

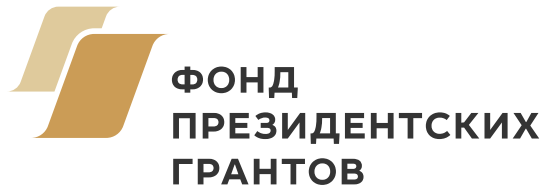
Методические приёмы составления задач олимпиады

Б. А. Золотов, «Математика НОН-СТОП»

Фонд «Время Науки»

8 ноября 2020

В 2020–2021 гг. олимпиада «Математика НОН-СТОП» проводится с использованием гранта Президента Российской Федерации на развитие гражданского общества, предоставленного **Фондом президентских грантов.**



История олимпиады

- 2010 — первая олимпиада;
- 2016 — 400 участников пишут базовый вариант, 92 — профильный;
— поддержка Фонда «Время Науки»;
- 2018 — 847 участников пишут базовый вариант, 128 — профильный;
— включение в Перечень региональных олимпиад и конкурсов интеллектуальной направленности;
— поддержка Фонда Президентских грантов, Комитета по образованию СПб;
- 2019 — выход сборника задач;
— площадки в Бердске (Новосибирская обл.) и Гомеле (Беларусь);
- 2021 — Калининград, Москва.

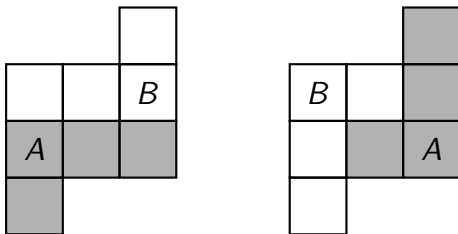
- Более 20 площадок;
- количество участников — около 2500;
- Санкт-Петербург, Бердск (Новосибирская обл.),
Нов. Уренгой (ЯНАО), Гатчина (ЛО),
Москва, Реутов, Бол. Исаково;
- проблемы с часовыми поясами.

2020-5-1C

Можно ли нарисовать на клетчатом листе бумаги такую фигуру, которую можно разрезать по линиям сетки на две *одинаковые* фигуры двумя способами — причём фигуры в первом и во втором способе были бы одни и те же, но линии разреза выглядели бы по-разному?

2020-5-1С

Можно ли нарисовать на клетчатом листе бумаги такую фигуру, которую можно разрезать по линиям сетки на две *одинаковые* фигуры двумя способами — причём фигуры в первом и во втором способе были бы одни и те же, но линии разреза выглядели бы по-разному?



Сумма цифр

2017-8-2С

Придумайте (или расскажите, как построить) 95-значное число, в котором нет нулей и которое делится на свою сумму цифр.

2017-8-2C

Придумайте (или расскажите, как построить) 95-значное число, в котором нет нулей и которое делится на свою сумму цифр.

Придумаем число, делящееся на $144 = 9 \cdot 16$:

$$\underbrace{\dots\dots\dots}_{\text{разрядов} - 91,} 3232.$$

$\sum \text{цифр} - 134$

2019-7-8C

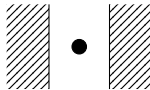
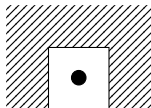
Путник в лабиринте видит ситуацию вокруг. Помимо этого, никакой другой информации и памяти у него нет. Существует ли какой-нибудь набор правил, чтобы он, имея только эту информацию, мог дойти до финальной клетки в любом лабиринте?

Лабиринт

2019-7-8С

Путник в лабиринте видит ситуацию вокруг. Помимо этого, никакой другой информации и памяти у него нет. Существует ли какой-нибудь набор правил, чтобы он, имея только эту информацию, мог дойти до финальной клетки в любом лабиринте?

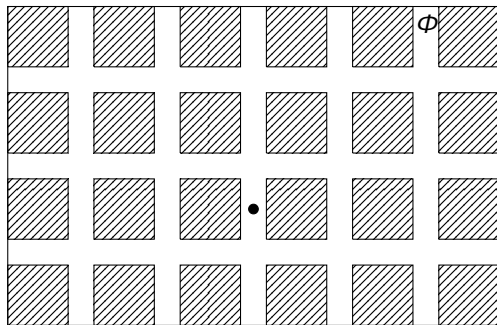
Заметим, что поведение путника однозначно определено в простых ситуациях:



Приведём решение без T -образных перекрёстков, чтобы о них не думать:

Лабиринт

Приведём решение без T -образных перекрёстков, чтобы о них не думать:



2019-7-3A

На предприятии работают 50 человек, и они выбирают себе начальника. Есть две кандидатуры, Ваня и Даня. Про каждого работника известно заранее, кому он отдаёт предпочтение: 20 человек за Даню, 30 человек за Ваню.

Голосование проходит по двухтуровой системе: люди делятся на 5 групп по 10 человек, в каждой группе выбирается кандидат, наиболее популярный среди членов этой группы, и затем из 5 ответов выбирается имя, названное большее число раз.

Разделите работников на группы так, чтобы в большинстве групп выбрали Даню и он победил на выборах, несмотря на изначально меньшее число голосующих за него.

2019-7-3А

На предприятии работают 50 человек, и они выбирают себе начальника. Есть две кандидатуры, Ваня и Даня. Про каждого работника известно заранее, кому он отдаёт предпочтение: 20 человек за Даню, 30 человек за Ваню.

Голосование проходит по двухтуровой системе: люди делятся на 5 групп по 10 человек, в каждой группе выбирается кандидат, наиболее популярный среди членов этой группы, и затем из 5 ответов выбирается имя, названное большее число раз.

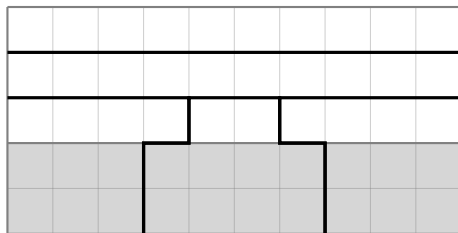
Разделите работников на группы так, чтобы в большинстве групп выбрали Даню и он победил на выборах, несмотря на изначально меньшее число голосующих за него.

Аксиомы выборов

За Ваню

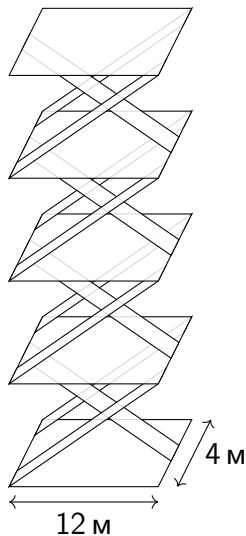
За Даню

Аксиомы выборов



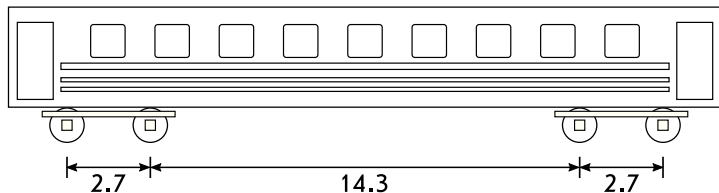
За Ваню

За Даню



В торговом центре «Атмосфера» пять этажей. Соседние этажи соединяют по три эскалатора. По утрам администратор запускает каждый из эскалаторов вверх или вниз. Способ запустить эскалаторы *хороший*, если с любого этажа можно добраться до любого, не проходя ни по одному из этажей более 5 метров. Приведите пример; сколько всего хороших способов ? ($2 \cdot 3^4 = 162$.)

Рельсовый автобус (одновагонный поезд) длиной 24.5 метра с четырьмя колёсными парами. Пары расположены на расстоянии 2.7 метра друг от друга, а между тележками — 14.3 метра.



Можно ли подобрать длины трёх звеньев между длинными плетями так, чтобы стук был равномерным, с одинаковыми паузами между ударами?

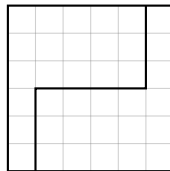
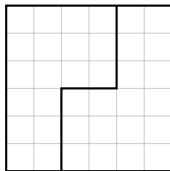
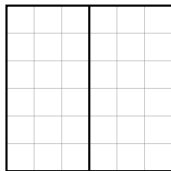
2019-7-6C

Предложите как можно больше разных способов разрезать квадрат 6×6 на два одинаковых многоугольника по линиям сетки.

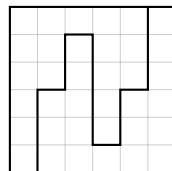
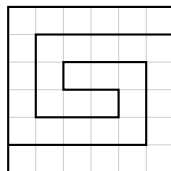
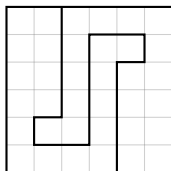
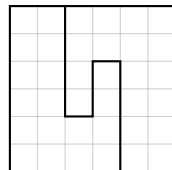
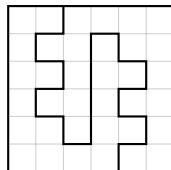
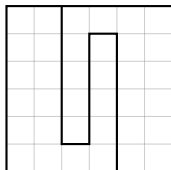
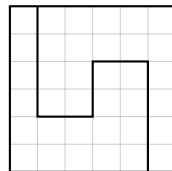
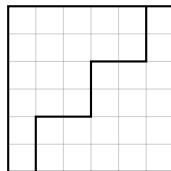
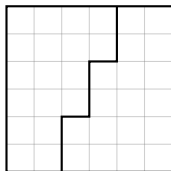
Разрезай и властвуй

2019-7-6С

Предложите как можно больше разных способов разрезать квадрат 6×6 на два одинаковых многоугольника по линиям сетки.



Разрежь и властвуй



Выпишем все числа от одного до десяти — но не в привычном порядке возрастания, а в алфавитном порядке: восемь, два, девять, десять, один, пять, семь, три, четыре, шесть.

2020-6-4B

Числа от 1 до 10'000'000'000 (десять миллиардов) выписали в алфавитном порядке. Перечислите первые десять из них.

Выпишем все числа от одного до десяти — но не в привычном порядке возрастания, а в алфавитном порядке: восемь, два, девять, десять, один, пять, семь, три, четыре, шесть.

2020-6-4В

Числа от 1 до 10'000'000'000 (десять миллиардов) выписали в алфавитном порядке. Перечислите первые десять из них.

- (1) 18 (2) 18 миллионов (3) 18 миллионов 18 (4) 18 миллионов 18 тысяч
(5) 18 миллионов 18 тысяч 18 (6) ... восемь (7) ... восемьдесят
(8) ... 88 (9) ... 82 (10) ... 89.

Бинарные операции

2021-7-9A

Определим операцию \star для положительных чисел a и b следующим образом: $a \star b = \frac{ab}{a+b}$.

Докажите, что $(a \star b) \star c = a \star (b \star c)$.

Бинарные операции

2021-7-9A

Определим операцию \star для положительных чисел a и b следующим образом: $a \star b = \frac{ab}{a+b}$.

Докажите, что $(a \star b) \star c = a \star (b \star c)$.

2021-7-9B

Посчитайте $1 \star (2 \star (4 \star (\dots \star (256 \star (512 \star 1024)) \dots)))$.

Бинарные операции

2021-7-9A

Определим операцию \star для положительных чисел a и b следующим образом: $a \star b = \frac{ab}{a+b}$.

Докажите, что $(a \star b) \star c = a \star (b \star c)$.

2021-7-9B

Посчитайте $1 \star (2 \star (4 \star (\dots \star (256 \star (512 \star 1024)) \dots)))$.

Перерасставим скобки:

$$\begin{aligned} (\dots ((1 \star 2) \star 4) \star \dots) \star 1024 &= \left(\dots \left(\frac{2}{3} \star 4 \right) \star \dots \right) \star 1024 = \\ &= \left(\dots \frac{4}{7} \star \dots \right) \star 1024 = \frac{1024}{2047}. \end{aligned}$$

То ли индийцам, то ли арабам

2021-7-3В

Любое число сравнимо по модулю 7 с нулём или 10^k

То ли индийцам, то ли арабам

2021-7-3В

Любое число сравнимо по модулю 7 с нулём или 10^k

2021-7-3С

Придумать число, которое при умножении на 2 продолжает состоять из тех же цифр, но в другом порядке

То ли индийцам, то ли арабам

2021-7-3В

Любое число сравнимо по модулю 7 с нулём или 10^k

2021-7-3С

Придумать число, которое при умножении на 2 продолжает состоять из тех же цифр, но в другом порядке

- 1 Период чисел $\frac{2}{7} \dots \frac{6}{7}$ — сдвиг периода числа $\frac{1}{7}$.
- 2 Нет переноса через разряд при умножении, потому что тогда изменилась бы целая часть.

2021-4-5A

Спортсмен Жан-Грожан ест семь раз в день: нулевой завтрак, первый завтрак, второй завтрак, подобед, надобед, недоужин и переужин. Его нулевой завтрак обыкновенно составляет 1400 ккал, после этого ему остаётся съесть 6600 ккал, чтобы достичь дневной нормы для спортсменов, тем более таких видных и обаятельных.

Но сегодня годовщина изобретения микроволновки. В честь этого события норма калорий для Жана-Грожана уменьшена вдвое. К сожалению, до Жана-Грожана эту информацию донесли только после нулевого завтрака. Сколько теперь калорий остаётся на остальные шесть приёмов пищи?

2021-4-5A

Спортсмен Жан-Грожан ест семь раз в день: нулевой завтрак, первый завтрак, второй завтрак, подобед, надобед, недоужин и переужин. Его нулевой завтрак обыкновенно составляет 1400 ккал, после этого ему остаётся съесть 6600 ккал, чтобы достичь дневной нормы для спортсменов, тем более таких видных и обаятельных.

Но сегодня годовщина изобретения микроволновки. В честь этого события норма калорий для Жана-Грожана уменьшена вдвое. К сожалению, до Жана-Грожана эту информацию донесли только после нулевого завтрака. Сколько теперь калорий остаётся на остальные шесть приёмов пищи?

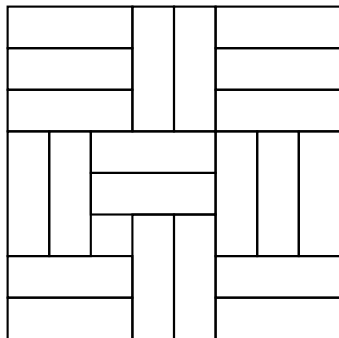
$$(1400 + 6600)/2 - 1400 = 2600$$

2021-5-5A

Покажите, как покрыть доску 8×8 , используя 21 прямоугольник 1×3 (или 3×1) и один квадратик 1×1 .

2021-5-5A

Покажите, как покрыть доску 8×8 , используя 21 прямоугольник 1×3 (или 3×1) и один квадратик 1×1 .



Незакрученный удар

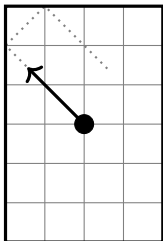
2019-4-2А

Шарик катается по прямоугольнику, не замедляясь. Когда он подъезжает к краю прямоугольника, он отскакивает от него и продолжает движение. В каком положении окажется шарик, будучи запущенным из центра прямоугольника на рисунке, после того как он проедет 24 клетки по диагонали?

Незакрученный удар

2019-4-2А

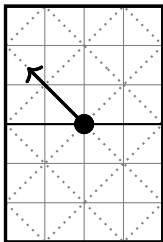
Шарик катается по прямоугольнику, не замедляясь. Когда он подъезжает к краю прямоугольника, он отскакивает от него и продолжает движение. В каком положении окажется шарик, будучи запущенным из центра прямоугольника на рисунке, после того как он проедет 24 клетки по диагонали?



Незакрученный удар

2019-4-2A

Шарик катается по прямоугольнику, не замедляясь. Когда он подъезжает к краю прямоугольника, он отскакивает от него и продолжает движение. В каком положении окажется шарик, будучи запущенным из центра прямоугольника на рисунке, после того как он проедет 24 клетки по диагонали?



Раз в 6 клеток пересекает
горизонтальную среднюю линию

Направления, которые мы обсудили сегодня

- (1) Конструктивные задачи
- (2) Задачи, вдохновлённые реальными явлениями
- (3) Задачи на приведение *множества* примеров
- (4) Самые сложные задачи для детей с опытом
- (5) Самые простые задачи, которые *решат все*

Спасибо за внимание!

(*) Заявки на разбор задач с mathnonstop.ru