Математическая логика 2, ФМКН СПбГУ
(математика 3 к., осенний семестр 2022)

Лектор В.Л. Селиванов

Содержание курса

Раздел 1. Теория моделей

1. Структуры данной сигнатуры, гомоморфизмы, изоморфизмы. Декартово произведение структур.
2. Логика предикатов, синтаксис и семантика. Термы и формулы данной сигнатуры. Свободные и связанные переменные. Допустимые подстановки термов вместо свободных переменных. Истинность формулы в структуре. Тождественная истинность и равносильность формул. Основные тавтологии и основные равносильности. Приведение формулы к предваренному виду.
3. Предложения, теории, модели, логическое следование. Элементарная эквивалентность изоморфных структур.
4. Фильтры и ультрафильтры. Расширение фильтра до ультрафильтра. Фильтрованные произведения. Теорма Лося об ультрапроизведении. Теорема Гёделя-Мальцева о компактности.
5. Теоремы Лёвенгейма-Сколема о понижение и повышении мощности моделей. Возможные мощности моделей данной теории.
6. Аксиоматизируемые классы структур. Критерии конечной, Π_1-, и Π_2-аксиоматизируемости. Иерархия формул по числу перемен кванторов.
7. Полные теории, их характеризации, тест Лося-Воота. Модельно полные теории, их характеризации, тест Линдстрёма. Элиминация кванторов. Модельная характеризация теорий, допускающих элиминацию кванторов.
8. Ограниченная и неограниченная игра Эренфойхта. Выигрышные стратегии. Кванторная глубина формулы. Характеризации элементарной эквивалентности и ее ограниченных вариантов в терминах выигрышных стратегий.

Раздел 2. Выводимость и (не)разрешимость

9. Аксиомы и правила вывода вариантов Гильбертовского исчисления предикатов. Выводимость, свойства отношения выводимости. Непротиворечивые множества формул, их свойства. Теории Хенкина, их свойства.
10. Теорема о существовании модели. Теорема Гёделя о полноте исчисления предикатов. Разрешимость полной перечислимо аксиоматизируемой теории. Теоремы Линдстрёма о максимальности логики предикатов (без точных определений и доказательств).
11. Вычислимость. Операторы суперпозиции и минимизации. Рекурсивные функции и предикаты. Тезис Чёрча. Бета-функция Гёделя.
12. Кодирование последовательностей чисел и его свойства. Замкнутость класса рекурсивных функций относительно определения по рекурсии. Кодирование исчисления предикатов, его свойства. Рекурсивность отношения выводимости.
13. Минимальная арифметика, арифметика Пеано, теория стандартной модели арифметики. Представление рекурсивных предикатов в минимальной арифметике.
14. Теорема Чёрча о неразрешимость арифметики, примеры. Неразрешимость логики предикатов. Теорема Гёделя о неполноте арифметики, примеры. Примеры разрешимых и неразрешимых теорий.

Раздел 3. Теория вычислимости

15. R-программы. R-вычислимые функции, примеры. Замкнутость класса R-вычислимых функций относительно суперпозиции и минимизации.

16. Кодирование R-вычислений. Совпадение классов R-вычислимых и рекурсивных тотальных функций.
17. R-вычислимость частичных функций. Рекурсивность частичных функций. Совпадение классов R-вычислимых и рекурсивных частичных функций. R-Вычислимость с оракулом и относительная рекурсивность. Совпадение классов R-вычислимых с оракулом h и рекурсивных относительно h тотальных (а также частичных) функций.
18. Главная вычислимая нумерация R-вычислимых частичных функций. Существование главной вычислимой нумерации. Теорема о неподвижной точке. Теорема Райса.
19. Характеризации рекурсивно перечислимых множеств. m-Сводимость и ее свойства. Тьюрингова сводимость и тьюрингов скачок, их свойства. m-Универсальные рекурсивно перечислимые множества. Сравнение теорий числовых структур по отношению m-сводимости.
20. Арифметические множества. Арифметическая иерархия и ее свойства. Связь арифметической иерархии с итерациями тьюрингова скачка. Теорема Тарского о неопределимости истины.

Литература

1. Н.К. Верещагин, А. Шень. Лекции по математической логике и теории алгоритмов. Часть 2. Языки и исчисления. — 4-е изд., доп. — М.: МЦНМО, 2012. — 240 с.
2. Н.К. Верещагин, А. Шень. Лекции по математической логике и теории алгоритмов. Часть 3. Вычислимые функции. — 4-е изд., доп. — М.: МЦНМО, 2012. — 159 с.
3. Н. Катленд. Вычислимость. Введение в теорию рекурсивных функций. М: Мир, 1983. - 255 с.
4. И.А. Лавров, Л.Л. Максимова, Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. Издание четвертое, М.: Наука, 2001. 256 с.
5. Дж. Шенфилд. Математическая логика. М.: Наука, 1975. 528 с.