

Теория делимости

Е. И. Тодоров, Санкт-Петербургский Турнир
юных математиков

Чётность. Свойства

- Сложение: $\text{чёт.} + \text{чёт.} = \text{чёт.}$, $\text{неч.} + \text{неч.} = \text{чёт.}$,
 $\text{чёт.} + \text{неч.} = \text{неч.}$.
- Умножение: $\text{чёт.} \cdot \text{чёт.} = \text{чёт.}$, $\text{чёт.} \cdot \text{неч.} = \text{неч.}$,
 $\text{неч.} \cdot \text{неч.} = \text{чёт.}$.
- $\underbrace{\text{неч.} + \text{неч.} + \text{неч.} + \dots + \text{неч.} + \text{неч.}}_{\text{чёт.}} = \text{чёт.}$
- $\underbrace{\text{неч.} + \text{неч.} + \text{неч.} + \dots + \text{неч.} + \text{неч.}}_{\text{неч.}} = \text{неч.}$

Доказательство

$$\begin{aligned} & \underbrace{\text{неч.} + \text{неч.} + \text{неч.} + \dots + \text{неч.} + \text{неч.}}_{\text{чёт.}} = \\ & = (\text{неч.} + \text{неч.}) + (\text{неч.} + \dots + (\text{неч.} + \text{неч.})) = \\ & = \text{чёт.} + \text{чёт.} + \dots + \text{чёт.} = \text{чёт.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \underbrace{\text{неч.} + \text{неч.} + \text{неч.} + \dots + \text{неч.} + \text{неч.}}_{\text{неч.}} = \\ & = (\text{неч.} + \text{неч.}) + (\text{неч.} + \dots + \text{неч.}) + \text{неч.} = \\ & = \text{чёт.} + \text{чёт.} + \dots + \text{чёт.} + \text{неч.} = \text{неч.} \end{aligned}$$

Чётность. Задача 1

Сумма пяти натуральных чисел равняется 200. Может ли их произведение оканчиваться на 1999?

Решение

- Если число оканчивается на 1999, то оно нечётное.
- Произведение чисел нечётно только тогда, когда каждое число нечётно.
- Сумма пяти нечётных чисел нечётна, а 200 — чётное число. Беда.

Чётность. Задача 2

Произведение трёх натуральных чисел оканчивается на 20. Может ли их сумма быть равна 19?

Решение

Подойдут числа 2, 5 и 12: $2 + 5 + 12 = 19$ и $2 \cdot 5 \cdot 12 = 120$.

Чётность. Задача 3

Нескольким друзьям родители дают по конфете каждый раз, когда они получают или дарят подарок. Друзья целый месяц дарили подарки только друг другу. После этого они ссыпали все конфеты в один мешок, и так оказалась 221 конфета. Докажите, что кто-то из друзей ссыпал не все свои конфеты.

Решение

- Каждый раз при дарении по конфете получает и дарующий, и принимающий.
- Значит, общее количество конфет у детей в два раза больше числа дарений.
- Значит, общее количество должно быть чётным, а 221 нечётное. Беда.

Делимость

Целое число a делится на целое число b тогда и только тогда, когда существует целое число k такое, что $a = k \cdot b$. Договоримся в этом случае писать $a : b$.

Делимость. Свойства

- Для любого целого a верно $a : 1$.
- Для любого целого b верно $0 : b$.
- Для любых целых a , b и c если $a : b$ и $b : c$, то $a : c$.

Доказательство

- $b \div c$, значит, существует целое число n такое, что $b = n \cdot c$;
- $a \div b$, значит, существует целое число m такое, что $a = m \cdot b$;
- тогда $a = m \cdot (n \cdot c) = (m \cdot n) \cdot c$;
- но $l = m \cdot n$ — целое число;
- тогда $a = l \cdot c$, то есть $a \div c$. Победа.

Делимость. Ещё свойства

- Если $a : b$, то для любого целого k верно $ka : b$.
- Для любых целых a и c , если $a : b$ и $c : b$, то $(a + c) : b$.
- Для любых целых a и c , если $a : b$ и $c : b$, то $(a - c) : b$.

Доказательство

- $a \div b$, значит, существует целое число n такое, что $a = n \cdot b$;
- $c \div b$, значит, существует целое число m такое, что $c = m \cdot b$;
- тогда $a + c = n \cdot b + m \cdot b = (n + m) \cdot b$;
- но $l = n + m$ — целое число;
- тогда $a + c = l \cdot b$, то есть $(a + c) \div b$. Победа.

Делимость. Задача 4

Придумайте число, которое оканчивается на 13, делится на 13 и имеет сумму цифр 13.

Решение

- $1 + 3 = 4$. Остаётся набрать сумму цифр 9.
- Будем перебирать числа, делящиеся на 13, и смотреть на сумму цифр:

$$13 \rightarrow 4$$

$$26 \rightarrow 8$$

$$39 \rightarrow 12$$

$$52 \rightarrow 7$$

$$65 \rightarrow 11$$

$$78 \rightarrow 15$$

$$91 \rightarrow 10$$

$$104 \rightarrow 5$$

$$117 \rightarrow 9.$$

- Число $11713 = 11700 + 13 = 900 \cdot 13 + 13 = 901 \cdot 13$ — точно делится на 13. Победа.

Признаки делимости на 2 и 5

- Число делится на 2, если последняя цифра делится на 2.
- Число делится на 5, если последняя цифра делится на 5.
- Число делится на 2^n , если число, составленное из последних n цифр, делится на 2.
- Число делится на 5^n , если число, составленное из последних n цифр, делится на 5.

Доказательство

- Рассмотрим число $N = \overline{a_1 a_2 \dots a_k \underbrace{b_1 b_2 \dots b_n}_{n \text{ цифр}}}$.
- $N = \overline{a_1 a_2 \dots a_k \underbrace{00 \dots 0}_{n \text{ нулей}}} + \overline{b_1 b_2 \dots b_n}$.
- $N = \overline{a_1 a_2 \dots a_k} \cdot 10^n + \overline{b_1 b_2 \dots b_n}$.
- Первое слагаемое точно делится на 2^n . Если второе делится, то и N должно. И наоборот.

Признаки делимости 3 и 9

- Число делится на 3 Тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 3.
- Число делится на 9 Тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 9.

Доказательство

- Рассмотрим число \overline{abc} .
- Рассмотрим разность $\overline{abc} - (a + b + c) = 100 \cdot a + 10 \cdot b + c - a - b - c = 99 \cdot a + 9 \cdot b$.
- Разность числа и его суммы цифр точно делится на 9. Значит, если число \overline{abc} делилось на 9, то и его сумма цифр должна делиться. И наоборот.

Признаки делимости 11 и 7

- Число делится на 3 Тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 3.
- Число делится на 9 Тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 9.

