Домашнее задание 14. R-Вычислимость и рекурсивность.

(7 декабря → 14 декабря)

1) Пусть $\texttt{Оп}(a)$ означает, что a является кодом некоторого оператора; $\texttt{Прог}(a)$ означает, что a является кодом некоторой программы; и $\texttt{Рег}(i, a)$ означает, что a является кодом некоторой программы, содержащей переменную r_i.

   Докажите, что предикаты $\texttt{Оп}$, $\texttt{Прог}$ и $\texttt{Рег}$ рекурсивны.

2) Пусть 𓆑$(a) = l + 1$, если a является кодом некоторой программы длины $l + 1$, и 𓆑$(a) = 0$, если a не является кодом программы.

   Пусть 𓅓(a) равно памяти программы с кодом a, если a является кодом некоторой программы, и 𓅓$(a) = 0$ в противном случае.

   Пусть 𓀠$(a, x_0, \ldots, x_n, t) = \langle s \rangle$, если a является кодом программы P и s — состояние P в момент t при вычислении $\varphi_P(\bar{x})$, и 𓀠$(a, x_0, \ldots, x_n, t) = 0$, если a не является кодом программы.

   Докажите, что функции 𓆑, 𓅓 и 𓀠 рекурсивны.

3) Докажите, что функция на множестве натуральных чисел R-вычислима тогда и только тогда, когда она рекурсивна. (Учтите все технические детали, которые были пропущены на лекции.)

   Докажите, что частичная функция на множестве натуральных чисел R-вычислима тогда и только тогда, когда она рекурсивна.

4) Пусть g — произвольная функция на $\mathbb{N}$. Функция f *рекурсивна относительно* g (символически, $f \leq_T g$), если f получается из g, $+$, $\cdot$, $\chi_<$, I_k^n последовательными применениями суперпозиции и минимизации.

   Функция f *R-вычислима относительно* g, если существует вычисляющая ее программа с оракулом g: формально, оператор присваивания может принимать ещё вид $r_i \coloneqq g(r_i)$.

   Докажите равносильность этих двух определений: функция рекурсивна относительно g тогда и только тогда, когда она R-вычислима относительно g.

5) Пусть $\varphi_n = \varphi_P^{(1)}$, если n является кодом программы P, и $\varphi_n = \varnothing$, если n не является кодом программы. Тогда φ — нумерация всех рекурсивных частичных функций, а $W_n = \operatorname{dom}(\varphi_n)$ — нумерация всех рекурсивно перечислимых множеств.

   Докажите, что частичная функция $(n, x) \mapsto \varphi_n(x)$ рекурсивна, а множество $\{n \mid n \in W_n\}$ рекурсивно перечислимо, но не рекурсивно.