

Домашнее задание 12. Кодирование ИП_σ, представимость функций.

23 ноября → 30 ноября

Последнее в разделе “Выводимость и (не)разрешимость”

Будем говорить, что функция $f(x_1, \dots, x_n)$ *представима* в минимальной арифметике, если существует формула $\psi(\bar{x}, y)$ такая, что для всех $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{N}$

$$\text{МА} \vdash \forall y \, \psi(\widehat{x_1}, \dots, \widehat{x_n}, y) \leftrightarrow y = \widehat{f(x_1, \dots, x_n)}.$$

- 1) Докажите, что следующие функции рекурсивны:
 - (а) $y!$ (факториал); x^y (возведение в степень);
 - (б) функция, перечисляющая без повторения простые числа в порядке возрастания;
 - (в) последовательность Фибоначчи;
 - (г) количество простых чисел, не превосходящих y .
- 2) Докажите, что следующие множества рекурсивны:
 - (а) множество всех кодов термов сигнатуры $\sigma = \{<, +, \cdot, 0, 1\}$;
 - (б) множество кодов имен \hat{n} натуральных чисел;
 - (в) множество всех кодов формул сигнатуры σ ;
 - (г) множество всех кодов логических следствий минимальной арифметики.
- 3) Докажите рекурсивность функции f :
 - (а)
$$f(a, b) = \begin{cases} \text{код терма } t + s, & a, b \text{ — коды термов } t, s, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$
 - (б)
$$f(a) = \begin{cases} \text{код формулы } t + 0 = t, & a \text{ — код терма } t, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$
 - (в)
$$f(a) = \begin{cases} \text{код формулы } \neg\varphi, & a \text{ — код формулы } \varphi, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$
 - (г)
$$f(a, b, c) = \begin{cases} \text{код формулы } (\varphi \wedge \psi) \rightarrow \psi, & a, b, c \text{ — коды формул } \varphi, \psi, \theta, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$
- 4) Докажите, что функции $+$, \cdot , I_k^n (проекция), ℓ (характеристическая функция предиката $<$) представимы в минимальной арифметике.
- 5) Докажите, что суперпозиция представимых функций представима, и что минимизация представимой функции представима.