Функция Эйлера

Б. А. Золотов, «Математика НОН-СТОП»

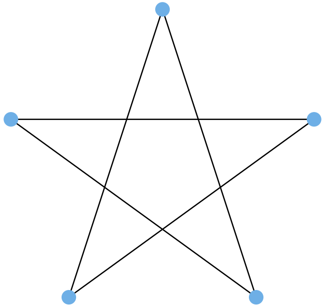
Фонд «Время Науки»

весна 2021

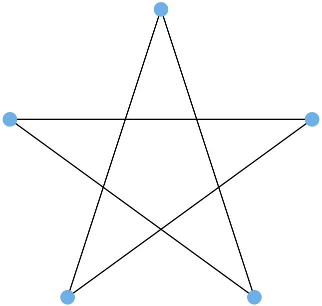
Зачем вести конспект,
когда можно скачать презентацию

Слайды доступны по ссылке: `http://bit.ly/mns-euler`

На 9 мая все рисовали звезду

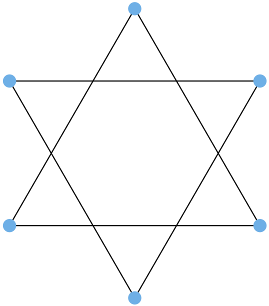


На 9 мая все рисовали звезду



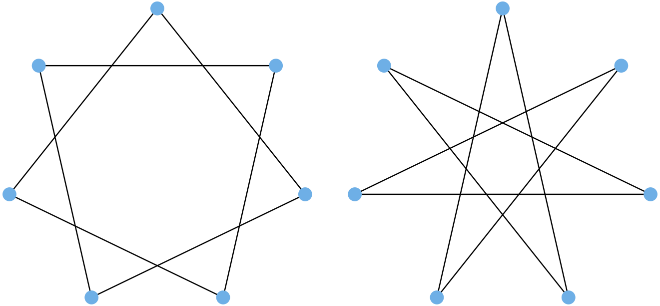
1. Состоит из одной ломаной — рисуется одним росчерком пера;
2. Соединяет любые две точки на расстоянии 2.

И (((другую звезду)))

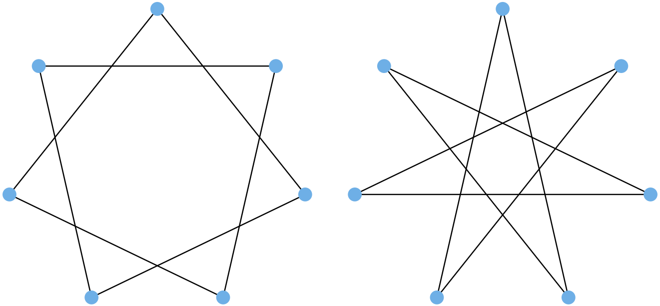


1. Состоит уже из двух ломаных;
2. Соединяет любые две точки на расстоянии 2.

Для 7 точек интересных звёзд уже несколько



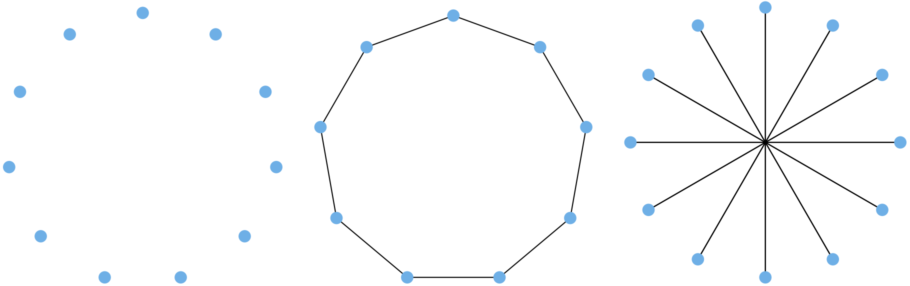
Для 7 точек интересных звёзд уже несколько



Введём обозначение: это $(7,2)$- и $(7,3)$-звёзды.

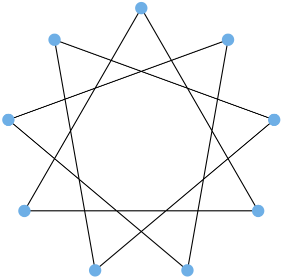
Их же будем называть $(7,5)$ и $(7,4)$.

Неинтересные звёзды — тоже звёзды

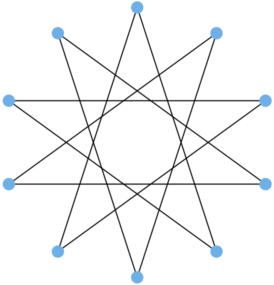


Звёзды для 0, 1, $n/2$.

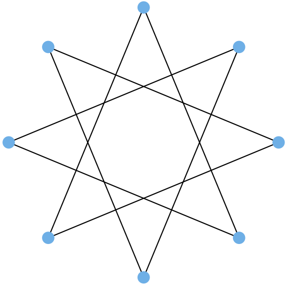
Ещё примеры



$(9, 3)$ — 3 ломаных



$(10, 4)$ — 2 ломаных



$(8, 3)$ — 1 ломаная

Вопросы

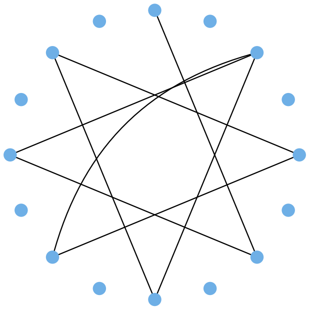
1. Из скольки ломаных состоит (n, k)-звезда?
2. Сколько звёзд состоят ровно из m ломаных?
3. Можно ли из этого получить интересный математический факт?

Будем следить за одной ломаной

По принципу Дирихле, рано или поздно она придёт в точку, в которой уже была.

Будем следить за одной ломаной

По принципу Дирихле, рано или поздно она придёт в точку, в которой уже была.



На самом деле, это будет точка, из которой ломаная начиналась.

Количество вершин в одной ломаной

Ломаная прошла целое число оборотов. Если дело происходит в (n, k)-звезде, в одной ломаной r вершин, тогда

$$k \cdot r \;\vdots\; n.$$

Минимальное такое число r:

$$r = \frac{n}{\text{НОД}(n, k)}.$$

Количество вершин в одной ломаной

Ломаная прошла целое число оборотов. Если дело происходит в (n, k)-звезде, в одной ломаной r вершин, тогда

$$k \cdot r \ \vdots \ n.$$

Минимальное такое число r:

$$r = \frac{n}{\text{НОД}(n, k)}.$$

Теорема

(n, k)-звезда состоит из НОД(n, k) ломаных.

Количество звёзд с d ломаными

Количество чисел k: НОД $(n, k) = d$.

Количество звёзд с d ломаными

Количество чисел k: НОД $(n, k) = d$.

Поделим всё на d: мы ищем числа от 1 до $\frac{n}{d}$, *взаимно простые* с $\frac{n}{d}$ (мы исчерпали общий делитель делением на d).

Количество таких чисел обозначается $\varphi\left(\frac{n}{d}\right)$.

Количество звёзд с d ломаными

Количество чисел k: НОД $(n, k) = d$.

Поделим всё на d: мы ищем числа от 1 до $\frac{n}{d}$, *взаимно простые* с $\frac{n}{d}$ (мы исчерпали общий делитель делением на d).

Количество таких чисел обозначается $\varphi\left(\frac{n}{d}\right)$.

Теорема

$$\sum_{n \,\vdots\, d} \varphi\left(\frac{n}{d}\right) = n.$$

Функция Эйлера: примеры

$\varphi(10) = 4$ 1, 3, 7, 9

$\varphi(5) = 4$ 1, 2, 3, 4

$\varphi(2) = 1$ 1

$\varphi(1) = 1$ 1

$4 + 4 + 1 + 1 = 10$

Функция Эйлера: базовые свойства

Теорема

$$\varphi(p) = p - 1$$

Все числа от 1 до $p - 1$.

Функция Эйлера: базовые свойства

Теорема

$$\varphi(p) = p - 1$$

Все числа от 1 до $p - 1$.

Теорема

$$\varphi(p^k) =$$

Функция Эйлера: базовые свойства

Теорема

$$\varphi(p) = p - 1$$

Все числа от 1 до $p - 1$.

Теорема

$$\varphi(p^k) = p^k \cdot \frac{p-1}{p}$$

Быть взаимно простым с p^k — то же, что
не делиться на p. Каждое p-ое
число делится на p.

$\varphi(n)$ чётно при $n \neq 1$

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

Числа, взаимно простые с 10, расположены симметрично.

$\varphi(n)$ чётно при $n \neq 1$

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

Числа, взаимно простые с 10, расположены симметрично.

Теорема

$$НОД(n, k) = НОД(n, n - k)$$

Доказательство: общие делители чисел в паре слева и в паре справа одни и те же. Эта теорема называется *алгоритм Евклида.*

$\varphi(n)$ чётно при $n \neq 1$

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

Если n чётно, то посередине будет находиться число $\frac{n}{2}$, которое *не* взаимно просто с n. Если n нечётно, то чисел $1 \ldots n-1$ — чётное количество.

Формула для функции Эйлера

$n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_m^{k_m}$ — разложение на простые.

Теорема

$$\varphi(n) = n \cdot \frac{p_1 - 1}{p_1} \cdot \frac{p_2 - 1}{p_2} \cdot \ldots \cdot \frac{p_m - 1}{p_m}$$

Формула для функции Эйлера

$n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_m^{k_m}$ — разложение на простые.

Теорема

$$\varphi(n) = n \cdot \frac{p_1 - 1}{p_1} \cdot \frac{p_2 - 1}{p_2} \cdot \ldots \cdot \frac{p_m - 1}{p_m}$$

Идея доказательства: выкинуть все числа, делящиеся на p_1. Затем выкинуть все числа, делящиеся на p_2, которые не были выкинуты ранее (например, не выкинуть $p_1 p_2$ ещё раз). Затем выкинуть все числа, делящиеся на p_3...

Выкидываем делящиеся на p_1

Каждое p_1-ое число делится на p_1. Разделим n на блоки по p_1 чисел, из каждого выкинем по одному числу.
Останется

$$n \cdot \frac{p_1 - 1}{p_1}.$$

Это должно напоминать формулу $\varphi\left(p^k\right)$.

Выкидываем делящиеся на p_k

Требуется оставить числа, которые не делятся на p_k,
а также не делятся ни на одно из чисел $p_1, \ldots, p_{k-1}$.

$x \mathrel{\vdots} p_i \iff p_k \cdot x \mathrel{\vdots} p_i$. Отсюда доля чисел, делящихся на $p_1, \ldots, p_{k-1}$, одинакова *вообще* и среди чисел, кратных p_k.
А, значит, и среди чисел, не кратных p_k.

$$n \cdot \underbrace{\frac{p_k - 1}{p_k}}_{\substack{\text{считаем} \\ \text{долю среди} \\ \text{не кратных } p_k}} \cdot \left(\underbrace{\frac{p_1 - 1}{p_1} \cdot \ldots \cdot \frac{p_{k-1} - 1}{p_{k-1}}}_{\text{выяснили ранее}} \right)$$

Мультипликативность функции Эйлера

$$\varphi(n) = n \cdot \frac{p_1 - 1}{p_1} \cdot \frac{p_2 - 1}{p_2} \cdot \ldots \cdot \frac{p_m - 1}{p_m}$$

Теорема

Если числа a и b взаимно просты, то $\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$.

Упражнение: сперва доказать мультипликативность φ,
а потом из неё вывести формулу.

Что мы знаем про функцию Эйлера

1. Явная формула для функции Эйлера,
2. Мультипликативность функции Эйлера,
3. Число n равно сумме значений $\varphi(d)$ для своих делителей.

Другие мультипликативные функции

1. $e(1) = 1, \quad e(n) = 0$ для $n \neq 1$.
2. $I(n) = 1$ для всех n; $\qquad \mathbb{I}\mathrm{d}(n) = n$.
3. $\varphi(n)$ — функция Эйлера.
4. $\tau(n)$ — количество делителей числа n.
5. $\mu(n)$ — функция Мёбиуса:

$$\mu(n) = \begin{cases} 0, & n \,\vdots\, p^2 \\ 1, & n = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_{2k} \\ -1, & n = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_{2k+1} \end{cases}$$

Другая интересная формула

Теорема

$$\varphi(n) = \sum_{n \,\vdots\, d} d \cdot \mu\left(\frac{n}{d}\right).$$

Её можно доказать «просто так», а можно с помощью важного инструмента под названием *свёртка.*