

# Математика НОН-СТОП: Новое в 2019 году

Б. А. Золотов, Д. Г. Штукенберг

Фонд «Время Науки»

10 декабря 2019

К чему фотографировать презентацию,  
когда можно её скачать

Слайды доступны по ссылке: <http://bit.ly/mns-seminar-11dec2019>

# Конструктивные задачи

Мы всё так же горячо любим задачи на приведение примера. Они наглядные и незамысловатые, при этом могут быть крайне разнообразными.

Разберём несколько таких задач — от более простых к более сложным.

# Простые, но не простые-простые

7 класс, 9А–В

Докажите, что для любого  $n$  существует натуральное число  $N$ , у которого ровно  $n$  различных натуральных делителей.

# Простые, но не простые-простые

7 класс, 9А–В

Докажите, что для любого  $n$  существует натуральное число  $N$ , у которого ровно  $n$  различных натуральных делителей.

В пункте **A** было  $n = 43$ . А ответ —

# Простые, но не простые-простые

7 класс, 9А–В

Докажите, что для любого  $n$  существует натуральное число  $N$ , у которого ровно  $n$  различных натуральных делителей.

В пункте **A** было  $n = 43$ . А ответ —

$$N = 2^{n-1}.$$

## 7 класс, 3А

На предприятии работают 50 человек, и они выбирают себе начальника. Есть две кандидатуры, Ваня и Даня. Про каждого работника известно заранее, кому он отдаёт предпочтение: 20 человек за Даню, 30 человек за Ваню.

Голосование проходит по двухтуровой системе: люди делятся на 5 групп по 10 человек, в каждой группе выбирается кандидат, наиболее популярный среди членов этой группы, и затем из 5 ответов выбирается имя, названное большее число раз.

Разделите работников на группы так, чтобы в большинстве групп выбрали Даню и он победил на выборах, несмотря на изначально меньшее число голосующих за него.

## 7 класс, 3А

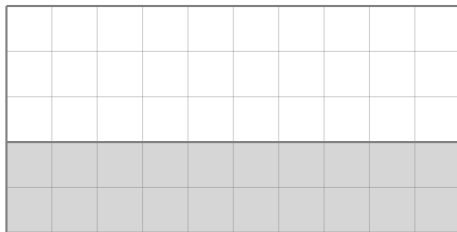
На предприятии работают 50 человек, и они выбирают себе начальника. Есть две кандидатуры, Ваня и Даня. Про каждого работника известно заранее, кому он отдаёт предпочтение: 20 человек за Даню, 30 человек за Ваню.

Голосование проходит по двухтуровой системе: люди делятся на 5 групп по 10 человек, в каждой группе выбирается кандидат, наиболее популярный среди членов этой группы, и затем из 5 ответов выбирается имя, названное большее число раз.

Разделите работников на группы так, чтобы в большинстве групп выбрали Даню и он победил на выборах, несмотря на изначально меньшее число голосующих за него.



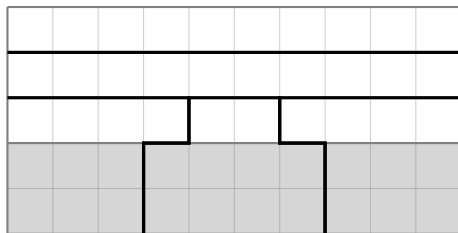
# Аксиомы выборов



За Ваню

За Даню

# Аксиомы выборов



За Ваню

За Даню

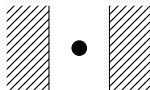
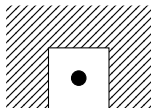
7 класс, 8С

Путник в лабиринте видит ситуацию вокруг. Помимо этого, никакой другой информации и памяти у него нет. Существует ли какой-нибудь набор правил, чтобы он, имея только эту информацию, мог дойти до финальной клетки в любом лабиринте?

7 класс, 8С

Путник в лабиринте видит ситуацию вокруг. Помимо этого, никакой другой информации и памяти у него нет. Существует ли какой-нибудь набор правил, чтобы он, имея только эту информацию, мог дойти до финальной клетки в любом лабиринте?

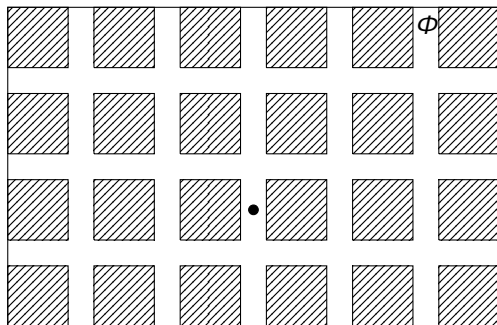
Заметим, что поведение путника однозначно определено в простых ситуациях:



Приведём решение без  $T$ -образных перекрёстков, чтобы о них не думать:

# Лабиринт

Приведём решение без  $T$ -образных перекрёстков, чтобы о них не думать:



## Много примеров

Мы попробовали просить участников привести *как можно больше* способов сделать что-либо — чем больше привёл, тем выше оценка. Порой точное возможное количество способов было не известно даже нам.

# Разрезай и властвуй

7 класс, 6С

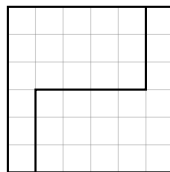
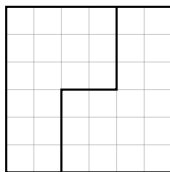
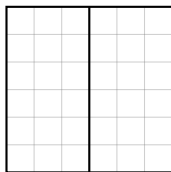
Предложите как можно больше разных способов разрезать квадрат  $6 \times 6$  на два одинаковых многоугольника по линиям сетки.



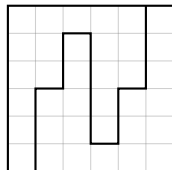
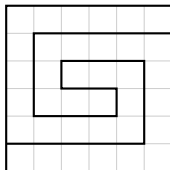
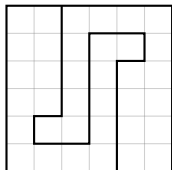
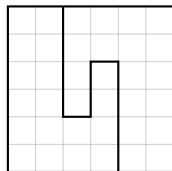
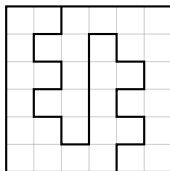
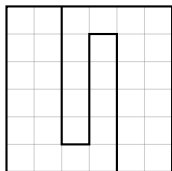
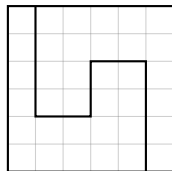
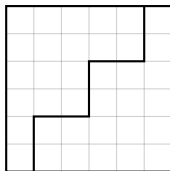
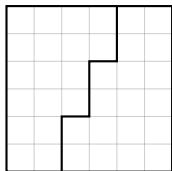
# Разрезай и властвуй

7 класс, 6С

Предложите как можно больше разных способов разрезать квадрат  $6 \times 6$  на два одинаковых многоугольника по линиям сетки.



# Разрезай и властвуй



## 6 класс, 8А

Перечислите как можно больше пар букв русского языка таких, что если написать эти буквы одна поверх другой, то их будет невозможно идентифицировать. Например, совершенно очевидно, что первая пара букв ниже — это А и Т, но про вторую пару не понятно, это В и Ъ или Р и Ъ.



(1)



(2)

## 6 класс, 8А

Перечислите как можно больше пар букв русского языка таких, что если написать эти буквы одна поверх другой, то их будет невозможно идентифицировать. Например, совершенно очевидно, что первая пара букв ниже — это А и Т, но про вторую пару не понятно, это В и Ъ или Р и Ь.



(1)



(2)

Понятно, что ВЪ, РЪ, РР — это одно и то же. А что ещё?

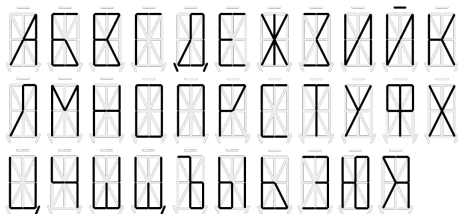
# Розеттский камень

Интересно попробовать формализовать данную задачу — понять, что значит написать букву.

# Розеттский камень

Интересно попробовать формализовать данную задачу — понять, что значит написать букву.

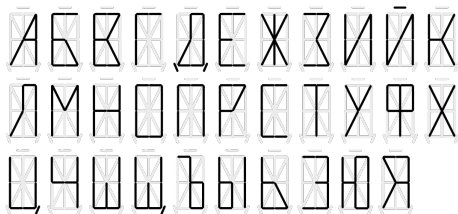
Рассмотрим *16-сегментный индикатор*:



# Розеттский камень

Интересно попробовать формализовать данную задачу — понять, что значит написать букву.

Рассмотрим *16-сегментный индикатор*:



Вспомним замеченное нами совпадение:

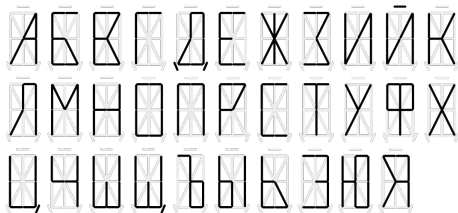
ЬР ЬЗ ЬВ СК СВ РЗ РВ РБ КЗ  
КЕ КВ КБ ЗЕ ЗВ ЗБ ЕВ ГВ ВБ



# Розеттский камень

Интересно попробовать формализовать данную задачу — понять, что значит написать букву.

Рассмотрим *16-сегментный индикатор*:



Вспомним замеченное нами совпадение:

ЬР ЬЗ ЬВ СК СВ РЗ РВ РБ КЗ  
КЕ КВ КБ ЗЕ ЗВ ЗБ ЕВ ГВ ВБ



ЮТ ЮП ЮГ ; ЮЗ ЮВ ; ЭК ЭВ ЧВ НЗ НВ ; ЬС ЬЕ ЬГ ЬБ СБ ЕБ ГБ ; ЧЙ НЙ ; ЮЪ ЮФ ; СР РЕ ; ЧМ НМ ; ЯМ ЯИ ; ПЙ ЙГ ; ЪХ ; БУ ; ШЧ ШН ; СЗ ЗГ ; СЙ ОЙ ; ШЖ ЦЖ ; СМ ОМ ; ПЛ ЛГ ; ЭИ СА ОА ; ЧР РН ; ЬФ ФБ ; ЮХ ЮЖ ; ХЖ УЖ ; ЪЩ ЪЦ ; ФС ФЕ ; ЧК НК ; ЦС ЦП ЦО ЦГ ; УМ УИ МИ ; ЭЪ ЭБ ЧБ НБ ; ЪЧ ЪН ; ЩФ ЦФ ; ЧП ЧГ ПН НГ ; ПА ГА ; ЪХ ЪЖ ; ЪЗ ЪВ ШВ ; ЪЫ ЪШ ; ПМ МГ ; ЩС ЩП ЩО ЩГ ; ЪП ЪГ ; ЪТ ЪБ ; ПИ ИГ ; ЪЩ ЪЦ ; ХМ ХИ ; ЮЩ ЮЦ ; СЕ ЕГ ; ЭН ЭЕ ЧС ЧО ЧЕ СН ОН НЕ ; ЯЪ ЯБ ; ЯС ЯО ; ХФ ФЖ ; ЧФ ЧТ ; ШШ ШЦ ; ШЦ ; РК КГ ; ШС ШП ШО ШГ ; ЪС ЪО ЪЕ ШЕ ; ШТ ЦТ ; СЛ ОЛ ; ХТ ТЖ ; ЮЧ ЮН ; ЮД ЪД ; ЮЭ ШФ ФО ; ХК УК ; ЭЪ ЭТ ; ШТ ТО ; ПЗ ОЗ ; УЙ МЙ ; МВ МБ ; МЖ ИЖ ; ЯУ ЯА ; ХЕ ХВ ХБ УВ УБ ; ПЕ ОЕ ; СИ ОИ ; ХЗ УЗ ; ЪП ЪО ПБ ОБ ; ЖЕ ЖВ ЖБ ; ЪР ЪЗ ЪВ СК СВ РЗ РВ РБ КЗ КЕ КВ КБ ЗЕ ЗВ ЗБ ЕВ ГВ ВБ ; ЪЧ ЪН ; ЧИ НИ НА ; ФП ФН ТН ; СП СО ПО ОГ ; ЪБ ШБ ; ЪВ ЪБ ; ЧЦ ЦН ; ЮЫ ЮШ ; ВА БА ; ЯЗ ЭХ ; ЮС ЮО ЮЕ ; ЩЧ ЩН ; ЭС ЭП ЭО ЭГ ; СД ПД ОД ДГ ; ШД ШД ; ИВ ; ИБ ; ПВ ОК ОВ ; ЯП ЯГ



На «Математике НОН-СТОП» мы, разумеется, предлагаем задачи и для детей с некоторым опытом занятия в математических кружках — таким участникам также не будет скучно.

7 класс, 4С

Кого больше в двоичной записи чисел от 0 до  $2^n - 1$  — единиц или нулей?  
Ответ объясните.

7 класс, 4С

Кого больше в двоичной записи чисел от 0 до  $2^n - 1$  — единиц или нулей?  
Ответ объясните.

Нужно придумать однозначное соответствие между единицами и нулями, в котором участвуют все нули, но не все единицы.

Но можно проще и изящнее:

Рассмотрим все возможные комбинации из  $n$  нулей или единиц. В их записи, очевидно, встретится равное количество единиц и нулей. Чтобы получить записи чисел, отбросим все ведущие нули.

8 класс, 1С

Докажите, что максимальная возможная площадь  $n$ -угольника, все стороны которого имеют длину 1, меньше, чем максимальная возможная площадь  $n + 1$ -угольника, все стороны которого имеют длину 1.

8 класс, 1С

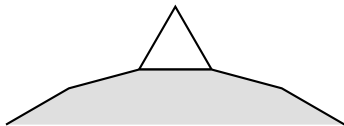
Докажите, что максимальная возможная площадь  $n$ -угольника, все стороны которого имеют длину 1, меньше, чем максимальная возможная площадь  $n + 1$ -угольника, все стороны которого имеют длину 1.

Дети же не знают, что максимальную площадь имеют правильные  $n$ -угольники.

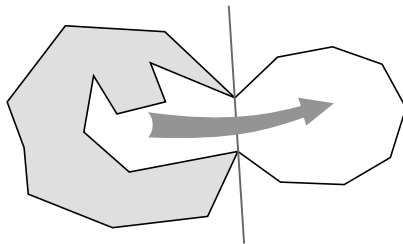
Для каждого многоугольника с  $n$  сторонами длины 1 построим многоугольник с  $n + 1$  сторонами, площадь которого больше.

# Карфаген *(Широкий не значит высокий)*

Если выпуклый



Если невыпуклый



# Меняем правила под себя

Рассмотрим следующую задачу, формулирующуюся самым классическим образом:

8 класс, 10С

В кучке  $N$  камней. За ход из неё можно вынуть

$1, 2, 3, \dots, a-1, \not{a}, a+1, \dots, n$  камней.

(То есть любое число от 1 до  $n$ , кроме  $a$ .) Играют двое, и проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре (в зависимости от чисел  $N, n, a$ )?

# Меняем правила под себя

Рассмотрим следующую задачу, формулирующуюся самым классическим образом:

8 класс, 10С

В кучке  $N$  камней. За ход из неё можно вынуть

$1, 2, 3, \dots, a-1, \not{a}, a+1, \dots, n$  камней.

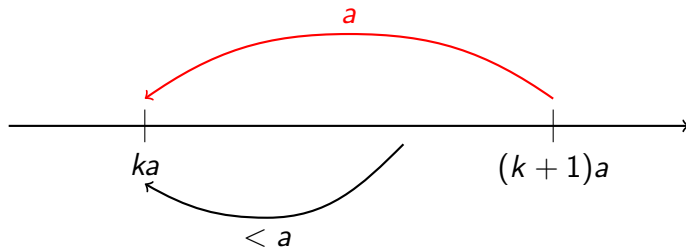
(То есть любое число от 1 до  $n$ , кроме  $a$ .) Играют двое, и проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре (в зависимости от чисел  $N, n, a$ )?

Задача решается методом *анализа позиций*: не бывает ходов из проигрышной позиции в проигрышную.



# Меняем правила под себя

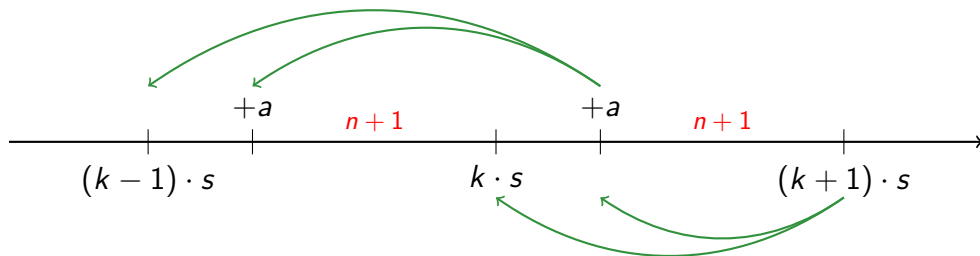
$a > \frac{n}{2}$ : проигрышные позиции —  $k \cdot a$ .



# Меняем правила под себя

$a \leq \frac{n}{2}$ : проигрышные позиции —  $k \cdot (n + a + 1)$ ,  $k \cdot (n + a + 1) + a$ .

Обозначим  $s := n + a + 1$ .



## Чтение и *изменение* авторского условия

Мы уже давали задачи, значительная часть решения которых заключалась в их вдумчивом прочтении.

Теперь мы пошли дальше и предложили участникам скорректировать наши условия. Для этого по сути нужно решить задачу «задом наперёд».

## 7 класс, 10В

В августе Саар планирует доехать от Бишкека до Астаны. Она проехала уже 1210 километров. Сверившись с картой, она поняла, что ей осталось ехать втрое больше, чем расстояние, которое проедет машина, в 4 раза более быстрая, чем Саар, за время от текущего момента до момента, когда Саар останется столько же, сколько она проехала сейчас.

Каково расстояние между Бишкеком и Астаной?

## 7 класс, 10В

В августе Саар планирует доехать от Бишкека до Астаны. Она проехала уже 1210 километров. Сверившись с картой, она поняла, что ей осталось ехать втрое больше, чем расстояние, которое проедет машина, в 4 раза более быстрая, чем Саар, за время от текущего момента до момента, когда Саар останется столько же, сколько она проехала сейчас.

Каково расстояние между Бишкеком и Астаной?

Пусть осталось ехать  $t$  км. До момента, когда останется 1210,  $t - 1210$  км.

$$t = 3 \cdot 4 \cdot (t - 1210), \quad 11t = 12 \cdot 1210, \quad t = 1320.$$

$$1320 + 1210 = 2530.$$

7 класс, 10С

Замените числа 1210 и 4 в условии пункта **В** на какие-то другие так, чтобы ответ в задаче составил 1400 километров — настоящее расстояние между Бишкеком и Астаной.

## 7 класс, 10С

Замените числа 1210 и 4 в условии пункта **В** на какие-то другие так, чтобы ответ в задаче составил 1400 километров — настоящее расстояние между Бишкеком и Астаной.

$A$  — сколько уже проехали,  $c$  — отношение скоростей машины и велосипеда.

$$t = 3c \cdot (t - A), \quad t = \frac{3cA}{3c - 1}.$$
$$A + t = A + \frac{3cA}{3c - 1} = A \cdot \frac{6c - 1}{3c - 1} = 1400.$$

Например,  $A = 100$ ,  $c = \frac{13}{36}$ .

# Ещё проще, ещё доступнее

«Математика НОН-СТОП» — олимпиада для всех, и любой участник найдёт в ней то, что сможет решить.

Разберём несколько задач, доступных каждому.



# Конференция анонимных геометров

5 класс, 1А

В комнату, имеющую форму правильного 12-угольника, заходят 124 любителя вычислительной геометрии. Как рассадить их вдоль стен этой комнаты так, чтобы у каждой стены сидело ровно по 11 любителей вычислительной геометрии?

Любителей геометрии можно сажать и в углы комнаты — но не более чем по одному геометру на угол.

# Конференция анонимных геометров

5 класс, 1А

В комнату, имеющую форму правильного 12-угольника, заходят 124 любителя вычислительной геометрии. Как рассадить их вдоль стен этой комнаты так, чтобы у каждой стены сидело ровно по 11 любителей вычислительной геометрии?

Любителей геометрии можно сажать и в углы комнаты — но не более чем по одному геометру на угол.

$12 \cdot 11 - 124 = 8$ . Значит, что в какие-то 8 углов из 12 надо будет посадить геометров.

# Незакрученный удар

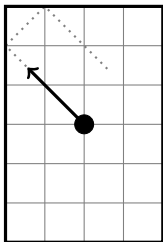
4 класс, 2А

Шарик катается по прямоугольнику, не замедляясь. Когда он подъезжает к краю прямоугольника, он отскакивает от него и продолжает движение. В каком положении окажется шарик, будучи запущенным из центра прямоугольника на рисунке, после того как он проедет 24 клетки по диагонали?

# Незакрученный удар

4 класс, 2А

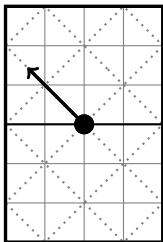
Шарик катается по прямоугольнику, не замедляясь. Когда он подъезжает к краю прямоугольника, он отскакивает от него и продолжает движение. В каком положении окажется шарик, будучи запущенным из центра прямоугольника на рисунке, после того как он проедет 24 клетки по диагонали?



# Незакрученный удар

4 класс, 2А

Шарик катается по прямоугольнику, не замедляясь. Когда он подъезжает к краю прямоугольника, он отскакивает от него и продолжает движение. В каком положении окажется шарик, будучи запущенным из центра прямоугольника на рисунке, после того как он проедет 24 клетки по диагонали?



Раз в 6 клеток пересекает  
горизонтальную среднюю линию

Мы едем, едем, едем, едем, едем, едем...

5 класс, 6А

Проездной на месяц позволяет его владельцу ездить на метро неограниченное число раз, стоимость проездного фиксирована и одинакова в любом месяце. Укажите, какова должна быть стоимость проездного, чтобы при двух ежедневных поездках он не окупался бы в феврале, но окупался бы в октябре? Стоимость разовой поездки в метро равна 45 рублям.

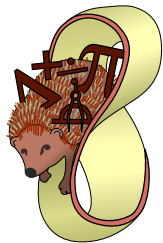
Мы едем, едем, едем, едем, едем, едем...

5 класс, 6А

Проездной на месяц позволяет его владельцу ездить на метро неограниченное число раз, стоимость проездного фиксирована и одинакова в любом месяце. Укажите, какова должна быть стоимость проездного, чтобы при двух ежедневных поездках он не окупался бы в феврале, но окупался бы в октябре? Стоимость разовой поездки в метро равна 45 рублям.

Октябрь длиннее февраля, поэтому может быть совершено больше поездок. Проездной, таким образом, может быть дешевле стоимости 62 поездок, но дороже стоимости 56 поездок.

$$28 \cdot 45 \cdot 2 = 2520 < S < 2790 = 31 \cdot 45 \cdot 2.$$



Спасибо за внимание!

Фонд «Время Науки», 2019