Лекция «Вокруг $\sqrt{2}$»

Тодоров Е.И.

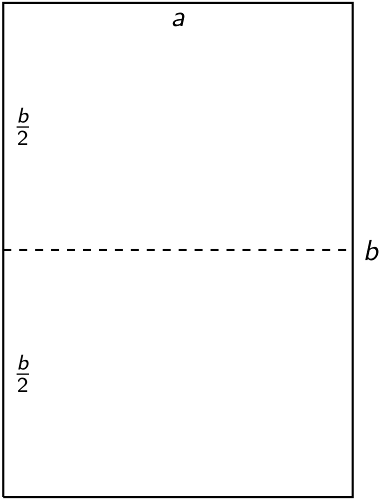
Фонд «Время науки»

5 августа 2021 г.

Эта презентация онлайн

Зачем фотографировать презентацию,
когда её можно скачать?

Лист А4



Свойство сторон листа А4 (всех листов формата А):

$$a : b = \frac{b}{2} : a,$$

откуда

$$b^2 = 2a^2.$$

Определение

Для числа $s \geq 0$ квадратным корнем из s будем называть такое число $t \geq 0$, что $t^2 = s$. Пишут $t = \sqrt{s}$.

Пример

$$\sqrt{1} = 1, \qquad \sqrt{4} = 2, \qquad \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}, \qquad \sqrt{2} = 1.414213\ldots$$

Свойство

$$s \geq 0 \qquad \left(\sqrt{s}\right)^2 = s = \sqrt{s^2}$$

Свойство

$$s, r \geq 0 \qquad \sqrt{s \cdot r} = \sqrt{s} \cdot \sqrt{r}$$

$\sqrt{2}$

Применим описанные свойства к соотношению $b^2 = 2a^2$:

$$\sqrt{b^2} = \sqrt{2a^2}$$

$$\sqrt{b^2} = \sqrt{2}\sqrt{a^2}$$

$$b = \sqrt{2}a$$

$$\frac{b}{a} = \sqrt{2}.$$

Вопрос: можно ли найти такие целые a и b?

Числовые множества

- Натуральные числа: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$
- Целые числа: $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$
- Попробуем теперь собрать все дроби $\frac{b}{a}$:
  - $\frac{-3}{5} = \frac{3}{-5}$. Берём b любое, а a — только положительное.
  - $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \ldots$. Берём только несократимые дроби. То есть у b и a не должно быть общих делителей (кроме 1).
- Рациональные числа (дроби):

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{b}{a} \,\middle|\, b - \text{целое}, a - \text{натуральное}, \frac{a}{b} - \text{несократимая} \right\}.$$

Теорема Аристотеля

Теорема

Число $\sqrt{2}$ не живёт в $\mathbb{Q}$. То есть не существует таких целых a и b, что $\frac{b}{a} = \sqrt{2}$, где $\frac{b}{a}$ — несократимая дробь.

Доказательство

Пусть такие a и b найдутся. Тогда

$$\frac{b}{a} = \sqrt{2},$$

что эквивалентно

$$b^2 = 2a^2$$

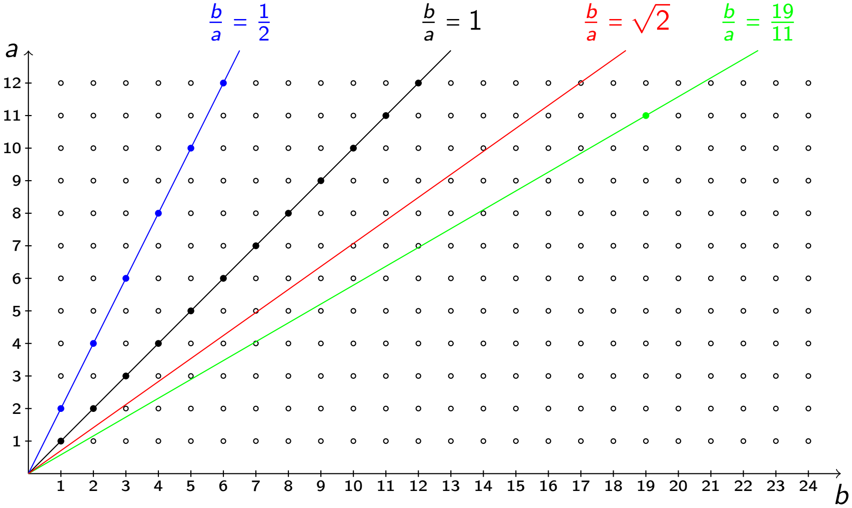
- *b^2 должно делится на 2;*
- *b делится на 2;*
- *найдётся такое k, что $b = 2k$;*

Доказательство (продолжение)

- $b^2 = 4k^2 = 2a^2$;
- $a^2 = 2k^2$;
- $\ldots$;
- *a делится на 2*;
- *противоречие.*

Значит, не существует таких целых a и b, что $\frac{b}{a} = \sqrt{2}$.
Значит, уравенеие $b^2 = 2a^2$ не имеет решений для целых a и b.

Иллюстрация рациональности



Задача 1

Может ли иррациональное число в иррациональной степени быть рациональным?

Решение 1

Да, может.
Рассмотрим число

$$\left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{2}}.$$

Если оно рационально, то мы победили.

Решение 1

Да, может.
Рассмотрим число

$$\left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{2}}.$$

Если оно рационально, то мы победили.
Если нет, то возведём и его в степень $\sqrt{2}$:

$$\left(\left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \left(\sqrt{2}\right)^{2} = 2.$$

И теперь мы точно победили.

Задача 2

Генерал построил своё подразделения в форме квадрата. Может ли он перестроить это же подразделение в виде двух равных квадратов?

Задача 2

Генерал построил своё подразделения в форме квадрата. Может ли он перестроить это же подразделение в виде двух равных квадратов?

Решение. Пусть такое бывает. Тогда пусть у первого квадрата сторона b, а у других двух — по a. Но тогда верно $b^2 = 2a^2$. А такого, как мы доказали, не бывает.

Цепная дробь

Рассмотрим дробь

$$1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \dots}}} = x \quad \Longleftrightarrow \quad 2 + \cfrac{1}{\boxed{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \dots}}}} = 1 + x.$$

Заменим знаменатель первой дроби на x:

$$\begin{aligned} 2 + \frac{1}{x+1} &= 1 + x \\ \frac{1}{x+1} &= x - 1 \\ 1 &= (x-1)(x+1) \\ 1 &= x^2 - 1 \\ x^2 &= 2 \\ x &= \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Приближенные значения $\sqrt{2}$

Обрубая дробь с предыдущего слайда на том или ином этаже мы получим последовательность *приближенных значений* $\sqrt{2}$:

$$\frac{1}{1}, \quad \frac{3}{2}, \quad \frac{7}{5}, \quad \frac{17}{12}, \quad \frac{41}{29}, \dots$$

- Каждая следующая такая дробь приближает $\sqrt{2}$ всё лучше и лучше (посмотрите на точки на картинке с графиками).
- Если $\frac{p}{q}$ и $\frac{P}{Q}$ — две последовательные дроби из ряда выше, то

$$P = p + 2q, \qquad Q = p + q.$$

Свойство

Для каждой дроби $\frac{P}{Q}$ *из ряда выше выполнено:*

$$P^2 - 2Q^2 = \pm 1,$$

что экививалентно

$$P^2 = 2Q^2 \pm 1.$$

Доказательство

Пусть для дроби $\frac{p}{q}$ *это выполнено, то есть* $p^2 - 2q^2 = \pm 1$.

Рассмотрим следующую за $\frac{p}{q}$ *дробь* $\frac{P}{Q}$. *Для неё верны соотношения* $P = p + 2q$ *и* $Q = p + q$. *Тогда*

$$P^2 - 2Q^2 = (p + 2q)^2 - 2(p + q)^2 =$$

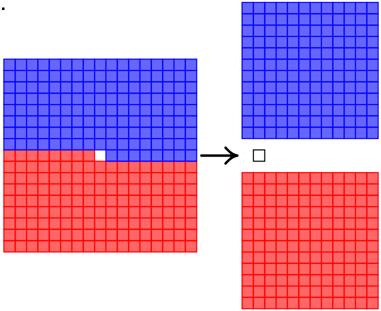
$$p^2 + 4pq + 4q^2 - 2p^2 - 4pq - 2q^2 =$$

$$2q^2 - p^2 = -(p^2 - 2q^2) = \mp 1.$$

Опять задача

Вернёмся к задаче о генерале и подразделениях. Изначальная задача имеет отрицательный ответ, т.к. для любых целых a и b $b^2 \neq 2a^2$.

Но если взять $b = P$ и $a = Q$ из дробей выше, мы гарантированно можем добиться разницы между b^2 и $2a^2$ всего в одного солдата.



Спасибо за внимание!

Что мы узнали сегодня:

1. откуда взялось число $\sqrt{2}$ и почему оно иррационально;
2. что такое Теорема Аристотеля;
3. как цепные дроби приближают числа;
4. как почти разбить один квадрат на два равных.

Задать вопрос автору: todzhe@mail.ru