

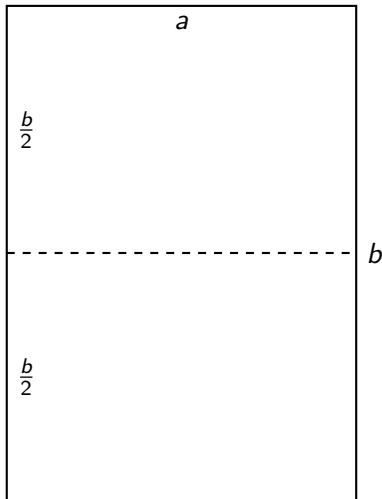
Лекция «Вокруг $\sqrt{2}$ »

Тодоров Е.И.

Фонд «Время науки»

26 февраля 2021 г.

Лист A4



Свойство сторон листа A4
(всех листов формата A):

$$a : b = \frac{b}{2} : a,$$

откуда

$$b^2 = 2a^2.$$

Определение

Для числа $s \geq 0$ квадратным корнем из s будем называть такое число $t \geq 0$, что $t^2 = s$. Пишут $t = \sqrt{s}$.

Пример

$$\sqrt{1} = 1, \quad \sqrt{4} = 2, \quad \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}, \quad \sqrt{2} = 1.414213\dots$$

Свойство

$$s \geq 0 \quad (\sqrt{s})^2 = s = \sqrt{s^2}$$

Свойство

$$s, r \geq 0 \quad \sqrt{s \cdot r} = \sqrt{s} \cdot \sqrt{r}$$

$$\sqrt{2}$$

Применим описанные свойства к соотношению $b^2 = 2a^2$:

$$\sqrt{b^2} = \sqrt{2a^2}$$

$$\sqrt{b^2} = \sqrt{2}\sqrt{a^2}$$

$$b = \sqrt{2}a$$

$$\frac{b}{a} = \sqrt{2}.$$

Вопрос: можно ли найти такие целые a и b ?

Числовые множества

- Натуральные числа: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$
- Целые числа: $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$
- Попробуем теперь собрать все дроби $\frac{b}{a}$:
 - $\frac{-3}{5} = \frac{3}{-5}$. Берём b любое, а a — только положительное.
 - $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \dots$. Берём только несократимые дроби. То есть у b и a не должно быть общих делителей.
- Рациональные числа (дроби):

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{b}{a} \mid b - \text{целое, } a - \text{натуральное, } \frac{a}{b} - \text{несократимая} \right\}.$$

Теорема Аристотеля

Теорема

Число $\sqrt{2}$ не живёт в \mathbb{Q} . То есть не существует таких целых a и b , что $\frac{b}{a} = \sqrt{2}$, где $\frac{b}{a}$ — несократимая дробь.

Доказательство

Пусть такие a и b найдутся. Тогда

$$\frac{b}{a} = \sqrt{2},$$

что эквивалентно

$$b^2 = 2a^2$$

- b^2 должно делиться на 2;
- b делится на 2;
- найдётся такое k , что $b = 2k$;

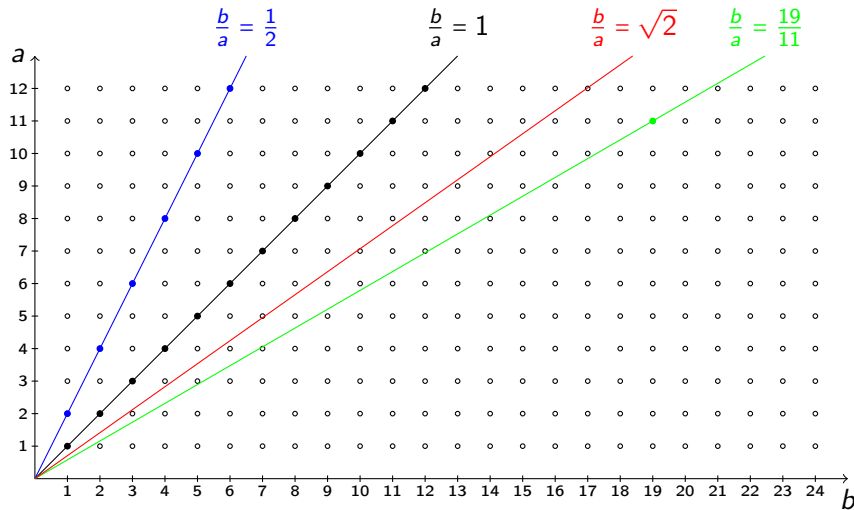
Доказательство (продолжение)

- $b^2 = 4k^2 = 2a^2$;
- $a^2 = 2k^2$;
- ...;
- a делится на 2;
- противоречие.

Значит, не существует таких целых a и b , что $\frac{b}{a} = \sqrt{2}$.

Значит, уравнение $b^2 = 2a^2$ не имеет решений для целых a и b .

Иллюстрация рациональности



Задача 1

Может ли иррациональное число в
иррациональной степени быть рациональным?

Решение 1

Да, может.

Рассмотрим число

$$(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}.$$

Если оно рационально, то мы победили.

Если нет, то возведём и его в степень $\sqrt{2}$:

$$\left((\sqrt{2})^{\sqrt{2}} \right)^{\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = (\sqrt{2})^2 = 2.$$

И теперь мы точно победили.

Задача 2

Генерал построил своё подразделение в форме квадрата? Может ли он перестроить это же подразделение в виде двух квадратов?

Цепная дробь

Рассмотрим дробь

$$1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}}} = x \quad \Longleftrightarrow \quad 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}}} = 1 + x.$$

Заменим знаменатель первой дроби на x :

$$2 + \frac{1}{x + 1} = 1 + x$$

$$\frac{1}{x + 1} = x - 1$$

$$1 = (x - 1)(x + 1)$$

$$1 = x^2 - 1$$

$$x^2 = 2$$

$$x = \sqrt{2}.$$

Приближенные значения $\sqrt{2}$

Обрубая дробь с предыдущего слайда на том или ином этаже мы получим последовательность *приближенных значений* $\sqrt{2}$:

$$\frac{1}{1}, \quad \frac{3}{2}, \quad \frac{7}{5}, \quad \frac{17}{12}, \quad \frac{41}{29}, \dots$$

- Каждая следующая такая дробь приближает $\sqrt{2}$ всё лучше и лучше.
- Если $\frac{p}{q}$ и $\frac{P}{Q}$ — две последовательные дроби из ряда выше, то

$$P = p + 2q, \qquad Q = p + q.$$

Свойство

Для каждой дроби $\frac{P}{Q}$ из ряда выше выполнено:

$$P^2 - 2Q^2 = \pm 1,$$

что эквивалентно

$$P^2 = 2Q^2 \pm 1.$$

Доказательство

Пусть для дроби $\frac{p}{q}$ это выполнено, то есть $p^2 - 2q^2 = \pm 1$.

Рассмотрим следующую за $\frac{p}{q}$ дробь $\frac{P}{Q}$. Для неё верны соотношения $P = p + 2q$ и $Q = p + q$. Тогда

$$P^2 - 2Q^2 = (p + 2q)^2 - 2(p + q)^2 =$$

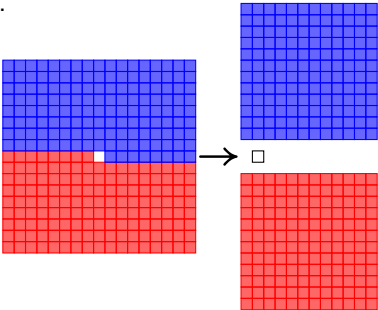
$$p^2 + 4pq + 4q^2 - 2p^2 - 4pq - 2q^2 =$$

$$2q^2 - p^2 = -(p^2 - 2q^2) = \mp 1.$$

Опять задача

Вернёмся к задаче о генерале и подразделениях. Изначальная задача имеет отрицательный ответ, т.к. для любых целых a и b $b^2 \neq 2a^2$.

Но если взять $b = p$ и $a = q$ из дробей выше, мы гарантированно можем добиться разницы между b^2 и $2a^2$ всего в одного солдата.



Спасибо за внимание!

Ссылка на эту презентацию: «Вокруг $\sqrt{2}$ »

Задать вопрос автору: todzhe@mail.ru