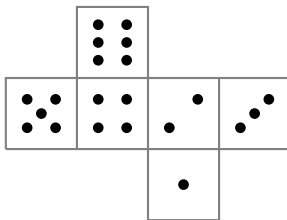


# Решения избранных задач

Б. А. Золотов, “Математика НОН-СТОП”

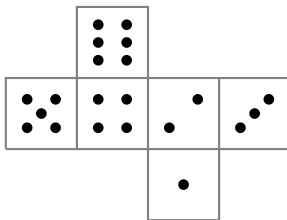
“Фонд Время Науки”

15 марта 2024 г.



2020-4-6В

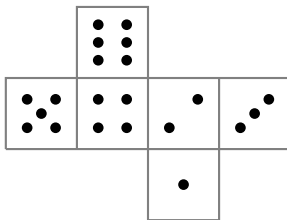
Сколько видимых точек может быть на башне из 6 кубиков?



2020-4-6В

Сколько видимых точек может быть на башне из 6 кубиков?

Сумма чисел на противоположных гранях равна 7.



2020-4-6B

Сколько видимых точек может быть на башне из 6 кубиков?

Сумма чисел на противоположных гранях равна 7.

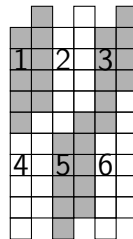
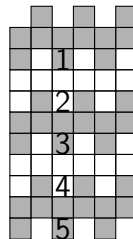
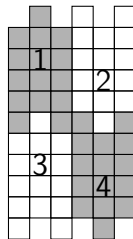
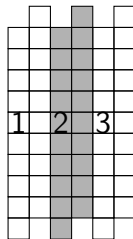
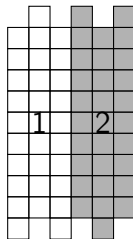
Ответ —  $84 + k$ .

2020-4-4C

Нарисуйте на клетчатой бумаге такую фигуру, которую можно разделить по клеткам на 2, на 3, на 4, на 5, на 6 одинаковых по форме и размеру связанных фигур — причём они не будут прямоугольниками.

2020-4-4C

Нарисуйте на клетчатой бумаге такую фигуру, которую можно разделить по клеткам на 2, на 3, на 4, на 5, на 6 одинаковых по форме и размеру связанных фигур — причём они не будут прямоугольниками.



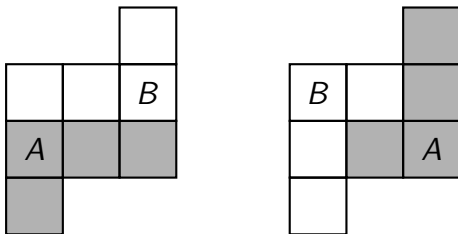
2020-5-1C

Можно ли нарисовать на клетчатом листе бумаги такую фигуру, которую можно разрезать по линиям сетки на две *одинаковые* фигуры двумя способами — причём фигуры в первом и во втором способе были бы одни и те же, но линии разреза выглядели бы по-разному?

# Разрезания

2020-5-1C

Можно ли нарисовать на клетчатом листе бумаги такую фигуру, которую можно разрезать по линиям сетки на две *одинаковые* фигуры двумя способами — причём фигуры в первом и во втором способе были бы одни и те же, но линии разреза выглядели бы по-разному?





2020-5-3A

Песню каждого участника оценивает 15 судей. Судья ставит каждому участнику в паре от 0 до 22 баллов и отдаёт свой голос участнику, которому поставил больше баллов. В паре объявляется победителем тот участник, которому отдано больше голосов. Может ли быть так, что победитель в паре набрал меньше баллов, чем проигравший, несмотря на перевес в голосах?

2020-5-3A

Песню каждого участника оценивает 15 судей. Судья ставит каждому участнику в паре от 0 до 22 баллов и отдаёт свой голос участнику, которому поставил больше баллов. В паре объявляется победителем тот участник, которому отдано больше голосов. Может ли быть так, что победитель в паре набрал меньше баллов, чем проигравший, несмотря на перевес в голосах?

## Семнадцатый независимый

Участник	Победы	Проигрыши	Баллы	Голоса
Победитель 1	1 : 0	0 : 22	11	11
Победитель 2	2 : 0	0 : 16	20	10
Победитель 3	3 : 0	0 : 12	27	9
Победитель 4	4 : 0	0 : 9	32	8
Проигравший 4	9 : 0	0 : 4	63	7
Проигравший 3	12 : 0	0 : 3	72	6
Проигравший 2	16 : 0	0 : 2	80	5
Проигравший 1	22 : 0	0 : 1	88	4

2020-6-2В

Научные руководители придумывают темы работ.

- Один из них придумывает 1 новую тему;
- После этого кто-то из них придумывает 2 новых темы;
- После этого кто-то из них придумывает 3 новых темы.

Пусть изначально первый придумал на  $n$  тем больше, чем второй.  
Докажите, что руководители всегда смогут сравнить количество придуманных ими тем.

2020-6-2В

Научные руководители придумывают темы работ.

- Один из них придумывает 1 новую тему;
- После этого кто-то из них придумывает 2 новых темы;
- После этого кто-то из них придумывает 3 новых темы.

Пусть изначально первый придумал на  $n$  тем больше, чем второй.  
Докажите, что руководители всегда смогут сравнять количество придуманных ими тем.

Каждые два хода разность количеств тем будем сокращать на 1.

Выпишем все числа от одного до десяти — но не в привычном порядке возрастания, а в алфавитном порядке: восемь, два, девять, десять, один, пять, семь, три, четыре, шесть.

2020-6-4В

Числа от 1 до 10'000'000'000 (десять миллиардов) выписали в алфавитном порядке. Перечислите первые десять из них.

Выпишем все числа от одного до десяти — но не в привычном порядке возрастания, а в алфавитном порядке: восемь, два, девять, десять, один, пять, семь, три, четыре, шесть.

2020-6-4В

Числа от 1 до 10'000'000'000 (десять миллиардов) выписали в алфавитном порядке. Перечислите первые десять из них.

- (1) 18 (2) 18 миллионов (3) 18 миллионов 18 (4) 18 миллионов 18 тысяч  
(5) 18 миллионов 18 тысяч 18 (6) ... восемь (7) ... восемьдесят  
(8) ... 88 (9) ... 82 (10) ... 89.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

2020-6-5A

На пульте есть две кнопки: “предыдущий режим” и “следующий режим”. Работают только сегменты, образующие цифру 7. Сколько переключений тогда нужно, чтобы гарантированно определить режим, в котором находится пульт?



# Пульт от кондиционера

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

2020-6-5A

На пульте есть две кнопки: “предыдущий режим” и “следующий режим”. Работают только сегменты, образующие цифру 7. Сколько переключений тогда нужно, чтобы гарантированно определить режим, в котором находится пульт?

1 7 7 7 7 7 7 7 7 7

2020-7-8С

Число  $N$  записывается в системе счисления с основанием  $n$  как

$$(n-1)(n-1)(n-1)(n-1)0.$$

Докажите, что число  $N$  делится на три последовательных натуральных числа.

2020-7-8С

Число  $N$  записывается в системе счисления с основанием  $n$  как

$$(n-1)(n-1)(n-1)(n-1)0.$$

Докажите, что число  $N$  делится на три последовательных натуральных числа.

Делится на  $n-1$ ,  $n$ ,  $n+1$  (оно записывается как 11).

2020-7-8С

Число  $N$  записывается в системе счисления с основанием  $n$  как

$$(n-1)(n-1)(n-1)(n-1)0.$$

Докажите, что число  $N$  делится на три последовательных натуральных числа.

Делится на  $n-1$ ,  $n$ ,  $n+1$  (оно записывается как 11).

А также на 1, 2, 3:  $n(n-1)(n^3 + n^2 + n + 1) = n(n-1)(n+1)(n^2 + 1)$ .

# Факториалы и простые множители

Рассмотрим множество  $M$  степеней двойки, в которых она может входить в разложение факториала на простые множители.

Число 4 лежит в множестве  $M$ , потому что  $6! = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$ .

2020-8-7B

Докажите, что если числа  $a$  и  $a + 1$  принадлежат  $M$ , то  $a + 2$  не принадлежит  $M$ .

# Факториалы и простые множители

Рассмотрим множество  $M$  степеней двойки, в которых она может входить в разложение факториала на простые множители.

Число 4 лежит в множестве  $M$ , потому что  $6! = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$ .

2020-8-7B

Докажите, что если числа  $a$  и  $a + 1$  принадлежат  $M$ , то  $a + 2$  не принадлежит  $M$ .

$t_1$  — наибольшее,  $t_1! = 2^a \cdot r$ .

$t_2$  — наименьшее,  $t_2! = 2^{a+1} \cdot r$ . Тогда  $t_2$  не делится на 4, а следующее чётное число делится на 4.

# Пропорция с хвостом

2021-4-4В

Если корабль длиной 250 м идёт на полной скорости, то нужно целиться на 250 м перед носом корабля.

Корабль идёт с  $\frac{1}{3}$  максимальной скорости.

В какую точку нужно целиться?

# Пропорция с хвостом

2021-4-4В

Если корабль длиной 250 м идёт на полной скорости, то нужно целиться на 250 м перед носом корабля.

Корабль идёт с  $\frac{1}{3}$  максимальной скорости.

В какую точку нужно целиться?

$$((250 + 125)/3) - 125 = 0.$$



# Цистерцианская запись

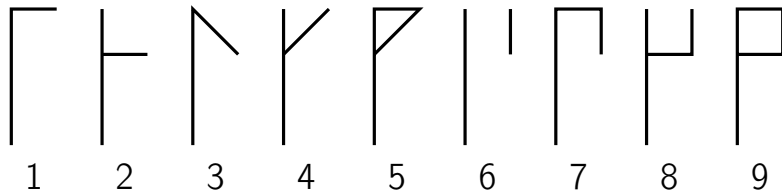
2021-5-6

Докажите, что любое число от 1 до 9999 можно однозначно восстановить по его цистерцианской записи.

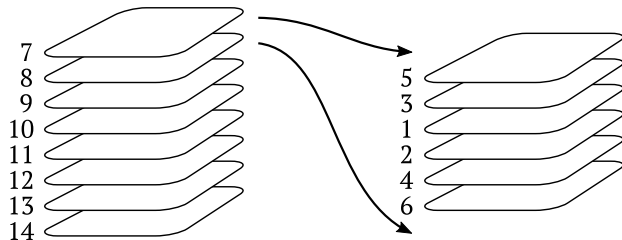
# Цистерцианская запись

2021-5-6

Докажите, что любое число от 1 до 9999 можно однозначно восстановить по его цистерцианской записи.



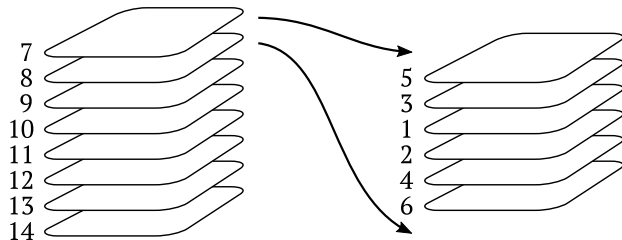
# Перемешивание карт



2021-6-1A

Окажутся ли две карты, изначально бывшие рядом, снова рядом после двух таких перемешиваний?

# Перемешивание карт



2021-6-1A

Окажутся ли две карты, изначально бывшие рядом, снова рядом после двух таких перемешиваний?

# Задача, которую никто не решит

7 класс, 3С

Придумать число, цифры которого при умножении на  $1 \dots 6$  остаются теми же, меняется лишь порядок.

# Задача, которую никто не решит

7 класс, 3С

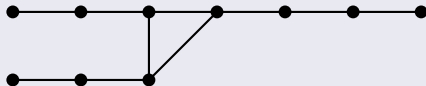
Придумать число, цифры которого при умножении на  $1 \dots 6$  остаются теми же, меняется лишь порядок.

$142857 \cdot 1 = 142857$	$10^0 \equiv 1$	$142857 \cdot 4 = 571428$	$10^4 \equiv 4$
$142857 \cdot 2 = 285714$	$10^2 \equiv 2$	$142857 \cdot 4 = 714285$	$10^5 \equiv 5$
$142857 \cdot 3 = 428571$	$10^1 \equiv 3$	$142857 \cdot 4 = 857142$	$10^3 \equiv 6$

# Аккуратный подсчёт

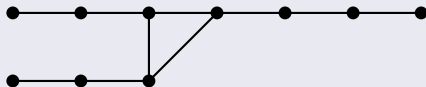
2021-8-2A

Посчитайте всевозможные различные простые пути  
в графе на рисунке ниже



2021-8-2A

Посчитайте всевозможные различные простые пути  
в графе на рисунке ниже



$$C_3^2 + C_3^2 + C_4^2 + 2 \cdot 3 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 2 \cdot 3 \cdot 4.$$



# Профильные задания

Система високосных лет для числа  $t$  — это последовательность натуральных чисел  $(a_0, a_2, a_3, \dots, a_n)$  такая, что  $a_{i+1}$  делится на  $a_i$ , а также

$$\frac{1}{a_0} - \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3} + \dots + (-1)^n \cdot \frac{1}{a_n} = t.$$

Какой могла бы быть система високосных лет, если бы длина года составляла 365.21875, 365.17, 365.33 дней? Для любого ли рационального числа существует система високосных лет?

## Профильные задания

$$365.21875 = 365 + \frac{1}{4} - \frac{1}{32}$$

$$365.17 = 365 + \frac{1}{5} - \frac{1}{25} + \frac{1}{100}$$

$$365.33 = 365 + \frac{1}{3} - \frac{1}{300}$$

Спасибо за внимание!

`mathnonstop.ru`

`mathnonstop@timeforscience.ru`

`vk.com/timeforscience`