

Принципы составления заданий и система оценивания Олимпиады «Математика НОН-СТОП»

СПбАППО

Методическая комиссия Олимпиады

21 апреля 2018

История состязаний

- 2010 — первая олимпиада;
- 2012 — три площадки;
- 2015 — первый профильный вариант;
- 2016 — 400 участников пишут базовый вариант, 92 — профильный;
— поддержка Фонда «Время Науки»;
- 2018 — 847 участников пишут базовый вариант, 128 — профильный;
— включение в Перечень региональных олимпиад и конкурсов интеллектуальной направленности ;
— поддержка Фонда Президентских грантов Комитета по образованию СПб;
— *выход сборника задач.*

Не верьте им!

Основная цель олимпиады — избегать появления «сообщества профессионалов», которые умеют её решать.

То, что вам сейчас расскажут, — не руководство по подготовке и не классификация задач 2019 года;

А набор наблюдений, касающихся заданий прошлых лет.

Задачи «о мире»

Нам не хочется быть только математической олимпиадой:

Мы любим задачи, которые содержат исследование окружающего мира,

И зачастую не имеют чёткого ответа.

2017-5-2В («Задача-шутка»)

Условие

Дана 200-этажная башня. Стул с 30 ножками скидывают с её крыши, и одновременно с этим более лёгкий стул совсем без ножек отправляют катиться вниз по лестнице внутри башни. Может ли безногий стул достигнуть земли быстрее, чем летящий?

2017-5-2В («Задача-шутка»)

Условие

Дана 200-этажная башня. Стул с 30 ножками скидывают с её крыши, и одновременно с этим более лёгкий стул совсем без ножек отправляют катиться вниз по лестнице внутри башни. Может ли безногий стул достигнуть земли быстрее, чем летящий?

Странно ожидать от задачи-шутки ответа «нет»: возьмём башню с отвесной лестницей и откачанным воздухом.

2017-4-3A

Условие

Какие буквы русского алфавита можно перерисовать в другие, добавляя линии?

2017-4-3A

Условие

Какие буквы русского алфавита можно перерисовать в другие, добавляя линии?

Отсортируем буквы по алфавиту и переберём перерисовывания каждой:

Б \rightarrow В	Е \rightarrow В	О \rightarrow Ю	Ш \rightarrow Щ
Г \rightarrow Б	И \rightarrow Й	Р \rightarrow В	Ь \rightarrow Б
Г \rightarrow В	К \rightarrow Ж	С \rightarrow О	Ь \rightarrow Ы
Г \rightarrow Т	Л \rightarrow Д	Ц \rightarrow Щ	Ь \rightarrow Ъ

Но мы исходили из того, что шрифт типографский.

2016-5-4C

Условие

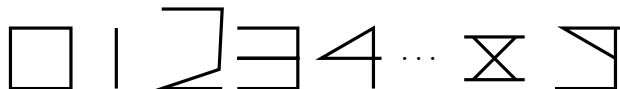
Пионер Вася хочет научиться выкладывать цифры наименьшим числом спичек. Помогите ему в этом: найдите наименьшее число k такое, что любая цифра может быть выложена из k спичек.

2016-5-4C

Условие

Пионер Вася хочет научиться выкладывать цифры наименьшим числом спичек. Помогите ему в этом: найдите наименьшее число k такое, что любая цифра может быть выложена из k спичек.

$k = 4$:



2016-5-4C

Почему не обойтись меньшим числом спичек?

8 должна содержать две петли \implies два треугольника, не более двух пар общих сторон \implies 4 спички.



Конструктивные задачи

То, что может позволить себе участник с небольшим опытом в математике, —

Придумать пример, удовлетворяющий заданным свойствам.

Доказательства же обычно требуют некоторой сноровки.

2016-5-4B

Условие

Могло ли случиться так, что в петином отряде из 20 пионеров имена у всех начинаются с разных букв?

2016-5-4В

Условие

Могло ли случиться так, что в петином отряде из 20 пионеров имена у всех начинаются с разных букв?

Да, могло:

2016-5-4В

Условие

Могло ли случиться так, что в петином отряде из 20 пионеров имена у всех начинаются с разных букв?

Да, могло:

*Аустри, Бримир, Вестри, Гандальв, Двалин,
Ёрд, Ингви, Кили, Лит, Мотсогнир, Нии,
Ори, Регин, Судри, Торин, Фили,
Хефти, Эйкинськьяльди, Яри,
Пётр*

2018-6-2B

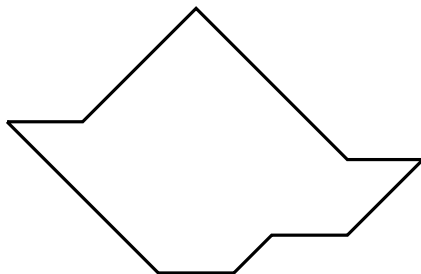
Условие

Укажите, как разрезать изображённую на рисунке фигуру на 6 равных фигур.

2018-6-2B

Условие

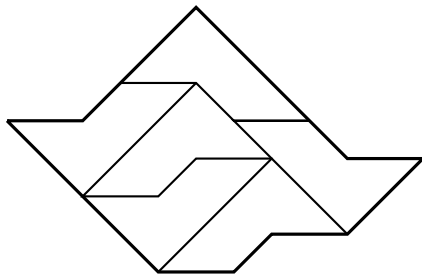
Укажите, как разрезать изображённую на рисунке фигуру на 6 равных фигур.



2018-6-2B

Условие

Укажите, как разрезать изображённую на рисунке фигуру на 6 равных фигур.



2017-8-2C

Условие

Придумайте (или расскажите, как построить) 95-значное число, в котором нет нулей и которое делится на свою сумму цифр.

2017-8-2C

Условие

Придумайте (или расскажите, как построить) 95-значное число, в котором нет нулей и которое делится на свою сумму цифр.

Придумаем число, делящееся на $144 = 9 \cdot 16$:

$$\overbrace{\quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot}^{3232.}$$

разрядов — 91,
 \sum цифр — 134

Ужасный гадкий аккуратный подсчёт

Один из важных навыков для детей — аккуратность;

Его мы также с удовольствием проверяем.

2018-4-6A

Условие

Из клетчатой бумаги вырезали прямоугольник размером 4×5 клеток. Сколько на нём можно найти квадратов? А прямоугольников?

2018-4-6A

Условие

Из клетчатой бумаги вырезали прямоугольник размером 4×5 клеток. Сколько на нём можно найти квадратов? А прямоугольников?

Заметим, что левый верхний угол прямоугольника размером $a \times b$ может находиться в $(5 - a) \cdot (6 - b)$ положениях.

2018-4-6A

	1	2	3	4
1	$(6-1)(5-1) = \mathbf{20}$	$(6-1)(5-2) = \mathbf{15}$	$(6-1)(5-3) = \mathbf{10}$	$(6-1)(5-4) = \mathbf{5}$
2	$(6-2)(5-1) = \mathbf{16}$	$(6-2)(5-2) = \mathbf{12}$	$(6-2)(5-3) = \mathbf{8}$	$(6-2)(5-4) = \mathbf{4}$
3	$(6-3)(5-1) = \mathbf{12}$	$(6-3)(5-2) = \mathbf{9}$	$(6-3)(5-3) = \mathbf{6}$	$(6-3)(5-4) = \mathbf{3}$
4	$(6-4)(5-1) = \mathbf{8}$	$(6-4)(5-2) = \mathbf{6}$	$(6-4)(5-3) = \mathbf{4}$	$(6-4)(5-4) = \mathbf{2}$
5	$(6-5)(5-1) = \mathbf{4}$	$(6-5)(5-2) = \mathbf{3}$	$(6-5)(5-3) = \mathbf{2}$	$(6-5)(5-4) = \mathbf{1}$

Есть куда более простой способ
 посчитать сумму всех чисел в таблице:
 надо заметить, что это произведение двух сумм.

	$\sum = (1 + 2 + \dots + 5)(1 + \dots + 4) = 15 \cdot 10 = 150.$
	$2 + 6 + 12 + 20 = 40.$

Опирайтесь на школьную программу

Мы всё-таки апеллируем к знаниям,
получаемым участниками в школе.

2017-4-2В

Условие

Начинающая П. едет на велосипеде без остановок со скоростью 15 км/ч, а опытный Д. Г. — со скоростью 34 км/ч, но остановки на отдых отнимают у него столько же времени, сколько он находится в движении. Кто же быстрее?

2017-4-2В

Условие

Начинающая П. едет на велосипеде без остановок со скоростью 15 км/ч, а опытный Д. Г. — со скоростью 34 км/ч, но остановки на отдых отнимают у него столько же времени, сколько он находится в движении. Кто же быстрее?

Средняя скорость П. — 15 км/ч: она едет с этой скоростью постоянно.

Средняя скорость Д. Г. на любом участке движения ≥ 17 км/ч и достигает этого значения только в конце остановок. Он быстрее.

2016-6-6B

Условие

Трое лыжников вышли в лес. Лыжники встали на расстоянии по 100 метров друг от друга. В любой момент времени может двигаться только один лыжник, но при этом лишь по прямой, параллельной отрезку, соединяющему двух оставшихся лыжников. Пару часов покатавшись так по лесу, лыжники замерили расстояние друг между другом — получились цифры в 90, 120 и 150 метров. Докажите, что кто-то из лыжников не выполнял правила в течение поездки.

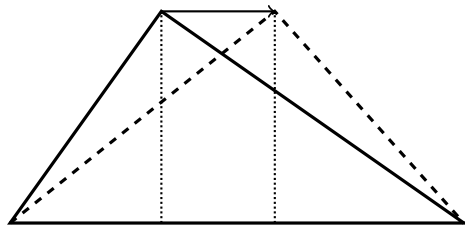
2016-6-6B

Условие

Трое лыжников вышли в лес. Лыжники встали на расстоянии по 100 метров друг от друга. В любой момент времени может двигаться только один лыжник, но при этом лишь по прямой, параллельной отрезку, соединяющему двух оставшихся лыжников. Пару часов покатавшись так по лесу, лыжники замерили расстояние друг между другом — получились цифры в 90, 120 и 150 метров. Докажите, что кто-то из лыжников не выполнял правила в течение поездки.

Площадь треугольника, образованного лыжниками, должна быть неизменна:

2016-6-6B



Треугольник 100, 100, 100 — равносторонний;

$$S = \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot 100 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2500\sqrt{3}.$$

Треугольник 90, 120, 150 — прямоугольный (как 3, 4, 5); $S = 90 \cdot 60$.

Прочтите условие, и будет вам счастье

Самое главное при решении задачи — правильно понять, что написано в её условии.

Можно пытаться довести это до абсолюта.

2018-5-3C

Условие

Стул с 720 ножками падает с лестницы. Выяснилось, что при падении он потерял в три раза меньше ножек, чем у него бы осталось, потеряй он в три раза меньше ножек, чем у него осталось сейчас. Так сколько же ножек осталось у стула?

2018-5-3C

Условие

Стул с 720 ножками падает с лестницы. Выяснилось, что при падении он потерял в три раза меньше ножек, чем у него бы осталось, потеряй он в три раза меньше ножек, чем у него осталось сейчас. Так сколько же ножек осталось у стула?

$$(720 - x)$$

2018-5-3C

Условие

Стул с 720 ножками падает с лестницы. Выяснилось, что при падении он потерял в три раза меньше ножек, чем у него бы осталось, потеряй он в три раза меньше ножек, чем у него осталось сейчас. Так сколько же ножек осталось у стула?

$$(720 - x) \cdot 3 =$$

2018-5-3C

Условие

Стул с 720 ножками падает с лестницы. Выяснилось, что при падении он потерял в три раза меньше ножек, чем у него бы осталось, потеряй он в три раза меньше ножек, чем у него осталось сейчас. Так сколько же ножек осталось у стула?

$$(720 - x) \cdot 3 = 720 -$$

2018-5-3C

Условие

Стул с 720 ножками падает с лестницы. Выяснилось, что при падении он потерял в три раза меньше ножек, чем у него бы осталось, потеряй он в три раза меньше ножек, чем у него осталось сейчас. Так сколько же ножек осталось у стула?

$$(720 - x) \cdot 3 = 720 - \frac{1}{3} \cdot$$

2018-5-3C

Условие

Стул с 720 ножками падает с лестницы. Выяснилось, что при падении он потерял в три раза меньше ножек, чем у него бы осталось, потеряй он в три раза меньше ножек, чем у него осталось сейчас. Так сколько же ножек осталось у стула?

$$(720 - x) \cdot 3 = 720 - \frac{1}{3} \cdot x$$

2018-5-3C

Условие

Стул с 720 ножками падает с лестницы. Выяснилось, что при падении он потерял в три раза меньше ножек, чем у него бы осталось, потеряй он в три раза меньше ножек, чем у него осталось сейчас. Так сколько же ножек осталось у стула?

$$(720 - x) \cdot 3 = 720 - \frac{1}{3} \cdot x$$

$$x = 540$$

Задачи про игры

Задачи про игры достаточно популярны в математике.

Поэтому, чтобы не попасть в общий тренд, нужно делать их либо внутренне примитивными, либо вычурными.

2018-6-3C

Условие

Двое по очереди вырезают из клетчатого квадрата 4×4 уголки из трёх клеток, причём первый может вырезать только уголки, ориентированные как буква Г, а второй — только уголки, ориентированные как буква L. Проигрывает тот, кто не может вырезать очередной уголок. У кого из игроков есть выигрышная стратегия?

2018-6-3C

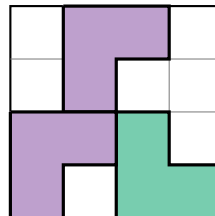
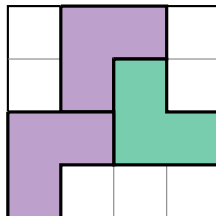
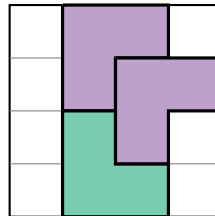
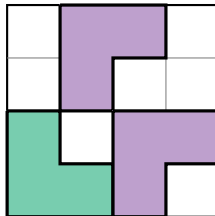
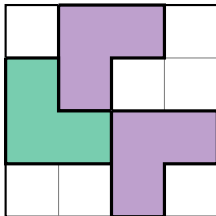
Условие

Двое по очереди вырезают из клетчатого квадрата 4×4 уголки из трёх клеток, причём первый может вырезать только уголки, ориентированные как буква Г, а второй — только уголки, ориентированные как буква L. Проигрывает тот, кто не может вырезать очередной уголок. У кого из игроков есть выигрышная стратегия?

Побеждает первый, если поставит свою фигуру посередине верхней стороны.

Доказывать это надо перебором: у второго есть пять вариантов хода.

2018-6-3C



2017-8-10B

Условие

Даны две кучи камней: в одной 23 камня, вторая пока пустая. Также дан мешок с 2017 камнями. Разрешены два типа ходов. Можно брать 1, 2, 3 или 4 камня и перекладывать их из первой кучи во вторую. Также можно перекладывать 1, 2, 3 или 4 камня (если они там есть) из второй кучи в первую — при этом столько же камней, сколько взято, нужно выкинуть из мешка в окно. Играют двое; проигрывает тот, кто выкидывает последний камень из мешка. Кто победит при правильной игре?

2017-8-10B

Условие

Даны две кучи камней: в одной 23 камня, вторая пока пустая. Также дан мешок с 2017 камнями. Разрешены два типа ходов. Можно брать 1, 2, 3 или 4 камня и перекладывать их из первой кучи во вторую. Также можно перекладывать 1, 2, 3 или 4 камня (если они там есть) из второй кучи в первую — при этом столько же камней, сколько взято, нужно выкинуть из мешка в окно. Играют двое; проигрывает тот, кто выкидывает последний камень из мешка. Кто победит при правильной игре?

Стратегия для первого: добиться, чтобы перекладывания $2 \rightarrow 1$ делал только второй.

2017-8-10B

Первый ход: 3 камня из 1 в 2. Затем

Ход второго игрока	Ответный ход
k камней $1 \rightarrow 2$	$(5 - k)$ камней $1 \rightarrow 2$ (всегда можем)
k камней $2 \rightarrow 1$	k камней $1 \rightarrow 2$

Профильные задачи

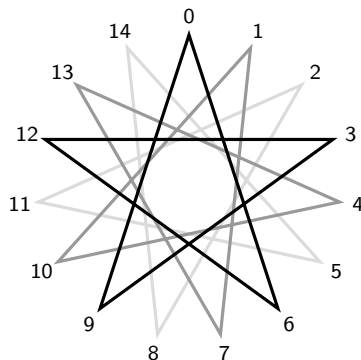
Симуляция настоящего научного исследования, доступная для школьника.

Предлагаем всем ученикам ФМЛ, так как это формат, с которым они ещё не сталкивались и в котором не «вынесут» всех остальных.

Взять известный факт из алгебры...

...И попросить школьников доказать его в наглядной и понятной форме.

Пример — задача про «звёзды» (2017): дан правильный n -угольник, соединяем его вершины, находящиеся на равном расстоянии.



$(15, 6)$ -звезда

$$n = \sum_{d|n} \varphi(d)$$

(n, k) –звезда состоит из НОД (n, k) ломаных: в частности, из одной ломаной, когда n и k взаимно просты.

Отсюда есть ровно $\varphi\left(\frac{n}{\ell}\right)$ звёзд, состоящих из ℓ ломаных.

$\frac{n}{\ell}$ пробегает все делители n , а каждая звезда состоит из сколько-то ломаных. Всего звёзд n .

Системы счисления

Задачи на системы счисления комбинируют чисто технические навыки и неожиданные факты:

«Десятичная римская система счисления» (2018):

$$\begin{aligned} 4047215_{\text{P}} &= 4000000 + 0 - (40000 - (7000 + 200 + 10 - 5)) \\ &= 3967205_{\text{Д}}. \end{aligned}$$

$$150_{\text{Д}} = 1850_{\text{P}}.$$

Неожиданные свойства этой системы счисления

- Если $S_p = N$, то $0S_p = -N$;
- Число может иметь две записи: $1_p = 19_p = 1 \in \mathbb{N}$;
- Число может не иметь записей: 121;
- Как изменяются признаки делимости?

«Задача с открытым концом»: жюри не известен критерий наличия «римской» записи у числа и как установить количество записей.

В двоичной римской с.с. записей не более двух...

Где нас найти

- Условия задач 2016–18:

<http://mathnonstop.ru/uchastnikam.html>

- Электронная почта:

boris.a.zolotov@yandex.com

- Эта презентация:

<http://bit.ly/mns-seminar-1>

Спасибо за внимание! /*/

/*/ Вы можете задать ещё вопросов