

Методические приёмы составления задач олимпиады

Б. А. Золотов, «Математика НОН-СТОП»

Фонд «Время Науки»

8 ноября 2020

История олимпиады

- 2010 — первая олимпиада;
- 2016 — 400 участников пишут базовый вариант, 92 — профильный;
— поддержка Фонда «Время Науки»;
- 2018 — 847 участников пишут базовый вариант, 128 — профильный;
— включение в Перечень региональных олимпиад и конкурсов интеллектуальной направленности;
— поддержка Фонда Президентских грантов, Комитета по образованию СПб;
- 2019 — выход сборника задач;
— площадки в Бердске (Новосибирская обл.) и Гомеле (Беларусь);

- 12 площадок (на 2021 год — 20 соглашений);
- количество участников — около 2000;
- пять городов: Санкт-Петербург, Бердск (Новосибирская обл.), Нов. Уренгой (ЯНАО), Гатчина (ЛО), Гомель (Беларусь);
- две страны;
- проблемы с часовыми поясами.

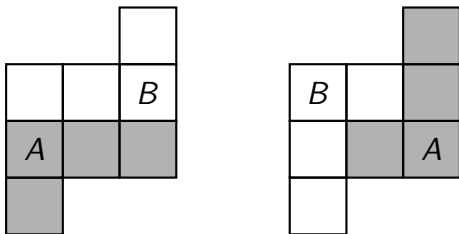
2020-5-1C

Можно ли нарисовать на клетчатом листе бумаги такую фигуру, которую можно разрезать по линиям сетки на две *одинаковые* фигуры двумя способами — причём фигуры в первом и во втором способе были бы одни и те же, но линии разреза выглядели бы по-разному?

Разрезания

2020-5-1C

Можно ли нарисовать на клетчатом листе бумаги такую фигуру, которую можно разрезать по линиям сетки на две *одинаковые* фигуры двумя способами — причём фигуры в первом и во втором способе были бы одни и те же, но линии разреза выглядели бы по-разному?



Сумма цифр

2017-8-2C

Придумайте (или расскажите, как построить) 95-значное число, в котором нет нулей и которое делится на свою сумму цифр.

2017-8-2С

Придумайте (или расскажите, как построить) 95-значное число, в котором нет нулей и которое делится на свою сумму цифр.

Придумаем число, делящееся на $144 = 9 \cdot 16$:

$$\underbrace{\dots\dots\dots}_{\text{разрядов} - 91,} 3232.$$
$$\sum \text{цифр} - 134$$

2019-7-8C

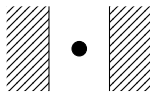
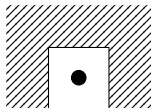
Путник в лабиринте видит ситуацию вокруг. Помимо этого, никакой другой информации и памяти у него нет. Существует ли какой-нибудь набор правил, чтобы он, имея только эту информацию, мог дойти до финальной клетки в любом лабиринте?

Лабиринт

2019-7-8C

Путник в лабиринте видит ситуацию вокруг. Помимо этого, никакой другой информации и памяти у него нет. Существует ли какой-нибудь набор правил, чтобы он, имея только эту информацию, мог дойти до финальной клетки в любом лабиринте?

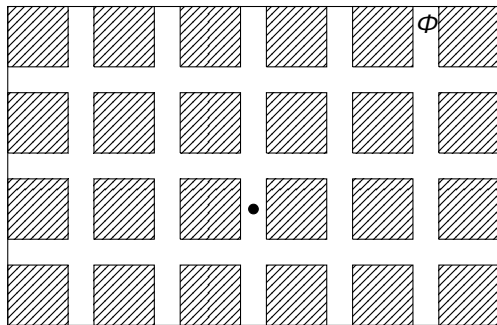
Заметим, что поведение путника однозначно определено в простых ситуациях:



Приведём решение без T -образных перекрёстков, чтобы о них не думать:

Лабиринт

Приведём решение без T -образных перекрёстков, чтобы о них не думать:



2020-5-3A

Песню каждого участника оценивает 15 судей. Судья ставит каждому участнику в паре от 0 до 22 баллов и отдаёт свой голос участнику, которому поставил больше баллов. В паре объявляется победителем тот участник, которому отдано больше голосов. Может ли быть так, что победитель в паре набрал меньше баллов, чем проигравший, несмотря на перевес в голосах?

2020-5-3A

Песню каждого участника оценивает 15 судей. Судья ставит каждому участнику в паре от 0 до 22 баллов и отдаёт свой голос участнику, которому поставил больше баллов. В паре объявляется победителем тот участник, которому отдано больше голосов. Может ли быть так, что победитель в паре набрал меньше баллов, чем проигравший, несмотря на перевес в голосах?

Семнадцатый независимый

Участник	Победы	Проигрыши	Баллы	Голоса
Победитель 1	1 : 0	0 : 22	11	11
Победитель 2	2 : 0	0 : 16	20	10
Победитель 3	3 : 0	0 : 12	27	9
Победитель 4	4 : 0	0 : 9	32	8
Проигравший 4	9 : 0	0 : 4	63	7
Проигравший 3	12 : 0	0 : 3	72	6
Проигравший 2	16 : 0	0 : 2	80	5
Проигравший 1	22 : 0	0 : 1	88	4

2019-7-3A

На предприятии работают 50 человек, и они выбирают себе начальника. Есть две кандидатуры, Ваня и Даня. Про каждого работника известно заранее, кому он отдаёт предпочтение: 20 человек за Даню, 30 человек за Ваню.

Голосование проходит по двухтуровой системе: люди делятся на 5 групп по 10 человек, в каждой группе выбирается кандидат, наиболее популярный среди членов этой группы, и затем из 5 ответов выбирается имя, названное большее число раз.

Разделите работников на группы так, чтобы в большинстве групп выбрали Даню и он победил на выборах, несмотря на изначально меньшее число голосующих за него.

2019-7-3A

На предприятии работают 50 человек, и они выбирают себе начальника. Есть две кандидатуры, Ваня и Даня. Про каждого работника известно заранее, кому он отдаёт предпочтение: 20 человек за Даню, 30 человек за Ваню.

Голосование проходит по двухтуровой системе: люди делятся на 5 групп по 10 человек, в каждой группе выбирается кандидат, наиболее популярный среди членов этой группы, и затем из 5 ответов выбирается имя, названное большее число раз.

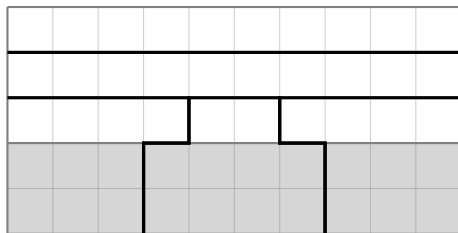
Разделите работников на группы так, чтобы в большинстве групп выбрали Даню и он победил на выборах, несмотря на изначально меньшее число голосующих за него.

Аксиомы выборов

За Ваню

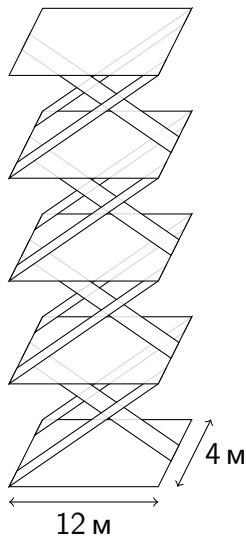
За Даню

Аксиомы выборов



За Ваню

За Даню



В торговом центре «Атмосфера» пять этажей. Соседние этажи соединяют по три эскалатора. По утрам администратор запускает каждый из эскалаторов вверх или вниз. Способ запустить эскалаторы *хороший*, если с любого этажа можно добраться до любого, не проходя ни по одному из этажей более 5 метров. Приведите пример; сколько всего хороших способов ? ($2 \cdot 3^4 = 162$.)

Разрезай и властвуй

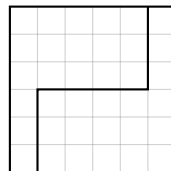
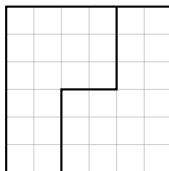
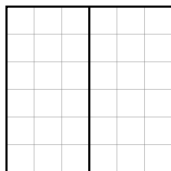
2019-7-6C

Предложите как можно больше разных способов разрезать квадрат 6×6 на два одинаковых многоугольника по линиям сетки.

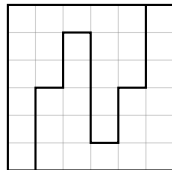
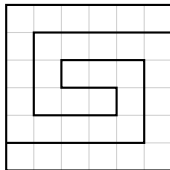
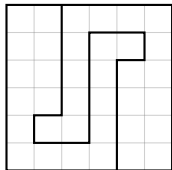
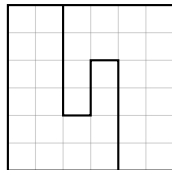
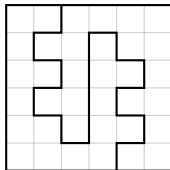
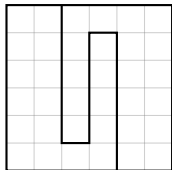
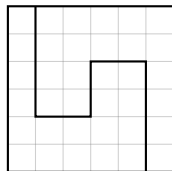
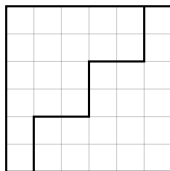
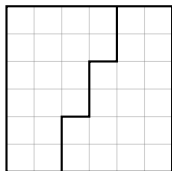
Разрежь и властвуй

2019-7-6C

Предложите как можно больше разных способов разрезать квадрат 6×6 на два одинаковых многоугольника по линиям сетки.



Разрежь и властвуй



2019-8-1С

Докажите, что максимальная возможная площадь n -угольника, все стороны которого имеют длину 1, меньше, чем максимальная возможная площадь $n + 1$ -угольника, все стороны которого имеют длину 1.

2019-8-1С

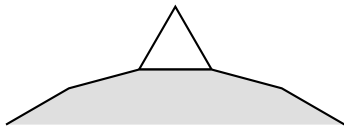
Докажите, что максимальная возможная площадь n -угольника, все стороны которого имеют длину 1, меньше, чем максимальная возможная площадь $n + 1$ -угольника, все стороны которого имеют длину 1.

Дети же не знают, что максимальную площадь имеют правильные n -угольники.

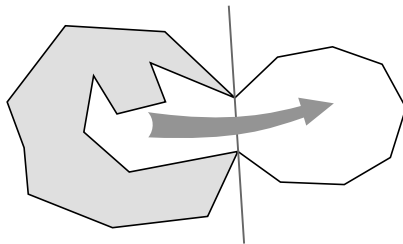
Для каждого многоугольника с n сторонами длины 1 построим многоугольник с $n + 1$ сторонами, площадь которого больше.

Карфаген *(Широкий не значит высокий)*

Если выпуклый



Если невыпуклый



Сортировка

Выпишем все числа от одного до десяти — но не в привычном порядке возрастания, а в алфавитном порядке: восемь, два, девять, десять, один, пять, семь, три, четыре, шесть.

2020-6-4B

Числа от 1 до 10'000'000'000 (десять миллиардов) выписали в алфавитном порядке. Перечислите первые десять из них.

Выпишем все числа от одного до десяти — но не в привычном порядке возрастания, а в алфавитном порядке: восемь, два, девять, десять, один, пять, семь, три, четыре, шесть.

2020-6-4В

Числа от 1 до 10'000'000'000 (десять миллиардов) выписали в алфавитном порядке. Перечислите первые десять из них.

- (1) 18 (2) 18 миллионов (3) 18 миллионов 18 (4) 18 миллионов 18 тысяч
(5) 18 миллионов 18 тысяч 18 (6) ... восемь (7) ... восемьдесят
(8) ... 88 (9) ... 82 (10) ... 89.

Незакрученный удар

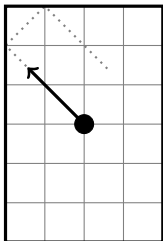
2019-4-2A

Шарик катается по прямоугольнику, не замедляясь. Когда он подъезжает к краю прямоугольника, он отскакивает от него и продолжает движение. В каком положении окажется шарик, будучи запущенным из центра прямоугольника на рисунке, после того как он проедет 24 клетки по диагонали?

Незакрученный удар

2019-4-2A

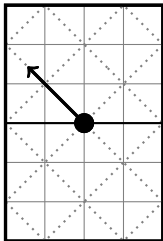
Шарик катается по прямоугольнику, не замедляясь. Когда он подъезжает к краю прямоугольника, он отскакивает от него и продолжает движение. В каком положении окажется шарик, будучи запущенным из центра прямоугольника на рисунке, после того как он проедет 24 клетки по диагонали?



Незакрученный удар

2019-4-2A

Шарик катается по прямоугольнику, не замедляясь. Когда он подъезжает к краю прямоугольника, он отскакивает от него и продолжает движение. В каком положении окажется шарик, будучи запущенным из центра прямоугольника на рисунке, после того как он проедет 24 клетки по диагонали?



Раз в 6 клеток пересекает
горизонтальную среднюю линию

Кирпичей требуют наши сердца

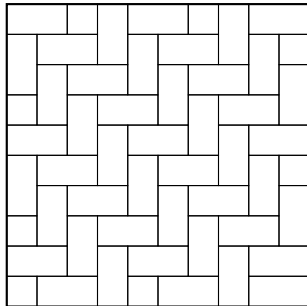
2020-4-4В

У Вани есть доски для паркета размером 20×10 сантиметров, их можно распиливать пополам. Как Ване покрыть этими досками пол квадратной комнаты $1 \text{ метр} \times 1 \text{ метр}$ так, чтобы не было швов длиной более 30 сантиметров ни в одном из направлений?

Кирпичей требуют наши сердца

2020-4-4В

У Вани есть доски для паркета размером 20×10 сантиметров, их можно распиливать пополам. Как Ване покрыть этими досками пол квадратной комнаты $1 \text{ метр} \times 1 \text{ метр}$ так, чтобы не было швов длиной более 30 сантиметров ни в одном из направлений?



Интереснее, чем кажутся

2020-6-6A

Прислонив к зеркалу правый край экрана калькулятора, Серёжа заметил, что отражение некоторых чисел в зеркале тоже можно прочитать как (возможно, другое) число. Например, из 281 получается 185. Можно ли прочитать отражение чисел:

180; 205; 12851; 369; 31813?

Интереснее, чем кажутся

2020-6-6A

Прислонив к зеркалу правый край экрана калькулятора, Серёжа заметил, что отражение некоторых чисел в зеркале тоже можно прочитать как (возможно, другое) число. Например, из 281 получается 185. Можно ли прочитать отражение чисел:

180; 205; 12851; 369; 31813?

$1 \rightarrow 1, 2 \rightarrow 5, 3 \rightarrow ?, 4 \rightarrow ?, 5 \rightarrow 2, 6 \rightarrow ?, 7 \rightarrow ?, 8 \rightarrow 8, 9 \rightarrow ?, 0 \rightarrow 0.$

Направления, которые мы обсудили сегодня

- (1) Конструктивные задачи
- (2) Задачи, вдохновлённые реальными явлениями
- (3) Задачи на приведение *множества* примеров
- (4) Самые сложные задачи для детей с опытом
- (5) Самые простые задачи, которые *решат все*

Спасибо за внимание!

(*) Заявки на разбор задач с mathnonstop.ru