Теория делимости

Е. И. Тодоров, Санкт-Петербургский Турнир юных математиков

Чётность. Свойства

- Сложение: чёт. $+$ чёт. $=$ чёт., неч. $+$ неч. $=$ чёт., чёт. $+$ неч. $=$ неч..
- Умножение: чёт. $\cdot$ чёт. $=$ чёт., чёт. $\cdot$ неч. $=$ чёт., неч. $\cdot$ неч. $=$ неч..
- $\underbrace{\text{неч.} + \text{неч.} + \text{неч.} + \ldots + \text{неч.} + \text{неч.}}_{\text{чёт.}} = \text{чёт.}$.
- $\underbrace{\text{неч.} + \text{неч.} + \text{неч.} + \ldots + \text{неч.} + \text{неч.}}_{\text{неч.}} = \text{неч.}$.

Доказательство

$$\underbrace{\text{неч.} + \text{неч.} + \text{неч.} + \ldots + \text{неч.} + \text{неч.}}_{\text{чёт.}} =$$

$$=(\text{неч.} + \text{неч.}) + (\text{неч.} + \ldots + (\text{неч.} + \text{неч.}) =$$

$$= \text{чёт.} + \text{чёт.} + \ldots + \text{чёт.} = \text{чёт.}.$$

$$\underbrace{\text{неч.} + \text{неч.} + \text{неч.} + \ldots + \text{неч.} + \text{неч.}}_{\text{неч.}} =$$

$$=(\text{неч.} + \text{неч.}) + (\text{неч.} + \ldots + \text{неч.}) + \text{неч.} =$$

$$= \text{чёт.} + \text{чёт.} + \ldots + \text{чёт.} + \text{неч.} = \text{неч.}.$$

Чётность. Задача 1

Сумма пяти натуральных чисел равняется 200. Может ли их произведение оканчиваться на 1999?

Решение

- Если число оканчивается на 1999, то оно нечётное.
- Произведение чисел нечётно только тогда, когда каждое число нечётно.
- Сумма пяти нечётных чисел нечётна, а 200 — чётное число. Беда.

Чётность. Задача 2

Произведение трёх натуральных чисел оканчивается на 20. Может ли их сумма быть равна 19?

Решение

Подойдут числа 2, 5 и 12: $2 + 5 + 12 = 19$ и $2 \cdot 5 \cdot 12 = 120$.

Чётность. Задача 3

Нескольким друзьям родители дают по конфете каждый раз, когда они получают или дарят подарок. Друзья целый месяц дарили подарки только друг другу. После этого они ссыпали все конфеты в один мешок, и так оказалась 221 конфета. Докажите, что кто-то из друзей ссыпал не все свои конфеты.

Решение

- Каждый раз при дарении по конфете получает и дарующий, и принимающий.
- Значит, общее количество конфет у детей в два раза больше числа дарений.
- Значит, общее количество долно быть чётным, а 221 нечётное. Беда.

Делимость

Целое число a делится на целое число b тогда и только тогда, когда существует целое число k такое, что $a = k \cdot b$. Договоримся в этом случае писать $a \vdots b$.

Делимость. Свойства

- Для любого целого a верно $a \,\vdots\, 1$.
- Для любого целого b верно $0 \,\vdots\, b$.
- Для любых целых a, b и c если $a \,\vdots\, b$ и $b \,\vdots\, c$, то $a \,\vdots\, c$.

Доказательство

- $b \vdots c$, значит, существует целое число n такое, что $b = n \cdot c$;
- $a \vdots b$, значит, существует целое число m такое, что $a = m \cdot b$;
- тогда $a = m \cdot (n \cdot c) = (m \cdot n) \cdot c$;
- но $l = m \cdot n$ — целое число;
- тогда $a = l \cdot c$, то есть $a \vdots c$. Победа.

Делимость. Ещё свойства

- Если $a \vdots b$, то для любого целого k верно $ka \vdots b$.
- Для любых целых a и c, если $a \vdots b$ и $c \vdots b$, то $(a+c) \vdots b$.
- Для любых целых a и c, если $a \vdots b$ и $c \vdots b$, то $(a-c) \vdots b$.

Доказательство

- $a \vdots b$, значит, существует целое число n такое, что $a = n \cdot b$;
- $c \vdots b$, значит, существует целое число m такое, что $c = m \cdot b$;
- тогда $a + \ = n \cdot b + a = m \cdot b = (n + m) \cdot b$;
- но $l = n + m$ — целое число;
- тогда $a + c = l \cdot b$, то есть $(a + c) \vdots b$. Победа.

Делимость. Задача 4

Придумайте число, которое оканчивается на 13, делится на 13 и имеет сумму цифр 13.

Решение

- $1 + 3 = 4$. Остаётся набрать сумму цифр 9.
- Будем перебирать числа, делящиеся на 13, и смотреть на сумму цифр:

$$\begin{array}{cccc} 13 \to 4 & 26 \to 8 & 39 \to 12 & 52 \to 7 \\ 65 \to 11 & 78 \to 15 & 91 \to 10 & 104 \to 5 \\ 117 \to 9. & & & \end{array}$$

- Число $11713 = 11700 + 13 = 900 \cdot 13 + 13 = 901 \cdot 13$ — точно делится на 13. Победа.

Признаки делимости на 2 и 5

- Число делится на 2, если последняя цифра делится на 2.
- Число делится на 5, если последняя цифра делится на 5.
- Число делится на 2^n, если число, составленное из последних n цифр, делится на 2.
- Число делится на 5^n, если число, составленное из последних n цифр, делится на 5.

Доказательство

- Рассмотрим число $N = \overline{a_1 a_2 \ldots a_k \underbrace{b_1 b_2 \ldots b_n}_{n \text{ цифр}}}$.
- $N = \overline{a_1 a_2 \ldots a_k \underbrace{00 \ldots 0}_{n \text{ нулей}}} + \overline{b_1 b_2 \ldots b_n}$.
- $N = \overline{a_1 a_2 \ldots a_k} \cdot 10^n + \overline{b_1 b_2 \ldots b_n}$.
- Первое слагаемое точно делится на 2^n. Если второе делится, то и N должно. И наоборот.

Признаки делимости 3 и 9

- Число делится на 3 тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 3.
- Число делится на 9 тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 9.

Доказательство

- Рассмотрим число $\overline{abc}$.
- Рассмотрим разность $\overline{abc} - (a + b + c) = 100 \cdot a + 10 \cdot b + c - a - b - c = 99 \cdot a + 9 \cdot b$.
- Разность числа и его суммы цифр точно делится на 9. Значит, если число $\overline{abc}$ делилось на 9, то и его сумма цифр должна делиться. И наоборот.

Признаки делимости 11 и 7

- Число делится на 11 тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 3.
- Число делится на 7 тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 9.