

Принципы составления заданий и система оценивания Олимпиады «Математика НОН-СТОП»

Сибирь

Методическая комиссия Олимпиады

3 марта 2021 г.

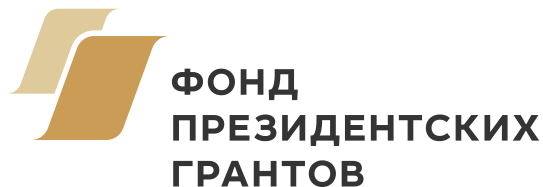
Эта презентация онлайн

Зачем фотографировать презентацию, когда её можно скачать?



<http://bit.ly/mns-siberia-pdf>

В 2020–2021 гг. олимпиада «Математика НОН-СТОП» проводится с использованием гранта Президента Российской Федерации на развитие гражданского общества, предоставленного Фондом президентских грантов.



История олимпиады

- 2010 — первая олимпиада;
- 2016 — 400 участников пишут базовый вариант, 92 — профильный;
— поддержка Фонда «Время Науки»;
- 2018 — 847 участников пишут базовый вариант, 128 — профильный;
— включение в Перечень региональных олимпиад и конкурсов интеллектуальной направленности;
— поддержка Фонда Президентских грантов, Комитета по образованию СПб;
- 2019 — выход сборника задач;
— площадки в Бердске (Новосибирская обл.) и Гомеле (Беларусь);

Статистика олимпиады

- 12 площадок (на 2021 год — 25 соглашений);
- количество участников — около 2000;
- Санкт-Петербург, Бердск (Новосибирская обл.), Реутов, Нов. Уренгой (ЯНАО), Гатчина (ЛО), Самара, Калининград, Гомель (Беларусь), Донецк;
- две страны;
- проблемы с часовыми поясами.

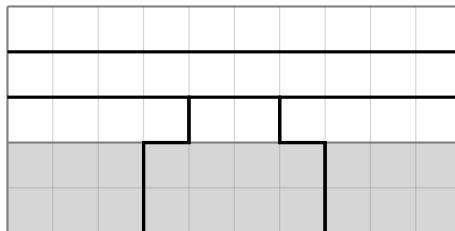
Аксиомы выборов

На предприятии работают 50 человек, и они выбирают себе начальника. Есть две кандидатуры, Ваня и Даня. Про каждого работника известно заранее, кому он отдаёт предпочтение: 20 человек за Даню, 30 человек за Ваню.

Голосование проходит по двухтуровой системе: люди делятся на 5 групп по 10 человек, в каждой группе выбирается кандидат, наиболее популярный среди членов этой группы, и затем из 5 ответов выбирается имя, названное большее число раз.

Разделите работников на группы так, чтобы в большинстве групп выбрали Даню и он победил на выборах, несмотря на изначально меньшее число голосующих за него.

Аксиомы выборов



За Ваню

За Даню

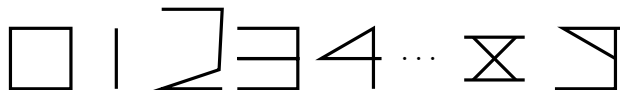
Спички и пионеры

Пионер Вася хочет научиться выкладывать цифры наименьшим числом спичек. Помогите ему в этом: найдите наименьшее число k такое, что любая цифра может быть выложена из k спичек.

Спички и пионеры

Пионер Вася хочет научиться выкладывать цифры наименьшим числом спичек. Помогите ему в этом: найдите наименьшее число k такое, что любая цифра может быть выложена из k спичек.

$k = 4$:



Спички и пионеры

Почему не обойтись меньшим числом спичек?

8 должна содержать две петли \implies два треугольника, не более двух пар общих сторон \implies 4 спички.

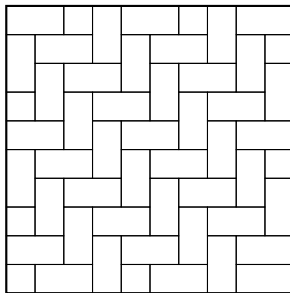


Кирпичей требуют наши сердца

У Вани есть доски для паркета размером 20×10 сантиметров, их можно распиливать пополам. Как Ване покрыть этими досками пол квадратной комнаты $1 \text{ метр} \times 1 \text{ метр}$ так, чтобы не было швов длиной более 30 сантиметров ни в одном из направлений?

Кирпичей требуют наши сердца

У Вани есть доски для паркета размером 20×10 сантиметров, их можно распиливать пополам. Как Ване покрыть этими досками пол квадратной комнаты 1 метр \times 1 метр так, чтобы не было швов длиной более 30 сантиметров ни в одном из направлений?

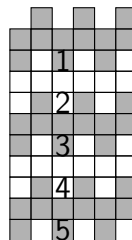
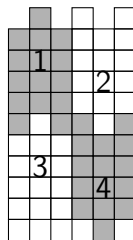
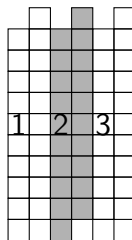
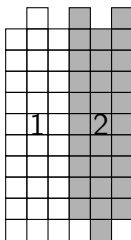


Кирпичей требуют наши сердца

Нарисуйте на клетчатой бумаге такую фигуру, которую можно разделить по клеткам на 2, на 3, на 4, на 5, на 6 одинаковых по форме и размеру связанных фигур — причём они не будут прямоугольниками.

Кирпичей требуют наши сердца

Нарисуйте на клетчатой бумаге такую фигуру, которую можно разделить по клеткам на 2, на 3, на 4, на 5, на 6 одинаковых по форме и размеру связанных фигур — причём они не будут прямоугольниками.



Искусное владение числами

Придумайте (или расскажите, как построить) 95-значное число, в котором нет нулей и которое делится на свою сумму цифр.

Искусное владение числами

Придумайте (или расскажите, как построить) 95-значное число, в котором нет нулей и которое делится на свою сумму цифр.

Придумаем число, делящееся на $144 = 9 \cdot 16$:

$$\underbrace{\cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot}_{\text{разрядов} - 91,} 3232.$$

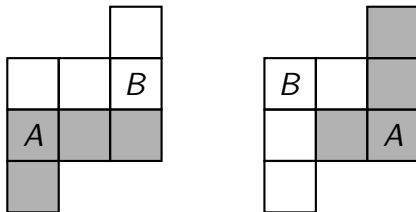
$\sum \text{цифр} - 134$

Разрезания

Можно ли нарисовать на клетчатом листе бумаги такую фигуру, которую можно разрезать по линиям сетки на две *одинаковые* фигуры двумя способами — причём фигуры в первом и во втором способе были бы одни и те же, но линии разреза выглядели бы по-разному?

Разрезания

Можно ли нарисовать на клетчатом листе бумаги такую фигуру, которую можно разрезать по линиям сетки на две *одинаковые* фигуры двумя способами — причём фигуры в первом и во втором способе были бы одни и те же, но линии разреза выглядели бы по-разному?



Ужасный гадкий аккуратный подсчёт

Из клетчатой бумаги вырезали прямоугольник размером 4×5 клеток. Сколько на нём можно найти квадратов? А прямоугольников?

Ужасный гадкий аккуратный подсчёт

Из клетчатой бумаги вырезали прямоугольник размером 4×5 клеток. Сколько на нём можно найти квадратов? А прямоугольников?

Заметим, что левый верхний угол прямоугольника размером $a \times b$ может находиться в $(5 - a) \cdot (6 - b)$ положениях.

Ужасный гадкий аккуратный подсчёт

	1	2	3	4
1	$(6-1)(5-1) = \mathbf{20}$	$(6-1)(5-2) = \mathbf{15}$	$(6-1)(5-3) = \mathbf{10}$	$(6-1)(5-4) = \mathbf{5}$
2	$(6-2)(5-1) = \mathbf{16}$	$(6-2)(5-2) = \mathbf{12}$	$(6-2)(5-3) = \mathbf{8}$	$(6-2)(5-4) = \mathbf{4}$
3	$(6-3)(5-1) = \mathbf{12}$	$(6-3)(5-2) = \mathbf{9}$	$(6-3)(5-3) = \mathbf{6}$	$(6-3)(5-4) = \mathbf{3}$
4	$(6-4)(5-1) = \mathbf{8}$	$(6-4)(5-2) = \mathbf{6}$	$(6-4)(5-3) = \mathbf{4}$	$(6-4)(5-4) = \mathbf{2}$
5	$(6-5)(5-1) = \mathbf{4}$	$(6-5)(5-2) = \mathbf{3}$	$(6-5)(5-3) = \mathbf{2}$	$(6-5)(5-4) = \mathbf{1}$

Есть куда более простой способ
 посчитать сумму всех чисел в таблице:
 надо заметить, что это произведение двух сумм.

	$\sum = (1 + 2 + \dots + 5)(1 + \dots + 4) = 15 \cdot 10 = 150.$
	$2 + 6 + 12 + 20 = 40.$

Селфхак

Графический пароль — это отмеченные в определённом порядке точки. Верные точки остаются отмеченными, неправильные — сбрасывают отметку со всех уже отмеченных. Необходимо вспомнить последовательность из 10 точек. Сколько нажатий на точки ему придётся сделать в худшем случае?

Селфхак

Графический пароль — это отмеченные в определённом порядке точки. Верные точки остаются отмеченными, неправильные — сбрасывают отметку со всех уже отмеченных. Необходимо вспомнить последовательность из 10 точек. Сколько нажатий на точки ему придётся сделать в худшем случае?

Первую кнопку угадает за 9 неудачных попыток. Вторую — за 8, но каждый раз нужно нажимать по 2 кнопки, ... Эти рассуждения приводят нас к формуле:

$$\begin{aligned} &1 \cdot (10 - 1) + 2 \cdot (10 - 2) + 3 \cdot (10 - 3) + 4 \cdot (10 - 4) + \\ &5 \cdot (10 - 5) + 6 \cdot (10 - 6) + 7 \cdot (10 - 7) + 8 \cdot (10 - 8) + \\ &9 \cdot (10 - 9) + 10 = 175. \end{aligned}$$

Современная мебельная фабрика

Стул с 720 ножками падает с лестницы. Выяснилось, что при падении он потерял в три раза меньше ножек, чем у него бы осталось, потеряй он в три раза меньше ножек, чем у него осталось сейчас. Так сколько же ножек осталось у стула?

Современная мебельная фабрика

Стул с 720 ножками падает с лестницы. Выяснилось, что при падении он потерял в три раза меньше ножек, чем у него бы осталось, потеряй он в три раза меньше ножек, чем у него осталось сейчас. Так сколько же ножек осталось у стула?

$$(720 - x) \cdot 3 = 720 - \frac{1}{3} \cdot x$$

$$x = 540$$

Шутка

Братья Андрей и Миша Ивановы играют в игру. Андрей загадывает число n , имеющее ровно 7 простых делителей. Миша придумывает многообразие, описываемое формулой степени не более чем n^2 . Андрей указывает 5 точек на этом многообразии и объявляет длины не более чем 7 отрезков, соединяющих эти точки в пространстве \mathbb{R}^{25+1} . Если выбранные точки вместе с указанными Андреем отрезками образуют жёсткую структуру, то побеждает Миша. В противном случае мальчики меняются местами. Игра продолжается, пока либо у кого-то из мальчиков не получилась жёсткая структура, либо не прошло 1003 хода — тогда побеждает Миша. В зависимости от n назовите фамилию победителя при правильной игре.

Широкий не значит высокий

Докажите, что максимальная возможная площадь n -угольника, все стороны которого имеют длину 1, меньше, чем максимальная возможная площадь $n + 1$ -угольника, все стороны которого имеют длину 1.

Широкий не значит высокий

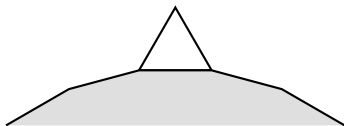
Докажите, что максимальная возможная площадь n -угольника, все стороны которого имеют длину 1, меньше, чем максимальная возможная площадь $n + 1$ -угольника, все стороны которого имеют длину 1.

Дети же не знают, что максимальную площадь имеют правильные n -угольники.

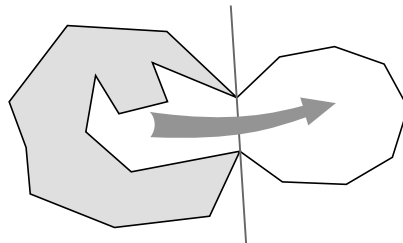
Для каждого многоугольника с n сторонами длины 1 построим многоугольник с $n + 1$ сторонами, площадь которого больше.

Широкий не значит высокий

Если выпуклый



Если невыпуклый



Сумма простых — простое?

Найдите наибольшее натуральное число n такое, что существует набор из n различных простых чисел, сумма любых трёх чисел из которого является простым числом.

Сумма простых — простое?

Найдите наибольшее натуральное число n такое, что существует набор из n различных простых чисел, сумма любых трёх чисел из которого является простым числом.

- из всех простых только 3 делится на 3;
- если у простых p_1, p_2 и p_3 одинаковые остатки от деления на 3, то $p_1 + p_2 + p_3$ делится на 3;
- поэтому нельзя брать более двух чисел с одинаковыми остатками;
- лучший вариант для нас p_1, p_2 с остатком 1 и p_3, p_4 с остатком 2.

Пример четырёх таких чисел: 5, 7, 17 и 19.

Всё очень плохо, вокруг сплошная слякоть

Один радист передал другому сообщение: «Всё очень плохо, вокруг сплошная слякоть». Каждый следующий радист передавал дальше сообщение, которое начинал со слов «Привет, друг!», а затем дважды повторял текст сообщения, которое получил. Из скольких слов состоит сообщение, отправленное n -ым радистом?

Всё очень плохо, вокруг сплошная слякоть

Один радист передал другому сообщение: «Всё очень плохо, вокруг сплошная слякоть». Каждый следующий радист передавал дальше сообщение, которое начинал со слов «Привет, друг!», а затем дважды повторял текст сообщения, которое получил. Из скольки слов состоит сообщение, отправленное n -ым радистом?

$$2 \cdot (2^{n+2} - 2) + 2 = 2^{n+1+2} - 2.$$

- Чтобы получить ответ, нужна доля интуиции;
- Доказательство по индукции.

Навыки участника

1 Можно ли?

Да — привести пример;

Нет — **доказать**, что нельзя.

2 Всегда ли?

Да — **доказать** это;

Нет — привести контрпример.

Ещё навыки участника

- 3 Умение строить отрицания:
не (для всякого...) = существует такой, что (не ...);
не (существует такой, что ...) = для всякого (не ...).
- 4 Что такое доказательство —
это обоснованное на каждом шаге рассуждение о том, почему
верно так и никак иначе. Это не приведение одного примера,
для которого выполняется то, что должно быть верно всегда.
- 5 Получаемый результат \gg изученные алгоритмы и клише.

Подготовка к олимпиаде

- 1 Если начнёте тренировать детей для олимпиад — то быстро вырастете из МНС (оно и хорошо).
- 2 Если начнёте специально тренироваться для МНС — есть профильный вариант; условия меняются год от года.
- 3 Если просто учите класс — смотреть на то, чтобы дети находили результат и грамотно его обосновывали.
- 4 Мы бы хотели, чтобы участники умели *писать и высказывать сложную мысль*.

Заключение

Направления, которые мы обсудили сегодня

- (1) Задачи, вдохновлённые реальными явлениями
- (2) Конструктивные задачи
- (3) Ужасный гадкий аккуратный подсчёт
- (4) Задачи, где важно прочитать условие
- (5) Сложные задачи для опытных детей

Спасибо за внимание!

(*) mathnonstop.ru