

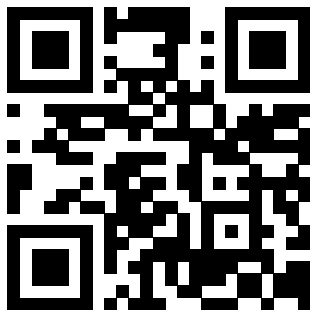
# Решения избранных задач

Е.И. Тодоров, «Математика НОН-СТОП»

Фонд «Время Науки»

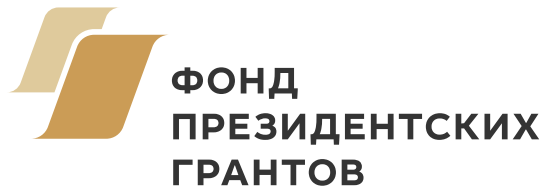
15 июня 2021 г.

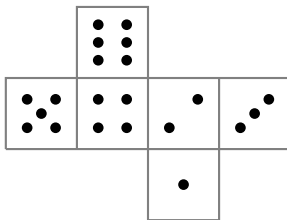
Зачем фотографировать презентацию, когда её можно скачать?



[http://bit.ly/3\\_razbor\\_ei](http://bit.ly/3_razbor_ei)

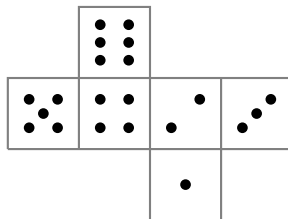
В 2020–2021 гг. олимпиада «Математика НОН-СТОП» и Санкт-Петербургский Турнир юных математиков проводятся с использованием гранта Президента Российской Федерации на развитие гражданского общества, предоставленного Фондом президентских грантов.





2020-4-6В

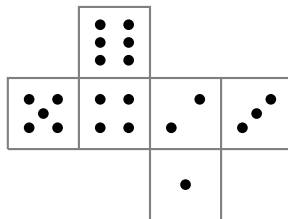
Сколько видимых точек может быть на башне из 6 кубиков?



2020-4-6В

Сколько видимых точек может быть на башне из 6 кубиков?

Сумма чисел на противоположных гранях равна 7.



2020-4-6В

Сколько видимых точек может быть на башне из 6 кубиков?

Сумма чисел на противоположных гранях равна 7.

Ответ —  $84 + k$ .

# Кирпичей требуют наши сердца

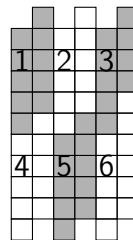
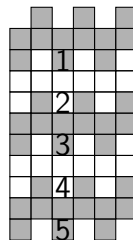
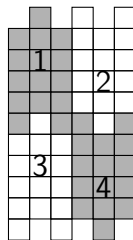
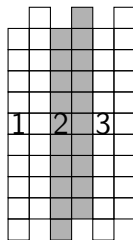
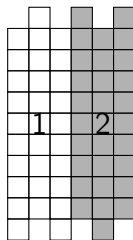
2020-4-4С

Нарисуйте на клетчатой бумаге такую фигуру, которую можно разделить по клеткам на 2, на 3, на 4, на 5, на 6 одинаковых по форме и размеру связных фигур — причём они не будут прямоугольниками.

# Кирпичей требуют наши сердца

2020-4-4C

Нарисуйте на клетчатой бумаге такую фигуру, которую можно разделить по клеткам на 2, на 3, на 4, на 5, на 6 одинаковых по форме и размеру связанных фигур — причём они не будут прямоугольниками.





# Гном вернулся — дома нет

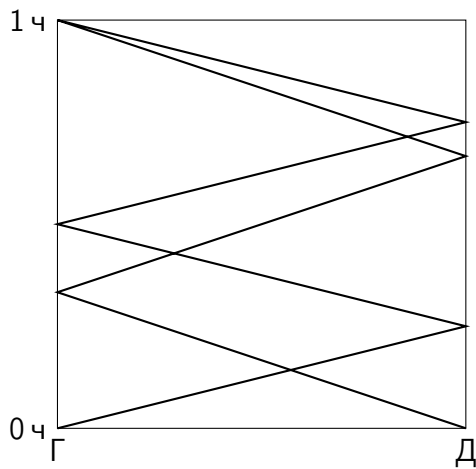
2021-4-3А

Старый дом находится в лесной деревне Домовиково, старый гном отошёл по делам в деревню Гномовиково. Между деревнями 1 километр.

Одновременно, соскучившись друг по другу, гном выходит из Гномовиково и дом выходит из Домовиково. Они ходят между деревнями туда и обратно, пока не окажутся одновременно в одной деревне — они не останавливаются, даже если встретят друг друга по пути.

Дом ходит со скоростью 3 км/ч, гном ходит со скоростью 4 км/ч. Сколько раз они встретятся по дороге между Домовиково и Гномовиково, пока не окажутся одновременно в одной деревне?

Гном вернулся — дома нет

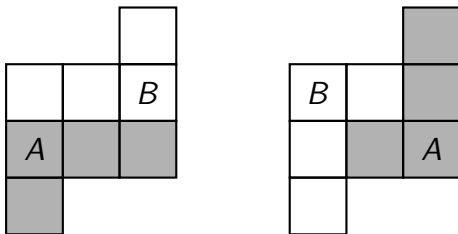


2020-5-1С

Можно ли нарисовать на клетчатом листе бумаги такую фигуру, которую можно разрезать по линиям сетки на две *одинаковые* фигуры двумя способами — причём фигуры в первом и во втором способе были бы одни и те же, но линии разреза выглядели бы по-разному?

2020-5-1С

Можно ли нарисовать на клетчатом листе бумаги такую фигуру, которую можно разрезать по линиям сетки на две *одинаковые* фигуры двумя способами — причём фигуры в первом и во втором способе были бы одни и те же, но линии разреза выглядели бы по-разному?



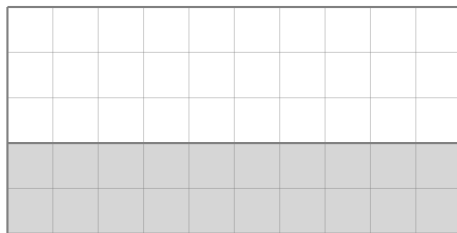
2019-7-3А

На предприятии работают 50 человек, и они выбирают себе начальника. Есть две кандидатуры, Ваня и Даня. Про каждого работника известно заранее, кому он отдаёт предпочтение: 20 человек за Даню, 30 человек за Ваню.

Голосование проходит по двухтуровой системе: люди делятся на 5 групп по 10 человек, в каждой группе выбирается кандидат, наиболее популярный среди членов этой группы, и затем из 5 ответов выбирается имя, названное большее число раз.

Разделите работников на группы так, чтобы в большинстве групп выбрали Даню и он победил на выборах, несмотря на изначально меньшее число голосующих за него.

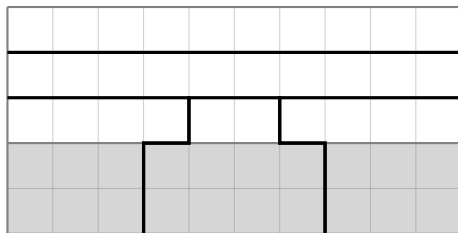
# Аксиомы выборов



За Ваню

За Даню

# Аксиомы выборов

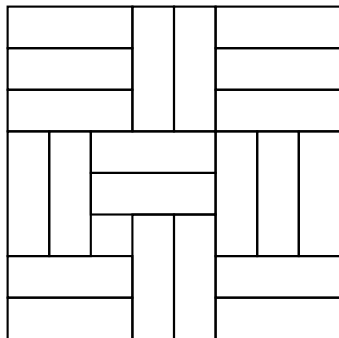


За Ваню

За Даню

2021-5-5A

Покажите, как покрыть доску  $8 \times 8$ , используя 21 прямоугольник  $1 \times 3$  (или  $3 \times 1$ ) и один квадратик  $1 \times 1$ .



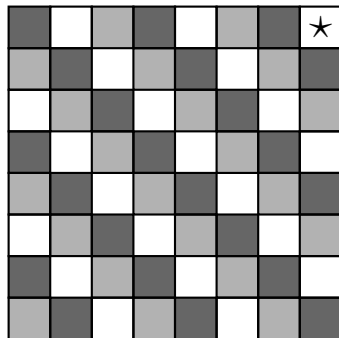


2021-5-5B

Докажите, что в предыдущем пункте квадратик  $1 \times 1$  нельзя ставить в угол поля.

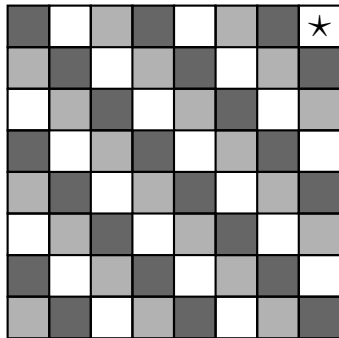
2021-5-5В

Докажите, что в предыдущем пункте квадратик  $1 \times 1$  нельзя ставить в угол поля.



2021-5-5B

Докажите, что в предыдущем пункте квадратик  $1 \times 1$  нельзя ставить в угол поля.



Белых — 20, серых — 21, чёрных — 22.

2020-6-2В

Научные руководители придумывают темы работ.

- Один из них придумывает 1 новую тему;
- После этого кто-то из них придумывает 2 новых темы;
- После этого кто-то из них придумывает 3 новых темы.

Пусть изначально первый придумал на  $n$  тем больше, чем второй.  
Докажите, что руководители всегда смогут сравнить количество придуманных ими тем.

2020-6-2В

Научные руководители придумывают темы работ.

- Один из них придумывает 1 новую тему;
- После этого кто-то из них придумывает 2 новых темы;
- После этого кто-то из них придумывает 3 новых темы.

Пусть изначально первый придумал на  $n$  тем больше, чем второй.  
Докажите, что руководители всегда смогут сравнять количество придуманных ими тем.

Каждые два хода разность количеств тем будем сокращать на 1.

# Роботы играют в карты

2021-6-6C

Робот  $f$  берёт натуральное число  $n$ , переставляет его цифры задом наперёд его и избавляется от ведущих нулей. Например, если положить в него число 2010, то  $f$  вернёт число 102, будем записывать это как  $f(2010) = 102$ .

Аналогично,  $f(123) = 321$  и  $f(14000) = 41$ .

Робот  $g$  берёт карточку с натуральным числом  $n$ , а возвращает карточку с числом  $\frac{n}{f(f(n))}$ . Например,  $g(100500) = \frac{100500}{f(f(100500))} = \frac{100500}{f(5001)} = \frac{100500}{1005} = 100$ .

Олег складывает в робота  $g$  карточки от 1 до некоторого числа  $n$ . Как количество различных карточек, возвращаемых роботом, будет зависеть от  $n$ ? Что это будут за карточки?

- 1 Если у  $n$  на конце нет нулей, то  $f(f(n)) = n$ , то есть  $g(n) = 1$ .

# Роботы играют в карты

- 1 Если у  $n$  на конце нет нулей, то  $f(f(n)) = n$ , то есть  $g(n) = 1$ .
- 2 Если же  $n$  делится на 10, то  $n = m \cdot 10^k$ , где  $m$  — число без нулей на конце. Из предыдущего пункта мы знаем, что  $f(f(n)) = m$ . Тогда

$$g(n) = \frac{m \cdot 10^k}{m} = 10^k.$$



# Роботы играют в карты

- 1 Если у  $n$  на конце нет нулей, то  $f(f(n)) = n$ , то есть  $g(n) = 1$ .
- 2 Если же  $n$  делится на 10, то  $n = m \cdot 10^k$ , где  $m$  — число без нулей на конце. Из предыдущего пункта мы знаем, что  $f(f(n)) = m$ . Тогда

$$g(n) = \frac{m \cdot 10^k}{m} = 10^k.$$

- 3 Значит, различных значений будет ровно столько, сколько различных степеней 10 содержится среди чисел от 1 до  $n$ :  $\lfloor \log_{10} n \rfloor$ .

2021-7-9A

Определим операцию  $\star$  для положительных чисел  $a$  и  $b$  следующим образом:  $a \star b = \frac{ab}{a+b}$ .

Докажите, что  $(a \star b) \star c = a \star (b \star c)$ .

2021-7-9A

Определим операцию  $\star$  для положительных чисел  $a$  и  $b$  следующим образом:  $a \star b = \frac{ab}{a+b}$ .

Докажите, что  $(a \star b) \star c = a \star (b \star c)$ .

2021-7-9A

Посчитайте  $1 \star (2 \star (4 \star (\dots \star (256 \star (512 \star 1024)) \dots)))$ .

2021-7-9A

Определим операцию  $\star$  для положительных чисел  $a$  и  $b$  следующим образом:  $a \star b = \frac{ab}{a+b}$ .

Докажите, что  $(a \star b) \star c = a \star (b \star c)$ .

2021-7-9A

Посчитайте  $1 \star (2 \star (4 \star (\dots \star (256 \star (512 \star 1024)) \dots)))$ .

Перерасставим скобки:

$$(\dots ((1 \star 2) \star 4) \star \dots) \star 1024 = \left( \dots \left( \frac{2}{3} \star 4 \right) \star \dots \right) \star 1024 = \left( \dots \frac{4}{7} \star \dots \right) \star 1024 = \frac{1024}{2047}.$$

Система високосных лет для числа  $t$  — это последовательность натуральных чисел  $(a_0, a_2, a_3, \dots, a_n)$  такая, что  $a_{i+1}$  делится на  $a_i$ , а также

$$\frac{1}{a_0} - \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3} + \dots + (-1)^n \cdot \frac{1}{a_n} = t.$$

Какой могла бы быть система високосных лет, если бы длина года составляла 365.21875, 365.17, 365.33 дней? Для любого ли рационального числа существует система високосных лет?

$$365.21875 = 365 + \frac{1}{4} - \frac{1}{32}$$

$$365.17 = 365 + \frac{1}{5} - \frac{1}{25} + \frac{1}{100}$$

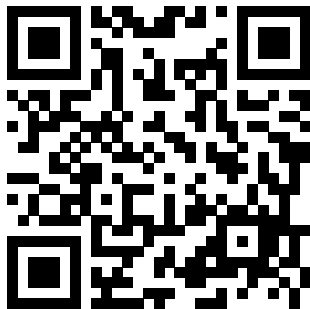
$$365.33 = 365 + \frac{1}{3} - \frac{1}{300}$$

# Летний Турнир юных математиков

- нестандартные задачи;
- готовят к формату Турнира;
- 3 серии по 3–4 задачи;
- на решение даётся по 1,5–2 дня;
- Турнир проводится очно со 2 по 8 августа;
- решения проверяют авторы задач.

# Летний Турнир юных математиков

Собирайте команду и вступайте в бой!



[spbtym.ru](http://spbtym.ru) → Зарегистрироваться



Спасибо за внимание!

`mathnonstop.ru`

`spbtym.ru`

`mathnonstop@timeforscience.ru`

`vk.com/timeforscience`