

Функция Эйлера

Б. А. Золотов, «Математика НОН-СТОП»

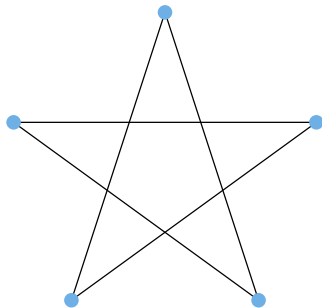
Фонд «Время Науки»

весна 2021

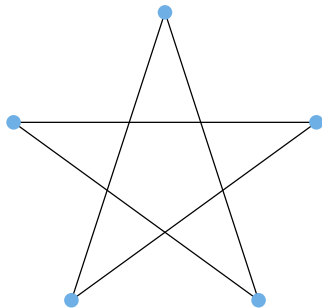
Зачем вести конспект,
когда можно скачать презентацию

Слайды доступны по ссылке: <http://bit.ly/mns-euler>

На 9 мая все рисовали звезду

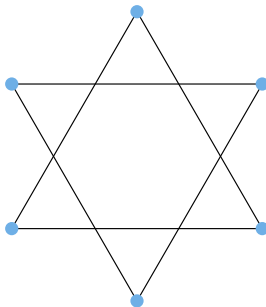


На 9 мая все рисовали звезду



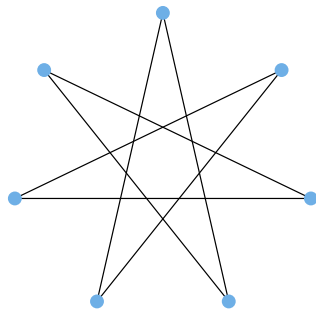
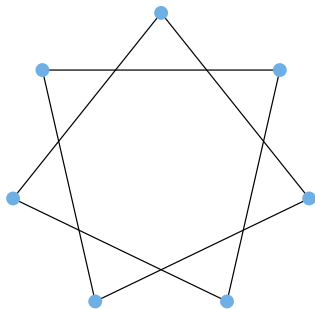
- 1 Состоит из одной ломаной — рисуется одним росчерком пера;
- 2 Соединяет любые две точки на расстоянии 2.

И другую звезду

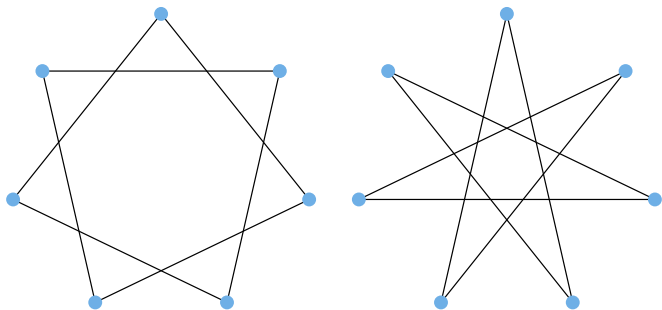


- 1 Состоит уже из двух ломаных;
- 2 Соединяет любые две точки на расстоянии 2.

Для 7 точек интересных звёзд уже несколько



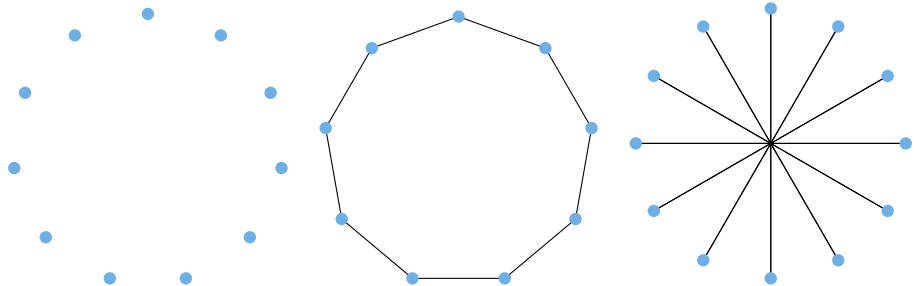
Для 7 точек интересных звёзд уже несколько



Введём обозначение: это $(7, 2)$ - и $(7, 3)$ -звёзды.

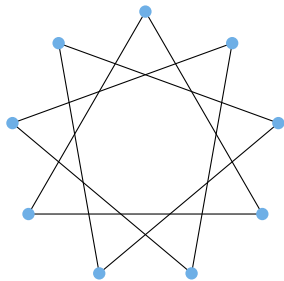
Их же будем называть $(7, 5)$ и $(7, 4)$.

Неинтересные звёзды — тоже звёзды

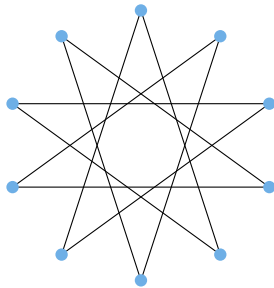


Звёзды для 0, 1, $n/2$.

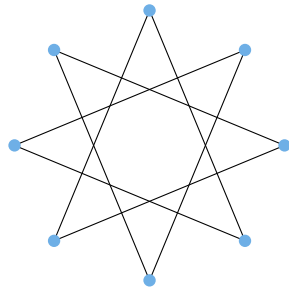
Ещё примеры



$(9, 3)$ — 3 ломаных



$(10, 4)$ — 2 ломаных



$(8, 3)$ — 1 ломаная

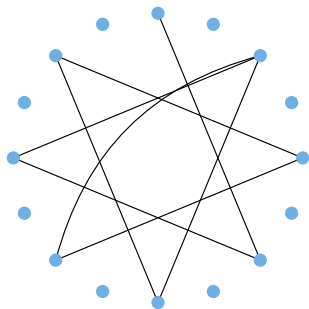
- 1 Из скольки ломаных состоит (n, k) -звезда?
- 2 Сколько звёзд состоят ровно из m ломаных?
- 3 Можно ли из этого получить интересный математический факт?

Будем следить за одной ломаной

По принципу Дирихле, рано или поздно она придёт в точку, в которой уже была.

Будем следить за одной ломаной

По принципу Дирихле, рано или поздно она придёт в точку, в которой уже была.



На самом деле, это будет точка, из которой ломаная начиналась.

Количество вершин в одной ломаной

Ломаная прошла целое число оборотов. Если дело происходит в (n, k) -звезде, в одной ломаной r вершин, тогда

$$k \cdot r \div n.$$

Минимальное такое число r :

$$r = \frac{n}{\text{НОД}(n, k)}.$$

Количество вершин в одной ломаной

Ломаная прошла целое число оборотов. Если дело происходит в (n, k) -звезде, в одной ломаной r вершин, тогда

$$k \cdot r \div n.$$

Минимальное такое число r :

$$r = \frac{n}{\text{НОД}(n, k)}.$$

Теорема

(n, k) -звезда состоит из $\text{НОД}(n, k)$ ломаных.

Количество звёзд с d ломаными

Количество чисел k : $\text{НОД}(n, k) = d$.

Количество звёзд с d ломаными

Количество чисел k : $\text{НОД}(n, k) = d$.

Поделим всё на d : мы ищем числа от 1 до $\frac{n}{d}$, *взаимно простые* с $\frac{n}{d}$ (мы исчерпали общий делитель делением на d).

Количество таких чисел обозначается $\varphi\left(\frac{n}{d}\right)$.

Количество звёзд с d ломаными

Количество чисел k : $\text{НОД}(n, k) = d$.

Поделим всё на d : мы ищем числа от 1 до $\frac{n}{d}$, *взаимно простые* с $\frac{n}{d}$ (мы исчерпали общий делитель делением на d).

Количество таких чисел обозначается $\varphi\left(\frac{n}{d}\right)$.

Теорема

$$\sum_{n \vdash d} \varphi\left(\frac{n}{d}\right) = n.$$

Функция Эйлера: примеры

$$\varphi(10) = 4 \qquad 1, 3, 7, 9$$

$$\varphi(5) = 4 \qquad 1, 2, 3, 4$$

$$\varphi(2) = 1 \qquad 1$$

$$\varphi(1) = 1 \qquad 1$$

$$4 + 4 + 1 + 1 = 10$$

Функция Эйлера: базовые свойства

Теорема

$$\varphi(p) = p - 1$$

Все числа от 1 до $p - 1$.

Функция Эйлера: базовые свойства

Теорема

$$\varphi(p) = p - 1$$

Все числа от 1 до $p - 1$.

Теорема

$$\varphi(p^k) =$$

Функция Эйлера: базовые свойства

Теорема

$$\varphi(p) = p - 1$$

Все числа от 1 до $p - 1$.

Теорема

$$\varphi(p^k) = p^k \cdot \frac{p - 1}{p}$$

Быть взаимно простым с p^k — то же, что не делиться на p . Каждое p -ое число делится на p .

$\varphi(n)$ чётно при $n \neq 1$

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

Числа, взаимно простые с 10, расположены симметрично.

$\varphi(n)$ чётно при $n \neq 1$

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

Числа, взаимно простые с 10, расположены симметрично.

Теорема

$$\text{НОД}(n, k) = \text{НОД}(n, n - k)$$

Доказательство: общие делители чисел в паре слева и в паре справа одни и те же. Эта теорема называется *алгоритм Евклида*.

$\varphi(n)$ чётно при $n \neq 1$

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

Если n чётно, то посередине будет находиться число $\frac{n}{2}$,
которое *не* взаимно просто с n . Если n нечётно,
то чисел $1 \dots n - 1$ — чётное количество.

Формула для функции Эйлера

$n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \dots \cdot p_m^{k_m}$ — разложение на простые.

Теорема

$$\varphi(n) = n \cdot \frac{p_1 - 1}{p_1} \cdot \frac{p_2 - 1}{p_2} \cdot \dots \cdot \frac{p_m - 1}{p_m}$$

Формула для функции Эйлера

$n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \dots \cdot p_m^{k_m}$ — разложение на простые.

Теорема

$$\varphi(n) = n \cdot \frac{p_1 - 1}{p_1} \cdot \frac{p_2 - 1}{p_2} \cdot \dots \cdot \frac{p_m - 1}{p_m}$$

Идея доказательства: выкинуть все числа, делящиеся на p_1 . Затем выкинуть все числа, делящиеся на p_2 , которые не были выкинуты ранее (например, не выкинуть $p_1 p_2$ ещё раз). Затем выкинуть все числа, делящиеся на $p_3 \dots$

Выкидываем делящиеся на p_1

Каждое p_1 -ое число делится на p_1 . Разделим n на блоки по p_1 чисел, из каждого выкинем по одному числу.

Останется

$$n \cdot \frac{p_1 - 1}{p_1}.$$

Это должно напоминать формулу $\varphi(p^k)$.

Выкидываем делящиеся на p_k

Требуется оставить числа, которые не делятся на p_k ,
а также не делятся ни на одно из чисел p_1, \dots, p_{k-1} .

$x \div p_i \iff p_k \cdot x \div p_i$. Отсюда доля чисел, делящихся
на p_1, \dots, p_{k-1} , одинакова *вообще* и среди чисел, кратных p_k .
А, значит, и среди чисел, не кратных p_k .

$$n \cdot \underbrace{\frac{p_k - 1}{p_k}}_{\substack{\text{считаем} \\ \text{долю среди} \\ \text{не кратных } p_k}} \cdot \left(\underbrace{\frac{p_1 - 1}{p_1} \cdot \dots \cdot \frac{p_{k-1} - 1}{p_{k-1}}}_{\text{выяснили ранее}} \right)$$

Мультипликативность функции Эйлера

$$\varphi(n) = n \cdot \frac{p_1 - 1}{p_1} \cdot \frac{p_2 - 1}{p_2} \cdot \dots \cdot \frac{p_m - 1}{p_m}$$

Теорема

Если числа a и b взаимно просты, то $\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$.

Упражнение: сперва доказать мультипликативность φ ,
а потом из неё вывести формулу.