Домашнее задание 13. Проблемы разрешимости. R-Вычислимость.

(30 ноября → 7 декабря)

Говорят, что $A \subseteq \mathbb{N}$ m-сводится к $B \subseteq \mathbb{N}$ (символически, $A \leq_m B$), если $A = f^{-1}(B)$ для некоторой рекурсивной функции f.

Язык программирования R: программа представляет из себя список команд, пронумерованных от 0 до N. Также есть счётный набор переменных $r_0, r_1, r_2, \ldots$

Команды выполняются последовательно. Каждая команда — оператор присвоения или условный оператор.

(∗) Оператор присвоения имеет один из трёх видов:

$$r_n \coloneqq 0, \quad r_n \coloneqq r_n + 1, \quad r_n \coloneqq r_m.$$

(∗) Условный оператор имеет вид $r_n = r_m \;\Rightarrow\; k$, где k — номер команды, к которому переходит программа, если условие выполнилось.

Программа останавливается, если была выполнена последняя команда или условный оператор отправил нас в команду, номер которой больше N. Программа вычисляет функцию $\varphi(x_0, \ldots, x_n)$ от $n+1$ переменной, если перед началом её работы

$$r_i = x_i; \quad r_{n+1}, r_{n+2}, \ldots = 0,$$

а после окончания r_0 (или, если вам угодно, r_{n+1}) равно $\varphi(x_0, \ldots, x_n)$.

1 а) Докажите, что отношение m-сводимости рефлексивно и транзитивно, а фактор-множество по индуцированному им отношению эквивалентности $\equiv_m$ континуально.

(б) Докажите, что если $A \leq_m B$ и B рекурсивно, то A также рекурсивно.

(в) Докажите, что множество всех натуральных чисел не определимо в поле вещественных чисел, а также в поле комплексных чисел.

2) Выясните, какие соотношения по m-сводимости существуют между следующими множествами предложений (точнее, между соответствующими множествами кодов): $Th(\mathbb{N})$, $Th(\mathbb{Z})$, $Th(\mathbb{Q})$, $Th(\mathbb{R})$, $Th(\mathbb{C})$, арифметика Пеано. Все указанные теории рассматриваются в сигнатуре $\sigma = \{=, +, \cdot, 0, 1\}$.

3) Докажите, что существуют программы на R, вычисляющие следующие функции:

$$\text{постоянные функции}, \quad I^n_k, \quad +, \quad \chi_{\leq}, \quad max\{x, y\}, \quad \cdot, \quad x^y, \quad x!.$$

4) Докажите, что минимизация; суперпозиция функций, для которых есть программы на R, имеют программы на R.

5) Докажите, что любая программа на R может быть представлена λ-термом.