

Домашнее задание 15. РП множества, Тьюрингова сводимость,  
немного о Чёрче—Россере.

14 декабря → 21 декабря  
Последнее

- 1) Докажите, что для множества  $A \subseteq \mathbb{N}$  равносильны следующие условия:
  - (\*)  $A$  рекурсивно перечислимо;
  - (\*\*)  $A$  — область значений подходящей одноместной рекурсивной частичной функции;
  - (\*\*\*)  $A$  — область определения подходящей одноместной рекурсивной частичной функции.
  
- 2) Пусть  $W_n = \text{dom}(\varphi_n)$ , тогда  $\{W_n\}$  — нумерация всех рекурсивно перечислимых множеств. Докажите, что:
  - (а)  $W$  есть главная вычислимая нумерация РПМ;
  - (б) множество  $C = \{n \mid n \in W_n\}$  рекурсивно перечислимо, но не рекурсивно;
  - (в) любое РПМ  $m$ -сводится к  $C$ ;
  - (г) множества  $[MA]$  и  $[PA]$   $m$ -эквивалентны множеству  $C$ .
  
- 3) Пусть  $\leq_T$  — отношение Тьюринговой сводимости на  $2^{\mathbb{N}}$ . Докажите, что:
  - (а)  $\leq_T$  есть предпорядок, являющийся собственным расширением предпорядка  $\leq_m$ ;
  - (б) фактор  $2^{\mathbb{N}} / \equiv_T$  по индуцированному отношению эквивалентности континуален;
  - (в) любые два элемента  $2^{\mathbb{N}}$  имеют супремум по обоим отношениям  $\leq_T$  и  $\leq_m$ .
  
- 4) Тьюрингов скачок множества  $A$  — оракул для проблемы останова машины Тьюринга с оракулом  $A$ . Формально,
 
$$A' = \{n \mid n \in W_n^A\}.$$

Докажите, что  $A'$  рекурсивно перечислимо, но не рекурсивно относительно  $A$ ;  $A' \not\leq_T A$ ;  
 $A \leq_T B \Rightarrow A' \leq_T B'$ .
  
- 5) Докажите, что любая рекурсивная функция определима в структуре  $(\mathbb{N}; +, \cdot)$ .
  
- 6) Определим отношение  $\twoheadrightarrow_\ell$  на множестве всех  $\lambda$ -термов следующим образом:

$$\begin{aligned}
 P &\twoheadrightarrow_\ell P \\
 P &\twoheadrightarrow_\ell P' &\Rightarrow \lambda x.P &\twoheadrightarrow_\ell \lambda x.P' \\
 P &\twoheadrightarrow_\ell P', Q &\twoheadrightarrow_\ell Q' &\Rightarrow P Q &\twoheadrightarrow_\ell P' Q' \\
 P &\twoheadrightarrow_\ell P', Q &\twoheadrightarrow_\ell Q' &\Rightarrow (\lambda x.P) Q &\twoheadrightarrow_\ell P' [x := Q']
 \end{aligned}$$

Докажите, что

$$(a) \quad M \twoheadrightarrow_\ell M', N \twoheadrightarrow_\ell N' \implies M [x := N] \twoheadrightarrow_\ell M' [x := N']$$

$$(b) \quad \begin{array}{ccc} M_1 & \xrightarrow{\twoheadrightarrow_\ell} & M_2 \\ \downarrow \twoheadrightarrow_\ell & & \downarrow \twoheadrightarrow_\ell \\ M_3 & \dashrightarrow_{\twoheadrightarrow_\ell} & \exists M_4 \end{array}$$

- (в) Отношение  $\beta$ -редукции термов за несколько шагов является транзитивным замыканием отношения  $\twoheadrightarrow_\ell$ .