

Математические основы алгоритмов, весна 2023

Задание 2

- 1) Докажите корректность схем битонного слияния и битонной сортировки, представленных в лекциях.
- 2) Пусть имеется сеть сортировки. Останется ли она сетью сортировки, если
 - (a) перевернуть ее диаграмму относительно вертикальной оси? (при этом направление сортировки пар индивидуальными элементами сравнения не переворачивается)?
 - (b) перевернуть ее диаграмму относительно горизонтальной оси?
 - (c) добавить к сети произвольный элемент сравнения?
- 3) *Сетью транспозиции* называется сеть сравнения, в диаграмме которой все попарные сравнения производятся между соседними проводами.
 - (a) Докажите, что если сеть транспозиции на n входах является сетью сортировки, то в ней не менее $\binom{n}{2}$ элементов сравнения.
 - (b) Докажите, что если сеть транспозиции на n входах сортирует последовательность $(n, n-1, \dots, 2, 1)$ (то есть последовательность, отсортированную по убыванию), то она является сетью сортировки.
- 4) Ответьте на вопросы упражнения 2 при условии, что упоминаемая в них сеть является сетью транспозиции.
- 5) *Правильная скобочная последовательность* определяется рекурсивно: это либо пустая последовательность, либо последовательность $'(S)'$, либо последовательность $'ST'$, где S, T — правильные скобочные последовательности. Например, скобочные последовательности $'(((()))'$, $'()()()((()))'$, $'$ — правильные, а последовательности $'('$, $'(((())'$ — неправильные. Опишите эффективную параллельную схему распознавания правильных скобочных последовательностей.
- 6) В коде на языке Python, комментарий состоит из символа $'\#'$ и всех следующих за ним символов, вплоть до конца строки. (Комментарий может, в числе прочих, содержать произвольное количество символов $'\#'$). Задан массив из n символов, содержащий код на Python; в нем концы строк обозначены специальным символом $'\leftarrow'$,

ограничения на длину строки отсутствуют. Опишите эффективную параллельную схему, заменяющий все символы комментариев на пробелы.

- 7) Система линейных уравнений $Ax = b$ задана $n \times n$ матрицей A и n -вектором b . Матрица A является *трехдиагональной*, то есть $a_{ij} = 0$ для всех i, j , где $|i - j| > 1$. Опишите эффективную параллельную схему для решения такой системы

- (a) предполагая, что $a_{ij} \neq 0$ при $|i - j| \leq 1$
- (b) * в общем случае

Предполагается, что решение существует и единственно, и что все вычисления точные.

- 8) Опишите эффективный параллельный алгоритм для быстрого преобразования Фурье в произвольном кольце R (удовлетворяющем условиям существования DFT):

- (a) как схему с элементарными операциями сложения и умножения в R ;
- (b) в модели BSP с оптимальной трудоемкостью и коммуникацией, и минимально возможным количеством синхронизаций; при этом можно предположить, что степень преобразования n достаточно велика по сравнению с количеством процессоров p .

- 9) * Опишите эффективный параллельный алгоритм для сортировки массива из n элементов произвольного линейно упорядоченного множества с элементарной операцией сравнения двух элементов, в модели BSP с оптимальной трудоемкостью и коммуникацией, и минимально возможным количеством синхронизаций; при этом можно предположить, что размер массива n достаточно велик по сравнению с количеством процессоров p .