Математическая логика — 2
V семестр

Лектор: Виктор Львович Селиванов
Записывали: Глеб Минаев, Иван Кабашный
Редактировал: Борис Алексеевич Золотов

МКН СПбГУ, осень 2022

Содержание

1 Логика предикатов

1.1 Истинность и доказуемость

1.1.1 Структура

Бурбаки классифицировал структуры как:

1) операции,
2) частичные порядки,
3) топологические структуры.

Последние не имеют приложения в логике — их мы рассматривать не будем. “Операции” — это структуры алгебраические, “частичные порядки” — это структуры, снабжённые каким-либо отношением.

Определение 1. *Сигнатура* — набор функциональных, предикатных и константных символов вместе с функцией, задающей арность этих символов.

Функциональные символы интерпретируются как функции $A^n \to A$, предикатные символы — как функции $A^m \to \{\text{и}; \text{л}\}$, а константы — как элементы A (или, что равносильно, функции $\{\varnothing\} \to A$).

Будем называть *σ-структурой* (*структурой сигнатуры σ*) пару (A, I), где A — непустое множество, а I — интерпретация сигнатурных символов σ в A.

Пример 1. *Сигнатура упорядоченного кольца — $\langle +,\ \cdot;\ <;\ 0,\ 1\rangle$. Можно добавить вычитание и взятие противоположного, но они выражаются в имеющейся сигнатуре.*

Определение 2. $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ — σ-структуры. Тогда отображение $\varphi : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ называется гомоморфизмом, если оно задаёт $\varphi : A \to B$, что для всякой функции f^n из сигнатуры σ и для всяких $a_1, \ldots, a_n \in A$

$$\varphi(f_A(a_1, \ldots, a_n)) = f_B(\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_n)),$$

для всякого предиката P^m в сигнатуре σ и всяких $a_1, \ldots, a_m \in A$

$$P_A(a_1, \ldots, a_m) \quad \Longrightarrow \quad P_B(\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_m))$$

и для всякой константы c сигнатуры σ

$$\varphi(c_A) = c_B.$$

φ — изоморфизм, если φ — гомоморфизм, биективен, и φ^{-1} — гомоморфизм.

$\mathbb{A}$ называется *подструктурой* $\mathbb{B}$ ($\mathbb{A} \subseteq \mathbb{B}$), если $A \subseteq B$ и $\varphi : A \to B, a \mapsto a$ — гомоморфизм.

1.1.2 Термы и формулы

Определение 3. Фиксируем некоторое множество V — *"множество переменных"* — символы $\wedge$, $\vee$, $\to$, $\neq$ и символы $\forall x$ и $\exists x$ для всякого $x \in V$.

Терм — это понятие, рекурсивно определяемое следующими соотношениями:

- переменная — терм,
- константа — терм,
- для всяких термов $t_1, \ldots, t_n$ и функции f^n выражение $f(t_1, \ldots, t_n)$ — терм.

Формула — это понятие, рекурсивно определяемое следующими соотношениями:

- для всяких термов t_1, t_2 выражение $t_1 = t_2$ — формула,
- для всяких предиката P^n из σ и термов $t_1, \ldots, t_n$ выражение $P(t_1, \ldots, t_n)$ — формула,
- для всяких формул φ и ψ выражения $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \vee \psi$, $\varphi \to \psi$, $\neg\varphi$ — формулы,
- для всяких формулы φ и переменной x выражения $\forall x \varphi$ и $\exists x \varphi$ — формулы.

For_σ — множество всех формул с сигнатурой σ.

Пример 2. *В кольцах всякий терм можно свести к полиному с целыми коэффициентами. В мультипликативных группа — моному с целым коэффициентов.*

Задача 1. Семейства термов и формул задаются контекстно свободными грамматиками.

Определение 4. Переменная x называется *свободной* в формуле φ, если есть вхождение x не покрывается никаким квантором $\forall x$ и никаким квантором $\exists x$. $\mathrm{FV}(\varphi)$ — множество всех свободных переменных формулы φ.

1.1.3 Значение термов и формул

Определение 5. Пусть t — терм в сигнатуре σ, а $\mathbb{A}$ — σ-структура. Тогда $t^{\mathbb{A}} : A^n \to A$ — *означивание* t, некоторая функция, полученная подставлением вместо констант их значений в $\mathbb{A}$ и последующим рекурсивным означиванием по синтаксическому дереву t. Аналогично получается означивание формулы $f^{\mathbb{A}} : A^n \to \{\text{и}; \text{л}\}$.

Определение 6. *Предложение* в сигнатуре σ — формула без свободных переменных.

$$\varphi^{\mathbb{A}} \in \{T, F\},$$
$$\varphi^{\mathbb{A}} = T \iff \mathbb{A} \models \varphi.$$

Определение 7. *Моделью* данного множества предложения Γ называется структура, в которой все предложения из Γ истины. Если $\mathbb{A}$ — это модель, то иногда пишут $\mathbb{A} \models \Gamma$.

Если Γ — множество предложений, φ — предложение. Говорят, что φ логически следует из Γ ($\Gamma \models \varphi$), если φ истино в любой модели Γ.

Определение 8. Предложение φ называется тождественно истино, если оно истино в любой структуре. Иногда пишут $\models \varphi$.

Утверждение 1.

- $\Gamma \models \varphi$ *тогда и только тогда, когда* $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ *не имеет модели.*
- φ *— тождественная истина тогда и только тогда, когда* $\models \varphi$.
- Γ *— конечное;* $\Gamma \models \varphi$ *тогда и только тогда, когда* $(\wedge\Gamma) \to \varphi$ *— тожественная истина.*

1.1.4 Ультрафильтры

Определение 9. Пусть I — непустое множество. *Фильтром* на множестве I называется непустое множество $F \subseteq \mathcal{P}(I)$ (где $\mathcal{P}(I)$ — множество всех подмножеств), которое не содержит $\emptyset \subset I$, а также замкнуто относительно пересечения:

$$\forall\, A, B \in F \quad A \cap B \in F,$$

и взятия надмножеств:

$$\forall\, A \in F \quad A \subseteq B \subseteq I \implies B \in F.$$

Фильтр F называется *ультрафильтром*, если $A \in F$ или $\overline{A} \in F$ для любого $A \subseteq I$.

Утверждение 2.

1) *Фильтр F является ультрафильтром тогда и только тогда, когда он является максимальным по включению среди всех фильтров (то есть, нет фильтра, который бы его расширял).*

2) Пусть F — ультрафильтр и A, $B \subseteq I$, тогда

$$A \in F \iff \overline{A} \notin F,$$
$$A \cup B \in F \iff A \in F \text{ или } B \in F.$$

3) Любой фильтр содержится в некотором ультрафильтре.

Доказательство. Докажем 1.

Пусть F — ультрафильтр. Утверждается, что нет фильтра F', который содержал бы F ($F' \supseteq F$). Предположим противное, т.е. что существует такое A, что оно принадлежит F' и не принадлежит F. Раз $A \notin F$, то $\overline{A} \in F$. В силу того, что $F \subseteq F'$, то $\overline{A}$ также принадлежит F'. Таким образом, $\emptyset = A \cap \overline{A} \in F'$, противоречие.

В обратную сторону, F — максимальный по включению фильтр. От противного, пусть есть множество $A \subseteq I$ такое, что $A, \overline{A} \notin F$. Рассмотрим

$$F' = \{X \subseteq I \mid \exists B \in F \ A \cap B \subseteq X\}.$$

F' должно быть фильтром (замкнутость вверх по включению понятна, замкнутость относительно пересечения также верна, так как если $X, Y \in F'$, $A \cap B \subseteq X$, $A \cap C \subseteq Y$ для $B, C \in F$, то $A \cap B \cap C \subseteq (X \cap Y)$. $B \cap C \in F$, а значит, $X \cap Y \in F'$; и последнее, если $\emptyset \in F'$, то получается очевидное противоречие из того, что $A \cap B$ всегда непусто — иначе $\overline{A} \supseteq B$, а F замкнуто относительно взятия надмножеств).

Докажем 2. Пусть F — ультрафильтр. Одновременно A и $\overline{A}$ принадлежать F не могут. Имеем $A \in F \vee \overline{A} \in F$, откуда понятно. Второе утверждение очевидно в левую сторону.

В другую сторону, имеем $A \cup B \in F$, предоположим противное. Пусть $A, B \notin F$, значит, $\overline{A}, \overline{B} \in F$, а тогда $\overline{A} \cap \overline{B} \in F$. По закону деМоргана, $\overline{A \cup B} \in F$, откуда $A \cup B \notin F$.

Докажем 3. Пусть имеется F. Утверждается, что существует ультрафильтр F^*, который сожержит F ($F^* \supseteq F$). Данное утверждение нетривиально и в каком-то смысле схоже с аксиомой выбора. Применим лемму Цорна.

Лемма 3 (Цорн)**.** *Пусть $(P; \leq)$ — частичный порядок, в котором всякая линейная цепь $A \supseteq P$ имеет верхнюю границу. Тогда в этом частичном порядке есть максимальный элемент.*

Рассмотрим множество всех фильтров $P = \{G - \text{фильтр} \mid F \subseteq G\}$, и порядок $\subseteq$. Пусть $\mathfrak{F}$ — цепочка фильтров. Несложно проверить, что $F' = \bigcup \mathfrak{F}$ является фильтром, это верхняя грань цепочки. По лемме, существует F^* — максимальное расширение. Оно является ультрафильтром. ☐

Пример 3.

- *Пусть есть I, тогда $\{I\}$ — фильтр.*
- *Пусть $\emptyset \neq A \subseteq I$, тогда $F = \{X \subseteq I \mid A \subseteq X\}$ — фильтр. Является ультрафильтром тогда и только тогда, когда $|A| = 1$. В таком случае называется* главным ультрафильтром.

Задача 2. Если I бесконечное, то в $P(I)$ есть неглавные ультрафильтры. Для доказательства рассматриваем $F = \{A \subseteq I \mid A \text{ — коконечно}\}$, и существующий по доказанному ранее $F^* \supseteq F$.

1.1.5 Декартово и фильтрованное произведения структур

Пусть имеется некоторое проиндексированное семейство σ-структур $\{\mathbb{A}_i\}_{i\in I}$.

Определение 10 (Декартово произведение)**.** Определим σ-структуру на декартовом произведении нескольких σ-структур. Мы будем обозначать её $\mathbb{A} = \prod_{i\in I} \mathbb{A}_i$.

Носителем структуры будет множество

$$A = \prod_{i\in I} A_i = \left\{ a\colon I \longrightarrow \bigsqcup_{i\in I} A_i \;\middle|\; a(i) \in A_i \right\}.$$

Константы, функции и предикаты интерпретируются следующим образом:

1) $c^{\mathbb{A}}(i) = c^{\mathbb{A}_i}$ — отображение, возвращающее в каждой структуре соответствующую константу;
2) $\big(f^{\mathbb{A}}(a_1, \ldots, a_n)\big)(i) = f^{\mathbb{A}_i}(a_1(i), \ldots, a_n(i))$ — действуем функцией в каждой структуре, собираем из образов элемент декартова произведения;
3) $P^{\mathbb{A}}(a_1, \ldots, a_n) \iff P^{\mathbb{A}_i}(a_1(i), \ldots, a_n(i))$ выполнен для всех $i \in I$.

Определение 11 (Фильтрованное произведение)**.** Пусть F — фильтр на множестве I. *Фильтрованное произведение* нескольких структур (обозначается $\mathbb{A}_F$) получается факторизацией их декартова произведения по следующему отношению эквивалентности:

$$a \equiv_F b \overset{\text{def}}{\iff} \{i \in I \mid a(i) = b(i)\} \in F$$

(говорят, что $a(i) = b(i)$ *для F-большинства i).*

Носителем фильтрованного произведения будет фактор-множество $A/{\equiv_F}$, состоящее из классов эквивалентности $\{[a] \mid a \in A\}$. Константы, функции и предикаты интерпретируются следующим образом:

1) $c^{\mathbb{A}_F} = \big[c^{\mathbb{A}}\big]$ — класс элемента, собранного из соответствующих констант во всех структурах;
2) $f^{\mathbb{A}_F}([a_1], \ldots, [a_n]) = \big[f^{\mathbb{A}}(a_1, \ldots, a_n)\big]$ — надо проверить, что определено однозначно (потому что пересечение множеств фильтра принадлежит фильтру);
3) $P^{\mathbb{A}_F}([a_1], \ldots, [a_n]) \iff P^{\mathbb{A}_i}(a_1(i), \ldots, a_n(i))$ для F-большинства i.

Если F — ультрафильтр, то $\mathbb{A}_F$ называется *ультрапроизведением.*

Теорема 4 (Лося об ультрапроизведениях)**.** *Пусть F — ультрафильтр на множестве I, $\mathbb{A}_i$ — семейство структур, $\varphi(x_1, \ldots, x_k)$ — σ-формула и пусть $a_1, \ldots, a_k \in \prod_i A_i$. Тогда $\mathbb{A}_F \models \varphi([a_1], \ldots, [a_k])$ тогда и только тогда, когда $\mathbb{A}_i \models \varphi(a_1(i), \ldots, a_n(i))$ для F-большинства индексов.*

1.2 Лекция 3

Утверждение 5 (Следствие). *Для ультрафильтра F и предложения φ выполенно*

$$\mathbb{A}_F \models \varphi \Longleftrightarrow \{i \mid \mathbb{A}_i \models \varphi\} \in F.$$

Доказательство. (теоремы Лося) Доказательство приведём индукцией по построению формулы. Простейшие формулы в виде предиката и равенства двух термов рассматриваются очевидно, это - база. Обратим внимание на функциональный символ $f \in \sigma$. Как он интерпретируется?

$$f^{\mathbb{A}_F}([a_1], \ldots, [a_k]) := [\lambda_i f^{\mathbb{A}_i}(a_1(i), \ldots, a_k(i))]$$

Из определения декартового у нас было

$$f^{\mathbb{A}}([a_1], \ldots, [a_k]) := \lambda_i f^{\mathbb{A}_i}(a_1(i), \ldots, a_k(i)),$$

где $i\mathbb{A} \mapsto f^{\mathbb{A}_i}(a_1(i), \ldots, a_k(i))$, и $\lambda x f(x) = f$. Причём согласно фильтру

$$\begin{gathered} a_1 \equiv_F a_1' \\ \vdots \\ a_k \equiv_F a_k' \\ f^{\mathbb{A}}(a_1, \ldots, a_k) \equiv_F f^{\mathbb{A}}(a_1', \ldots, a_k'). \end{gathered}$$

$J_i\{i \mid a_1(i) = a_1'(i)\} \in F$, $f^{\mathbb{A}_i}(a_1(i), \ldots, a_k(i)) = J_1 \cap \ldots, \cap J_k \in F = f^{\mathbb{A}}(a_1', \ldots, a_k')$. Константы $c^{\mathbb{A}}$ интерпретируются как $\lambda_i c^{\mathbb{A}_i}$, переменные означиваются каким-то образом $x_j \mathbb{A} pstoa_j(i)$, $t^{\mathbb{A}_i} = f^{\mathbb{A}_i}(t_1^{\mathbb{A}_i}, \ldots, t_k^{\mathbb{A}_i})$, значит, $t^{\mathbb{A}}(a_1, \ldots, a_k) = f^{\mathbb{A}}(t_1^{\mathbb{A}}(\overline{a}), \ldots, t_k^{\mathbb{A}}(\overline{a}))$. Соответственно, из определения это верно для простейших формул. Перейдём теперь к сложным формулам.

Более сложные формулы строятся из простых при помощи логических связок и кванторов. Достаточно рассматривать только конъюнкцию, отрицанию и существование (остальные выражаются через них). Пусть мы хотим проверить

$$\mathbb{A}_F \models (\varphi \wedge \psi)(a_1, \ldots, a_k).$$

Это означает, что $\mathbb{A}_F \models \varphi([\overline{a}])$ и $\mathbb{A} \models \psi([\overline{a}])$. $J = \{i \mid \mathbb{A}_i \models \varphi(\overline{a(i)})\} \in F$. Проверяется $i \in J \cap K$,

$$\{\mathbb{A}_i \models (\varphi \wedge \psi)(a_1(i), \ldots, a_k(i))\} \in F.$$

Отрицание также легко проверяется для ультрафильтров, так как есть свойство дополнения.

$$\begin{gathered} \mathbb{A}_F \models \neg\varphi([\overline{a}]) \\ \neg(\mathbb{A}_F \models \varphi([\overline{a}])) \\ \ldots \end{gathered}$$

Существование проверяется следующим образом:

$$\begin{aligned}
\varphi &= \varphi(x_1, \ldots, x_k),\\
\varphi &= \exists x \theta(x, x_1, \ldots, x_k).\\
\mathbb{A}_F &\models \varphi([a_1], \ldots, [a_k]),\\
\mathbb{A}_F &\models \theta([b], [a_1], \ldots, [a_k]) \text{ для некоторого } b \in \mathbb{A}.
\end{aligned}$$

И нам нужно доказать в две стороны. Для этого рассматриваем

$$\begin{aligned}
J &= \{i \mid \mathbb{A}_i \models \theta(b(i), a_1(i), \ldots, a_k(i))\},\\
K &= \{i \mid \mathbb{A}_i \models \varphi(a_1(i), \ldots, a_k(i))\}.
\end{aligned}$$

Это — элементы F, которые в разных случаях лежат друг в друге. Не уловил суть, надо будет дописать и переписать. □

Теорема 6 (Гёделя-Мальцева о компактности)**.** *Бесконечное множество предложений* Γ *имеет модель тогда и только тогда, когда каждое его конечное подмножество* Γ *имеет модель.*

Доказательство. В одну сторону очевидно. Доказываем в обратную сторону.

Пусть $I = \{i \mid i$ — конечное подмножество $\Gamma\}$. Из существования модели для каждого $i \in I$, по аксиоме выбора, существует семейство структур $\{\mathbb{A}_i\}_{i \in I}$ такое, что $\forall i \; \mathbb{A}_i \models i$.

Будем строить ультрапроизведение, соответствующее декартовому произведению $\prod_{i \in I} \mathbb{A}_i$, подходящее под требования теоремы. Начнём с построения фильтра. Для каждого $i \in I$ пусть $G_i = \{j \in I \mid i \subseteq j\}$. Для каждой пары $i, j \in I$ выполнено $G_i \cap G_k = G_{i \cup k}$. Пусть $F = \{A \subseteq I \mid \exists i \; G_i \subseteq A\}$. Можно проверить, что это фильтр ($\emptyset$ отсутствует, так как все G_i непусты; надмножество $A \supseteq G_i$ тоже содержит G_i; пересечение $A \supseteq G_i$ и $B \supseteq G_j$ содержит $G_{i \cup j}$). По доказанному ранее, существует ультрафильтр $H \supseteq F$.

Наконец, рассмотрим ультрапроизведение $\mathbb{A}_H$. Для любой формулы $\varphi \in \Gamma$, имеем $\{\varphi\} \in I$, поэтому $G_{\{\varphi\}} \in F \subseteq H$. По теореме Лося, так как $\forall i \in G_{\{\varphi\}}$ выполнено $\mathbb{A}_i \models \varphi$, то и $\mathbb{A}_H \models \varphi$. □

1.2.1 Понижение и повышение мощности

Определение 12.

- (Уже определялось выше) $\mathbb{A}$ — *подструктура* $\mathbb{B}$ (обозначается $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{B}$), если $A \subseteq B$ и значения простых формул на элементах $\mathbb{A}$ в $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ совпадают;
- $\mathbb{A}$ — *элементарная подструктура* $\mathbb{B}$ (обозначается $\mathbb{A} \preceq \mathbb{B}$), если $A \subseteq B$ и значения любых формул на элементах $\mathbb{A}$ в $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ совпадают (то есть $\forall \overline{a} \in \mathbb{A}$ выполнено $\varphi^{\mathbb{A}}(\overline{a}) = \varphi^{\mathbb{B}}(\overline{a})$);

- $\mathbb{A}$ *элементарно эквивалентно* $\mathbb{B}$ (обозначается $\mathbb{A} \equiv \mathbb{B}$), если они удовлетворяют одни и те же предложения.

Утверждение 7. *$\mathbb{A} \preceq \mathbb{B}$, тогда $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{B}$ и $\mathbb{A} \equiv \mathbb{B}$.*

Теорема 8 (Лёвенгейма-Сколема, понижение)**.** *Пусть есть $\mathbb{A}$, $X \subseteq A$, $|X| \leq |For_\sigma|$. Тогда существует $\mathbb{B} \preceq \mathbb{A}$: $X \subseteq B$ и $|\mathbb{B}| \leq |For_\sigma|$.*

1.3 Лекция 4

Доказательство. Построим последовательность $X = S_0 \subseteq S_1 \subseteq \ldots$, где

$$S_{n+1} = S_n \cup \{\eta(e) \mid e \in E_n\},$$

где E_n и $\eta : E_n \to A$ определены следующим образом:

$$E_n = \{(\overline{a}, \varphi(\overline{x}, y)) \mid \overline{a} \in S_n \text{ и } \mathbb{A} \models \exists y\ \varphi(\overline{a}, y)\} \quad \text{и} \quad \mathbb{A} \models \varphi(\overline{a}, \eta(e))\ (\forall e \in E_n).$$

В качестве B просто возьмём $\bigcup_n S_n$. Нужно проверить, что $|B| \leq |\mathrm{For}_\sigma|$ — это делается индукцией по S_i. E_n по мощности не превосходит For_σ посредством сравнения через For_σ^2, откуда и получаем требуемое.

Рассмотрим теперь $\mathbb{B} = (B, I)$ с сигнатурой σ и проверим, что B замкнуто относительно интерпретаций элементов сигнатуры. Для константных символов выполнено $(\emptyset, y = c) \in E_0$. Для функционального символа f, если элементы $\overline{a} \in S_n$, то $(\overline{a}, y = f(\overline{a})) \in E_n$. А интерпретация предикатов в структуре $\mathbb{B}$ задаётся как и в $\mathbb{A}$:

$$P^{\mathbb{B}}(b_1, \ldots, b_n) = T \iff P^{\mathbb{A}}(b_1, \ldots, b_n) = T.$$

Осталось лишь проверить, что для любой формулы $\varphi(x_1, \ldots, x_k)$ и для любых значений переменных $(a_1, \ldots, a_k) = \overline{a} \in B$ значение на этих элементах в $\mathbb{B}$ будет совпадать со значением в $\mathbb{A}$:

$$\mathbb{B} \models \varphi(\overline{a}) \Longleftrightarrow \mathbb{A} \models \varphi(\overline{a}).$$

Проверяется это, конечно, индукцией по построению формулы. Рассмотрим $\wedge, \neg$ и $\exists$ — через них всё выражается — и проверим для них. Конъюнкция — очевидна, ровно как и отрицание. Интерес представляет существование. Пусть $\psi(\overline{x}) = \exists y\, \varphi(\overline{x}, y)$. Пусть для φ уже доказано, что $\mathbb{B} \models \varphi(\overline{a}, c) \Longleftrightarrow \mathbb{A} \models \varphi(\overline{a}, c)$. Слева направо требуемое очевидно, а справа налево получается из построенной конструкции: если $\overline{a} \in S_n$, то $(\overline{a}, \varphi) \in E_n$, на шаге $n+1$ получим нужный $c \in S_{n+1}$, значит $\mathbb{B} \models \psi(\overline{a})$. $\square$

Замечание. Теория ZFC строится в сигнатуре $\{=, \in\}$. Множестваo $\{\varphi \mid \mathrm{ZFC} \models \varphi\}$ — в точности множество всех математических теорем. Мы считаем, что ZFC непротиворечива (то есть из ZFC не следует тождественно ложного утверждения; это гипотеза).

Рассмотрим $\mathbb{A} \models \mathrm{ZFC}$. По теореме Лёвенгейма-Сколема, так как мощность множества формул счётно, то существует счётная модель $\mathbb{A}_0 \models \mathrm{ZFC}$. Это утверждение называется *парадоксом Сколема.* На самом деле никаких противоречий нет. Но показывает, что понятие мощности не такое простое, каким кажется на первый взгляд.

Сигнатура τ называется *обогащением* сигнатуры σ (записывается $\sigma \subseteq \tau$), если последняя лежит в первой и дополнение непусто. Если $\mathbb{A}$ — структура в сигнатуре σ, то определив интерпретацию символов $\tau \backslash \sigma$, то получим структуру $\mathbb{A}$ сигнатуры τ — тоже называется обогащением. Наоборот: если $\mathbb{B}$ — τ-структура, то $B|_\sigma$ — *обеднение.* Чаще всего сигнатуры обобщаются константными символами.

Определение 13.

1) Пусть $\mathbb{A}$ — σ-структура. $\sigma_\mathbb{A} = \sigma \cup \{c_a \mid a \in A\}$, где c_a — новые константные символы, причём $c_a \neq c_b$ при $a \neq b$. $D(\mathbb{A})$ — множество атомарных формул сигнатуры $\sigma_\mathbb{A}$ (либо $c = d$, либо $f(c_1, \ldots, c_k) = d$, либо $P(c_1, \ldots, c_k)$, где все аргументы — константы) и их отрицаний, истинных в $\mathbb{A}$ при интерпретации $\sigma_a \models a$. (*диаграмма* $\mathbb{A}$)

2) *Элементарная диаграмма* $\mathbb{A}$ — это множество $D^*(\mathbb{A})$ всех предложений $\sigma_\mathbb{A}$, истинных в $\mathbb{A}$. ($D(\mathbb{A}) \subseteq D^*(\mathbb{A})$)

Утверждение 9.

1) *Если* $\mathbb{B} \models D(\mathbb{A})$, *то* $\mathbb{B}|_\sigma$ *содержит подструктуру* $\mathbb{A}' \subseteq \mathbb{B}|_\sigma$ *такую, что* $\mathbb{A}' \simeq \mathbb{A}$.

2) *Если* $\mathbb{B} \models D^*(\mathbb{A})$, *то* $\mathbb{B}|_\sigma$ *содержит элементарную подструктуру, изоморфную* $\mathbb{A}$.

Доказательство. В каждом пункте нужная структура состоит из множества A' всех констант сигнатуры $\sigma_\mathbb{A}$. □

Теорема 10 (Лёвенгейма-Сколема о повышении мощности)**.** *Пусть имеется бесконечная* σ*-структура* $\mathbb{A}$ *и* $\varkappa \geq \max(|A|, |For_\sigma|)$. *Тогда найдётся* $\mathbb{B} \succeq \mathbb{A}$ *мощности в точности* $\varkappa$.

Доказательство. Рассмотрим исходную сигнатуру и дважды её расширим: $\sigma \mapsto \sigma_\mathbb{A} \mapsto \tau = \sigma_\mathbb{A} \cup \{d_x \mid x \in \kappa\}$ так, что $x \neq x' \Rightarrow d_x \neq d_{x'}$. И построим множество предложений сигнатуры τ

$$\Gamma = D^*(A) \cup \{\neg(d_x = d_{x'}) \mid x, x' \in \varkappa, x \neq x'\}.$$

Любое конечное $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ имеет модель, являющуюся τ-расширением структуры $\mathbb{A}$ (интерпретируем $c_a \mapsto a$, а конечному подмножеству $\{d_{x_k}\}_{k \leq n}$, входящих в Γ_0, сопоставим различные элементы A). По теореме о компактности существует $\mathbb{C}$ — τ-структура, такая, что $\mathbb{C} \models \Gamma$.

Тогда $\varkappa \leq |C|$ из-за существования инъекции $x \mapsto d_x$. $\mathbb{C}|_{\sigma_\mathbb{A}} \models D^*(\mathbb{A})$, значит есть $\mathbb{A}' \preceq \mathbb{C}$, изоморфная $\mathbb{A}$. Воспользуемся теоремой Лёвенгейма-Сколема о понижении мощности для $\mathbb{C}$ и $X \supseteq A'$ мощности $\varkappa$, получим $\mathbb{B}' \preceq \mathbb{C}$ мощности $|\mathbb{B}'| \leq |\mathrm{For}_\tau| = \varkappa$. С другой стороны, $B' \supseteq X$, поэтому $|B'| \geq |X| = \varkappa$. Значит $|\mathbb{B}'| = \varkappa$. Обеднение $\mathbb{B}'$ и есть искомая структура. □

Определение 14.

- *Теория* T — множество предложений сигнатуры σ.
- Теории T соответствует класс структур $\mathrm{Mod}(T) = \{A \mid A \models T\}$
- Классу структур $K \subseteq \mathrm{Str}_\sigma$ соответствует теория $\mathrm{Th}(K) = \{\varphi$ — предложение $\mid \forall \mathbb{A} \in K\ \mathbb{A} \models \varphi\}$
- Класс структур K называется *аксиоматизируемым*, если $K = \mathrm{Mod}(T)$ для некоторой теории T.

1.4 Лекция 5

Утверждение 11 (следствие теоремы Лёвенгейма—Сколема)**.**

1) *Если σ-теория имеет бесконечную модель, то она имеет модель любой мощности хотя бы $|For_\sigma|$;*

2) *Если σ-теория имеет конечные модели сколь угодно большой мощности, то она имеет модель любой мощности хотя бы $|For_\sigma|$.*

Доказательство. В пункте 1 сначала берём модель $\mathbb{B}$ очень большой мощности (как в доказательстве теоремы о повышении с использованием теоремы о компактности). Потом, по теореме о понижении мощности находим элементарную подструктуру $\mathbb{C} \preceq \mathbb{B}$ мощности $|\mathrm{For}_\sigma|$. TODO: Лектор не закончил доказательство, отвлёкшись на следующую теорему. □

Теорема 12 (без доказательства)**.** *Логика предикатов — единственная логика, для которой верны и теорема о компактности и теорема о понижении мощности.*

1.5 Аксиоматизируемые классы структур

Определение 15. $\mathrm{Sent}_\sigma \supseteq T$, $\mathrm{Str}_\sigma \supseteq K$. Сопоставим $T \mapsto \mathrm{Mod}(T)$, $K \mapsto \mathrm{Th}(K) = \{\varphi \mid \forall \mathbb{A} \in K(\mathbb{A} \models \varphi)\}$.

1) Класс K называется *аксиоматизируемым*, если $K = \mathrm{Mod}(T)$ для некоторой теории T;

2) K — *конечно аксиоматизируемый*, если $K = \mathrm{Mod}(T)$ для некоторого конечного $T = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$. Это равносильно аксиоматизируемости одной формулой $(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n)$

Предложение 13.

1) *$T \subseteq T'$, тогда $Mod(T) \supseteq Mod(T')$;*

2) *$K \subseteq K'$, тогда $Th(K) \supseteq Th(K')$;*

3) *$K \subseteq Mod(Th(K))$ и $T \subseteq ThMod(T)$;*

4) *Любое пересечение аксиоматизируемых классов является аксиоматизируемым классом. Объединение двух аксиоматизируемых классов является аксиоматизируемым классом;*

5) *Класс K является аксиоматизируемым тогда и только тогда, когда $K = Mod(Th(K))$;*

6) *K конечно аксиоматизируемый тогда и только тогда, когда K и $Str_\sigma \backslash K$ аксиоматизируемы;*

7) *K — аксиоматизируемый тогда и только тогда, когда K замкнут относительно $\equiv$ и ультрапроизведений.*

Доказательство. Свойства 1, 2, 3 и 5 очевидны. Свойство 6 давалось на практику.

В пункте 4 для $\{K_i\}_{i\in I}$ с $K_i = \mathrm{Mod}(T_i)$ выполнено $\bigcap K_i = \mathrm{Mod}(\bigcup T_i)$. Для $K = \mathrm{Mod}(T)$, $K' = \mathrm{Mod}(T')$ выполнено $K \bigcup K' = \mathrm{Mod}(\{\varphi \vee \psi \mid \varphi \in T, \psi \in T'\})$

Докажем 7 в левую сторону (в правую — д/з). Пусть $\{\mathbb{A}\}_{i\in I} \in K$, тогда $\mathsf{MA}_F \in K$. Проверим, что K совпадает с множеством $\mathrm{Mod}(\mathrm{Th}(K))$ (этого достаточно по пункту 5), причём из свойства 3 включение K в множество моделей очевидно, а с другим придётся повозиться.

Пусть $\mathbb{A} \models \mathrm{Th}(K)$, и нам нужно показать, что $\mathbb{A} \in K$. $\mathbb{A} \equiv \mathbb{B}_{F^*}$, где F^* — некий ультрафильтр на подходящем множестве I; $B_i \in K$. Возьмём $I := \mathrm{Th}(A)$. Утверждается, что для любого $\varphi \in \mathrm{Th}(\mathbb{A})$ существует $\mathbb{B} \in K$ такой, что $\mathbb{B} \models \varphi$.

Возьмём любое φ и предположим, что это не верно. То есть, для любой структуры $\mathbb{B} \in K$, $\mathbb{B} \models \neg\varphi$, тогда $\neg\varphi \in \mathrm{Th}(K)$ и в $\mathbb{A}$ истино $\neg\varphi$ — противоречие. Таким образом $\varphi \mapsto \mathbb{B}_\varphi \models \varphi$, и мы получили семейство структур. Надо построить ультрафильтр.

Для каждого $\varphi \in I$ рассмотрим $U_\varphi := \{\psi \in \mathrm{Th}(\mathbb{A}) | \models \psi \to \varphi\}$ (то есть импликации $\psi \to \varphi$ тождественно истинны) $\varphi \in U_\varphi$, поэтому непусто. $U_\varphi \cap U_{\varphi'} = U_{\varphi\wedge\varphi'} \neq \emptyset$ и принадлежит $\mathrm{Th}(\mathbb{A})$. Пусть $F = \{J \subseteq \mathrm{Th}(\mathbb{A}) \mid \exists\varphi\, (J \supseteq U_\varphi)\}$. Это фильтр. Пусть F^* — любой ультрафильтр, расширяющий F. Проверим, что $\mathbb{A} \equiv B_{F^*}$.

Пускай для некоторого предложения φ выполнено $\mathbb{A} \models \varphi$, по определению $\varphi \in I = \mathrm{Th}(\mathbb{A})$, $\mathbb{B}_\varphi \models \varphi$. Хотим доказать

$$U_\varphi \subseteq \{\psi \in \mathrm{Th}(\mathbb{A}) \mid \mathbb{B}_\psi \models \varphi\} \in F \subseteq F^*.$$

Действительно, для всех $\psi \in U_\phi$ выполнено $\models \psi \to \varphi$, в частности $\mathbb{B}_\psi \models \psi \to \varphi$. Также $\mathbb{B}_\psi \models \psi$, поэтому $\mathbb{B}_\psi \models \varphi$. Значит, по теореме Лося, $B_{F^*} \models \varphi$. □

Определение 16 (Иерархия по числу перемен кванторов)**.**

- Σ_0 — все формулы, равносильные бескванторным формулам;
- Σ_1 — формулы, равносильные формулам вида $\exists\overline{x}\, \psi(\overline{x}, \overline{y})$, где ψ — бескванторная;
- Σ_2 — формулы, равносильные формулам вида $\exists\overline{x_1}\, \forall\overline{x_2}\, \psi(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \overline{y})$, где ψ — бескванторная;

- и так далее по *иерархии σ-формул по числу перемен кванторов в предварённой нормальной форме* получаем $\{\Sigma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Π_n — определяется аналогично с заменой $\exists$ на $\forall$ и наоборот.

Предложение 14.

- $\Sigma_n \cup \Pi_n \subseteq \Sigma_{n+1} \cap \Pi_{n+1}$*;*
- $\varphi \in \Pi_n$ *тогда и только тогда, когда* $\neg\varphi \in \Sigma_n$*;*
- $\bigcup \Sigma_n = \bigcup \Pi_n = For_\sigma$.

Теорема 15. *Аксиоматизируемый класс является* Π_1*-аксиоматизируемым (или* универсально аксиоматизируемым*) тогда и только тогда, когда он замкнут относительно подструктур (то есть если какая-то структура лежит в классе, то и любая её подструктура тоже лежит в нём).*

Замечание. Существуют равносильные условия для аксиоматизируемости формулами любого уровня иерархии. Но общий вид этой теоремы весьма труден, в этом курсе не приводятся.

Доказательство. Докажем слева направо. Пусть у нас есть класс $K = \mathrm{Mod}(T)$, где T — множество Π_1 предложений. Нам нужно доказать, что он замкнут относительно подструктур. Пусть $\mathbb{B} \models T$, а $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{B}$. Зафиксируем Π_1-предложение $\varphi = \forall\overline{x}\,\psi(\overline{a})$ из T. $\mathbb{A} \models \varphi$ означает, что для любого набора $\overline{b} \in \mathbb{B}$ выполнено $\psi(\overline{b})$, откуда в частности для любого набора $\overline{b} \in \mathbb{A}$ выполнено $\psi(\overline{b})$. Значит $\mathbb{A} \models \varphi$, откуда $\mathbb{A} \models T$.

Справа налево. $K = \mathrm{Mod}(T)$ для некоторой теории T, введём класс аксиом $\Gamma = \{\varphi \in \Pi_1\text{-предложения} \mid T \models \varphi\}$. Оказывается, что $K = \mathrm{Mod}(\Gamma)$, докажем это. Включение K в $\mathrm{Mod}(\Gamma)$ очевидно. В другую — возьмём некоторую модель множества Γ ($\mathbb{B} \models \Gamma$), тогда нужно проверить, что $\mathbb{B} \in K$, Конечно, нужно воспользоваться замкнутостью. Достаточно найти $\mathbb{C} \in K$, что $\mathbb{B} \subseteq \mathbb{C}$.

Определение 17. Если что, $\mathrm{Th}(\mathbb{A}) = \{\varphi \mid \mathbb{A} \models \varphi\}$, $\Phi \subseteq \mathrm{Sent}_\sigma$, $\mathrm{Th}_\Phi(\mathbb{A}) = \{\varphi \in \Phi | \mathbb{A} \models \varphi\}$.

Утверждается, что существует $\mathbb{A} \models T$ такая, что $\mathrm{Th}_{\Sigma_1}(\mathbb{A}) \supseteq \mathrm{Th}_{\Sigma_1}(\mathbb{B})$. В качестве такого $\mathbb{A}$ возьмём модель $T \cup \mathrm{Th}_{\Sigma_1}(\mathbb{B})$, существование которой мы докажем по теореме о компактности. Предположим, что $T \cup \{\psi_1, \ldots, \psi_n\}$ не имеет модели. $\psi = \psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n \in \Sigma_1$, $T \cup \{\psi\}$ не имеет модели, значит $T \models \neg\psi \in \Pi_1$, а значит, $\mathbb{B} \models \neg\psi$. По определению $\neg\psi \in \Gamma$, $\mathbb{B} \models \Gamma$, поэтому $\mathbb{B} \models \neg\psi$. Но с другой стороны $\mathbb{B} \models \psi$, противоречие.

Нам нужно вложить $\mathbb{B} \subseteq \mathbb{C} \models T$. Это всё равно, что найти модель для $T \cup D(\mathbb{B})$. Применим в очередной раз теорему о компактности. То есть хочется, чтобы $T \cup \{\delta_1, \ldots, \delta_m\}$ имело модель, где $\delta_i = \delta_i(\overline{c})$ ($c \in \sigma_B$). Возьмём какие-то новые переменные и подставим: $\mathbb{B} \models \exists\overline{x}\,(\delta_1(\overline{x}) \wedge \ldots \wedge \delta_m(\overline{x}))$. Это предложение истинно в $\mathbb{B}$, лежит в Σ_1, а значит, истинно и в $\mathbb{A}$. Тогда при подходящей интерпретации $\mathbb{A}$ — искомая модель. $\square$

1.6 Лекция 6

Докажем теперь аналогичную теорему для Π_2. [1]

Теорема 16 (Теорема Чэна-Лося-Сушко)**.** *Аксиоматизируемый класс является Π_2-аксиоматизируемым тогда и только тогда, когда он замкнут относительно объединений цепей структур.*

Замечание. Что значит последнее условие? Если у нас есть возрастающая бесконечная цепочка структур $\mathbb{A}_0 \subseteq \mathbb{A}_1 \subseteq \ldots$, тогда можно построить $\mathbb{A} = \bigcup \mathbb{A}_n$. Носителем будет $A = \bigcup A_n$, предикаты, функции и константы интерпретируются просто через объединение $P^{\mathbb{A}} = \bigcup P^{\mathbb{A}_n}$, и даже если с первого взгляда не верится, это — корректное определение структуры. Таким образом, класс замкнут относительно объединений цепей, если $\forall n\,(\mathbb{A}_n \in K)$, $\mathbb{A}_0 \subseteq \mathbb{A}_1 \subseteq \ldots$, то и $\bigcup \mathbb{A}_n \in K$.

Доказательство. Докажем сначала в лёгкую сторону, слева направо. Пусть у нас есть $K = \mathrm{Mod}(T)$, $T \subseteq \Pi_2$. А также цепочка $\mathbb{A}_i \in K$, тогда нам нужно показать, что их объединение $\mathbb{A} \in K$. Рассмотрим $\varphi \in T$, мы хотим проверить, что $\mathbb{A} \models \varphi = \forall \overline{x}\, \exists \overline{y}\, \psi(\overline{x}, \overline{y})$, ψ — бескванторная. $\mathbb{A}_n \models \varphi$ при любом n. $\overline{a} \in A$ — значение $\overline{x}$. Тогда нужно доказать, что $\mathbb{A} \models \exists \overline{y} \psi(\overline{a}, \overline{y})$. $\overline{a} \in A_n$ для некоторого $n \geq 0$ ($\mathbb{A}_n \subseteq \mathbb{A}$). $\mathbb{A}_n \models \exists \overline{y}\, \psi(\overline{a}, \overline{y})$. Значит найдётся $\overline{b} \in A_n$ такой, что $\mathbb{A}_n \models \psi(\overline{a}, \overline{b})$. Тогда и $\mathbb{A} \models \psi(\overline{a}, \overline{b})$, значит $\mathbb{A} \models \exists \overline{y}\, \psi(\overline{a}, \overline{y})$. $\overline{a}$ брали произвольным, поэтому и исходная формула выводится.

В обратную сторону начало аналогичное предыдущей теореме: для $K = \mathrm{Mod}(T)$ рассматриваем $\Gamma = \{\varphi \in \Pi_2 \mid T \models \varphi\}$ и доказываем $K = \mathrm{Mod}(\Gamma)$. Включение слева направо опять понятно, и далее схема тоже схожа, для $\mathbb{B} \models \Gamma$ мы только хотим, чтобы $\mathbb{B} \models T$. Найдём объединение возрастающей цепочки K-структур $\mathbb{B}_\omega \succeq \mathbb{B}$. Ну то есть, мы её построим для начала. Доказательство того, что существует $A \models T$ такое, что $\mathrm{Th}_{\Sigma_2}(\mathbb{A}) \supseteq \mathrm{Th}_{\Sigma_2}(\mathbb{B})$, аналогично предыдущей теореме. Докажем ещё одно вспомогательное утверждение.

Существуют $\mathbb{A}' \equiv \mathbb{A}$ и $\mathbb{B}' \succeq \mathbb{B}$ такие, что $\mathbb{B} \subseteq \mathbb{A}' \subseteq \mathbb{B}'$. Рассмотрим $\mathrm{Th}(\mathbb{A}) \cup \mathrm{Th}_{\Pi_1}(\mathbb{B}_B)$, где $\mathbb{B}_B$ — естественное σ_B-обогащение $\mathbb{B}$. Если взять любое конечное множество из второй теории объединения, то аналогично предыдущей теореме, они они имеют константы: $\delta_1(\overline{c}), \ldots, \delta_m(\overline{c})$. Значит,

$$\mathbb{B} \models \exists \overline{x}(\delta_1(\overline{x}) \wedge \ldots \wedge \delta_m(\overline{x})) \in \Sigma_2,$$

следовательно, истино и в $\mathbb{A}_B$. $\mathbb{A}'_B$ — любая модель $\mathrm{Th}(\mathbb{A}) \cup \mathrm{Th}_{\Pi_1}(\mathbb{B}_B)$ ($\mathbb{A}'$ — объединение до σ-структуры). $\mathbb{A}' \equiv \mathbb{A}$ и $\mathbb{B} \subseteq \mathbb{A}'$, отрицания к формулам из Π_1 лежат в Σ_1, поэтому из $\mathrm{Th}_{\Sigma_1}(\mathbb{B}_B) \supseteq \mathrm{Th}_{\Sigma_1}(\mathbb{A}'_B)$.

Рассмотрим теперь $D(\mathbb{A}'_B) \cup \mathrm{Th}(\mathbb{B}_B)$. Точно так же рассуждая, как и выше, эта теория имеет модель $\mathbb{B}'_{A'}$ такую, что $\mathbb{B} \preceq \mathbb{B}'$. Исходя из этого и будем строить цепочку.

[1] Окончание доказательства с прошлой лекции в разделе прошлой лекции

Возьмём структуры $\mathbb{B} = \mathbb{B}_0 \subseteq \mathbb{A}_1 (\equiv \mathbb{A}) \subseteq \mathbb{B}_1$. Берём теперь опять $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}_1$, для них применяем опять утверждение из третьего абзаца, получаем, что $\mathbb{B}_1 \subseteq \mathbb{A}_2 (\equiv \mathbb{A}) \subseteq \mathbb{B}_2$, и так далее. $\mathbb{A}_n \models T$, $\mathbb{A}_\omega = \bigcup \mathbb{A}_n \models T$. $\mathbb{B} = \mathbb{B}_0 \preceq \mathbb{B}_1 \preceq \ldots$. Значится, $\mathbb{B}_\omega = \mathbb{A}_\omega$, $\mathbb{B}_0 \preceq \mathbb{B}_\omega$, откуда и получается требуемое. □

1.6.1 Полнота, модельная полнота, элиминация кванторов.

Определение 18. Теория T называется *полной*, если она имеет модель и из неё следует либо φ, либо $\neg\varphi$ для любого σ-предложения.

Утверждение 17. *Для непротиворечивой теории T равносильны следующие условия:*

1) *T — полна;*

2) *$[T] = Th(\mathbb{A})$, для любой $\mathbb{A} \models T$ (где $[T] = \{\varphi \mid T \models \varphi\}$ —* замыкание теории*);*

3) *$Th(\mathbb{A}) = Th(\mathbb{B})$ для любых $\mathbb{A}$, $\mathbb{A} \models T$.*

Определение 19. T называется категоричной в мощности H, если T имеет единственную с точностью до изоморфизма модель мощности H.

Теорема 18 (тест Воота)**.** *Если теория не имеет конечных моделей и категорична в некоторой мощности $\geq |For_\sigma|$, то она полна.*

Определение 20. Непротиворечивая теория T *модельно полна*, если $\subseteq$ и $\preceq$ на $\mathrm{Mod}(T)$ совпадают.

1.7 Лекция 7

Теорема 19. *Для непротиворечивой теории T равносильны следующие условия:*

1) *T — модельно полна;*

2) *Для любой $\mathbb{A} \models T$, теория $T \cup D(\mathbb{A})$ полна;*

3) *(Тест Робинсона) Для любых $\mathbb{A}, \mathbb{B} \models T$ из $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{B}$ следует, что любое Σ_1-предложение в сигнатуре σ_A, которое истинно в $\mathbb{B}$, будет истинно и в $\mathbb{A}$;*

4) *$\Sigma_1 = \Pi_1$ по модулю T, то есть любая Σ_1-формула $\varphi(\overline{x})$ равносильна подходящей Π_1-формуле $\psi(\overline{x})$ в T (то есть $T \models \forall \overline{x}\ (\varphi(\overline{x}) \leftrightarrow \psi(\overline{x}))$);*

5) *Любая формула $\varphi(\overline{x})$ равносильна подходящей Π_1-формуле в T.*

Замечание. Пока мы ввели иерархию только для предложений. Она точно так же строится для формул со свободными переменными.

Доказательство. На практиках мы уже доказали $1 \Rightarrow 2$, $2 \Rightarrow 3$.

Нетривиальным является следствие $3 \Rightarrow 4$. Пусть $\varphi(\overline{y})$ — Σ_1-формула. Нам нужно найти Π_1-формулу $\psi(\overline{y})$ такую, что $T \models \forall \overline{y}\ (\varphi(\overline{y}) \leftrightarrow \psi(\overline{y}))$. Скажем, $\overline{y} = (y_1, \ldots, y_k)$, обогатим сигнатуру константными символами $\overline{c} = (c_1, \ldots, c_k)$. Тогда достаточно доказать, что $T \models \varphi(\overline{c}) \leftrightarrow \psi(\overline{c})$.

Пусть $\Gamma = \{\gamma \in \Pi_1 \mid T \models \varphi(\overline{c}) \to \gamma\}$. Достаточно доказать, что $T \cup \Gamma \models \varphi(\overline{c})$. Действительно, если это так, то для конечного подмножества Γ выполнено $T \cup \{\gamma_1, \ldots, \gamma_m\} \models \varphi$, тогда $\psi = \gamma_1 \wedge \ldots \wedge \gamma_k \in \Pi_1$ — искомая формула.

Рассмотрим произвольную модель $\mathbb{A} \models T \cup \Gamma$. Наша цель — показать, что $\mathbb{A} \models \varphi$. Сначала докажем, что $T \cup \{\varphi\} \cup D(\mathbb{A})$ имеет модель. Предположим противное, тогда по теореме о компактности для некоторых $\{\delta_1, \ldots, \delta_m\} \subseteq D(\mathbb{A})$ у $T \cup \{\varphi\} \cup \{\delta_1, \ldots, \delta_m\}$ нет модели. Пусть $\delta = \delta_1 \wedge \ldots \wedge \delta_m$. По определению диаграммы, $\mathbb{A} \models \exists \overline{x}\ \delta(\overline{x})$. С другой стороны, из-за отсутствия модели, $T \cup \{\varphi\} \models \forall x \neg\delta(\overline{x})$, поэтому $T \models \varphi \to \forall \overline{x}\ \neg\delta(\overline{x})$. По определению Γ, $\forall \overline{x}\ \neg\delta(\overline{x}) \in \Gamma$, значит эта формула верна в $\mathbb{A}$. Но и её отрицание верно в $\mathbb{A}$. Противоречие.

Пусть $\mathbb{B} \models T \cup \{\varphi\} \cup D(\mathbb{A})$. Тогда $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{B}$, φ — Σ_1-предложение. Тогда из пункта 3 получаем $\mathbb{A} \models \varphi$, что мы и пытались доказать.

$4 \Rightarrow 5$. Рассмотрим произвольную φ. Она лежит на одном из уровней иерархии формул. Рассмотрим только случаи $\varphi \in \Pi_2$ и $\varphi \in \Sigma_2$. В остальных случаях рассуждения аналогичны.

Для формулы $\varphi(\overline{z}) \in \Pi_2$ существует запись в виде $\forall \overline{x}\ \exists \overline{y}\ \psi(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$. Формула $\exists \overline{y}\ \psi(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ лежит в Σ_1, поэтому по пункту 4 существует $\psi'(\overline{x}, \overline{z}) \in \Pi_1$, эквивалентная ей по модулю T. Значит $\varphi \equiv_T \forall \overline{x}\ \psi' \in \Pi_1$.

Для формулы $\varphi \in \Sigma_2$ выполнено $\neg\varphi \in \Pi_2$. Поэтому $\exists \psi \in \Pi_1$ такая, что $\neg\varphi \equiv_T \psi$. Тогда $\varphi \equiv_T \neg\psi \in \Sigma_1$. А $\neg\psi$ в свою очередь эквивалентна формуле Π_1 из пункта 4.

$5 \Rightarrow 1$. Нам нужно, чтобы выполнялось $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{B} \Rightarrow \mathbb{A} \preceq \mathbb{B}$, где $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ — модели T. Рассмотрим произвольную формулу φ. Из пункта 5 следует существование универсальной формулы ψ с условием $\varphi(\overline{x}) \equiv_T \psi(\overline{x})$.

Для $\overline{a} \in \mathbb{A}$, если $\mathbb{B} \models \varphi(\overline{a})$, то и $\mathbb{B} \models \psi(\overline{a})$, из универсальности $\mathbb{A} \models \psi(\overline{a})$, из равносильности $\mathbb{A} \models \varphi(\overline{a})$. Мы доказали $\mathbb{B} \models \varphi \Rightarrow \mathbb{A} \models \varphi$. Для доказательства в обратную сторону можно рассмотреть формулу $\neg\varphi$. $\square$

Предложение 20 (Свойства модельно полных теорий)**.**

1) *Любая модельно полная теория* Π_2*-аксиоматизируемая;*

2) *(Тест Линдстрёма) Если теория* Π_2*-аксиоматизируема, не имеет конечных моделей и категорична в некоторой мощности* $\lambda \geq |For_\sigma|$*, то она модельно полна;*

3) *Если модельно полная теория* T *имеет модель, котоаря вкладывается в любую модель* T*, то* T *— полная;*

4) *Если для любых двух моделей модельно полной теории* T *существует третья модель, в которую они обе вкладываются, то* T *полна.*

Доказательство.

1) T — модель полная. Достаточно доказать, что $\mathrm{Mod}(T)$ замкнут относительно объединения цепей (по теореме Чэна-Лося-Сушко)

$$\mathbb{A}_0 \subseteq \mathbb{A}_1 \subseteq \dots \quad \mathbb{A} = \bigcup_n \mathbb{A}_n,$$

где $\mathbb{A}_i \models T_i$. Из модельной полноты имеем $\mathbb{A}_0 \preceq \mathbb{A}_1 \preceq \dots$, отсюда нетрудно показать, что $\mathbb{A}_n \preceq \mathbb{A}$, тогда $T \dashv\vdash \mathbb{A}_n \equiv \mathbb{A}$.

2) Набросок доказательства приводится ниже.

3) $\mathbb{A}$ — структура, изоморфная подструктуре любой модели $\mathbb{B} \models T$, тогда из модельной полноты $\forall \mathbb{B}\ (\mathbb{A} \preceq \mathbb{B})$. Для любой φ выполнено либо $\mathbb{A} \models \varphi$, либо $\mathbb{A} \models \neg\varphi$. Тогда одна из этих формул верна во всех моделях T, откуда и получим, что из T следует либо эта формула, либо её отрицание.

4) Рассмотрим $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ — модели T. По предположению, существует третья модель $\mathbb{C}$ с двумя подструктурами $\mathbb{A}', \mathbb{B}'$, причём выполнено $\mathbb{A} \simeq \mathbb{A}' \subseteq \mathbb{C}$ и аналогичное для $\mathbb{B}$. T модельно полна, поэтому $\mathrm{Th}(\mathbb{A}') = \mathrm{Th}(C)$. Значит $\mathrm{Th}(\mathbb{A}) = \mathrm{Th}(\mathbb{C}) = \mathrm{Th}(\mathbb{B})$. Значит T полна.

□

1.8 Лекция 8

Утверждение 21 (Тест Линдстрёма)**.** *Если некоторая теория T Π_2-аксиоматизируема, не имеет конечных моделей и категорична в некоторой мощности $\lambda \geq |For_\sigma|$, то она модельно полна.*

Доказательство. Достаточно проверить выполнение теста Робинсона. Предположим противное. Тогда существуют структуры $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{B}$, являющиеся моделями T, и Σ_1-формула φ сигнатуры σ такая, что $\mathbb{B} \models \varphi(\overline{a})$, но $\mathbb{A} \models \neg\varphi(\overline{a})$ для некоторого набора $\overline{a} \in A$.

Рассмотрим обогащение исходной сигнатуры $\sigma^+ = \sigma \cup \{P\}$, где P — новый одноместный предикатный символ. Структура $\mathbb{B}^+$ — обогащение $\mathbb{B}$ до σ^+-структуры, в которой P интерпретируется как множество $\mathbb{A}$. Пусть $T^+ = \mathrm{Th}(\mathbb{B}^+) \supseteq T$.

Также заметим, что $\theta \in T^+$, где

$$\theta = \exists x_1 \dots \exists x_k \, (P(x_1) \wedge \dots \wedge P(x_k) \wedge \varphi(\overline{x}) \wedge \neg\varphi^P(\overline{x})).$$

Здесь φ^P — *релятивизация* формулы φ относительно предиката P, то есть все кванторы формулы ограничены P (более формально определяется по индукции: $(\forall y\, \psi)^P := \forall y\, (P(y) \to \psi^P)$ и $(\exists y\, \psi)^P := \exists y\, (P(y) \wedge \psi^P)$). Формула θ как раз утверждает, что для некоторого $\overline{a} \in A$ $\mathbb{B} \models \varphi(\overline{a})$, но $\mathbb{A} \models \neg\varphi(\overline{a})$.

(Примечание записывающего: дальше доказательство даётся в форме наброска, как на лекции. Формальное доказательство длиннее)

По теоремам Лёвенгейма-Сколема (надо использовать обе), теория T^+ имеет модель $\mathbb{D}$ мощности λ такую, что мощность множества $P^{\mathbb{D}^+}$. Тогда $\mathbb{D} = \mathbb{D}^+|_\sigma$ — модель теориия T. Пусть $\mathbb{C}$ — подструктура $\mathbb{D}$ на множестве P^{D^+}. Тогда $\mathbb{C}$ — модель теории T мощности λ.

Утверждение 22. *Для любой $\mathbb{C} \models T$ мощности λ существует экзистенциально замкнутое расширение $\mathbb{C}^+ \supseteq \mathbb{C}$ ($\mathbb{C}^+ \models T$) мощности λ.*

Определение 21. Структура $\mathbb{C}^+$ называется *экзистенциально замкнутой*, если для любого расширения $\mathbb{E} \supseteq \mathbb{C}^+$ для любой Σ_1-формулы φ и набора $\overline{c} \in \mathbb{C}^+$ из истинности $\varphi(\overline{c})$ в $\mathbb{E}$ следует истинность в $\mathbb{C}^+$.

Идея доказательства утверждения — рассмотреть цепочку $\mathbb{C} \subseteq \mathbb{C}_0 \subseteq \mathbb{C}_1 \subseteq \dots$ моделей T, где на каждом шаге к $\mathbb{C}_n$ добавляются все решения экзистенциальных формул с коэффициентами в $\mathbb{C}_n$. Тогда каждое $\mathbb{C}_i$ имеет мощность λ, тогда $\bigcup \mathbb{C}_i$ — экзистенциально замкнуто, модель T и имеет мощность λ.

Тогда получаем противоречие, так как из $\mathbb{C} \subseteq \mathbb{D} \models \varphi(\overline{a})$ следует $\mathbb{C} \models \varphi(\overline{a})$ из категоричности. □

1.8.1 Элиминация кванторов

Определение 22. Теория T допускает элиминацию кванторов, если любая формула равносильна бескванторной.

Предложение 23.

1) *Если T допускает элиминацию кванторов, то она модельно полна;*

2) *Если для любой бескванторной формулы $\theta(\overline{x}, y)$ формула $\exists y\, \theta(\overline{x}, y)$ равносильна некоторой бескванторной, то T допускает элиминацию кванторов;*

3) *Если для данной формулы φ выполнено условие $\circledast$, то φ равносильна бескванторной $\psi(\overline{x})$ в T.*

   Условие $\circledast$: для любых вложений (то есть изоморфизмов на подструктуры) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{A}$, $g : \mathbb{C} \to \mathbb{B}$ σ-структуры $\mathbb{C}$ в модели $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ теории T и для любых значений $\overline{c} \in \mathbb{C}$ выполнено $\varphi(f(\overline{c})) = \varphi(g(\overline{c}))$

4) *Пусть для любой бескванторной $\theta(\overline{x}, y)$ формула $\phi(\overline{x}) = \exists y\ \theta(\overline{x}, y)$ удовлетворяет $\circledast$. Тогда T допускает элиминацию кванторов.*

Доказательство.

1) Одно из эквивалентных условие модельно полной теории — равносильность любой формулы универсальной, а любая бескванторная формула лежит в Π_1.

2) Доказывается индукцией по сложности формулы, кванторы всеобщности можно представить через кванторы существования.

3) Схема доказательства уже неоднократно нами применялась.

   Зафиксируем $\varphi(x_1, \ldots, x_k)$, удовлетворяющую $\circledast$. Обогатим сигнатуру новыми константами $\overline{d} = (d_1, \ldots, d_k)$. Для доказательства нам надо придумать бескванторную ψ, такую что в исходной сигнатуре $T \models \forall \overline{x}\ (\varphi(\overline{x}) \leftrightarrow \psi(\overline{x}))$, что эквивалентно $T \models \varphi(\overline{d}) \leftrightarrow \psi(\overline{d})$ в обогащённой структуре.

   Пусть $\Gamma = \{\gamma$ - бескванторное $\sigma_{\overline{d}}$-предложение $\mid T \models \varphi(\overline{d}) \to \gamma\}$. Достаточно доказать, что $T \cup \Gamma \models \varphi(\overline{d})$. Действительно, если это так, то по теореме о компакности для конечного $\{\gamma_i\}_i \subset \Gamma$ верно $T \cup \{\gamma_i\}_i \models \varphi(\overline{d})$, откуда для $\gamma = \wedge_i \gamma_i$ верно $T \models \gamma \to \varphi(\overline{d})$.

   Будем доказывать от противного. Тогда $T \cup \Gamma \cup \{\neg\varphi(\overline{d})\}$ имеет модель $\mathbb{A}$. Обозначим через d'_i интерпретацию d_i в структуре $\mathbb{A}$.

   Пусть $\mathbb{C}$ — подструктура $\mathbb{A}$, порождённая элементами $d'_1, \ldots, d'_k$ (то есть кроме этих элементов есть ещё все применения функций к этим переменным, а предикаты как в исходной структуре). Конечно, $\mathbb{C}$ не обязана быть моделью T. Пусть $f : \mathbb{C} \to \mathbb{A}$ — тождественное вложение.

   $\mathrm{Diag}(\mathbb{C})$ — вариант $D(\mathbb{C})$, но без использования новых констант — в нашем случае уже есть имена для всех элементов (термы от d'_i), поэтому новых символов добавлять не нужно.

   Утверждение 24. *$T \cup Diag(\mathbb{C}) \cup \{\varphi(\overline{d})\}$ имеет модель.*

   Доказательство. Доказываем от противного. Тогда для некоторого конечного подмножества Γ $T \cup \{\delta_1(\overline{d}), \ldots, \delta_n(\overline{d}))\} \cup \{\varphi(\overline{d})\}$ не имеет модели. Значит $T \models \bigwedge \delta_i(\overline{d}) \to \neg\varphi(\overline{d})$, откуда по контрпозиции $T \models \varphi(\overline{d}) \to \bigvee \neg\delta_i(\overline{d})$.

   Тогда $\gamma = \bigvee \neg\delta_i(\overline{d})$ лежит в Γ. Значит $\mathbb{A} \models \gamma$, но по определению Diag выполнено $\mathbb{A} \models \neg\gamma$. Противоречие □

   Пусть $\mathbb{B}'$ — модель, удовлетворяющая утверждению. Рассмотрим её обеднение $\mathbb{B}$ до структуры σ. Существует единственное вложение $g : \mathbb{C} \to \mathbb{B}$, переводящее d_i в d'_i.

   Наконец, воспользуемся условием $\circledast$. По определению, в $\mathbb{A}$ $\varphi(f(\overline{d}))$ ложно, а в $\mathbb{B}$ $\varphi(g(\overline{d}))$ истинно. Противоречие.

4) Очевидно следует из пунктов 2 и 3.

□

Тарский доказал, что структуры $(\mathbb{R}, <, +, \cdot, 0, 1)$ и $(\mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1)$ допускают элиминацию кванторов. Доказательство конструктивное, но длинное. Мы докажем то же самое утверждение для всех алгебраически замкнутых полей, но не конструктивно.

Пример 4. *Теория ACF (теория алгебраически замкнутых полей) допускает элиминацию кванторов*

Доказательство. (плохо записано)

Сначала докажем, что ACF модельно полна, используя тест Линдстрёма: Π_2 аксиоматизируемость по определению, ACF не имеет конечных моделей.

(TODO) С доказательством категоричности возникли проблемы, из-за существования полей разных характеристик. Но, насколько я понял, для полей фиксированной характеристики всё нормально, поэтому мы доказали модельную полноту ACF_p (p — характеристика). Вроде бы и сама ACF модельно полна, но это надо доказывать не тестом Линдстрёма.

Для доказательства основного факта воспользуемся пунктом 4 предыдущего утверждения, обозначения те же. Для $\mathbb{C}$ с вложениями f, g в $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ можно рассмотреть поле частных $\mathbb{C}^*$ и его алгебраическое замыкание $\tilde{\mathbb{C}}$, для которого можно придумать вложения $\tilde{f}, \tilde{g}$ в $\mathbb{A}, \mathbb{B}$, чтобы в диаграмме со стрелочками $f, g, \tilde{f}, \tilde{g}$ и вложением $\mathbb{C}$ в $\tilde{\mathbb{C}}$ они согласовывались. Тогда из модельной полноты, если φ от образа верно в $\mathbb{A}$, то и в $\mathbb{C}$ и в $\mathbb{B}$ тоже верно. □

1.9 Лекция 9

1.9.1 Игры Эренфойхта

Считаем, что сигнатура σ не содержит функциональных символов и конечна. Первое требование не существенно, ведь можно рассматривать соответствующие предикаты. $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ — σ-структуры, n — произвольное натуральное число.

Определение 23. В *игре Эренфойхта с n ходами* $G_n(\mathbb{A}, \mathbb{B})$ каждый из двух игроков I и II делает по n ходов. Сначала I выбирает элемент из $A \cup B$ (A, B — множества, соответствующие структурам $\mathbb{A}, \mathbb{B}$). Затем II выбирает элемент в другой структуре. Получили обогащение каждой структуры константой: $(\mathbb{A}, a), (\mathbb{B}, b)$. Такая пара ходов повторяется n раз.

II выигрывает в партии, если конечные подструктуры, порождённые $\overline{a}\overline{b}$ (в каждом наборе по n элементов) изоморфны относительно изоморфизма, который отправляет $a_i \mapsto b_i$ и для каждой константы $c^{\mathbb{A}} \to c^{\mathbb{B}}$

Замечание. Игроков в такой игре иногда называют Новатор и Консерватор. В англоязычной литературе — spoiler и duplicator или $\forall$ (Adam) и $\exists$ (Eve).

Определение 24. В игре $G(\mathbb{A}, \mathbb{B})$ в свой первых ход I выбирает натуральное число n, после чего игра идёт как $G_n(\mathbb{A}, \mathbb{B})$.

Обозначим через S_1 стратегию для первого игрока (функцию $(A \cdot B)^* \to A \cup B$), через S_2 стратегию для второго игрока (функции $(A \cdot B)^* \cdot A \to B$ и $(A \cdot B)^* \cdot B \to A$). Стратегия S_i для игрока i называется выигрышной, если он, следуя этой стратегии, выигрывает вне зависимости от стратегии другого игрока.

Обозначим $G_n^I(\mathbb{A},\mathbb{B})$ наличие выигрышной стратегии у игрока I в игре $G_n(\mathbb{A},\mathbb{B})$. Аналогично определяется G_n^{II}.

Предложение 25. *Свойства игр и стратегий*

1) $G_{n+1}^I(\mathbb{A},\mathbb{B}) \Leftrightarrow \big(\exists a \in \mathbb{A}\ \forall b \in \mathbb{B}\ G_n^I((\mathbb{A},a),(\mathbb{B},b))\big) \vee \big(\exists b \in \mathbb{B}\ \forall a \in \mathbb{A}\ G_n^I((\mathbb{A},a),(\mathbb{B},b))\big)$

2) $G_{n+1}^{II}(\mathbb{A},\mathbb{B}) \Leftrightarrow \big(\forall a \in \mathbb{A}\ \exists b \in \mathbb{B}\ G_n^{II}((\mathbb{A},a),(\mathbb{B},b))\big) \wedge \big(\forall b \in \mathbb{B}\ \exists a \in \mathbb{A}\ G_n^{II}((\mathbb{A},a),(\mathbb{B},b))\big)$

3) $G^{II}(\mathbb{A},\mathbb{B}) \Leftrightarrow \forall n\ G_n^{II}(\mathbb{A},\mathbb{B})$

4) $G^{I}(\mathbb{A},\mathbb{B}) \Leftrightarrow \exists n\ G_n^{I}(\mathbb{A},\mathbb{B})$

5) *В $G_n(\mathbb{A},\mathbb{B})$ ровно один из игроков имеет выигрышную стратегию.*

6) *В $G(\mathbb{A},\mathbb{B})$ ровно один из игроков имеет выигрышную стратегию.*

Доказательство. В пункте 1 выигрышная стратегия у первого игрока есть либо когда есть выигрышный первый ход в первую структуру, либо выигрышный первый ход во вторую структуру. Формально утверждение доказывается по индукции. Пункт 2 доказывается аналогично.

В 5 достаточно проверить, что оба игрока не могут иметь выигрышную стратегию. Действительно, если такие стратегии S_1, S_2 есть, то можно запустить партию с этими стратегиями. В итоге одна из них проиграет. □

Определение 25. *Квантовая глубина* формулы φ — натуральное число $q(\varphi)$, определяемое рекурсией по φ:

1) Если φ — простейшая, то $q(\varphi) = 0$.

2) Если $\varphi = \neg\varphi_1$, то $q(\varphi) = q(\varphi_1)$.

3) Если $\varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_2$, то $q(\varphi) = \max(q(\varphi_1), q(\varphi_2))$.

4) Если $\varphi = \exists x\ \varphi_1$, то $q(\varphi) = q(\varphi_1) + 1$.

Определение 26. Обозначим через $C_n^{\overline{x}}$ множество всех σ-формул $\varphi(\overline{x})$ глубины не более n.

Предложение 26. *Множество $C_n^{\overline{x}}/\equiv$ (отношение $\equiv$ обозначает равносильность формул) конечно.*

Доказательство. Доказываем индукцией по n. База индукции $n = 0$. $C_0^{\overline{x}}$ — бескванторные формулы. Каждая формула оттуда эквивалентна булевой комбинации формул вида $x_i = x_j, x_i = c, c = x_i, c = d$ (c, d — константы)и $P(t_1, \ldots, t_m)$ (t_i — переменные или константы). Таких формул конечное число, поэтому и их булевых комбинаций конечное число.

Переход: рассматриваем $n > 0$. В этом случае $C_n^{\overline{x}} = C_{n-1}^{\overline{x}} \cup D_n^{\overline{x}}$, где $D_n^{\overline{x}}$ — формулы с факторной глубиной ровно n. Факторизация первого множества конечна по предположению индукции, а для второго выполнено

$$D_n^{\overline{x}}/\equiv = BC(\{\exists y\ \psi(\overline{x}, y) \mid \psi \in D_{n-1}^{\overline{x}}\}),$$

что тоже конечно. (Примечание записывающего: наверное стоит сделать $\psi \in C^{\overline{x}}_{n-1}$, потому что разные подформулы могут иметь разную глубину) $\square$

Теорема 27. *$G^{II}_n \iff \forall \varphi \in C_n\,(\varphi^{\mathbb{A}} = \varphi^{\mathbb{B}})$, где $C_n = C^{\emptyset}_n$*

Доказательство. Будем доказывать обобщение этой теоремы: пусть $\overline{a}, \overline{b}$ — наборы элементов одинаковой длины, равные по длине набору $\overline{x}$; докажем

$$G^{II}_n((\mathbb{A}, \overline{a}), (\mathbb{B}, \overline{b})) \iff \forall \varphi \in C^{\overline{x}}_n\,(\varphi^{\mathbb{A}}(\overline{a}) = \varphi^{\mathbb{B}}(\overline{b})).$$

Доказываем индукцией по n.

В случае $n = 0$ надо доказать $G^{II}_0((\mathbb{A}, \overline{a}), (\mathbb{B}, \overline{b})) \iff \forall \varphi \in C^{\overline{x}}_0\,(\varphi^{\mathbb{A}}(\overline{a}) = \varphi^{\mathbb{B}}(\overline{b}))$. По определению левая часть выполнена когда подструктуры, порождённые $\overline{a}$ и $\overline{b}$, изоморфны, то есть значения простейших формул совпадают. А значит и значения бескванторных (то есть $C^{\overline{x}}_0$) совпадают. И наоборот.

Переход: $n > 0$. Сначала докажем слева направо.

Для $\varphi \in C^{\overline{x}}_n$ либо $\varphi \in C^{\overline{x}}_{n-1}$ — тогда применимо предположение индукции для $n-1$, либо $\varphi \in D^{\overline{x}}_n$ — тогда φ эквивалентна булевой комбинации формул вида $\exists y\, \psi(\overline{x}, y)$, где кванторная глубина ψ на единицу меньше. Достаточно доказать утверждение для формул такого вида.

Предположим, что $\mathbb{A} \models \exists y\, \psi(\overline{a}, y)$, зафиксируем $a \in A$ такой, что $\mathbb{A} \models \psi(\overline{a}, a)$. Воспользуемся свойством 2, чтобы зафиксировать $b \in B$ с условием $G^{II}_{n-1}((\mathbb{A}, \overline{a}, a), (\mathbb{B}, \overline{b}, b))$. Пользуемся предположением индукции — из $\psi^{\mathbb{A}}(\overline{a}, a)$ получаем $\psi^{\mathbb{B}}(\overline{b}, b)$, откуда $\mathbb{B} \models \exists y\, \psi(\overline{b}, y)$. Это в точности то, что мы хотели доказать. Для истинной формулы из $\mathbb{B}$ истинность в $\mathbb{A}$ доказывается так же.

Теперь докажем в обратную сторону. По контрпозиции, применив свойство 5, надо доказать:

$$G^{I}_n((\mathbb{A}, \overline{a}), (\mathbb{B}, \overline{b})) \Longrightarrow \exists \varphi \in C^{\overline{x}}_n\,(\varphi^{\mathbb{A}}(\overline{a}) \neq \varphi^{\mathbb{B}}(\overline{b})).$$

Пользуемся свойством 1. Не умаляя общности считаем, что первый выигрышный ход игрока I — это элемент $a \in A$ (то есть в применяющемся свойстве выполнен первый дизъюнкт). Зафиксируем это a. Для него выполнено

$$\forall b \in B \quad G^{I}_{n-1}((\mathbb{A}, \overline{a}, a), (\mathbb{B}, \overline{b}, b)),$$

откуда по предположению индукции можно получить

$$\forall b\, \exists \psi \in C^{\overline{x}, y}_{n-1}\,(\psi^{\mathbb{A}}(\overline{a}, a) \neq \psi^{\mathbb{B}}(\overline{b}, b)).$$

Выше мы доказали конечность $C^{\overline{x},y}_{n-1}/\equiv$, поэтому для каждого b можно выбрать подходящую ψ из некоторого множества $\{\psi_1(\overline{x}, y), \ldots, \psi_N(\overline{x}, y)\} \subseteq C^{\overline{x},y}_{n-1}$:

$$\forall b \bigvee_{i \le N} (\psi^{\mathbb{A}}_i(\overline{a}, a) \neq \psi^{\mathbb{B}}_i(\overline{b}, b)).$$

Пусть

$$\theta_i := \begin{cases} \psi_i, & \text{если } \psi^{\mathbb{A}}_i(\overline{a}, a) \\ \neg\psi_i, & \text{если } \neg\psi^{\mathbb{A}}_i(\overline{a}, a) \end{cases}$$

Тогда формула $\varphi(\overline{x}) = \exists y \bigwedge_{i \le N} \theta_i(\overline{x}, y)$ подходит: $\varphi^{\mathbb{A}}(\overline{a})$ — это истина, а $\varphi^{\mathbb{B}}(\overline{b})$ — ложь. $\square$

Утверждение 28. $G^{II}(\mathbb{A}, \mathbb{B}) \iff \forall \varphi \in Sent(\varphi^{\mathbb{A}} = \varphi^{b})$, *то есть* $\mathbb{A} \equiv \mathbb{B}$.

Доказательство. Очевидное следствие свойства 3 и конечной кванторной глубины любой формулы. $\square$

Определение 27. $\mathbb{A}$ *n-эквивалентно* $\mathbb{B}$, если $\forall \varphi \in C_n(\varphi^{\mathbb{A}} = \varphi^{\mathbb{B}})$. Обозначается $\mathbb{A} \equiv_n \mathbb{B}$.

2 Неразрешимость и неполнота

2.1 Лекция 10

2.1.1 Свойства выводимости, теория Хенкина

Определение 28. ИП$_\sigma$ — исчисление предикатов в сигнатуре σ (со всеми тавтологиями). ИП$^*_\sigma$ (только с основными тавтологиями)

Из теоремы о полноте исчисления высказываний очевидно, что они эквивалентны, потому что любая тавтология может быть выведена из основных тавтологий с помощью правил вывода исчисления высказываний.

Утверждение 29 (Свойства аксиом и правил)**.**

- *Все аксиомы тождественно истинны (в любой структуре при любых значениях свободных переменных)*
- *Если формула получена по некоторым правилам из формул, тождественно истинных в данной структуре, то тогда она тождественно истинна. (Примечание: правила вывода есть в репозитории в папке с материалами)*
- *Если в любой аксиоме (любом правиле вывода) заменить все вхождения константного символа c на переменную z, не входящую в эту аксиому (это правило вывода), то получим аксиому (правило вывода). Неформально говоря, константы похожи на свободные переменные.*

Определение 29. *Выводом* данной формулы φ из T (множества формул) называется последовательность формул $\varphi_0, \ldots, \varphi_n = \varphi$, где φ_i либо аксиома, либо принадлежит T, либо получается из предыдущих по одному из правил.

Определение 30. Формула φ *выводима* из множества формул T, если существует вывод формулы φ из T. Обозначается $T \vdash \varphi$.

Замечание. Это отношение очень похоже на $\models$. Действительно, мы докажем, что $T \vdash \varphi \iff T \models \varphi$. Заметим, что первое отношение чисто синтаксическое, а второе — семантическое. Этот результат строго доказывает, что любую истину можно доказать.

(Примечание: Большинство следующих результатов давались на практике (смотри домашнее задание №9))

Предложение 30 (Свойства отношения выводимости)**.**

Теорема 31 (о дедукции)**.** *Соотношения* $T \vdash (\varphi \to \psi)$ *и* $T \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ *равносильны для всех предложений* φ*, формул* ψ *и множества формул* T*.*

1) *Если* $\varphi \in T$*, то* $T \vdash \varphi$*;*
2) *Если* $T \vdash \varphi$*, то* $T_0 \vdash \varphi$ *для подходящего конечного множества* $T_0 \subseteq T$*.*
3) *Если* $S \vdash \varphi$ *и все формулы множества* S *выводимы из* T*, то* $T \vdash \varphi$*.*
4) *Если* $T \cup \{\varphi\} \vdash \theta$ *и* $T \cup \{\psi\} \vdash \theta$*, то* $T \cup \{\varphi \vee \psi\} \vdash \theta$ *(*φ *и* ψ *— предложения).*
5) *Если* $T \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ *и* $T \cup \{\varphi\} \vdash \neg\psi$*, то* $T \vdash \neg\varphi$ *(*φ *— предложение).*
6) $T \vdash \varphi \wedge \psi$ *тогда и только тогда, когда* $T \vdash \varphi$ *и* $T \vdash \psi$*.*

Определение 31. Множество формул называется *противоречивым*, если из него выводима любая формула. В противном случае называется *непротиворечивым.*

Предложение 32 (Свойства непротиворечивости)**.**

1) *Множество формул* T *противоречиво тогда и только тогда, когда из него выводима хотя бы одна формула вида* $\theta \wedge \neg\theta$*.*
2) *Если множества формул* T_n*,* $n \in \mathbb{N}$ *непротиворечивы и* $T_0 \subseteq T_1 \subseteq \ldots$*, то множество* $\bigcup_n T_n$ *непротиворечиво.*
3) *Если* φ *— предложение,* T *— множество формул и* $T \cup \{\varphi\}$ *противоречиво, то* $T \vdash \neg\varphi$*.*
4) *Если множество формул* T *непротиворечиво, то для любого предложения* φ *непротиворечиво хотя бы одно из множеств* $T \cup \{\varphi\}$ *и* $T \cup \{\neg\varphi\}$*.*
5) *Если множество предложений* $S = T \cup \{\exists x\ \psi(x)\}$ *непротиворечиво, то и множество* $S \cup \{\psi(c)\}$ *непротиворечиво для любого не входящего в формулы из* S *сигнатурного константного символа* c*.*

Определение 32. Множество предложений T называется *теорией Хенкина*, если T непротиворечива и любое предложение или его отрицание выводимо из T и для любого выводимого из T предложения вида $\exists x\, \psi(x)$ существует константный символ $c \in \sigma$ такой, что $T \vdash \psi(c)$.

Предложение 33 (Свойства теории Хенкина)**.** *Для теории Хенкина* T *выполнены следующие утверждения:*

1) $T \vdash \neg\varphi \iff T \nvdash \varphi$*.*
2) $T \vdash (\varphi \vee \psi) \iff T \vdash \varphi$ *или* $T \vdash \psi$*.*

3) $T \vdash (\varphi \to \psi) \iff T \nvdash \varphi$ *или* $T \vdash \psi$.

4) $T \vdash \exists x \theta(x) \iff T \vdash \theta(t)$ *для некоторого терма* t *без переменных.*

5) $T \vdash \forall x \theta(x) \iff T \vdash \theta(t)$ *для любого терма* t *без переменных.*

Предложение 34. *Любая непротиворечивая теория не более чем счетной сигнатуры* σ *может быть расширена до теории Хенкина сигнатуры* σ_C*, где* C *— счетное множество новых константных символов.*

Доказательство. Рассмотрим непротиворечивую теорию S не более чем счётной сигнатуры σ. Расширим сигнатуру σ до σ_C, добавив счётное количество новых константных символов $C = \{c_0, c_1, \ldots\}$. σ_c — счётная сигнатура, поэтому Prop_{σ_C} не более чем счётно, поэтому можно пронумеровать его элементы: $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$.

Для начала построим возрастающую последовательность вложенных теорий $\{T_n\}_{n\geq 0}$ в сигнатуре σ_c, начав с $T_0 = S$. Строим по индукции. Предположим T_n построено, строим T_{n+1}. Рассмотрим несколько случаев:

- Если $T_n \cup \{\varphi_n\}$ противоречива, то пусть $T_{n+1} = T_n \cup \{\neg\varphi_n\}$ – она непротиворечива по ранее доказанному утверждению.
- Если $T_n \cup \{\varphi_n\}$ непротиворечива, и φ_n не начинается с квантора существования, то $T_{n+1} = T_n \cup \{\varphi_n\}$.
- Если $T_n \cup \{\varphi_n\}$ непротиворечива, и $\varphi_n = \exists x\ \psi(x)$, то выберем наименьший индекс k, такой что c_k не входит в запись формул из T_n (такой найдётся, потому что в записи T_0 нет символов из C, а в $T_n \backslash T_0$ конечное число элементов). Тогда пусть $T_{n+1} = T_n \cup \{\varphi_n, \psi(c_k)\}$. Из непротиворечивости $T_n \cup \{\varphi_n\}$ получаем непротиворечивость T_{n+1}.

Проверим, что $T = \bigcup_{n\geq 0} T_n$ подходит под требования. Непротиворечивость есть, так как каждая T_n непротиворечива по построению. Для каждого предложения $\varphi = \varphi_m$ либо она была добавлена в T_m (случаи 2,3), либо её отрицание было добавлено (случай 1). Поэтому любое предложение или его отрицание выводимо. Для предложения вида $\exists x\ \psi(x) = \varphi_m$ на m шаге добавляется нужная константа.

□

2.1.2 Теоремы о существовании модели и полноте ИП$_\sigma$

Теорема 35 (О существовании модели)**.** *Любое непротиворечивое множество предложений имеет модель.*

Доказательство. Пусть S — непротиворечивое множество предложений сигнатуры σ. Хотим показать, что S имеет модель. По теореме о компактности можем считать, что S конечна. Тогда в формулы S входит конечное подмножество символов сигнатуры σ, поэтому можно считать, что σ конечна. Тогда, по доказанному выше факту, существует теория Хенкина T сигнатуры σ_C, расширяющая S.

Пусть M — множество всех термов сигнатуры σ_C, не содержащих переменных (то есть это константы с "накрученными"на них функциональными символами). Введём на этом множестве отношение $\sim$ следующим образом: $s \sim t$, если $T \vdash s = t$.

Дальше проверяем несколько несложных утверждений:

1) $\sim$ является отношением эквивалентности;

2) Если $s_1 \sim t_1, \ldots, s_n \sim t_n$, выполняется $T \vdash P(s_1, \ldots, s_n)$, то $T \vdash P(t_1, \ldots, t_n)$;

3) Если $s_1 \sim t_1, \ldots, s_n \sim t_n$, то $f(s_1, \ldots, s_n) \sim f(t_1, \ldots, t_n)$;

4) Пусть $t = t(x_1, \ldots, x_n)$ — терм, $s_1, \ldots, s_n \in M$. Тогда $t^{\mathbb{A}}([s_1], \ldots, [s_n]) = [t(s_1, \ldots, s_n)]$;

5) Для любой формулы $g(x_1, \ldots, x_n)$ и для $s_1, \ldots, s_k \in M$ выполнено

$$\mathbb{A} \models \varphi([s_1], \ldots, [s_k]) \iff T \vdash \varphi(s_1, \ldots, s_k)$$

Первые три утверждения проверяются с помощью аксиом равенства. Первое свойство позволяет корректно определить $A = M/\equiv$ — носитель будущей структуры. Следующие два свойства позволяют корректно задать интерпретацию I сигнатуры на этом множестве: в $\mathbb{A} = (A, I)$ $f^{\mathbb{A}}([t_1], \ldots, [t_n]) := [f(t_1, \ldots, t_n)]$, $P^{\mathbb{A}}([t_1], \ldots, [t_n]) \iff T \vdash P(t_1, \ldots, t_n)$, $c^{\mathbb{A}} := [c]$.

Предпоследнее свойство доказывается по индукции. □

2.2 Лекция 11

Теорема 36 (теорема Гёделя о полноте)**.**

1) *Для любой теории T и любого предложения φ в той же сигнатуре σ $T \vdash \varphi \iff T \models \varphi$*

2) *φ тождественно истинна $\iff$ φ выводима в ИП$_\sigma$*

Доказательство. Второй пункт получается из первого при $T = \varnothing$. Теперь докажем первый пункт.

$\Rightarrow$ Доказательство довалось на первом курсе. На практиках доказали, что все аксиомы тождественно истинны, правила вывода сохраняют истинность.

$\Leftarrow$ $T \models \varphi$, значит $T \cup \{\neg\varphi\}$ не имеет модели. Из теоремы о существовании модели отсюда следует, что $T \cup \{\neg\varphi\}$. Тогда $T \models \neg\neg\varphi$, из эквивалентности $\varphi \equiv \neg\neg\varphi$ получаем $T \models \varphi$, что и требовалось. □

Следствие 37.

1) *Если σ конечна, то множество $\{\varphi \mid$ формула φ тождественно истинна$\}$ перечислимо, то есть сущестует алгоритм, перечисляющий элементы этого множества.*

2) Если σ конечна, T — перечислимое множество предложений, то $[T]$ (множество следствий T) перечислимо.

3) Если σ конечно, T перечислимо, T полная, то тогда $[T]$ разрешимо, то есть существует алгоритм, распознающий логические следствия из T.

4) Множество выводов $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ в ИП$_\sigma$ разрешимо.

Доказательство.

1) Следует из второго при $T = \varnothing$

2) T перечислимо, множество аксиом ИП$_\sigma^*$ тоже перечислимо. Перечисляя формулы из объединения этих двух перечислимых и применяя правила вывода, можно перечислить и все выводимые.

3) Пользуемся пунктом 2. Либо $\varphi \in [T]$, либо $\neg\varphi \in [T]$. Запускаем перечисление $[T]$ и ждём, пока встретится φ или $\neg\varphi$.

4) TODO

□

Замечание. Традиционно логика разбивается на четыре части:

- Теория множеств
- Теория моделей
- Теория доказательств
- Теория вычислимости

Теорема 38 (Линдстрёма)**.** *(без доказателства)*

1) Не существует логической системы, которая более выразительна, чем логика первого порядка и удовлетворяет понижающей теореме Лёвингейма-Сколема и теореме о компактности.

2) Не существует логической системы, которая более выразительна, чем логика первого порядка и удовлетворяет понижающей теореме Лёвингейма-Сколема и в которой множество тождественно истинных формул перечислимо.

2.2.1 Рекурсивные функции и предикаты

Ограничимся функциями на $\mathbb{N}$ (с нулём). Соответственно, далее все аргументы — натуральные числа.

Введём две функции:

$$l(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < y \\ 1, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

$$I_k^n(x_1, \ldots, x_n) = x_k$$

Определение 33. Рекурсивные функции на $\mathbb{N}$ определяются индуктивно:

- $+, \cdot, l, I_k^n$ являются рекурсивными
- Суперпозиция рекурсивных является рекурсивной, то есть если $g = g(y_1, \ldots, y_k)$ рекурсивна и $h_1(\overline{x}), \ldots, h_k(\overline{x})$ рекурсивны, то и $g(h_1(\overline{x}), \ldots, h_k(\overline{x}))$ рекурсивна.
- Минимизация любой рекурсивной функции является рекурсивной. То есть, если $g(\overline{x}, y)$ рекурсивна и $\forall \overline{x}\ \exists y\ g(\overline{x}, y) = 0$, то функция $f(\overline{x}) = \mu y(g(\overline{x}, y) = 0)$ тоже рекурсивна. Здесь $\mu y(P(y))$ — наименьшее значение y, при котором предикат истинен.
- Других рекурсивных функций нет.

Замечание. Любая рекурсивная функция вычислима, это доказывается индуктивно. А существует ли вычислимая функция, которая не рекурсивна?

Гипотеза 39 (Тезис Чёрча). *Любая тотальная (всюда определённая) вычислимая функция на N рекурсивна.*

Почему тезис, а не теорема? Потому что понятие вычислимости не математично.

Определение 34. Предикат $P(\overline{x})$ рекурсивен, если рекурсивна его характеристическая функция

$$\chi_P(\overline{x}) = \begin{cases} 0, & P(\overline{x}) = \text{И} \\ 1, & P(\overline{x}) = \text{Л} \end{cases}$$

Предложение 40 (Свойства рекурсивных функций и предикатов)**.**

- *Если предикат $P(y_1, \ldots, y_k)$ рекурсивен и функции $h_1(\overline{x}), \ldots, h_k(\overline{x})$ рекурсивны, то $P(h_1(\overline{x}), \ldots, h_k(\overline{x})$ рекурсивен.*
- *$P(\overline{x}, y)$ рекурсивен и $\forall \overline{x}\ \exists y\ P(\overline{x}, y)$, то тогда формула $f($ $overlinex) = \mu y(P(\overline{x}, y) = 0)$ рекурсивна.*
- *$P(\overline{x}), Q(\overline{x}), R(\overline{x}, y)$ рекурсивны, то рекурсивны и предикаты $P(\overline{x}) \vee Q(\overline{x})$ (и для $\wedge$, $\rightarrow$), $\neg P(\overline{x})$, $\forall y < z\ \ \rightarrow R(\overline{x}, y)$ (по определению это $\forall y\ (y < z \rightarrow R(\overline{x}, y))$), $\exists y < z\ R(\overline{x}, y)$ (экивалентно $\exists y\ (y < z \wedge) R(\overline{x}, y)$) рекурсивны*
- *Рекурсивна функция*

$$f(\bar{x}) = \begin{cases} g_1(\bar{x}), & P_1(\bar{x}) = \text{И} \\ g_2(\bar{x}), & P_2(\bar{x}) = \text{И} \\ \ldots & \ldots \\ g_k(\bar{x}), & P_k(\bar{x}) = \text{И}, \end{cases}$$

здесь g_i — рекурсивные функции, P_i — дизъюнктные рекурсивные предикаты, $\bigcup P_i = \mathbb{N}^d$.

Пример 5.

- *Все константые функции рекурсивны*
- *Функции, задаваемые полиномами с натуральными коэффициентами рекурсивны*
- *$\leq, =, \vdots$ рекурсивны*

рекурсивность констант. Хотим показать, что $f_c(\overline{x}) = c$ рекурсивна индукцией по c.

Если $c = 0$, то $f_0(\overline{x}) = \mu y(y = 0) = \mu y(I_{n+1}^{n+1}(\overline{x}, y) = 0)$

Если $c = 1$, то $f_1(\overline{x}) = \mu y(0 < y) = \mu(l(f_0(\overline{x}, y), I_{n+1}^{n+1}(\overline{x}, y)) = 0)$. Или можно было взять $f_1(\overline{x}) = l(I_1^n(\overline{x}), I_1^n(\overline{x}))$, если $n \geq 1$.

Если $f_c(\overline{x})$ построена, то $f_{c+1}(\overline{x}) = f_c(\overline{x}) + f_1(\overline{x})$ рекурсивна как сумма рекурсивных □

Предложение 41. *Существует рекурсивная фукнция $\beta(a, i)$ такая, что $\beta(0, i) = 0$, $\beta(a + 1, i) \leq a$ и $\forall n, a_0, \ldots, a_n \ \exists a(\beta(a, 0) = a_0 \wedge \ldots, \beta(a, n) = a_n)$*

Доказательство. Строим вспомогательную функцию $p(x, y) = (x+y)^2+x+1$. Она рекурсивна, потому что полином. Обладает свойствами $x, y < p(x, y)$ и $(x, y) \neq (x_1, y_1) \Rightarrow p(x, y) \neq p(x_1, y_1)$. Второе свойство доказывается сравнением $x + y$ с $x_1 + y_1$: если они отличаются, то значения функции разделены квадратом большей сумма, а в случае равенства, значения функции различаются из-за $x \neq x_1$.

Тогда пусть

$$\beta(a, i) = \mu x(a = 0 \vee x + 1 = a \vee \exists y < a \ \exists z < a \ (a = p(y, z) \wedge y \vdots (1 + z \cdot p(x, i))))$$

Первые два свойства следуют из первых двух членов дизъюнкции. Теперь зафиксируем $n, a_0, \ldots, a_n$ и проверим последнее свойство. Пусть $c = \max(p(a_0, 0), \ldots, p(a_n, n))$, $z = c!$, $y = \prod_{i=0}^{n}(1 + z \cdot p(a_n, n))$. Будем доказывать, что $a = p(y, z)$ подходит.

Проверяем, что $\beta(a, i) = a_i$ для $1 \leq i \leq n$. Для $x = a_i$ третье условие минимизации выполнено с заданными в предыдущем абзаце y, z. Докажем, что не существует $x < a_i$, удовлетворяющего условиям минимизации.

Предположим противное, такой x нашелся. Первые два члена дизъюнкции не могут выполняться, потому что $a > 0, x + 1 < a_i + 1 < a$. Значит нашлись y_1, z_1, такие что $a = p(y_1, z_1)$ и $y_1 \vdots (1 + z \cdot p(x, i))$. Тогда $p(y, z) = a = p(y_1, z_1)$, следовательно $(y, z) = (y_1, z_1)$. Тогда $y \vdots (1 + z \cdot p(x, i))$. Распишем y по определению, получим

$$\left(\prod_{i=0}^{n}(1 + z \cdot p(a_n, n))\right) \vdots (1 + z \cdot p(x, i))$$

Заметим, что при $k, l \leq c, k \neq l$ числа $1+zk$ и $1+zl$ взаимнопросты. Действительно, иначе найдётся простой $q|(1 + zk) - (1 + zl) = z(k - l) = c!(k - l)$. Тогда $q \leq c \Rightarrow q|c! =$

$z \Rightarrow q|zk, q|(1+zk)$, но они взаимнопросты. Все множители в произведении и число $(1+z\cdot p(x,i))$ имеют такой вид, поэтому для некоторого j выполнено $1+z\cdot p(a_j,j) = 1+z\cdot p(x,i) \Rightarrow (a_j,j)=(x,i) \Rightarrow i=j, x=a_i$.

□

2.3 Лекция 12

Используя функцию β любой конечной последовательности натуральных чисел $(a_1,\ldots,a_n)$ можно сопоставить её код:

$$\langle a_1,\ldots,a_n\rangle = \mu a\ (\beta(a,0)=n \wedge \beta(a,1)=a_1 \wedge \ldots \wedge \beta(a,n)=a_n)$$

Например, пустой последовательности соответствует соответствует $\langle\rangle$ — наименьшее a, такое что $\beta(a,0)=0$, то есть $\langle\rangle = 0$

Введём новые функции

- Функция «начало»: $\text{нач}(a,i) = \mu x\ (\beta(x,0)=i \wedge \forall j<i\ (\beta(x,j+1)=\beta(a,j+1)))$
- Предикат $\text{Пос}(a) = \neg\exists x<a\ (\beta(x,0)=\beta(a,0) \wedge \forall i<\beta(a,0)(\beta(x,i+1)=\beta(a,i+1)))$

Предложение 42 (Свойства кодирования последовательностей)**.**

- *Функции нач и $\langle a_1,\ldots,a_n\rangle$ при $n>0$ рекурсивны, предикат Пос рекурсивен.*
- $a=\langle a_1,\ldots,a_n\rangle \Rightarrow \beta(a,0)=n \wedge \beta(a,1)=a_1 \wedge \ldots \wedge \beta(a,n)=a_n$
- $(a_1,\ldots,a_n) \neq (b_1,\ldots,b_n) \Rightarrow \langle a_1,\ldots,a_n\rangle \neq \langle b_1,\ldots,b_n\rangle$
- $a=\langle a_1,\ldots,a_n\rangle \Rightarrow$ *нач*$(a,i)=\langle a_1,\ldots,a_i\rangle$ *при* $i\le n$
- *Пос*(a) *— истина* $\Leftrightarrow a$ *— код некоторой последовательности*

Теорема 43 (о рекурсивных определениях)**.** *Пусть $\overline{x}$ — вектор переменных (возможно пустой)*

1) Если функция $g(\overline{x},y,z)$ рекурсивна, то рекурсивна и функция

$$f(\overline{x},y) = g(\overline{x},y,\langle f(\overline{x},0),\ldots,f(\overline{x},y-1)\rangle)$$

Про такую f говорят, что она определена рекурсией с помощью g.

2) Если предикат $Q(\overline{x},y,z)$ рекурсивен, то рекурсивен и предикат

$$P(\overline{x},y) = Q(\overline{x},y,\langle \chi_P(\overline{x},0),\ldots,\chi_P(\overline{x},y-1)\rangle)$$

Доказательство. Второй пункт получается из первого заменой f на χ_P, а g на χ_Q.

Рассмотрим вспомогательную функцию h:

$$\begin{aligned} h(\overline{x},y) &= \langle f(\overline{x},0),\ldots,f(\overline{x},y-1)\rangle \\ &= \mu a\ (\text{Пос}(a) \wedge \beta(a,0)=y \wedge \forall i<y\ (\beta(a,i+1)=f(\overline{x},i))) \\ &= \mu a\ (\text{Пос}(a) \wedge \beta(a,0)=y \wedge \forall i<y\ (\beta(a,i+1)=g(\overline{x},i,\text{нач}(a,i)))) \end{aligned}$$

Значит $h(\overline{x},y)$ рекурсивна, поэтому $f(\overline{x},y)=g(\overline{x},y,h(\overline{x},y))$ тоже рекурсивна. □

2.3.1 Кодирование ИП$_\sigma$

Замечание. Повествование в этом (и предыдущем) разделе перекликается с книгой "Краткий курс математической логики"В.Л. Селиванова 1992 года издания.

Пусть σ — конечная сигнатура. Для примера возьмём $\sigma = \{<, =, +, \cdot, 0, 1\}$, а что делать для остальных сигнатур будет понятно.

Из чего состоят формулы? Из счётного набора переменных $\{v_0, v_1, \ldots\}$ и математических символов. Сопоставим им натуральные числа:

v_n	$\wedge$	$\vee$	$\to$	$\neg$	$\forall$	$\exists$	$=$	$<$	$+$	$\cdot$	0	1
$2n$	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23

Теперь закодируем термы. Через $\ulcorner t \urcorner$ будем обозначать код терма. Пусть $\ulcorner v_n \urcorner = \langle 2n \rangle$, $\ulcorner 0 \urcorner = \langle 21 \rangle$, $\ulcorner 1 \urcorner = \langle 23 \rangle$ — взяли значения из таблицы. Остальные термы кодируются по рекурсии, например $\ulcorner s + t \urcorner = \langle 17, \ulcorner s \urcorner, \ulcorner t \urcorner \rangle$. Формулы кодируются аналогично, например $\ulcorner s = t \urcorner = \langle 13, \ulcorner s \urcorner, \ulcorner t \urcorner \rangle$, $\ulcorner \forall v_n \varphi \urcorner = \langle 9, 2n, \ulcorner \varphi \urcorner \rangle$

Введём несколько новых предикатов и функций:

- $\text{Т}(a) \Leftrightarrow a$ — код терма
- $\Phi(a) \Leftrightarrow a$ — код формулы
- $\Phi_0(a) \Leftrightarrow a$ — код формулы, не содержащей свободных переменных, кроме v_0
- $\text{Пр}(a) \Leftrightarrow a$ — код предложения
- $\text{отр}(a)$ — функция, равная $\ulcorner \neg\varphi \urcorner$, если $a = \ulcorner \varphi \urcorner$ и 0 иначе.
- $\text{подс}(a, b, c)$: если a — код формулы $\varphi(x)$, b — код переменной x, а c — код терма t, для которого разрешена подстановка $\varphi(t)$, то $\text{подс}(a, b, c) = \ulcorner \varphi(t) \urcorner$, иначе 0
- Для множества формул T предикат $P_T(a)$ выполнен когда a — код некоторой формулы из T
- $\text{Выв}_T(a, b)$ выполнен, если $\text{Пр}(b)$ и a есть код последовательности кодов формул $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, которая является выводом предложения с кодом b из теории T в ИП$_\sigma$.

2.4 Лекция 13

Предложение 44 (свойства кодирования)**.**

1) *Разным термам и формулам соответствуют разные коды*
2) *Существует алгоритм, вычисляющий по данному логическому объекту (терму, формуле) его код*
3) *Наоборот: существует алгоритм, вычисляющий по коду этот объект.*
4) *Предикаты $T, \Phi, \Phi_0, Пр, \ldots$ и функции $отр, подс$ рекурсивны.*

5) Если множество формул T рекурсивно (то есть рекурсивен предикат $P_T(x)$), то $Выв_T(a, b)$ рекурсивен.

Доказательство. Второй и третий пункт не являются строгими математическими утверждениями, потому то понятие алгоритма не математично. Но нестрого утверждение понятно. Доказательство пятого пункта есть в книжке[2]. Остальные пункты доказываются несложно $\square$

2.4.1 Представимость ИП$_\sigma$ в минимальной арифметике

Напомним, что МА (минимальная арифметика) состоит из 10 аксиом в сигнатуре $\sigma = \{<, +, \cdot, 0, 1\}$. Каждому натуральному числу n можно сопоставить терм $\hat{n}$ по следующим правилам: $\hat{0} = 0$, $\hat{1} = 1$, $\widehat{n+1} = (\hat{n}) + 1$

Определение 35. Предикат $P(x_1, \ldots, x_n)$ на $\mathbb{N}$ называется представимым в МА, если сущесвует формула $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ такая, что для любых значений $\overline{x} \in \mathbb{N}$ выполнено $P(\overline{x}) = \text{И} \Rightarrow \text{МА} \vdash \varphi(\widehat{x_1}, \ldots, \widehat{x_n})$ и $P(\overline{x}) = \text{Л} \Rightarrow \text{МА} \vdash \neg\varphi(\widehat{x_1}, \ldots, \widehat{x_n})$

Функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется представимой в МА, если сущесвует формула $\varphi(\overline{x}, y)$ такая, что для любых $\overline{x} \in \mathbb{N}$ $\text{МА} \vdash \forall y\ (\psi(\widehat{x_1}, \ldots, \widehat{x_n}) \leftrightarrow y = \widehat{f(\overline{x})})$

Теорема 45. *Любой рекурсивный предикат представим в МА.*

Доказательство. TODO $\square$

2.4.2 Неразрешимость и неполнота арифметики. Проблемы разрешимости

Теорема 46 (Чёрча о неразрешимости арифметики)**.** *Для любой непротиворечивой теории $T \supseteq MA$ множество $[T] = \{\varphi \mid T \vdash \varphi\}$ не рекурсивно.*

Доказательство. TODO $\square$

Теорема 47 (Гёделя о неполноте арифметики)**.** *Любая непротиворечивая рекурсивная теория $T \supseteq MA$ неполна.*

Доказательство. TODO $\square$

Теорема 48. *Множество тождественно истинных формул неразрешимо (нерекурсивно)*

[2] В.Л.Селиванов — «Краткий курс математической логики» 1992 года издания

3 Введение в вычислимость

3.1 Лекция 14

3.1.1 R-вычислимость

Замечание. Не имеет никакого отношения к языку программирования R.

Определение 36. Программа — это непустая последовательность операторов $(I_0, \dots, I_l)$. Оператор — либо оператор присваивания, либо условный оператор. Операторы присваивания: $r_i := 0$, $r_i := r_i + 1$ и $r_i := r_j$. Условный оператор: $r_i = r_j \Rightarrow k$

Здесь $r_0, r_1, r_2, \dots$ — переменные со значениями в $\mathbb{N}$

Определение 37.

1) *Длина программы* равна $l + 1$

2) Память(P) равна наибольшему номеру переменной, входящему в P.

3) *Состояние программы* в момент t при начальных данных $r_i = x_i \in \mathbb{N}$ — это кортеж
$$(r_0(t), \dots, r_m(t), k(t)),$$
где $r_i(t)$ — содержимое регистра r_i в момент t, а $k(t)$ — номер оператора, выполняющегося в момент t. Если $k(t) \geq l + 1$, то считаем $k(t + 1) = k(t)$

Определение 38. Пусть P — программа и $n \geq 0$. Тогда P вычисляет частичную функцию $\varphi_P(x_0 \dots, x_n)$ на $\mathbb{N}$, которая определяется так: при любых $\overline{x} \in \mathbb{N}$ зададим значения $r_0 = x_0, \dots, r_n = x_n$; $r_i = 0$ при $i > n$ и запустим P. Если P никогда не останавливается (то есть $\forall t\; k(t) \leq l$), то $\varphi_P(\overline{x})$ не определена. Если же она остановится в момент t, то $\varphi_P(\overline{x}) = r_0(t)$.

Функции такого вида называются R-вычислимыми.

Предложение 49.

1) $+, \cdot, \chi_<, I_k^m$ *R-вычислимы.*

2) Суперпозиция R-вычислимых функций R-вычислима.

3) Минимизация R-вычислимых функций R-вычислима.

Есть вариант этого предложения для тотальных функций, есть для частичных. Оба верны.

3.1.2 R-вычислимость и рекурсивность

Теорема 50. *Класс тотальных R-вычислимых функций совпадает с классом рекурсивных функций.*

Определение 39. Закодируем операторы программы натуральными числами:

- $\ulcorner r_i := 0 \urcorner = \langle 0, i \rangle$
- $\ulcorner r_i := r_{i+1} \urcorner = \langle 1, i \rangle$
- $\ulcorner r_i := r_j \urcorner = \langle 2, i, j \rangle$
- $\ulcorner r_i = r_j \Rightarrow k \urcorner = \langle 3, i, j, k \rangle$
- $\ulcorner P \urcorner = \langle \ulcorner I_0 \urcorner, \ldots, \ulcorner I_l \urcorner \rangle$

Определение 40.

- Оп(a) означает, что a — код некоторого оператора.
- Прог(a) означает, что a — код некоторой программы.
- Пер(i, a) означает, что a — код некоторой программы, в которую входит r_i.
- дл(a) равна длине программы P, если a — код программы P; иначе 0.
- пам(a) равна Память(P), если a — код программы P; иначе 0.
- сос$(a, x_0, \ldots, x_n, t)$ равна коду состояния P в момент t при $r_i = x_i$ для $i \leq n$ и $r_i = 0$ для $i > n$, если a — код P; иначе 0.

Предложение 51 (Свойства кодирования)**.**

1) *Коды разных операторов различны*
2) *Коды разных программ различны*
3) *Все описанные предикаты рекурсивны*
4) *Если r_i входит в P, то $i < \ulcorner P \urcorner$*
5) *Если k — номер условного оператора, входящего в P, то $k < \ulcorner P \urcorner$*
6) *Существует алгоритм, который по программе вычисляет её код и наоборот.*

3.2 Лекция 15

Доказательство. Доказательство в одну сторону рассматривалось на практике.

В другую сторону: доказываем, что любая R-вычислимая функция является рекурсивной. Рассматриваем тотальную функцию $\varphi_P(\overline{x})$. Пусть $a = \ulcorner P \urcorner$. Введём вспомогательную функцию

$$\begin{aligned} g(\overline{x}) &= \mu t \ (s_t \text{ заключительное}) \\ &= \mu t \ (\beta(\text{сос}(a, \overline{x}, t), \text{пам}(a) + 2) \geq \text{дл}(a)). \end{aligned}$$

Она рекурсивна и вычисляет номер первого момента, в который программа прекратит работу. Отсюда получаем рекурсивность нужной функции:

$$\phi_P(\overline{x}) = \beta(\mathrm{coc}(a, \overline{x}, g(\overline{x})), 1)$$

$\square$

То же самое доказательство работает для другого варианта теоремы:

Теорема 52. *Класс рекурсивных частичных функций совпадает с классом R-вычислимых частичных функций.*

Определение 41. Для произвольной (возможно не вычислимой) функции $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

- *Частичные функции, вычислимые относительно h* определяются так же, как и обычные рекурсивные частичные функции, но в списке начальных функций присутствует h.
- *R-вычислимые относительно h частичные функции* (или *с оракулом h*) — функции, вычислимые R-программами с оракулом h.
- *R-программа с оракулом o* — R-программа с дополнительным оператором $r_i = o(r_i)$.

Приведём ещё один вариант теоремы:

Теорема 53. *Для любой функции $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ класс частичных функций, рекурсивных относительно h совпадает с классом функций, R-вычислимых относительно h.*

3.2.1 Главная вычислимая нумерация рекурсивных частичных функций

Определение 42. Φ — класс одноместных рекурсивных частичных функций. Нумерация $\nu : \mathbb{N} \to \Phi$ называется вычислимой, если двуместная функция $\tilde{\nu}(n, x) = \nu_n(x)$ вычислима.

Определение 43. Вычислимая нумерация ν называется главной, если любая вычислимая нумерация $\mu : \mathbb{N} \to \Phi$ сводится к ν, то есть $\mu = \nu \circ f$ для некоторой рекурсивной функции f.

Пример 6. *Основным рассматриваемым примером вычислимой нумерации является φ, где*

$$\varphi_n = \begin{cases} \varphi_P^{(1)}, & \text{если } n = \ulcorner P \urcorner \\ \emptyset, & \text{иначе} \end{cases}$$

Теорема 54 (о главной вычислимой нумерации)**.** *φ — главная вычислимая нумерация одноместных рекурсивных частичных функций.*

Доказательство. Сначала проверим вычислимость $\tilde{\varphi}$. Модифицируем g из предыдущего раздела, добавив ко входу код программы:

$$g(n,x) = \mu t\ (\text{Прог}(n) \wedge \beta(\text{сос}(n,x,t), \text{пам}+2) \geq \text{дл}(n)).$$

Тогда $\tilde{\varphi}(n,x) = \beta(\text{сос}(n,x,g(n,x)),1)$ рекурсивна.

Теперь проверим, что φ — главная. Зафиксируем вычислимую нумерацию μ. Обозначим за M R-программу, которая вычисляет $\tilde{\mu}(n,x)$. Для всех n построим программы P_n, для которых $\mu_n = \varphi^{(1)}_{P_n}$.

Идея программы — получив на входе x, дописать n, после чего запустить программу M. Код выглядит так:

$r_1 := r_0$
$r_0 := 0$
$r_o := r_0 + 1$
$\dots$
$r_o := r_0 + 1$
M(n+2)

(Последняя строчка обозначает код программы M, где все индексы увеличены на $n+2$). Нетрудно проверить, что функция $s(n) := \ulcorner P_n \urcorner$ является рекурсивной. Значит $\mu = \varphi \circ s$. □

Теорема 55 (о неподвижной точке)**.** *Для любой одноместной рекурсивной функции $f(x)$ найдётся e, для которого $\varphi_e = \varphi_{f(e)}$*

Доказательство. Рассмотрим вычислимую нумерацию $\mu_n = \varphi_{\varphi_n(n)}$. По предыдущей теореме, существует рекурсивная функция s такая, что $\mu_n = \varphi_{s(n)}$. $f \circ s$ рекурсивная, поэтому $\exists v : f \circ s = \varphi_v$. Значит $e = s(v)$ подходит:

$$\varphi_{s(v)} = \mu_v = \varphi_{\varphi_v(v)} = \varphi_{f(s(v))}$$

□

Теорема 56 (Райса о неразрешимости свойств рекурсивных частичных функций)**.** *Пусть $\emptyset \subsetneq C \subsetneq \Phi$ (собственного подкласса Φ) множество $\varphi^{-1}(C) = \{n \mid \varphi_n \in C\}$ нерекурсивно.*

Доказательство. Предположим, что это множество рекурсивно. Возьмём $a \in \varphi^{-1}(C)$ и $b \in \mathbb{N} \setminus \varphi^{-1}(C)$. Рассмотрим рекурсивную функцию

$$f(x) = \begin{cases} a, & \text{если } x \notin \varphi^{-1}(C) \\ b, & \text{если } x \in \varphi^{-1}(C) \end{cases}$$

По теореме о неподвижной точке, для некоторого c выполнено $\varphi_c = \varphi_{f(c)}$. Но одна функцию лежит в классе C, а другая — нет. Противоречие. □

3.2.2 Рекурсивно перечислимые множества. Сводимости. Тьюрингов скачок.

Напоминание: $A \subset \mathbb{N}$ рекурсивно перечислимо, если $A = \emptyset \vee A = rng(f)$ для некоторой рекурсивной функции f.

Определение 44. Нумерация $\nu : \mathbb{N} \to \mathcal{E}$ всех рекурсивно перечислимых множеств называется *вычислимой*, если $\{(n, x) \mid x \in \nu_n\}$ вычислимо (TODO: перечислимо?). Вычислимая нумерация называется главной, если к ней сводится любая другая вычислимая нумерация.

Предложение 57.

1) A рекурсивно $\Leftrightarrow$ A и $\overline{A}$ рекурсивно перечислимы (теорема Поста)

2) A рекурсивно перечислимо $\Leftrightarrow A = rng(\varphi_n)$ для некоторого $n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow A = dom(\varphi_n)$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$

3) $W_n = dom(\varphi_n)$ — главная вычислимая нумерация класса $\mathcal{E}$ всех рекурсивно перечислимых множеств.

4) $C = \{n \mid b \in W_n\}$ рекурсивно перечислимо, но не рекурсивно.

5) Любое рекурсивно перечислимое множество m-сводится к C.

Доказательство. Доказательство 4 пункта: предположим, что C рекурсивно. Тогда $\overline{C}$ тоже рекурсивно, а значит и рекурсивно перечислимо. Значит $\overline{X} = W_e$ для некоторого e. Тогда $e \in W_e \Leftrightarrow e \notin W_e$. Противоречие.

□

Определение 45. Мы говорим, что f *сводится по Тьюрингу к* g, если f рекурсивна относительно g. Обозначается $f \leq_T g$. Для множеств $A \leq_T B \Leftrightarrow \chi_A \leq_T \chi_B$

Определение 46. *Тьюринговым скачком* множества $A \subset \mathbb{N}$ называют $A' = \{n \mid n \in W_n^A\}$, где $W_n^A = dom(\varphi_n^A)$ (A — оракул).