

# Математическая логика — 2

## V семестр

Лектор: Виктор Львович Селиванов

Записывали: Глеб Минаев, Иван Кабашный

Редактировал: Борис Алексеевич Золотов

МКН СПбГУ, осень 2022

## Содержание

<b>1</b>	<b>Логика предикатов</b>	<b>2</b>
1.1	Истинность и доказуемость . . . . .	2
1.1.1	Структура . . . . .	2
1.1.2	Термы и формулы . . . . .	3
1.1.3	Значение термов и формул . . . . .	4
1.1.4	Ультрафильтры . . . . .	4
1.1.5	Декартово и фильтрованное произведения структур . . . . .	6
1.2	Лекция 3 . . . . .	7
1.2.1	Понижение и повышение мощности . . . . .	8
1.3	Лекция 4 . . . . .	9
1.4	Лекция 5 . . . . .	11
1.5	Аксиоматизированные классы . . . . .	11
1.6	Лекция 6 . . . . .	13
1.6.1	Полнота, модельная полнота, элиминация кванторов. . . . .	14
1.7	Лекция 7 . . . . .	15
1.8	Лекция 8 . . . . .	17
1.8.1	Элиминация кванторов . . . . .	17
1.9	Лекция 9 . . . . .	19
1.9.1	Игры Эренфойхта . . . . .	19
<b>2</b>	<b>Неразрешимость и неполнота</b>	<b>21</b>
2.1	Лекция 10 . . . . .	21
2.1.1	Свойства выводимости, теория Хенкина . . . . .	21
2.1.2	Теоремы о существовании модели и полноте $ИП_\sigma$ . . . . .	21
2.2	Лекция 11 . . . . .	21
2.2.1	Рекурсивные функции и предикаты . . . . .	23
2.3	Лекция 12 . . . . .	25
2.3.1	Кодирование $ИП_\sigma$ . . . . .	26

2.4	Лекция 13 . . . . .	27
2.4.1	Представимость ИП $_{\sigma}$ в минимальной арифметике . . . . .	27
2.4.2	Неразрешимость и неполнота арифметики. Проблемы разрешимости . . . . .	27
<b>3</b>	<b>Введение в вычислимость</b>	<b>28</b>
3.1	Лекция 14 . . . . .	28
3.1.1	R-вычислимость . . . . .	28
3.1.2	R-вычислимость и рекурсивность . . . . .	29
3.2	Лекция 15 . . . . .	29
3.2.1	Главная вычислимая нумерация рекурсивных частичных функций	30
3.2.2	Рекурсивно перечислимые множества. Сводимости. Тьюрингов скачок. . . . .	32

# 1 Логика предикатов

## 1.1 Истинность и доказуемость

### 1.1.1 Структура

Бурбаки классифицировал структуры как:

- 1) операции,
- 2) частичные порядки,
- 3) топологические структуры.

Последние не имеют приложения в логике — их мы рассматривать не будем. “Операции” — это структуры алгебраические, “частичные порядки” — это структуры, снабжённые каким-либо отношением.

**Определение 1.** *Сигнатура* — набор функциональных, предикатных и константных символов вместе с функцией, задающей арность этих символов.

Функциональные символы интерпретируются как функции  $A^n \rightarrow A$ , предикатные символы — как функции  $A^m \rightarrow \{\text{и}, \text{л}\}$ , а константы — как элементы  $A$  (или, что равносильно, функции  $\{\emptyset\} \rightarrow A$ ).

Будем называть  $\sigma$ -структурой (структурой сигнатуры  $\sigma$ ) пару  $(A, I)$ , где  $A$  — непустое множество, а  $I$  — интерпретация сигнатурных символов  $\sigma$  в  $A$ .

**Пример 1.** *Сигнатура упорядоченного кольца* —  $\langle +, \cdot; <; 0, 1 \rangle$ . Можно добавить вычитание и взятие противоположного, но они выражаются в имеющейся сигнатуре.

**Определение 2.**  $A, B$  —  $\sigma$ -структуры. Тогда отображение  $\varphi : A \rightarrow B$  называется гомоморфизмом, если оно задаёт  $\varphi : A \rightarrow B$ , что для всякой функции  $f^n$  из сигнатуры  $\sigma$  и для всяких  $a_1, \dots, a_n \in A$

$$\varphi(f_A(a_1, \dots, a_n)) = f_B(\varphi(a_1), \dots, \varphi(a_n)),$$

для всякого предиката  $P^m$  в сигнатуре  $\sigma$  и всяких  $a_1, \dots, a_m \in A$

$$P_A(a_1, \dots, a_m) \implies P_B(\varphi(a_1), \dots, \varphi(a_m))$$

и для всякой константы  $c$  сигнатуры  $\sigma$

$$\varphi(c_A) = c_B.$$

$\varphi$  — изоморфизм, если  $\varphi$  — гомоморфизм, биективен, и  $\varphi^{-1}$  — гомоморфизм.

$\mathbb{A}$  называется *подструктурой*  $\mathbb{B}$  ( $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{B}$ ), если  $A \subseteq B$  и  $\varphi : A \rightarrow B, a \mapsto a$  — гомоморфизм.

### 1.1.2 Термы и формулы

**Определение 3.** Фиксируем некоторое множество  $V$  — “множество переменных” — символы  $\wedge, \vee, \rightarrow, \neq$  и символы  $\forall x$  и  $\exists x$  для всякого  $x \in V$ .

*Терм* — это понятие, рекурсивно определяемое следующими соотношениями:

- переменная — терм,
- константа — терм,
- для всяких термов  $t_1, \dots, t_n$  и функции  $f^n$  выражение  $f(t_1, \dots, t_n)$  — терм.

*Формула* — это понятие, рекурсивно определяемое следующими соотношениями:

- для всяких термов  $t_1, t_2$  выражение  $t_1 = t_2$  — формула,
- для всяких предиката  $P^n$  из  $\sigma$  и термов  $t_1, \dots, t_n$  выражение  $P(t_1, \dots, t_n)$  — формула,
- для всяких формул  $\varphi$  и  $\psi$  выражения  $\varphi \wedge \psi, \varphi \vee \psi, \varphi \rightarrow \psi, \neg \varphi$  — формулы,
- для всяких формулы  $\varphi$  и переменной  $x$  выражения  $\forall x \varphi$  и  $\exists x \varphi$  — формулы.

$\text{For}_\sigma$  — множество всех формул с сигнатурой  $\sigma$ .

**Пример 2.** В кольцах всякий терм можно свести к полиному с целыми коэффициентами. В мультипликативных группа — моному с целым коэффициентом.

**Задача 1.** Семейства термов и формул задаются контекстно свободными грамматиками.

**Определение 4.** Переменная  $x$  называется *свободной* в формуле  $\varphi$ , если есть вхождение  $x$  не покрываемое никаким квантором  $\forall x$  и никаким квантором  $\exists x$ .  $\text{FV}(\varphi)$  — множество всех свободных переменных формулы  $\varphi$ .

### 1.1.3 Значение термов и формул

**Определение 5.** Пусть  $t$  — терм в сигнатуре  $\sigma$ , а  $\mathbb{A}$  —  $\sigma$ -структура. Тогда  $t^{\mathbb{A}} : A^n \rightarrow A$  — *означивание*  $t$ , некоторая функция, полученная подставлением вместо констант их значений в  $\mathbb{A}$  и последующим рекурсивным означиванием по синтаксическому дереву  $t$ . Аналогично получается означивание формулы  $f^{\mathbb{A}} : A^n \rightarrow \{\text{и}, \text{л}\}$ .

**Определение 6.** *Предложение* в сигнатуре  $\sigma$  — формула без свободных переменных.

$$\begin{aligned}\varphi^{\mathbb{A}} &\in \{T, F\}, \\ \varphi^{\mathbb{A}} = T &\iff \mathbb{A} \models \varphi.\end{aligned}$$

**Определение 7.** *Моделью* данного множества предложения  $\Gamma$  называется структура, в которой все предложения из  $\Gamma$  истинны. Если  $\mathbb{A}$  — это модель, то иногда пишут  $\mathbb{A} \models \Gamma$ .

Если  $\Gamma$  — множество предложений,  $\varphi$  — предложение. Говорят, что  $\varphi$  логически следует из  $\Gamma$  ( $\Gamma \models \varphi$ ), если  $\varphi$  истинно в любой модели  $\Gamma$ .

**Определение 8.** Предложение  $\varphi$  называется тождественно истинно, если оно истинно в любой структуре. Иногда пишут  $\models \varphi$ .

**Утверждение 1.**

- $\Gamma \models \varphi$  тогда и только тогда, когда  $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$  не имеет модели.
- $\varphi$  — тождественная истина тогда и только тогда, когда  $\models \varphi$ .
- $\Gamma$  — конечное;  $\Gamma \models \varphi$  тогда и только тогда, когда  $(\bigwedge \Gamma) \rightarrow \varphi$  — тождественная истина.

### 1.1.4 Ультрафильтры

**Определение 9.** Пусть  $I$  — непустое множество. *Фильтром* на множестве  $I$  называется непустое множество  $F \subseteq \mathcal{P}(I)$  (где  $\mathcal{P}(I)$  — множество всех подмножеств), которое не содержит  $\emptyset \subset I$ , а также замкнуто относительно пересечения:

$$\forall A, B \in F \quad A \cap B \in F,$$

и взятия надмножеств:

$$\forall A \in F \quad A \subseteq B \subseteq I \implies B \in F.$$

Фильтр  $F$  называется *ультрафильтром*, если  $A \in F$  или  $\overline{A} \in F$  для любого  $A \subseteq I$ .

**Утверждение 2.**

- 1) Фильтр  $F$  является ультрафильтром тогда и только тогда, когда он является максимальным по включению среди всех фильтров (то есть, нет фильтра, который бы его расширял).

2) Пусть  $F$  — ультрафильтр и  $A, B \subseteq I$ , тогда

$$\begin{aligned} A \in F &\iff \bar{A} \notin F, \\ A \cup B \in F &\iff A \in F \text{ или } B \in F. \end{aligned}$$

3) Любой фильтр содержится в некотором ультрафильтре.

*Доказательство.* Докажем 1.

Пусть  $F$  — ультрафильтр. Утверждается, что нет фильтра  $F'$ , который содержал бы  $F$  ( $F' \supseteq F$ ). Предположим противное, т.е. что существует такое  $A$ , что оно принадлежит  $F'$  и не принадлежит  $F$ . Раз  $A \notin F$ , то  $\bar{A} \in F$ . В силу того, что  $F \subseteq F'$ , то  $\bar{A}$  также принадлежит  $F'$ . Таким образом,  $\emptyset = A \cap \bar{A} \in F'$ , противоречие.

В обратную сторону,  $F$  — максимальный по включению фильтр. От противного, пусть есть множество  $A \subseteq I$  такое, что  $A, \bar{A} \notin F$ . Рассмотрим

$$F' = \{X \subseteq I \mid \exists B \in F \ A \cap B \subseteq X\}.$$

$F'$  должно быть фильтром (замкнутость вверх по включению понятна, замкнутость относительно пересечения также верна, так как если  $X, Y \in F'$ ,  $A \cap B \subseteq X$ ,  $A \cap C \subseteq Y$  для  $B, C \in F$ , то  $A \cap B \cap C \subseteq (X \cap Y)$ .  $B \cap C \in F$ , а значит,  $X \cap Y \in F'$ ; и последнее, если  $\emptyset \in F'$ , то получается очевидное противоречие из того, что  $A \cap B$  всегда непусто — иначе  $\bar{A} \supseteq B$ , а  $F$  замкнуто относительно взятия надмножеств).

Докажем 2. Пусть  $F$  — ультрафильтр. Одновременно  $A$  и  $\bar{A}$  принадлежать  $F$  не могут. Имеем  $A \in F \vee \bar{A} \in F$ , откуда понятно. Второе утверждение очевидно в левую сторону.

В другую сторону, имеем  $A \cup B \in F$ , предположим противное. Пусть  $A, B \notin F$ , значит,  $\bar{A}, \bar{B} \in F$ , а тогда  $\bar{A} \cap \bar{B} \in F$ . По закону деМоргана,  $\overline{A \cup B} \in F$ , откуда  $A \cup B \notin F$ .

Докажем 3. Пусть имеется  $F$ . Утверждается, что существует ультрафильтр  $F^*$ , который содержит  $F$  ( $F^* \supseteq F$ ). Данное утверждение нетривиально и в каком-то смысле схоже с аксиомой выбора. Применим лемму Цорна.

**Лемма 3** (Цорн). Пусть  $(P; \leq)$  — частичный порядок, в котором всякая линейная цепь  $A \supseteq P$  имеет верхнюю границу. Тогда в этом частичном порядке есть максимальный элемент.

Рассмотрим множество всех фильтров  $P = \{G \text{ — фильтр} \mid F \subseteq G\}$ , и порядок  $\subseteq$ . Пусть  $\mathfrak{F}$  — цепочка фильтров. Несложно проверить, что  $F' = \bigcup \mathfrak{F}$  является фильтром, это верхняя грань цепочки. По лемме, существует  $F^*$  — максимальное расширение. Оно является ультрафильтром.  $\square$

**Пример 3.**

- Пусть есть  $I$ , тогда  $\{I\}$  — фильтр.
- Пусть  $\emptyset \neq A \subseteq I$ , тогда  $F = \{X \subseteq I \mid A \subseteq X\}$  — фильтр. Является ультрафильтром тогда и только тогда, когда  $|A| = 1$ . В таком случае называется главным ультрафильтром.

**Задача 2.** Если  $I$  бесконечное, то в  $P(I)$  есть неглавные ультрафильтры. Для доказательства рассматриваем  $F = \{A \subseteq I \mid A \text{ — коконечно}\}$ , и существующий по доказанному ранее  $F^* \supseteq F$ .

### 1.1.5 Декартово и фильтрованное произведения структур

Пусть имеется некоторое проиндексированное семейство  $\sigma$ -структур  $\{\mathbb{A}_i\}_{i \in I}$ .

**Определение 10** (Декартово произведение). Определим  $\sigma$ -структуру на декартовом произведении нескольких  $\sigma$ -структур. Мы будем обозначать её  $\mathbb{A} = \prod_{i \in I} \mathbb{A}_i$ .

Носителем структуры будет множество

$$A = \prod_{i \in I} A_i = \left\{ a: I \longrightarrow \bigsqcup_{i \in I} A_i \mid a(i) \in A_i \right\}.$$

Константы, функции и предикаты интерпретируются следующим образом:

- 1)  $c^{\mathbb{A}}(i) = c^{\mathbb{A}_i}$  — отображение, возвращающее в каждой структуре соответствующую константу;
- 2)  $(f^{\mathbb{A}}(a_1, \dots, a_n))(i) = f^{\mathbb{A}_i}(a_1(i), \dots, a_n(i))$  — действуем функцией в каждой структуре, собираем из образов элемент декартова произведения;
- 3)  $P^{\mathbb{A}}(a_1, \dots, a_n) \iff P^{\mathbb{A}_i}(a_1(i), \dots, a_n(i))$  выполнен для всех  $i \in I$ .

**Определение 11** (Фильтрованное произведение). Пусть  $F$  — фильтр на множестве  $I$ . *Фильтрованное произведение* нескольких структур (обозначается  $\mathbb{A}_F$ ) получается факторизацией их декартова произведения по следующему отношению эквивалентности:

$$a \equiv_F b \stackrel{\text{def}}{\iff} \{i \in I \mid a(i) = b(i)\} \in F$$

(говорят, что  $a(i) = b(i)$  для  $F$ -большинства  $i$ ).

Носителем фильтрованного произведения будет фактор-множество  $A/\equiv_F$ , состоящее из классов эквивалентности  $\{[a] \mid a \in A\}$ . Константы, функции и предикаты интерпретируются следующим образом:

- 1)  $c^{\mathbb{A}_F} = [c^{\mathbb{A}}]$  — класс элемента, собранного из соответствующих констант во всех структурах;
- 2)  $f^{\mathbb{A}_F}([a_1], \dots, [a_n]) = [f^{\mathbb{A}}(a_1, \dots, a_n)]$  — надо проверить, что определено однозначно (потому что пересечение множеств фильтра принадлежит фильтру);
- 3)  $P^{\mathbb{A}_F}([a_1], \dots, [a_n]) \iff P^{\mathbb{A}_i}(a_1(i), \dots, a_n(i))$  для  $F$ -большинства  $i$ .

Если  $F$  — ультрафильтр, то  $\mathbb{A}_F$  называется *ультрапроизведением*.

**Теорема 4** (Лоса об ультрапроизведениях). Пусть  $F$  — ультрафильтр на множестве  $I$ ,  $\mathbb{A}_i$  — семейство структур,  $\varphi(x_1, \dots, x_k)$  —  $\sigma$ -формула и пусть  $a_1, \dots, a_k \in \prod_i A_i$ . Тогда  $\mathbb{A}_F \models \varphi([a_1], \dots, [a_k])$  тогда и только тогда, когда  $\mathbb{A}_i \models \varphi(a_1(i), \dots, a_k(i))$  для  $F$ -большинства индексов.

## 1.2 Лекция 3

**Утверждение 5** (Следствие). Для ультрафильтра  $F$  и предложения  $\varphi$  выполнено

$$\mathbb{A}_F \models \varphi \iff \{i \mid \mathbb{A}_i \models \varphi\} \in F.$$

*Доказательство.* (теоремы Лося) Доказательство приведём индукцией по построению формулы. Простейшие формулы в виде предиката и равенства двух термов рассматриваются очевидно, это - база. Обратим внимание на функциональный символ  $f \in \sigma$ . Как он интерпретируется?

$$f^{\mathbb{A}_F}([a_1], \dots, [a_k]) := [\lambda_i f^{\mathbb{A}_i}(a_1(i), \dots, a_k(i))]$$

Из определения декартового у нас было

$$f^{\mathbb{A}}([a_1], \dots, [a_k]) := \lambda_i f^{\mathbb{A}_i}(a_1(i), \dots, a_k(i)),$$

где  $i\mathbb{A} \mapsto f^{\mathbb{A}_i}(a_1(i), \dots, a_k(i))$ , и  $\lambda x f(x) = f$ . Причём согласно фильтру

$$\begin{aligned} a_1 &\equiv_F a'_1 \\ &\vdots \\ a_k &\equiv_F a'_k \\ f^{\mathbb{A}}(a_1, \dots, a_k) &\equiv_F f^{\mathbb{A}}(a'_1, \dots, a'_k). \end{aligned}$$

$J_i\{i \mid a_1(i) = a'_1(i)\} \in F$ ,  $f^{\mathbb{A}_i}(a_1(i), \dots, a_k(i)) = J_1 \cap \dots \cap J_k \in F = f^{\mathbb{A}}(a'_1, \dots, a'_k)$ . Константы  $c^{\mathbb{A}}$  интерпретируются как  $\lambda_i c^{\mathbb{A}_i}$ , переменные означиваются каким-то образом  $x_j \text{Apsto} a_j(i)$ ,  $t^{\mathbb{A}_i} = f^{\mathbb{A}_i}(t_1^{\mathbb{A}_i}, \dots, t_k^{\mathbb{A}_i})$ , значит,  $t^{\mathbb{A}}(a_1, \dots, a_k) = f^{\mathbb{A}}(t_1^{\mathbb{A}}(\bar{a}), \dots, t_k^{\mathbb{A}}(\bar{a}))$ . Соответственно, из определения это верно для простейших формул. Перейдём теперь к сложным формулам.

Более сложные формулы строятся из простых при помощи логических связок и кванторов. Достаточно рассматривать только конъюнкцию, отрицанию и существование (остальные выражаются через них). Пусть мы хотим проверить

$$\mathbb{A}_F \models (\varphi \wedge \psi)(a_1, \dots, a_k).$$

Это означает, что  $\mathbb{A}_F \models \varphi([\bar{a}])$  и  $\mathbb{A} \models \psi([\bar{a}])$ .  $J = \{i \mid \mathbb{A}_i \models \varphi(\overline{a(i)})\} \in F$ . Проверяется  $i \in J \cap K$ ,

$$\{\mathbb{A}_i \models (\varphi \wedge \psi)(a_1(i), \dots, a_k(i))\} \in F.$$

Отрицание также легко проверяется для ультрафильтров, так как есть свойство дополнения.

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_F &\models \neg \varphi([\bar{a}]) \\ \neg(\mathbb{A}_F &\models \varphi([\bar{a}])) \end{aligned}$$

...

Существование проверяется следующим образом:

$$\begin{aligned}\varphi &= \varphi(x_1, \dots, x_k), \\ \varphi &= \exists x \theta(x, x_1, \dots, x_k). \\ \mathbb{A}_F &\models \varphi([a_1], \dots, [a_k]), \\ \mathbb{A}_F &\models \theta([b], [a_1], \dots, [a_k]) \text{ для некоторого } b \in \mathbb{A}.\end{aligned}$$

И нам нужно доказать в две стороны. Для этого рассматриваем

$$\begin{aligned}J &= \{i \mid \mathbb{A}_i \models \theta(b(i), a_1(i), \dots, a_k(i))\}, \\ K &= \{i \mid \mathbb{A}_i \models \varphi(a_1(i), \dots, a_k(i))\}.\end{aligned}$$

Это — элементы  $F$ , которые в разных случаях лежат друг в друге. Не уловил суть, надо будет дописать и переписать.  $\square$

**Теорема 6** (Гёделя-Мальцева о компактности). *Бесконечное множество предложений  $\Gamma$  имеет модель тогда и только тогда, когда каждое его конечное подмножество  $\Gamma$  имеет модель.*

*Доказательство.* В одну сторону очевидно. Доказываем в обратную сторону.

Пусть  $I = \{i \mid i \text{ — конечное подмножество } \Gamma\}$ . Из существования модели для каждого  $i \in I$ , по аксиоме выбора, существует семейство структур  $\{\mathbb{A}_i\}_{i \in I}$  такое, что  $\forall i \mathbb{A}_i \models i$ .

Будем строить ультрапроизведение, соответствующее декартовому произведению  $\prod_{i \in I} \mathbb{A}_i$ , подходящее под требования теоремы. Начнём с построения фильтра. Для каждого  $i \in I$  пусть  $G_i = \{j \in I \mid i \subseteq j\}$ . Для каждой пары  $i, j \in I$  выполнено  $G_i \cap G_j = G_{i \cup j}$ . Пусть  $F = \{A \subseteq I \mid \exists i G_i \subseteq A\}$ . Можно проверить, что это фильтр ( $\emptyset$  отсутствует, так как все  $G_i$  непусты; надмножество  $A \supseteq G_i$  тоже содержит  $G_i$ ; пересечение  $A \supseteq G_i$  и  $B \supseteq G_j$  содержит  $G_{i \cup j}$ ). По доказанному ранее, существует ультрафильтр  $H \supseteq F$ .

Наконец, рассмотрим ультрапроизведение  $\mathbb{A}_H$ . Для любой формулы  $\varphi \in \Gamma$ , имеем  $\{\varphi\} \in I$ , поэтому  $G_{\{\varphi\}} \in F \subseteq H$ . По теореме Лося, так как  $\forall i \in G_{\{\varphi\}}$  выполнено  $\mathbb{A}_i \models \varphi$ , то и  $\mathbb{A}_H \models \varphi$ .  $\square$

### 1.2.1 Понижение и повышение мощности

#### Определение 12.

- (Уже определялось выше)  $\mathbb{A}$  — *подструктура*  $\mathbb{B}$  (обозначается  $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{B}$ ), если  $A \subseteq B$  и значения простых формул на элементах  $\mathbb{A}$  в  $\mathbb{A}$  и  $\mathbb{B}$  совпадают;
- $\mathbb{A}$  — *элементарная подструктура*  $\mathbb{B}$  (обозначается  $\mathbb{A} \preceq \mathbb{B}$ ), если  $A \subseteq B$  и значения любых формул на элементах  $\mathbb{A}$  в  $\mathbb{A}$  и  $\mathbb{B}$  совпадают (то есть  $\forall \bar{a} \in \mathbb{A}$  выполнено  $\varphi^{\mathbb{A}}(\bar{a}) = \varphi^{\mathbb{B}}(\bar{a})$ );



- $\mathbb{A}$  элементарно эквивалентно  $\mathbb{B}$  (обозначается  $\mathbb{A} \equiv \mathbb{B}$ ), если они удовлетворяют одни и те же предложения.

**Утверждение 7.**  $\mathbb{A} \preceq \mathbb{B}$ , тогда  $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{B}$  и  $\mathbb{A} \equiv \mathbb{B}$ .

**Теорема 8** (Лёвенгейма-Сколема, понижение). Пусть есть  $\mathbb{A}$ ,  $X \subseteq A$ ,  $|X| \leq |\text{For}_\sigma|$ . Тогда существует  $\mathbb{B} \preceq \mathbb{A}$ :  $X \subseteq B$  и  $|\mathbb{B}| \leq |\text{For}_\sigma|$ .

### 1.3 Лекция 4

*Доказательство.* Построим последовательность  $X = S_0 \subseteq S_1 \subseteq \dots$ , где

$$S_{n+1} = S_n \cup \{\eta(e) \mid e \in E_n\},$$

где  $E_n$  и  $\eta : E_n \rightarrow A$  определены следующим образом:

$$E_n = \{(\bar{a}, \varphi(\bar{x}, y)) \mid \bar{a} \in S_n \text{ и } \mathbb{A} \models \exists y \varphi(\bar{a}, y)\} \quad \text{и} \quad \mathbb{A} \models \varphi(\bar{a}, \eta(e)) \quad (\forall e \in E_n).$$

В качестве  $B$  просто возьмём  $\bigcup_n S_n$ . Нужно проверить, что  $|B| \leq |\text{For}_\sigma|$  — это делается индукцией по  $S_i$ .  $E_n$  по мощности не превосходит  $\text{For}_\sigma$  посредством сравнения через  $\text{For}_\sigma^2$ , откуда и получаем требуемое.

Рассмотрим теперь  $\mathbb{B} = (B, I)$  с сигнатурой  $\sigma$  и проверим, что  $B$  замкнуто относительно интерпретаций элементов сигнатуры. Для константных символов выполнено  $(\emptyset, y = c) \in E_0$ . Для функционального символа  $f$ , если элементы  $\bar{a} \in S_n$ , то  $(\bar{a}, y = f(\bar{a})) \in E_n$ . А интерпретация предикатов в структуре  $\mathbb{B}$  задаётся как и в  $\mathbb{A}$ :

$$P^{\mathbb{B}}(b_1, \dots, b_n) = T \iff P^{\mathbb{A}}(b_1, \dots, b_n) = T.$$

Осталось лишь проверить, что для любой формулы  $\varphi(x_1, \dots, x_k)$  и для любых значений переменных  $(a_1, \dots, a_k) = \bar{a} \in B$  значение на этих элементах в  $\mathbb{B}$  будет совпадать со значением в  $\mathbb{A}$ :

$$\mathbb{B} \models \varphi(\bar{a}) \iff \mathbb{A} \models \varphi(\bar{a}).$$

Проверяется это, конечно, индукцией по построению формулы. Рассмотрим  $\wedge$ ,  $\neg$  и  $\exists$  — через них всё выражается — и проверим для них. Конъюнкция — очевидна, ровно как и отрицание. Интерес представляет существование. Пусть  $\psi(\bar{x}) = \exists y \varphi(\bar{x}, y)$ . Пусть для  $\varphi$  уже доказано, что  $\mathbb{B} \models \varphi(\bar{a}, c) \iff \mathbb{A} \models \varphi(\bar{a}, c)$ . Слева направо требуемое очевидно, а справа налево получается из построенной конструкции: если  $\bar{a} \in S_n$ , то  $(\bar{a}, \varphi) \in E_n$ , на шаге  $n + 1$  получим нужный  $c \in S_{n+1}$ , значит  $\mathbb{B} \models \psi(\bar{a})$ .  $\square$

**Замечание.** Теория ZFC строится в сигнатуре  $\{=, \in\}$ . Множество  $\{\varphi \mid \text{ZFC} \models \varphi\}$  — в точности множество всех математических теорем. Мы считаем, что ZFC непротиворечива (то есть из ZFC не следует тождественно ложного утверждения; это гипотеза).

Рассмотрим  $\mathbb{A} \models \text{ZFC}$ . По теореме Лёвенгейма-Сколема, так как мощность множества формул счётно, то существует счётная модель  $\mathbb{A}_0 \models \text{ZFC}$ . Это утверждение называется *парадоксом Сколема*. На самом деле никаких противоречий нет. Но показывает, что понятие мощности не такое простое, каким кажется на первый взгляд.

Сигнатура  $\tau$  называется *обогащением* сигнатуры  $\sigma$  (записывается  $\sigma \subseteq \tau$ ), если последняя лежит в первой и дополнение непусто. Если  $\mathbb{A}$  — структура в сигнатуре  $\sigma$ , то определив интерпретацию символов  $\tau \setminus \sigma$ , то получим структуру  $\mathbb{A}$  сигнатуры  $\tau$  — тоже называется обогащением. Наоборот: если  $\mathbb{B}$  —  $\tau$ -структура, то  $B|_\sigma$  — *обеднение*. Чаще всего сигнатуры обобщаются константными символами.

**Определение 13.**

- 1) Пусть  $\mathbb{A}$  —  $\sigma$ -структура.  $\sigma_{\mathbb{A}} = \sigma \cup \{c_a \mid a \in A\}$ , где  $c_a$  — новые константные символы, причём  $c_a \neq c_b$  при  $a \neq b$ .  $D(\mathbb{A})$  — множество атомарных формул сигнатуры  $\sigma_{\mathbb{A}}$  (либо  $c = d$ , либо  $f(c_1, \dots, c_k) = d$ , либо  $P(c_1, \dots, c_k)$ , где все аргументы — константы) и их отрицаний, истинных в  $\mathbb{A}$  при интерпретации  $\sigma_a \models a$ . (*диаграмма*  $\mathbb{A}$ )
- 2) *Элементарная диаграмма*  $\mathbb{A}$  — это множество  $D^*(\mathbb{A})$  всех предложений  $\sigma_{\mathbb{A}}$ , истинных в  $\mathbb{A}$ . ( $D(\mathbb{A}) \subseteq D^*(\mathbb{A})$ )

**Утверждение 9.**

- 1) Если  $\mathbb{B} \models D(\mathbb{A})$ , то  $\mathbb{B}|_\sigma$  содержит подструктуру  $\mathbb{A}' \subseteq \mathbb{B}|_\sigma$  такую, что  $\mathbb{A}' \simeq \mathbb{A}$ .
- 2) Если  $\mathbb{B} \models D^*(\mathbb{A})$ , то  $\mathbb{B}|_\sigma$  содержит элементарную подструктуру, изоморфную  $\mathbb{A}$ .

*Доказательство.* В каждом пункте нужная структура состоит из множества  $A'$  всех констант сигнатуры  $\sigma_{\mathbb{A}}$ . □

**Теорема 10** (Лёвенгейма-Сколема о повышении мощности). Пусть имеется бесконечная  $\sigma$ -структура  $\mathbb{A}$  и  $\kappa \geq \max(|A|, |\text{For}_\sigma|)$ . Тогда найдётся  $\mathbb{B} \succeq \mathbb{A}$  мощности в точности  $\kappa$ .

*Доказательство.* Рассмотрим исходную сигнатуру и дважды её расширим:  $\sigma \mapsto \sigma_{\mathbb{A}} \mapsto \tau = \sigma_{\mathbb{A}} \cup \{d_x \mid x \in \kappa\}$  так, что  $x \neq x' \Rightarrow d_x \neq d_{x'}$ . И построим множество предложений сигнатуры  $\tau$

$$\Gamma = D^*(A) \cup \{\neg(d_x = d_{x'}) \mid x, x' \in \kappa, x \neq x'\}.$$

Любое конечное  $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$  имеет модель, являющуюся  $\tau$ -расширением структуры  $\mathbb{A}$  (интерпретируем  $c_a \mapsto a$ , а конечному подмножеству  $\{d_{x_k}\}_{k \leq n}$ , входящих в  $\Gamma_0$ , сопоставим различные элементы  $A$ ). По теореме о компактности существует  $\mathbb{C}$  —  $\tau$ -структура, такая, что  $\mathbb{C} \models \Gamma$ .

Тогда  $\kappa \leq |\mathbb{C}|$  из-за существования инъекции  $x \mapsto d_x$ .  $\mathbb{C}|_{\sigma_{\mathbb{A}}} \models D^*(\mathbb{A})$ , значит есть  $\mathbb{A}' \preceq \mathbb{C}$ , изоморфная  $\mathbb{A}$ . Воспользуемся теоремой Лёвенгейма-Сколема о понижении мощности для  $\mathbb{C}$  и  $X \supseteq A'$  мощности  $\kappa$ , получим  $\mathbb{B}' \preceq \mathbb{C}$  мощности  $|\mathbb{B}'| \leq |\text{For}_\tau| = \kappa$ . С другой стороны,  $B' \supseteq A'$ , поэтому  $|\mathbb{B}'| \geq |X| = \kappa$ . Значит  $|\mathbb{B}'| = \kappa$ . Обеднение  $\mathbb{B}'$  и есть искомая структура. □

**Определение 14.**

- Теория  $T$  — множество предложений сигнатуры  $\sigma$ .
- Теории  $T$  соответствует класс структур  $\text{Mod}(T) = \{A \mid A \models T\}$
- Классу структур  $K \subseteq \text{Str}_\sigma$  соответствует теория  $\text{Th}(K) = \{\varphi - \text{предложение} \mid \forall A \in K \ A \models \varphi\}$
- Класс структур  $K$  называется *аксиоматизируемым*, если  $K = \text{Mod}(T)$  для некоторой теории  $T$ .

## 1.4 Лекция 5

**Утверждение 11** (следствие Лёвенгейма—Сколема).

- 1) Если  $\sigma$ -теория имеет бесконечную модель, то она имеет модель любой мощности хотя бы  $|For_\sigma|$ ;
- 2) Если  $\sigma$ -теория имеет конечную модель сколь угодно большой мощности, то она имеет модель любой мощности хотя бы  $|For_\sigma|$ .

*Доказательство.* \*рисуются картинки\*

□

**Теорема 12** (без доказательства). *Логика предикатов — единственная логика, для которой верны и теорема о компактности и теорема о понижении мощности.*

## 1.5 Аксиоматизированные классы

**Определение 15.**

- 1)  $\text{Sent}_\sigma \supseteq T$ ,  $\text{Str}_\sigma \supseteq K$ . Сопоставим  $T \mapsto \text{Mod}(T)$ ,  $K \mapsto \text{Th}(K) = \{\varphi \mid \forall A \in K (A \models \varphi)\}$ . Класс  $K$  называется *аксиоматизируемым*, если  $K = \text{Mod}(T)$  для всех  $T$ ;
- 2)  $K$  — *конечно аксиоматизируемый*, если  $K = \text{Mod}(T)$  для некоторого конечного  $T = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$  ( $\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n$ )

**Предложение 13.**

- 1)  $T \subseteq T'$ , тогда  $\text{Mod}(T) \supseteq \text{Mod}(T')$ ;
- 2)  $K \subseteq K'$ , тогда  $\text{Th}(K) \supseteq \text{Th}(K')$ ;
- 3)  $K \subseteq \text{Mod}(\text{Th}(K)) : T \subseteq \text{ThMod}(T)$ ;
- 4) Любое пересечение аксиоматизированных классов является аксиоматизированным классом. Объединение двух аксиоматизированных классов является аксиоматизированным классом;
- 5) Класс  $K$  является аксиоматизированным тогда и только тогда, когда  $K = \text{Mod}(\text{Th}(K))$ ;

- 6)  $K$  конечно аксиоматизируемый тогда и только тогда, когда  $K$  и  $Str_\sigma \setminus K$  аксиоматизируемы;
- 7)  $K$  — аксиоматизируемый тогда и только тогда, когда  $K$  замкнут относительно  $\equiv$  и ультрапроизведений.

*Доказательство.* Докажем (7) в левую сторону (в правую — д/з). Пусть  $\{\mathbb{A}\}_{i \in I} \in K$ , тогда  $\mathbf{MA}_F \in K$ . Проверим, что  $K$  совпадает с множеством  $\text{Mod}(\text{Th}(K))$  (5), причём из третьего свойства включение  $K$  в множество моделей очевидно, а с другим придётся повозиться.

Пусть  $\mathbb{A} \models \text{Th}(K)$ , и нам нужно показать, что  $\mathbb{A} \in K$ .  $\mathbb{A} \equiv \mathbb{B}_{F^*}$ , где  $F^*$  — некий ультрафильтр на подходящем множестве  $I$ ;  $B_i \in K$ . Откуда взять множество  $I$ ? Недолго думая, возьмём  $I := \text{Th}(\mathbb{A})$ . Утверждается, что для любого  $\varphi \in \text{Th}(\mathbb{A}) \exists \mathbb{B} \in K (\mathbb{B} \models \varphi)$ .

Возьмём любое  $\varphi$  и предположим, что это не верно. То есть, для любой структуры  $\mathbb{B} \in K$ ,  $\mathbb{B} \models \neg \varphi$ , тогда  $\neg \varphi \in \text{Th}(K)$  и в  $\mathbb{A}$  истинно  $\neg \varphi$  — противоречие. Таким образом  $\varphi \mapsto \mathbb{B}_\varphi \models \varphi$ , и мы получили семейство структур. Надо построить ультрафильтр.

Для каждого  $\varphi \in I$  рассмотрим  $U_\varphi := \{\psi \in \text{Th}(\mathbb{A}) \mid \mathbb{B}_\psi \models \psi \rightarrow \varphi\}$ ,  $\varphi \in U_\varphi$ .  $U_\varphi \cap U_{\varphi'} = U_{\varphi \wedge \varphi'} \neq \emptyset$  и принадлежит  $\text{Th}(\mathbb{A})$ . Пусть  $F = \{J \subseteq \text{Th}(\mathbb{A}) \mid \exists \varphi (J \supseteq U_\varphi)\}$ . Это — конечно, ультрафильтр.  $F^*$  — любой ультрафильтр, расширяющий  $F$ , должен нам подойти.

$$\mathbb{A} \models \varphi, \varphi \in I = \text{Th}(\mathbb{A}), \mathbb{B}_\varphi \models \varphi.$$

$$U_\varphi \subseteq \{\psi \in \text{Th}(\mathbb{A}) \mid \mathbb{B}_\psi \models \varphi\} \in F \subseteq F^*$$

$$\psi \in U_\varphi, \psi \in \text{Th}(\mathbb{A}). \models \psi \rightarrow \varphi, \mathbb{B}_\psi \models \psi, \mathbb{B}_F \models \varphi. \quad \square$$

**Определение 16.**  $\Sigma_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) — множество  $\sigma$ -формул (равносильных):

- $\Sigma_0$  — бескванторные формулы;
- $\Sigma_1$  — формулы вида  $\exists \bar{x} \psi(\bar{x}, \bar{y})$ , а  $\psi$  — бескванторная;
- $\Sigma_2$  — формулы вида  $\exists \bar{x}_1 \forall \bar{x}_2 \psi(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{y})$ ;
- и так далее по иерархии  $\sigma$ -формул по числу перемен кванторов в предварённой нормальной форме получаем  $\{\Sigma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ .

$\Pi_n$  — определяется аналогично с заменой  $\exists$  на  $\forall$  и наоборот.

**Предложение 14.**

- $\Sigma_n \cup \Pi_n \subseteq \Sigma_{n+1} \cap \Pi_{n+1}$ ;
- $\varphi \in \Pi_n$  тогда и только тогда, когда  $\neg \varphi \in \Sigma_n$ ;
- $\bigcup \Sigma_n = \bigcup \Pi_n = \text{For}_\sigma$ .

**Теорема 15.** *Аксиоматизируемый класс является  $\Pi_1$ -аксиоматизируемым тогда и только тогда, когда он замкнут относительно подструктур (если какая-то структура лежит в классе, то любая её подструктура тоже лежит в нём).*

*Доказательство.* Докажем слева направо. Пусть у нас есть класс  $K = \text{Mod}(T)$ , где  $T$  — множество  $\Pi_1$  предложений. Нам нужно доказать, что он замкнут относительно подструктур. Если  $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{B} \models T$ , то утверждается, что  $\mathbb{A} \models T$ . По-другому это можно расписать как  $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{B} \models \varphi = \forall \bar{x} \psi(\bar{x})$ . И это верно, потому что очевидно. Начнём с конца:  $\mathbb{A} \models \psi(\bar{a})$  при  $\bar{a} \in A$ , тогда  $\mathbb{B} \models \psi(\bar{a})$ .  $\square$

## 1.6 Лекция 6

В прошлый раз мы остановились на доказательстве теоремы.

**Теорема 16.** *Аксиоматизируемый класс  $\Pi_1$ -аксиоматизируемый тогда и только тогда, когда он замкнут относительно подструктур.*

*Доказательство.* Справа налево.  $K = \text{Mod}(T)$ , и введём класс аксиом  $\Gamma = \{\varphi \in \Pi_1 \mid T \models \varphi\}$ . И оказывается, что  $K = \text{Mod}(\Gamma)$ , мы хотим это доказать. Включение  $K$  в  $\text{Mod}(\Gamma)$  — очевидно. В другую — возьмём некоторую модель множества  $\Gamma$  ( $\mathbb{B} \models \Gamma$ ), тогда нужно проверить, что  $\mathbb{B} \in K$ . Конечно, нужно воспользоваться замкнутостью. Достаточно найти  $\mathbb{C} \in K$ , что  $\mathbb{B} \subseteq \mathbb{C}$ . Утверждается, что существует  $\mathbb{A} \models T$  такая, что  $\text{Th}_{\Sigma_1} \supseteq \text{Th}_{\Sigma_1}(\mathbb{B})$ .

**Определение 17.** Если что,  $\text{Th}(\mathbb{A}) = \{\varphi \mid \mathbb{A} \models \varphi\}$ ,  $\Phi \subseteq \text{Sent}_\sigma$ ,  $\text{Th}_\Phi(\mathbb{A}) = \{\varphi \in \Phi \mid \mathbb{A} \models \varphi\}$ .

В точности нам нужно доказать, что для  $T \cup \text{Th}_{\Sigma_1}(\mathbb{B})$  имеется модель. Предположим,  $T \cup \{\psi_1, \dots, \psi_n\}$  не имеет модели.  $\psi = \psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_n \in \Sigma_1$ ,  $T \cup \{\psi\}$  не имеет модели.  $T \models \neg\psi \in \Pi_1$ , а значит,  $\mathbb{B} \models \neg\psi$ , а с другой стороны  $\mathbb{B} \models \psi$ , противоречие.

Нам нужно вложить  $\mathbb{B} \subseteq \mathbb{C} \models T$ . Это всё равно, что найти модель для её диаграммы. То есть равносильно, что  $T \cup D(\mathbb{B})$  имеет модель. Применим в очередной раз теорему о компактности. То есть хочется, чтобы  $T \cup \{\delta_1, \dots, \delta_m\}$  имело модель, где  $\delta_i = \delta_i(\bar{c})$  ( $c \in \sigma_B$ ). Возьмём какие-то новые переменные и подставим:  $\mathbb{B} \models \exists \bar{x} (\delta_1(\bar{x}) \wedge \dots \wedge \delta_m(\bar{x}))$ . Это предложение истинно в  $\mathbb{B}$ , лежит в  $\Sigma_1$ , а значит, истинно и в  $\mathbb{A}$ . Тогда при подходящей интерпретации  $\mathbb{A}$  — искомая модель.  $\square$

Докажем теперь аналогичную теорему для  $\Pi_2$ .

**Теорема 17** (Теорема Чэна-Лося-Сушко). *Аксиоматизируемый класс  $\Pi_2$ -аксиоматизируемый тогда и только тогда, когда он замкнут относительно объединений цепей структур.*

**Замечание.** Что значит последнее условие? Если у нас есть возрастающая бесконечная цепочка структур  $\mathbb{A}_0 \subseteq \mathbb{A}_1 \subseteq \dots$ , тогда можно построить  $\mathbb{A} = \bigcup \mathbb{A}_n$ .  $\mathbb{A} =$

$\bigcup A_n$ , предикаты, функции и константы интерпретируются просто через объединение  $P^A = \bigcup P^{A_n}$ , и даже если с первого взгляда не верится, это — корректное определение структуры. Таким образом, класс замкнут относительно объединений цепей, если  $\forall n (A_n \in K), A_0 \subseteq A_1 \subseteq \dots, \bigcup A_n \in K$ .

*Доказательство.* Докажем сначала в лёгкую сторону, слева направо. Пусть у нас есть  $K = \text{Mod}(T)$ ,  $T \subseteq \Pi_2$ . А также цепочка  $A_i \in K$ , тогда нам нужно показать, что их объединение  $A \in K$ . Рассмотрим  $\varphi \in T$ , мы хотим проверить, что  $A \models \varphi$ .  $\varphi : \forall \bar{x} \exists \bar{y} \psi(\bar{x}, \bar{y})$ ,  $\psi$  — бескванторная.  $A_n \models \varphi$  при любом  $n$ .  $\bar{a} \in A$  — значение  $\bar{x}$ . Тогда нужно доказать, что  $A \models \exists \bar{y} \psi(\bar{a}, \bar{y})$ .  $\bar{a} \in A_n$  для некоторого  $n \geq 0$  ( $A_n \subseteq A$ ).  $A_n \models \exists \bar{y} \psi(\bar{a}, \bar{y})$ . И найдутся  $\bar{b} \in A_n$ ,  $A_n \models \psi(\bar{a}, \bar{b})$ . Ладно, я не успеваю и теряюсь в логике повествования.

В обратную сторону начало аналогичное. Включение слева направо опять понятно, и далее схема тоже схожа, мы только хотим, чтобы  $B \models T$ . Найдём объединение возрастающей цепочки  $K$ -структур  $B_\omega \succeq B$ . Ну то есть, мы её построим для начала. Доказательство того, что существует  $A \models T$  такое, что  $\text{Th}_{\Sigma_2}(A) \subseteq \text{Th}_{\Sigma_2}(B)$ , аналогично предыдущей теореме. Докажем ещё одно вспомогательное утверждение.

Существуют  $A' \equiv A$  и  $B' \succeq B$  такие, что  $B \subseteq A' \subseteq B'$ . Рассмотрим  $\text{Th}(A) \cup \text{Th}_{\Pi_1}(B_B)$ , где  $B_B$  — естественное  $\sigma_B$ -обогащение  $B$ . Если взять любое конечное множество из второй теории объединения, то аналогично предыдущей теореме, они имеют константы:  $\delta_1(\bar{c}), \dots, \delta_m(\bar{c})$ . Значит,

$$B \models \exists \bar{x} (\delta_1(\bar{x}) \wedge \dots \wedge \delta_m(\bar{x})) \in \Sigma_2,$$

следовательно, истинно и в  $A_B$ .  $A'_B$  — любая модель  $\text{Th}(A) \cup \text{Th}_{\Pi_1}(B_B)$  ( $A'$  — объединение до  $\sigma$ -структуры).  $A' \equiv A$  и  $B \subseteq A'$ ,  $\text{Th}_{\Sigma_1}(B_B) \supseteq \text{Th}_{\Sigma_1}(A'_B)$ .

Рассмотрим теперь  $D(A'_B) \cup \text{Th}(B_B)$ . Точно так же рассуждая, как и выше, эта теория имеет модель  $B'_{A'}$  такую, что  $B \preceq B'$ . Исходя из этого и будем строить цепочку.

Возьмём структуры  $B = B_0 \subseteq A_1(\equiv A) \subseteq B_1$ . Берём теперь опять  $A$  и  $B_1$ , для них применяем опять утверждение из третьего абзаца, получаем, что  $B_1 \subseteq A_2(\equiv A) \subseteq B_2$ , и так далее.  $A_n \models T$ ,  $A_\omega = \bigcup A_n \models T$ .  $B = B_0 \preceq B_1 \preceq \dots$ . Значит,  $B_\omega = A_\omega$ ,  $B_0 \preceq B_\omega$ , откуда и получается требуемое.  $\square$

### 1.6.1 Полнота, модельная полнота, элиминация кванторов.

**Определение 18.** Теория  $T$  называется *полной*, если она имеет модель и из неё следует либо  $\varphi$ , либо  $\neg\varphi$  для любого  $\sigma$ -предложения.

**Утверждение 18.** Для непротиворечивой теории  $T$  равносильны следующие условия:

- 1)  $T$  — полная;

- 2)  $[T] = Th(\mathbb{A})$ , для любой  $\mathbb{A} \models T$  (где  $[T] = \{\varphi | T \models \varphi\}$ );
- 3)  $Th(\mathbb{A}) = Th(\mathbb{B})$  для любых  $\mathbb{A}, \mathbb{B} \models T$ .

**Теорема 19** (тест Воота). Если теория не имеет конечных моделей и категорична в некоторой мощности  $\geq |For_\sigma|$ , то она полна.

**Определение 19.**  $T$  называется категоричной в мощности  $H$ , если  $T$  имеет единственную с точностью до изоморфизма модель мощности  $H$ .

**Определение 20.**  $T$  модельно полна, если  $\subseteq$  и  $\preceq$  на  $Mod(T)$  совпадают.

## 1.7 Лекция 7

**Теорема 20.**

- 1)  $T$  — модельно полна;
- 2) Для любой  $\mathbb{A} \models T$ , теория  $T \cup D(\mathbb{A})$  полна;
- 3) (Тест Робинсона) Для любых  $\mathbb{A}, \mathbb{B} \models T$  из  $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{B}$  следует, что любое  $\Sigma_1$ -предложение в сигнатуре  $\sigma_A$ , которое истинно в  $\mathbb{B}$ , будет истинно и в  $\mathbb{A}$ ;
- 4)  $\Sigma_1 = \Pi_1$  по модулю  $T$ , то есть любая  $\Sigma_1$ -формула  $\varphi(\bar{x})$  равносильна подходящей  $\Pi_1$ -формуле  $\psi(\bar{x})$  в  $T$  (то есть  $T \models \forall \bar{x} (\varphi(\bar{x}) \leftrightarrow \psi(\bar{x}))$ );
- 5) Любая формула  $\varphi(\bar{x})$  равносильна подходящей  $\Pi_1$ -формуле в  $T$ .

**Замечание.** Пока мы ввели иерархию только для предложений. Она точно так же строится для формул со свободными переменными.

*Доказательство.* На практиках мы уже доказали  $1 \Rightarrow 2$ ,  $2 \Rightarrow 3$ .

Нетривиальным является следствие  $3 \Rightarrow 4$ . Пусть  $\varphi(\bar{y})$  —  $\Sigma_1$ -формула. Нам нужно найти  $\Pi_1$ -формулу  $\psi(\bar{y})$  такую, что  $T \models \forall \bar{y} (\varphi(\bar{y}) \leftrightarrow \psi(\bar{y}))$ . Скажем,  $\bar{y} = (y_1, \dots, y_k)$ , обогатим сигнатуру константными символами  $\bar{c} = (c_1, \dots, c_k)$ . Тогда достаточно доказать, что  $T \models \varphi(\bar{c}) \leftrightarrow \psi(\bar{c})$ .

Пусть  $\Gamma = \{\gamma \in \Pi_1 \mid T \models \varphi(\bar{c}) \rightarrow \gamma\}$ . Достаточно доказать, что  $T \cup \Gamma \models \varphi(\bar{c})$ . Действительно, если это так, то для конечного подмножества  $\Gamma$  выполнено  $T \cup \{\gamma_1, \dots, \gamma_m\} \models \varphi$ , тогда  $\psi = \gamma_1 \wedge \dots \wedge \gamma_m \in \Pi_1$  — искомая формула.

Рассмотрим произвольную модель  $\mathbb{A} \models T \cup \Gamma$ . Наша цель — показать, что  $\mathbb{A} \models \varphi$ . Сначала докажем, что  $T \cup \{\varphi\} \cup D(\mathbb{A})$  имеет модель. Предположим противное, тогда по теореме о компактности для некоторых  $\{\delta_1, \dots, \delta_m\} \subseteq D(\mathbb{A})$  у  $T \cup \{\varphi\} \cup \{\delta_1, \dots, \delta_m\}$  нет модели. Пусть  $\delta = \delta_1 \wedge \dots \wedge \delta_m$ . По определению диаграммы,  $\mathbb{A} \models \exists \bar{x} \delta(\bar{x})$ . С другой стороны, из-за отсутствия модели,  $T \cup \{\varphi\} \models \forall \bar{x} \neg \delta(\bar{x})$ , поэтому  $T \models \varphi \rightarrow \forall \bar{x} \neg \delta(\bar{x})$ . По определению  $\Gamma$ ,  $\forall \bar{x} \neg \delta(\bar{x}) \in \Gamma$ , значит эта формула верна в  $\mathbb{A}$ . Но и её отрицание верно в  $\mathbb{A}$ . Противоречие.

Пусть  $\mathbb{B} \models T \cup \{\varphi\} \cup D(\mathbb{A})$ . Тогда  $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{B}$ ,  $\varphi$  —  $\Sigma_1$ -предложение. Тогда из пункта 3 получаем  $\mathbb{A} \models \varphi$ , что мы и пытались доказать.

$4 \Rightarrow 5$ . Рассмотрим произвольную  $\varphi$ . Она лежит на одном из уровней иерархии формул. Рассмотрим только случаи  $\varphi \in \Pi_2$  и  $\varphi \in \Sigma_2$ . В остальных случаях рассуждения аналогичны.

Для формулы  $\varphi(\bar{z}) \in \Pi_2$  существует запись в виде  $\forall \bar{x} \exists \bar{y} \psi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ . Формула  $\exists \bar{y} \psi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  лежит в  $\Sigma_1$ , поэтому по пункту 4 существует  $\psi'(\bar{x}, \bar{z}) \in \Pi_1$ , эквивалентная ей по модулю  $T$ . Значит  $\varphi \equiv_T \forall \bar{x} \psi' \in \Pi_1$ .

Для формулы  $\varphi \in \Sigma_2$  выполнено  $\neg \varphi \in \Pi_2$ . Поэтому  $\exists \psi \in \Pi_1$  такая, что  $\neg \varphi \equiv_T \psi$ . Тогда  $\varphi \equiv_T \neg \psi \in \Sigma_1$ . А  $\neg \psi$  в свою очередь эквивалентна формуле  $\Pi_1$  из пункта 4.

$5 \Rightarrow 1$ . Нам нужно, чтобы выполнялось  $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{B} \Rightarrow \mathbb{A} \preceq \mathbb{B}$ , где  $\mathbb{A}$  и  $\mathbb{B}$  — модели  $T$ . Рассмотрим произвольную формулу  $\varphi$ . Из пункта 5 следует существование универсальной формулы  $\psi$  с условием  $\varphi(\bar{x}) \equiv_T \psi(\bar{x})$ .

Для  $\bar{a} \in \mathbb{A}$ , если  $\mathbb{B} \models \varphi(\bar{a})$ , то и  $\mathbb{B} \models \psi(\bar{a})$ , из универсальности  $\mathbb{A} \models \psi(\bar{a})$ , из равносильности  $\mathbb{A} \models \varphi(\bar{a})$ . Мы доказали  $\mathbb{B} \models \varphi \Rightarrow \mathbb{A} \models \varphi$ . Для доказательства в обратную сторону можно рассмотреть формулу  $\neg \varphi$ .  $\square$

**Предложение 21** (Свойства модельно полных теорий).

- 1) Любая модельно полная теория  $\Pi_2$ -аксиоматизируемая;
- 2) (Тест Линдстрёма) Если теория  $\Pi_2$ -аксиоматизируема, не имеет конечных моделей и категорична в некоторой мощности  $\lambda \geq |For_\sigma|$ , то она модельно полна;
- 3) Если модельно полная теория  $T$  имеет модель, которая вкладывается в любую модель  $T$ , то  $T$  — полная;
- 4) Если для любых двух моделей модельно полной теории  $T$  существует третья модель, в которую они обе вкладываются, то  $T$  полна.

*Доказательство.*

- 1)  $T$  — модель полная. Достаточно доказать, что  $\text{Mod}(T)$  замкнут относительно объединения цепей (по теореме Чэна-Лося-Сушко)

$$\mathbb{A}_0 \subseteq \mathbb{A}_1 \subseteq \dots \quad \mathbb{A} = \bigcup_n \mathbb{A}_n,$$

где  $\mathbb{A}_i \models T_i$ . Из модельной полноты имеем  $\mathbb{A}_0 \preceq \mathbb{A}_1 \preceq \dots$ , отсюда нетрудно показать, что  $\mathbb{A}_n \preceq \mathbb{A}$ , тогда  $T \models \mathbb{A}_n \equiv \mathbb{A}$ .

- 2) Остаётся на совесть юных читателей! (доказательство не было закончено)
- 3)  $\mathbb{A}$  — структура, изоморфная подструктуре любой модели  $\mathbb{B} \models T$ , тогда из модельной полноты  $\forall \mathbb{B} (\mathbb{A} \preceq \mathbb{B})$ . Для любой  $\varphi$  выполнено либо  $\mathbb{A} \models \varphi$ , либо  $\mathbb{A} \models \neg \varphi$ . Тогда одна из этих формул верна во всех моделях  $T$ , откуда и получим, что из  $T$  следует либо эта формула, либо её отрицание.



- 4) Рассмотрим  $\mathbb{A}, \mathbb{B}$  — модели  $T$ . По предположению, существует третья модель  $\mathbb{C}$  с двумя подструктурами  $\mathbb{A}', \mathbb{B}'$ , причём выполнено  $\mathbb{A} \simeq \mathbb{A}' \subseteq \mathbb{C}$  и аналогичное для  $\mathbb{B}$ .  $T$  модельно полна, поэтому  $\text{Th}(\mathbb{A}') = \text{Th}(\mathbb{C})$ . Значит  $\text{Th}(\mathbb{A}) = \text{Th}(\mathbb{C}) = \text{Th}(\mathbb{B})$ . Значит  $T$  полна.

□

## 1.8 Лекция 8

**Утверждение 22** (Тест Линдстрёма). *Если некоторая теория  $T$   $\Pi_2$ -аксиоматизируема, не имеет конечных моделей и категорична в некоторой мощности  $\lambda \geq |\text{For}_\sigma|$ , то она модельно полна.*

*Доказательство.*

□

### 1.8.1 Элиминация кванторов

**Определение 21.** Теория  $T$  допускает элиминацию кванторов, если любая формула равносильна бескванторной.

**Предложение 23.**

- 1) Если  $T$  допускает элиминацию кванторов, то она модельно полна;
- 2) Если для любой бескванторной формулы  $\theta(\bar{x}, y)$  равносильна некоторой бескванторной, то  $T$  допускает элиминацию кванторов;
- 3) Если для данной формулы  $\varphi$  выполнено условие  $\circledast$ , то  $\varphi$  равносильна бескванторной  $\psi(\bar{x})$  в  $T$ .

Условие  $\circledast$ : для любых вложений (то есть изоморфизмов на подструктуры)  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{A}$ ,  $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{B}$   $\sigma$ -структуры  $\mathbb{C}$  в модели  $\mathbb{A}, \mathbb{B}$  теории  $T$  и для любых значений  $\bar{c} \in \mathbb{C}$  выполнено  $\varphi(f(\bar{c})) = \varphi(g(\bar{c}))$

- 4) Пусть для любой бескванторной  $\theta(\bar{x}, y)$  формула  $\phi(\bar{x}) = \exists y \theta(\bar{x}, y)$  удовлетворяет  $\circledast$ . Тогда  $T$  допускает элиминацию кванторов.

*Доказательство.*

- 1) Одно из эквивалентных условий модельно полной теории — равносильность любой формулы универсальной, а любая бескванторная формула лежит в  $\Pi_1$ .
- 2) Доказывается индукцией по сложности формулы, кванторы всеобщности можно представить через кванторы существования.
- 3) Схема доказательства уже неоднократно нами применялась.

Зафиксируем  $\varphi(x_1, \dots, x_k)$ , удовлетворяющую  $\circledast$ . Обогадим сигнатуру новыми константами  $\bar{d} = (d_1, \dots, d_k)$ . Для доказательства нам надо придумать бескванторную  $\psi$ , такую что в исходной сигнатуре  $T \models \forall \bar{x} (\varphi(\bar{x}) \leftrightarrow \psi(\bar{x}))$ , что эквивалентно  $T \models \varphi(\bar{d}) \leftrightarrow \psi(\bar{d})$  в обогащённой структуре.

Пусть  $\Gamma = \{\gamma - \text{бескванторное } \sigma_{\bar{d}}\text{-предложение} \mid T \models \varphi(\bar{d}) \rightarrow \gamma\}$ . Достаточно доказать, что  $T \cup \Gamma \models \varphi(\bar{d})$ . Действительно, если это так, то по теореме о компактности для конечного  $\{\gamma_i\}_i \subset \Gamma$  верно  $T \cup \{\gamma_i\}_i \models \varphi(\bar{d})$ , откуда для  $\gamma = \bigwedge_i \gamma_i$  верно  $T \models \gamma \rightarrow \varphi(\bar{d})$ .

Будем доказывать от противного. Тогда  $T \cup \Gamma \cup \{\neg \varphi(\bar{d})\}$  имеет модель  $\mathbb{A}$ . Обозначим через  $d'_i$  интерпретацию  $d_i$  в структуре  $\mathbb{A}$ .

Пусть  $\mathbb{C}$  — подструктура  $\mathbb{A}$ , порождённая элементами  $d'_1, \dots, d'_k$ . Конечно,  $\mathbb{C}$  не обязана быть моделью  $T$ . Пусть  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{A}$  — тождественное вложение.

$\text{Diag}(\mathbb{C})$  — вариант  $D(\mathbb{C})$ , но без использования новых констант.

**Утверждение 24.**  $T \cup \text{Diag}(\mathbb{C}) \cup \{\varphi(\bar{d})\}$  имеет модель.

*Доказательство.* Доказываем от противного. Тогда для некоторого конечного подмножества  $\Gamma$   $T \cup \{\delta_1(\bar{d}), \dots, \delta_n(\bar{d})\} \cup \{\varphi(\bar{d})\}$  не имеет модели. Значит  $T \models \bigwedge \delta_i(\bar{d}) \rightarrow \neg \varphi(\bar{d})$ , откуда  $T \models \varphi(\bar{d}) \rightarrow \bigvee \neg \delta_i(\bar{d})$ .

Тогда  $\gamma = \bigvee \neg \delta_i(\bar{d})$  лежит в  $\Gamma$ . Значит  $\mathbb{A} \models \gamma$ , но по определению  $\text{Diag}$  выполнено  $\mathbb{A} \models \neg \gamma$ . Противоречие  $\square$

Пусть  $\mathbb{B}'$  — модель, удовлетворяющая утверждению. Рассмотрим её обеднение  $\mathbb{B}$  до структуры  $\sigma$ . Существует единственное вложение  $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{B}$ , переводящее  $d_i$  в  $d'_i$ .

Наконец, воспользуемся условием  $\circledast$ . По определению, в  $\mathbb{A}$   $\varphi(f(\bar{d}))$  ложно, а в  $\mathbb{B}$   $\varphi(g(\bar{d}))$  истинно. Противоречие.

4) Очевидно следует из пунктов 2 и 3.  $\square$

Тарский доказал, что структуры  $(\mathbb{R}, <, +, \cdot, 0, 1)$  и  $(\mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1)$  допускают элиминацию кванторов. Доказательство конструктивное, но длинное. Мы докажем то же самое утверждение для всех алгебраически замкнутых полей, но не конструктивно.

**Пример 4.** Теория ACF (теория алгебраически замкнутых полей) допускает элиминацию кванторов

*Доказательство.*

Сначала докажем, что ACF модельно полна, используя тест Линдстрёма.

Для доказательства основного факта воспользуемся пунктом 4 предыдущего утверждения.  $\square$

## 1.9 Лекция 9

### 1.9.1 Игры Эренфойхта

Считаем, что сигнатура  $\sigma$  не содержит функциональных символов и конечна. Первое требование не существенно, ведь можно рассматривать соответствующий предикат.  $\mathbb{A}$  и  $\mathbb{B}$  —  $\sigma$ -структуры,  $n$  — произвольное натуральное число.

**Определение 22.** В игре Эренфойхта с  $n$  ходами  $G_n(\mathbb{A}, \mathbb{B})$  каждый из двух игроков I и II делает по  $n$  ходов. Сначала I выбирает элемент  $A \cup B$  ( $A, B$  — множества, соответствующие структурам  $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ ). Затем II выбирает элемент в другой структуре. Получили «обогащение» каждой структуры константой:  $(\mathbb{A}, a), (\mathbb{B}, b)$ . Такая пара ходов повторяется  $n$  раз.

II выигрывает в партии, если конечные подструктуры, порождённые  $\bar{a}, \bar{bb}$  (в каждом наборе по  $n$  элементов) изоморфны относительно изоморфизма, который отправляет  $a_i \mapsto b_i$  и для каждой константы  $c^{\mathbb{A}} \rightarrow c^{\mathbb{B}}$ .

**Замечание.** Игроков в такой игре иногда называют Новатор и Консерватор. В англоязычной литературе — spoiler и duplicator или  $\forall$  (Adam) и  $\exists$  (Eve).

**Определение 23.** В игре  $G(\mathbb{A}, \mathbb{B})$  в свой первый ход I выбирает натуральное число  $n$ , после чего игра идёт как  $G_n(\mathbb{A}, \mathbb{B})$ .

Обозначим через  $S_1$  стратегию для первого игрока (функцию  $(A \cdot B)^* \rightarrow A \cup B$ ), через  $S_2$  стратегию для второго игрока (функции  $(A \cdot B)^* \cdot A \rightarrow B$  и  $(A \cdot B)^* \cdot B \rightarrow A$ ). Стратегия  $S_i$  для игрока  $i$  называется выигрышной, если он, следуя этой стратегии, выигрывает вне зависимости от стратегии другого игрока.

Обозначим  $G_n^I(\mathbb{A}, \mathbb{B})$  наличие выигрышной стратегии у игрока I в игре  $G_n(\mathbb{A}, \mathbb{B})$ . Аналогично определяется  $G_n^{II}$ .

**Предложение 25.** Свойства игр и стратегий

- 1)  $G_{n+1}^I(\mathbb{A}, \mathbb{B}) \Leftrightarrow (\exists a \in \mathbb{A} \forall b \in \mathbb{B} G_n^I((\mathbb{A}, a), (\mathbb{B}, b))) \vee (\exists b \in \mathbb{B} \forall a \in \mathbb{A} G_n^I((\mathbb{A}, a), (\mathbb{B}, b)))$
- 2)  $G_{n+1}^{II}(\mathbb{A}, \mathbb{B}) \Leftrightarrow (\forall a \in \mathbb{A} \exists b \in \mathbb{B} G_n^{II}((\mathbb{A}, a), (\mathbb{B}, b))) \wedge (\forall b \in \mathbb{B} \exists a \in \mathbb{A} G_n^{II}((\mathbb{A}, a), (\mathbb{B}, b)))$
- 3)  $G^{II}(\mathbb{A}, \mathbb{B}) \Leftrightarrow \forall n G_n^{II}(\mathbb{A}, \mathbb{B})$
- 4)  $G^I(\mathbb{A}, \mathbb{B}) \Leftrightarrow \exists n G_n^I(\mathbb{A}, \mathbb{B})$
- 5) В  $G_n(\mathbb{A}, \mathbb{B})$  ровно один из игроков имеет выигрышную стратегию.
- 6) В  $G(\mathbb{A}, \mathbb{B})$  ровно один из игроков имеет выигрышную стратегию.

*Доказательство.* В пункте 1 выигрышная стратегия у первого игрока есть либо когда есть выигрышный первый ход в первую структуру, либо выигрышный первый ход во вторую структуру. Формально утверждение доказывается по индукции. Пункт 2 доказывается аналогично.

В 5 достаточно проверить, что оба игрока не могут иметь выигрышную стратегию. Действительно, если такие стратегии  $S_1, S_2$  есть, то можно запустить партию с этими стратегиями. В итоге одна из них проиграет.  $\square$

**Определение 24.** *Квантовая глубина* формулы  $\varphi$  — натуральное число  $q(\varphi)$ , определяемое рекурсией по  $\varphi$ :

- 1) Если  $\varphi$  — простейшая, то  $q(\varphi) = 0$ .
- 2) Если  $\varphi = \neg\varphi_1$ , то  $q(\varphi) = q(\varphi_1)$ .
- 3) Если  $\varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_2$ , то  $q(\varphi) = \max(q(\varphi_1), q(\varphi_2))$ .
- 4) Если  $\varphi = \exists x \varphi_1$ , то  $q(\varphi) = q(\varphi_1) + 1$ .

**Определение 25.** Обозначим через  $C_n^{\bar{x}}$  множество всех  $\sigma$ -формул  $\varphi(\bar{x})$  глубины не более  $n$ .

**Предложение 26.** *Множество  $C_n^{\bar{x}}/\equiv$  (отношение  $\equiv$  обозначает равносильность формул) конечно.*

*Доказательство.* Доказываем индукцией по  $n$ . База индукции  $n = 0$ .  $C_0^{\bar{x}}$  — бескванторные формулы. Каждая формула оттуда эквивалентна булевой комбинации формул вида  $x_i = x_j, x_i = c, c = x_i, c = d$  ( $c, d$  — константы) и  $P(t_1, \dots, t_m)$  ( $t_i$  — переменные или константы). Таких формул конечное число, поэтому и их булевых комбинаций конечное число.

Переход: рассматриваем  $n > 0$ . В этом случае  $C_n^{\bar{x}} = C_{n-1}^{\bar{x}} \cup D_n^{\bar{x}}$ , где  $D_n^{\bar{x}}$  — формулы с факторной глубиной ровно  $n$ . Фактор первого множества конечен по предположению индукции, а для второго выполнено

$$D_n^{\bar{x}}/\equiv = BC(\{\exists y \psi(\bar{x}, y) \mid \psi \in D_{n-1}^{\bar{x}}\}),$$

что тоже конечно.  $\square$

**Теорема 27.**  $G_n^{II} \iff \forall \varphi \in C_n(\varphi^{\mathbb{A}} = \varphi^{\mathbb{B}})$

*Доказательство.* Будем доказывать обобщение этой теоремы: пусть  $\bar{a}, \bar{b}$  — наборы элементов одинаковой длины, равные по длине набору  $\bar{x}$ ; докажем

$$G_n^{II}(\mathbb{A}, \mathbb{B}) \iff \forall \varphi \in C_n(\varphi^{\mathbb{A}} = \varphi^{\mathbb{B}}).$$

TODO: доказательство  $\square$

## 2 Неразрешимость и неполнота

### 2.1 Лекция 10

#### 2.1.1 Свойства выводимости, теория Хенкина

#### 2.1.2 Теоремы о существовании модели и полноте $ИП_\sigma$

**Теорема 28** (О существовании модели). *Любое непротиворечивое множество предложений имеет модель.*

*Доказательство.* Пусть  $S$  — непротиворечивое множество предложений сигнатуры  $\sigma$ . Хотим показать, что  $S$  имеет модель. По теореме о компактности можем считать, что  $S$  конечна. Тогда в формулы  $S$  входит конечное подмножество символов сигнатуры  $\sigma$ , поэтому можно считать, что  $\sigma$  конечна. Тогда, по доказанному выше факту, существует теория Хенкина  $T$  сигнатуры  $\sigma_C$ , расширяющая  $S$ .

Пусть  $M$  — множество всех термов сигнатуры  $\sigma_C$ , не содержащих переменных (то есть это константы с "накрученными" на них функциональными символами). Введём на этом множестве отношение  $\sim$  следующим образом:  $s \sim t$ , если  $T \vdash s = t$ .

Дальше проверяем несколько несложных утверждений:

- 1)  $\sim$  является отношением эквивалентности
- 2) Если  $s_1 \sim t_1, \dots, s_n \sim t_n$ , выполняется  $T \vdash P(s_1, \dots, s_n)$ , то  $T \vdash P(t_1, \dots, t_n)$
- 3) Если  $s_1 \sim t_1, \dots, s_n \sim t_n$ , то  $f(s_1, \dots, s_n) \sim f(t_1, \dots, t_n)$
- 4) Пусть  $t = t(x_1, \dots, x_n)$  — терм,  $s_1, \dots, s_n \in M$ . Тогда  $t^A([s_1], \dots, [s_n]) = [t(s_1, \dots, s_n)]$
- 5)

□

### 2.2 Лекция 11

**Теорема 29** (теорема Гёделя о полноте).

- 1) Для любой теории  $T$  и любого предложения  $\varphi$  в той же сигнатуре  $\sigma$   $T \vdash \varphi \iff T \models \varphi$
- 2)  $\varphi$  тождественно истинна  $\iff \varphi$  выводима в  $ИП_\sigma$

*Доказательство.* Второй пункт получается из первого при  $T = \emptyset$ . Теперь докажем первый пункт.

$\Rightarrow$  Доказательство довалось на первом курсе. На практиках доказали, что все аксиомы тождественно истинны, правила вывода сохраняют истинность.

$\Leftarrow T \models \varphi$ , значит  $T \cup \{\neg\varphi\}$  не имеет модели. Из теоремы о существовании модели отсюда следует, что  $T \cup \{\neg\varphi\}$ . Тогда  $T \models \neg\neg\varphi$ , из эквивалентности  $\varphi \equiv \neg\neg\varphi$  получаем  $T \models \varphi$ , что и требовалось.  $\square$

### Следствие 30.

- 1) Если  $\sigma$  конечна, то множество  $\{\varphi \mid \text{формула } \varphi \text{ тождественно истинна}\}$  перечислимо, то есть существует алгоритм, перечисляющий элементы этого множества.
- 2) Если  $\sigma$  конечна,  $T$  — перечислимое множество предложений, то  $[T]$  (множество следствий  $T$ ) перечислимо.
- 3) Если  $\sigma$  конечно,  $T$  перечислимо,  $T$  полная, то тогда  $[T]$  разрешимо, то есть существует алгоритм, распознающий логические следствия из  $T$ .
- 4) Множество выводов  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  в  $\text{ИП}_\sigma$  разрешимо.

*Доказательство.*

- 1) Следует из второго при  $T = \emptyset$
- 2)  $T$  перечислимо, множество аксиом  $\text{ИП}_\sigma^*$  тоже перечислимо. Перечисляя формулы из объединения этих двух перечислимых и применяя правила вывода, можно перечислить и все выводимые.
- 3) Пользуемся пунктом 2. Либо  $\varphi \in [T]$ , либо  $\neg\varphi \in [T]$ . Запускаем перечисление  $[T]$  и ждём, пока встретится  $\varphi$  или  $\neg\varphi$ .
- 4) TODO

$\square$

**Замечание.** Традиционно логика разбивается на четыре части:

- Теория множеств
- Теория моделей
- Теория доказательств
- Теория вычислимости

**Теорема 31** (Линдстрёма). *(без доказательства)*

- 1) Не существует логической системы, которая более выразительна, чем логика первого порядка и удовлетворяет понижающей теореме Лёвингейма-Сколема и теореме о компактности.
- 2) Не существует логической системы, которая более выразительна, чем логика первого порядка и удовлетворяет понижающей теореме Лёвингейма-Сколема и в которой множество тождественно истинных формул перечислимо.

### 2.2.1 Рекурсивные функции и предикаты

Ограничимся функциями на  $\mathbb{N}$  (с нулём). Соответственно, далее все аргументы — натуральные числа.

Введём две функции:

$$l(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < y \\ 1, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

$$I_k^n(x_1, \dots, x_n) = x_k$$

**Определение 26.** Рекурсивные функции на  $\mathbb{N}$  определяются индуктивно:

- $+, \cdot, l, I_k^n$  являются рекурсивными
- Суперпозиция рекурсивных является рекурсивной, то есть если  $g = g(y_1, \dots, y_k)$  рекурсивна и  $h_1(\bar{x}), \dots, h_k(\bar{x})$  рекурсивны, то и  $g(h_1(\bar{x}), \dots, h_k(\bar{x}))$  рекурсивна.
- Минимизация любой рекурсивной функции является рекурсивной. То есть, если  $g(\bar{x}, y)$  рекурсивна и  $\forall \bar{x} \exists y g(\bar{x}, y) = 0$ , то функция  $f(\bar{x}) = \mu y (g(\bar{x}, y) = 0)$  тоже рекурсивна. Здесь  $\mu y (P(y))$  — наименьшее значение  $y$ , при котором предикат истинен.
- Других рекурсивных функций нет.

**Замечание.** Любая рекурсивная функция вычислима, это доказывается индуктивно. А существует ли вычислимая функция, которая не рекурсивна?

**Гипотеза 32** (Тезис Чёрча). *Любая тотальная (всюда определённая) вычислимая функция на  $N$  рекурсивна.*

Почему тезис, а не теорема? Потому что понятие вычислимости не математично.

**Определение 27.** Предикат  $P(\bar{x})$  рекурсивен, если рекурсивна его характеристическая функция

$$\chi_P(\bar{x}) = \begin{cases} 0, & P(\bar{x}) = \text{И} \\ 1, & P(\bar{x}) = \text{Л} \end{cases}$$

**Предложение 33** (Свойства рекурсивных функций и предикатов).

- Если предикат  $P(y_1, \dots, y_k)$  рекурсивен и функции  $h_1(\bar{x}), \dots, h_k(\bar{x})$  рекурсивны, то  $P(h_1(\bar{x}), \dots, h_k(\bar{x}))$  рекурсивен.
- $P(\bar{x}, y)$  рекурсивен и  $\forall \bar{x} \exists y P(\bar{x}, y)$ , то тогда формула  $f(\overline{line x}) = \mu y (P(\bar{x}, y) = 0)$  рекурсивна.
- $P(\bar{x}), Q(\bar{x}), R(\bar{x}, y)$  рекурсивны, то рекурсивны и предикаты  $P(\bar{x}) \vee Q(\bar{x})$  (и для  $\wedge, \rightarrow, \neg P(\bar{x}), \forall y < z \rightarrow R(\bar{x}, y)$  (по определению это  $\forall y (y < z \rightarrow R(\bar{x}, y))$ ),  $\exists y < z R(\bar{x}, y)$  (эквивалентно  $\exists y (y < z \wedge R(\bar{x}, y))$ ) рекурсивны

- Рекурсивна функция

$$f(\bar{x}) = \begin{cases} g_1(\bar{x}), & P_1(\bar{x}) = I \\ g_2(\bar{x}), & P_2(\bar{x}) = I \\ \dots & \dots \\ g_k(\bar{x}), & P_k(\bar{x}) = I, \end{cases}$$

здесь  $g_i$  — рекурсивные функции,  $P_i$  — дизъюнктивные рекурсивные предикаты,  $\bigcup P_i = \mathbb{N}^d$ .

### Пример 5.

- Все константные функции рекурсивны
- Функции, задаваемые полиномами с натуральными коэффициентами рекурсивны
- $\leq, =, \div$  рекурсивны

*рекурсивность констант.* Хотим показать, что  $f_c(\bar{x}) = c$  рекурсивна индукцией по  $c$ .

Если  $c = 0$ , то  $f_0(\bar{x}) = \mu y(y = 0) = \mu y(I_{n+1}^{n+1}(\bar{x}, y) = 0)$

Если  $c = 1$ , то  $f_1(\bar{x}) = \mu y(0 < y) = \mu(l(f_0(\bar{x}, y), I_{n+1}^{n+1}(\bar{x}, y)) = 0)$ . Или можно было взять  $f_1(\bar{x}) = l(I_1^n(\bar{x}), I_1^n(\bar{x}))$ , если  $n \geq 1$ .

Если  $f_c(\bar{x})$  построена, то  $f_{c+1}(\bar{x}) = f_c(\bar{x}) + f_1(\bar{x})$  рекурсивна как сумма рекурсивных □

**Предложение 34.** Существует рекурсивная функция  $\beta(a, i)$  такая, что  $\beta(0, i) = 0$ ,  $\beta(a + 1, i) \leq a$  и  $\forall n, a_0, \dots, a_n \exists a(\beta(a, 0) = a_0 \wedge \dots \wedge \beta(a, n) = a_n)$

*Доказательство.* Строим вспомогательную функцию  $p(x, y) = (x + y)^2 + x + 1$ . Она рекурсивна, потому что полином. Обладает свойствами  $x, y < p(x, y)$  и  $(x, y) \neq (x_1, y_1) \Rightarrow p(x, y) \neq p(x_1, y_1)$ . Второе свойство доказывается сравнением  $x + y$  с  $x_1 + y_1$ : если они отличаются, то значения функции разделены квадратом большей сумма, а в случае равенства, значения функции различаются из-за  $x \neq x_1$ .

Тогда пусть

$$\beta(a, i) = \mu x(a = 0 \vee x + 1 = a \vee \exists y < a \exists z < a (a = p(y, z) \wedge y \div (1 + z \cdot p(x, i))))$$

Первые два свойства следуют из первых двух членов дизъюнкции. Теперь зафиксировав  $n, a_0, \dots, a_n$  и проверим последнее свойство. Пусть  $c = \max(p(a_0, 0), \dots, p(a_n, n))$ ,  $z = c!$ ,  $y = \prod_{i=0}^n (1 + z \cdot p(a_n, n))$ . Будем доказывать, что  $a = p(y, z)$  подходит.

Проверяем, что  $\beta(a, i) = a_i$  для  $1 \leq i \leq n$ . Для  $x = a_i$  третье условие минимизации выполнено с заданными в предыдущем абзаце  $y, z$ . Докажем, что не существует  $x < a_i$ , удовлетворяющего условиям минимизации.

Предположим противное, такой  $x$  нашелся. Первые два члена дизъюнкции не могут выполняться, потому что  $a > 0, x + 1 < a_i + 1 < a$ . Значит нашлись  $y_1, z_1$ , такие



что  $a = p(y_1, z_1)$  и  $y_1 : (1 + z \cdot p(x, i))$ . Тогда  $p(y, z) = a = p(y_1, z_1)$ , следовательно  $(y, z) = (y_1, z_1)$ . Тогда  $y : (1 + z \cdot p(x, i))$ . Распишем  $y$  по определению, получим

$$\left( \prod_{i=0}^n (1 + z \cdot p(a_n, n)) \right) : (1 + z \cdot p(x, i))$$

Заметим, что при  $k, l \leq c, k \neq l$  числа  $1 + zk$  и  $1 + zl$  взаимнопросты. Действительно, иначе найдётся простой  $q | (1 + zk) - (1 + zl) = z(k - l) = c!(k - l)$ . Тогда  $q \leq c \Rightarrow q | c! = z \Rightarrow q | zk, q | (1 + zk)$ , но они взаимнопросты. Все множители в произведении и число  $(1 + z \cdot p(x, i))$  имеют такой вид, поэтому для некоторого  $j$  выполнено  $1 + z \cdot p(a_j, j) = 1 + z \cdot p(x, i) \Rightarrow (a_j, j) = (x, i) \Rightarrow i = j, x = a_i$ .

□

## 2.3 Лекция 12

Используя функцию  $\beta$  любой конечной последовательности натуральных чисел  $(a_1, \dots, a_n)$  можно сопоставить её код:

$$\langle a_1, \dots, a_n \rangle = \mu a (\beta(a, 0) = n \wedge \beta(a, 1) = a_1 \wedge \dots \wedge \beta(a, n) = a_n)$$

Например, пустой последовательности соответствует  $\langle \rangle$  — наименьшее  $a$ , такое что  $\beta(a, 0) = 0$ , то есть  $\langle \rangle = 0$

Введём новые функции

- Функция «начало»:  $\text{нач}(a, i) = \mu x (\beta(x, 0) = i \wedge \forall j < i (\beta(x, j+1) = \beta(a, j+1)))$
- Предикат  $\text{Пос}(a) = \neg \exists x < a (\beta(x, 0) = \beta(a, 0) \wedge \forall i < \beta(a, 0) (\beta(x, i+1) = \beta(a, i+1)))$

**Предложение 35** (Свойства кодирования последовательностей).

- Функции  $\text{нач}$  и  $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$  при  $n > 0$  рекурсивны, предикат  $\text{Пос}$  рекурсивен.
- $a = \langle a_1, \dots, a_n \rangle \Rightarrow \beta(a, 0) = n \wedge \beta(a, 1) = a_1 \wedge \dots \wedge \beta(a, n) = a_n$
- $(a_1, \dots, a_n) \neq (b_1, \dots, b_n) \Rightarrow \langle a_1, \dots, a_n \rangle \neq \langle b_1, \dots, b_n \rangle$
- $a = \langle a_1, \dots, a_n \rangle \Rightarrow \text{нач}(a, i) = \langle a_1, \dots, a_i \rangle$  при  $i \leq n$
- $\text{Пос}(a)$  — истина  $\Leftrightarrow a$  — код некоторой последовательности

**Теорема 36** (о рекурсивных определениях). Пусть  $\bar{x}$  — вектор переменных (возможно пустой)

1) Если функция  $g(\bar{x}, y, z)$  рекурсивна, то рекурсивна и функция

$$f(\bar{x}, y) = g(\bar{x}, y, \langle f(\bar{x}, 0), \dots, f(\bar{x}, y-1) \rangle)$$

Про такую  $f$  говорят, что она определена рекурсией с помощью  $g$ .

2) Если предикат  $Q(\bar{x}, y, z)$  рекурсивен, то рекурсивен и предикат

$$P(\bar{x}, y) = Q(\bar{x}, y, \langle \chi_P(\bar{x}, 0), \dots, \chi_P(\bar{x}, y-1) \rangle)$$

*Доказательство.* Второй пункт получается из первого заменой  $f$  на  $\chi_P$ , а  $g$  на  $\chi_Q$ .

Рассмотрим вспомогательную функцию  $h$ :

$$\begin{aligned} h(\bar{x}, y) &= \langle f(\bar{x}, 0), \dots, f(\bar{x}, y-1) \rangle \\ &= \mu a \text{ (Пос}(a) \wedge \beta(a, 0) = y \wedge \forall i < y \text{ (}\beta(a, i+1) = f(\bar{x}, i)\text{))} \\ &= \mu a \text{ (Пос}(a) \wedge \beta(a, 0) = y \wedge \forall i < y \text{ (}\beta(a, i+1) = g(\bar{x}, i, \text{нач}(a, i))\text{))} \end{aligned}$$

Значит  $h(\bar{x}, y)$  рекурсивна, поэтому  $f(\bar{x}, y) = g(\bar{x}, y, h(\bar{x}, y))$  тоже рекурсивна.  $\square$

### 2.3.1 Кодирование ИП $_{\sigma}$

**Замечание.** Повествование в этом (и предыдущем) разделе перекликается с книгой "Краткий курс математической логики" В.Л. Селиванова 1992 года издания.

Пусть  $\sigma$  — конечная сигнатура. Для примера возьмём  $\sigma = \{<, =, +, \cdot, 0, 1\}$ , а что делать для остальных сигнатур будет понятно.

Из чего состоят формулы? Из счётного набора переменных  $\{v_0, v_1, \dots\}$  и математических символов. Сопоставим им натуральные числа:

$$\begin{array}{cccccccccccccccccccc} v_n & \wedge & \vee & \rightarrow & \neg & \forall & \exists & = & < & + & \cdot & 0 & 1 \\ 2n & 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 & 13 & 15 & 17 & 19 & 21 & 23 \end{array}$$

Теперь закодируем термы. Через  $\ulcorner t \urcorner$  будем обозначать код терма. Пусть  $\ulcorner v_n \urcorner = \langle 2n \rangle$ ,  $\ulcorner 0 \urcorner = \langle 21 \rangle$ ,  $\ulcorner 1 \urcorner = \langle 23 \rangle$  — взяли значения из таблицы. Остальные термы кодируются по рекурсии, например  $\ulcorner s + t \urcorner = \langle 17, \ulcorner s \urcorner, \ulcorner t \urcorner \rangle$ . Формулы кодируются аналогично, например  $\ulcorner s = t \urcorner = \langle 13, \ulcorner s \urcorner, \ulcorner t \urcorner \rangle$ ,  $\ulcorner \forall v_n \varphi \urcorner = \langle 9, 2n, \ulcorner \varphi \urcorner \rangle$

Введём несколько новых предикатов и функций:

- $T(a) \Leftrightarrow a$  — код терма
- $\Phi(a) \Leftrightarrow a$  — код формулы
- $\Phi_0(a) \Leftrightarrow a$  — код формулы, не содержащей свободных переменных, кроме  $v_0$
- $\text{Пр}(a) \Leftrightarrow a$  — код предложения
- $\text{отр}(a)$  — функция, равная  $\ulcorner \neg \varphi \urcorner$ , если  $a = \ulcorner \varphi \urcorner$  и 0 иначе.
- $\text{подс}(a, b, c)$ : если  $a$  — код формулы  $\varphi(x)$ ,  $b$  — код переменной  $x$ , а  $c$  — код терма  $t$ , для которого разрешена подстановка  $\varphi(t)$ , то  $\text{подс}(a, b, c) = \ulcorner \varphi(t) \urcorner$ , иначе 0
- Для множества формул  $T$  предикат  $P_T(a)$  выполнен когда  $a$  — код некоторой формулы из  $T$
- $\text{Выв}_T(a, b)$  выполнен, если  $\text{Пр}(b)$  и  $a$  есть код последовательности кодов формул  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ , которая является выводом предложения с кодом  $b$  из теории  $T$  в ИП $_{\sigma}$ .

## 2.4 Лекция 13

**Предложение 37** (свойства кодирования).

- 1) Разным термам и формулам соответствуют разные коды
- 2) Существует алгоритм, вычисляющий по данному логическому объекту (терму, формуле) его код
- 3) Наоборот: существует алгоритм, вычисляющий по коду этот объект.
- 4) Предикаты  $T, \Phi, \Phi_0, \text{Пр}, \dots$  и функции  $\text{отр}, \text{подс}$  рекурсивны.
- 5) Если множество формул  $T$  рекурсивно (то есть рекурсивен предикат  $P_T(x)$ ), то  $\text{Выв}_T(a, b)$  рекурсивен.

*Доказательство.* Второй и третий пункт не являются строгими математическими утверждениями, потому что понятие алгоритма не математично. Но нестрогое утверждение понятно. Доказательство пятого пункта есть в книжке<sup>1</sup>. Остальные пункты доказываются несложно  $\square$

### 2.4.1 Представимость $\text{ИП}_\sigma$ в минимальной арифметике

Напомним, что МА (минимальная арифметика) состоит из 10 аксиом в сигнатуре  $\sigma = \{<, +, \cdot, 0, 1\}$ . Каждому натуральному числу  $n$  можно сопоставить терм  $\hat{n}$  по следующим правилам:  $\hat{0} = 0, \hat{1} = 1, \widehat{n+1} = (\hat{n}) + 1$

**Определение 28.** Предикат  $P(x_1, \dots, x_n)$  на  $\mathbb{N}$  называется представимым в МА, если существует формула  $\varphi(x_1, \dots, x_n)$  такая, что для любых значений  $\bar{x} \in \mathbb{N}$  выполнено  $P(\bar{x}) = \text{И} \Rightarrow \text{МА} \vdash \varphi(\widehat{x_1}, \dots, \widehat{x_n})$  и  $P(\bar{x}) = \text{Л} \Rightarrow \text{МА} \vdash \neg \varphi(\widehat{x_1}, \dots, \widehat{x_n})$

Функция  $f(x_1, \dots, x_n)$  называется представимой в МА, если существует формула  $\varphi(\bar{x}, y)$  такая, что для любых  $\bar{x} \in \mathbb{N}$   $\text{МА} \vdash \forall y (\varphi(\widehat{x_1}, \dots, \widehat{x_n}), \widehat{y}) \leftrightarrow y = \widehat{f(\bar{x})}$

**Теорема 38.** Любой рекурсивный предикат представим в МА.

*Доказательство.* TODO  $\square$

### 2.4.2 Неразрешимость и неполнота арифметики. Проблемы разрешимости

**Теорема 39** (Чёрча о неразрешимости арифметики). Для любой непротиворечивой теории  $T \supseteq \text{МА}$  множество  $[T] = \{\varphi \mid T \vdash \varphi\}$  не рекурсивно.

*Доказательство.* TODO  $\square$

**Теорема 40** (Гёделя о неполноте арифметики). Любая непротиворечивая рекурсивная теория  $T \supseteq \text{МА}$  неполна.

---

<sup>1</sup>В.Л.Селиванов — «Краткий курс математической логики» 1992 года издания

Доказательство. TODO

□

**Теорема 41.** Множество тождественно истинных формул неразрешимо (нерекурсивно)

## 3 Введение в вычислимость

### 3.1 Лекция 14

#### 3.1.1 R-вычислимость

**Замечание.** Не имеет никакого отношения к языку программирования R.

**Определение 29.** Программа — это непустая последовательность операторов  $(I_0, \dots, I_l)$ . Оператор — либо оператор присваивания, либо условный оператор. Операторы присваивания:  $r_i := 0$ ,  $r_i := r_i + 1$  и  $r_i := r_j$ . Условный оператор:  $r_i = r_j \Rightarrow k$

Здесь  $r_0, r_1, r_2, \dots$  — переменные со значениями в  $\mathbb{N}$

**Определение 30.**

- 1) Длина программы равна  $l + 1$
- 2) Память( $P$ ) равна наибольшему номеру переменной, входящему в  $P$ .
- 3) Состояние программы в момент  $t$  при начальных данных  $r_i = x_i \in \mathbb{N}$  — это кортеж

$$(r_0(t), \dots, r_m(t), k(t)),$$

где  $r_i(t)$  — содержимое регистра  $r_i$  в момент  $t$ , а  $k(t)$  — номер оператора, выполняющегося в момент  $t$ . Если  $k(t) \geq l + 1$ , то считаем  $k(t + 1) = k(t)$

**Определение 31.** Пусть  $P$  — программа и  $n \geq 0$ . Тогда  $P$  вычисляет частичную функцию  $\varphi_P(x_0, \dots, x_n)$  на  $\mathbb{N}$ , которая определяется так: при любых  $\bar{x} \in \mathbb{N}$  зададим значения  $r_0 = x_0, \dots, r_n = x_n$ ;  $r_i = 0$  при  $i > n$  и запустим  $P$ . Если  $P$  никогда не останавливается (то есть  $\forall t \ k(t) \leq l$ ), то  $\varphi_P(\bar{x})$  не определена. Если же она остановится в момент  $t$ , то  $\varphi_P(\bar{x}) = r_0(t)$ .

Функции такого вида называются  $R$ -вычислимыми.

**Предложение 42.**

- 1)  $+, \cdot, \chi_<, I_k^m$   $R$ -вычислимы.
- 2) Суперпозиция  $R$ -вычислимых функций  $R$ -вычислима.
- 3) Минимизация  $R$ -вычислимых функций  $R$ -вычислима.

Есть вариант этого предложения для тотальных функций, есть для частичных. Оба верны.

### 3.1.2 R-вычислимость и рекурсивность

**Теорема 43.** *Класс тотальных R-вычислимых функций совпадает с классом рекурсивных функций.*

**Определение 32.** Закодируем операторы программы натуральными числами:

- $\lceil r_i := 0 \rceil = \langle 0, i \rangle$
- $\lceil r_i := r_{i+1} \rceil = \langle 1, i \rangle$
- $\lceil r_i := r_j \rceil = \langle 2, i, j \rangle$
- $\lceil r_i = r_j \Rightarrow k \rceil = \langle 3, i, j, k \rangle$
- $\lceil P \rceil = \langle \lceil I_0 \rceil, \dots, \lceil I_l \rceil \rangle$

**Определение 33.**

- $\text{Оп}(a)$  означает, что  $a$  — код некоторого оператора.
- $\text{Прог}(a)$  означает, что  $a$  — код некоторой программы.
- $\text{Пер}(i, a)$  означает, что  $a$  — код некоторой программы, в которую входит  $r_i$ .
- $\text{дл}(a)$  равна длине программы  $P$ , если  $a$  — код программы  $P$ ; иначе 0.
- $\text{пам}(a)$  равна Память( $P$ ), если  $a$  — код программы  $P$ ; иначе 0.
- $\text{сос}(a, x_0, \dots, x_n, t)$  равна коду состояния  $P$  в момент  $t$  при  $r_i = x_i$  для  $i \leq n$  и  $r_i = 0$  для  $i > n$ , если  $a$  — код  $P$ ; иначе 0.

**Предложение 44** (Свойства кодирования).

- 1) Коды разных операторов различны
- 2) Коды разных программ различны
- 3) Все описанные предикаты рекурсивны
- 4) Если  $r_i$  входит в  $P$ , то  $i < \lceil P \rceil$
- 5) Если  $k$  — номер условного оператора, входящего в  $P$ , то  $k < \lceil P \rceil$
- 6) Существует алгоритм, который по программе вычисляет её код и наоборот.

## 3.2 Лекция 15

*Доказательство.* Доказательство в одну сторону рассматривалось на практике.

В другую сторону: доказываем, что любая R-вычислимая функция является рекурсивной. Рассматриваем тотальную функцию  $\varphi_P(\bar{x})$ . Пусть  $a = \ulcorner P \urcorner$ . Введём вспомогательную функцию

$$\begin{aligned} g(\bar{x}) &= \mu t \ (s_t \text{ заключительное}) \\ &= \mu t \ (\beta(\text{cos}(a, \bar{x}, t), \text{пам}(a) + 2) \geq \text{дл}(a)). \end{aligned}$$

Она рекурсивна и вычисляет номер первого момента, в который программа прекратит работу. Отсюда получаем рекурсивность нужной функции:

$$\phi_P(\bar{x}) = \beta(\text{cos}(a, \bar{x}, g(\bar{x})), 1)$$

□

То же самое доказательство работает для другого варианта теоремы:

**Теорема 45.** *Класс рекурсивных частичных функций совпадает с классом R-вычисляемых частичных функций.*

**Определение 34.** Для произвольной (возможно не вычислимой) функции  $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$

- Частичные функции, вычисляемые относительно  $h$  определяются так же, как и обычные рекурсивные частичные функции, но в списке начальных функций присутствует  $h$ .
- R-вычисляемые относительно  $h$  частичные функции (или с оракулом  $h$ ) — функции, вычисляемые R-программами с оракулом  $h$ .
- R-программа с оракулом  $o$  — R-программа с дополнительным оператором  $r_i = o(r_i)$ .

Приведём ещё один вариант теоремы:

**Теорема 46.** *Для любой функции  $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  класс частичных функций, рекурсивных относительно  $h$  совпадает с классом функций, R-вычисляемых относительно  $h$ .*

### 3.2.1 Главная вычислимая нумерация рекурсивных частичных функций

**Определение 35.**  $\Phi$  — класс одноместных рекурсивных частичных функций. Нумерация  $\nu : \mathbb{N} \rightarrow \Phi$  называется вычислимой, если двуместная функция  $\tilde{\nu}(n, x) = \nu_n(x)$  вычислима.

**Определение 36.** Вычислимая нумерация  $\nu$  называется главной, если любая вычислимая нумерация  $\mu : \mathbb{N} \rightarrow \Phi$  сводится к  $\nu$ , то есть  $\mu = \nu \circ f$  для некоторой рекурсивной функции  $f$ .

**Пример 6.** Основным рассматриваемым примером вычислимой нумерации является  $\varphi$ , где

$$\varphi_n = \begin{cases} \varphi_P^{(1)}, & \text{если } n = \ulcorner P \urcorner \\ \emptyset, & \text{иначе} \end{cases}$$

**Теорема 47** (о главной вычислимой нумерации).  $\varphi$  — главная вычислимая нумерация одноместных рекурсивных частичных функций.

*Доказательство.* Сначала проверим вычислимость  $\tilde{\varphi}$ . Модифицируем  $g$  из предыдущего раздела, добавив ко входу код программы:

$$g(n, x) = \mu t \text{ (Прог}(n) \wedge \beta(\text{сос}(n, x, t), \text{пам} + 2) \geq \text{дл}(n)).$$

Тогда  $\tilde{\varphi}(n, x) = \beta(\text{сос}(n, x, g(n, x)), 1)$  рекурсивна.

Теперь проверим, что  $\varphi$  — главная. Зафиксируем вычислимую нумерацию  $\mu$ . Обозначим за  $M$  R-программу, которая вычисляет  $\tilde{\mu}(n, x)$ . Для всех  $n$  построим программы  $P_n$ , для которых  $\mu_n = \varphi_{P_n}^{(1)}$ .

Идея программы — получив на входе  $x$ , дописать  $n$ , после чего запустить программу  $M$ . Код выглядит так:

---

```

 $r_1 := r_0$ 
 $r_0 := 0$ 
 $r_o := r_0 + 1$ 
 $\dots$ 
 $r_o := r_0 + 1$ 
 $M(n+2)$ 

```

---

(Последняя строчка обозначает код программы  $M$ , где все индексы увеличены на  $n + 2$ ). Нетрудно проверить, что функция  $s(n) := \ulcorner P_n \urcorner$  является рекурсивной. Значит  $\mu = \varphi \circ s$ .  $\square$

**Теорема 48** (о неподвижной точке). Для любой одноместной рекурсивной функции  $f(x)$  найдётся  $e$ , для которого  $\varphi_e = \varphi_{f(e)}$

*Доказательство.* Рассмотрим вычислимую нумерацию  $\mu_n = \varphi_{\varphi_n(n)}$ . По предыдущей теореме, существует рекурсивная функция  $s$  такая, что  $\mu_n = \varphi_{s(n)}$ .  $f \circ s$  рекурсивная, поэтому  $\exists v : f \circ s = \varphi_v$ . Значит  $e = s(v)$  подходит:

$$\varphi_{s(v)} = \mu_v = \varphi_{\varphi_v(v)} = \varphi_{f(s(v))}$$

$\square$

**Теорема 49** (Райса о неразрешимости свойств рекурсивных частичных функций). Пусть  $\emptyset \subsetneq C \subsetneq \Phi$  (собственного подкласса  $\Phi$ ) множество  $\varphi^{-1}(C) = \{n \mid \varphi_n \in C\}$  не рекурсивно.

*Доказательство.* Предположим, что это множество рекурсивно. Возьмём  $a \in \varphi^{-1}(C)$  и  $b \in \mathbb{N} \setminus \varphi^{-1}(C)$ . Рассмотрим рекурсивную функцию

$$f(x) = \begin{cases} a, & \text{если } x \notin \varphi^{-1}(C) \\ b, & \text{если } x \in \varphi^{-1}(C) \end{cases}$$

По теореме о неподвижной точке, для некоторого  $c$  выполнено  $\varphi_c = \varphi_{f(c)}$ . Но одна функцию лежит в классе  $C$ , а другая — нет. Противоречие.  $\square$

### 3.2.2 Рекурсивно перечислимые множества. Сводимости. Тьюрингов скачок.

Напоминание:  $A \subset \mathbb{N}$  рекурсивно перечислимо, если  $A = \emptyset \vee A = \text{rng}(f)$  для некоторой рекурсивной функции  $f$ .

**Определение 37.** Нумерация  $\nu : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{E}$  всех рекурсивно перечислимых множеств называется *вычислимой*, если  $\{(n, x) \mid x \in \nu_n\}$  вычислимо (TODO: перечислимо?). Вычислимая нумерация называется *главной*, если к ней сводится любая другая вычислимая нумерация.

**Предложение 50.**

- 1)  $A$  рекурсивно  $\Leftrightarrow A$  и  $\bar{A}$  рекурсивно перечислимы (теорема Поста)
- 2)  $A$  рекурсивно перечислимо  $\Leftrightarrow A = \text{rng}(\varphi_n)$  для некоторого  $n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow A = \text{dom}(\varphi_n)$  для некоторого  $n \in \mathbb{N}$
- 3)  $W_n = \text{dom}(\varphi_n)$  — главная вычислимая нумерация класса  $\mathcal{E}$  всех рекурсивно перечислимых множеств.
- 4)  $C = \{n \mid b \in W_n\}$  рекурсивно перечислимо, но не рекурсивно.
- 5) Любое рекурсивно перечислимое множество  $m$ -сводится к  $C$ .

*Доказательство.* Доказательство 4 пункта: предположим, что  $C$  рекурсивно. Тогда  $\bar{C}$  тоже рекурсивно, а значит и рекурсивно перечислимо. Значит  $\bar{C} = W_e$  для некоторого  $e$ . Тогда  $e \in W_e \Leftrightarrow e \notin W_e$ . Противоречие.

□

**Определение 38.** Мы говорим, что  $f$  сводится по Тьюрингу к  $g$ , если  $f$  рекурсивна относительно  $g$ . Обозначается  $f \leq_T g$ . Для множеств  $A \leq_T B \Leftrightarrow \chi_A \leq_T \chi_B$

**Определение 39.** Тьюринговым скачком множества  $A \subset \mathbb{N}$  называют  $A' = \{n \mid n \in W_n^A\}$ , где  $W_n^A = \text{dom}(\varphi_n^A)$  ( $A$  — оракул).