



О свёртке и её применениях

Золотов Борис Алексеевич, аспирант МКН СПбГУ,
преподаватель ЛНМО

«Лига Лекторов», 3 сезон

28 ноября 2022 г.



Умножение многочленов

$$(3x^3 + 5x^2 + 2x + 7) \cdot (x^3 + 6x^2 + 8x + 4)$$

Как формируется коэффициент при данной степени?



Умножение многочленов

$$(3x^3 + 5x^2 + 2x + 7) \cdot (x^3 + 6x^2 + 8x + 4)$$

Как формируется коэффициент при данной степени?

Например, при x^4 :

$$3 \cdot 8 + 5 \cdot 6 + 2 \cdot 1.$$



Умножение многочленов

$$(3x^3 + 5x^2 + 2x + 7) \cdot (x^3 + 6x^2 + 8x + 4)$$

Как формируется коэффициент при данной степени?

Например, при x^4 :

$$3 \cdot 8 + 5 \cdot 6 + 2 \cdot 1.$$

Иными словами, мы можем сказать, что

$$A \cdot B[x^n] = \sum_{k+\ell=n} A[x^k] \cdot B[x^\ell].$$

График заболеваемости ковидом



Заболеваемость: сырые данные

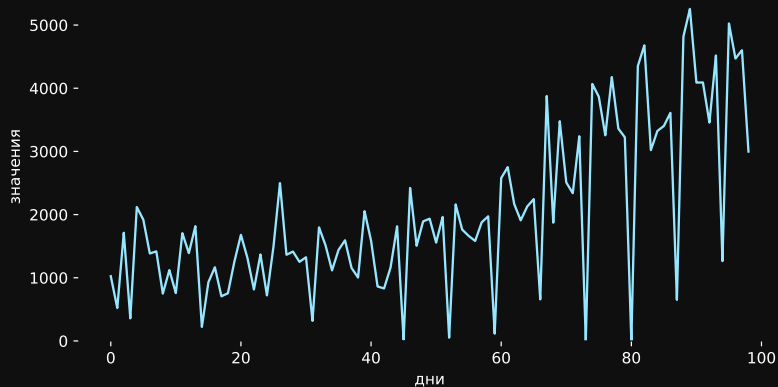
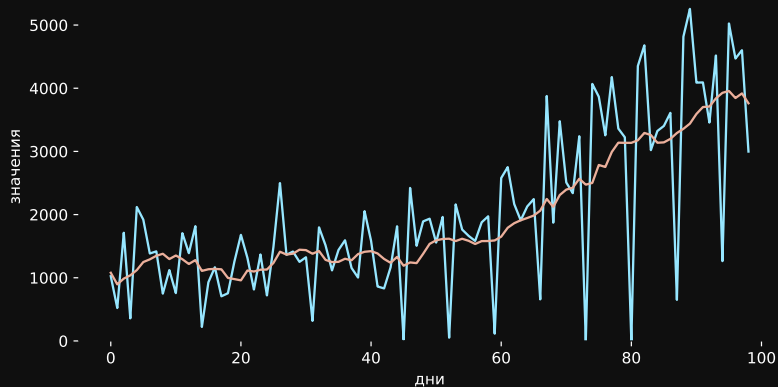


График заболеваемости ковидом



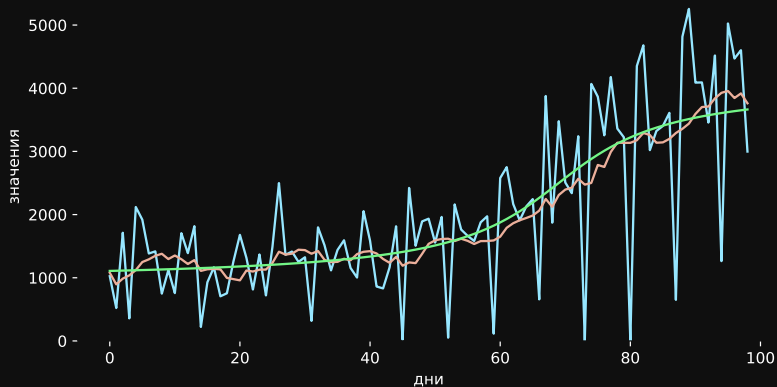
Заболеваемость: недельное среднее



Недельное среднее: $\sum(\frac{1}{7} \cdot S(d))$



Недельное среднее и тренд





Сумма чисел на двух кубиках

1 2 3 4 5 6

6 5 4 3 2 1

С какой вероятностью сумма выпавших чисел равна 5?



Сумма чисел на двух кубиках



С какой вероятностью сумма выпавших чисел равна 5?

$$4 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2.$$



Сумма чисел на двух кубиках



С какой вероятностью сумма выпавших чисел равна 5?

$$4 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2.$$

Иными словами,

$$P_{\Sigma}(n) = \sum_{k+\ell=n} P_1(k) \cdot P_2(\ell).$$



Общее определение свёртки

Пусть (S, \circ) — множество с какой-то операцией (сложение, умножение, взятие максимума...).

Пусть $f, g: S \rightarrow \mathbb{R}$, тогда

$$f * g: S \rightarrow \mathbb{R}, \quad f * g(x) = \sum_{p \circ_S q = x} f(p) \cdot_{\mathbb{R}} g(q).$$



Общее определение свёртки

Пусть (S, \circ) — множество с какой-то операцией (сложение, умножение, взятие максимума...).

Пусть $f, g: S \rightarrow \mathbb{R}$, тогда

$$f * g: S \rightarrow \mathbb{R}, \quad f * g(x) = \sum_{p \circ_S q = x} f(p) \cdot_{\mathbb{R}} g(q).$$

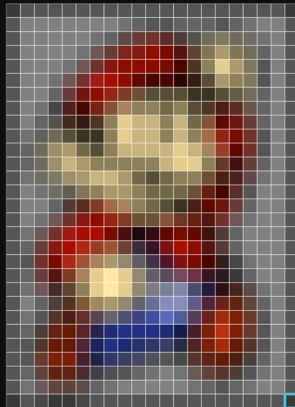
Если $S = \mathbb{R}$, то сумма превращается в интеграл:

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t) \cdot g(x - t) \cdot dt.$$

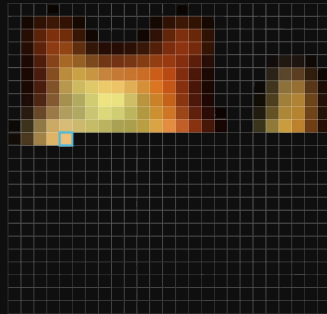
Блур — это свёртка (○ — покоординатное сложение)



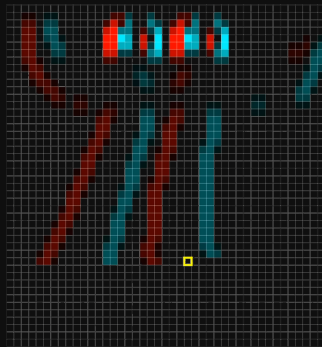
1/0	1/0	1/0
1/0	1/0	1/0
1/0	1/0	1/0



Среднее с весами: гауссовский блюр



Определение краёв и другие операции





Приближение гладкими функциями

Дана функция f — совершенно точно не гладкая, но взятая из практики.

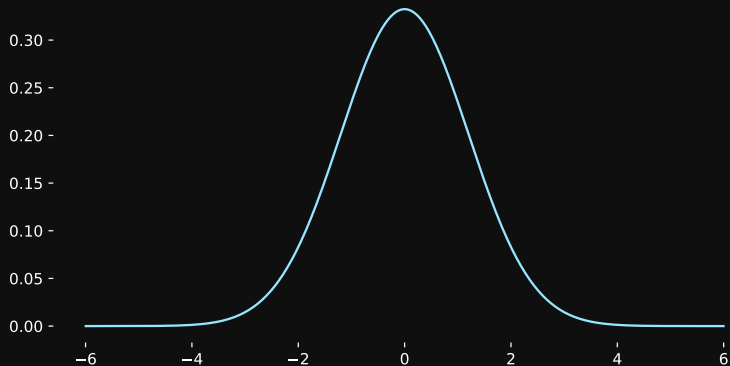
Хочется приблизить её гладкими (чтобы интегрировать, искать максимум, etc.).

Идея: взять скользящее среднее, но, желательно, «уважающее» значение в данной точке.

Нормальное распределение



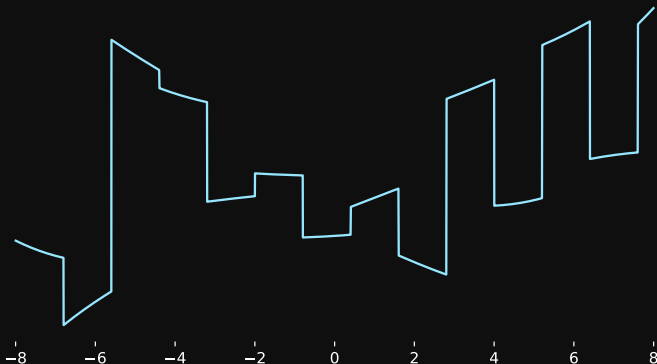
Гауссова функция, $\sigma = 1.20$



Рассмотрим негладкую функцию



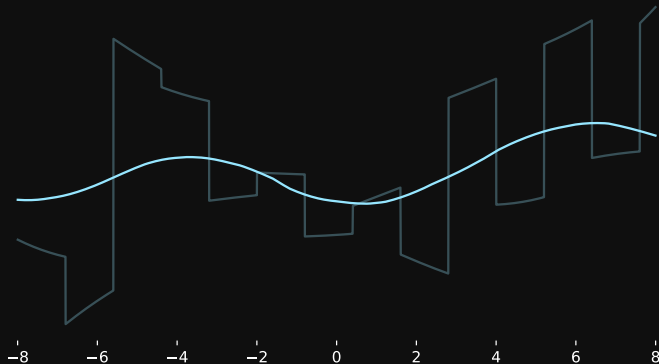
Очень негладкая функция



Приблизим гладкими: $f * \text{гаусс}$



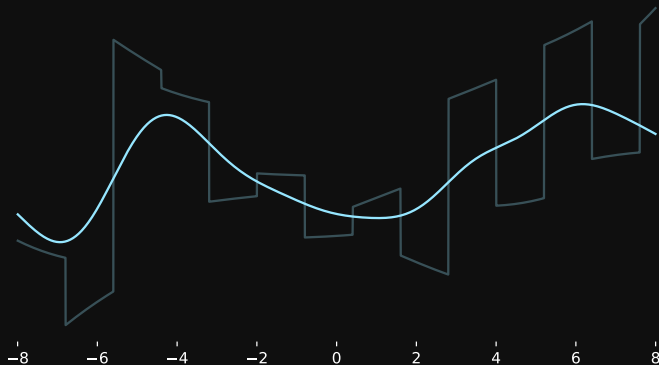
$\sigma = 2.00$



Приблизим гладкими: $f * \text{гаусс}$



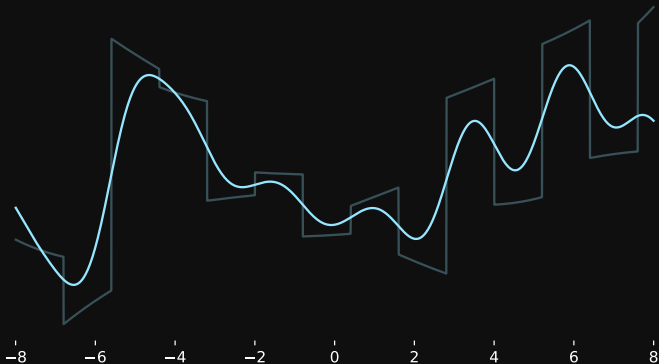
$\sigma = 1.00$



Приблизим гладкими: $f * \text{гаусс}$

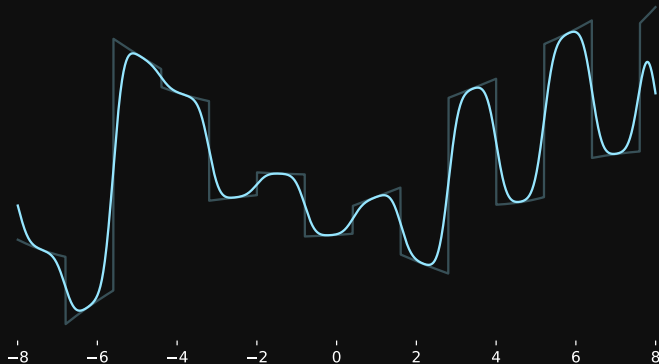


$\sigma = 0.50$



Приблизим гладкими: $f * \text{гаусс}$

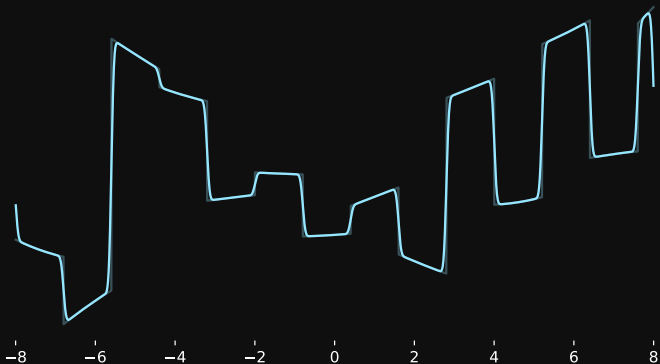
$\sigma = 0.20$



Приблизим гладкими: $f * \text{гаусс}$



$\sigma = 0.05$



Уравнение теплопроводности



Оказывается, свёртка с гауссовой функцией — это решение уравнения теплопроводности: как будет распределяться температура по неравномерно нагретому стержню.

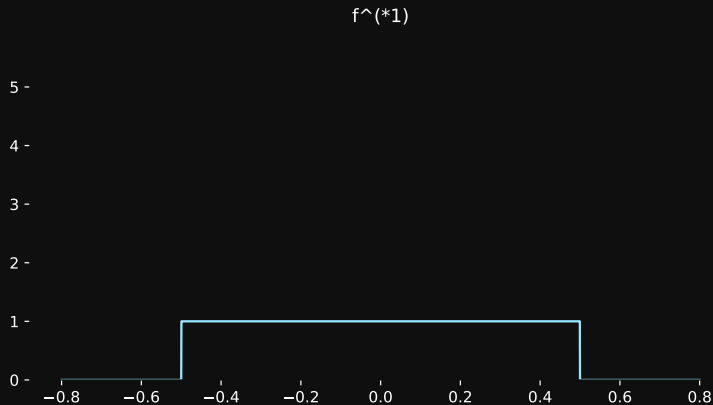


Ещё применения

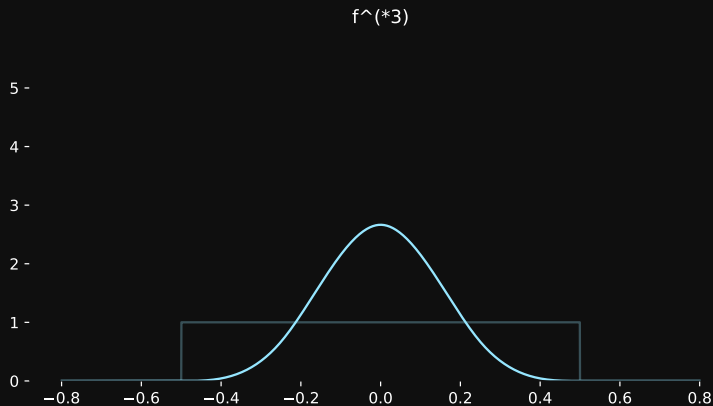
Зачем вообще обзывать много действий из жизни одной абстрактной операцией? Чтобы сразу для всех доказывать свойства и искать способы быстро вычислять (FFT).

- ▶ Умножение матриц и его ассоциативность
- ▶ Арифметическая свёртка: $\mu * I = \text{id}$, потом вылезет в ζ Римана
- ▶ Степенные ряды: обратимость и линейные рекурренты
- ▶ Центральная предельная теорема — это про $f * f * \dots$

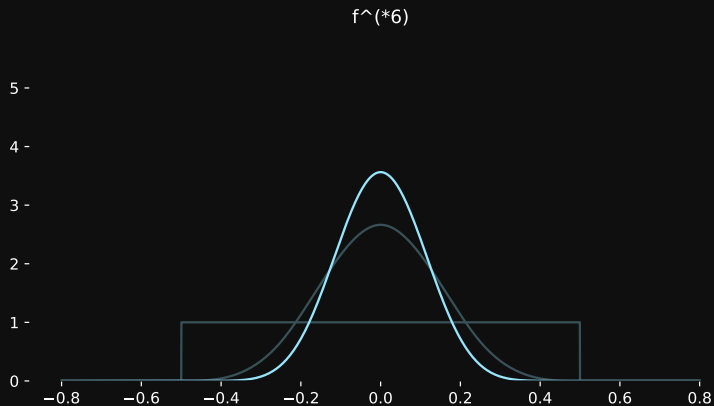
Распределение сред. арифметического, $f * \dots * f$



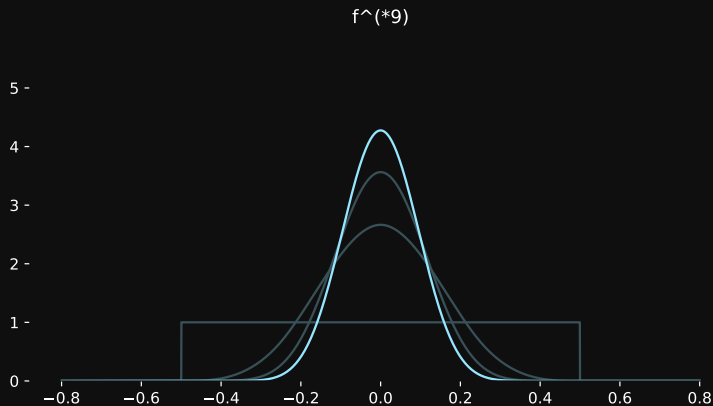
Распределение сред. арифметического, $f * \dots * f$



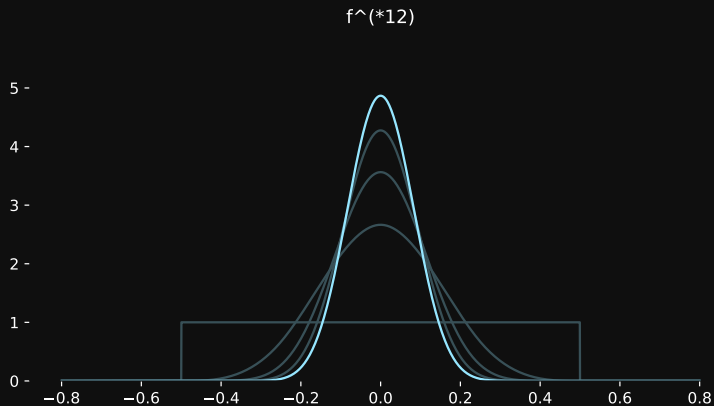
Распределение сред. арифметического, $f * \dots * f$



Распределение сред. арифметического, $f * \dots * f$



Распределение сред. арифметического, $f * \dots * f$



Распределение сред. арифметического, $f * \dots * f$

