



О (дискретном) преобразовании Фурье

Золотов Борис Алексеевич, аспирант МКН СПбГУ,
преподаватель ЛНМО

«Лига Лекторов», 3 сезон, онлайн-этап

5 февраля 2023 г.

Простое контрастное изображение



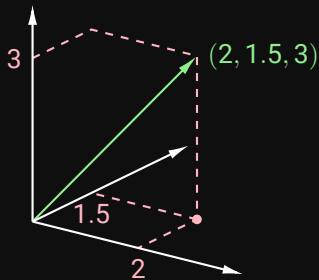
При сохранении в jpg «идёт волнами». Почему так?



И как это связано со способностью
слышать одного своего друга в толпе?



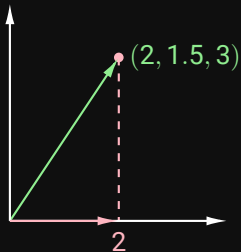
Координаты



Смотря на одну координату или убрав одну координату, мы всё ещё что-то содержательное можем сказать про вектор.



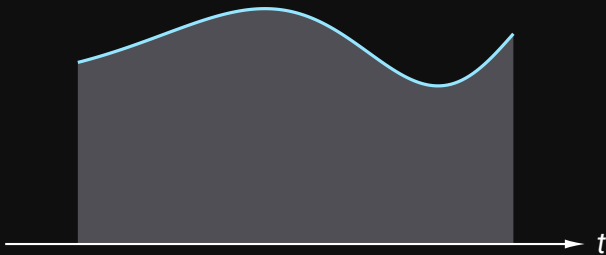
Скалярное произведение



Координата = Длина проекции на ось = Коэффициент в сумме =
= **Скалярное произведение**

Скалярное произведение тем больше, чем более вектора **похожи**.

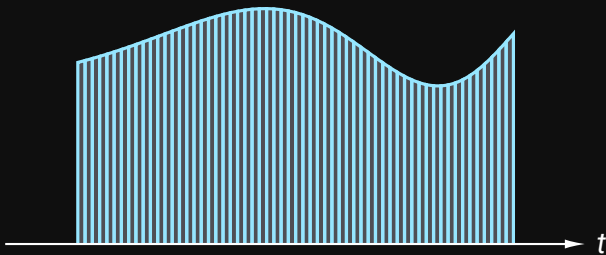
Какой-то сигнал



Какие координаты можно было бы присвоить сложному сигналу, чтобы они помнили содержательную информацию о нём?



Представление через значения в точках

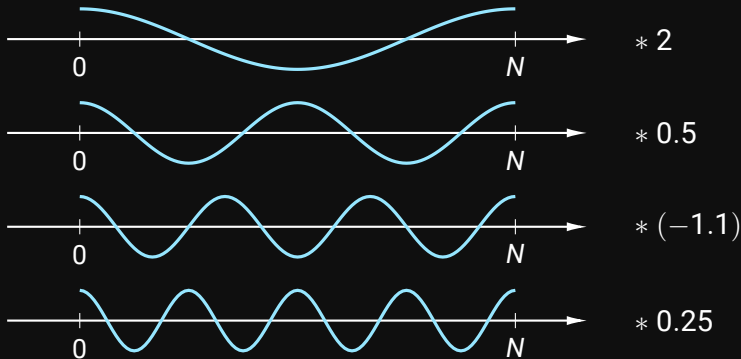


Можно было бы разложить сигнал на его значения в точках, но значение в одной точке ничего не говорит о сигнале в целом.



Разложение в сумму волн

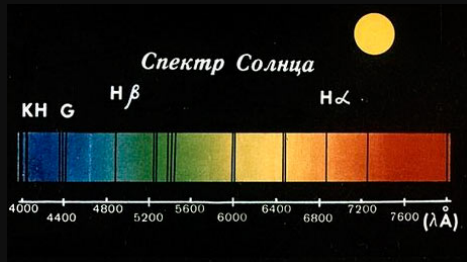
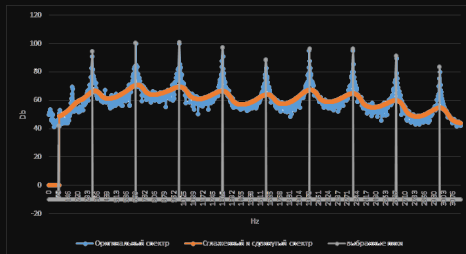
Пусть дан сигнал — последовательность из N чисел (значений замеров). Мы попробуем представить его в виде суммы сигналов—волн с частотой $\frac{k}{N}$ (или их сдвигов).





Почему это естественная идея

Звук инструмента или голоса, свет от конкретного источника естественным образом представляется в виде суммы волн фикс. частот. Это позволяет узнавать составы звёзд, выделять минусовку / инструмент из звукозаписи.





Как найти координаты?

Перемножить сигнал и интересующую волну в каждой точке и полученные значения сложить.



Похожи — сумма будет большая положительная.



Ведут себя противоположным образом — большая отрицательная.



Совсем непохожи — примерно 0. ***Это скалярное произведение!***



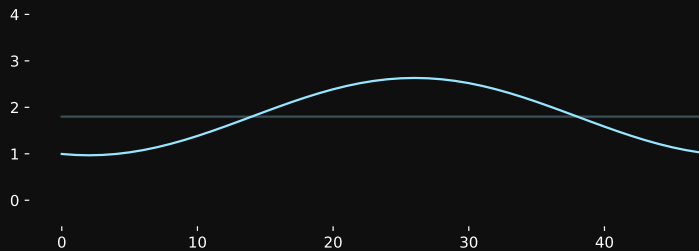
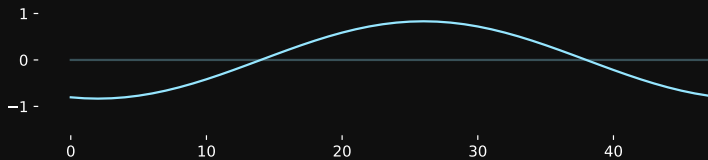
Покажем, как раскладывается сигнал в сумму волн



Будем добавлять слагаемые в порядке возрастания частоты.

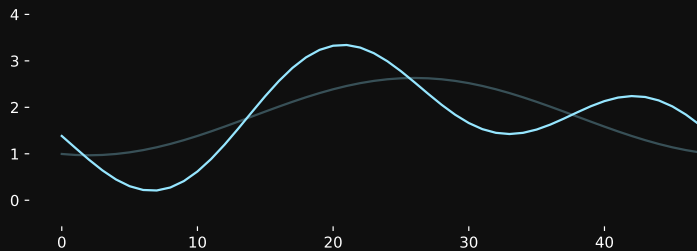
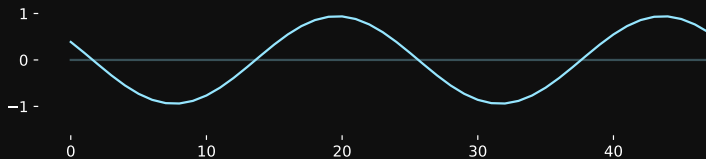


Волна с частотой $2\pi \cdot 1 / 48$



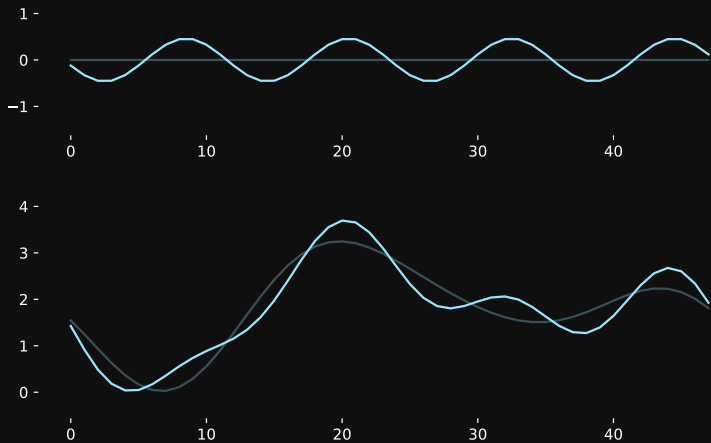


Волна с частотой $2\pi \cdot 2 / 48$



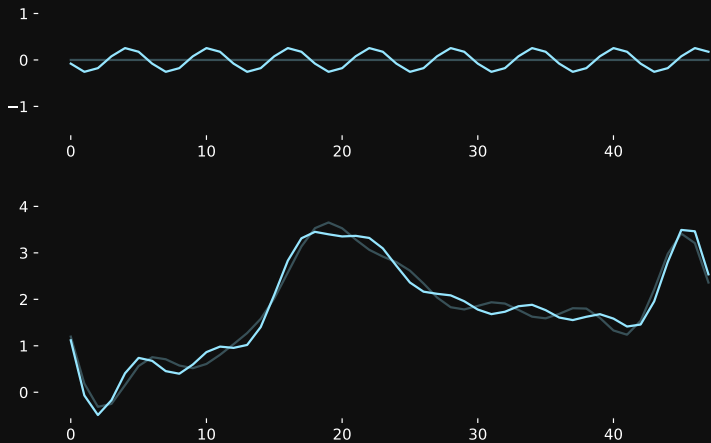


Волна с частотой $2\pi \cdot 4 / 48$



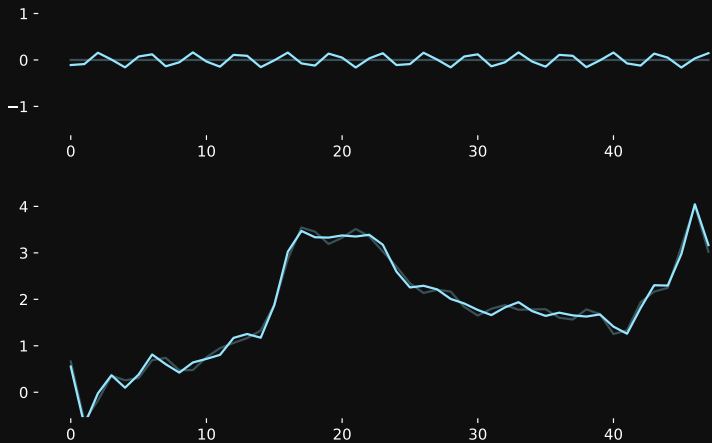


Волна с частотой $2\pi \cdot 8 / 48$



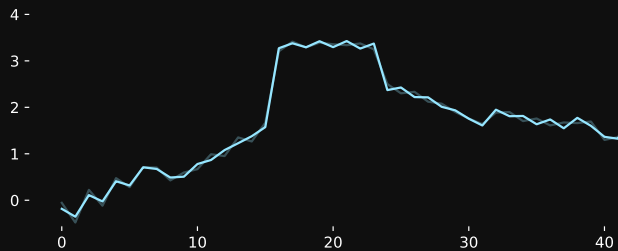
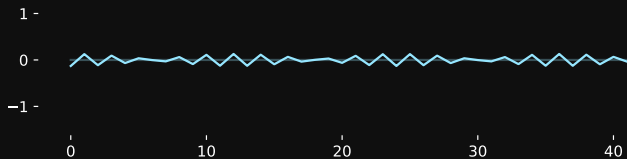


Волна с частотой $2\pi \cdot 14 / 48$



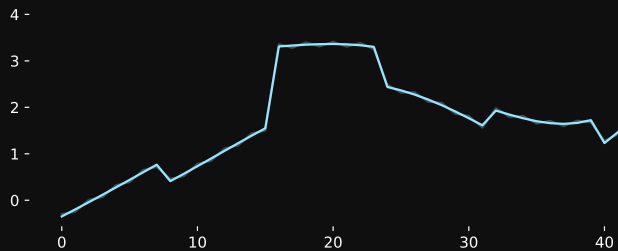
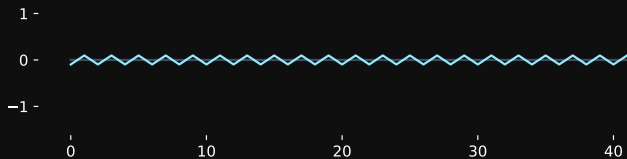


Волна с частотой $2\pi \cdot 22 / 48$





Волна с частотой $2\pi \cdot 24 / 48$





- ▶ Преобразование Фурье раскладывает поступающий сигнал в сумму волн фикс. частот с коэффициентами
- ▶ Полезно при сжатии данных (откинуть ненужные частоты), при анализе сигнала
- ▶ Волны разных частот — такой же **ортогональный базис**, как единичные векторы в пространстве.
- ▶ А как **быстро** считать это преобразование?
А что, если сигнал честно непрерывный?
А вот это уже интересно...

Спасибо за внимание!