

Математика НОН-СТОП: Новое в 2019 году

Б. А. Золотов, Д. Г. Штукенберг

Фонд «Время Науки»

10 декабря 2019

К чему фотографировать презентацию,
когда можно её скачать

Слайды доступны по ссылке: <http://bit.ly/mns-seminar-11dec2019>

Конструктивные задачи

Мы всё так же горячо любим задачи на приведение примера. Они наглядные и незамысловатые, при этом могут быть крайне разнообразными.

Разберём несколько таких задач — от более простых к более сложным.

Простые, но не простые-простые

7 класс, 9А–В

Докажите, что для любого n существует натуральное число N , у которого ровно n различных натуральных делителей.

Простые, но не простые-простые

7 класс, 9А–В

Докажите, что для любого n существует натуральное число N , у которого ровно n различных натуральных делителей.

В пункте **A** было $n = 43$. А ответ —

Простые, но не простые-простые

7 класс, 9А–В

Докажите, что для любого n существует натуральное число N , у которого ровно n различных натуральных делителей.

В пункте **A** было $n = 43$. А ответ —

$$N = 2^{n-1}.$$

7 класс, 3А

На предприятии работают 50 человек, и они выбирают себе начальника. Есть две кандидатуры, Ваня и Даня. Про каждого работника известно заранее, кому он отдаёт предпочтение: 20 человек за Даню, 30 человек за Ваню.

Голосование проходит по двухтуровой системе: люди делятся на 5 групп по 10 человек, в каждой группе выбирается кандидат, наиболее популярный среди членов этой группы, и затем из 5 ответов выбирается имя, названное большее число раз.

Разделите работников на группы так, чтобы в большинстве групп выбрали Даню и он победил на выборах, несмотря на изначально меньшее число голосующих за него.

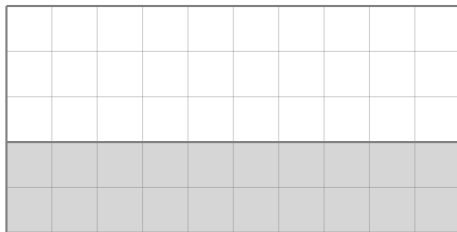
7 класс, 3А

На предприятии работают 50 человек, и они выбирают себе начальника. Есть две кандидатуры, Ваня и Даня. Про каждого работника известно заранее, кому он отдаёт предпочтение: 20 человек за Даню, 30 человек за Ваню.

Голосование проходит по двухтуровой системе: люди делятся на 5 групп по 10 человек, в каждой группе выбирается кандидат, наиболее популярный среди членов этой группы, и затем из 5 ответов выбирается имя, названное большее число раз.

Разделите работников на группы так, чтобы в большинстве групп выбрали Даню и он победил на выборах, несмотря на изначально меньшее число голосующих за него.

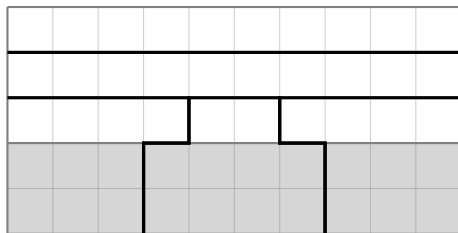
Аксиомы выборов



За Ваню

За Даню

Аксиомы выборов



За Ваню

За Даню

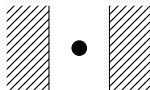
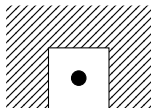
7 класс, 8С

Путник в лабиринте видит ситуацию вокруг. Помимо этого, никакой другой информации и памяти у него нет. Существует ли какой-нибудь набор правил, чтобы он, имея только эту информацию, мог дойти до финальной клетки в любом лабиринте?

7 класс, 8С

Путник в лабиринте видит ситуацию вокруг. Помимо этого, никакой другой информации и памяти у него нет. Существует ли какой-нибудь набор правил, чтобы он, имея только эту информацию, мог дойти до финальной клетки в любом лабиринте?

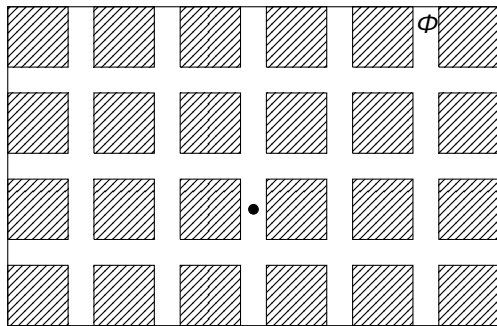
Заметим, что поведение путника однозначно определено в простых ситуациях:



Приведём решение без T -образных перекрёстков, чтобы о них не думать:

Лабиринт

Приведём решение без T -образных перекрёстков, чтобы о них не думать:



Много примеров

Мы попробовали просить участников привести *как можно больше* способов сделать что-либо — чем больше привёл, тем выше оценка. Порой точное возможное количество способов было не известно даже нам.

Разрезай и властвуй

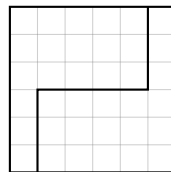
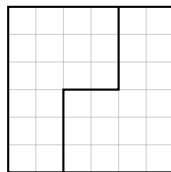
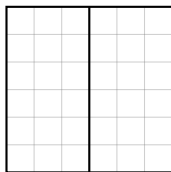
7 класс, 6С

Предложите как можно больше разных способов разрезать квадрат 6×6 на два одинаковых многоугольника по линиям сетки.

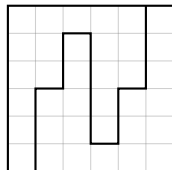
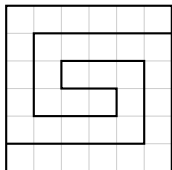
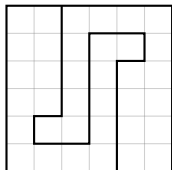
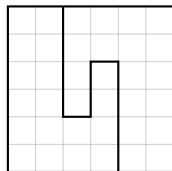
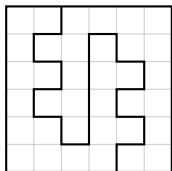
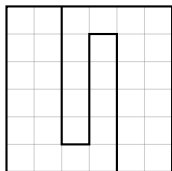
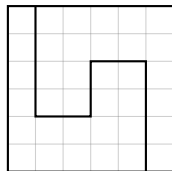
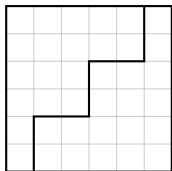
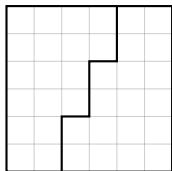
Разрезай и властвуй

7 класс, 6С

Предложите как можно больше разных способов разрезать квадрат 6×6 на два одинаковых многоугольника по линиям сетки.



Разрезай и властвуй



6 класс, 8А

Перечислите как можно больше пар букв русского языка таких, что если написать эти буквы одна поверх другой, то их будет невозможно идентифицировать. Например, совершенно очевидно, что первая пара букв ниже — это А и Т, но про вторую пару не понятно, это В и Ъ или Р и Ъ.



(1)



(2)

6 класс, 8А

Перечислите как можно больше пар букв русского языка таких, что если написать эти буквы одна поверх другой, то их будет невозможно идентифицировать. Например, совершенно очевидно, что первая пара букв ниже — это А и Т, но про вторую пару не понятно, это В и Ъ или Р и Ъ.



(1)



(2)

Понятно, что ВЪ, РЪ, РВ — это одно и то же. А что ещё?

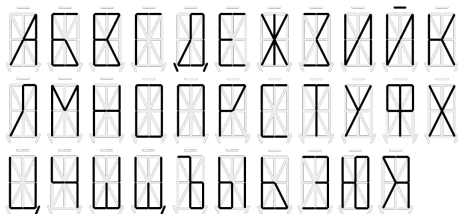
Розеттский камень

Интересно попробовать формализовать данную задачу — понять, что значит написать букву.

Розеттский камень

Интересно попробовать формализовать данную задачу — понять, что значит написать букву.

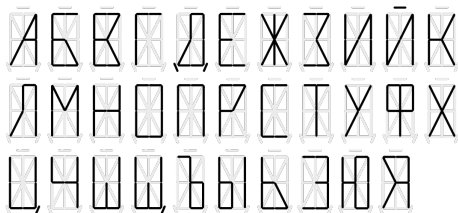
Рассмотрим *16-сегментный индикатор*:



Розеттский камень

Интересно попробовать формализовать данную задачу — понять, что значит написать букву.

Рассмотрим *16-сегментный индикатор*:



Вспомним замеченное нами совпадение:

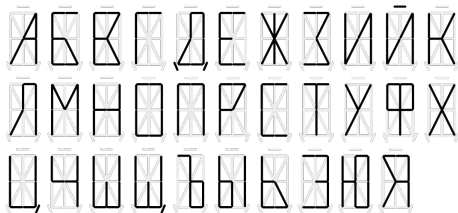
ЬР ЬЗ ЬВ СК СВ РЗ РВ РБ КЗ
КЕ КВ КБ ЗЕ ЗВ ЗБ ЕВ ГВ ВБ



Розеттский камень

Интересно попробовать формализовать данную задачу — понять, что значит написать букву.

Рассмотрим *16-сегментный индикатор*:



Вспомним замеченное нами совпадение:

ЬР ЬЗ ЬВ СК СВ РЗ РВ РБ КЗ
КЕ КВ КБ ЗЕ ЗВ ЗБ ЕВ ГВ ВБ



ЮТ ЮП ЮГ 𐤊; ЮЗ ЮВ 𐤋; ЭК ЭВ ЧВ НЗ НВ 𐤍; ЬС ЬЕ ЬГ ЬБ СБ ЕБ ГБ
𐤎; ЧЙ НЙ 𐤏; ЮЪ ЮФ 𐤐; СР РЕ 𐤑; ЧМ НМ 𐤒; ЯМ ЯИ 𐤓; ПЙ ЙГ 𐤔; ЬХ
ЬУ 𐤕; ШЧ ШН 𐤖; СЗ ЗГ 𐤗; СЙ ОЙ 𐤘; ШЖ ЦЖ 𐤙; СМ ОМ 𐤚; ПЛ ЛГ 𐤛;
ЭИ СА ОА 𐤜; ЧР РН 𐤝; ЬФ ФБ 𐤞; ЮХ ЮЖ 𐤟; ХЖ УЖ 𐤠; ЬЩ ЬЦ 𐤡;
ФС ФЕ 𐤢; ЧК НК 𐤣; ЦС ЦП ЦО ЦГ 𐤤; УМ УИ МИ 𐤥; ЭЪ ЭБ ЧБ НБ
𐤦; ЬЧ ЬН 𐤧; ЩФ ЦФ 𐤨; ЧП ЧГ ПН НГ 𐤩; ПА ГА 𐤪; ЬХ ЬЖ 𐤫; ЬЗ ЬВ
ШВ 𐤬; ЬЫ ЬШ 𐤭; ПМ МГ 𐤮; ЩС ЩП ЩО ЩГ 𐤯; ЬП ЬГ 𐤰; ЬТ ТБ 𐤱;
ПИ ИГ 𐤲; ЬЩ ЬЦ 𐤳; ХМ ХИ 𐤴; ЮЩ ЮЦ 𐤵; СЕ ЕГ 𐤶; ЭН ЭЕ ЧС ЧО
ЧЕ СН ОН НЕ 𐤷; ЯЪ ЯБ 𐤸; ЯС ЯО 𐤹; ХФ ФЖ 𐤺; ЧФ ЧТ 𐤻; ЩШ ЩЦ
ЩЦ 𐤼; РК КГ 𐤽; ШС ШП ШО ШГ 𐤾; ЬС ЬО ЬЕ ШЕ 𐤿; ЩТ ЦТ 𐀀; СЛ
ОЛ 𐀁; ХТ ТЖ 𐀂; ЮЧ ЮН 𐀃; ЮД ЬД 𐀄; ЮЭ ШФ ФО 𐀅; ХК УК 𐀆; ЭЪ
ЭТ 𐀇; ШТ ТО 𐀈; ПЗ ОЗ 𐀉; УЙ МЙ 𐀊; МВ МБ 𐀋; МЖ ИЖ 𐀌; ЯУ ЯА 𐀍;
ХЕ ХВ ХБ УВ УБ 𐀎; ПЕ ОЕ 𐀏; СИ ОИ 𐀐; ХЗ УЗ 𐀑; ЬП ЬО ПБ ОБ 𐀒;
ЖЕ ЖВ ЖБ 𐀓; ЬР ЬЗ ЬВ СК СВ РЗ РВ РБ КЗ 𐀔; КЕ КВ КБ ЗЕ ЗВ ЗБ ЕВ
ГВ ВБ 𐀕; ЬЧ ЬН 𐀖; ЧИ НИ НА 𐀗; ФП ФН ТН 𐀘; СП СО ПО ОГ 𐀙; ЬБ
ШБ 𐀚; ЬВ ЬБ 𐀛; ЧЦ ЦН 𐀜; ЮЫ ЮШ 𐀝; ВА БА 𐀞; ЯЗ ЭХ 𐀟; ЮС ЮО
ЮЕ 𐀠; ЩЧ ЩН 𐀡; ЭС ЭП ЭО ЭГ 𐀢; СД ПД ОД ДГ 𐀣; ШД ШД 𐀤; ИВ
ИБ 𐀥; ПВ ОК ОВ 𐀦; ЯП ЯГ 𐀧;

На «Математике НОН-СТОП» мы, разумеется, предлагаем задачи и для детей с некоторым опытом занятия в математических кружках — таким участникам также не будет скучно.

7 класс, 4С

Кого больше в двоичной записи чисел от 0 до $2^n - 1$ — единиц или нулей?

Ответ объясните.

7 класс, 4С

Кого больше в двоичной записи чисел от 0 до $2^n - 1$ — единиц или нулей?
Ответ объясните.

Нужно придумать однозначное соответствие между единицами и нулями, в котором участвуют все нули, но не все единицы.

Но можно проще и изящнее:

Рассмотрим все возможные комбинации из n нулей или единиц. В их записи, очевидно, встретится равное количество единиц и нулей. Чтобы получить записи чисел, отбросим все ведущие нули.

8 класс, 1С

Докажите, что максимальная возможная площадь n -угольника, все стороны которого имеют длину 1, меньше, чем максимальная возможная площадь $n + 1$ -угольника, все стороны которого имеют длину 1.

8 класс, 1С

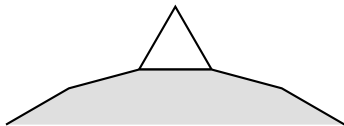
Докажите, что максимальная возможная площадь n -угольника, все стороны которого имеют длину 1, меньше, чем максимальная возможная площадь $n + 1$ -угольника, все стороны которого имеют длину 1.

Дети же не знают, что максимальную площадь имеют правильные n -угольники.

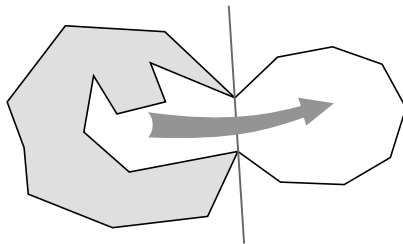
Для каждого многоугольника с n сторонами длины 1 построим многоугольник с $n + 1$ сторонами, площадь которого больше.

Карфаген *(Широкий не значит высокий)*

Если выпуклый



Если невыпуклый



Меняем правила под себя

Рассмотрим следующую задачу, формулирующуюся самым классическим образом:

8 класс, 10С

В кучке N камней. За ход из неё можно вынуть

$1, 2, 3, \dots, a-1, \not{a}, a+1, \dots, n$ камней.

(То есть любое число от 1 до n , кроме a .) Играют двое, и проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре (в зависимости от чисел N, n, a)?

Меняем правила под себя

Рассмотрим следующую задачу, формулирующуюся самым классическим образом:

8 класс, 10С

В кучке N камней. За ход из неё можно вынуть

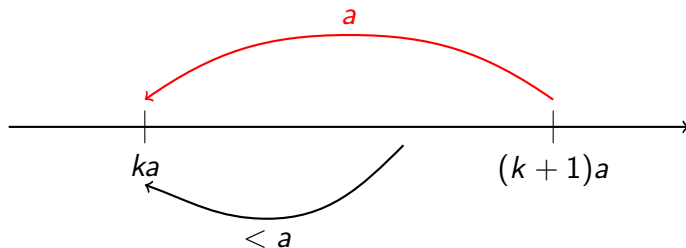
$1, 2, 3, \dots, a-1, \not{a}, a+1, \dots, n$ камней.

(То есть любое число от 1 до n , кроме a .) Играют двое, и проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре (в зависимости от чисел N, n, a)?

Задача решается методом *анализа позиций*: не бывает ходов из проигрышной позиции в проигрышную.

Меняем правила под себя

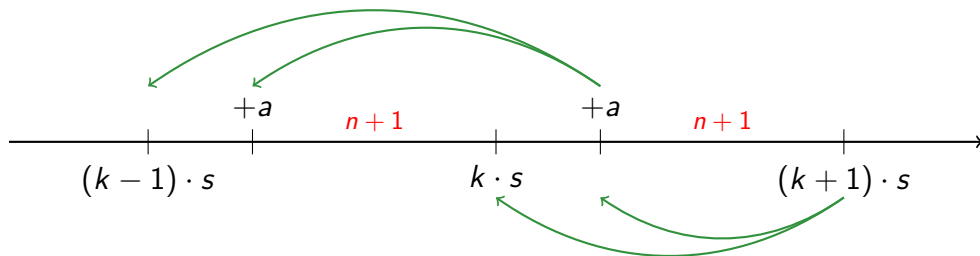
$a > \frac{n}{2}$: проигрышные позиции — $k \cdot a$.



Меняем правила под себя

$a \leq \frac{n}{2}$: проигрышные позиции — $k \cdot (n + a + 1)$, $k \cdot (n + a + 1) + a$.

Обозначим $s := n + a + 1$.



Чтение и *изменение* авторского условия

Мы уже давали задачи, значительная часть решения которых заключалась в их вдумчивом прочтении.

Теперь мы пошли дальше и предложили участникам скорректировать наши условия. Для этого по сути нужно решить задачу «задом наперёд».

7 класс, 10В

В августе Саар планирует доехать от Бишкека до Астаны. Она проехала уже 1210 километров. Сверившись с картой, она поняла, что ей осталось ехать втрое больше, чем расстояние, которое проедет машина, в 4 раза более быстрая, чем Саар, за время от текущего момента до момента, когда Саар останется столько же, сколько она проехала сейчас.

Каково расстояние между Бишкеком и Астаной?

7 класс, 10В

В августе Саар планирует доехать от Бишкека до Астаны. Она проехала уже 1210 километров. Сверившись с картой, она поняла, что ей осталось ехать втрое больше, чем расстояние, которое проедет машина, в 4 раза более быстрая, чем Саар, за время от текущего момента до момента, когда Саар останется столько же, сколько она проехала сейчас.

Каково расстояние между Бишкеком и Астаной?

Пусть осталось ехать t км. До момента, когда останется 1210, $t - 1210$ км.

$$t = 3 \cdot 4 \cdot (t - 1210), \quad 11t = 12 \cdot 1210, \quad t = 1320.$$

$$1320 + 1210 = 2530.$$

7 класс, 10С

Замените числа 1210 и 4 в условии пункта **В** на какие-то другие так, чтобы ответ в задаче составил 1400 километров — настоящее расстояние между Бишкеком и Астаной.

7 класс, 10С

Замените числа 1210 и 4 в условии пункта **В** на какие-то другие так, чтобы ответ в задаче составил 1400 километров — настоящее расстояние между Бишкеком и Астаной.

A — сколько уже проехали, c — отношение скоростей машины и велосипеда.

$$t = 3c \cdot (t - A), \quad t = \frac{3cA}{3c - 1}.$$
$$A + t = A + \frac{3cA}{3c - 1} = A \cdot \frac{6c - 1}{3c - 1} = 1400.$$

Например, $A = 100$, $c = \frac{13}{36}$.

Ещё проще, ещё доступнее

«Математика НОН-СТОП» — олимпиада для всех, и любой участник найдёт в ней то, что сможет решить.

Разберём несколько задач, доступных каждому.

Конференция анонимных геометров

5 класс, 1А

В комнату, имеющую форму правильного 12-угольника, заходят 124 любителя вычислительной геометрии. Как рассадить их вдоль стен этой комнаты так, чтобы у каждой стены сидело ровно по 11 любителей вычислительной геометрии?

Любителей геометрии можно сажать и в углы комнаты — но не более чем по одному геометру на угол.

Конференция анонимных геометров

5 класс, 1А

В комнату, имеющую форму правильного 12-угольника, заходят 124 любителя вычислительной геометрии. Как рассадить их вдоль стен этой комнаты так, чтобы у каждой стены сидело ровно по 11 любителей вычислительной геометрии?

Любителей геометрии можно сажать и в углы комнаты — но не более чем по одному геометру на угол.

$12 \cdot 11 - 124 = 8$. Значит, что в какие-то 8 углов из 12 надо будет посадить геометров.

Незакрученный удар

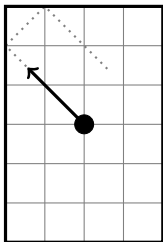
4 класс, 2А

Шарик катается по прямоугольнику, не замедляясь. Когда он подъезжает к краю прямоугольника, он отскакивает от него и продолжает движение. В каком положении окажется шарик, будучи запущенным из центра прямоугольника на рисунке, после того как он проедет 24 клетки по диагонали?

Незакрученный удар

4 класс, 2А

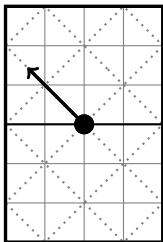
Шарик катается по прямоугольнику, не замедляясь. Когда он подъезжает к краю прямоугольника, он отскакивает от него и продолжает движение. В каком положении окажется шарик, будучи запущенным из центра прямоугольника на рисунке, после того как он проедет 24 клетки по диагонали?



Незакрученный удар

4 класс, 2А

Шарик катается по прямоугольнику, не замедляясь. Когда он подъезжает к краю прямоугольника, он отскакивает от него и продолжает движение. В каком положении окажется шарик, будучи запущенным из центра прямоугольника на рисунке, после того как он проедет 24 клетки по диагонали?



Раз в 6 клеток пересекает
горизонтальную среднюю линию

Мы едем, едем, едем, едем, едем, едем...

5 класс, 6А

Проездной на месяц позволяет его владельцу ездить на метро неограниченное число раз, стоимость проездного фиксирована и одинакова в любом месяце. Укажите, какова должна быть стоимость проездного, чтобы при двух ежедневных поездках он не окупался бы в феврале, но окупался бы в октябре? Стоимость разовой поездки в метро равна 45 рублям.

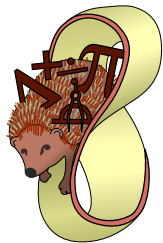
Мы едем, едем, едем, едем, едем, едем...

5 класс, 6А

Проездной на месяц позволяет его владельцу ездить на метро неограниченное число раз, стоимость проездного фиксирована и одинакова в любом месяце. Укажите, какова должна быть стоимость проездного, чтобы при двух ежедневных поездках он не окупался бы в феврале, но окупался бы в октябре? Стоимость разовой поездки в метро равна 45 рублям.

Октябрь длиннее февраля, поэтому может быть совершено больше поездок. Проездной, таким образом, может быть дешевле стоимости 62 поездок, но дороже стоимости 56 поездок.

$$28 \cdot 45 \cdot 2 = 2520 < S < 2790 = 31 \cdot 45 \cdot 2.$$



Спасибо за внимание!

Фонд «Время Науки», 2019