Принципы составления заданий и система оценивания Олимпиады «Математика НОН-СТОП»

Сибирь

Методическая комиссия Олимпиады

5 марта 2021 г.

Эта презентация онлайн

Зачем фотографировать презентацию, когда её можно скачать?

http://bit.ly/mns-siberia-pdf

В 2020–2021 гг. олимпиада «Математика НОН-СТОП» проводится с использованием гранта Президента Российской Федерации на развитие гражданского общества, предоставленного **Фондом президентских грантов.**

ФОНД ПРЕЗИДЕНТСКИХ ГРАНТОВ

История олимпиады

- 2010 — первая олимпиада;
- 2016 — 400 участников пишут базовый вариант, 92 — профильный;
  — поддержка Фонда «Время Науки»;
- 2018 — 847 участников пишут базовый вариант, 128 — профильный;
  — включение в Перечень региональных олимпиад и конкурсов интеллектуальной направленности;
  — поддержка Фонда Президентских грантов, Комитета по образованию СПб;
- 2019 — выход сборника задач;
  — площадки в Бердске (Новосибирская обл.) и Гомеле (Беларусь);

Статистика олимпиады

- 12 площадок (на 2021 год — 25 соглашений);
- количество участников — около 2000;
- Санкт-Петербург, Бердск (Новосибирская обл.), Реутов, Нов. Уренгой (ЯНАО), Гатчина (ЛО), Самара, Калининград, Гомель (Беларусь), Донецк;
- две страны;
- проблемы с часовыми поясами.

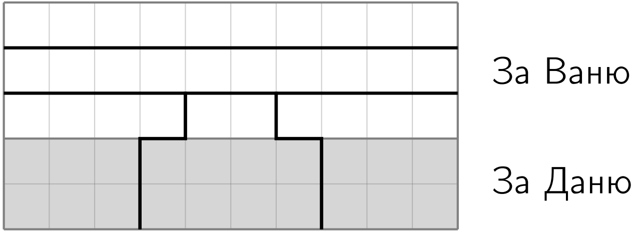
Аксиомы выборов

На предприятии работают 50 человек, и они выбирают себе начальника. Есть две кандидатуры, Ваня и Даня. Про каждого работника известно заранее, кому он отдаёт предпочтение: 20 человек за Даню, 30 человек за Ваню.

Голосование проходит по двухтуровой системе: люди делятся на 5 групп по 10 человек, в каждой группе выбирается кандидат, наиболее популярный среди членов этой группы, и затем из 5 ответов выбирается имя, названное большее число раз.

Разделите работников на группы так, чтобы в большинстве групп выбрали Даню и он победил на выборах, несмотря на изначально меньшее число голосующих за него.

Аксиомы выборов



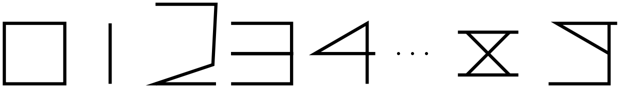
Спички и пионеры

Пионер Вася хочет научиться выкладывать цифры наименьшим числом спичек. Помогите ему в этом: найдите наименьшее число k такое, что любая цифра может быть выложена из k спичек.

Спички и пионеры

Пионер Вася хочет научиться выкладывать цифры наименьшим числом спичек. Помогите ему в этом: найдите наименьшее число k такое, что любая цифра может быть выложена из k спичек.

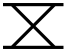
$k = 4$:



Спички и пионеры

Почему не обойтись меньшим числом спичек?

8 должна содержать две петли $\Longrightarrow$ два треугольника, не более двух пар общих сторон $\Longrightarrow$ 4 спички.

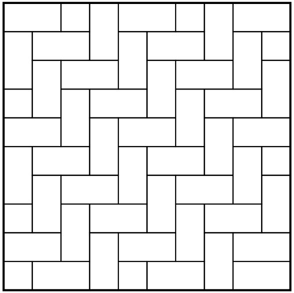


Кирпичей требуют наши сердца

У Вани есть доски для паркета размером 20×10 сантиметров, их можно распиливать пополам. Как Ване покрыть этими досками пол квадратной комнаты 1 метр $\times$ 1 метр так, чтобы не было швов длиной более 30 сантиметров ни в одном из направлений?

Кирпичей требуют наши сердца

У Вани есть доски для паркета размером 20×10 сантиметров, их можно распиливать пополам. Как Ване покрыть этими досками пол квадратной комнаты 1 метр $\times$ 1 метр так, чтобы не было швов длиной более 30 сантиметров ни в одном из направлений?

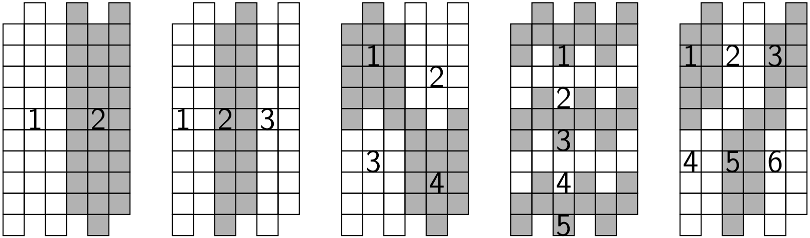


Кирпичей требуют наши сердца

Нарисуйте на клетчатой бумаге такую фигуру, которую можно разделить по клеткам на 2, на 3, на 4, на 5, на 6 одинаковых по форме и размеру связных фигур — причём они не будут прямоугольниками.

Кирпичей требуют наши сердца

Нарисуйте на клетчатой бумаге такую фигуру, которую можно разделить по клеткам на 2, на 3, на 4, на 5, на 6 одинаковых по форме и размеру связных фигур — причём они не будут прямоугольниками.



Искусное владение числами

Придумайте (или расскажите, как построить) 95-значное число, в котором нет нулей и которое делится на свою сумму цифр.

Искусное владение числами

Придумайте (или расскажите, как построить) 95-значное число, в котором нет нулей и которое делится на свою сумму цифр.

Придумаем число, делящееся на $144 = 9 \cdot 16$:

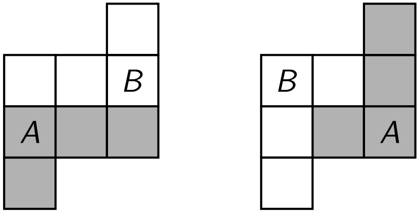
$$\underbrace{\ldots\ldots\ldots}_{\substack{\text{разрядов — } 91, \\ \sum \text{ цифр — } 134}} 3232.$$

Разрезания

Можно ли нарисовать на клетчатом листе бумаги такую фигуру, которую можно разрезать по линиям сетки на две *одинаковые* фигуры двумя способами — причём фигуры в первом и во втором способе были бы одни и те же, но линии разреза выглядели бы по-разному?

Разрезания

Можно ли нарисовать на клетчатом листе бумаги такую фигуру, которую можно разрезать по линиям сетки на две *одинаковые* фигуры двумя способами — причём фигуры в первом и во втором способе были бы одни и те же, но линии разреза выглядели бы по-разному?



Ужасный гадкий аккуратный подсчёт

Из клетчатой бумаги вырезали прямоугольник размером 4×5 клеток. Сколько на нём можно найти квадратов? А прямоугольников?

Ужасный гадкий аккуратный подсчёт

Из клетчатой бумаги вырезали прямоугольник размером 4×5 клеток. Сколько на нём можно найти квадратов? А прямоугольников?

Заметим, что левый верхний угол прямоугольника размером $a \times b$ может находиться в $(5 - a) \cdot (6 - b)$ положениях.

Ужасный гадкий аккуратный подсчёт

	1	2	3	4
1	$(6-1)(5-1)=\mathbf{20}$	$(6-1)(5-2)=\mathbf{15}$	$(6-1)(5-3)=\mathbf{10}$	$(6-1)(5-4)=\mathbf{5}$
2	$(6-2)(5-1)=\mathbf{16}$	$(6-2)(5-2)=\mathbf{12}$	$(6-2)(5-3)=\mathbf{8}$	$(6-2)(5-4)=\mathbf{4}$
3	$(6-3)(5-1)=\mathbf{12}$	$(6-3)(5-2)=\mathbf{9}$	$(6-3)(5-3)=\mathbf{6}$	$(6-3)(5-4)=\mathbf{3}$
4	$(6-4)(5-1)=\mathbf{8}$	$(6-4)(5-2)=\mathbf{6}$	$(6-4)(5-3)=\mathbf{4}$	$(6-4)(5-4)=\mathbf{2}$
5	$(6-5)(5-1)=\mathbf{4}$	$(6-5)(5-2)=\mathbf{3}$	$(6-5)(5-3)=\mathbf{2}$	$(6-5)(5-4)=\mathbf{1}$

Есть куда более простой способ
посчитать сумму всех чисел в таблице:
надо заметить, что это произведение двух сумм.

	$\sum = (1+2+\ldots+5)(1+\ldots+4) = 15\cdot 10 = 150.$
	$2+6+12+20=40.$

Селфхак

Графический пароль — это отмеченные в определённом порядке точки. Верные точки остаются отмеченными, неправильные — сбрасывают отметку со всех уже отмеченных. Необходимо вспомнить последовательность из 10 точек. Сколько нажатий на точки ему придётся сделать в худшем случае?

Селфхак

Графический пароль — это отмеченные в определённом порядке точки. Верные точки остаются отмеченными, неправильные — сбрасывают отметку со всех уже отмеченных. Необходимо вспомнить последовательность из 10 точек. Сколько нажатий на точки ему придётся сделать в худшем случае?

Первую кнопку угадает за 9 неудачных попыток. Вторую — за 8, но каждый раз нужно нажимать по 2 кнопки,... Эти рассуждения приводят нас к формуле:

$$\begin{aligned}
&1\cdot(10-1) &+\quad& 2\cdot(10-2) &+\quad& 3\cdot(10-3) &+\quad& 4\cdot(10-4)+\\
&5\cdot(10-5) &+\quad& 6\cdot(10-6) &+\quad& 7\cdot(10-7) &+\quad& 8\cdot(10-8)+\\
&9\cdot(10-9) &+\quad& 10=175.
\end{aligned}$$

Современная мебельная фабрика

Стул с 720 ножками падает с лестницы. Выяснилось, что при падении он потерял в три раза меньше ножек, чем у него бы осталось, потеряй он в три раза меньше ножек, чем у него осталось сейчас. Так сколько же ножек осталось у стула?

Современная мебельная фабрика

Стул с 720 ножками падает с лестницы. Выяснилось, что при падении он потерял в три раза меньше ножек, чем у него бы осталось, потеряй он в три раза меньше ножек, чем у него осталось сейчас. Так сколько же ножек осталось у стула?

$$(720 - x) \cdot 3 = 720 - \frac{1}{3} \cdot x$$

$$x = 540$$

Шутка

Братья Андрей и Миша Ивановы играют в игру. Андрей загадывает число n, имеющее ровно 7 простых делителей. Миша придумывает многообразие, описываемое формулой степени не более чем n^2. Андрей указывает 5 точек на этом многообразии и объявляет длины не более чем 7 отрезков, соединяющих эти точки в пространстве $\mathbb{R}^{25+1}$. Если выбранные точки вместе с указанными Андреем отрезками образуют жёсткую структуру, то побеждает Миша. В противном случае мальчики меняются местами. Игра продолжается, пока либо у кого-то из мальчиков не получилась жёсткая структура, либо не прошло 1003 хода — тогда побеждает Миша. В зависимости от n назовите фамилию победителя при правильной игре.

Широкий не значит высокий

Докажите, что максимальная возможная площадь n-угольника, все стороны которого имеют длину 1, меньше, чем максимальная возможная площадь $n+1$-угольника, все стороны которого имеют длину 1.

Широкий не значит высокий

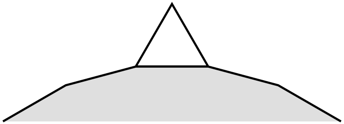
Докажите, что максимальная возможная площадь n-угольника, все стороны которого имеют длину 1, меньше, чем максимальная возможная площадь $n+1$-угольника, все стороны которого имеют длину 1.

Дети же не знают, что максимальную площадь имеют правильные n-угольники.

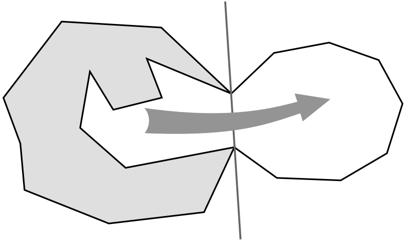
Для каждого многоугольника с n сторонами длины 1 построим многоугольник с $n+1$ сторонами, площадь которого больше.

Широкий не значит высокий

Если выпуклый



Если невыпуклый



Сумма простых — простое?

Найдите наибольшее натуральное число n такое, что существует набор из n различных простых чисел, сумма любых трёх чисел из которого является простым числом.

Сумма простых — простое?

Найдите наибольшее натуральное число n такое, что существует набор из n различных простых чисел, сумма любых трёх чисел из которого является простым числом.

- из всех простых только 3 делится на 3;
- если у простых p_1, p_2 и p_3 одинаковые остатки от деления на 3, то $p_1 + p_2 + p_3$ делится на 3;
- поэтому нельзя брать более двух чисел с одинаковыми остатками;
- лучший вариант для нас p_1, p_2 с остатком 1 и p_3, p_4 с остатком 2.

Пример четырёх таких чисел: 5, 7, 17 и 19.

Всё очень плохо, вокруг сплошная слякоть

Один радист передал другому сообщение: «Всё очень плохо, вокруг сплошная слякоть». Каждый следующий радист передавал дальше сообщение, которое начинал со слов «Привет, друг!», а затем дважды повторял текст сообщения, которое получил. Из скольки слов состоит сообщение, отправленное n-ым радистом?

Всё очень плохо, вокруг сплошная слякоть

Один радист передал другому сообщение: «Всё очень плохо, вокруг сплошная слякоть». Каждый следующий радист передавал дальше сообщение, которое начинал со слов «Привет, друг!», а затем дважды повторял текст сообщения, которое получил. Из скольки слов состоит сообщение, отправленное n-ым радистом?

$$2 \cdot \left(2^{n+2} - 2\right) + 2 = 2^{n+1+2} - 2.$$

- Чтобы получить ответ, нужна доля интуиции;
- Доказательство по индукции.

Навыки участника

1. **Можно ли?**
   Да — привести пример;
   Нет — **доказать**, что нельзя.

2. **Всегда ли?**
   Да — **доказать** это;
   Нет — привести контрпример.

Ещё навыки участника

3. Умение строить отрицания:
   не (для всякого. . .) = существует такой, что (**не** . . .);
   не (существует такой, что . . .) = для всякого (**не** . . .).

4. Что такое доказательство —
   это обоснованное на каждом шаге рассуждение о том, почему верно так и никак иначе. Это **не** приведение одного примера, для которого выполняется то, что должно быть верно всегда.

5. Получаемый результат $\gg$ изученные алгоритмы и клише.

Подготовка к олимпиаде

1. Если начнёте тренировать детей для олимпиад — то быстро вырастете из МНС (оно и хорошо).
2. Если начнёте специально тренироваться для МНС — есть профильный вариант; условия меняются год от года.
3. Если просто учите класс — смотреть на то, чтобы дети находили результат и грамотно его обосновывали.
4. Мы бы хотели, чтобы участники умели *писать* и *высказывать сложную мысль*.

Заключение

Направления, которые мы обсудили сегодня

(1) Задачи, вдохновлённые реальными явлениями

(2) Конструктивные задачи

(3) Ужасный гадкий аккуратный подсчёт

(4) Задачи, где важно прочитать условие

(5) Сложные задачи для опытных детей

Спасибо за внимание!

(∗) `mathnonstop.ru`