Решения избранных задач

Е.И. Тодоров, «Математика НОН-СТОП»

Фонд «Время Науки»

17 июня 2021 г.

Эта презентация онлайн

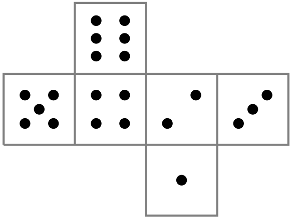
Зачем фотографировать презентацию, когда её можно скачать?

http://bit.ly/3_razbor_ei

В 2020–2021 гг. олимпиада «Математика НОН-СТОП» и Санкт-Петербургский Турнир юных математиков проводятся с использованием гранта Президента Российской Федерации на развитие гражданского общества, предоставленного **Фондом президентских грантов.**

ФОНД
ПРЕЗИДЕНТСКИХ
ГРАНТОВ

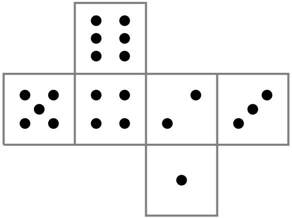
Кубики



2020-4-6B

Сколько видимых точек может быть на башне из 6 кубиков?

Кубики

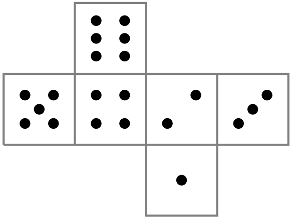


2020-4-6B

Сколько видимых точек может быть на башне из 6 кубиков?

Сумма чисел на противоположных гранях равна 7.

Кубики



2020-4-6B

Сколько видимых точек может быть на башне из 6 кубиков?

Сумма чисел на противоположных гранях равна 7.

Ответ — $84 + k$.

Кирпичей требуют наши сердца

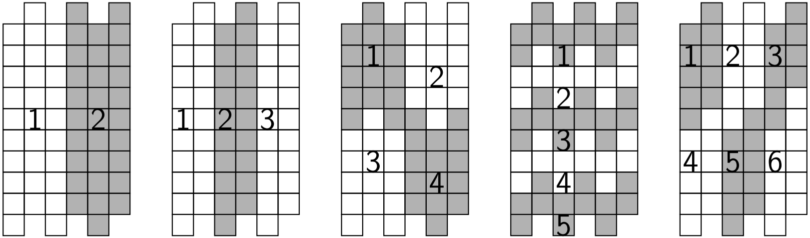
2020-4-4C

Нарисуйте на клетчатой бумаге такую фигуру, которую можно разделить по клеткам на 2, на 3, на 4, на 5, на 6 одинаковых по форме и размеру связных фигур — причём они не будут прямоугольниками.

Кирпичей требуют наши сердца

2020-4-4C

Нарисуйте на клетчатой бумаге такую фигуру, которую можно разделить по клеткам на 2, на 3, на 4, на 5, на 6 одинаковых по форме и размеру связных фигур — причём они не будут прямоугольниками.



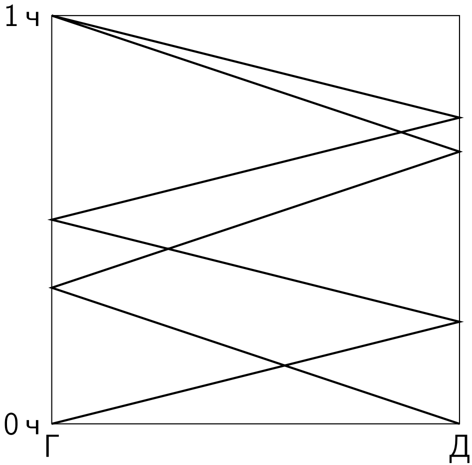
Гном вернулся — дома нет

2021-4-3A

Старый дом находится в лесной деревне Домовиково, старый гном отошёл по делам в деревню Гномовиково. Между деревнями 1 километр. Одновременно, соскучившись друг по другу, гном выходит из Гномовиково и дом выходит из Домовиково. Они ходят между деревнями туда и обратно, пока не окажутся одновременно в одной деревне — они не останавливаются, даже если встретят друг друга по пути.

Дом ходит со скоростью 3 км/ч, гном ходит со скоростью 4 км/ч. Сколько раз они встретятся по дороге между Домовиково и Гномовиково, пока не окажутся одновременно в одной деревне?

Гном вернулся — дома нет



Разрезания

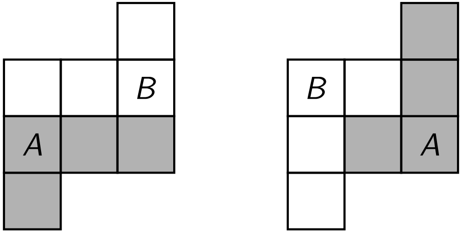
2020-5-1C

Можно ли нарисовать на клетчатом листе бумаги такую фигуру, которую можно разрезать по линиям сетки на две *одинаковые* фигуры двумя способами — причём фигуры в первом и во втором способе были бы одни и те же, но линии разреза выглядели бы по-разному?

Разрезания

2020-5-1C

Можно ли нарисовать на клетчатом листе бумаги такую фигуру, которую можно разрезать по линиям сетки на две *одинаковые* фигуры двумя способами — причём фигуры в первом и во втором способе были бы одни и те же, но линии разреза выглядели бы по-разному?



Аксиомы выборов

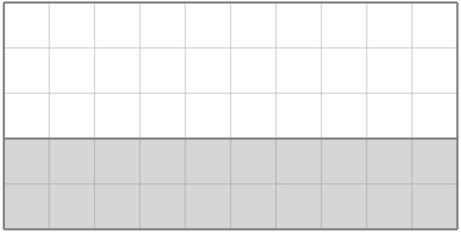
2019-7-3A

На предприятии работают 50 человек, и они выбирают себе начальника. Есть две кандидатуры, Ваня и Даня. Про каждого работника известно заранее, кому он отдаёт предпочтение: 20 человек за Даню, 30 человек за Ваню.

Голосование проходит по двухтуровой системе: люди делятся на 5 групп по 10 человек, в каждой группе выбирается кандидат, наиболее популярный среди членов этой группы, и затем из 5 ответов выбирается имя, названное большее число раз.

Разделите работников на группы так, чтобы в большинстве групп выбрали Даню и он победил на выборах, несмотря на изначально меньшее число голосующих за него.

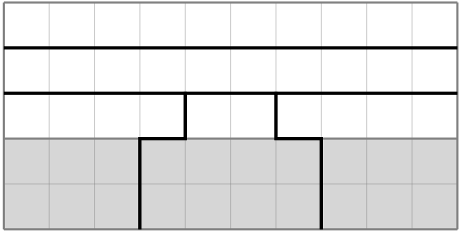
Аксиомы выборов



За Ваню

За Даню

Аксиомы выборов



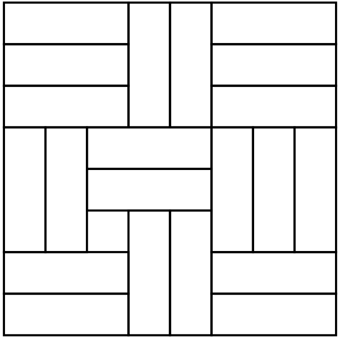
За Ваню

За Даню

Полиминное поле

2021-5-5A

Покажите, как покрыть доску 8×8, используя 21 прямоугольник 1×3 (или 3×1) и один квадратик 1×1.



Полиминное поле

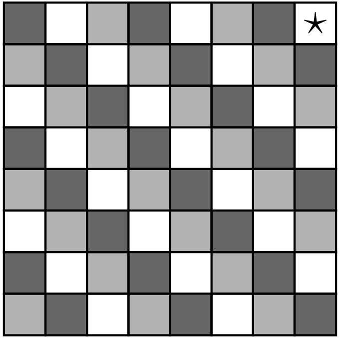
2021-5-5В

Докажите, что в предыдущем пункте квадратик 1×1 нельзя ставить в угол поля.

Полиминное поле

2021-5-5B

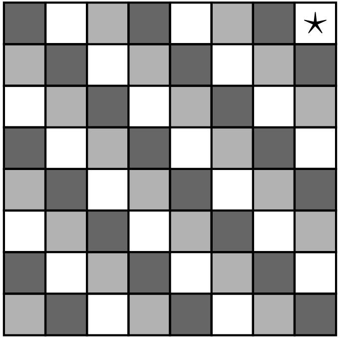
Докажите, что в предыдущем пункте квадратик 1×1 нельзя ставить в угол поля.



Полиминное поле

2021-5-5B

Докажите, что в предыдущем пункте квадратик 1×1 нельзя ставить в угол поля.



Белых — 20, серых — 21, чёрных — 22.

Опубликовать за 60 секунд

2020-6-2B

Научные руководители придумывают темы работ.

- Один из них придумывает 1 новую тему;
- После этого кто-то из них придумывает 2 новых темы;
- После этого кто-то из них придумывает 3 новых темы.

Пусть изначально первый придумал на n тем больше, чем второй. Докажите, что руководители всегда смогут сравнять количество придуманных ими тем.

Опубликовать за 60 секунд

2020-6-2B

Научные руководители придумывают темы работ.

- Один из них придумывает 1 новую тему;
- После этого кто-то из них придумывает 2 новых темы;
- После этого кто-то из них придумывает 3 новых темы.

Пусть изначально первый придумал на n тем больше, чем второй. Докажите, что руководители всегда смогут сравнять количество придуманных ими тем.

Каждые два хода разность количеств тем будем сокращать на 1.

Роботы играют в карты

2021-6-6C

Робот f берёт натуральное число n, переставляет его цифры задом наперёд его и избавляется от ведущих нулей. Например, если положить в него число 2010, то f вернёт число 102, будем записывать это как $f(2010) = 102$. Аналогично, $f(123) = 321$ и $f(14000) = 41$.

Робот g берёт карточку с натуральным числом n, а возвращает карточку с числом $\frac{n}{f(f(n))}$. Например, $g(100500) = \frac{100500}{f(f(100500))} = \frac{100500}{f(5001)} = \frac{100500}{1005} = 100$.

Олег складывает в робота g карточки от 1 до некоторого числа n. Как количество различных карточек, возвращаемых роботом, будет зависеть от n? Что это будут за карточки?

Роботы играют в карты

1. Если у n на конце нет нулей, то $f\left(f(n)\right) = n$, то есть $g(n) = 1$.

Роботы играют в карты

1. Если у n на конце нет нулей, то $f(f(n)) = n$, то есть $g(n) = 1$.
2. Если же n делится на 10, то $n = m \cdot 10^k$, где m — число без нулей на конце. Из предыдущего пункта мы знаем, что $f(f(n)) = m$. Тогда

$$g(n) = \frac{m \cdot 10^k}{m} = 10^k.$$

Роботы играют в карты

1. Если у n на конце нет нулей, то $f(f(n)) = n$, то есть $g(n) = 1$.
2. Если же n делится на 10, то $n = m \cdot 10^k$, где m — число без нулей на конце. Из предыдущего пункта мы знаем, что $f(f(n)) = m$. Тогда

$$g(n) = \frac{m \cdot 10^k}{m} = 10^k.$$

3. Значит, различных значений будет ровно столько, сколько различных степеней 10 содержится среди чисел от 1 до n: $\lfloor \log_{10} n \rfloor$.

Бинарные операции

2021-7-9A

Определим операцию $\star$ для положительных чисел a и b следующим образом: $a \star b = \frac{ab}{a+b}$.
Докажите, что $(a \star b) \star c = a \star (b \star c)$.

Бинарные операции

2021-7-9A

Определим операцию $\star$ для положительных чисел a и b следующим образом: $a \star b = \frac{ab}{a+b}$.
Докажите, что $(a \star b) \star c = a \star (b \star c)$.

2021-7-9A

Посчитайте $1 \star (2 \star (4 \star (\ldots \star (256 \star (512 \star 1024)) \ldots)))$.

Бинарные операции

2021-7-9A

Определим операцию $\star$ для положительных чисел a и b следующим образом: $a \star b = \frac{ab}{a+b}$.
Докажите, что $(a \star b) \star c = a \star (b \star c)$.

2021-7-9A

Посчитайте $1 \star (2 \star (4 \star (\ldots \star (256 \star (512 \star 1024)) \ldots)))$.

Перерасставим скобки:

$$(\ldots((1 \star 2) \star 4) \star \ldots) \star 1024 = \left(\ldots \left(\frac{2}{3} \star 4\right) \star \ldots\right) \star 1024$$

$$\left(\ldots \frac{4}{7} \star \ldots\right) \star 1024 = \frac{1024}{2047}.$$

Профильные задания

Система високосных лет для числа t — это последовательность натуральных чисел $(a_0, a_2, a_3, \ldots, a_n)$ такая, что a_{i+1} делится на a_i, а также

$$\frac{1}{a_0} - \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3} + \ldots + (-1)^n \cdot \frac{1}{a_n} = t.$$

Какой могла бы быть система високосных лет, если бы длина года составляла 365.21875, 365.17, 365.33 дней? Для любого ли рационального числа существует система високосных лет?

Профильные задания

$$365.21875 = 365 + \frac{1}{4} - \frac{1}{32}$$

$$365.17 = 365 + \frac{1}{5} - \frac{1}{25} + \frac{1}{100}$$

$$365.33 = 365 + \frac{1}{3} - \frac{1}{300}$$

Летний Турнир юных математиков

- нестандартные задачи;
- готовят к формату Турнира;
- 3 серии по 3–4 задачи;
- на решение даётся по 1,5–2 дня;
- Турнир проводится очно со 2 по 8 августа;
- решения проверяют авторы задач.

Собирайте команду и вступайте в бой!

`spbtym.ru` → Зарегистрироваться

Спасибо за внимание!

mathnonstop.ru

spbtym.ru

mathnonstop@timeforscience.ru

vk.com/timeforscience