

Разделяй и... достаточно

Тодоров Е.И.

Санкт-Петербургский Турнир юных математиков, Фонд «Время науки»

18 июня 2021 г.

Эта презентация онлайн

Зачем фотографировать презентацию,
когда её можно скачать?



http://bit.ly/about_division

Определение деления

Определение

*Для целых чисел a и b будем говорить, что a делится на b , если существует такое целое число n , что $a = nb$. Будем писать $a : b$.
Число b в этом случае называется делителем a .*

Свойства делимости:

- для любого целого a выполнено $0 : a$;
- если $a : b$ и $b : c$, то $a : c$;
- если $ac : bc$ и $c \neq 0$, то $a : b$;
- если $(a + b) : c$ и $a : c$, то $b : c$.

Определение деления с остатком

Определение

Для целых чисел a , b и r ($0 < r < b - 1$) будем говорить, что a делится на b с остатком r , если существует такое целое число n , что $a = nb + r$ и r — наименьшее из таких чисел.

Свойство

Разность $(a - b)$ делится на c тогда и только тогда, когда остатки от деления a и b на c одинаковые.

Упражнения

Упражнение

Найдите наибольшее четырёхзначное число, которое делится на 31.

Упражнение

Число 100 разделили на некоторое число $n < 50$ и получили остаток 6. Найдите n .

Упражнение

Может ли некоторое число делиться на 8, а при делении на 12 давать остаток 10?

Определение НОД

Определение

Целое число D называется наибольшим общим делителем чисел a и b , если выполнены свойства:

- 1 D является делителем a и b : $a:D$ и $b:D$;
- 2 D делится на любой другой делитель a и b : для любого d если $a:d$ и $b:d$, то $D:d$.

В этом случае пишут $D = \text{НОД}(a, b)$.

Свойство

Для любого целого a выполнено $\text{НОД}(a, 0) = a$.

Наивные методы поиска НОД

- 1 Перебрать все числа до $\min(a, b)$.

Упражнение

Найдите НОД(12, 16) и НОД(15, 21).

Наивные методы поиска НОД

- 1 Перебрать все числа до $\min(a, b)$.

Упражнение

Найдите НОД(12, 16) и НОД(15, 21).

- 2 Выписать все простые делители a и b , а затем найти общие и перемножить их.

Упражнение

Найдите НОД(12, 16), НОД(15, 87) и НОД(60, 210).

Лемма об общем НОД

Лемма

Для целых чисел b , n и r имеет место равенство $\text{НОД}(b, r) = \text{НОД}(bn + r, b)$.

Доказательство

Нетрудно видеть, что

$$\text{НОД}(b, r) : \text{НОД}(bn + r, b)$$

Лемма об общем НОД

Лемма

Для целых чисел b , n и r имеет место равенство $\text{НОД}(b, r) = \text{НОД}(bn + r, b)$.

Доказательство

Нетрудно видеть, что

$$\text{НОД}(b, r) : \text{НОД}(bn + r, b)$$

и, наоборот,

$$\text{НОД}(bn + r, b) : \text{НОД}(b, r).$$

Лемма об общем НОД

Лемма

Для целых чисел b , n и r имеет место равенство $\text{НОД}(b, r) = \text{НОД}(bn + r, b)$.

Доказательство

Нетрудно видеть, что

$$\text{НОД}(b, r) : \text{НОД}(bn + r, b)$$

и, наоборот,

$$\text{НОД}(bn + r, b) : \text{НОД}(b, r).$$

А значит, $\text{НОД}(b, r) = \text{НОД}(bn + r, b)$

Об остатках и разности

Свойство

Найти остаток r от деления числа a на число b можно, вычитая b из a , пока это возможно.

Пример

Найдём остаток от деления числа 85 на 16:

- 1 $85 - 16 = 69;$
- 2 $69 - 16 = 53;$
- 3 $53 - 16 = 37;$
- 4 $37 - 16 = 21;$
- 5 $21 - 16 = 5.$

Алгоритм Евклида

НОД(a, b) для $a > b$ может быть найден благодаря следующему алгоритму, в котором последовательно находятся числа q и r :

$$\begin{array}{ll} a = bq_1 + r_2, & 0 < r_2 < b \\ b = r_2q_2 + r_3, & 0 < r_3 < r_2 \\ r_2 = r_3q_3 + r_4, & 0 < r_4 < r_3 \\ & \vdots \\ r_{n-3} = r_{n-2}q_{n-2} + r_{n-1}, & 0 < r_{n-1} < r_{n-2} \\ r_{n-2} = r_{n-1}q_{n-1} + r_n, & 0 < r_n < r_{n-1} \\ r_{n-1} = r_nq_n. & \end{array}$$

Этот алгоритм продолжается до тех пор, пока на некотором шаге число r_{n+1} не станет равно 0.

Пример и упражнения

Пример

Найдём $\text{НОД}(100, 44)$:

Пример и упражнения

Пример

Найдём НОД(100, 44):

1 $100 = 44 \cdot 2 + 12 \quad (q_1 = 2, r_2 = 12);$

Пример и упражнения

Пример

Найдём НОД(100, 44):

1 $100 = 44 \cdot 2 + 12$ ($q_1 = 2$, $r_2 = 12$);

2 $44 = 12 \cdot 3 + 8$ ($q_2 = 3$, $r_3 = 8$);

Пример и упражнения

Пример

Найдём НОД(100, 44):

- 1 $100 = 44 \cdot 2 + 12$ ($q_1 = 2$, $r_2 = 12$);
- 2 $44 = 12 \cdot 3 + 8$ ($q_2 = 3$, $r_3 = 8$);
- 3 $12 = 8 \cdot 1 + 4$ ($q_3 = 1$, $r_4 = 4$);

Пример и упражнения

Пример

Найдём НОД(100, 44):

1 $100 = 44 \cdot 2 + 12$ ($q_1 = 2$, $r_2 = 12$);

2 $44 = 12 \cdot 3 + 8$ ($q_2 = 3$, $r_3 = 8$);

3 $12 = 8 \cdot 1 + 4$ ($q_3 = 1$, $r_4 = 4$);

4 $8 = 4 \cdot 2$ ($q_4 = 2$, $r_5 = 0$).

То есть $\text{НОД}(100, 44) = 4$.

Упражнение

Найдите $\text{НОД}(108, 48)$, $\text{НОД}(72, 42)$ и $\text{НОД}(34, 21)$.

О конечности алгоритма Евклида

Заметим, что на каждом шаге мы работаем с числами, становящимися всё меньше и меньше:

$$b > r_2 > r_3 > r_4 > \dots$$

Поскольку мы работаем с натуральными числами, этот процесс обязательно когда-то закончится.

О линейном выражении НОД

С помощью алгоритма Евклида мы можем линейно выразить $\text{НОД}(a, b)$ через числа a и b , то есть подобрать такие целые числа m и n , что $\text{НОД}(a, b) = ma + nb$.

Пример

Найдём $\text{НОД}(98, 21)$:

- 1 $98 = 21 \cdot 4 + 14$ ($q_1 = 4, r_2 = 14$);
- 2 $21 = 14 \cdot 1 + 7$ ($q_2 = 1, r_3 = 7$);
- 3 $14 = 7 \cdot 2$ ($q_3 = 2, r_4 = 0$).

То есть $\text{НОД}(98, 21) = 7$.

$$\text{НОД}(98, 21) = 7 = 21 - 14 = 21 - (98 - 21 \cdot 4) = (-1) \cdot 98 + 5 \cdot 21.$$

Упражнения

Упражнение

- 1 *Выразите $\text{НОД}(20, 12)$ через 20 и 12;*
- 2 *Выразите $\text{НОД}(72, 32)$ через 72 и 32;*
- 3 *Выразите $\text{НОД}(153, 54)$ через 153 и 54.*

Диофантовы уравнения

Теорема

Для целых a , b и c линейное уравнение $ax + by = c$ имеет решение в целых тогда и только тогда, когда $c : \text{НОД}(a, b)$, то есть если существует такое целое t , что $c = t \cdot \text{НОД}(a, b)$.

Доказательство

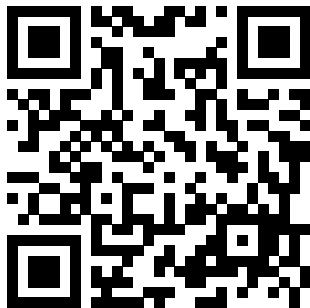
*Поскольку $\text{НОД}(a, b)$ линейно выражается через a и b :
 $ma + nb = \text{НОД}(a, b)$ — имеет место равенство
 $t \cdot ma + t \cdot nb = t \cdot \text{НОД}(a, b)$ или $tm \cdot a + tn \cdot b = c$. Значит,
достаточно просто взять $x = tm$ и $y = tn$.*

Летний Турнир для 5–7 классов

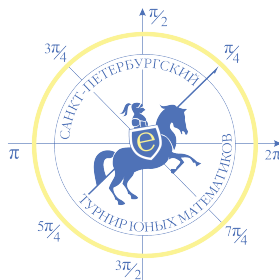
- пройдёт очно со 2 по 8 августа;
- участие и проживание бесплатно для участников;
- новый формат, сочетающий особенности Турнира и Регаты;
- 3 серии нестандартных задач;
- по 1.5 дня на решение;
- устный доклад в формате мат.боя на 2 команды.

Регистрация на Летний Турнир

Зарегистрировать команду на
Летний Турнир юных математиков:



`spbtym.ru` → Зарегистрироваться



Спасибо за внимание!

Сайт Турнира: spbtym.ru

Задать вопрос автору: todzhe@mail.ru