Разделяй и... достаточно

Тодоров Е.И.

Санкт-Петербургский Турнир юных математиков, Фонд «Время науки»

18 июня 2021 г.

Эта презентация онлайн

Зачем фотографировать презентацию,
когда её можно скачать?

http://bit.ly/about_division

Определение деления

Определение

Для целых чисел a и b будем говорить, что a делится на b, если существует такое целое число n, что $a = nb$. Будем писать $a \vdots b$.
Число b в этом случае называется делителем a.

Свойства делимости:

- для любого целого a выполнено $0 \vdots a$;
- если $a \vdots b$ и $b \vdots c$, то $a \vdots c$;
- если $ac \vdots bc$ и $c \neq 0$, то $a \vdots b$;
- если $(a+b) \vdots c$ и $a \vdots c$, то $b \vdots c$.

Определение деления с остатком

Определение

Для целых чисел a, b *и* r $(0 < r < b - 1)$ *будем говорить, что* a *делится на* b *с остатком* r, *если существует такое целое число* n, *что* $a = nb + r$ *и* r *— наименьшее из таких чисел.*

Свойство

Разность $(a - b)$ *делится на* c *тогда и только тогда, когда остатки от деления* a *и* b *на* c *одинаковые.*

Упражнения

Упражнение

Найдите наибольшее четырёхзначное число, которое делится на 31.

Упражнение

Число 100 разделили на некоторое число $n < 50$ и получили остаток 6. Найдите n.

Упражнение

Может ли некоторое число делиться на 8, а при делении на 12 давать остаток 10?

Определение НОД

Определение

Целое число D называется наибольшим общим делителем чисел a и b, если выполнены свойства:

1. *D является делителем a и b: $a \vdots D$ и $b \vdots D$;*
2. *D делится на любой другой делитель a и b: для любого d если $a \vdots d$ и $b \vdots d$, то $D \vdots d$.*

В этом случае пишут $D = \text{НОД}(a, b)$.

Свойство

Для любого целого a выполнено $\text{НОД}(a, 0) = a$.

Наивные методы поиска НОД

1. Перебрать все числа до $\min(a, b)$.

Упражнение

Найдите $НОД(12, 16)$ *и* $НОД(15, 21)$.

Наивные методы поиска НОД

1. Перебрать все числа до $\min(a, b)$.

Упражнение

Найдите $\text{НОД}(12, 16)$ *и* $\text{НОД}(15, 21)$.

2. Выписать все простые делители a и b, а затем найти общие и перемножить их.

Упражнение

Найдите $\text{НОД}(12, 16)$, $\text{НОД}(15, 87)$ *и* $\text{НОД}(60, 210)$.

Лемма об общем НОД

Лемма

Для целых чисел b, n и r имеет место равенство $\text{НОД}(b, r) = \text{НОД}(bn + r, b)$.

Доказательство

Нетрудно видеть, что

$$\text{НОД}(b, r) \,\vdots\, \text{НОД}(bn + r, b)$$

Лемма об общем НОД

Лемма

Для целых чисел b, n и r имеет место равенство $\text{НОД}(b, r) = \text{НОД}(bn + r, b)$.

Доказательство

Нетрудно видеть, что

$$\text{НОД}(b, r) \vdots \text{НОД}(bn + r, b)$$

и, наоборот,

$$\text{НОД}(bn + r, b) \vdots \text{НОД}(b, r).$$

Лемма об общем НОД

Лемма

Для целых чисел b, n и r имеет место равенство $\text{НОД}(b, r) = \text{НОД}(bn + r, b)$.

Доказательство

Нетрудно видеть, что

$$\text{НОД}(b, r) \,\vdots\, \text{НОД}(bn + r, b)$$

и, наоборот,

$$\text{НОД}(bn + r, b) \,\vdots\, \text{НОД}(b, r).$$

А значит, $\text{НОД}(b, r) = \text{НОД}(bn + r, b)$

Об остатках и разности

Свойство

Найти остаток r от деления числа a на число b можно, вычитая b из a, пока это возможно.

Пример

Найдём остаток от деления числа 85 на 16:

1. $85 - 16 = 69$;
2. $69 - 16 = 53$;
3. $53 - 16 = 37$;
4. $37 - 16 = 21$;
5. $21 - 16 = 5$.

Алгоритм Евклида

НОД(a, b) для $a > b$ может быть найден благодаря следующему алгоритму, в котором последовательно находятся числа q и r:

$$
\begin{aligned}
a &= bq_1 + r_2, & 0 < r_2 < b\\
b &= r_2q_2 + r_3, & 0 < r_3 < r_2\\
r_2 &= r_3q_3 + r_4, & 0 < r_4 < r_3\\
&\vdots & \vdots\\
r_{n-3} &= r_{n-2}q_{n-2} + r_{n-1}, & 0 < r_{n-1} < r_{n-2}\\
r_{n-2} &= r_{n-1}q_{n-1} + r_n, & 0 < r_n < r_{n-1}\\
r_{n-1} &= r_{r_n}q_n.
\end{aligned}
$$

Этот алгоритм продолжается до тех пор, пока на некотором шаге число r_{n+1} не станет равно 0.

Пример и упражнения

Пример

Найдём НОД$(100, 44)$*:*

Пример и упражнения

Пример

Найдём НОД$(100, 44)$*:*

1. $100 = 44 \cdot 2 + 12$ *(*$q_1 = 2$*,* $r_2 = 12$*);*

Пример и упражнения

Пример

Найдём НОД$(100, 44)$*:*

1. $100 = 44 \cdot 2 + 12$ *(*$q_1 = 2$, $r_2 = 12$*);*
2. $44 = 12 \cdot 3 + 8$ *(*$q_2 = 3$, $r_3 = 8$*);*

Пример и упражнения

Пример

Найдём НОД$(100, 44)$*:*

1. $100 = 44 \cdot 2 + 12$ *(*$q_1 = 2,\ r_2 = 12$*);*
2. $44 = 12 \cdot 3 + 8$ *(*$q_2 = 3,\ r_3 = 8$*);*
3. $12 = 8 \cdot 1 + 4$ *(*$q_3 = 1,\ r_4 = 4$*);*

Пример и упражнения

Пример

Найдём НОД$(100, 44)$*:*

1. $100 = 44 \cdot 2 + 12$ $(q_1 = 2,\ r_2 = 12)$;
2. $44 = 12 \cdot 3 + 8$ $(q_2 = 3,\ r_3 = 8)$;
3. $12 = 8 \cdot 1 + 4$ $(q_3 = 1,\ r_4 = 4)$;
4. $8 = 4 \cdot 2$ $(q_4 = 2,\ r_5 = 0)$.

То есть НОД$(100, 44) = 4$.

Упражнение

Найдите НОД$(108, 48)$, НОД$(72, 42)$ *и* НОД$(34, 21)$.

О конечности алгоритма Евклида

Заметим, что на кажом шаге мы работаем с числами, становящимися всё меньше и меньше:

$$b > r_2 > r_3 > r_4 > \dots$$

Поскольку мы работаем с натуральными числами, этот процесс обязательно когда-то закончится.

О линейном выражении НОД

С помощью алгоритма Евклида мы можем линейно выразить НОД(a, b) через числа a и b, то есть подобрать такие целые числа m и n, что НОД$(a, b) = ma + nb$.

Пример

Найдём НОД$(98, 21)$*:*

1. $98 = 21 \cdot 4 + 14$ $(q_1 = 4,\ r_2 = 14)$;
2. $21 = 14 \cdot 1 + 7$ $(q_2 = 1,\ r_3 = 7)$;
3. $14 = 7 \cdot 2$ $(q_3 = 2,\ r_4 = 0)$.

То есть НОД$(98, 21) = 7$.
НОД$(98, 21) = 7 = 21 - 14 = 21 - (98 - 21 \cdot 4) = (-1) \cdot 98 + 5 \cdot 21$.

Упражнения

Упражнение

1. *Выразите* $\text{НОД}(20, 12)$ *через* 20 *и* 12;
2. *Выразите* $\text{НОД}(72, 32)$ *через* 72 *и* 32;
3. *Выразите* $\text{НОД}(153, 54)$ *через* 153 *и* 54.

Диофантовы уравнения

Теорема

Для целых a, b и c линейное уравнение $ax + by = c$ имеет решение в целых тогда и только тогда, когда $c \vdots \text{НОД}(a, b)$, то есть если существует такое целое t, что $c = t \cdot \text{НОД}(a, b)$.

Доказательство

Поскольку $\text{НОД}(a, b)$ *линейно выражается через a и b:*
$ma + nb = \text{НОД}(a, b)$ *— имеет место равенство*
$t \cdot ma + t \cdot nb = t \cdot \text{НОД}(a, b)$ *или $tm \cdot a + tn \cdot b = c$. Значит, достаточно просто взять $x = tm$ и $y = tn$.*

Летний Турнир для 5–7 классов

- пройдёт очно со 2 по 8 августа;
- участие и проживание бесплатно для участников;
- новый формат, сочетающий особенности Турнира и Регаты;
- 3 серии нестандартных задач;
- по 1.5 дня на решение;
- устный доклад в формате мат.боя на 2 команды.

Регистрация на Летний Турнир

Зарегистрировать команду на
Летний Турнир юных математиков:

spbtym.ru → Зарегистрироваться

ФОНД ПРЕЗИДЕНТСКИХ ГРАНТОВ

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ

ВРЕМЯ НАУКИ

Спасибо за внимание!

Сайт Турнира: spbtym.ru

Задать вопрос автору: todzhe@mail.ru