

Домашнее задание 12. Кодирование  $\text{ИП}_\sigma$ , представимость функций.

(23 ноября  $\rightarrow$  30 ноября)

- 1) Докажите, что следующие функции рекурсивны:
- (а)  $y!$  (факториал);  $x^y$  (возведение в степень);
  - (б) функция, перечисляющая без повторения простые числа в порядке возрастания;
  - (в) последовательность Фибоначчи;
  - (г) количество простых чисел, не превосходящих  $y$ .

- 2) Докажите, что следующие множества рекурсивны:

- (а) множество всех кодов термов сигнатуры  $\sigma = \{<, +, \cdot, 0, 1\}$ ;
- (б) множество кодов имен  $\hat{n}$  натуральных чисел;
- (в) множество всех кодов формул сигнатуры  $\sigma$ ;
- (г) множество всех кодов логических следствий минимальной арифметики.

- 3) Докажите рекурсивность функции  $f$ :

(а)

$$f(a, b) = \begin{cases} \text{код терма } t + s, & a, b \text{ — коды термов } t, s, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

(б)

$$f(a) = \begin{cases} \text{код формулы } t + 0 = t, & a \text{ — код терма } t, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

(в)

$$f(a) = \begin{cases} \text{код формулы } \neg\varphi, & a \text{ — код формулы } \varphi, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

(г)

$$f(a, b, c) = \begin{cases} \text{код формулы } (\varphi \wedge \psi) \rightarrow \psi, & a, b, c \text{ — коды формул } \varphi, \psi, \theta, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

- 4) Докажите, что функции  $+$ ,  $\cdot$ ,  $I_k^n$  (проекция),  $\ell$  (характеристическая функция предиката  $<$ ) представимы в минимальной арифметике.
- 5) Докажите, что суперпозиция представимых функций представима, и что минимизация представимой функции представима.