

Методические рекомендации по построению курса олимпиадной математики

1 Начальные разделы

Головоноги. Задачи об улитке. Игры со спичками. Волк, коза и капуста. Козы и колья.

2 Логика

Общее утверждение и утверждение о существовании. Построение отрицаний. Доказательство от противного. Логические связки и высказывания. Текстовые задачи. Задачи про рыцарей и лжецов. Каждый назовёт себя рыцарем.

3 Круги Эйлера

Определение, подсчёт числа предметов с конкретным сочетанием свойств. Мощность множества. Формула включений и исключений.

4 Делимость

Чётность. Суммы и произведения Ч и НЧ чисел. Задачи о разложениях. Определение, свойства делимости. Простые числа и их свойства. НОД, НОК. Арифметика остатков. Основная теорема арифметики. Циклы при сложении и возведении в степень. Китайская теорема об остатках. Алгоритм Евклида и его применения. Функция Эйлера, Малая теорема Ферма.

5 Раскраски и разрезания

Шахматные доски, вырезание фигур, паркеты. Четыре или несколько цветов. Ходы шахматных фигур и чередования цветов. Задачи на разрезания.

6 Конструктивные задачи

Построение примеров: разрезания, магические квадраты, голосование людей, графы, последовательности ходов, разложения и расстановки фигур.

7 Комбинаторика

Сложить или умножить? Простейшие задачи на количество вариантов. Число размещений и сочетаний. Свойства сочетаний, треугольник Паскаля, план города Нью-Йорка. Состояния и формула a^b . Перестановки с повторениями. Шары и перегородки. Задача о беспорядках. Азы теории вероятности.

1 Принцип Дирихле

Принцип Дирихле, обобщенный принцип Дирихле, следствия из принципа Дирихле. Простые и сложные задачи, применение комбинаторики — подсчёт числа возможных случаев.

2 Инварианты

Определение: инвариант — то, что не меняется. Чётность, делимость, цвет, площадь, разность и прочие инварианты. Полуинварианты.

3 Оценка + Пример

Размещение фигур на шахматной доске, суммы чисел, разрезания и вырезания, размещения.

4 Графы

Определения: путь, цикл, висячая вершина, степень, дерево. Сумма степеней вершин и количество рёбер. Бинарные отношения (дружба) как графы. Дерево — минимальный связный граф. В дереве есть висячая вершина: самый длинный путь. Двудольные графы. Эйлеров и гамильтонов пути и циклы. Формула Эйлера для деревьев и плоских графов.

5 Игры

Что такое правильная игра, выигрышная стратегия. Игры-шутки, игры на симметрию, дополнение до $k + 1$. Метод проигрышных и выигрышных позиций.

Олимпиада «Математика
НОН-СТОП»



Петербургский Турнир
юных математиков



8 Геометрия на клетчатой бумаге

Понятие площади и периметра. Элементарные задачи. Формула Пика (с доказательством). Задачи на формулу Пика.

9 Индукция

Задача о Ханойской башне, задача о шоколадке $2^n \times 2^n$ без клетки, тождества, геометрические задачи. Доказательство формул для сумм первых n чисел вида $k, k^2, k^3, 2k, 2k+1$ с помощью индукции. Арифметическая и геометрическая прогрессии. Сильная форма индукции. Числа Фибоначчи и их свойства.

10 Системы счисления

Системы счисления с основанием—степенью, смешанные системы счисления: календарь, негапозиционные, уравновешенные, Фибоначчиева, 10-адическая. Факториальная с/с и нумерация перестановок.

Литература