определение положения точки  $q$ , мы сначала должны понять, между какими вершинами  $v$  и  $u$  по оси  $x$  лежит  $q$ . Это делается за  $\mathcal{O}(\log n)$ . Затем обращаемся к версии  $T$  для  $v$  и смотрим, между какими ребрами лежит точка.

Изменяем мы только последнюю версию  $T$ , запросы делаем к любой, получается, нам достаточно частичной персистентности.

## 10.2 Ретроактивность

Пусть есть структура данных, поддерживающая какие-то *updates* и *queries*.

В случае ретроактивности мы хотим уметь возвращаться в прошлое и исправлять какие-то действия, а именно отменить или добавить какой-то *update*. При этом мы не будем создавать новую ветку версий, как в случае персистентности, ветка будет всего одна, и все действия, произошедшие после нашего изменения, по-прежнему будут учитываться.

Операции:

- $\text{Insert}(t, \text{update})$  – добавить изменение *update* в момент времени  $t$
- $\text{Delete}(t)$  – удалить изменение, произошедшее в момент времени  $t$
- $\text{Query}(t, \text{query})$  – сделать запрос *query* в момент времени  $t$

Операции мы будем писать с большой буквы, чтобы не путать их с операциями *insert*, *delete* и *query* для структуры.

Также небольшая деталь: мы считаем, что между любыми моментами времени мы всегда можем вставить операцию, причем без дополнительных затрат на кодирование этих моментов времени. Для этого поддерживаем *order-maintenance structure*, которая будет об этом заботиться, и которую мы не будем обсуждать.

Ретроактивность бывает разных видов:

### 1) Частичная ретроактивность

- *Insert*, *Delete* в любой момент времени  $t$
- *Query* только в последний момент времени  $t_{\text{now}}$

### 2) Полная ретроактивность

- *Insert*, *Delete* в любой момент времени  $t$
- *Query* в любой момент времени  $t$

Введем параметры для измерения эффективности ретроактивной структуры.

- $m$  – суммарное количество изменений за все время
- $r$  – при обращении к моменту времени  $t$ , количество операций, примененных к структуре после  $t$
- $n$  – максимальное количество одновременно находящихся в структуре элементов за все время

Теперь давайте оценим *overhead* на выполнение операции, если мы делаем структуру ретроактивной.

## Частичная ретроактивность

1)  $\text{Insert}(t, \text{update})$

Если операции коммутативные, то  $\text{Insert}()$  делается с константным overhead-ом, так как мы всегда можем применить операцию в самом конце.

$$\text{Insert}(t, \text{update}) \Leftrightarrow \text{Insert}(t_{\text{now}}, \text{update})$$

2)  $\text{Delete}(t)$

Если операция  $a$ , которую мы хотим отменить, обратима, а также все операции коммутируют, то  $\text{Delete}(t) \Leftrightarrow \text{Insert}(t_{\text{now}}, a^{-1})$ .

Таким образом, если операции коммутативные и обратимые, то мы можем сделать структуру частично ретроактивной с overhead-ом  $\mathcal{O}(1)$ .

Еще оказывается, что структуру данных можно сделать частично ретроактивной с константным overhead-ом, если это структура данных для задачи поиска, т.е. структура с операциями  $\text{insert}$ ,  $\text{delete}$  и  $\text{query}$ . В этом случае мы также можем вставлять и удалять элементы только в последний момент времени и благодаря этому получаем ретроактивность с константным overhead-ом.

## Полная ретроактивность

Мы снова рассмотрим некоторый подкласс структур данных, а именно структуры данных для *decomposable search problems*, и научимся наделять их полной ретроактивностью.

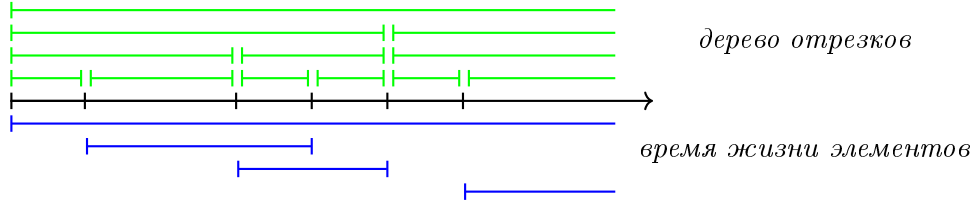
Напоминание: *decomposable search problem* (d.s.p.) — это задача поиска с дополнительным условием  $Q(x, D \cup D') = Q(x, D) \blacklozenge Q(x, D')$ , где операция  $\blacklozenge$  выполняется за константное время.

**Теорема 31.** *Структуру данных для d.s.p. с операциями  $\text{insert}$ ,  $\text{delete}$  и  $\text{query}$ , работающими за время  $T(n)$  и использующими  $S(n)$  памяти, можно сделать полностью ретроактивной, при этом все операции будут работать за время*

- $\mathcal{O}(T(m))$ , если  $T(m) = \Omega(n^\varepsilon)$ ,  $\varepsilon > 0$
- $\mathcal{O}(T(m) \log m)$ , иначе

и использовать  $\mathcal{O}(S(m) \log m)$  памяти, где  $m$  — это общее количество изменений структуры.

*Доказательство.* Отметим все моменты времени, когда произошла какая-то операция. Таким образом, весь интервал от начального момента времени до последнего разбился на отрезки. Будем хранить их в дереве отрезков, представляющем из себя сбалансированное бинарное дерево, то есть сами наши отрезки будут в листьях дерева. Каждому элементу сопоставим интервал времени, в который он присутствует в структуре. Этот интервал покрывается  $\mathcal{O}(\log n)$  узлами нашего дерева, в них и запишем этот элемент. В каждом узле храним элементы в нашей структуре.



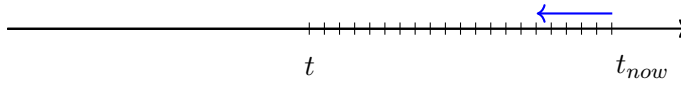
Теперь, когда нам нужно добавить или удалить элемент, происходит следующее. Если нужно, добавим новый момент времени, т.е. разделим один из отрезков на два и перебалансируем дерево. Потом добавим или удалим элемент из всех  $\mathcal{O}(\log m)$  соответствующих узлов.

Если мы хотим сделать Query для времени  $t$ , то мы должны рассмотреть  $\mathcal{O}(\log m)$  узлов, соответствующих  $t$ , и объединить с помощью  $\blacklozenge$  результаты query в них.  $\square$

### Общая техника

**Теорема 32.** Структуру данных с операциями, работающими за  $\mathcal{O}(T(n))$ , можно сделать полностью ретроактивной, при этом операции для  $t_{\text{now}}$  будут работать за время  $\mathcal{O}(T(n))$ , а ретроактивные операции будут работать за  $\mathcal{O}(rT(n))$ . Памяти потребуется  $\mathcal{O}(S(m))$ .

*Доказательство.* Будем запоминать все изменения, а также как изменилась структура, чтобы можно было откатить изменения.



Каждый раз, когда нам нужно сделать  $\text{Insert}(t, \text{update})$  или  $\text{Delete}(t, \text{update})$ , будем откатывать изменения от  $t_{\text{now}}$  до  $t$ , затем применять новое изменение и применяем все  $r$  изменений снова.  $\square$

**Теорема 33.** Существует структура данных в модели *straight-line-program* с операциями *update* и *query*, работающими за  $\mathcal{O}(1)$ , такая, что любая частично ретроактивная структура в модели *history-dependent algebraic-computation-tree*, *integer-RAM* или *real-RAM* будет тратить  $\Omega(r)$  времени на *update* или *query*, причем как в худшем случае, так и амортизированно.

*Доказательство.* Рассмотрим структуру, которая хранит два числа  $x$  и  $y$ , изначально равные нулю, и поддерживает следующие операции:

- $x += c$
- $y += c$
- $y = x \cdot y$

Покажем, что эта структура нам подходит. Для этого рассмотрим последовательность операций:



```

 $y \ += \ a_n$ 
 $y \ = \ x \cdot y$ 
 $y \ += \ a_{n-1}$ 
 $y \ = \ x \cdot y$ 
 $\dots$ 
 $y \ += \ a_0$ 
Query( $t_{now}, y$ )

```

Так мы получим значение многочлена  $a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$  в точке 0.

После чего сделаем ретроактивный Insert( $t = -1$ , " $x \ += \ c$ "). Теперь Query( $t_{now}, y$ ) уже дает нам значение этого многочлена в точке  $c$ .

И так мы можем считать значение многочлена в любой точке.

Но для вычисления многочлена в точке (при известном заранее многочлене, но неизвестной точке) есть нижняя оценка  $\Omega(n)$  в любой модели из условия ([FHM01]).

Таким образом, если мы сделаем достаточное количество вызовов Insert( $t = -1$ , " $x \ += \ c$ ") и Query( $t_{now}, y$ ), то мы поймем, что нам потребуется  $\Omega(r)$  времени на операцию даже амортизированно.  $\square$

### 10.3 Нижняя оценка на ретроактивизацию структуры в модели word RAM

**Определение 22.** *Модель вычислений* WORD RAM — машина с произвольным доступом, которая может считывать битовые слова длины  $w$  и производить битовые операции с такими словами за время  $O(1)$ .

**Определение 23.** *Модель вычислений* CELL-PROBE — это WORD RAM, в которой единственной операцией, имеющей цену и учитывающейся при подсчёте времени работы, является доступ к данным. Данные по-прежнему хранятся в блоках фиксированного размера, чтение целого блока имеет единичную стоимость.

**Определение 24.** *Свёртка* двух последовательностей слов  $\langle x_0 \dots x_{k-1} \rangle$ ,  $\langle y_0 \dots y_{k-1} \rangle$  — это последовательность слов

$$\langle w_0 \dots w_{2k-1} \rangle, \text{ такая, что } w_i = \sum_{a+b=i} x_a \times y_b. \quad (6)$$

**Задача 5** (Динамическая свёртка). Требуется поддерживать в памяти набор слов  $\langle x_0 \dots x_{2k-1} \rangle$  и эффективно отвечать на следующие запросы:

- 1) **change<sub>k</sub>( $x$ )**: присвоить  $x_k$  значение  $x$ .
- 2) **alg\_query<sub>k</sub>**: вернуть  $k$ -ую компоненту свёртки

$$\langle x_0 \dots x_{k-1} \rangle \otimes \langle x_k \dots x_{2k-1} \rangle.$$

**Теорема 34** ([FHM98], Теорема 1). *Задача 5 не решается на моделях CELL-PROBE и WORD RAM быстрее, чем  $\Omega(\sqrt{n})$  в худшем случае.*

**Теорема 35** ([DIL07], Теорема 3). *Существует структура данных в модели WORD RAM со словами размера  $\log n$ , которая поддерживает обновление и запрос за  $O(1)$ , но любая частично ретроактивная структура данных с теми же функциями требует*

$$\Omega\left(\sqrt{\frac{r}{\log r}}\right) \text{ amortised}$$

*либо на обновление, либо на запрос.*

*Доказательство.* Приведём пример такой структуры. Она будет поддерживать набор слов  $\langle w_1 \dots w_m \rangle$  линейного размера. Изначально все эти слова нулевые. Будут доступны следующие операции:

**update**     $w_i := x$   
                   $w_i := w_j + w_k$   
                   $w_i := w_j \times w_k$   
**query**      $w_i = ?$

Модель вычислений WORD RAM позволяет делать такие операции за константное время. С помощью такой структуры данных мы можем за  $O(n \log n)$  времени и  $O(n)$  памяти сгенерировать и проделать последовательность обновлений, которая посчитает свёртку (6) двух половинок хранимого набора слов: это называется быстрое дискретное преобразование Фурье.

Рассмотрим последовательность ретроактивных операций, состоящую из Insert вида  $w_i := x$  в начальный момент времени. Понятно, что возможность такой операции равносильна решению Задачи 5 о динамической свёртке, что не может быть сделано быстрее, чем за  $\Omega(\sqrt{n})$  на каждое изменение.

При этом при вычислении преобразования Фурье было сделано  $r = O(n \log n)$  операций. Чтобы выразить время операции через  $r$ , заметим, что  $n = \Omega(r / \log r)$ . Мы получили, что время работы нашей структуры данных на такой последовательности операций равно  $\Omega(\sqrt{n})$ , что, в свою очередь, равно

$$\Omega\left(\sqrt{\frac{r}{\log r}}\right).$$

□

## 11 От частичной ретроактивности к полной

*Записал: Борис Золотов*

### 11.1 Пессимистический результат

**Теорема 36** ([DIL07], Теорема 4). *Существует структура данных в модели CELL-PROBE, которая поддерживает частично ретроактивные обновления за константу, но при этом любая полно ретроактивная структура с теми же операциями будет требовать  $O(\log n)$  времени для запросов к прошлому (напомним,  $t$  — суммарное количество изменений в структуре).*

*Доказательство.* Приведём пример такой структуры. Она будет поддерживать набор чисел со следующими операциями:

`update`    `insert(c)`  
`query`     вернуть сумму всех чисел

Для частично ретроактивной версии этой структуры требуются также следующие операции:

`Insert` ( $t$ , «`insert(c)`»)  
`Delete` ( $t$ )

Понятно, что с такими запросами ретроактивные операции можно реализовать за константу: нужно всего лишь либо добавлять к текущей сумме, либо отнимать от неё соответствующее число.

Тем не менее, полно ретроактивная структура данных с таким функционалом умела бы решать задачу о динамической префиксной сумме. Действительно, мы с помощью неё могли бы вставлять число в любое место массива и считать сумму от самого начала до произвольного момента. Для задачи о динамической префиксной сумме существует нижняя оценка:  $\Omega(\log n)$  за операцию.

□

## 11.2 Позитивные результаты

Сейчас мы приведём общую схему, как из частично ретроактивной структуры данных сделать полно ретроактивную.

**Теорема 37** ([DIL07], Теорема 5). *Дана частично ретроактивная структура данных в модели POINTER MACHINE с константной входящей степенью. Пусть она требует время  $T(m)$  на ретроактивное обновление и  $Q(m)$  на запросы о её текущем состоянии. Тогда у этой структуры данных существует полно ретроактивная версия со следующими характеристиками:*

$$\begin{aligned}
 \text{Время на ретроактивное обновление} & \quad O(\sqrt{m} \cdot T(m)), \\
 \text{Время на запрос в произвольный момент} & \quad O(\sqrt{m} \cdot T(m) + Q(m)), \\
 \text{Используемая память} & \quad O(m \cdot T(m)).
 \end{aligned}$$

*Доказательство.* Будем хранить  $\sqrt{m}$  версий структуры данных —  $D_1, D_2, \dots, D_{\sqrt{m}}$  — равноудалённо раскиданных по временной оси, отражающей изменения в структуре. Когда приходит запрос о некотором моменте в прошлом, будем брать ближайшую к нему версию  $D_i$  и вносить изменения в неё: изменений будет не больше, чем  $\sqrt{m}$ . Также будем хранить последовательность вносимых изменений.

**Как сделать ретро-изменение.** Пусть мы хотим изменить структуру данных в момент  $t$ . Найдём ближайший  $t_i < t$ , для которого мы храним версию  $D_i$ . Внесём все обновления между моментами времени  $t_i$  и  $t$ , сделаем запрос про настоящее состояние структуры  $D_i$ , отменим все внесённые обновления.

**Как сделать ретро-обновление.** Внесём обновление, которое хочется сделать в момент времени  $t$ , во все структуры данных после этого момента.

**Как быть с памятью.** Мы можем сделать структуры  $D_i$  полно персистентными, чтобы вносить изменения в их прошлые состояния. Это увеличивает память и время, необходимые для работы со структурой, не более чем в константное число раз, смотреть Раздел 10.1, пункт 2.

Собственно, рассмотрим частично ретроактивную структуру данных с полно персистентными  $D_i$ . Если дана последовательность из  $m$  обновлений, мы применим их к изначальной структуре, сохраняя указатели на версии, получаемые после  $i\sqrt{m}$  обновлений — это и будут  $D_i$ . Ретро-обновления создают новую ветку в дереве версий, отходящую от  $D_i$ .

Каждые  $\sqrt{m}/2$  ретро-обновлений мы будем перестраивать вообще всю структуру данных, чтобы сохранять равномерную распределённость её версий, которые мы храним, и разумное количество изменений между ними. На перестроение требуется  $O(m \cdot T(m))$  времени — размазав его по  $\sqrt{m}$  сделанным операциям, получим  $O(\sqrt{m} \cdot T(m))$  амортизированно, которое прибавим и ко времени запроса, и ко времени ретро-обновления.

Оценка на память  $O(m \cdot T(m))$  очевидна — собственно, большему объёму памяти в этой задаче неоткуда взяться.  $\square$

Если известно, что размер структуры оказывается решительно меньше, чем количество обновлений, которые с ней проделаны, результат может быть улучшен:

**Теорема 38** ([Che+18], Теорема 4). *Дана частично ретроактивная структура данных в модели WORD RAM. Пусть её размер —  $n$ , а также*

- 1)  *$O(n)$  запросов позволяют полностью восстановить текущее состояние структуры,*
- 2) *Зная текущее состояние структуры, за  $O(n)$  операций можно превратить пустую структуру данных в её копию,*
- 3) *Эта структура частично ретроактивная со временем  $T_{\text{op}}(n, m)$  на ретроактивные запросы и обновления.*

*Тогда у этой структуры данных существует полно ретроактивная версия с амортизированным временем работы*

$$O(n \log m \cdot T_{\text{op}}(n, m)).$$

*Напомним,  $n$  — текущий размер структуры, а  $m$  — время её жизни, то есть количество проделанных изменений.*

**Доказательство.** Воспользуемся сбалансированным деревом поиска, Scapegoat tree (смотреть Раздел 2), на последовательности изменений, обозначим его  $\tau$ . Каждый его

узел соответствует отрезку в списке и хранит частично ретроактивную структуру данных, содержащую обновления из этого отрезка.

Чтобы вставить или удалить некоторое обновление в конкретный момент времени  $t$ , нужно «потрогать»  $\log m$  узлов, составляющих путь к  $t$  от корня  $\tau$ , на работу с каждым узлом тратя  $O(T_{\text{ор}}(n, m))$  времени.

Для реализации ретро-запроса рассмотрим путь от корня  $\tau$  до интересующего нас момента времени  $t$ . Есть (естественно)  $O(\log m)$  моментов, когда мы спускались направо, оставляя слева от себя отрезки времени, предшествующие  $t$ . Запомним всех *левых братьев* тех узлов, в которые мы спустились направо. В сумме под ними находится  $O(n)$  моментов времени. Обозначим этих левых братьев через  $S_1 \dots S_\ell$ .

Возьмём пустую структуру данных  $S$ . Для  $i$  от 1 до  $\ell$  проделаем следующее:

- 1) Присоединим  $O(n)$  обновлений, имеющихся в  $S$ , к  $S_i$ ,
- 2) Сделаем  $O(n)$  запросов о текущем состоянии  $S_i$ ,
- 3) За  $O(n)$  операций приведём  $S$  к такому состоянию.

Мы потратили на эту процедуру  $O(n \cdot \log m \cdot T_{\text{ор}}(n, m))$  времени. После того, как мы получили  $S$ , нужно откатить все обновления с  $S_1 \dots S_\ell$ , чтобы использовать эти структуры в будущем.  $\square$

Таким образом, мы умеем добиваться умножения времени работы как на  $\sqrt{m}$ , так и на  $n \cdot \log m$ . Оказывается, можно добиться того, чтобы время работы умножалось на *минимум* из этих параметров.

**Следствие 39** ([Che+18]). *Частично ретроактивную структуру данных, удовлетворяющую условиям Теоремы 38, можно сделать полно ретроактивной с умножением времени работы на*

$$\min \{ \sqrt{m}, \quad n \cdot \log m \}.$$

*Доказательство.* Будем поддерживать две структуры одновременно. Когда будет приходиться ретро-запрос, будем возвращать ответ той структуры, которая обработала запрос быстрее.  $\square$

## 12 Ретроактивность для конкретных структур данных

### 12.1 Двухнаправленная очередь

Двухнаправленная очередь — это структура данных, хранящая некоторые элементы и поддерживающая следующие операции:

update	pushL( $x$ ): вставить элемент слева popL: удалить элемент слева pushR( $x$ ): вставить элемент справа popR: удалить элемент справа
query	Узнать крайний правый, крайний левый элементы

**Теорема 40** ([DIL07], Теорема 7). *Двухнаправленную очередь можно сделать полностью ретроактивной, так что ретро-обновления и ретро-запросы будут занимать время  $O(\log t)$ , а запросы о текущем состоянии структуры —  $O(1)$ .*

*Доказательство.*

**Описание структуры данных** Элементы текущей версии очереди будут храниться в массиве  $A$ . Также нам потребуются числа  $L$  и  $R$  — индексы левого и правого краёв рабочего участка массива  $A$ . Если очередь за последние несколько операций становилась короче, то за этими левыми и правыми краями будет оставаться что-то написанное, мы не будем его стирать, но и не будем мыслить его частью очереди.

В первом приближении понятно, как делать push и pop в настоящий момент времени. Для push слева уменьшим на единицу индекс левого края и запишем на левый край новый элемент (возможно, поверх чего-то старого); для pop слева просто увеличим на единицу индекс края. Справа — симметрично.

Рассмотрим два списка:  $U_L$  и  $U_R$ . Это отсортированные по времени списки операций, соответственно, с правым и левым краями очереди. У каждой операции в этих списках есть вес: push имеет вес  $+1$ , pop —  $-1$ . Заметим, что индекс, например, правого края равен сумме весов всех операций в списке  $U_R$ .

Сделаем из  $U_L$ ,  $U_R$  сбалансированные деревья поиска: операции будут храниться в листьях, а каждый узел будет хранить сумму весов всех операций его поддеревья. Значение  $R$  в момент, когда была сделана какая-то операция, можно посчитать, сложив значения, хранимые левыми братьями узлов, в которые мы спускались направо по пути к означенной операции.

**Реализация ретро-операций** При ретро-операции в момент  $t$  спустимся к этому моменту времени в соответствующем дереве ( $U_L$  или  $U_R$ ) и запишем операцию в новом листе. При этом прибавим вес операции к суммам во всех узлах, через которые мы спускались.

Чтобы реализовать ретро-запрос, в каждом узле деревьев поиска будем также хранить наибольшее и наименьшее значения префиксных сумм, достигаемых в поддереве этого узла. Эти значения говорят нам, в каких пределах были левый и правый край рабочего участка очереди на соответствующем отрезке времени.

Дан момент времени  $t$ , нужно выяснить, где в этот момент находился конец рабочего участка массива и что там было записано. Индекс  $i$  конца рабочего участка мы можем посчитать, спустившись по дереву, как описано выше.

Пусть мы работаем с правым краем очереди. Найдём в  $U_R$  последнюю операцию перед моментом времени  $t$ . Поднимемся из её листа в корень дерева, а затем спустимся обратно, каждый раз выбирая правое поддерево из тех, для которых  $i$  находится между наибольшим и наименьшим значениями префиксных сумм, хранящимися в вершине поддерева.

Такой выбор поддерева гарантирует нам то, что мы попадём в некоторый элемент, хранящийся в нужной нам ячейке массива, при этом данный элемент появился там на нужном нам *переписывании* — то есть, он написан поверх элемента, который был на

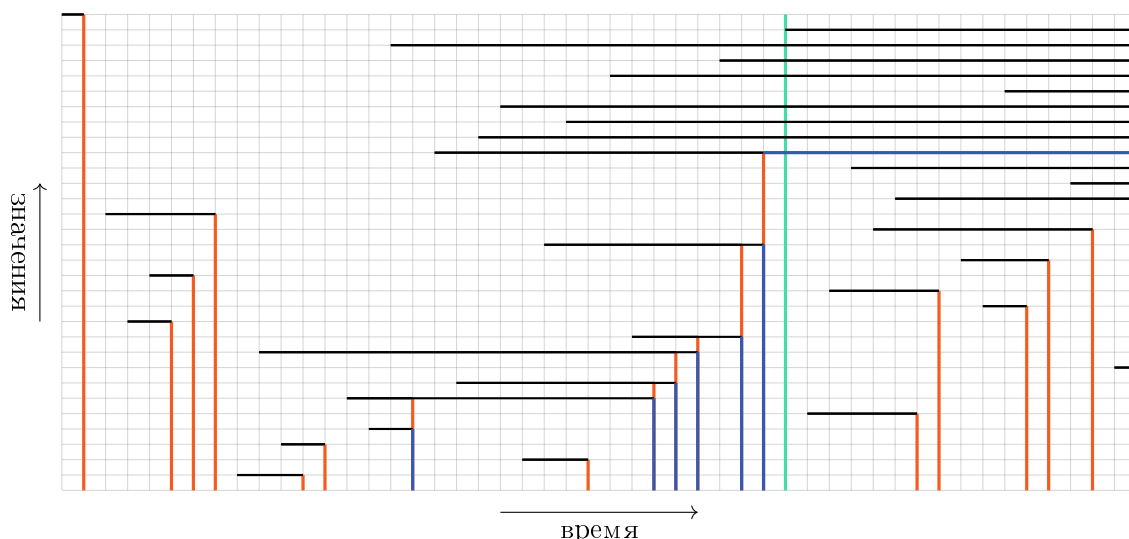


Рис. 23: Ретроактивная очередь с приоритетами

этом месте раньше, чем время  $t$ , и его ещё не успел сменить элемент, который появится там позже. Действительно, условие «находиться между максимумом и минимумом префиксных сумм» равносильно условию «оставаться в рабочем участке массива, не будучи перезаписанным другим элементом».  $\square$

## 12.2 Очередь с приоритетом: описание работы с элементами

Очередь с приоритетами поддерживает следующие операции:

**update**    `insert( $k$ )`: вставить элемент, имеющий приоритет  $k$   
               `delete_min()`: удалить наименьший элемент (с наибольшим приоритетом)  
**query**     `find_min`

Будем считать, что все элементы, побывавшие в очереди за время её существования, различны, и будем обозначать их промежутки жизни отрезками на соответствующей высоте между двумя моментами времени, смотреть Рисунок 23. Удалению элемента из очереди будет соответствовать вертикальный отрезок. То есть, каждый элемент, побывавший в очереди и удалённый из неё, образует уголок. Эти уголки не могут пересекаться, так как каждый раз удаляется наименьший элемент.

Будем обозначать текущее состояние очереди (множество элементов в ней) через  $Q_{\text{now}}$ . Сейчас мы опишем, что происходит, когда в историю операций очереди мы ретроактивно добавляем вставку или удаление элемента (или отменяем эти операции).

**Вставка вставки или отмена удаления** Рассмотрим жизнь некоторой очереди с приоритетом — например, той, что на Рисунке 23. Красные отрезки — это удаления её элементов на соответствующем шаге операций `delete_min`.

Ретроактивно вставим в очередь элемент со значением 4. Он меньше некоторых из элементов, которые были удалены из очереди — соответственно, они будут удаляться

позже, а один из них так вообще останется в очереди и просуществует там вплоть до  $Q_{\text{now}}$ : смотреть синие линии на рисунке, ими обозначены различия между очередью до и после ретроактивной вставки.

Какой же элемент появится в  $Q_{\text{now}}$  после ретроактивной вставки элемента со значением  $k$  в момент времени  $t$ ? Либо этот элемент достаточно большой, тогда он сам. Либо этот элемент помешает удалиться какому-то другому элементу впоследствии — так вот не удалится *наибольший* элемент из тех, который раньше был удалённым: смотреть на горизонтальную синюю линию. То есть элемент, который надо добавить —

$$\max\{k, k'\} \quad k' \text{ удалён после момента времени } t.$$

Ретроактивное удаление операции `delete_min` в момент времени  $t$  — это то же самое, что вставка в тот же момент времени только что удалённого элемента. Соответственно, после этого в  $Q_{\text{now}}$  появится наибольший элемент из удалённых после момента времени  $t$ .

**То же самое на языке мостов** *Мостом* будем называть состояние очереди, которое является подмножеством  $Q_{\text{now}}$ . Один из мостов на рисунке 23 отмечен зелёной вертикальной чертой. Также является мостом, например, начальное состояние, когда очередь пустая.

**Утверждение 41.** *Пусть мы ретроактивно вставляем элемент в момент времени  $t$ , а  $t'$  — последний мост перед  $t$ . Тогда  $\max k'$  — наибольший элемент, вставленный после  $t'$  и не попавший в  $Q_{\text{now}}$ .*

**Отмена вставки или вставка удаления** Если мы ретроактивно вставим операцию `delete_min` в момент времени  $t$ , в  $Q_{\text{now}}$  станет на один элемент меньше, что логично. Какой же элемент подлежит удалению?

**Утверждение 42.** *После вставки операции удаления в момент времени  $t$  нужно удалить из  $Q_{\text{now}}$  наименьший элемент первого моста после  $t$ .*

*После отмены операции вставки элемента со значением  $k$  в момент времени  $t$  нужно удалить из  $Q_{\text{now}}$  либо этот элемент, если он там есть, либо наименьший элемент первого моста после  $t$  в противном случае.*

## 12.3 Очередь с приоритетом: основная теорема

**Теорема 43** ([DIL07], Теорема 9). *Существует частично ретроактивная структура данных для задачи об очереди с приоритетом, выполняющая ретроактивные обновления за время  $O(\log t)$  и отвечающая на запросы о настоящем за время  $O(1)$ .*

*Доказательство.* Будем хранить список всех изменений как двусвязный список. Также будем хранить  $Q_{\text{now}}$  в виде двоичного дерева поиска, в котором каждый ключ связан ссылкой с элементом в списке, соответствующим операции вставки этого ключа.

Выше мы описали, что происходит со списком при ретроактивных операциях. Для того, чтобы реализовать полученные нами правила, нам нужно уметь:



- 1) Находить последний мост перед моментом времени  $t$  или первый мост после момента времени  $t$ ,
- 2) Находить максимальный элемент после моста, не попавший в  $Q_{\text{now}}$ , или минимальный элемент перед мостом, попавший в  $Q_{\text{now}}$ .

Давайте сопоставим каждой операции вес: 0 — insert, если элемент остался в  $Q_{\text{now}}$ , 1 — insert, если элемента нет в  $Q_{\text{now}}$ , -1 — delete\_min. Тогда мост — это такой момент времени, для которого префиксная сумма весов операций нулевая. Пользуясь древвианной структурой данных для обычных очередей (Теорема 40), мы можем находить мосты за время  $O(\log m)$ .

Теперь — как найти наибольший или наименьший элемент до или после моста? Будем поддерживать дерево поиска на списке операций. В каждом его узле будем хранить наибольший ключ среди листьев этого поддерева, не входящий в  $Q_{\text{now}}$ , и наименьший, входящий в  $Q_{\text{now}}$ .

Промежуток после произвольного момента времени или до него представляется в виде объединения низа нескольких поддеревьев. Эти поддеревья можно найти за  $O(\log m)$  и за столько же выбрать максимум / минимум из элементов, хранящихся в их корнях.  $\square$

## 13 Структуры целочисленных данных

*Записал: Михаил Мрыхин*

**Определение 25.** Модель Word RAM: единица данных - слово из  $w$  бит. Прочитать или записать слово, сравнить два, вычислить результат базовых арифметических (+, −, ×, div, mod) и побитовых логических операций, а также перейти по указателю можно за константу.

Хотим построить структуру, поддерживающую множество  $S \subset U = \{0, \dots, 2^w - 1\}$  с операциями insert, delete, find, pred, succ, используя внутреннюю структуру данных для ускорения. Оказывается, в данной модели можно добиться выполнения таких операций за  $O(\log w)$  (что равно  $O(\log \log U)$  от максимального размера структуры) вне зависимости от  $n$ , причём как минимум двумя разными способами.

### 13.1 Деревья ван Эмде Боаса

Для удобства предположим, что  $w = 2^m$ .

**structure** TREE

root

**structure** NODE

size

empty

min, max

clusters[]

summary

При размере  $k$  дерево ван Эмде Боаса (van Emde Boas (да, это один человек) tree) с корнем в текущей вершине содержит данные об элементах из  $\{0, \dots, 2^{2^k} - 1\}$ . Обозначим за  $\text{high}(x)$  и  $\text{low}(x)$  битовые слова половинной длины, образованные первой и второй половиной записи  $x$  соответственно; тогда вспомогательное поддерево  $\text{summary}$  хранит  $\text{high}(x)$  для всех содержащихся в дереве  $x$ , а  $\text{low}(x)$  хранится в  $\text{clusters}[\text{high}(x)]$ . Вдобавок, наименьший и наибольший элементы в дереве хранятся лишь в переменных  $\text{min}$  и  $\text{max}$ , а на  $\text{summary}$  и  $\text{clusters}$  не влияют (в частности, при  $k = 0$  последние отсутствуют вовсе). По сути, мы производим срединное сечение полного двоичного дерева возможных ключей по высоте: верхняя половина отправляется в  $\text{summary}$ , а компоненты нижней половины - в  $\text{clusters}$ .

```

1: procedure INSERT( $x$ )
2:   if empty then
3:      $\text{min} := x$ 
4:      $\text{max} := x$ 
5:   else if  $x < \text{min}$  then
6:      $\text{oldmin} := \text{min}$ 
7:      $\text{min} := x$ 
8:     insert( $\text{oldmin}$ )
9:   else if  $x > \text{max}$  then
10:     $\text{oldmax} := \text{max}$ 
11:     $\text{max} := x$ 
12:    insert( $\text{oldmax}$ )
13:   else if  $x > \text{min}$  and  $x < \text{max}$  then
14:     if  $\text{clusters}[\text{high}(x)].\text{empty}$  then
15:        $\text{summary.insert}(\text{high}(x))$ 
16:        $\text{clusters}[\text{high}(x)].\text{insert}(\text{low}(x))$ 
17: procedure DELETE( $x$ )
18:   if empty then
19:     return
20:   if  $\text{min} = x$  then
21:     if  $\text{max} = x$  then
22:        $\text{empty} := \text{True}$ 
23:     else if  $\text{summary.empty}$  then
24:        $\text{min} := \text{max}$ 
25:     else
26:        $\text{newmin} := \text{clusters}[\text{summary.min}].\text{min}$ 
27:       delete( $\text{newmin}$ )
28:        $\text{min} := \text{newmin}$ 
29:   else if  $\text{max} = x$  then
30:     if  $\text{summary.empty}$  then
31:        $\text{max} := \text{min}$ 
32:     else
33:        $\text{newmax} := \text{clusters}[\text{summary.max}].\text{max}$ 
34:       delete( $\text{newmax}$ )

```

```

35:         max := newmax
36:     else
37:         clusters[high(x)].delete(low(x))
38:         if clusters[high(x)].empty then
39:             summary.delete(high(x))
40: procedure FIND(x)
41:     if empty then
42:         return false
43:     if min = x or max = x then
44:         return true
45:     return clusters[high(x)].find(low(x))
46: procedure SUCC(x)
47:     if empty or x ≥ max then
48:         return null
49:     if x < min then
50:         return min
51:     if clusters[high(x)].max > low(x) then
52:         return compose(high(x), clusters[high(x)].succ(low(x)))
53:     if summary.max > high(x) then
54:         next := summary.succ(high(x))
55:         return compose(clusters[next], clusters[next].min)
56:     return max
57: procedure PRED(x)
58:     аналогично SUCC

```

Как можно видеть, почти каждый запрос к дереву размера  $k$  состоит из константного набора операций и не более одного запроса к дереву размера  $k - 1$ . Исключения разбиваются на две группы: запросы к тому же дереву при смене максимума/минимума, которые случаются не более раза на каждой высоте, и ветвящиеся запросы при добавлении первого/удалении последнего элемента в кластере, в случае которых запрос к кластеру происходит за  $\mathcal{O}(1)$  вне зависимости от его максимального размера, а настоящая ветвь рекурсии уходит в summary. Как результат, все запросы работают за  $\mathcal{O}(m) = \mathcal{O}(\log w) = \mathcal{O}(\log \log U)$  по времени, но вот по памяти структура занимает  $\Theta(U)$ .

Можно улучшить асимптотику памяти, если заменить массивы указателей на хэш-таблицы (это домножает скорость работы на случайный фактор, который с большой вероятностью/амортизированно можно считать равным  $\mathcal{O}(1)$ ), но в таком случае для малых  $n$  нам придётся хранить в памяти  $\mathcal{O}(nw)$  слов. Действительно, каждый элемент занимает место в хэш-таблице, summary и cluster. Тогда полное количество памяти, занимаемое одним элементом в дереве размера  $m$ , выражается рекуррентой  $S(m) = \mathcal{O}(1) + 2S(m - 1)$ , что разрешается в  $S(m) = \mathcal{O}(2^m) = \mathcal{O}(w)$ , и при достаточно разреженных наборах элементов (таких, что число пересечений по префиксам относительно мало) ведёт к вышеуказанным затратам на всю структуру.

Теперь разобьём элементы на (последовательные) группы размера в пределах

$[\frac{w}{4}; 2w]$ , на каждой построим двоичное дерево поиска. Из каждой группы будем хранить в дереве вЭБ её минимум с указателем. Всё работает почти так же, как и раньше, но теперь надо сначала найти нужную группу, а потом уже там искать/менять. К счастью, это всё тоже работает за  $\mathcal{O}(\log w)$ . Иногда надо поддерживать размер малых деревьев слиянием/делением (с соответствующим удалением/вставкой минимумов в дерево вЭБ), но это тоже не меняет асимптотику. Наконец, по памяти это всё (как глобальное дерево, так и объединение малых) занимает  $\mathcal{O}(n)$ , как нам и хотелось.

## 13.2 X- и Y-быстрые деревья

Снова рассмотрим полное двоичное дерево всех возможных значений ключей. Оставим только вершины, лежащие на пути от корня к присутствующим элементам. В каждую вершину, у которой нет правого ребёнка, поместим указатель на наибольший элемент в левом поддереве; аналогично в другом направлении. Листья вместо этого снабдим ссылками на следующий и предыдущий, как в двустороннем списке. Все вершины на одном уровне будем хранить в хэш-таблице (накладывая на все последующие временные оценки множитель  $\mathcal{O}(1)$  с высокой вероятностью/амортизированно, о чём мы не будем лишним раз повторять). Это и есть X-быстрое дерево (X-fast tree/trie).

Найти элемент можно за  $\mathcal{O}(1)$ , так как все листья находятся в одной хэш-таблице. Найти соседей наличествующего элемента — очевидно, тоже. В более общем случае — за  $\mathcal{O}(\log w)$ : отыщем двоичным поиском по хэш-таблицам уровней максимальный общий префикс, после чего пройдем по вспомогательному указателю в соседа (и ещё раз шагнем по списку, если сосед не с той стороны). Вставка и удаление делаются за  $\mathcal{O}(w)$  проходом по пути между корнем и листом сверху вниз или снизу вверх соответственно. Наконец, занимает это всё  $\mathcal{O}(nw)$  памяти.

Обратив внимание на последнюю оценку, сделаем тот же трюк, что и с деревом ван Эмде Боаса: разобьём все элементы на группы размера  $\approx w$ , после чего построим на них двоичные деревья поиска, а в X-быстрое дерево запишем только минимум и указатель. Это и есть Y-быстрое дерево (Y-fast tree/trie).

Метод работы операций и их асимптотика такие же, как и у оптимизированного дерева вЭБ: сначала ищем ближайший слева элемент глобального дерева за  $\mathcal{O}(\log w)$ , затем ищем в малом дереве под ним или его соседом за  $\mathcal{O}(\log w)$ . Единственное затруднение вызывают вставка и удаление, но тут можно заметить, что они в основном затрагивают малые деревья (и работают там тоже за  $\mathcal{O}(\log w)$ ), а перестройка X-быстрого требуется только при их слиянии/делении. Так как после этих операций их размер попадает на отрезок  $[\frac{w}{2}, \frac{9w}{8}]$  (если немедленно делить только что слитое дерево при выходе за его правый край), а перед следующей должен выйти из  $[\frac{w}{4}; 2w]$ , то перестройки могут происходить не чаще, чем раз за  $\frac{w}{4}$  операций над малым деревом, что амортизирует вышеприведённое  $\mathcal{O}(w)$  в константу. Наконец, занимает это все  $\mathcal{O}(n)$  памяти.

## 14 Static Fusion Tree

*Записала: Арина Уланова*

Мы работаем в Word RAM модели. Представляем память в виде  $w$ -битных слов, которые мы считаем двоичными записями целых чисел и с которыми можем выполнять арифметические операции (включая побитовые) за константу. У нас  $w > \log n$ , где  $n$  — это вход.

*Fusion tree* — структура данных для хранения целых чисел. Хотим научиться отвечать на запросы вида:

- $\text{next}(x)$  — наименьшее число в структуре, большее  $x$ ;
- $\text{prev}(x)$  — наибольшее число в структуре, меньшее  $x$ .

за время  $\mathcal{O}(\log_B n)$ , где  $B = w^{\frac{1}{5}}$ .

Fusion tree имеет коэффициент ветвления  $B$  (здесь можно провести аналогию с  $B$ -деревом), таким образом, его высота будет  $\mathcal{O}(\log_B n)$ , и для выполнения наших операций за требуемое время надо научиться делать переход между уровнями за  $\mathcal{O}(1)$ .

Длиной числа  $|x|$  называется длина двоичной записи  $x$ .

#### 14.1 Случай, когда $x$ и $x_i$ имеют длину не более $\frac{w}{B}$

Пусть в узле дерева записаны числа  $x_1, x_2, \dots, x_{B-1}$ , отсортированные по возрастанию. Можно считать, что эти числа делят всё на отрезки  $[0, x_1), [x_1, x_2), [x_2, x_3), \dots$ , нам нужно понять, в каком из отрезков содержится наш запрос  $x$ . Для этого найдем количество  $x_i$  таких, что  $x \geq x_i$ . Сложность в том, что нам это нужно сделать за константное время.

Сделаем вектор, состоящий из  $B-1$  копии  $\overline{1x}$ , для этого домножим этот вектор на маску  $\sum_{i=0}^{B-2} 2^{i \cdot (|x|+1)}$ . Заметим, что в этом случае длина вектора будет как раз порядка  $\mathcal{O}(w)$ . Вычтем из него вектор  $\overline{0x_1 0x_2 \dots}$ . Это константный вектор, поэтому его можно предподсчитать, как и все маски, которые мы будем использовать.

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & x & 1 & x & 1 & x & 1 & x \\ \hline \end{array} \\
 - \\
 \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 0 & x_1 & 0 & x_2 & 0 & x_3 & 0 & x_4 \\ \hline \end{array} \\
 = \\
 \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline \textcolor{red}{1} & \dots & \textcolor{red}{0} & \dots & \textcolor{red}{0} & \dots & \textcolor{red}{0} & \dots \\ \hline \end{array}
 \end{array}$$

Рис. 24: Разность  $A$

Если  $x_i$  был больше  $x$ , то он использует ведущую единичку в записи, иначе — нет. Поэтому наша цель — посчитать количество единиц на ведущих позициях в разности (они подчеркнуты красным на Рисунке 24). Полученную разность назовем  $A$ .

$A' = A \text{ AND } \sum_{i=1}^{B-1} 2^{i \cdot (|x|+1)-1}$  оставит только биты на выделенных позициях, а остальные — обнулит. Сумма чисел теперь находится так:  $A' \cdot \sum_{i=0}^{B-2} 2^{i \cdot (|x|+1)}$ , домножение на  $2^{|x|+1}$  дает нам сдвиг на длину блока. Таким образом, сложение чисел из

красного прямоугольника (смотреть Рисунок 25) дает нам необходимое число единиц.

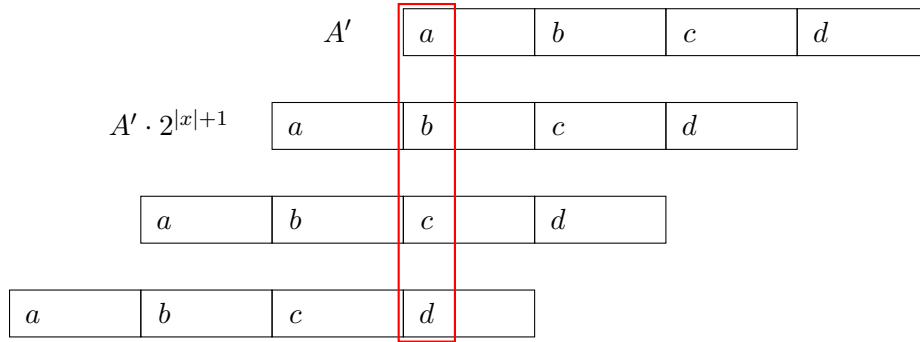


Рис. 25: Сумма ведущих битов

// тут важно, чтобы сумма единиц не заехала на начало следующего блока. Но у нас это выполнено, поскольку сумма  $\leq \log(\text{количества блоков}) = \log B$ , а длина блока — это примерно  $\frac{w}{B}$ .

И осталось вырезать нужный нам кусочек вектора с этой суммой (знаем начало и конец этого кусочка): сначала с помощью маски убираем ненужные биты, а затем сдвигаем наш кусочек вправо.

Эта сумма скажет, в какую ветку дерева нам спускаться из текущего узла.

## 14.2 Случай больших $x_i$

Будем рассуждать на примере:

Пусть в какой-то вершине записаны числа 001010, 001110, 100111, 110010, а в качестве  $x$  у нас число 101010. Для них можно нарисовать бор (двигаемся влево, если в очередном разряде стоит 0, иначе вправо). Заметим, что числа однозначно определяются выбором на развилках. Поэтому мы можем смотреть только на те биты, в которых происходят развилки, назовем такие биты «интересными». В нашем случае развилки есть в 1-ом, 2-ом и 4-ом бите (читатель может нарисовать картинку и убедиться в этом). Запомним только их и получим, что записанные в вершинах числа преобразуются в 000, 001, 101, 110, а  $x$  превратится в 100. Будем называть это sketch'ем числа.

Заметим, что если изначально в вершине было  $B - 1$  число, то развилок у бора будет  $\leq B - 2$ . Таким образом, идеальный sketch имеет длину  $\leq B - 2$ .

Применив процедуру выше, мы можем получить положение  $\text{sketch}(x)$  среди  $\text{sketch}(x_i)$ .

А теперь к деталям и сложностям.

### 14.2.1 Как понять, какие биты «интересные»?

Сортируем  $x_i$ , среди пары соседних  $x_i$  надо понять, какой самый старший бит у них различается. Пусть  $c = x_j \oplus x_{j+1}$ , теперь нужно научиться искать старший ненуле-

вой бит в  $c$  за  $\mathcal{O}(1)$ . Это не так просто, и нам для потребуется некоторые дальнейшие обозначения и рассуждения, поэтому доказательство будет чуть позже, а пока поверим в этот факт.

Но даже после нахождения старшего бита наши сложности не заканчиваются. Теперь нам надо вытащить нужные биты и сделать так, чтобы они стояли рядом. К сожалению, поставить их подряд не выйдет, но мы будем вмещать их в блок длины  $B^4$  (именно поэтому было выбрано  $B = w^{\frac{1}{5}}$ , хотя до этого момента нам хватило бы ограничения  $B = \sqrt{w}$ ).

Пусть есть  $X$ , и его интересные биты находятся на позициях  $b_1, \dots, b_B$  (для простоты считаем, что интересных битов  $B$ ). Оставим только их:

$$X' = X \text{ AND } \sum_{i=1}^B 2^{b_i}.$$

Вновь будем применять тактику со сдвигами. Хотим найти такие сдвиги  $m_1, m_2, \dots, m_B$ , чтобы сложив получившиеся числа, мы получили следующие условия:

- все  $b_i + m_j$  различны;
- $b_i + m_i < b_{i+1} + m_{i+1}$  — чтобы были в правильном порядке.
- $|b_B + m_B - b_1 - m_1| \leq B^4$  — расстояние между крайними интересными битами должно быть небольшим, чтобы в  $w$  влезло  $B$  таких окошек.

Заведём окошко размера  $B^4$ , поделим его на  $B$  блоков размера  $B^3$ . Будем делать так, чтобы первое число попало в первый блок, второе — во второе, и так далее.

Пусть смогли выбрать  $m_1, \dots, m_{i-1}$  так, чтобы для них эти условия выполнялись. Выберем  $m_i$  так, чтобы  $m_i + b_i$  попало в свой блок (для этого есть  $B^3$  значений). Все предыдущие суммы принимают  $B \cdot (i-1)$  значений. Нам запрещены  $m_i$ , которые наши биты накладывают на эти значения. Тогда запретов будет  $B^2 \cdot (i-1) < B^3$ , поэтому есть хотя бы одно разрешённое значение.

Строить  $m_i$  будем в предподсчёте: перебираем  $i$ , строим суммы  $m_u + b_v$ . Перебираем доступные нам  $B^3$  значений, помечаем, какие из них плохие. Потом проходим и находим первое незанятое. Это работает за  $B^3$  на каждый блок. Итого  $\mathcal{O}(B^4)$  точно хватит.

Составляем теперь маску  $M = \sum_i 2^{m_i}$ , тогда  $x \cdot M$  собирает все важные биты в одном блоке, далее с помощью маски  $\sum_i 2^{m_i + b_i}$  оставляем только их, и, сдвигая на  $b_B + m_B - b_1 - m_1$ , получаем искомый  $\text{sketch}(x)$  размера  $B^4$ .

### 14.2.2 Поиск старшего бита в числе $c$

Будем считать, что длина  $c$  равна  $w$ . Для начала разобьём  $c$  на  $\sqrt{w}$  окошек по  $\sqrt{w}$  битов. Хотим найти первое непустое окошко, а в нём первый ненулевой бит. Пусть  $f = 10\dots 0$  — число длины  $\sqrt{w}$ , а  $F$  состоит из  $\sqrt{w}$  копий  $f$ . Тогда  $c' = c \text{ AND } F$  вычисляет блоки, у которых есть первый бит, а  $c'' = c \oplus c'$  забывает про первый бит в

каждом блоке. Теперь смотрим на  $F - c''$ , первый бит в блоке  $F$  не используется только в том случае, если соответствующий блок в  $c''$  был пустым. Положим

$$y = ((F - c'') \text{ AND } F) \oplus F \text{ OR } c'.$$

Операция **AND** оставляет только первые биты в блоках,  $\oplus$  инвертирует их, **OR** же нужен из-за того, что мы забывали про первый бит в блоке. Таким образом, в  $y$  у нас стоят единички в начале ненулевых блоков и нолики в начале нулевых блоков.

Теперь построим идеальный  $\text{sketch}(y)$ . У нас  $b_i = \sqrt{w} + i\sqrt{w}$ , положим

$$m_j = w - \sqrt{w} - j\sqrt{w} + j.$$

Тогда если  $i \neq j$ , то  $b_i + m_j = w + (i - j)\sqrt{w} + j$ , а в случае равенства получаем  $b_i + m_i = w + i$ . Таким образом, интересные нам биты лежат начиная с  $w + 1$  позиции, можем с помощью маски оставить только их и затем сдвинуть их в конец.

Теперь в полученном числе длины  $\sqrt{w}$  надо найти первый ненулевой бит. Будем сравнивать его со степенями двойки до  $2^{\sqrt{w}-1}$ . Например, если изначально у нас  $w$  имело длину 16, то будем сравнивать с числами 0001, 0010, 0100, 1000. Такую задачу уже научились решать (надо посмотреть, сколько из степеней двоек не превышают наше число). Поняв, между какими степенями двойками расположено наше число, мы сможем понять, какой старший бит у нашего  $\text{sketch}$ , пусть он находится на позиции  $d$ . В таком случае в исходном  $s$  первый ненулевой бит находится в блоке  $d$ . Вырежем нужный нам блок, он будет длины  $\sqrt{w}$ , и в нем аналогично можем найти первый ненулевой бит  $d'$ . В качестве ответа вернем  $d\sqrt{w} + d'$ .

### 14.2.3 Нахождение позиции $x$ среди $x_i$

Вот пускай мы нашли  $\text{sketch}(x_i)$  и  $\text{sketch}(x)$ . Заметим, что если  $\text{sketch}(x_i) \leq \text{sketch}(x) < \text{sketch}(x_{i+1})$ , то это не означает, что  $x_i \leq x < x_{i+1}$ . Возвращаясь к нашему примеру, 100 расположено между 001 и 101, но при этом про исходное число 101010 неверно, что оно расположено между 001110 и 100111.

Поэтому нужно найти старший бит, в котором различаются  $x$  и  $x_i$ , а также  $x$  и  $x_{i+1}$ , и взять младший из них (нуо, пусть он оказался у  $x_i$ ). Понятно, что путь  $x$  в боре выглядит так: мы сначала идем по пути  $x_i$ , а в старшем бите ответвляемся влево или вправо. Так как положение зависит только от развилки, то можем преподсчитать для каждого  $i$ , каждого бита и каждого направления развилки, между какими  $x_i$  мы в итоге окажемся, тогда на запрос для  $x$  мы будем отвечать за  $\mathcal{O}(1)$ .

Таким образом, мы научились обрабатывать один слой за  $\mathcal{O}(1)$ , тогда наши операции  $\text{next}$  и  $\text{prev}$  работают за  $\mathcal{O}(\log_B n)$ .

Так как эти же операции умеет выполнять дерево ван Эмде Боаса, то можно считать, что мы работаем за  $\min(\log_w n, \log w) \leq \sqrt{\log n}$ . Значит, получается следующий результат.

**Теорема 44.** *Подходящее из дерева ван Эмде Боаса и Fusion tree в худшем случае работает за  $\mathcal{O}(\sqrt{\log n})$ .*



## Список литературы

- [And89] Arne Andersson. «Improving partial rebuilding by using simple balance criteria». в: *Workshop on Algorithms and Data Structures*. Springer. 1989, с. 393—402.
- [Bro96] Gerth Stolting Brodal. «Partially persistent data structures of bounded degree with constant update time». в: *Nord. J. Comput.* 3.3 (1996), с. 238—255.
- [Che+18] Lijie Chen и др. «Nearly Optimal Separation Between Partially And Fully Retroactive Data Structures». в: *20th Scandinavian Symposium and Workshops on Algorithm Theory (SWAT 2018)*. под ред. David Eppstein. Malmö, Sweden, июнь 2018, с. 1—12.
- [CIL12] Sébastien Collette, John Iacono и Stefan Langerman. «Confluent persistence revisited». в: *Proceedings of the twenty-third annual ACM-SIAM symposium on Discrete algorithms*. SIAM. 2012, с. 593—601.
- [Col+00] Richard Cole и др. «On the Dynamic Finger Conjecture for Splay Trees. Part I: Splay Sorting log n-Block Sequences». в: *SIAM Journal on Computing* 30.1 (2000), с. 1—43. DOI: 10.1137/S0097539797326988. eprint: <https://doi.org/10.1137/S0097539797326988>. URL: <https://doi.org/10.1137/S0097539797326988>.
- [Col00] Richard Cole. «On the Dynamic Finger Conjecture for Splay Trees. Part II: The Proof». в: *SIAM Journal on Computing* 30.1 (2000), с. 44—85. DOI: 10.1137/S009753979732699X. eprint: <https://doi.org/10.1137/S009753979732699X>. URL: <https://doi.org/10.1137/S009753979732699X>.
- [Dem+09] Erik D. Demaine и др. «The Geometry of Binary Search Trees». в: *Proceedings of the Twentieth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*. SODA '09. New York, New York: Society for Industrial и Applied Mathematics, 2009, с. 496—505. DOI: <https://doi.org/10.5555/1496770.1496825>.
- [Dem12] Erik Demaine. *Dynamic Optimality II*. MIT OpenCourseWare. YouTube video, 2012.
- [DIL07] Erik D Demaine, John Iacono и Stefan Langerman. «Retroactive data structures». в: *ACM Transactions on Algorithms (TALG)* 3.2 (2007), 13—es.
- [DLP08] Erik D Demaine, Stefan Langerman и Eric Price. «Confluently persistent tries for efficient version control». в: *Scandinavian Workshop on Algorithm Theory*. Springer. 2008, с. 160—172.
- [Dri+86] James R Driscoll и др. «Making data structures persistent». в: *Proceedings of the eighteenth annual ACM symposium on Theory of computing*. 1986, с. 109—121.
- [FHM01] Gudmund Skovbjerg Frandsen, Johan P Hansen и Peter Bro Miltersen. «Lower bounds for dynamic algebraic problems». в: *Information and Computation* 171.2 (2001), с. 333—349.
- [FHM98] Gudmund Skovbjerg Frandsen, Johan P Hansen и Peter Bro Miltersen. «Lower Bounds for Dynamic Algebraic Problems». в: *BRICS RS-98.11* (май 1998).

- [FK03] Amos Fiat и Haim Kaplan. «Making data structures confluent persistent». в: *Journal of Algorithms* 48.1 (2003), с. 16—58.
- [Geo+11] Loukas Georgiadis и др. «Data structures for mergeable trees». в: *ACM Transactions on Algorithms (TALG)* 7.2 (2011), с. 1—30.
- [GR93] Igal Galperin и Ronald L Rivest. «Scapegoat Trees.» в: *SODA*. т. 93. 1993, с. 165—174.
- [Luc88] Joan Marie Lucas. *Canonical forms for competitive binary search tree algorithms*. Rutgers University, Department of Computer Science, Laboratory for Computer ..., 1988.
- [ST83] Daniel Dominic Sleator и Robert Endre Tarjan. «A data structure for dynamic trees». в: *Journal of Computer and System Sciences* 26.3 (1983), с. 362—391. ISSN: 0022-0000. DOI: [https://doi.org/10.1016/0022-0000\(83\)90006-5](https://doi.org/10.1016/0022-0000(83)90006-5). URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0022000083900065>.
- [ST85] Daniel Dominic Sleator и Robert Endre Tarjan. «Self-Adjusting Binary Search Trees». в: *J. ACM* 32.3 (июль 1985), с. 652—686. ISSN: 0004-5411. DOI: 10.1145/3828.3835. URL: <https://doi.org/10.1145/3828.3835>.
- [Tar84] Robert Endre Tarjan. «Data Structures and Network Algorithms». в: *Society for Industrial and Applied Mathematics* (1984).