Простые, но важные инструменты теории игр

Б. А. Золотов, Олимпиада «Математика НОН-СТОП»

Фонд «Время Науки»

8 ноября 2020

К чему скриншотить презентацию,
когда можно её скачать

Слайды доступны по ссылке: `http://bit.ly/spbtym-game-theory`

Игры с олимпиад

Они же — игры с полной информацией.

- Множество позиций
- Игроки делают ходы по очереди
- Игрокам известны все возможные ходы из каждой позиции
- На некоторых позициях определяется исход игры, например — «проигрывает тот, кто не может сделать ход».

Кто выигрывает при правильной игре?

Правильная игра — никто из игроков не знает, какой ход его соперник сделает следующим.

Нет ни игры «в поддавки», ни игры «в худший случай». Нельзя сводить рассмотрение такой игры к рассмотрению одного варианта поведения противника.

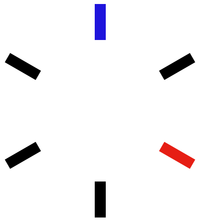
Что такое выигрышная стратегия

Это правило, которое описывает ответы данного игрока на *любые* ходы его противника и при *любых* ходах противника приводит к выигрышу.

Мы должны уметь отвечать на любой возможный ход — разумеется, по-разному. Во всех разумных играх стратегия существует, причём только у одного игрока.

Ничья

Изредка бывает, что выигрышных стратегий нет, каждый игрок может не проигрывать.



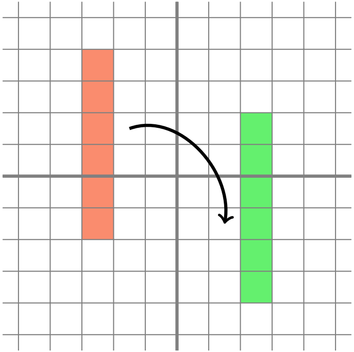
Дан циферблат, можно смещать стрелку на 2 или на 4 деления. Проигрывает тот, кто попадает в красное деление.

Симметрия

Двое размещают прямоугольники 6×1 на доске 100×100.

Симметрия

Двое размещают прямоугольники 6×1 на доске 100×100.

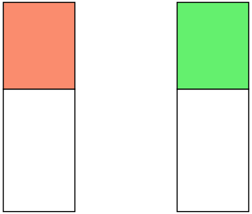


Симметрия ещё глупее

Есть две кучи по 100 монеток. Можно вынуть сколько угодно монеток из одной кучи.

Симметрия ещё глупее

Есть две кучи по 100 монеток. Можно вынуть сколько угодно монеток из одной кучи.

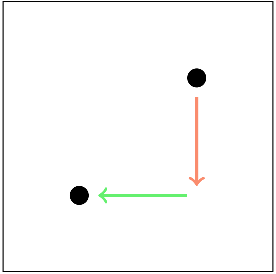


Тоже симметрия, но в шахматных фигурах

Двое по очереди ходят ладьёй по шахматному полю, причём ходить можно только вниз или влево.

Тоже симметрия, но в шахматных фигурах

Двое по очереди ходят ладьёй по шахматному полю, причём ходить можно только вниз или влево.



Камни из кучи

- Дана куча из k камней. За ход можно вынуть из неё от 1 до 7 камней. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.
- Дана куча из k камней. За ход можно вынуть из неё от 1 до 7, а также 9 камней. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

Камни из кучи

- Дана куча из k камней. За ход можно вынуть из неё от 1 до 7 камней. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.
- Дана куча из k камней. За ход можно вынуть из неё от 1 до 7, а также 9 камней. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

Выигрывает второй при k, делящемся на 8, и первый иначе.

Выигрышные и проигрышные позиции

Это метод решения задач на игры, который работает почти всегда, если у каждой позиции есть простое описание.

Выигрышная позиция — у игрока, начинающего в ней, есть стратегия. Проигрышная — нет стратегии.

Например, «последняя» позиция — проигрышная. Позиции, из которых есть прямой ход в «последнюю», — выигрышные.

Теорема о характеризации позиций

Выигрышные позиции — такие, из которых есть ход хотя бы в одну проигрышную.

Проигрышные позиции — такие, ходы из которых только в выигрышные.

В соответствии с этим утверждением можно проанализировать все позиции, начиная с конечной.

Примеры

В куче n камней, из неё можно вынуть $a_1, a_2, \ldots, a_k$ камней.

0 камней — проигрышная позиция, остальные расставим.

Примеры

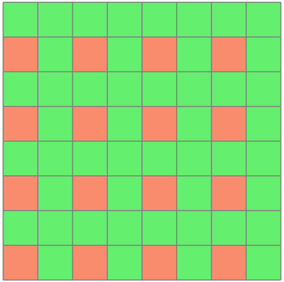
В куче n камней, из неё можно вынуть $a_1, a_2, \ldots, a_k$ камней. 0 камней — проигрышная позиция, остальные расставим.

Двое ходят королём по шахматной доске, можно ходить только вниз, влево или вниз-влево.

Примеры

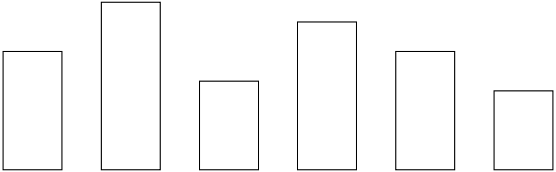
В куче n камней, из неё можно вынуть $a_1, a_2, \ldots, a_k$ камней.
0 камней — проигрышная позиция, остальные расставим.

Двое ходят королём по шахматной доске, можно ходить только вниз, влево или вниз-влево.



Игра Ним

Имеется k кучек, в них $N_1, N_2, \ldots, N_k$ камней. Можно вынуть сколько угодно камней, но только из одной кучи.



Ним-сумма

Переведём размеры кучек в двоичную систему и сложим без переноса разрядов.

То же самое, что разложить в сумму степеней двойки и посмотреть, каких из них нечётное число.

2	8	10	11
10	1000	1010	1011

Ним-сумма — 1011:

единиц 1, десятков 3, сотен 0, тысяч 3

Свойства ним-суммы

Коммутативна, ассоциативна, $x \oplus x = 0$.

$$
\begin{aligned}
S_{\text{after}} = S_{\text{after}} \oplus 0 = S_{\text{after}} \oplus S_{\text{before}} \oplus S_{\text{before}} = \\
=(x_1 \oplus y_1) \oplus \ldots \oplus (x_k \oplus y_k) \oplus S_{\text{before}} = \\
=(x_i \oplus y_i) \oplus S_{\text{before}}
\end{aligned}
$$

Свойства ним-суммы

Коммутативна, ассоциативна, $x \oplus x = 0$.

$$
\begin{aligned}
S_{\text{after}} &= S_{\text{after}} \oplus 0 = S_{\text{after}} \oplus S_{\text{before}} \oplus S_{\text{before}} = \\
&=(x_1 \oplus y_1) \oplus \ldots \oplus (x_k \oplus y_k) \oplus S_{\text{before}} = \\
&=(x_i \oplus y_i) \oplus S_{\text{before}}
\end{aligned}
$$

$y_i = x_i \oplus (x_i \oplus S_{\text{before}})$, тогда $x_i \oplus x_i \oplus S_{\text{before}} \oplus S_{\text{before}} = 0$.

Свойства ним-суммы

Коммутативна, ассоциативна, $x \oplus x = 0$.

$$\begin{aligned} S_{\text{after}} = S_{\text{after}} \oplus 0 = S_{\text{after}} \oplus S_{\text{before}} \oplus S_{\text{before}} = \\ =(x_1 \oplus y_1) \oplus \ldots \oplus (x_k \oplus y_k) \oplus S_{\text{before}} = \\ =(x_i \oplus y_i) \oplus S_{\text{before}} \end{aligned}$$

$y_i = x_i \oplus (x_i \oplus S_{\text{before}})$, тогда $x_i \oplus x_i \oplus S_{\text{before}} \oplus S_{\text{before}} = 0$.

2	8	10	11
10	1000	1010	1011

Ним-сумма — 1011.

Свойства ним-суммы

Коммутативна, ассоциативна, $x \oplus x = 0$.

$$\begin{aligned} S_{\text{after}} &= S_{\text{after}} \oplus 0 = S_{\text{after}} \oplus S_{\text{before}} \oplus S_{\text{before}} = \\ &= (x_1 \oplus y_1) \oplus \ldots \oplus (x_k \oplus y_k) \oplus S_{\text{before}} = \\ &= (x_i \oplus y_i) \oplus S_{\text{before}} \end{aligned}$$

$y_i = x_i \oplus (x_i \oplus S_{\text{before}})$, тогда $x_i \oplus x_i \oplus S_{\text{before}} \oplus S_{\text{before}} = 0$.

2	8	10	11
10	1000	1010	1011

Ним-сумма — 1011.

1001	11	1	0

Позиции в игре Ним

- Из любой позиции с ненулевой ним-суммой можно походить в позицию с нулевой.
- При ходе из любой позиции с нулевой ним-суммой она становится ненулевой.
- Значит, позиции с нулевой ним-суммой — проигрышные, с ненулевой — выигрышные.

Ним и другие игры

Ним с двумя кучами: *проигрышные* позиции — когда кучи одинаковы.

Уже было сегодня.

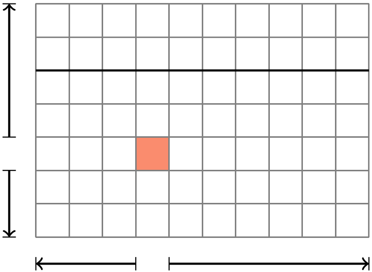
Ним и другие игры

Ним с двумя кучами: *проигрышные* позиции — когда кучи одинаковы. Уже было сегодня.

Шоколадка, одна долька отравлена. Игроки по очереди отламывают и съедают неотравленную часть.

Ним с двумя кучами: *проигрышные* позиции — когда кучи одинаковы. Уже было сегодня.

Шоколадка, одна долька отравлена. Игроки по очереди отламывают и съедают неотравленную часть.



Некооперативные игры

	Split	Steal
Split	5 / 5	0 / 10
Steal	10 / 0	0 / 0

	Cooperate	Defect
Coop.	3 / 3	0 / 7
Def.	7 / 0	1 / 1

Некооперативные игры

	Whale	Fish
Whale	2 / 2	0 / 1
Fish	1 / 0	1 / 1

	Swerve	Straight
Swe.	0 / 0	-1 / $+1$
Str.	$+1$ / -1	-1000 / -1000

Некооперативные игры

	Bach	Stravinsky
Bch.	1 2	0 0
Str.	0 0	2 1

	Head	Tail
Hd.	-1 $+1$	$+1$ -1
Tl.	$+1$ -1	-1 $+1$

Эффективность по Парето

Нельзя увеличить чей-либо выигрыш без уменьшения выигрыша других.

Соответствует интуитивному представлению о максимальном выигрыше.

Эффективность по Парето

Нельзя увеличить чей-либо выигрыш без уменьшения выигрыша других.

Соответствует интуитивному представлению о максимальном выигрыше.

	Cooperate	Defect
Coop.	3, 3	0, 7
Def.	7, 0	1, 1

Равновесие Нэша

Действие каждого игрока — наилучшее возможное при известных стратегиях других игроков.

Ни один участник не может увеличить свой выигрыш, если стратегии других игроков неизменны.

Равновесие Нэша

Действие каждого игрока — наилучшее возможное при известных стратегиях других игроков.

Ни один участник не может увеличить свой выигрыш, если стратегии других игроков неизменны.

	Cooperate	Defect
Coop.	3 3	7 0
Def.	0 7	1 1

Существование равновесия Нэша

	Head	Tail
Hd.	-1 $+1$	$+1$ -1
Tl.	$+1$ -1	-1 $+1$

Существование равновесия Нэша

	Head	Tail
Hd.	-1 $+1$	$+1$ -1
Tl.	$+1$ -1	-1 $+1$

Иногда равновесия Нэша не существует в чистых стратегиях.

Но оно всегда есть в *смешанных стратегиях.*

Пиар «Математики НОН-СТОП»

В. В кучке N камней. За ход из неё можно вынуть

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ 6,\ 8,\ \ldots,\ 11,\ 12,\ 14 \quad \text{камней.}$$

(То есть любое число от 1 до 14, кроме 7 и 13.) По-прежнему играют двое, и проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре (в зависимости от N)?

mathnonstop@timeforscience.ru

Заключение

Что мы обсудили сегодня

(1) Что такое «правильная игра» и выигрышная стратегия

(2) Игры с симметрией

(3) Дополнение по модулю: от 1 до k камней из кучи

(4) Как решить любую задачу на игры: В и П позиции

(5) Ним и ним-сумма

(6) Игры — социальные дилеммы

Спасибо за внимание!

(∗) `rs.mathnonstop.ru`