

Математика НОН-СТОП: Новое в 2019 году

Б. А. Золотов, Д. Г. Штукенберг

Фонд «Время Науки»

10 декабря 2019

К чему фотографировать презентацию,
когда можно её скачать

Слайды доступны по ссылке: <http://bit.ly/mns-seminar-11dec2019>

Конструктивные задачи

Мы всё так же горячо любим задачи на приведение примера. Они наглядные и незамысловатые, при этом могут быть крайне разнообразными.

Разберём несколько таких задач — от более простых к более сложным.

Простые, но не простые-простые

7 класс, 9А–В

Докажите, что для любого n существует натуральное число N , у которого ровно n различных натуральных делителей.

Простые, но не простые-простые

7 класс, 9А–В

Докажите, что для любого n существует натуральное число N , у которого ровно n различных натуральных делителей.

В пункте **A** было $n = 43$. А ответ —

Простые, но не простые-простые

7 класс, 9А–В

Докажите, что для любого n существует натуральное число N , у которого ровно n различных натуральных делителей.

В пункте **A** было $n = 43$. А ответ —

$$N = 2^{n-1}.$$

7 класс, 3А

На предприятии работают 50 человек, и они выбирают себе начальника. Есть две кандидатуры, Ваня и Даня. Про каждого работника известно заранее, кому он отдаёт предпочтение: 20 человек за Даню, 30 человек за Ваню.

Голосование проходит по двухтуровой системе: люди делятся на 5 групп по 10 человек, в каждой группе выбирается кандидат, наиболее популярный среди членов этой группы, и затем из 5 ответов выбирается имя, названное большее число раз.

Разделите работников на группы так, чтобы в большинстве групп выбрали Даню и он победил на выборах, несмотря на изначально меньшее число голосующих за него.

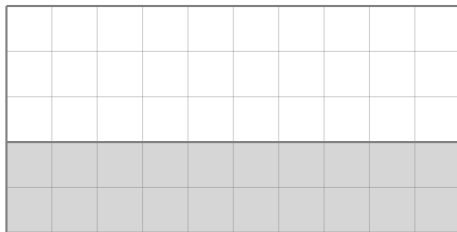
7 класс, 3А

На предприятии работают 50 человек, и они выбирают себе начальника. Есть две кандидатуры, Ваня и Даня. Про каждого работника известно заранее, кому он отдаёт предпочтение: 20 человек за Даню, 30 человек за Ваню.

Голосование проходит по двухтуровой системе: люди делятся на 5 групп по 10 человек, в каждой группе выбирается кандидат, наиболее популярный среди членов этой группы, и затем из 5 ответов выбирается имя, названное большее число раз.

Разделите работников на группы так, чтобы в большинстве групп выбрали Даню и он победил на выборах, несмотря на изначально меньшее число голосующих за него.

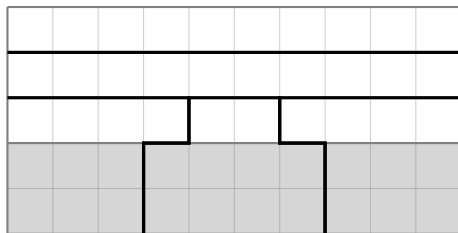
Аксиомы выборов



За Ваню

За Даню

Аксиомы выборов



За Ваню

За Даню

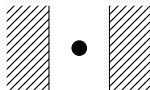
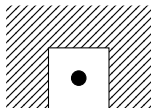
7 класс, 8С

Путник в лабиринте видит ситуацию вокруг. Помимо этого, никакой другой информации и памяти у него нет. Существует ли какой-нибудь набор правил, чтобы он, имея только эту информацию, мог дойти до финальной клетки в любом лабиринте?

7 класс, 8С

Путник в лабиринте видит ситуацию вокруг. Помимо этого, никакой другой информации и памяти у него нет. Существует ли какой-нибудь набор правил, чтобы он, имея только эту информацию, мог дойти до финальной клетки в любом лабиринте?

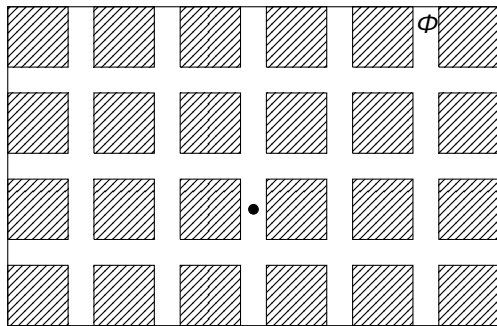
Заметим, что поведение путника однозначно определено в простых ситуациях:



Приведём решение без T -образных перекрёстков, чтобы о них не думать:

Лабиринт

Приведём решение без T -образных перекрёстков, чтобы о них не думать:



Много примеров

Мы попробовали просить участников привести *как можно больше* способов сделать что-либо — чем больше привёл, тем выше оценка. Порой точное возможное количество способов было не известно даже нам.

Разрезай и властвуй

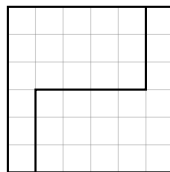
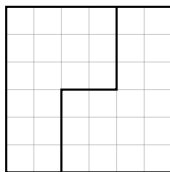
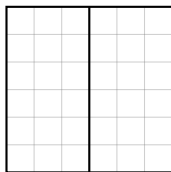
7 класс, 6С

Предложите как можно больше разных способов разрезать квадрат 6×6 на два одинаковых многоугольника по линиям сетки.

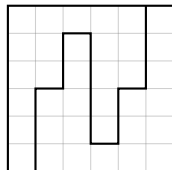
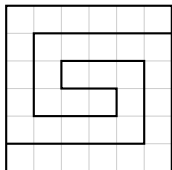
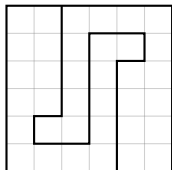
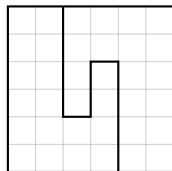
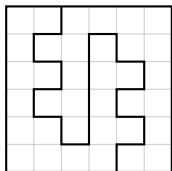
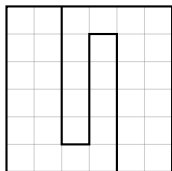
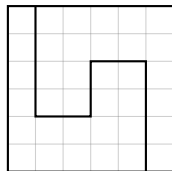
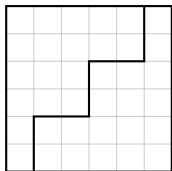
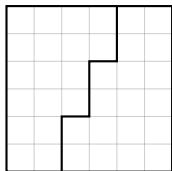
Разрезай и властвуй

7 класс, 6С

Предложите как можно больше разных способов разрезать квадрат 6×6 на два одинаковых многоугольника по линиям сетки.



Разрезай и властвуй



6 класс, 8А

Перечислите как можно больше пар букв русского языка таких, что если написать эти буквы одна поверх другой, то их будет невозможно идентифицировать. Например, совершенно очевидно, что первая пара букв ниже — это А и Т, но про вторую пару не понятно, это В и Ъ или Р и Ъ.



(1)



(2)

6 класс, 8А

Перечислите как можно больше пар букв русского языка таких, что если написать эти буквы одна поверх другой, то их будет невозможно идентифицировать. Например, совершенно очевидно, что первая пара букв ниже — это А и Т, но про вторую пару не понятно, это В и Ъ или Р и Ъ.



(1)



(2)

Понятно, что ВЪ, РЪ, РВ — это одно и то же. А что ещё?

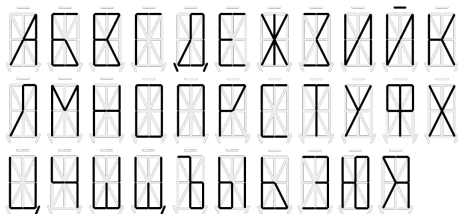
Розеттский камень

Интересно попробовать формализовать данную задачу — понять, что значит написать букву.

Розеттский камень

Интересно попробовать формализовать данную задачу — понять, что значит написать букву.

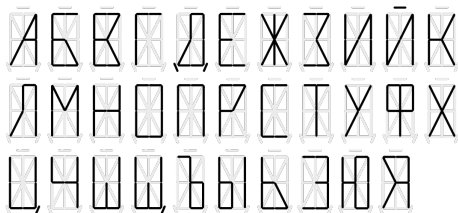
Рассмотрим *16-сегментный индикатор*:



Розеттский камень

Интересно попробовать формализовать данную задачу — понять, что значит написать букву.

Рассмотрим *16-сегментный индикатор*:



Вспомним замеченное нами совпадение:

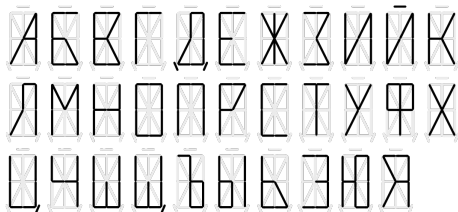
ЬР ЬЗ ЬВ СК СВ РЗ РВ РБ КЗ
КЕ КВ КБ ЗЕ ЗВ ЗБ ЕВ ГВ ВБ



Розеттский камень

Интересно попробовать формализовать данную задачу — понять, что значит написать букву.




















Рассмотрим *16-сегментный индикатор*:



Вспомним замеченное нами совпадение:

ЬР ЬЗ ЬВ СК СВ РЗ РВ РБ КЗ
КЕ КВ КБ ЗЕ ЗВ ЗБ ЕВ ГВ ВБ



ЮТ ЮП ЮГ ; ЮЗ ЮВ ; ЭК ЭВ ЧВ НЗ НВ ; ЬС ЬЕ ЬГ ЬБ СБ ЕБ ГБ 
Б; ЧЙ НЙ ; ЮЪ ЮФ ; СР РЕ ; ЧМ НМ ; ЯМ ЯИ ; ПЙ ЙГ ; ЪХ
БУ ; ШЧ ШН ; СЗ ЗГ ; СЙ ОЙ ; ШЖ ЦЖ ; СМ ОМ ; ПЛ ЛГ 
ЭИ СА ОА ; ЧР РН ; ЬФ ФБ ; ЮХ ЮЖ ; ХЖ УЖ ; ЪЩ ЪЦ
ФС ФЕ ; ЧК НК ; ЦС ЦП ЦО ЦГ ; УМ УИ МИ ; ЭЪ ЭБ ЧБ НБ
; ЪЧ ЪН ; ЩФ ЦФ ; ЧП ЧГ ПН НГ ; ПА ГА ; ЪХ ЪЖ ; ЪЗ ЪВ
ШВ ; ЪЫ ЪШ ; ПМ МГ ; ЩС ЩП ЩО ЩГ ; ЪП ЪГ ; ЪТ ЪБ
ПИ ИГ ; ЪЩ ЪЦ ; ХМ ХИ ; ЮЩ ЮЦ ; СЕ ЕГ ; ЭН ЭЕ ЧС ЧО
ЧЕ СН ОН НЕ ; ЯЪ ЯБ ; ЯС ЯО ; ХФ ФЖ ; ЧФ ЧТ ; ЩШ ЩЦ
ЩП ; РК КГ ; ШС ШП ШО ШГ ; ЪС ЪО ЪЕ ШЕ ; ЩТ ЦТ
ОЛ ; ХТ ТЖ ; ЮЧ ЮН ; ЮД ЪД ; ЮЭ ШФ ФО ; ХК УК
ЭЪ
ЭТ ; ШТ ТО ; ПЗ ОЗ ; УЙ МЙ ; МВ МБ ; МЖ ИЖ ; ЯУ ЯА
ХЕ ХВ ХБ УВ УБ ; ПЕ ОЕ ; СИ ОИ ; ХЗ УЗ ; ЪП ЪО ПБ ОБ
ЖЕ ЖВ ЖБ ; ЪР ЪЗ ЪВ СК СВ РЗ РВ РБ КЗ КЕ КВ КБ ЗЕ ЗВ ЗБ ЕВ
ГВ ВБ ; ЪЧ ЪН ; ЧИ НИ НА ; ФП ФН ТН ; СП СО ПО ОГ
ЫБ
ШБ ; ЪВ ЪБ ; ЧЦ ЦН ; ЮЫ ЮШ ; ВА БА ; ЯЗ ЭХ
ЮС ЮО
ЮЕ ; ЩЧ ЩН ; ЭС ЭП ЭО ЭГ ; СД ПД ОД ДГ
ЩД ШД ; ИВ
ИБ ; ПВ ОК ОВ ; ЯП ЯГ

Чтение и *изменение* авторского условия

Мы уже давали задачи, значительная часть решения которых заключалась в их вдумчивом прочтении.

Теперь мы пошли дальше и предложили участникам скорректировать наши условия. Для этого по сути нужно решить задачу «задом наперёд».

7 класс, 10В

В августе Саар планирует доехать от Бишкека до Астаны. Она проехала уже 1210 километров. Сверившись с картой, она поняла, что ей осталось ехать втрое больше, чем расстояние, которое проедет машина, в 4 раза более быстрая, чем Саар, за время от текущего момента до момента, когда Саар останется столько же, сколько она проехала сейчас.

Каково расстояние между Бишкеком и Астаной?

7 класс, 10В

В августе Саар планирует доехать от Бишкека до Астаны. Она проехала уже 1210 километров. Сверившись с картой, она поняла, что ей осталось ехать втрое больше, чем расстояние, которое проедет машина, в 4 раза более быстрая, чем Саар, за время от текущего момента до момента, когда Саар останется столько же, сколько она проехала сейчас.

Каково расстояние между Бишкеком и Астаной?

Пусть осталось ехать t км. До момента, когда останется 1210, $t - 1210$ км.

$$t = 3 \cdot 4 \cdot (t - 1210), \quad 11t = 12 \cdot 1210, \quad t = 1320.$$

$$1320 + 1210 = 2530.$$

7 класс, 10С

Замените числа 1210 и 4 в условии пункта **В** на какие-то другие так, чтобы ответ в задаче составил 1400 километров — настоящее расстояние между Бишкеком и Астаной.

7 класс, 10С

Замените числа 1210 и 4 в условии пункта **В** на какие-то другие так, чтобы ответ в задаче составил 1400 километров — настоящее расстояние между Бишкеком и Астаной.

A — сколько уже проехали, c — отношение скоростей машины и велосипеда.

$$t = 3c \cdot (t - A), \quad t = \frac{3cA}{3c - 1}.$$
$$A + t = A + \frac{3cA}{3c - 1} = A \cdot \frac{6c - 1}{3c - 1} = 1400.$$

Например, $A = 100$, $c = \frac{13}{36}$.

Ещё проще, ещё доступнее

«Математика НОН-СТОП» — олимпиада для всех, и любой участник найдёт в ней то, что сможет решить.

Разберём несколько задач, доступных каждому.

Конференция анонимных геометров

5 класс, 1А

В комнату, имеющую форму правильного 12-угольника, заходят 124 любителя вычислительной геометрии. Как рассадить их вдоль стен этой комнаты так, чтобы у каждой стены сидело ровно по 11 любителей вычислительной геометрии?

Любителей геометрии можно сажать и в углы комнаты — но не более чем по одному геометру на угол.

Конференция анонимных геометров

5 класс, 1А

В комнату, имеющую форму правильного 12-угольника, заходят 124 любителя вычислительной геометрии. Как рассадить их вдоль стен этой комнаты так, чтобы у каждой стены сидело ровно по 11 любителей вычислительной геометрии?

Любителей геометрии можно сажать и в углы комнаты — но не более чем по одному геометру на угол.

$12 \cdot 11 - 124 = 8$. Значит, что в какие-то 8 углов из 12 надо будет посадить геометров.

Незакрученный удар

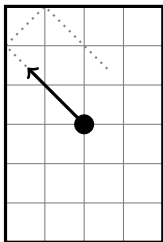
4 класс, 2А

Шарик катается по прямоугольнику, не замедляясь. Когда он подъезжает к краю прямоугольника, он отскакивает от него и продолжает движение. В каком положении окажется шарик, будучи запущенным из центра прямоугольника на рисунке, после того как он проедет 24 клетки по диагонали?

Незакрученный удар

4 класс, 2А

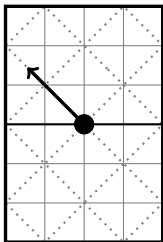
Шарик катается по прямоугольнику, не замедляясь. Когда он подъезжает к краю прямоугольника, он отскакивает от него и продолжает движение. В каком положении окажется шарик, будучи запущенным из центра прямоугольника на рисунке, после того как он проедет 24 клетки по диагонали?



Незакрученный удар

4 класс, 2А

Шарик катается по прямоугольнику, не замедляясь. Когда он подъезжает к краю прямоугольника, он отскакивает от него и продолжает движение. В каком положении окажется шарик, будучи запущенным из центра прямоугольника на рисунке, после того как он проедет 24 клетки по диагонали?



Раз в 6 клеток пересекает
горизонтальную среднюю линию

Мы едем, едем, едем, едем, едем, едем...

5 класс, 6А

Проездной на месяц позволяет его владельцу ездить на метро неограниченное число раз, стоимость проездного фиксирована и одинакова в любом месяце. Укажите, какова должна быть стоимость проездного, чтобы при двух ежедневных поездках он не окупался бы в феврале, но окупался бы в октябре? Стоимость разовой поездки в метро равна 45 рублям.

Мы едем, едем, едем, едем, едем, едем...

5 класс, 6А

Проездной на месяц позволяет его владельцу ездить на метро неограниченное число раз, стоимость проездного фиксирована и одинакова в любом месяце. Укажите, какова должна быть стоимость проездного, чтобы при двух ежедневных поездках он не окупался бы в феврале, но окупался бы в октябре? Стоимость разовой поездки в метро равна 45 рублям.

Октябрь длиннее февраля, поэтому может быть совершено больше поездок. Проездной, таким образом, может быть дешевле стоимости 62 поездок, но дороже стоимости 56 поездок.

$$28 \cdot 45 \cdot 2 = 2520 < S < 2790 = 31 \cdot 45 \cdot 2.$$

На «Математике НОН-СТОП» мы, разумеется, предлагаем задачи и для детей с некоторым опытом занятия в математических кружках — таким участникам также не будет скучно.

Спасибо за внимание!

Сейчас даже ещё не полночь перед докладом. Прикольно.