

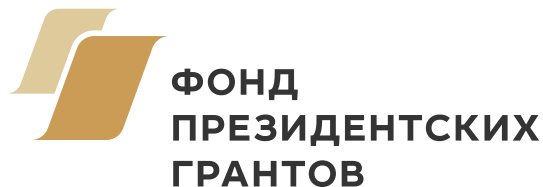
Принципы составления заданий и система оценивания Олимпиады «Математика НОН-СТОП»

Сибирь

Методическая комиссия Олимпиады

3 марта 2021 г.

В 2020–2021 гг. олимпиада «Математика НОН-СТОП» проводится с использованием гранта Президента Российской Федерации на развитие гражданского общества, предоставленного Фондом президентских грантов.



История олимпиады

- 2010 — первая олимпиада;
- 2016 — 400 участников пишут базовый вариант, 92 — профильный;
— поддержка Фонда «Время Науки»;
- 2018 — 847 участников пишут базовый вариант, 128 — профильный;
— включение в Перечень региональных олимпиад и конкурсов интеллектуальной направленности;
— поддержка Фонда Президентских грантов, Комитета по образованию СПб;
- 2019 — выход сборника задач;
— площадки в Бердске (Новосибирская обл.) и Гомеле (Беларусь);

Статистика олимпиады

- 12 площадок (на 2021 год — 25 соглашений);
- количество участников — около 2000;
- Санкт-Петербург, Бердск (Новосибирская обл.), Реутов, Нов. Уренгой (ЯНАО), Гатчина (ЛО), Самара, Гомель (Беларусь), Донецк, Калининград;
- две страны;
- проблемы с часовыми поясами.

Аксиомы выборов

Условие

На предприятии работают 50 человек, и они выбирают себе начальника. Есть две кандидатуры, Ваня и Даня. Про каждого работника известно заранее, кому он отдаёт предпочтение: 20 человек за Даню, 30 человек за Ваню.

Голосование проходит по двухтуровой системе: люди делятся на 5 групп по 10 человек, в каждой группе выбирается кандидат, наиболее популярный среди членов этой группы, и затем из 5 ответов выбирается имя, названное большее число раз.

Разделите работников на группы так, чтобы в большинстве групп выбрали Даню и он победил на выборах, несмотря на изначально меньшее число голосующих за него.

За Даню

Спички и пионеры

Условие

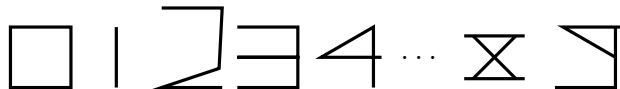
Пионер Вася хочет научиться выкладывать цифры наименьшим числом спичек. Помогите ему в этом: найдите наименьшее число k такое, что любая цифра может быть выложена из k спичек.

Спички и пионеры

Условие

Пионер Вася хочет научиться выкладывать цифры наименьшим числом спичек. Помогите ему в этом: найдите наименьшее число k такое, что любая цифра может быть выложена из k спичек.

$k = 4$:



Спички и пионеры

Почему не обойтись меньшим числом спичек?

8 должна содержать две петли \implies два треугольника, не более двух пар общих сторон \implies 4 спички.



Кирпичей требуют наши сердца

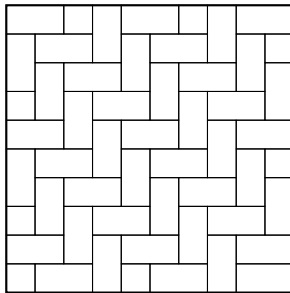
Условие

У Вани есть доски для паркета размером 20×10 сантиметров, их можно распиливать пополам. Как Ване покрыть этими досками пол квадратной комнаты $1 \text{ метр} \times 1 \text{ метр}$ так, чтобы не было швов длиной более 30 сантиметров ни в одном из направлений?

Кирпичей требуют наши сердца

Условие

У Вани есть доски для паркета размером 20×10 сантиметров, их можно распиливать пополам. Как Ване покрыть этими досками пол квадратной комнаты $1 \text{ метр} \times 1 \text{ метр}$ так, чтобы не было швов длиной более 30 сантиметров ни в одном из направлений?



Искусное владение числами

Условие

Придумайте (или расскажите, как построить) 95-значное число, в котором нет нулей и которое делится на свою сумму цифр.

Искусное владение числами

Условие

Придумайте (или расскажите, как построить) 95-значное число, в котором нет нулей и которое делится на свою сумму цифр.

Придумаем число, делящееся на $144 = 9 \cdot 16$:

$$\underbrace{\quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad}_{\text{разрядов} - 91,} 3232.$$
$$\sum \text{цифр} - 134$$

Разрезания

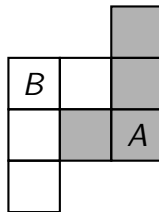
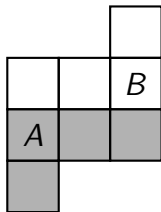
Условие

Можно ли нарисовать на клетчатом листе бумаги такую фигуру, которую можно разрезать по линиям сетки на две *одинаковые* фигуры двумя способами — причём фигуры в первом и во втором способе были бы одни и те же, но линии разреза выглядели бы по-разному?

Разрезания

Условие

Можно ли нарисовать на клетчатом листе бумаги такую фигуру, которую можно разрезать по линиям сетки на две *одинаковые* фигуры двумя способами — причём фигуры в первом и во втором способе были бы одни и те же, но линии разреза выглядели бы по-разному?



Кирпичей требуют наши сердца

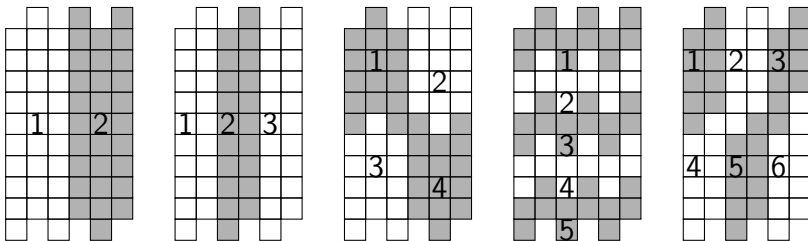
Условие

Нарисуйте на клетчатой бумаге такую фигуру, которую можно разделить по клеткам на 2, на 3, на 4, на 5, на 6 одинаковых по форме и размеру связных фигур — причём они не будут прямоугольниками.

Кирпичей требуют наши сердца

Условие

Нарисуйте на клетчатой бумаге такую фигуру, которую можно разделить по клеткам на 2, на 3, на 4, на 5, на 6 одинаковых по форме и размеру связных фигур — причём они не будут прямоугольниками.



Ужасный гадкий аккуратный подсчёт

Условие

Из клетчатой бумаги вырезали прямоугольник размером 4×5 клеток. Сколько на нём можно найти квадратов? А прямоугольников?

Ужасный гадкий аккуратный подсчёт

Условие

Из клетчатой бумаги вырезали прямоугольник размером 4×5 клеток. Сколько на нём можно найти квадратов? А прямоугольников?

Заметим, что левый верхний угол прямоугольника размером $a \times b$ может находиться в $(5 - a) \cdot (6 - b)$ положениях.

Ужасный гадкий аккуратный подсчёт

	1	2	3	4
1	$(6-1)(5-1) = \mathbf{20}$	$(6-1)(5-2) = \mathbf{15}$	$(6-1)(5-3) = \mathbf{10}$	$(6-1)(5-4) = \mathbf{5}$
2	$(6-2)(5-1) = \mathbf{16}$	$(6-2)(5-2) = \mathbf{12}$	$(6-2)(5-3) = \mathbf{8}$	$(6-2)(5-4) = \mathbf{4}$
3	$(6-3)(5-1) = \mathbf{12}$	$(6-3)(5-2) = \mathbf{9}$	$(6-3)(5-3) = \mathbf{6}$	$(6-3)(5-4) = \mathbf{3}$
4	$(6-4)(5-1) = \mathbf{8}$	$(6-4)(5-2) = \mathbf{6}$	$(6-4)(5-3) = \mathbf{4}$	$(6-4)(5-4) = \mathbf{2}$
5	$(6-5)(5-1) = \mathbf{4}$	$(6-5)(5-2) = \mathbf{3}$	$(6-5)(5-3) = \mathbf{2}$	$(6-5)(5-4) = \mathbf{1}$

Есть куда более простой способ
 посчитать сумму всех чисел в таблице:
 надо заметить, что это произведение двух сумм.

	$\sum = (1 + 2 + \dots + 5)(1 + \dots + 4) = 15 \cdot 10 = 150.$
	$2 + 6 + 12 + 20 = 40.$

Селфхак

Условие

Графический пароль — это отмеченные в определённом порядке точки. Верные точки остаются отмеченными, неправильные — сбрасываются со всех уже отмеченных. Необходимо вспомнить последовательность из 10 точек. Сколько нажатий на точки ему придётся сделать в худшем случае?

Селфхак

Условие

Графический пароль — это отмеченные в определённом порядке точки. Верные точки остаются отмеченными, неправильные — сбрасываются с метки со всех уже отмеченных. Необходимо вспомнить последовательность из 10 точек. Сколько нажатий на точки ему придётся сделать в худшем случае?

Первую кнопку угадает за 9 неудачных попыток. Вторую — за 8, но каждый раз нужно нажимать по 2 кнопки, ... Эти рассуждения приводят нас к формуле:

$$\begin{aligned}
 &1 \cdot (10 - 1) + 2 \cdot (10 - 2) + 3 \cdot (10 - 3) + 4 \cdot (10 - 4) + \\
 &5 \cdot (10 - 5) + 6 \cdot (10 - 6) + 7 \cdot (10 - 7) + 8 \cdot (10 - 8) + \\
 &9 \cdot (10 - 9) + 10 = 175.
 \end{aligned}$$

Прочтите условие, и будет вам счастье

Самое главное при решении задачи — правильно понять, что написано в её условии.

Можно пытаться довести это до абсолюта.

Современная мебельная фабрика

Условие

Стул с 720 ножками падает с лестницы. Выяснилось, что при падении он потерял в три раза меньше ножек, чем у него бы осталось, потеряй он в три раза меньше ножек, чем у него осталось сейчас. Так сколько же ножек осталось у стула?

Современная мебельная фабрика

Условие

Стул с 720 ножками падает с лестницы. Выяснилось, что при падении он потерял в три раза меньше ножек, чем у него бы осталось, потеряй он в три раза меньше ножек, чем у него осталось сейчас. Так сколько же ножек осталось у стула?

$$(720 - x)$$

Современная мебельная фабрика

Условие

Стул с 720 ножками падает с лестницы. Выяснилось, что при падении он потерял в три раза меньше ножек, чем у него бы осталось, потеряй он в три раза меньше ножек, чем у него осталось сейчас. Так сколько же ножек осталось у стула?

$$(720 - x) \cdot 3 =$$

Современная мебельная фабрика

Условие

Стул с 720 ножками падает с лестницы. Выяснилось, что при падении он потерял в три раза меньше ножек, чем у него бы осталось, потеряй он в три раза меньше ножек, чем у него осталось сейчас. Так сколько же ножек осталось у стула?

$$(720 - x) \cdot 3 = 720 -$$

Современная мебельная фабрика

Условие

Стул с 720 ножками падает с лестницы. Выяснилось, что при падении он потерял в три раза меньше ножек, чем у него бы осталось, потеряй он в три раза меньше ножек, чем у него осталось сейчас. Так сколько же ножек осталось у стула?

$$(720 - x) \cdot 3 = 720 - \frac{1}{3} \cdot$$

Современная мебельная фабрика

Условие

Стул с 720 ножками падает с лестницы. Выяснилось, что при падении он потерял в три раза меньше ножек, чем у него бы осталось, потеряй он в три раза меньше ножек, чем у него осталось сейчас. Так сколько же ножек осталось у стула?

$$(720 - x) \cdot 3 = 720 - \frac{1}{3} \cdot x$$

Современная мебельная фабрика

Условие

Стул с 720 ножками падает с лестницы. Выяснилось, что при падении он потерял в три раза меньше ножек, чем у него бы осталось, потеряй он в три раза меньше ножек, чем у него осталось сейчас. Так сколько же ножек осталось у стула?

$$(720 - x) \cdot 3 = 720 - \frac{1}{3} \cdot x$$

$$x = 540$$

Задачи про игры

Задачи про игры достаточно популярны в математике.

Поэтому, чтобы не попасть в общий тренд, нужно делать их либо внутренне примитивными, либо вычурными.

Игры

Условие

Двое по очереди вырезают из клетчатого квадрата 4×4 уголки из трёх клеток, причём первый может вырезать только уголки, ориентированные как буква Г, а второй — только уголки, ориентированные как буква L. Проигрывает тот, кто не может вырезать очередной уголок. У кого из игроков есть выигрышная стратегия?

Игры

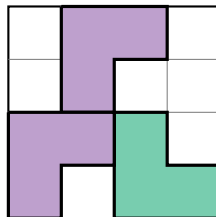
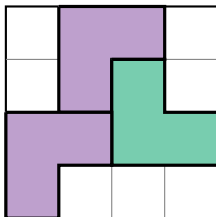
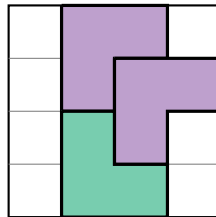
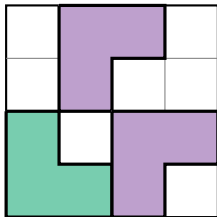
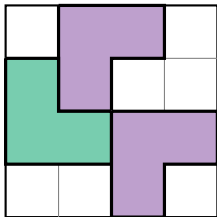
Условие

Двое по очереди вырезают из клетчатого квадрата 4×4 уголки из трёх клеток, причём первый может вырезать только уголки, ориентированные как буква Г, а второй — только уголки, ориентированные как буква L. Проигрывает тот, кто не может вырезать очередной уголок. У кого из игроков есть выигрышная стратегия?

Побеждает первый, если поставит свою фигуру посередине верхней стороны.

Доказывать это надо перебором: у второго есть пять вариантов хода.

Игры



Игра

Условие

Даны две кучи камней: в одной 23 камня, вторая пока пустая. Также дан мешок с 2017 камнями. Разрешены два типа ходов. Можно брать 1, 2, 3 или 4 камня и перекладывать их из первой кучи во вторую. Также можно перекладывать 1, 2, 3 или 4 камня (если они там есть) из второй кучи в первую — при этом столько же камней, сколько взято, нужно выкинуть из мешка в окно. Играют двое; проигрывает тот, кто выкидывает последний камень из мешка. Кто победит при правильной игре?

Игра

Условие

Даны две кучи камней: в одной 23 камня, вторая пока пустая. Также дан мешок с 2017 камнями. Разрешены два типа ходов. Можно брать 1, 2, 3 или 4 камня и перекладывать их из первой кучи во вторую. Также можно перекладывать 1, 2, 3 или 4 камня (если они там есть) из второй кучи в первую — при этом столько же камней, сколько взято, нужно выкинуть из мешка в окно. Играют двое; проигрывает тот, кто выкидывает последний камень из мешка. Кто победит при правильной игре?

Стратегия для первого: добиться, чтобы перекладывания $2 \rightarrow 1$ делал только второй.

Игра

Первый ход: 3 камня из 1 в 2. Затем

Ход второго игрока	Ответный ход
k камней $1 \rightarrow 2$	$(5 - k)$ камней $1 \rightarrow 2$ (всегда можем)
k камней $2 \rightarrow 1$	k камней $1 \rightarrow 2$

Профильные задачи

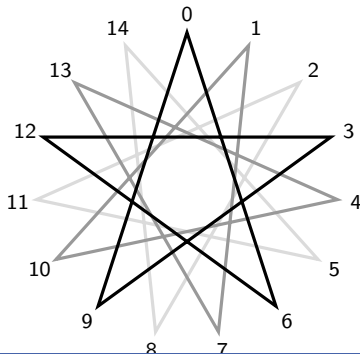
Симуляция настоящего научного исследования, доступная для школьника.

Предлагаем всем ученикам ФМЛ, так как это формат, с которым они ещё не сталкивались и в котором не «вынесут» всех остальных.

Взять известный факт из алгебры...

...И попросить школьников доказать его в наглядной и понятной форме.

Пример — задача про «звёзды» (2017): дан правильный n -угольник, соединяем его вершины, находящиеся на равном расстоянии.



(15, 6)–звезда

$$n = \sum_{d|n} \varphi(d)$$

(n, k) –звезда состоит из $\text{НОД}(n, k)$ ломаных: в частности, из одной ломаной, когда n и k взаимно просты.

Отсюда есть ровно $\varphi\left(\frac{n}{\ell}\right)$ звёзд, состоящих из ℓ ломаных.

$\frac{n}{\ell}$ пробегает все делители n , а каждая звезда состоит из сколько-то ломаных. Всего звёзд n .

Системы счисления

Задачи на системы счисления комбинируют чисто технические навыки и неожиданные факты:

«Десятичная римская система счисления» (2018):

$$\begin{aligned} 4047215_{\text{Р}} &= 4000000 + 0 - (40000 - (7000 + 200 + 10 - 5)) \\ &= 3967205_{\text{Д}}. \end{aligned}$$

$$150_{\text{Д}} = 1850_{\text{Р}}.$$

Неожиданные свойства этой системы счисления

- Если $S_p = N$, то $0S_p = -N$;
- Число может иметь две записи: $1_p = 19_p = 1 \in \mathbb{N}$;
- Число может не иметь записей: 121;
- Как изменяются признаки делимости?

«Задача с открытым концом»: жюри не известен критерий наличия «римской» записи у числа и как установить количество записей.

В двоичной римской с.с. записей не более двух...

Где нас найти

- Условия задач 2016–18:

`http://mathnonstop.ru/uchastnikam.html`

- Электронная почта:

`boris.a.zolotov@yandex.com`

- Эта презентация:

`http://bit.ly/mns-seminar-1`

Спасибо за внимание! /*/

/*/ Вы можете задать ещё вопросов