«Математика НОН-СТОП»: Типичные ошибки и базовые навыки

СПбАППО

Методическая комиссия Олимпиады

28 ноября 2018

В 2020–2021 гг. олимпиада «Математика НОН-СТОП» проводится с использованием гранта Президента Российской Федерации на развитие гражданского общества, предоставленного **Фондом президентских грантов.**

ФОНД
ПРЕЗИДЕНТСКИХ
ГРАНТОВ

Как всегда, не нужно фотографировать слайды

Эта презентация доступна по ссылке: `http://bit.ly/mns-seminar-2`

2017-4-1C

Условие

Дана таблица 7×7. В центры её клеток Кузя вбил гвоздики. Проведите линию через все гвоздики так, чтобы сделать при этом как можно меньшее количество поворотов.

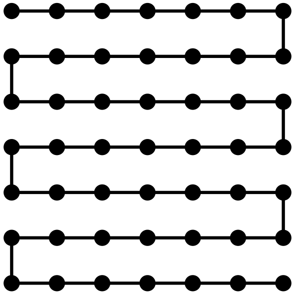
2017-4-1C

Условие

Дана таблица 7×7. В центры её клеток Кузя вбил гвоздики. Проведите линию через все гвоздики так, чтобы сделать при этом как можно меньшее количество поворотов.

Вроде как, 12 поворотов — но **нужно объяснить**, почему нельзя меньше.

2017-4-1C



В каждый ряд, кроме, возможно, двух, мы входим и выходим, поэтому должны сделать два поворота.

$$2 \cdot (7 - 2) + 2 = 12.$$

2018-5-2C

Условие

Известно, что в Авиаландии пять городов. Из каждого города летает шесть авиарейсов, внутренних или международных. Докажите, что за границы Авиаландии летает чётное количество авиарейсов.

2018-5-2C

Условие

Известно, что в Авиаландии пять городов. Из каждого города летает шесть авиарейсов, внутренних или международных. Докажите, что за границы Авиаландии летает чётное количество авиарейсов.

Опять же, **нельзя** ограничиваться исключительно конкретным примером, для которого всё верно.

2018-5-2C

Внутренний рейс имеет 2 «конца» в стране, международный — 1 «конец».

$$2 \cdot \text{внут.} + \text{межд.} = 5 \cdot 6 = 30.$$

Только отсюда международных чётное количество.

2018-5-5C

Условие

$12 \oplus 34 = 1234.$

Бывает ли так, что $P + Q > P \oplus Q$?

2018-5-5C

Условие

$12 \oplus 34 = 1234.$

Бывает ли так, что $P + Q > P \oplus Q$?

У того, что так не бывает, есть вполне **чёткое доказательство**:

2018-5-5C

Условие

$12 \oplus 34 = 1234.$
Бывает ли так, что $P + Q > P \oplus Q$?

У того, что так не бывает, есть вполне **чёткое доказательство**:

$$P \oplus Q \; = \; 10^k \cdot P + Q \; > \; P + Q.$$

2018-8-11А

Условие

18 крабов и 17 пауков встали в хоровод, имеющий форму восьмёрки. Это значит, что существо, стоящее в центре этой восьмёрки, держит за лапы четверых своих соседей. Известно, что каждый краб держится за лапы исключительно с пауками. Кто стоит в центре восьмёрки — краб или паук?

2018-8-11A

Условие

18 крабов и 17 пауков встали в хоровод, имеющий форму восьмёрки. Это значит, что существо, стоящее в центре этой восьмёрки, держит за лапы четверых своих соседей. Известно, что каждый краб держится за лапы исключительно с пауками. Кто стоит в центре восьмёрки — краб или паук?

Участники приводили только пример одной подходящей восьмёрки. Но вдруг есть другие, где в центре стоит другое существо? Их отсутствие **надо доказать.**

2018-8-11A

Сделаем из восьмёрки круглый хоровод, где либо 19 к — 17 п, либо 18 к — 18 п (в зависимости от того, кто в центре).

Крабов должно быть *не больше*, чем пауков: $2к \leq 2п$.

Значит, в центре стоял паук.

2018-7-1В

Условие

В понедельник Сергей растворил пачку красителя в десятилитровом ведре воды. Фёдор вылил из ёмкости 4 литра раствора, долил 4 литра воды и тщательно размешал.

На следующий день Сергей снова растворил пачку красителя в 10 литрах воды. На этот раз Фёдор вылил из ведра 2 литра раствора, долил 2 литра воды, тщательно размешал — и повторил ту же последовательность действий ещё раз. В какой из дней в ведре осталось больше красителя?

2018-7-1B

Условие

В понедельник Сергей растворил пачку красителя в десятилитровом ведре воды. Фёдор вылил из ёмкости 4 литра раствора, долил 4 литра воды и тщательно размешал.

На следующий день Сергей снова растворил пачку красителя в 10 литрах воды. На этот раз Фёдор вылил из ведра 2 литра раствора, долил 2 литра воды, тщательно размешал — и повторил ту же последовательность действий ещё раз. В какой из дней в ведре осталось больше красителя?

Ответ — **не** одинаковое количество красителя.

2018-7-1В

В первый день концентрация после действий Фёдора — 0.6: теперь красителя как в 6 литрах исходного раствора.

Во второй день — $0.8 \cdot 0.8 = 0.64 > 0.6$.

Секрет в том, что во второй день на второй итерации выливался *менее концентрированный* раствор.

2018-7-6В

Наша любимая ошибка.

Условие

Два кубика размером $5 \times 5 \times 5$ см едут по транспортёру, причём расстояние между ними равняется 10 см. С данного транспортёра они попадают на следующий, в два раза более быстрый, и дальше едут по нему. Каково расстояние между ними теперь?

2018-7-6B

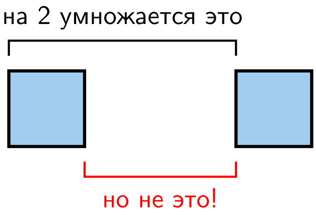
Наша любимая ошибка.

Условие

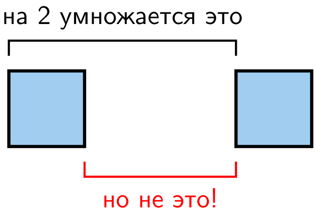
Два кубика размером $5 \times 5 \times 5$ см едут по транспортёру, причём расстояние между ними равняется 10 см. С данного транспортёра они попадают на следующий, в два раза более быстрый, и дальше едут по нему. Каково расстояние между ними теперь?

Ответ — **не** 20 сантиметров.

2018-7-6В



2018-7-6B



$$2 \cdot (10 + 5) - 5 = 25.$$

2017-4-2A

Условие

Девочка въезжает в горку длиной 400 метров со скоростью 10 километров в час. Как долго она будет это делать?

2017-4-2A

Условие

Девочка въезжает в горку длиной 400 метров со скоростью 10 километров в час. Как долго она будет это делать?

Нужно перевести км/ч $\to$ м/с, иначе как делить одно на другое?!

2017-4-2A

$$400\,\text{м} \Bigg/ \left(10\,\text{км}/\text{ч} \Big/ 3.6\,\frac{\text{км}/\text{ч}}{\text{м}/\text{с}}\right) = (40 \cdot 3.6)\ \text{с} = 144\,\text{с}.$$

2017-4-2A

$$400\,\text{м} \;\Big/\; \left(10\,\text{км}/\text{ч} \;\Big/\; 3.6\,\frac{\text{км}/\text{ч}}{\text{м}/\text{с}}\right) \;=\; (40\cdot 3.6)\;\text{с} \;=\; 144\,\text{с}.$$

Всегда нужно проверять размерность и порядок ответа.

2018-4-1A

Условие

Сколько дат в году могли бы оказаться на экране цифровых часов в качестве времени? *Например, 19 июня — 19:06, а 28 ноября времени не соответствует.*

2018-4-1A

Условие

Сколько дат в году могли бы оказаться на экране цифровых часов в качестве времени? *Например, 19 июня — 19:06, а 28 ноября времени не соответствует.*

Самая «фантастическая» ошибка из всех: 8395, **21516** дат в году; 59 мая!!

2018-4-1A

День: 1–23;

Месяц: 1–12;

$$23 \cdot 12 = 276.$$

(**Нельзя** 28 ноября $\to$ 11:28, про это был следующий пункт.)

2018-6-4B

Условие

Единица длины **метр** определена как 1/40'000'000 Парижского меридиана. Вместо скорости — *темп*: сколько минут тратится на 1 км.

Самый быстрый темп, которого умеет достигать моделька самолёта — 0.54 мин/км. За сколько часов такая моделька долетит вдоль Парижского меридиана от Северного полюса до Южного и обратно?

2018-6-4B

Условие

Единица длины **метр** определена как 1/40'000'000 Парижского меридиана. Вместо скорости — *темп*: сколько минут тратится на 1 км.

Самый быстрый темп, которого умеет достигать моделька самолёта — 0.54 мин/км. За сколько часов такая моделька долетит вдоль Парижского меридиана от Северного полюса до Южного и обратно?

В вещах, касающихся Земли (её охват, часовые пояса) детям лучше не врать. А ещё в минуте **не** 100 секунд.

2018-6-4B

$$40\,000\,\text{км}\cdot 0.54\,\text{мин}/\text{км} \;=\; 21\,600\,\text{мин} \;=\; 360\,\text{ч}.$$

2018-8-10C

Условие

Несколько велосипедистов отправились в поход. За обедом они в сумме съедают 2 килограмма еды плюс 0.1 кг за каждый килограмм еды, который они везли на себе до этого. Например, если у них было 10 килограммов еды на всех, то на ближайшем обеде они съедят $2 + 0.1 \cdot 10 = 3$ килограмма, а на следующем — $2 + 0.1 \cdot (10 - 3) = 2.7$ килограммов. В походе планируется 30 обедов (а велосипедисты не завтракают и не ужинают). Сколько еды им нужно взять с собой, чтобы её хватило на весь поход (и в конце похода не осталось ничего лишнего)?

2018-8-10C

Условие

Несколько велосипедистов отправились в поход. За обедом они в сумме съедают 2 килограмма еды плюс 0.1 кг за каждый килограмм еды, который они везли на себе до этого. Например, если у них было 10 килограммов еды на всех, то на ближайшем обеде они съедят $2 + 0.1 \cdot 10 = 3$ килограмма, а на следующем — $2 + 0.1 \cdot (10 - 3) = 2.7$ килограммов. В походе планируется 30 обедов (а велосипедисты не завтракают и не ужинают). Сколько еды им нужно взять с собой, чтобы её хватило на весь поход (и в конце похода не осталось ничего лишнего)?

Иногда «здравый смысл» будет привирать. :)

2018-8-10C

Всего надо везти

$$\frac{20}{9}\cdot\frac{\left(\frac{10}{9}\right)^{29}-1}{\frac{10}{9}-1}\text{ кг еды — это примерно } 404.61.$$

То есть за первым обедом съедят ~ 60 кг, а за последним — 2.2 кг.

2016-6-1В

Условие

В кафе стоит n четырёхногих стульев. Ночью в кафе заходит мальчик Вася и начинает вслепую подпиливать стульям ножки. С утра стул упадёт под посетителем, если у него останутся неподпиленными меньше трёх ножек. Сколько ножек нужно подпилить Васе, чтобы с утра как минимум m посетителей кафе гарантированно упали?

2016-6-1В

Условие

В кафе стоит n четырёхногих стульев. Ночью в кафе заходит мальчик Вася и начинает вслепую подпиливать стульям ножки. С утра стул упадёт под посетителем, если у него останутся неподпиленными меньше трёх ножек. Сколько ножек нужно подпилить Васе, чтобы с утра как минимум m посетителей кафе гарантированно упали?

Что же такое *гарантированно*?

2016-6-1B

Как бы неудачливо Вася ни подпиливал стульям ножки, в любом случае с утра m должны упасть. Ответ — не $2m$!

- Можно подпилить по одной ножке у всех стульев, и никто не упадёт;
- Можно подпилить больше двух ножек (и вообще все) у всех стульев **(кроме одного)**, которые должны упасть.

Получается

$$n + 3(m-1) + 1 \;=\; n + 3m - 2.$$

2018-4-3B

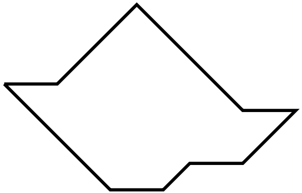
Условие

Укажите, как разрезать изображённую на рисунке фигуру на 6 равных фигур.

2018-4-3B

Условие

Укажите, как разрезать изображённую на рисунке фигуру на 6 равных фигур.

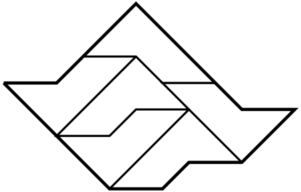


Равные фигуры — это **не** равные по площади фигуры.

2018-4-3В

Условие

Укажите, как разрезать изображённую на рисунке фигуру на 6 равных фигур.

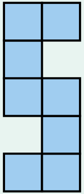


Равные фигуры — это **не** равные по площади фигуры.

2018-5-4A

Условие

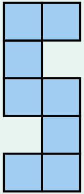
Двое по очереди вырезают из клетчатого прямоугольника 5×2018 фигуру, изображённую на рисунке. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. У кого из игроков есть выигрышная стратегия?



2018-5-4A

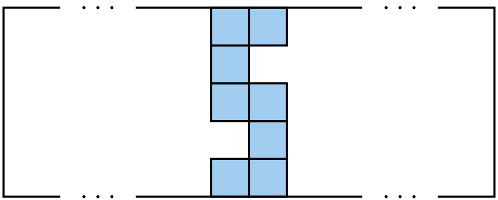
Условие

Двое по очереди вырезают из клетчатого прямоугольника 5×2018 фигуру, изображённую на рисунке. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. У кого из игроков есть выигрышная стратегия?



Нельзя просто поделить площадь на площадь — $(5 \cdot 2018)/8$.

2018-5-4A



Стратегия для первого игрока: вырезать свою фигуру посередине, получатся два одинаковых куска. Повторять ходы второго симметрично в другом куске. Если он смог вырезать, то и мы сможем.

Навыки участника

Здесь будут общие слова о том, чего мы хотим. (Наверняка все это и так знают.)

1) **Можно ли?**
   Да — привести пример;
   Нет — **доказать**, что нельзя.

2) **Всегда ли?**
   Да — **доказать** это;
   Нет — привести контрпример.

Ещё навыки участника

3) Умение строить отрицания:

   не (для всякого...) = существует такой, что (**не** ...);
   не (существует такой, что ...) = для всякого (**не** ...).

4) Что такое доказательство —

   это обоснованное на каждом шаге рассуждение о том, почему верно так и никак иначе. Это **не** приведение одного примера, для которого выполняется то, что должно быть верно всегда.

5) Получаемый результат $\gg$ изученные алгоритмы и клише (та же задача про игру).

~~Кто виноват?~~ Что делать?

- Если начнёте тренировать детей для олимпиад — то быстро вырастете из МНС (оно и хорошо).
- Если начнёте специально тренироваться для МНС — ~~отправим вас писать профиль~~ мы более непредсказуемы, чем вы думаете.
- Если просто учите класс — смотреть на то, чтобы дети находили результат и грамотно его обосновывали.
- Мы бы хотели, чтобы участники умели *писать* и *высказывать сложную мысль*. Пример:

2011-9-3C

Условие

Найдите наименьшее x, для которого выполняются равенства:
$x = a + b + c = d + e + f$, где a, b, c, d, e и f — попарно различные натуральные числа.

2011-9-3C

Условие

Найдите наименьшее x, для которого выполняются равенства: $x = a + b + c = d + e + f$, где a, b, c, d, e и f — попарно различные натуральные числа.

$$a + b + c + d + e + f = 2x.$$

Но сумма шести наименьших чисел $(1 + \ldots + 6 = 21)$ нечётна, поэтому нужно хотя бы 22, $x = 11$.

$$1 + 3 + 7 = 2 + 4 + 5 = 11.$$

Для подготовки всерьёз нужно знать

- Принцип Дирихле
- Делимость: действия с остатками, разложение на простые
- Инварианты, раскраски
- Игры и стратегии
- Индукция
- Комбинаторика, C_n^k, A_n^k

Занятия–консультации для будущих участников

Планируем:

- четверг, 6 декабря, 17:30;
- суббота, 8 декабря, 17:30;
- (???)

в школе 564, Обводный канал, 143.

Где нас найти

Условия задач 2016–18:

http://mathnonstop.ru/uchastnikam.html

Электронная почта:

boris.a.zolotov@yandex.com

Эта презентация:

http://bit.ly/mns-seminar-2

Спасибо за внимание! /*/

/*/ Вы можете задать ещё вопросов