При поддежке Фонда Президентских грантов

# Математика НОН-СТОП

## Сборник задач

Б.А. Золотов Д.Г. Штукенберг

И.А. Чистяков А.В. Семенов

Фонд «Время Науки»

Санкт-Петербург
Ноябрь 2018

# Предисловие

*И.А, Чистяков — Президент Фонда «Время науки», директор ЧОУ ОиДО «Лаборатория непрерывного математического образования», автор задач Олимпиады «Математика НОН-СТОП» в 2010–2015 годах*

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetuer id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

Nulla malesuada porttitor diam. Donec felis erat, congue non, volutpat at, tincidunt tristique, libero. Vivamus viverra fermentum felis. Donec nonummy pellentesque ante. Phasellus adipiscing semper elit. Proin fermentum massa ac quam. Sed diam turpis, molestie vitae, placerat a, molestie nec, leo. Maecenas lacinia. Nam ipsum ligula, eleifend at, accumsan nec, suscipit a, ipsum. Morbi blandit ligula feugiat magna. Nunc eleifend consequat lorem. Sed lacinia nulla vitae enim. Pellentesque tincidunt purus vel magna. Integer non enim. Praesent euismod nunc eu purus. Donec bibendum quam in tellus. Nullam cursus pulvinar lectus. Donec et mi. Nam vulputate metus eu enim. Vestibulum pellentesque felis eu massa.

Quisque ullamcorper placerat ipsum. Cras nibh. Morbi vel justo vitae lacus tincidunt ultrices. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. In hac habitasse platea dictumst. Integer tempus convallis augue. Etiam facilisis. Nunc elementum fermentum wisi. Aenean placerat. Ut imperdiet, enim sed gravida sollicitudin, felis odio placerat quam, ac pulvinar elit purus eget enim. Nunc vitae tortor. Proin tempus nibh sit amet nisl. Vivamus quis tortor vitae risus porta vehicula.

Fusce mauris. Vestibulum luctus nibh at lectus. Sed bibendum, nulla a faucibus semper, leo velit ultricies tellus, ac venenatis arcu wisi vel nisl. Vestibulum diam. Aliquam pellentesque, augue quis sagittis posuere, turpis lacus congue quam, in hendrerit risus eros eget felis. Maecenas eget erat in sapien mattis porttitor. Vestibulum porttitor. Nulla facilisi. Sed a turpis eu lacus commodo facilisis. Morbi fringilla, wisi in dignissim interdum, justo lectus sagittis dui, et vehicula libero dui cursus dui. Mauris tempor ligula sed lacus. Duis cursus enim ut augue. Cras ac magna. Cras nulla. Nulla egestas. Curabitur a leo. Quisque egestas wisi eget nunc. Nam feugiat lacus vel est. Curabitur consectetuer.

Suspendisse vel felis. Ut lorem lorem, interdum eu, tincidunt sit amet, laoreet vitae, arcu. Aenean faucibus pede eu ante. Praesent enim elit, rutrum at, molestie non, nonummy vel, nisl. Ut lectus eros, malesuada sit amet, fermentum eu, sodales cursus, magna. Donec eu purus. Quisque vehicula, urna sed ultricies auctor, pede lorem egestas dui, et convallis elit erat sed nulla. Donec luctus. Curabitur et nunc. Aliquam dolor odio, commodo pretium, ultricies non, pharetra in, velit. Integer arcu est, nonummy in, fermentum faucibus, egestas vel, odio.

Sed commodo posuere pede. Mauris ut est. Ut quis purus. Sed ac odio. Sed vehicula hendrerit sem. Duis non odio. Morbi ut dui. Sed accumsan risus eget odio. In hac habitasse platea dictumst. Pellentesque non elit. Fusce sed justo eu urna porta tincidunt. Mauris felis odio, sollicitudin sed, volutpat a, ornare ac, erat. Morbi quis dolor. Donec pellentesque, erat ac sagittis semper, nunc dui lobortis purus, quis congue purus metus ultricies tellus. Proin et quam. Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos hymenaeos. Praesent sapien turpis, fermentum vel, eleifend faucibus, vehicula eu, lacus.

# Оглавление

# Задачи 2018 года

## Задачи 4 класса

### Задача 1. Где-то я это уже видел

**A.** Первое число в дате (оно соответствует дню в месяце) меняется от 1 до 31, а второе (соответствует месяцу) — от 1 до 12. С другой стороны, как мы знаем, часы пронумерованы от 0 до 23, а минуты — от 0 до 59.

Таким образом, днём в месяце и одновременно часом могут быть числа от 1 до 23, а месяцем и одновременно минутой — от 1 до 12. Кроме того, в каждом месяце точно есть хотя бы 23 дня.

Поэтому ответ — $23 \cdot 12 = 276$.

**B.** Давайте всегда использовать «развёрнутую» дату. Тогда любой месяц (от 1 до 12) может стоять на месте часа, а любой день (от 1 до 31) на месте минуты. Ответ — все дни в году.

**C.** Есть всего 12 букв русского алфавита, похожих на буквы английского алфавита (ГОСТ Р 50577-93):

**А**, В, **Е**, К, М, Н, **О**, Р, С, Т, Х, **У**.

Жирным мы отметили гласные — их всего 4; соответственно, согласных 8. Выбрать сочетание «гласная-согласная-согласная» можно $4 \cdot 8 \cdot 8$ способами, а «гласная-гласная-согласная» — $4 \cdot 4 \cdot 8$ способами. Вариантов для числа на номере всегда ровно 1000 — от 000 до 999.

Когда гласная одна, она может стоять на одном из трёх мест, поэтому ответ в таком случае будет равен

$$3 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 1000.$$

Когда гласных две, согласная может стоять на одном из трёх мест. Поэтому ответ —

$$3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 1000.$$

## Задача 2. Напрасно называют север крайним

**A.** Это задача–шутка: принималось большинство ответов, хотя, например понятно, что туристическая группа на 10–градусном морозе отморозит себе половину ног, а на 20–градусном — все.

**B.** Все долготы Земного шара оказываются очень близко друг к другу около полюсов. Так что, возможно, Мюнхгаузен просто обошёл по кругу (скажем, километровому) Северный или Южный полюс.

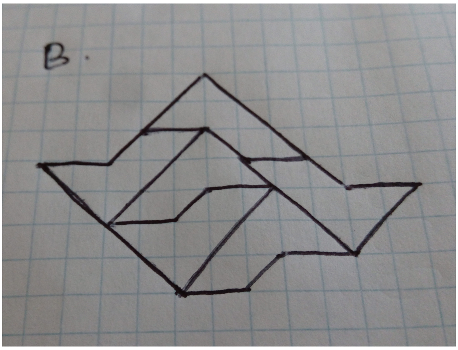
**C.** Пусть четыре города — $B$, $C$, $D$ и $E$ расположены очень близко друг к другу — попарно на расстоянии в один километр. А пятый город — $A$ — очень далеко, в 100 километрах. Пусть больше нет никаких городов. Тогда $A$ должен быть соединён дорогой с какими-то из четырёх оставшихся городов, но ни один из тех городов не должен быть соединён с $A$.

## Задача 3. Разрезания

**A.** Поделим каждую из сторон квадрата на семь равных отрезков и рассмотрим 28 треугольников, получающихся, если соединить центр квадрата с краями каждого из этих отрезков. Все эти треугольники имеют одинаковую площадь (так как у них одинаковы основание и высота) и равные длины сторон, лежащие на сторонах квадрата (по построению).

Чтобы получить 7 многоугольников, требуемых в условии, объединим по четыре соседних треугольника.

**B.** Смотреть рисунок:




**C.** Аналогично тому, что было проделано в первом пункте данной задачи, мы умеем резать квадрат на три многоугольника равной площади с равной длиной сторон, лежащих на сторонах квадрата.

Разрежем каждый квадратный «слой» пирамиды на три таких многоугольника одинаковым образом (с точностью до подобия). Тогда в объединении всех слоёв получатся три многогранника одинакового объёма, несущие на себе одинаковое количество краски («выходящие» на стороны пирамиды одинаковой площадью своей границы).

## Задача 4. Летающий цирк

*Если вы скажете слово «матрас», он наденет ведро себе на голову.*

**A.** Все слова в этой задаче состоят из букв А, М, Р, С, Т. Постараемся поставить эти буквы в соответствие с действиями Лэмберта. Для этого составим таблицу: сколько каких букв находится в словах, адресованных Лэмберту.

| | А | М | Р | С | Т |
|---|---|---|---|---|---|
| **МАТРАС** | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| **СТАРТ** | 1 | 0 | 1 | 1 | 2 |
| **МАРС** | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |

Услышав слово **«МАТРАС»**, Лэмберт среди прочего поёт два куплета из песни — значит, буква ‘А’ отвечает за куплеты. По аналогичным причинам (посмотрим, каких букв две в слове **«СТАРТ»**), ‘Т’ — это ноги в коробке. ‘М’ — это то, чего нет в слове **«СТАРТ»**, но есть в **«МАТРАС»** — это надевание ведра.

Для ‘Р’ и ‘С’ остаются снятие перчаток и „Караул!“ — но нам неважно, что из действий какой букве соответствует, потому что ‘Р’ и ‘С’ встречаются во всех рассматриваемых словах по одному разу.

Отсюда ответ: Лэмберт закричит „Караул!“, споёт один куплет, наденет на голову ведро и снимет перчатки.

**B.** Да, джентльмен сможет купить себе шляпу, так как цена, называемая продавцом, не возрастает (пока финансовые возможности джентльмена остаются ниже её), а количество финансов, имеющееся у джентльмена, на каждом шаге растёт ровно на 1.

Можно также явно проделать процедуру, описанную в задаче, и выяснить, через сколько именно шагов шляпа окажется у джентльмена (получится точно меньше десяти) — но мы не будем делать этого здесь, оставив читателю в качестве упражнения.

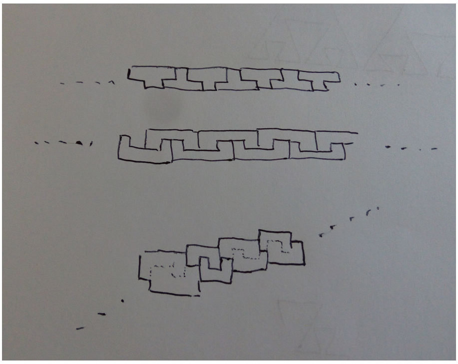
**C.** Пусть Тревор преувеличивает всё в $a$ раз, а Джереми — преуменьшает в $b$ раз, а кот стоит $s$ рублей. Тогда, из условия задачи,

$$
\begin{aligned}
&s \cdot a = 9600 \\
&a \div b = 4 \\
&s \cdot a \div b = 2400 \\
&s \div b = 150
\end{aligned}
$$

Сравнив первое и третье равенства, получаем, что $b = 4$. Подставив найденное $b$ в четвертое равенство, получим $s = 600$.

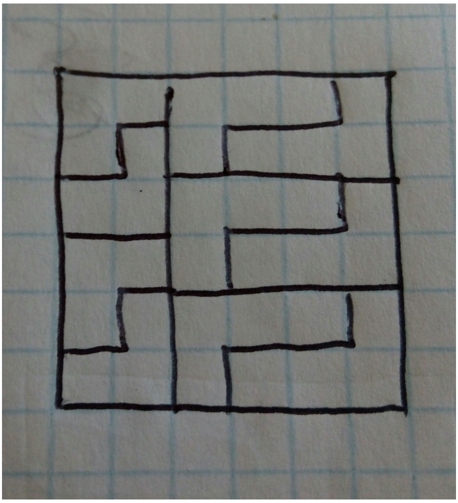
## Задача 5. Мощения

**A.** Из этой фигуры можно собрать горизонтальную полоску ширины 2, которой очевидно можно замостить плоскость (смотреть рисунок).



**B.** Из второй фигуры можно собрать горизонтальную полоску ширины 3, которой очевидно можно замостить плоскость. Из первой же фигуры соберём «лесенку» (смотреть рисунок выше): так как и верхний, и нижний её край имеет вид «на три клетки вправо–на клетку вверх», этой лесенкой можно замостить плоскость, прикладывая её к себе.

**C.** Смотреть рисунок:



## Задача 6. Ужасный гадкий аккуратный подсчёт

**A.** Квадратов $1 \times 1$ — $4 \cdot 5 = 20$ штук. Квадратов размером $2 \times 2$ — $3 \cdot 4 = 12$ штук. Квадратов $3 \times 3$ и $4 \times 4$ — 6 и 2 соответственно. Таким образом, всего квадратов

$$20 + 12 + 6 + 2 = 40.$$

Количество прямоугольников можно посчитать более «продвинутым» образом: заметим, что прямоугольников размером $a \times b$ можно найти ровно $(4 - a + 1) \cdot (5 - b + 1)$ штук. Число $a$ меняется от 0 до 4 — отсюда $4 - a + 1$ меняется в тех же пределах. То же самое с $5 - b + 1$ — оно меняется от 0 до 5.

Отсюда можно заключить, что сумма чисел вида $(4-a+1)\cdot(5-b+1)$ при всевозможных $a$ и $b$ будет равна сумме всех чисел вида $a \cdot b$. Как посчитать сумму всех чисел вида $a \cdot b$? Заметим, что при раскрытии скобок в произведении

$$(1 + 2 + 3 + 4 + 5) \cdot (1 + 2 + 3 + 4)$$

получится сумма из всех слагаемых, которые нам нужны. Отсюда прямоугольников можно найти $15 \cdot 10 = 150$ штук.

**B.** Всего раскрасок $n!$ — в «первом» секторе может стоять $n$ цветов, в следующем — $n - 1$, и так далее. Из одной раскраски вращением круга можно получить ровно $n$ раскрасок (включая её саму) — поэтому ответ равен $\frac{n!}{n} = (n - 1)!$.

**C.** В верхней полосе может стоять один из шести имеющихся цветов. Во второй полосе — любой из шести цветов, кроме уже стоящего в первой. В нижней полосе — любой из цветов, кроме уже стоящего во второй. Таким образом, ответ — $6 \cdot 5 \cdot 5 = 150$.

# Задачи 5 класса

## Задача 1. Летающий цирк

*Если вы скажете слово «матрас», он наденет ведро себе на голову.*

**A.** Все слова в этой задаче состоят из букв А, М, Р, С, Т. Постараемся поставить эти буквы в соответствие с действиями Лэмберта. Для этого составим таблицу: сколько каких букв находится в словах, адресованных Лэмберту.

| | А | М | Р | С | Т |
|---|---|---|---|---|---|
| **МАТРАС** | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| **СТАРТ** | 1 | 0 | 1 | 1 | 2 |
| **МАРС** | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |

Услышав слово **«МАТРАС»**, Лэмберт среди прочего поёт два куплета из песни — значит, буква ‘А’ отвечает за куплеты. По аналогичным причинам (посмотрим, каких букв две в слове **«СТАРТ»**), ‘Т’ — это ноги в коробке. ‘М’ — это то, чего нет в слове **«СТАРТ»**, но есть в **«МАТРАС»** — это надевание ведра.

Для ‘Р’ и ‘С’ остаются снятие перчаток и „Караул!“ — но нам неважно, что из действий какой букве соответствует, потому что ‘Р’ и ‘С’ встречаются во всех рассматриваемых словах по одному разу.

Отсюда ответ: Лэмберт закричит „Караул!“, споёт один куплет, наденет на голову ведро и снимет перчатки.

**B.** Да, джентльмен сможет купить себе шляпу, так как цена, называемая продавцом, не возрастает (пока финансовые возможности джентльмена остаются ниже её), а количество финансов, имеющееся у джентльмена, на каждом шаге растёт ровно на 1.

Можно также явно проделать процедуру, описанную в задаче, и выяснить, через сколько именно шагов шляпа окажется у джентльмена (получится точно меньше десяти) — но мы не будем делать этого здесь, оставив читателю в качестве упражнения.

**C.** Пусть Тревор преувеличивает всё в $a$ раз, а Джереми — преуменьшает в $b$ раз, а кот стоит $s$ рублей. Тогда, из условия задачи,

$$s \cdot a = 9600$$
$$a \div b = 4$$
$$s \cdot a \div b = 2400$$
$$s \div b = 150$$

Сравнив первое и третье равенства, получаем, что $b = 4$. Подставив найденное $b$ в четвертое равенство, получим $s = 600$.

## Задача 2. Рукопожатия

**A.** Давайте «расклеим» восьмёрку, превратив её в обычный круглый хоровод — тогда существо, стоящее в центре восьмёрки, «продублируется». Если оно было крабом, то получится хоровод из 19 крабов и 17 пауков; в противном случае — 18 крабов и 18 пауков. Если в круговом хороводе крабов больше, чем пауков, то какие-то два краба неизбежно будут держаться за лапы, что запрещено.

Отсюда можно заключить, что в центре стоял паук. Придумать хоровод, соответствующий условию, с пауком в центре не представляет ни малейшего труда.

**B.** Могло оказаться так, что ровно один человек в компании выиграл машину. Построим соответствующий пример. Возьмём «победителя» — у него есть пять друзей. У каждого из них есть ещё по четыре друга (кроме выигравшего машину), пусть все эти друзья различны. $1 + 5 + 4 \cdot 5$ — у нас получилось 26 человек, от каждого из которых не более чем два рукопожатия до выигравшего машину человека.

Однако, для того чтобы довести пример до конца, нам надо установить дружеские связи между людьми, у которых их пока меньше 5 — а именно, между теми, от кого до победителя лотереи два рукопожатия (их 20 человек). Каждому из них нужно «изобрести» ещё по 4 друга.

Поступим просто: поставим эти 20 человек по кругу в произвольном порядке и назначим друзьями каждого двух его правых соседей и двух его левых соседей. Задача решена.

**C.** Пусть внутренних рейсов в Авиаландии ровно $M$, а международных из неё — ровно $N$. Каждый внутренний рейс имеет в Авиаландии два «конца», а каждый международный — только один. Всего в города Авиаландии прибывает $5 \cdot 6 = 30$ рейсов. Получаем

$2 \cdot M + N = 30.$

Отсюда $N$ должно быть чётным числом (так как $2 \cdot N$ — чётное).

## Задача 3. Современная мебельная фабрика

**A.** Закроем один из открытых ящиков, открыв тот, что через два ящика «налево» от него. Затем закроем его, открыв следующий, ещё через два ящика слева. На четвёртом шаге мы закроем два ящика, один из которых был противоположным исходному.

**B.** При первом сценарии после действий Фёдора в ведре осталось $\frac{6}{10}$ красителя, разведённого там Сергеем, так как 4 литра раствора из 10 были вылиты.

При втором сценарии Фёдор сначала выливал обычный раствор, а затем — раствор с меньшей концентрацией красителя. То есть, количества красителя в ведре до выливания двух литров и после отличались в 0.8 раз. В итоге в ведре осталось $\frac{8}{10} \cdot \frac{8}{10} = 0.64$ от исходного красителя.

Ответ: больше красителя осталось во второй день.

**C.** Экспериментальный стул с использованием нанотехнологий (одна из инноваций заключается, например, в том, что у такого стула ровно 720 ножек) падает с лестницы (в качестве испытания, разумеется). Выяснилось, что при падении он потерял в три раза меньше ножек, чем у него бы осталось, потеряй он в три раза меньше ножек, чем у него осталось сейчас. Так сколько же ножек осталось у стула?

Пусть стул потерял $t$ ножек. Составим уравнение:

$$t = \frac{1}{3} \cdot \left( \underbrace{720 - \underbrace{\frac{1}{3} \cdot \underbrace{(720 - t)}_{\text{чем у него осталось сейчас}}}_{\text{в три раза меньше ножек}}}_{\text{осталось бы, потеряй он}} \right)$$

Это линейное уравнение. Его решение — $t = 180$. Это и есть ответ на данную задачу.

## Задача 4. Игры

**A.** Выигрышная стратегия есть у первого игрока: превым ходомон должен положить игровую фигуру в центр прямоугольника, разделив его на две равных непересекающихся фигуры — а затем ему достаточно повторять ходы, сделанные вторым игроком в одной из фигур, симметрично в другой фигуре. Понятно, что если второй смог сделать ход, то первый тоже сможет.

**B.** Выигрышная стратегия есть у второго игрока: пока он находится сзади, первый может делать только ходы по одному шагу вперёд. Второму надо следовать за ним — и когда тот шагнёт в клетку №301 (второй будет стоять в 229-ой), перепрыгнуть через него и выиграть.

**C.** Первому надо вырезать свою букву ‘Г’ по центру верхней стороны квадрата. То, что он выигрывает после этого, доказывается перебором возможных ходов второго игрока: после каждого возможного хода первый игрок может походить так, что буква ‘L’ второго игрока не может быть вписана никуда.

## Задача 5. Прогрессивное сложение

**A.** $95500 > 50095$.

**B.** Если ни одно из трёх чисел $P$, $Q$, $R$ не является префиксом другого, то всё просто: надо отсортировать числа лексикографически и сложить в порядке «от большего к меньшему». Если одно из чисел — префикс другого (например, $P$ — префикс $Q$), то всё не так однозначно: надо сравнить их общую первую цифру и первую цирфу $Q$, следующую за вхождением $P$ в $Q$. Если второе больше, то надо ставить $Q$ перед $P$, иначе — $P$ перед $Q$.

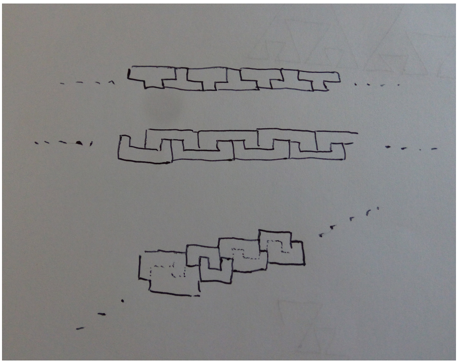
Если $P$ — префикс $Q$, которое, в свю очередь, является префиксом $R$, или $P$ и $Q$ — различные префиксы $R$, действовать следует аналогично.

**C.** Нет, так не бывает:

$$P \oplus Q \;=\; P \cdot \underset{n \geq 1}{10^n} + Q \;>\; P + Q.$$

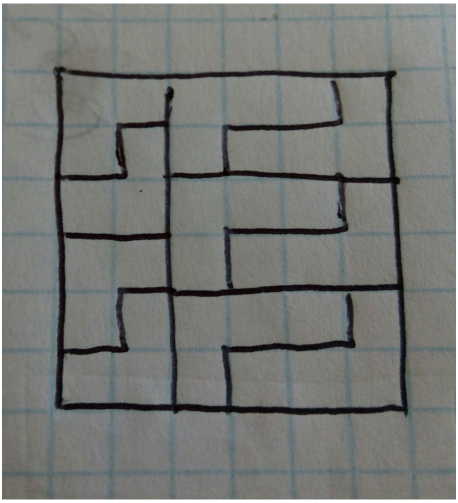
## Задача 6. Мощения

**A.** Из этой фигуры можно собрать горизонтальную полоску ширины 2, которой очевидно можно замостить плоскость (смотреть рисунок).



**B.** Из второй фигуры можно собрать горизонтальную полоску ширины 3, которой очевидно можно замостить плоскость. Из первой же фигуры соберём «лесенку» (смотреть рисунок выше): так как и верхний, и нижний её край имеет вид «на три клетки вправо–на клетку вверх», этой лесенкой можно замостить плоскость, прикладывая её к себе.

**C.** Смотреть рисунок:



# Задачи 6 класса

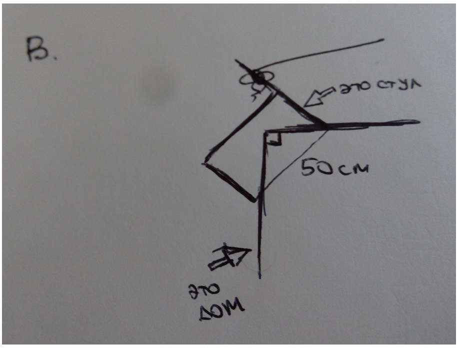
## Задача 1. Клиренсы

**A.**

$$740/2 - 175 = 195\ (\text{мм}).$$

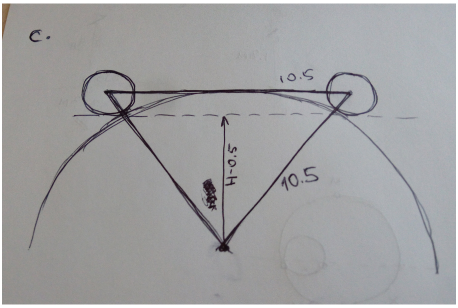
**B.** Расстояние между соседними ножками стула — 50 см. К ножкам стула прикрепили колёсики и стали втаскивать его за верёвку по стене многоэтажки (которая имеет форму куба) так, что стул едет по стене колёсиками. Каково должно быть расстояние от сидения стула до земли, чтобы он смог въехать со стены многоэтажки на её крышу, не поцарапав нижнюю сторону сиденья?

Угол дома «поднимается» над линией, соединяющей основания ножек стула, на расстояние, равное высоте прямоугольного треугольника с гипотенузой 50 сантиметров. Эта величина максимальна, очевидно, когда треугольник равнобедренный — тогда она равна 25 см. Поэтому расстояние от сиденья до земли должно быть не меньше 25 см.




**C.** Автобус с диаметром колёс 1 метр и колёсной базой 10.5 метров (так называют расстояние между передней осью и задней) стоит на планете Маленького принца, диаметр которой 20 метров. Каким должен быть дорожный просвет (расстояние от пола до земли) у автобуса, чтобы он не царапал днищем грунт?

Треугольник, образованный центром планеты и центрами колёс автобуса, — равносторонний со стороной 10.5 см: одна из сторон равна колёсной базе, а две других — сумме радиуса планеты (10 метров) и радиуса колеса (0.5 метра).




Дорожный просвет автобуса — расстояние от его пола (который должен касаться верхней точки планеты) до прямой, соединяющей нижние точки колёс. В нашем случае — это разность $R-(H-0.5)$, где $H$ — высота равностороннего треугольника, а 0.5 — радиус колеса.

$$H = 10.5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$R-(H-0.5) = 11 - 10.5\frac{\sqrt{3}}{2}.$$
(это примерно 1.9 метра)

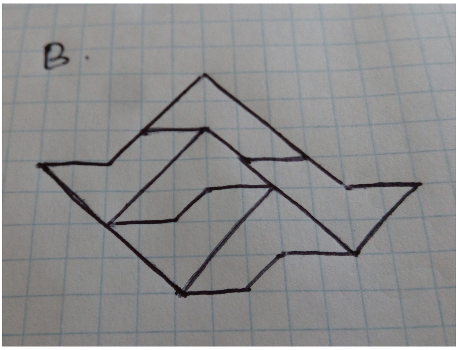
Это и есть ответ на задачу.

## Задача 2. Разрезания

**A.** Поделим каждую из сторон квадрата на семь равных отрезков и рассмотрим 28 треугольников, получающихся, если соединить центр квадрата с краями каждого из этих отрезков. Все эти треугольники имеют одинаковую площадь (так как у них одинаковы основание и высота) и равные длины сторон, лежащие на сторонах квадрата (по построению).

Чтобы получить 7 многоугольников, требуемых в условии, объединим по четыре соседних треугольника.

**B.** Смотреть рисунок:




**C.** Аналогично тому, что было проделано в первом пункте данной задачи, мы умеем резать квадрат на три многоугольника равной площади с равной длиной сторон, лежащих на сторонах квадрата.

Разрежем каждый квадратный «слой» пирамиды на три таких многоугольника одинаковым образом (с точностью до подобия). Тогда в объединении всех слоёв получатся три многогранника одинакового объёма, несущие на себе одинаковое количество краски («выходящие» на стороны пирамиды одинаковой площадью своей границы).

## Задача 3. Игры

**A.** Выигрышная стратегия есть у первого игрока: превым ходомон должен положить игровую фигуру в центр прямоугольника, разделив его на две равных непересекающихся фигуры — а затем ему достаточно повторять ходы, сделанные вторым игроком в одной из фигур, симметрично в другой фигуре. Понятно, что если второй смог сделать ход, то первый тоже сможет.

**B.** Выигрышная стратегия есть у второго игрока: пока он находится сзади, первый может делать только ходы по одному шагу вперёд. Второму надо следовать за ним — и когда тот шагнёт в клетку №301 (второй будет стоять в 229-ой), перепрыгнуть через него и выиграть.

**C.** Первому надо вырезать свою букву ‘Г’ по центру верхней стороны квадрата. То, что он выигрывает после этого, доказывается перебором возможных ходов второго игрока: после каждого возможного хода первый игрок может походить так, что буква ‘L’ второго игрока не может быть вписана никуда.

## Задача 4. Моделька

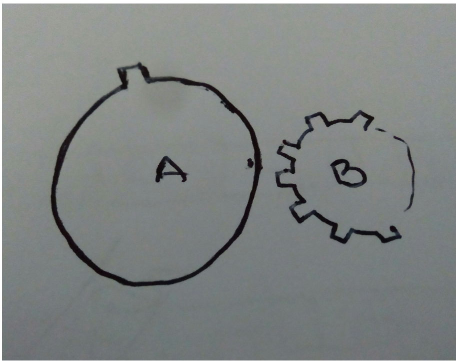
**A.** Свойства подобных фигур говорят нам, что объём фигур, подобных с коэффициентом $k$, различается в $k^3$ раз. Масса тела равна плотности вещества, умноженной на взятый его объём — поэтому она также должна уменьшаться в $k^3$ раз при уменьшении тела в $k$ раз.

В свою очередь, $1200 / 43^3 = 0.015$: 15 граммов — слишком маленький вес для модельки, но это вполне объяснимо: сделана она всё-таки грубее, чем оригинальная машина, и металл в ней сравнительно более толстый.

**B.** Мы хотели бы отметить, что длина меридиана, 40 000 километров, это **вся окружность** Земли, а не её половина. То есть Парижский меридиан проходит через две долготы: $2.33°$ в. д. и $177.67°$ з. д..

Таким образом, самолёту нужно пролететь 40 000 км, затрачивая на километр 0.54 минуты. $40000 \cdot 0.54 \div 60 = 360$ (часов).

**C.** С одной стороны, если есть «классическая» плоская система из шестерёнок, то в ней передача вращения симметрична. С другой — можно с применением некоторой креативности придумать «несимметричную» систему. Например, такую, как на рисунке:




При вращении шестерёнки $A$ она каждый оборот будет цепляться своим единственным зубом за шестерёнку $B$, и та будет вращаться. При вращении же шестерёнки $B$ в текущем положении шестерёнок она не будет касаться $A$ и передавать ей вращение.

## Задача 5. Напрасно называют север крайним

**A.** Это задача–шутка: принималось большинство ответов, хотя, например понятно, что туристическая группа на 10–градусном морозе отморозит себе половину ног, а на 20–градусном — все.

**B.** Все долготы Земного шара оказываются очень близко друг к другу около полюсов. Так что, возможно, Мюнхгаузен просто обошёл по кругу (скажем, километровому) Северный или Южный полюс.

**C.** Пусть четыре города — $B$, $C$, $D$ и $E$ расположены очень близко друг к другу — попарно на расстоянии в один километр. А пятый город — $A$ — очень далеко, в 100 километрах. Пусть больше нет никаких городов. Тогда $A$ должен быть соединён дорогой с какими-то из четырёх оставшихся городов, но ни один из тех городов не должен быть соединён с $A$.

## Задача 6. Где-то я это уже видел

**A.** Первое число в дате (оно соответствует дню в месяце) меняется от 1 до 31, а второе (соответствует месяцу) — от 1 до 12. С другой стороны, как мы знаем, часы пронумерованы от 0 до 23, а минуты — от 0 до 59.

Таким образом, днём в месяце и одновременно часом могут быть числа от 1 до 23, а месяцем и одновременно минутой — от 1 до 12. Кроме того, в каждом месяце точно есть хотя бы 23 дня.

Поэтому ответ — $23 \cdot 12 = 276$.

**B.** Давайте всегда использовать «развёрнутую» дату. Тогда любой месяц (от 1 до 12) может стоять на месте часа, а любой день (от 1 до 31) на месте минуты. Ответ — все дни в году.

**C.** Есть всего 12 букв русского алфавита, похожих на буквы английского алфавита (ГОСТ Р 50577-93):

**А**, В, **Е**, К, М, Н, **О**, Р, С, Т, Х, **У**.

Жирным мы отметили гласные — их всего 4; соответственно, согласных 8. Выбрать сочетание «гласная-согласная-согласная» можно $4 \cdot 8 \cdot 8$ способами, а «гласная-гласная-согласная» — $4 \cdot 4 \cdot 8$ способами. Вариантов для числа на номере всегда ровно 1000 — от 000 до 999.

Когда гласная одна, она может стоять на одном из трёх мест, поэтому ответ в таком случае будет равен

$$3 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 1000.$$

Когда гласных две, согласная может стоять на одном из трёх мест. Поэтому ответ —

$$3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 1000.$$

## Задача 7. Ужасный гадкий аккуратный подсчёт

**A.** Квадратов $1 \times 1$ — $4 \cdot 5 = 20$ штук. Квадратов размером $2 \times 2$ — $3 \cdot 4 = 12$ штук. Квадратов $3 \times 3$ и $4 \times 4$ — 6 и 2 соответственно. Таким образом, всего квадратов

$$20 + 12 + 6 + 2 = 40.$$

Количество прямоугольников можно посчитать более «продвинутым» образом: заметим, что прямоугольников размером $a \times b$ можно найти ровно $(4 - a + 1) \cdot (5 - b + 1)$ штук. Число $a$ меняется от 0 до 4 — отсюда $4 - a + 1$ меняется в тех же пределах. То же самое с $5 - b + 1$ — оно меняется от 0 до 5.

Отсюда можно заключить, что сумма чисел вида $(4-a+1)\cdot(5-b+1)$ при всевозможных $a$ и $b$ будет равна сумме всех чисел вида $a \cdot b$. Как посчитать сумму всех чисел вида $a \cdot b$? Заметим, что при раскрытии скобок в произведении

$$(1 + 2 + 3 + 4 + 5) \cdot (1 + 2 + 3 + 4)$$

получится сумма из всех слагаемых, которые нам нужны. Отсюда прямоугольников можно найти $15 \cdot 10 = 150$ штук.

**B.** Всего раскрасок $n!$ — в «первом» секторе может стоять $n$ цветов, в следующем — $n - 1$, и так далее. Из одной раскраски вращением круга можно получить ровно $n$ раскрасок (включая её саму) — поэтому ответ равен $\frac{n!}{n} = (n - 1)!$.

**C.** В верхней полосе может стоять один из шести имеющихся цветов. Во второй полосе — любой из шести цветов, кроме уже стоящего в первой. В нижней полосе — любой из цветов, кроме уже стоящего во второй. Таким образом, ответ — $6 \cdot 5 \cdot 5 = 150$.

## Задача 8. Фургончик

**A.** Мы знаем, что $(p_1 + 1)(p_2 + 1) = p_1p_2 + 15$. Если раскрыть скобки, получается $p_1 + p_2 = 14$. Единственные простые числа, подходящие под это условие, — 11 и 3. Это и есть ответ.

**B.** Для того, чтобы выяснить, какие ноги ещё не были переставлены, нам нужно отыскать все нечётные числа между 2 и 40, не делящиеся на 3. Это 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 25, 29, 31, 35, 37. Проверить, что мы выписали все нужные числа, несложно — достаточно посмотреть на их остатки при делении на 6: числа должны иметь вид $6k-1$ или $6k+1$ (остальные остатки от деления на 6 либо чётные, либо 3). Получилось 12 чисел — это ответ на задачу.

**C.** Будем измерять расстояние, которое проехал Саша за день, не в километрах, а в метрах. Понятно, что расстояние между A и G равно сумме со знаками $+$ или $-$ расстояний между городами, которые указаны в задаче. Осталось только заметить, что все расстояния в метрах (12000, 18000, 10500, 19500, ...) делятся на 3, а их предполагаемая сумма — 41000 — почему-то нет. Значит, в атласе дана неверная информация.

# Задачи 7 класса

## Задача 1. Современная мебельная фабрика

**A.** Закроем один из открытых ящиков, открыв тот, что через два ящика «налево» от него. Затем закроем его, открыв следующий, ещё через два ящика слева. На четвёртом шаге мы закроем два ящика, один из которых был противоположным исходному.

**B.** При первом сценарии после действий Фёдора в ведре осталось $\frac{6}{10}$ красителя, разведённого там Сергеем, так как 4 литра раствора из 10 были вылиты.

При втором сценарии Фёдор сначала выливал обычный раствор, а затем — раствор с меньшей концентрацией красителя. То есть, количества красителя в ведре до выливания двух литров и после отличались в 0.8 раз. В итоге в ведре осталось $\frac{8}{10} \cdot \frac{8}{10} = 0.64$ от исходного красителя.

Ответ: больше красителя осталось во второй день.

**C.** Экспериментальный стул с использованием нанотехнологий (одна из инноваций заключается, например, в том, что у такого стула ровно 720 ножек) падает с лестницы (в качестве испытания, разумеется). Выяснилось, что при падении он потерял в три раза меньше ножек, чем у него бы осталось, потеряй он в три раза меньше ножек, чем у него осталось сейчас. Так сколько же ножек осталось у стула?

Пусть стул потерял $t$ ножек. Составим уравнение:

$$t = \frac{1}{3}\cdot\left(\underbrace{720 - \underbrace{\frac{1}{3}\cdot\underbrace{(720-t)}_{\text{чем у него осталось сейчас}}}_{\text{в три раза меньше ножек}}}_{\text{осталось бы, потеряй он}}\right)$$

Это линейное уравнение. Его решение — $t = 180$. Это и есть ответ на данную задачу.

## Задача 2. Прогрессивное сложение

**A.** $95500 > 50095$.

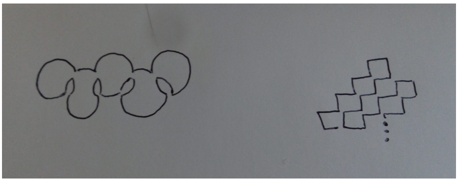
**B.** Если ни одно из трёх чисел $P$, $Q$, $R$ не является префиксом другого, то всё просто: надо отсортировать числа лексикографически и сложить в порядке «от большего к меньшему». Если одно из чисел — префикс другого (например, $P$ — префикс $Q$), то всё не так однозначно: надо сравнить их общую первую цифру и первую цирфу $Q$, следующую за вхождением $P$ в $Q$. Если второе больше, то надо ставить $Q$ перед $P$, иначе — $P$ перед $Q$.

Если $P$ — префикс $Q$, которое, в свю очередь, является префиксом $R$, или $P$ и $Q$ — различные префиксы $R$, действовать следует аналогично.

**C.** Подойдут, например, числа $a = 5$, $b = 9$: $9 \oplus c$ — это как минимум двузначное число, которое не может быть равно пяти.

## Задача 3. На салфетке

**A.** Смотреть рисунок:



**B.** Обозначим количество узлов у треугольника Серпинского степени $n$ через $T(n)$.

У треугольника степени 1 — три узла, $T(1) = 3$. Треугольник степени $k + 1$ получается из трёх треугольников степени $k$ поставновкой их друг на друга — при этом три пары узлов (посередине сторон нового треугольника) склеиваются в просто три узла. Таким образом,

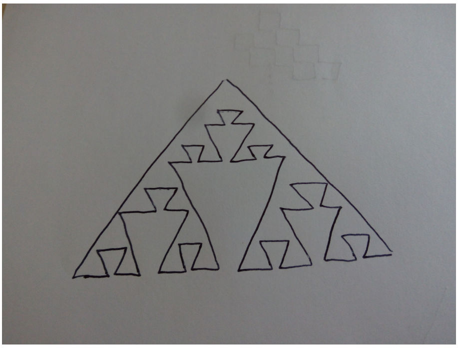
$$\begin{aligned} &T(k) = 3T(k-1) - 3 = \\ &= 3(3T(k-2) - 3) - 3 = \ldots = \\ &= 3^{k-1} \cdot T(1) - 3^{k-1} - 3^{k-2} - \ldots - 3 = \\ &= 3^k - 3^{k-1} - 3^{k-2} - \ldots - 3 = \\ &= 3^k - \frac{3^k - 1}{3 - 1} = \frac{3^k + 1}{2}. \end{aligned}$$

Посчитать количество отрезков в наклонном квадрате и того проще: они образуют $2n$ «лесенок», в каждой из которых по $2n$ отрезков. Поэтому ответом будет число $4n^2$.

**C.** Научиться рисовать треугольник Серпинского, не отрывая пера от бумаги, можно последовательно: сначала первую степень, потом вторую, потом третью...

Будем делать так: сначала, идя по нижней стороне, рисуем все «внутренности» треугольника, а потом «замыкаем» его двумя верхними сторонами. При этом «внутренности» треугольника степени $n+1$ — это трижды «внутренности» треугольника степени $n$.

Таким образом получится изображение треугольника степени 4:



а также любой другой степени, по аналогии.

## Задача 4. Не модельная, а модальная!

Пусть есть событие $X$, которое может происходить или не происходить в зависимости от того, какой сегодня день. Например, событие $X =$ «сегодня суббот случается раз в семь дней, а событие «сегодня я смотрел на часы» — каждый день.

**A.** Фраза $\Box\triangledown X$ означает дословно следующее: для каждого дня, начиная с сегодняшнего, в какой-то момент после него случится событие $X$. То есть, из какого дня вперёд ни посмотри — там, в будущем, обязательно хотя бы единожды случится событие $X$. На самом деле эта фраза эквивалентна следующей: «в бесконечное количество дней после сегодняшнего произойдёт событие $X$».

Очевидно, что $\Box\triangledown$ сегодня суббота — верно: после любого дня когда-то в будущем обязательно наступит суббота.

**B.** Докажем, что из первой фразы следует вторая. Действительно: первая утверждает, что $\triangledown\Box X$ верно для любого дня, начиная с сегодняшнего — в том числе и для сегодняшнего.

Теперь докажем, что из второй фразы следует первая. Вторая фраза означает: начиная с какого-то дня в будущем (назовём его $\boldsymbol{D}$) каждый день будет происходить событие $X$. Зная это, нам нужно доказать $\Box\triangledown\Box X$: для каждого дня $d$ указать такой день после него, начиная с которого $X$ выполняется каждый день.

Так вот если $d$ раньше $\boldsymbol{D}$, то $\boldsymbol{D}$ подойдёт в качестве искомого дня. Если же $\boldsymbol{D}$ раньше $d$, то после самого $d$ событие $X$ выполняется каждый день — возьмём $d$ в качестве искомого дня.

**C.** Легко убедиться, что $\Box X$, $\triangledown X$, $\Box\triangledown X$ и $\triangledown\Box X$ — попарно неэквивалентные фразы. Пусть $X_1$ — «сегодня не 1 января 2000 года», $X_2$ — «сегодня у Пети Иванова последний звонок в школе», $X_3$ — «сегодня День рождения Пети Иванова», $X_4$ — «Пете Иванову уже исполнилось 18 лет»; достаточно проверить, что все $X_i$ делают верными разные наборы утверждений.

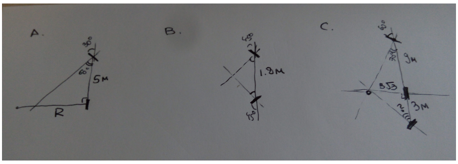
Теперь докажем, что любая фраза с более длинной приставкой из $\Box$ и $\triangledown$ эквивалентна одной из приведённых ранее. Понятно, что $\Box\Box$ и $\triangledown\triangledown$ в любом месте приставки можно заменить на соответственно $\Box$ и $\triangledown$ без изменения смысла фразы. Значит, мы можем рассматривать только фразы, в приставке которых идёт не более одного квадратика / треугольничка подряд.

Согласно пункту B, $\Box\triangledown\Box$ можно заменить на $\triangledown\Box$ без изменения смысла фразы. Аналогично, $\triangledown\Box\triangledown$ можно заменить на $\Box\triangledown$. Поэтому любую приставку мы можем сократить до содержащей не более двух символов — а все такие мы уже перечислили.

## Задача 5. Без пробуксовки

**A.** Машина ездит по окружности вокруг точки, где пересекаются линии, перпендикулярные переднему и заднему колёсам, проходящие через их центр. Эти линии вместе с отрезком между колёсами машины образуют прямоугольный треугольник (см. рисунок), один из углов которого — 60 градусов, а один из катетов — 5 м.

Тогда $R = 5\sqrt{3}$ (отношения сторон прямоугольного треугольника с углом $60^\circ$ — известные величины).




**B.** Теперь нас интересует высота прямоугольного равнобедренного треугольника с основанием 1.8 м. Она равна 0.9 м. То есть, погрузчик ездит вокруг точки, расположенной на 0.9 м левее, чем середина его левого борта.

**C.** Аналогично первому пункту данной задачи, найдём расстояние от не поворачивающегося колеса до точки, вокруг которой ездит автобус. Оно равно $\frac{9}{\sqrt{3}} = 3\sqrt{3}$: опять же, мы, зная один из катетов прямоугольного треугольника с углом $60^\circ$, ищем другой.

Теперь заметим, что среднее и заднее колёса, а также точка, вокруг ездит автобус, образуют прямоугольный треугольник с катетами 3 и $3\sqrt{3}$ метра. Значит, его углы — 30 и 60 градусов. Отсюда заднее колесо нужно повернуть на 30 градусов.

## Задача 6. Как провожают транспортёры...

**A.** Если наблюдатель движется со скоростью $\frac{1}{3}v$ навстречу транспортёру, собственная скорость которого равна $\frac{1}{6}v$, их скорость сближения равна $\frac{1}{2}v$ — то есть, для наблюдателя этот транспортёр выглядит всего лишь в два раза медленннее, чем исходный.

В такой ситуации взрослый питон проехал бы мимо наблюдателя за 28 секунд. Но питон–детёныш короче, и для его проезда понадобится $28 \cdot \frac{3}{4} = 21$ секунда.

**B.** Чтобы не обманываться длинами кубиков (как это сделало большинство участников олимпиады), мы на время заменим их на передние их точки относительно движения транспортёра. Расстояние между этими точками будет равно 15 сантиметров.

При попадании на более быстрый транспортёр расстояние между этими точками увеличится вдвое и составит 30 см. Чтобы получить расстояние между кубиками, из этой величины надо вычесть 5 сантиметров — получится 25 см.

Распространённая ошибка заключалась в том, что участники олимпиады умножали на 2 расстояние между концом первого кубика и началом второго. Это неправомерно, потому что две названные точки играют разную роль, и умножать расстояние между ними на 2 при решении задачи — это как мерить половину прыгунов в длину по дальней точке касания, а половину — по ближней.

**C.** Очевидно, что оптимальное деление песка между транспортёрами происходит тогда, когда они заканчивают работу одновременно: иначе у опустевшего транспортёра остаётся ресурс, когда он простаивает, а второй транспортёр работает вместо двоих.

Поэтому песок нужно поделить в отношении $2 : 1$, отдав в два раза больше в два раза более быстрому транспортёру. Получится 400 кг первому и 800 кг второму.

## Задача 7. Одновременное вычитание

**A.** Возьмём пять чисел: 0, 0, 0, 0, 6. Очевидно, для них мы не можем добиться того, чего просят в задаче, потому что по факту можем уменьшать только одно число.

**B.** *Примечание автора:* эта задача на самом деле о том, что первая группа гомологий плоскости равна $\{0\}$. *:)*

Рассмотрим точку с весом, наибольшим по модулю. Не умаляя общности предположим, что её вес положителен. Так как сумма весов всех точек равна нулю, найдутся какие-то точки с отрицательным весом, суммарный вес которых «перевести» нашу по модулю. Соединим выбранную точку с найденными с помощью кривых так, чтобы (а) вес выбранной точки обратился после этого в ноль (б) модули весов найденных точек не увеличились.

Таким образом, (а) модули весов всех точек не увеличились (б) количество точек с нулевым весом увеличилось хотя бы на одну. На каждом шаге, при повторении процедуры, описанной в предыдущем абзаце, эти полуинварианты будут сохраняться — поэтому мы добьёмся ситуации, когда вес всех точек окажется нулевым (сумма весов всех точек сохраняется на каждом шаге).

**C.** Возьмём дорогу с наименьшим весом и пустим по ней машину, на номере которой написан вес этой дороги. Когда машина въедет в какой-то город, она сможет из него выехать: её номер равен наименьшему среди всех весов дорог, а сумма входящих в город равна сумме исходящих — поэтому из города выходит дорога весом не меньше, чем число на номере машины.

Так машина будет ездить по городам, пока не окажется в городе, в котором она уже побывала. Тогда возьмём все дороги, по которым машина ездила между двумя посещениями этого города, и вычтем из их веса число на номере машины — и заставим машину ездить по кругу через эти города. При этом сумма весов всех дорог строго уменьшится.

Опять возьмём дорогу, вес которой на этот раз наименьший среди всех, и повторим описанную процедуру. Пока наименьший среди всех вес дороги не равен нулю (то есть, пока есть дороги с положительным весом), будем повторять эту процедуру. Очевидно, в итоге оставшиеся веса всех дорог обратятся в ноль.

## Задача 8. Сетки на плоскости

**A.** Заметим, что рёбра на пути можно менять местами без изменения начала, конца и длины пути. Заметим также, что по рёбрам каждого из трёх направлений в сетке кратчайший путь ходит максимум в одну сторону, потому что иначе «подвинем» противоположно направленные проходы друг к другу и сократим их, укоротив путь.

Пусть путь использовал все три сорта рёбер в сетке. Тогда мы переставим его рёбра так, что сначала он будет идти в одну сторону по рёбрам первого сорта, затем по рёбрам второго, затем по рёбрам третьего.

Теперь возьмём треугольник и проставим на его сторонах те направления, в которых мы ходим по рёбрам соответствующей ориентации. Получилось три вектора — заметим теперь, что один из них равен сумме других!

Если кратчайший путь действительно использовал все три ориентации рёбер, то можно переставить рёбра в этом пути так, чтобы проход по двум подряд идущим рёбрам превратить в проход по одному. То есть, на такой уж путь и кратчайший.

**B.** Окуню достаточно перегрызть три узла около угла сетки.

**C.** Сумма углов четырёхугольника равна $360^\circ$. Искомое замощение плоскости получится, если складывать четырёхугольники так, чтобы в одной вершине сходились четыре угла соседних четырёхугольников, и чтобы два соседних четырёхугольника всегда соприкасались по соответственной стороне соответственными вершинами.

## Задача 9. Ужасный гадкий аккуратный подсчёт

**A.** Всего раскрасок $n!$ — в «первом» секторе может стоять $n$ цветов, в следующем — $n-1$, и так далее. Из одной раскраски вращением круга можно получить ровно $n$ раскрасок (включая её саму) — поэтому ответ равен $\frac{n!}{n} = (n-1)!$.

**B.** В верхней полосе может стоять один из шести имеющихся цветов. Во второй полосе — любой из шести цветов, кроме уже стоящего в первой. В нижней полосе — любой из цветов, кроме уже стоящего во второй. Таким образом, ответ — $6 \cdot 5 \cdot 5 = 150$.

**C.** Эта задача чуть сложнее пункта А: нужно поделить 6! на число вращений куба. Сколько же их?

Возьмём «верхнюю» грань куба. При вращении она может оказаться на месте одной из шести граней (включая себя). Теперь посмотрим на одну из граней, соседних с ней. При вращении та может перейти в одну из четырёх граней, соседних с той, на месте которой оказалась верхняя. Заметим, что положение этих двух граней (для которого есть ровно 24 варианта) однозначно определяет положение всех остальных. Поэтому ответ на задачу — $\frac{6!}{24} = 30$.

## Задача 10. Средние арифметические

**A.** Придумайте четыре набора по пять чисел каждый так, чтобы максимум средних арифметических этих наборов был больше, чем среднее арифметическое наибольших чисел этих наборов.

1, 2, 3, 4, 5; 1, 2, 3, 4, 5; 1, 2, 3, 4, 5; 10001, 10002, 10003, 10004, 10005.

Максимум средних равен 10003, а среднее арифметическое максимумов — 255.

**B.** После разбиения детей на классы у нас будет четыре «самых низких» ребёнка, по одному на класс. Расставим их по росту. Одним из них точно будет тот, чей рост — 101 сантиметр. Рост второго будет не больше 131, третьего — не больше 161, четвёртого — не больше 191, потому что между этими отметками вмещается ровно по тридцать детей, и если не все они будут в одном классе, то более высокий самый низкий ребёнок окажется среди них.

Таким образом, у нас есть оценка сверху на величину, которую мы пытаемся максимизировать — $\frac{1}{4}(101 + 131 + 161 + 191)$. Попробуем добиться того, чтобы среднее арифметическое четырёх ростов было именно таким. Для этого можно разбить детей на классы «подряд» — первые тридцать в первый класс, вторые тридцать — во второй, ...

Так и сделаем.

**C.** Заметим, что какое разбиение детей на классы ни возьми, — сумма средних арифметических ростов детей в классах будет постоянна (и равна 362 см). Значит, минимум наибольший, когда все средние арифметические совпадают. Значит, нужно составлять классы, симметричные относительно 90,5. Например, в первый класс отправить первые десять детей и последние десять, а во второй — вторую и предпоследнюю десятки детей.

# Задачи 8 класса

## Задача 1. У магазина

**A.** Понятно, что Фёдор и Кирилл увеличивают все числа в одинаковое число раз. И „144“, названное Фёдором, есть квадрат этого числа (так как он назвал то, во сколько раз увеличивает всё Кирилл, сам увеличив это число). Тогда оба продавца умножают всё на 12.

Соответственно, учебник стоит $43200 \div 144 = 300$ рублей — так как его цена прошла через уста, опять же, обоих продавцов.

**B.** Делимость на 99 значит делимость на 9 и на 11. Восстановить стёртую цифру можно почти однозначно, посчитав сумму оставшихся цифр и найдя остаток от деления её на 9. Проблема может возникнуть, если сумма оставшихся на номере цифр делится на 9 — тогда непонятно, 0 нам ставить на пустое место или 9.

Признак делимости на 11 говорит нам, что знакопеременная сумма цифр числа должна делиться на 11. Заметим, что при постановке цифр 9 и 0 на одно и то же место не может оказаться так, что оба результата будут делиться на 11. Поэтому получится однозначный ответ.

**C.** То, как происходит торг между продавцом и покупателем, на самом деле, повторяет работу алгоритма Евклида. Алгоритм Евклида всегда завершается — значит и торг завершится.

При этом на каждом шаге торга хотя бы одна из названных цен уменьшается хотя бы на 1, поэтому в любой момент времени количество шагов торга оценивается сверху суммой цен, называемых покупателем и продавцом. Поэтому количество шагов всегда будет строго меньше суммы текущих чисел.

Пусть изначально названы цены $a$ и $b = a + t$. Тогда на следующем шаге торга будут названы цены $a$ и $t$. Тогда количество шагов торга строго меньше, чем

$$a + \underbrace{t + 1}_{\substack{\text{один шаг}\\ \text{уже сделан}}} = b + 1 \le 21.$$

Торг с 20 шагами легко придумать: пусть изначально были названы цены 1 и 20.

## Задача 2. Ужасный гадкий аккуратный подсчёт

**A.** Всего раскрасок $n!$ — в «первом» секторе может стоять $n$ цветов, в следующем — $n - 1$, и так далее. Из одной раскраски вращением круга можно получить ровно $n$ раскрасок (включая её саму) — поэтому ответ равен $\frac{n!}{n} = (n-1)!$.

**B.** В верхней полосе может стоять один из шести имеющихся цветов. Во второй полосе — любой из шести цветов, кроме уже стоящего в первой. В нижней полосе — любой из цветов, кроме уже стоящего во второй. Таким образом, ответ — $6 \cdot 5 \cdot 5 = 150$.

**C.** Эта задача чуть сложнее пункта A: нужно поделить 6! на число вращений куба. Сколько же их?

Возьмём «верхнюю» грань куба. При вращении она может оказаться на месте одной из шести граней (включая себя). Теперь посмотрим на одну из граней, соседних с ней. При вращении та может перейти в одну из четырёх граней, соседних с той, на месте которой оказалась верхняя. Заметим, что положение этих двух граней (для которого есть ровно 24 варианта) однозначно определяет положение всех остальных. Поэтому ответ на задачу — $\frac{6!}{24} = 30$.

## Задача 3. Не модельная, а модальная!

Пусть есть событие $X$, которое может происходить или не происходить в зависимости от того, какой сегодня день. Например, событие $X =$ «сегодня суббот случается раз в семь дней, а событие «сегодня я смотрел на часы» — каждый день.

**A.** Фраза $\Box\triangledown X$ означает дословно следующее: для каждого дня, начиная с сегодняшнего, в какой-то момент после него случится событие $X$. То есть, из какого дня вперёд ни посмотри — там, в будущем, обязательно хотя бы единожды случится событие $X$. На самом деле эта фраза эквивалентна следующей: «в бесконечное количество дней после сегодняшнего произойдёт событие $X$».

Очевидно, что $\Box\triangledown$ сегодня суббота — верно: после любого дня когда-то в будущем обязательно наступит суббота.

**B.** Докажем, что из первой фразы следует вторая. Действительно: первая утверждает, что $\triangledown\Box X$ верно для любого дня, начиная с сегодняшнего — в том числе и для сегодняшнего.

Теперь докажем, что из второй фразы следует первая. Вторая фраза означает: начиная с какого-то дня в будущем (назовём его $\boldsymbol{D}$) каждый день будет происходить событие $X$. Зная это, нам нужно доказать $\Box\triangledown\Box X$: для каждого дня $d$ указать такой день после него, начиная с которого $X$ выполняется каждый день.

Так вот если $d$ раньше $\boldsymbol{D}$, то $\boldsymbol{D}$ подойдёт в качестве искомого дня. Если же $\boldsymbol{D}$ раньше $d$, то после самого $d$ событие $X$ выполняется каждый день — возьмём $d$ в качестве искомого дня.

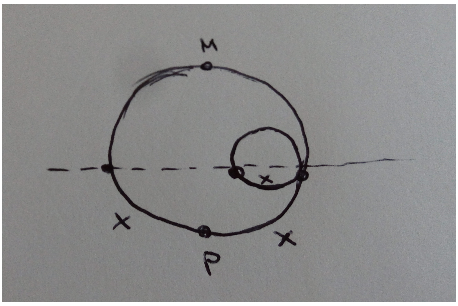
**C.** Легко убедиться, что $\Box X$, $\triangledown X$, $\Box\triangledown X$ и $\triangledown\Box X$ — попарно неэквивалентные фразы. Пусть $X_1$ — «сегодня не 1 января 2000 года», $X_2$ — «сегодня у Пети Иванова последний звонок в школе», $X_3$ — «сегодня День рождения Пети Иванова», $X_4$ — «Пете Иванову уже исполнилось 18 лет»; достаточно проверить, что все $X_i$ делают верными разные наборы утверждений.

Теперь докажем, что любая фраза с более длинной приставкой из $\Box$ и $\triangledown$ эквивалентна одной из приведённых ранее. Понятно, что $\Box\Box$ и $\triangledown\triangledown$ в любом месте приставки можно заменить на соответственно $\Box$ и $\triangledown$ без изменения смысла фразы. Значит, мы можем рассматривать только фразы, в приставке которых идёт не более одного квадратика / треугольничка подряд.

Согласно пункту B, $\Box\triangledown\Box$ можно заменить на $\triangledown\Box$ без изменения смысла фразы. Аналогично, $\triangledown\Box\triangledown$ можно заменить на $\Box\triangledown$. Поэтому любую приставку мы можем сократить до содержащей не более двух символов — а все такие мы уже перечислили.

## Задача 4. Катим круг

**A.** «Расправим» большую окружность — заметим, что дуга, составляющая её половину, равна по длине окружности круга, который мы катим. Это значит, что, проехав эту дугу, круг снова коснётся её отмеченной точкой.




**B.** Длина дуги круга между точкой его касания с окружностью и отмеченной точкой равна длине дуги окружности между точкой её касания с кругом и точкой $P$. Обозначим эту длину через $x$. Отложим дугу длиной $x$ налево от точки $P$ (смотреть рисунок). Отрезок, соединяющий точку касания круга с окружностью и конец новой дуги, будет горизонтальным.

При этом дуга длины $x$ на круге получается из дуги длины $x$ на окружности гомотетией с коэффициентом $\frac{1}{2}$ и центром в точке касания круга с окружностью: эти дуги отложены из одной точки на окружностях, радиусы которых отличаются в два раза.

Горизонтальный отрезок переходит при гомотетии в горизонтальный отрезок — поэтому концы дуги на квадрате также лежат на одной горизонтальной прямой.

**C.** В силу того же факта, что дуга на квадрате получается из дуги на окружности гомотетией с коэффициентом $\frac{1}{2}$, её конец будет находится ровно посередине между концами большой дуги — то есть, ровно над точкой $P$, потому как большая дуга изначально строилась симметричной.

## Задача 5. Средние арифметические

**A.** Придумайте четыре набора по пять чисел каждый так, чтобы максимум средних арифметических этих наборов был больше, чем среднее арифметическое наибольших чисел этих наборов.

1, 2, 3, 4, 5; 1, 2, 3, 4, 5; 1, 2, 3, 4, 5; 10001, 10002, 10003, 10004, 10005.

Максимум средних равен 10003, а среднее арифметическое максимумов — 255.

**B.** После разбиения детей на классы у нас будет четыре «самых низких» ребёнка, по одному на класс. Расставим их по росту. Одним из них точно будет тот, чей рост — 101 сантиметр. Рост второго будет не больше 131, третьего — не больше 161, четвёртого — не больше 191, потому что между этими отметками вмещается ровно по тридцать детей, и если не все они будут в одном классе, то более высокий самый низкий ребёнок окажется среди них.

Таким образом, у нас есть оценка сверху на величину, которую мы пытаемся максимизировать — $\frac{1}{4}(101 + 131 + 161 + 191)$. Попробуем добиться того, чтобы среднее арифметическое четырёх ростов было именно таким. Для этого можно разбить детей на классы «подряд» — первые тридцать в первый класс, вторые тридцать — во второй, ...

Так и сделаем.

**C.** Заметим, что какое разбиение детей на классы ни возьми, — сумма средних арифметических ростов детей в классах будет постоянна (и равна 362 см). Значит, минимум наибольший, когда все средние арифметические совпадают. Значит, нужно составлять классы, симметричные относительно 90,5. Например, в первый класс отправить первые десять детей и последние десять, а во второй — вторую и предпоследнюю десятки детей.

## Задача 6. Игры

**A.** Выигрышная стратегия есть у первого игрока: превым ходомон должен положить игровую фигуру в центр прямоугольника, разделив его на две равных непересекающихся фигуры — а затем ему достаточно повторять ходы, сделанные вторым игроком в одной из фигур, симметрично в другой фигуре. Понятно, что если второй смог сделать ход, то первый тоже сможет.

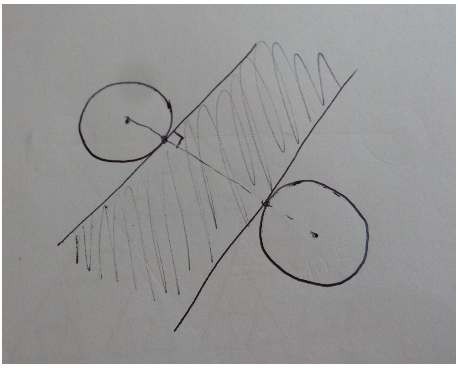
**B.** Выигрышная стратегия есть у второго игрока: пока он находится сзади, первый может делать только ходы по одному шагу вперёд. Второму надо следовать за ним — и когда тот шагнёт в клетку №301 (второй будет стоять в 229-ой), перепрыгнуть через него и выиграть.

**C.** Первому надо вырезать свою букву ‘Г’ по центру верхней стороны квадрата. То, что он выигрывает после этого, доказывается перебором возможных ходов второго игрока: после каждого возможного хода первый игрок может походить так, что буква ‘L’ второго игрока не может быть вписана никуда.

# Задача 7. Об одной задаче классификации

**A.** Очевидно, что ширина этой полосы не может быть больше, чем расстояние между самыми близкими друг к другу точками кругов. Сделаем ширину полосы равной этому расстоянию.

Для этого соединим центры кругов отрезком и построим касательные к кругам в в точках пересечения отрезка с их границей. Они будут параллельны и образуют полосу максимально допустимой ширины (смотреть рисунок).



**B.–C.** Сработает похожий метод: надо найти ближайшие друг к другу точки квадратов и соединить их отрезком — искомая полоса получится, если провести к данному отрезку перпендикуляры в его концах.

С одной стороны, её ширина будет максимально допустимой, потому что она будет равна расстоянию между ближайшими точками квадратов, а большая ширина запрещена.

С другой стороны, ни одна точка из квадратов не попадёт внутрь этой полосы, потому что квадрат — выпуклый многоугольник. В силу этого он либо лежит по одну сторону от прямой, проходящей через точку его границы, либо лежит по обе стороны, и с каждой из сторон от прямой находится часть стороны, на которой лежала точка, через которую мы проводили прямую.

Но тогда на части этой стороны, лежащей внутри полосы, найдётся точка, которая ближе к другому концу отрезка, лежащем на другом краю полосы, что противоречит построению полосы.

## Задача 8. Одновременное вычитание

**A.** Возьмём пять чисел: 0, 0, 0, 0, 6. Очевидно, для них мы не можем добиться того, чего просят в задаче, потому что по факту можем уменьшать только одно число.

**B.** *Примечание автора:* эта задача на самом деле о том, что первая группа гомологий плоскости равна $\{0\}$. *:)*

Рассмотрим точку с весом, наибольшим по модулю. Не умаляя общности предположим, что её вес положителен. Так как сумма весов всех точек равна нулю, найдутся какие-то точки с отрицательным весом, суммарный вес которых «перевести» нашу по модулю. Соединим выбранную точку с найденными с помощью кривых так, чтобы (а) вес выбранной точки обратился после этого в ноль (б) модули весов найденных точек не увеличились.

Таким образом, (а) модули весов всех точек не увеличились (б) количество точек с нулевым весом увеличилось хотя бы на одну. На каждом шаге, при повторении процедуры, описанной в предыдущем абзаце, эти полуинварианты будут сохраняться — поэтому мы добьёмся ситуации, когда вес всех точек окажется нулевым (сумма весов всех точек сохраняется на каждом шаге).

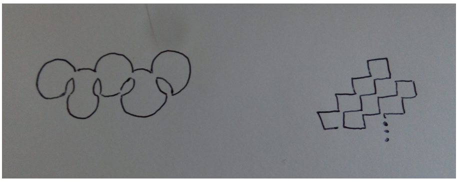
**C.** Возьмём дорогу с наименьшим весом и пустим по ней машину, на номере которой написан вес этой дороги. Когда машина въедет в какой-то город, она сможет из него выехать: её номер равен наименьшему среди всех весов дорог, а сумма входящих в город равна сумме исходящих — поэтому из города выходит дорога весом не меньше, чем число на номере машины.

Так машина будет ездить по городам, пока не окажется в городе, в котором она уже побывала. Тогда возьмём все дороги, по которым машина ездила между двумя посещениями этого города, и вычтем из их веса число на номере машины — и заставим машину ездить по кругу через эти города. При этом сумма весов всех дорог строго уменьшится.

Опять возьмём дорогу, вес которой на этот раз наименьший среди всех, и повторим описанную процедуру. Пока наименьший среди всех вес дороги не равен нулю (то есть, пока есть дороги с положительным весом), будем повторять эту процедуру. Очевидно, в итоге оставшиеся веса всех дорог обратятся в ноль.

## Задача 9. На салфетке

**A.** Смотреть рисунок:



**B.** Обозначим количество узлов у треугольника Серпинского степени $n$ через $T(n)$.

У треугольника степени 1 — три узла, $T(1) = 3$. Треугольник степени $k+1$ получается из трёх треугольников степени $k$ поставновкой их друг на друга — при этом три пары узлов (посередине сторон нового треугольника) склеиваются в просто три узла. Таким образом,

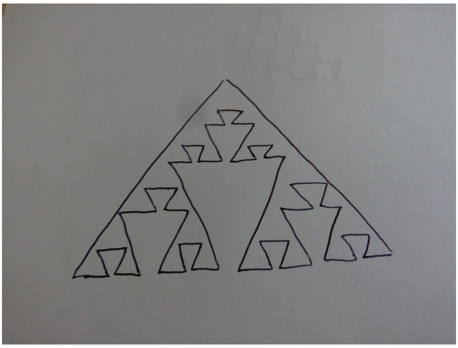
$$\begin{aligned} &T(k) = 3T(k-1) - 3 = \\ &= 3(3T(k-2) - 3) - 3 = \ldots = \\ &= 3^{k-1} \cdot T(1) - 3^{k-1} - 3^{k-2} - \ldots - 3 = \\ &= 3^k - 3^{k-1} - 3^{k-2} - \ldots - 3 = \\ &= 3^k - \frac{3^k - 1}{3-1} = \frac{3^k + 1}{2}. \end{aligned}$$

Посчитать количество отрезков в наклонном квадрате и того проще: они образуют $2n$ «лесенок», в каждой из которых по $2n$ отрезков. Поэтому ответом будет число $4n^2$.

**C.** Научиться рисовать треугольник Серпинского, не отрывая пера от бумаги, можно последовательно: сначала первую степень, потом вторую, потом третью…

Будем делать так: сначала, идя по нижней стороне, рисуем все «внутренности» треугольника, а потом «замыкаем» его двумя верхними сторонами. При этом «внутренности» треугольника степени $n+1$ — это трижды «внутренности» треугольника степени $n$.

Таким образом получится изображение треугольника степени 4:



а также любой другой степени, по аналогии.

## Задача 10. Необходимости и достаточности

**A.** Скорость мышки равна $10 \cdot 35 = 350$ см/с, а скорость кошки — $55 \cdot 9 = 495$ см/с. Несомненно, кошка быстрее.

**B.** Сколько вылетов нужно сделать винтовому самолёту? Каждого Йожина надо осыпать трижды — получается 300 осыпаний. Каждый вылет даёт два осыпания — поэтому нужно 150.

А реактивному? Аналогичным образом получаем $100 \cdot 8 \div 5 = 160$ вылетов. Таким образом, винтовой самолёт на 10 вылетов эффективнее.

**C.** Обозначим через $x_k$ массу еды, которая была в наличии у велосипедистов *перед* $k$–ым обедом. Мы знаем, что $x_{31} = 0$, и ищем $x_1$. Давайте выразим $x_k$ через $x_k + 1$. В соответствии с условием задачи,

$$x_k = \underbrace{0.1 \cdot x_k + 2}_{\text{съедят за } k\text{–ым обедом}} + x_{k+1}.$$

Откуда

$$x_k = \frac{20}{9} + \frac{10}{9} x_{k+1};$$

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{20}{9} + \frac{10}{9} \cdot \frac{20}{9} + \left(\frac{10}{9}\right)^2 \cdot x_3 = \\
&= \frac{20}{9} + \frac{10}{9} \cdot \frac{20}{9} + \ldots + \left(\frac{10}{9}\right)^{28} \cdot \frac{20}{9} = \\
&= \frac{20}{9} \cdot \frac{\left(\frac{10}{9}\right)^{29} - 1}{\frac{10}{9} - 1} \text{ — это ответ на задачу.}
\end{aligned}$$

## Задача 11. Рукопожатия

**A.** Давайте «расклеим» восьмёрку, превратив её в обычный круглый хоровод — тогда существо, стоящее в центре восьмёрки, «продублируется». Если оно было крабом, то получится хоровод из 19 крабов и 17 пауков; в противном случае — 18 крабов и 18 пауков. Если в круговом хороводе крабов больше, чем пауков, то какие-то два краба неизбежно будут держаться за лапы, что запрещено.

Отсюда можно заключить, что в центре стоял паук. Придумать хоровод, соответствующий условию, с пауком в центре не представляет ни малейшего труда.

**B.** Могло оказаться так, что ровно один человек в компании выиграл машину. Построим соответствующий пример. Возьмём «победителя» — у него есть пять друзей. У каждого из них есть ещё по четыре друга (кроме выигравшего машину), пусть все эти друзья различны. $1 + 5 + 4 \cdot 5$ — у нас получилось 26 человек, от каждого из которых не более чем два рукопожатия до выигравшего машину человека.

Однако, для того чтобы довести пример до конца, нам надо установить дружеские связи между людьми, у которых их пока меньше 5 — а именно, между теми, от кого до победителя лотереи два рукопожатия (их 20 человек). Каждому из них нужно «изобрести» ещё по 4 друга.

Поступим просто: поставим эти 20 человек по кругу в произвольном порядке и назначим друзьями каждого двух его правых соседей и двух его левых соседей. Задача решена.

**C.** Пусть внутренних рейсов в Авиаландии ровно $M$, а международных из неё — ровно $N$. Каждый внутренний рейс имеет в Авиаландии два «конца», а каждый международный — только один. Всего в города Авиаландии прибывает $5 \cdot 6 = 30$ рейсов. Получаем

$2 \cdot M + N = 30.$

Отсюда $N$ должно быть чётным числом (так как $2 \cdot N$ — чётное).

## Задача 12. Прогрессивное сложение

**A.** $95500 > 50095$.

**B.** Если ни одно из трёх чисел $P$, $Q$, $R$ не является префиксом другого, то всё просто: надо отсортировать числа лексикографически и сложить в порядке «от большего к меньшему». Если одно из чисел — префикс другого (например, $P$ — префикс $Q$), то всё не так однозначно: надо сравнить их общую первую цифру и первую цирфу $Q$, следующую за вхождением $P$ в $Q$. Если второе больше, то надо ставить $Q$ перед $P$, иначе — $P$ перед $Q$.

Если $P$ — префикс $Q$, которое, в свю очередь, является префиксом $R$, или $P$ и $Q$ — различные префиксы $R$, действовать следует аналогично.

**C.** Подойдут, например, числа $a = 5$, $b = 9$: $9 \oplus c$ — это как минимум двузначное число, которое не может быть равно пяти.

# Задачи 2017 года

## Задачи 4 класса

### Задача 1. Обаятельный домовёнок

**A.** $6 - 4 = 2$, отсюда Кузя догоняет издателей со скоростью 2 статьи в день. На то, чтобы нагнать 40 статей, у него уйдёт 20 дней.

**B.** Площадь квадратика $2 \times 2$ в 4 раза больше площади квадратика $1 \times 1$, поэтому на него уходит в 4 раза больше чернил. Значит, на том же картридже Кузя сможет напечатать $10000 \div 4 = 2500$ квадратиков $2 \times 2$.

**C.** Среди гвоздиков почти каждого горизонтального ряда как минимум на двух должны быть сделаны повороты: ведь нитка входит и выходит из этого ряда. Однако найдутся два горизонтальных ряда гвоздиков, где нитка начинается или кончается — поэтому количество поворотов нитки может быть оценено сверху числом $2 \cdot 5 + 2 = 12$.

Протянуть нитку, сделав 12 поворотов, просто: можно, например, стартовать из верхней левой клетки и пойти до конца направо, потом, сделав два поворота, спуститься на ряд вниз и пойти налево — и так далее.

### Задача 2. Велопоход

**A.**

$$t = \frac{S}{v} = \frac{400\,\text{м}}{10\,\text{км/ч}} = \frac{0.4\,\text{км}}{10\,\text{км/ч}} = \frac{1}{25}\ \text{ч}.$$

Это, в свою очередь, равно 2.4 минутам.

**B.** Остановки занимают половину времени Дмитрия Григорьевича, поэтому его средняя скорость будет в два раза меньше его скорости в движении — и равна 17 км/ч. Это, тем не менее, выше средней скорости Полины, которая равна 15 км/ч. Поэтому Д. Г. быстрее

**C.** Подъём в горку и спуск с неё имеют одинаковую длину. Степан на гоночном велосипеде въезжает в горку со скоростью 10 км/ч, а спускается со скоростю 40 км,ч. А Пётр на тракторе едет с постоянной скоростью 17 км,ч. Кто из них быстрее преодолеет подъём и спуск?

Пусть длина подъёма в горку равна $x$ километров. Тогда время, за которое Степан преодолеет подъём и спуск, в часах равно

$$\frac{x}{10} + \frac{x}{40} = \frac{5x}{40} = \frac{x}{8}.$$

Время же, которое потратит Пётр, равно $\frac{2x}{17}$ — и нам нужно сравнить эти два числа. Посмотрим на их отношение:

$$\frac{x \cdot 17}{8 \cdot 2x} = \frac{17}{16} > 1.$$

То есть, Пётр всё-таки будет ехать дольше.

## Задача 3. Буквы на белом листе

**A.** ‘Б’ можно превратить в В;

‘Г’ можно превратить в Б;

‘Е’ можно превратить в В;

‘Л’ можно превратить в Д;

‘С’ можно превратить в О.

Остальные буквы (в их «типографском» начертании) ни во что превратить нельзя. Однако эта задача оставляет большую свободу трактовок, поэтому оценивалась в пользу участника.

**B.** Если лист бесконечный, то это буквы ‘В’ и ‘Ф’, имеющие в своём составе два «кольца». Если же мы рассматриваем обычный лист бумаги А4, то на нём можно написать букву ‘Ж’, распространив её до краёв листа — и она поделит его на 6 областей.

**C.** От двух областей (когда они написаны одна поверх другой) — до 9, когда они пересекаются в двух точках и касаются краёв листа.

## Задача 4. Делить и резать, резать и делить

**A.** Нужно провести две диагонали — четыре треугольника, на которые они поделят прямоугольник, будут иметь равную площадь.

**B. Здесь должна быть картинка.**

**C.** Проведём в круге два диаметра под углом $45^\circ$. Каждый из них поделить круг на две равных части, однако вдвоём они делят круг на 4 части, площади которых равны $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{8}$ площади круга.

## Задача 5. О, как мы далеки!

**A.** Не умаляя общности, пусть остановка $A$ находится левее $D$. Тогда остановка $C$ — либо слева от $A$, либо справа от $D$.

Если остановка $C$ слева от $A$, то она находится на расстоянии 4 от неё. Но тогда нам некуда поставить $B$ так чтобы $AB = 4$, $BC = 2$. Отсюда $C$ находится справа, и $AC = 6$.

**B.** Вдоль прямой аллеи растут четыре дерева. Расстояния между соседними равны 63, 14 и 84 метра соответственно. Сколько деревьев надо ещё посадить, чтобы расстояние между любыми двумя соседними деревьями было одинаковым?

Сажая новое дерево, мы бьём промежуток между прежде соседними деревьями на два меньших промежутка. Если мы добились того, что расстояние между соседними деревьями стало равным $d$, то $d$ является делителем 63, 84 и 14.

$\text{НОД}(63, 84, 14) = 7$, поэтому деревья можно посадить каждые 7 метров (и большего расстояния между соседними добиться нельзя). Отсюда ответ —

$$(63/7 - 1) + (84/7 - 1) + (14/7 - 1) = 20 \text{ деревьев}.$$

**C.** Да, точки можно расставить:

$$A \xleftrightarrow{3} D \xleftrightarrow{3} B \xleftrightarrow{6} E \xleftrightarrow{1} C.$$

## Задача 6. Быть врачом — весьма ответственно!

**A–B. Здесь должна быть картинка**

**C.** Да, стратегия для докторов будет следующая: Айболит надевает первую пару перчаток, а на неё сверху вторую; Пеппер оперирует только во второй паре перчаток (её внешняя сторона касалась только пациента, а внутренняя чистая. Наконец, Ватсон делает операцию, надев на себя вывернутую первую пару перчаток (её новая внутренняя сторона — ещё чистая), а сверху на неё — вторую.

Внешняя сторона второй пары перчаток по-прежнему касалась только пациента, а то, что между и второй парой перчаток соприкасаются уже грязные стороны, нас не волнует.

# Задачи 5 класса

## Задача 1. Поделим – посмотрим

**A.** Первые два треугольника, пересекаясь, образуют 6 областей: внешность, два «края» каждого из треугольников и их пересечение. Заметим теперь, что для замкнутой линии количество областей, которые она добавляет к картинке, равно количеству её пересечений с другими, уже имеющимися, линиями. Третий треугольник пересечёт не более восьми линий — он может максимум дважды «входить» и «выходить» из имеющихся двух треугольников. Четвёртый треугольник добавит максимум 12 областей, по тем же причинам.

Таким образом, ответ — $6 + 8 + 12 = 26$ областей, пример легко построить.

**B.** Прямая может «входить» в семиугольник и «выходить» из него. При этом изначально она находится снаружи и в конце должна оказаться там же. Каждую сторону семиугольника прямая пересекает не более одного раза, а количество пересечений должно быть чётным. Значит, прямая пересекает максимум шесть сторон, «проходя» через семиугольник трижды.

Получается, она делит семиугольник на максимум на четыре части: до первого пересечения, между первым и вторым, между вторым и третьим, после третьего пересечения.

**C.** На какое наибольшее число областей делят плоскость 15 одинаковых по размеру квадратов, все стороны которых горизонтальны либо вертикальны?

Два одинаково ориентированных квадрата пересекаются максимум в двух точках (если не совпадают). Это значит, что $k$–ый нарисованный квадрат добавляет на картинку не более $2(k-1)$ новых областей. Отсюда ответ на задачу — $2 + 2 + 4 + \ldots + 2 \cdot 14 = 2 + 2 \cdot 105 = 312$.

Изобразить 15 попарно пересекающихся квадратов несложно — достаточно взять один и 14 раз немного сдвинуть его по диагонали.

## Задача 2. Шутка

**A.** Ответ «нет» в задаче–шутке смотрелся бы странно, поэтому в этом пункте подразумевается ответ «да»: из башни можно откачать воздух и сделать лестницу почти отвесной — тогда стул без ножек сможет двигаться вертикально вниз так же, как и его 30-ногий собрат, но ему не будет мешать сопротивление воздуха, наличествующее снаружи башни; в общем, он окажется быстрее.

**B.** Пусть $x_A$ задач было придумано вчера, $x_B$ — сегодня и $x_C$ — завтра. Тогда из условия

$$\begin{cases} x_B = 1.5(x_A + x_C) \\ x_B = 3x_C \\ x_A = 4 \end{cases}$$

Осталось только решить эти уравнения. Из первых двух легко вывести, что $x_A = x_C$, тогда $x_B = 1.5 \cdot 8 = 12$.

**C.** Автомобиль не сможет доехать до Пекина, так как за любое конечное время после своего старта он проезжает не более чем $80 + 40 + 20 + \ldots = 160$ километров.

## Задача 3. О, как мы далеки!

**A.** Не умаляя общности, пусть остановка $A$ находится левее $D$. Тогда остановка $C$ — либо слева от $A$, либо справа от $D$.

Если остановка $C$ слева от $A$, то она находится на расстоянии 4 от неё. Но тогда нам некуда поставить $B$ так чтобы $AB = 4$, $BC = 2$. Отсюда $C$ находится справа, и $AC = 6$.

**B.** Вдоль прямой аллеи растут четыре дерева. Расстояния между соседними равны 63, 14 и 84 метра соответственно. Сколько деревьев надо ещё посадить, чтобы расстояние между любыми двумя соседними деревьями было одинаковым?

Сажая новое дерево, мы бьём промежуток между прежде соседними деревьями на два меньших промежутка. Если мы добились того, что расстояние между соседними деревьями стало равным $d$, то $d$ является делителем 63, 84 и 14.

НОД $(63, 84, 14) = 7$, поэтому деревья можно посадить каждые 7 метров (и большего расстояния между соседними добиться нельзя). Отсюда ответ —

$$(63/7-1)+(84/7-1)+(14/7-1)=20 \text{ деревьев}.$$

**C.** Да, точки можно расставить:

$$A \xleftrightarrow{3} D \xleftrightarrow{3} B \xleftrightarrow{6} E \xleftrightarrow{1} C.$$

## Задача 4. Простые, но такие сложные

**A.** Хотя бы одно из чисел $p$, $p+2$, $p+4$ должно делиться на 3 — это можно понять, рассмотрев всевозможные остатки при делении $p$ на 3. Единственное простое число, делящееся на 3, — это, собственно, 3.

$p+4$ не может быть равно трём, потому что тогда $p = -1$ — не простое. $p+2$ не может быть равно трём, потому что тогда $p=1$ — не простое. Остаётся единственные ответ — $p=3, p+2=5, p+4=7$. Все эти числа простые.

**B.** Пусть $n = p_1 \cdot p_2$. Тогда $n+100 = (p_1+1)(p_2+1) = n+p_1+p_2+1$. Таким образом, мы ищем простые числа $p_1$ и $p_2$, такие что $p_1+p_2 = 99$. Сумма двух чисел нечётна — значит, одно из них обязательно должно быть чётным. Отсюда единственный ответ — $p_1 = 2$, $p_2 = 97$.

**C.** Рассмотрим выключатель под номером $k$. Какие электрики переключат его? Очевидно, что те, номера которых являются делителями числа $k$. Изначально все выключатели выключенными, поэтому включенными в конце останутся те, номера которых имеют нечётное чило делителей. Известный факт заключается в том, что этому условию удовлетворяют только квадраты натуральных чисел.

Таким образом, включенными останутся выключатели с номерами–полными квадратами.

## Задача 5. Неизвестные цифры

**A.** Заметим, что в слове «Мизантроп» 9 различных букв; а также буква Х, встречаясь в этом ребусе, является уже десятой. При этом ни одна из уже перечисленных нами букв не может быть равна нулю — в одном случае произведение в правой части получится нулевым, в другом же в числе ХРОМОТА окажется ведущий ноль.

**B.** Между младшим и предпоследним разрядами в этом примере должен был случиться перенос разряда, так как в противном случае Е+Е=*9, что невозможно из соображений чётности.

Отсюда Е+Е+1 должно оканчиваться на 9. Значит, Е равно 4 или 9.

Если Е равно 9, то М+М=19, что невозможно (М$\leq$9).

Если Е равно 4, то М+М=14, тогда М=7. Тогда посмотрим на букву Р: Р+Р оканчивается на 4.

Тогда либо Р равно либо 2, либо 7. Последний случай невозможен, так как тогда Р совпадает с М. Значит, остаётся ребус вида $2 \cdot$ К247 $=$ Ж494. На значения букв К и Ж не влияют никакие другие части выражения, поэтому можно взять произвольное К от 1 до 4 и Ж=2·К — у ребуса будет 4 решения.

**C.** Пусть на доске были написаны числа $x_0 \ldots x_9$, $x_i = n+i$, $n$ — какое-то натуральное.

Пусть стёрто число $x_k$. Тогда $2017 = 9n + 1 + \ldots + 9 - k$. 2017 имеет остаток 1 при делении на 9, значит, и левая часть тоже должна иметь остаток 1. $1 + \ldots + 9 = 45$, это делится на 9 — значит, $k$ имеет остаток 8, и поэтому равно 8.

Значит, сумма 9 последовательных натуральных чисел равна 2015, $9n = 1980$, $n = 220$. Поэтому с доски стёрто число 228.

## Задача 6. И пусть Бетховен услышит

**A.** Заметим, что клавиша с номером 45 находится ровно напротив клавиши с номером 1. Также заметим, что Лина нажимает симметричные клавиши, всё больше отдаляясь от первой: сначала первую справа, потом первую слева, потом вторую справа, потом вторую слева.

Таким образом каждая клавиша окажется нажатой ровно один раз, и клавиша номер 45 будет последней — то есть, нажатой на 88-ом шаге.

**B.** Заметим, что номера клавиш, на которых Лина поёт «ЛЯ», — это остатки степеней двойки (начиная с числа 2) при делении на 88. То есть, мы ищем наименьшую степень двойки, имеющую вид $88k+48$. Перебором можно установить, что это 4096. Отсюда на 4095 шаге Лина споёт «ЛЯ», нажимая на 48-ю клавишу.

**C.** За одну мелодию Лина охватывает $1+1+2+3+\ldots+100 = \frac{100\cdot 101}{2}+1$ $= 5051$ клавиш. Значит, за всю игру ей будет охвачено $1935 \cdot 5051$ клавиш, и нам нужно найти остаток этого числа при делении на 88, он и даст нам номер последней нажатой клавиши. Остаток числа 1935 равен $-1$, остаток числа 5051 — 35. Таким образом, последней нажатой клавишей будет $88 - 35 = 53$–я.

# Задачи 6 класса

## Задача 1. Разрезания и углы

**A–B. Здесь должна быть картинка**

**C. Здесь должна быть картинка.**

Смотреть рисунок: отмеченные углы равны в силу построения и теоремы о накрест лежащих углах. Проведём ещё несколько доволнительных построений: получившийся треугольник — прямоугольный и равнобедренный, то есть угол, равный сумме $A$ и $B$, — $45^\circ$, то есть, равен по величине углу $C$.

## Задача 2. Пока не пришёл лифтёр

**A.** Если первый общий этаж для мальчиков — 123-ий, то НОК $(n, m) =$ 123 (так как первый общий этаж как раз и имеет номер, соответствующий наименьшему общему кратному). $123 = 3 \cdot 41$, поэтому $n$ и $m$ могут быть равным 1, 123 или 3, 41.

**B.** Без ограничения общности можно считать, что Витя находится на нулевом этаже, а Петя — на первом. Тогда Витин лифт перемещается только по этажам, номера которых делятся на $k+1$. Если $k = 0$, Петя остаётся на месте, и Витя, конечно, может к нему приехать.

Если же $k > 0$, то Витя не может приехать на первый этаж (1 не делится на $k+1$), поэтому если Петя просто будет оставаться на месте, он не встретится с Витей.

**C.** Заметим, что номер текущего этажа, на котором находится Витя, равен сумме со слагаемыми вида $\pm m$ и $\pm n$. Любая такая сумма делится на НОД $(n, m)$, а единственный делитель единицы — это она сама. Поэтому НОД $(n, m) = 1$.

## Задача 3. На плоскости

**A.** Единственный способ расположить квадраты согласно условию — вдоль двух сторон квадрата $18 \times 18$ уложить квадратики $1 \times 1$, а оставшееся место занять квадратом $17 \times 17$. Его площадь будет равна 289.

**B.** 12 заборов строятся в каком-то порядке, один за другим. Ни один, ни два забора ничего не отгораживают, как их ни поставь. Зато третий забор может, пересекая первый и второй, огородить одну область. И вообще — $n$–ый забор, пересекая все предыдущие, может отгородить $n-2$ новых области. Таким образом, ответ на эту задачу — $1 + \ldots + 10 = 55$. Построить пример расстановки заборов, отгораживающей именно это количество областей, несложно.

**C.** Возьмём самую длинную сторону четырёхугольника $ABCD$ — пусть это сторона $AB$. Один из углов, прилежащих к ней, должен быть острым (не умаляя общности — угол $DAB$), иначе сторона $CD$ будет длиннее $AB$. Рассмотрим сторону $DA$ и вершину $D$.

Высота $DH$ из точки $D$ на стоону $AB$ упадёт именно что на сторону $AB$, а не на её продолжение, так как иначе

$$|AD|^2 \underset{\text{Th. Пифагора}}{=} |AH|^2 + |DH|^2 \underset{\substack{AH\text{ — продол-}\\ \text{жение } AB}}{>} |AB|^2 + |DH|^2 > |AB|^2.$$

Откуда $AD$ длиннее $AB$, что противоречит изначальному выбору стороны $AB$.

## Задача 4. Неземное стихосложение

**A.** Поэт в своём стихотворении занимается расложением последовательных чисел в сумму простых, меньших данного числа (например, число 4 он не использовал, придумывая разложение для шести). Записываются простые числа в порядке убывания. Поэтому следующие три строчки будут иметь вид:

**B. Здесь должна быть картинка**

**C.** Будем соединять знакомых поэтов белой ниткой, а незнакомых — чёрной ниткой. Рассмотрим поэта Васю — к нему привязаны 2016 ниток, значит среди них уж точно есть три нитки одного цвета. Пусть это белые нитки. Рассмотрим поэтов, находящихся на других концах этих ниток.

Если какие-то два из этих трёх пожтов знакомы, то образуется белый треугольник из них и поэта Васи. Если же они все попарно незнакомы друг с другом — то нам не хуже, это тоже вариант из условия задачи.

## Задача 5. Простые, но такие сложные

**A.** Хотя бы одно из чисел $p$, $p+2$, $p+4$ должно делиться на 3 — это можно понять, рассмотрев всевозможные остатки при делении $p$ на 3. Единственное простое число, делящееся на 3, — это, собственно, 3.

$p+4$ не может быть равно трём, потому что тогда $p = -1$ — не простое. $p+2$ не может быть равно трём, потому что тогда $p = 1$ — не простое. Остаётся единственные ответ — $p = 3, p+2 = 5, p+4 = 7$. Все эти числа простые.

**B.** Пусть $n = p_1 \cdot p_2$. Тогда $n + 100 = (p_1+1)(p_2+1) = n + p_1 + p_2 + 1$. Таким образом, мы ищем простые числа $p_1$ и $p_2$, такие что $p_1 + p_2 = 99$. Сумма двух чисел нечётна — значит, одно из них обязательно должно быть чётным. Отсюда единственный ответ — $p_1 = 2$, $p_2 = 97$.

**C.** Рассмотрим выключатель под номером $k$. Какие электрики переключат его? Очевидно, что те, номера которых являются делителями числа $k$. Изначально все выключатели выключенными, поэтому включенными в конце останутся те, номера которых имеют нечётное чило делителей. Известный факт заключается в том, что этому условию удовлетворяют только квадраты натуральных чисел.

Таким образом, включенными останутся выключатели с номерами–полными квадратами.

## Задача 6. Шутка

**A.** Ответ «нет» в задаче–шутке смотрелся бы странно, поэтому в этом пункте подразумевается ответ «да»: из башни можно откачать воздух и сделать лестницу почти отвесной — тогда стул без ножек сможет двигаться вертикально вниз так же, как и его 30-ногий собрат, но ему не будет мешать сопротивление воздуха, наличествующее снаружи башни; в общем, он окажется быстрее.

**B.** Пусть $x_A$ задач было придумано вчера, $x_B$ — сегодня и $x_C$ — завтра. Тогда из условия

$$\begin{cases} x_B = 1.5(x_A + x_C) \\ x_B = 3x_C \\ x_A = 4 \end{cases}$$

Осталось только решить эти уравнения. Из первых двух легко вывести, что $x_A = x_C$, тогда $x_B = 1.5 \cdot 8 = 12$.

**C.** Автомобиль не сможет доехать до Пекина, так как за любое конечное время после своего старта он проезжает не более чем $80 + 40 + 20 + \ldots = 160$ километров.

## Задача 7. Многонациональные захватчики

**A.** **Здесь должна быть картинка.**

**B.** Пусть 99 государств захватили себе первые 99 клеток верхнего ряда таблицы, а сотое государство — вторую сверху клетку оставшегося столбца таблицы, где ещё не было ни одного государства.

Единственное государство, которое могло бы заселить оставшуюся клетку верхнего ряда, чтобы не нарушить условие задачи, — сотое. Однако и оно не может там обосноваться, потому что тогда в соответствующем столбце за ним будет целых две клетки.

**C.** При любом $k$ захват клеток, описанный в условии, невозможен.

**Здесь должна быть картинка.**

Будем смотреть на клетки , соседние с главной диагональю. Первые две из них должны быть захвачены, чтобы обеспечить двух захваченных соседей угловой клетки. Следующие две не могут быть захвачены, так как у второй клетки на диагонали уже есть два захваченных соседа. Так как размеры таблицы нечётны, получаем, что две соседних клетки противоположного угла таблицы должны быть не захвачены — и это будет нарушать условие задачи.

## Задача 8. Все числа состоят из цифр

**A.** Запишем условие из задачи: $\overline{xy} = 3 \cdot \overline{yx}$. Это значит то же, что

$$\begin{aligned}&10x + y = 30y + 3x;\\&7x = 29y.\end{aligned}$$

И правая, и левая части равенства должны делить на 29. Это значит, что $x$ делится на 29 — единственная цифра, кратная, 29, это ноль. Разумеется, при $x = 0$ решений у данной задачи нет — значит, нет и вообще.

**B.** Последовательно будем интерпретировать условие задачи. То, что искомое число не делится на 10, значит, что $Z \neq 0$. То, что число $YZ$ меньше 40, значит, что $Y$ равен 0, 1, 2 или 3. Единственное двузначное число, являющееся квадратом и оканчивающееся на цифры 0–3 — это 81. Таким образом, $X = 8$, $Y = 1$.

Наконец, для цифры $Z$ остаётся два возможных варианта, чтобы число $XYZ$ делилось на 9 — 0 и 9. Так как мы с самого начала поняли, что $Z \neq 0$, получается $Z = 9$.

Ответ: искомое число — 819.

**C.** Попробуем посчитать сумму цифр числа $n$ — по признаку делимости на 9, её остаток будет таким же, как у самого числа $n$. 19 разрядов из 61 занимают двойки — если отбросить эти 19 разрядов, двоек и четвёрок будет поровну. Пусть четвёрки в числе занимают $t$ разрядов. Тогда сумма цифр числа $n$ равна

$$19 \cdot 2 + 4 \cdot t + 2 \cdot t + 3 \cdot (61 - 19 - 2t) =$$

$$= 38 + 6t + 3 \cdot 42 - 6t = 38 + 42 = 80.$$

Остаток при делении 80 на 9 равен 8 — значит, и число $n$ сравнимо с 8 по модулю 9.

# Задачи 7 класса

## Задача 1. Переводчики с немецкого

**A.** Разложим на простые множители числа 116 и 217: $116 = 2^2 \cdot 29$, $217 = 7 \cdot 31$. Эти числа взаимно просты, то есть, у них единственный общий множитель — единица. Поэтому переводчику надо перевести 116 брошюр и 217 заметок.

**B.** Заметим, что если текстов каждой тематики было бы по одному и каждому переводчику надо было бы перевести ровно один текст, то у начальника не возникло бы проблем. Тогда давайте сведём задачу распределения $3n$ текстов, по $n$ на тему, к задаче распределения $3(n-1)$ текстов, по $n-1$ на тему.

Среди трёх переводчиков найдётся тот, кто указал наименьшее число различных тематик текстов в своём списке желаний. Выделим ему один текст одной из его желаемых тематик. Среди оставшихся двух переводчиков есть тот, у кого тематик поменьше. Он точно хочет себе хотя бы один текст тематики, отличной от той, которую мы уже дали первому переводчику. Выделим ему текст этой тематики.

Остался третий переводчик. Если он хотел себе текст третьей тематики, которая ещё никому не выдана, всё хорошо. Если вдруг он «заказывал» только два различных вида текстов, и это те самые виды, которые уже «отданы» первому и второму переводчикам, то у кого-то из них (предположим, у второго) в списке желаний есть третья тематика. Дадим ему эту самую третью тему, а третьему переводчику — то, что раньше было у второго.

Таким образом мы успешно раздали три текста — раздавая по три текста разных тематик, дойдём до ситуации, когда текстов осталось по одному.

**C.** Текст длины 1 бьётся одним способом, текст длины 2 — двумя способами. Теперь рассмотрим последнее слово в тексте из $n$ слов — оно может быть либо самостоятельным, либо частью сочетания. В первом случае нам останется побить на слова и сочетания текст длины $n-1$, во втором — текст длины $n-2$.

Таким образом, ответ на задачу для $n$ равен сумме ответов для $n-1$ и $n-2$. Этому условию и полученным нами начальным данным удовлетворяет последовательность чисел Фибоначчи. Поэтому ответ — $\mathcal{F}_n$.

## Задача 2. Гонки улиток

**A.** Улитки доползут до верха одновременно — каждая за три дня.

**B.** Покрасим клетки листа в белый и чёрный, как на шахматной доске. Чёрных и белых клеток будет разное количество (всё-таки площадь листа нечётна), и при этом улитка переползает с белой клетки на чёрную, а с чёрной — на белую. Поэтому улиткам, стартовавшим в клетках цвета, которого больше, не хватит клеток цвета, которого меньше.

**C.** Пусть более быстрая улитка — верхняя. Тогда план её действий таков: спуститься вертикально вниз в точку, где сидела другая улитка, а затем догнать её по её же пути.

Пусть более быстрая улитка — нижняя. План её действий — поползти перпендикулярно от стены. Кратчайший путь от начального положения верхней улитки до точки, где находится нижняя улитка, всегда будет длиннее расстояния, пройденного нижней улиткой — поэтому более медленная верхняя не сможет её догнать.

## Задача 3. Участники «Математики НОН-СТОП»

**A.** Парты в одном из кабинетов, где проходит олимпиада, стоят в три колонки по шесть парт в каждой. За 20 минут до олимпиады в кабинете сидело 8 школьников. Докажите, что из кабинета пока что можно утащить две свободные парты, стоящие друг за другом. А если бы школьников было 9?

Побьём парты на пары стоящих друг за другом, по три пары в ряду. Получится девять пар, а школьников пока всего восемь. Значит, одна пара парт полностью свободна, и её можно утащить.

Если же школьников 9, то посадим по школьнику за 1, 3 и 5 парты каждого ряда — и ничего нельзя будет унести.

**B.** Пусть участников всего $N$. Если среди участников есть один, не знакомый ни с кем, то не может быть участника, знакомого со всеми. Если же есть участник, который со всеми знаком, то каждый знаком хоть с кем-то.

Таким образом, либо все участники знакомы с 0—$(N-2)$ людьми каждый, либо все они знакомы с 1—$N-1$ людьми каждый. В любом случае на $N$ участников получается $(N-1)$ вариантов, поэтому найдутся двое с одинаковым числом знакомых.

**C.** Возьмём шесть участников, нам хватит. Будем соединять красной линией знакомых, а синей линией — незнакомых. Все участники окажутся попарно соединены.

Из каждого участника выходит по пять линий, значит как минимум три из них имеют один цвет. Пусть из данного участника выходит три красных линии — посмотрим на людей, в которых они приходят. Если между ними есть хоть одна красная линия, получается красный треугольник с участником, выбранным нами изначально. Если же между ними все линии синие, то это даёт нам синий треугольник, то есть они попарно незнакомы. Что и требовалось.

## Задача 4. Загадывание чисел

**A.** Пусть оказалось, что $a+b$ делится на $b$, где $a$ и $b$ — числа, загаданные мальчиками. Тогда

$$a + b = k \cdot b,$$

и, соответственно

$$a = (k-1) \cdot b.$$

Таким образом, $a$ делится на $b$ — и наибольший общий делитель этих двух чисел равен $b$.

**B.** Ответ на первый вопрос — да, конечно: 3 и 20 — взаимно простые числа, а их остатки от деления на 17 совпадают и, разумеется, не взаимно просты.

Чтобы показать, что числа $a$ и $b$ из второго вопроса пункта обязаны быть взаимно простыми, рассмотрим число

$$\max(a, b) + 1.$$

Остатки при делении чисел $a$ и $b$ на него равны им самим и по условию взаимно просты — значит, $a$ и $b$ взаимно просты.

**C.** Наша задача — решить уравненение

$$(x + 3)(x + 4)(x + 5)(x + 6) = 288.$$

Рассмотрим произведения пары крайних множителей и пары средних множителей:

$$(x^2 + 9x + 18)(x^2 + 9x + 20) = 288.$$

Иными, словами,

$$Y(Y + 2) = 288.$$

Разложим число 288 на множители: $288 = 2^5 \cdot 3^2$. Получается, есть ровно два способа представить 288 в виде произведения двух чисел, различающихся на 2: $16 \cdot 18$ и $(-18) \cdot (-16)$.

В каждом из этих двух случаев, чтобы найти $x$, нужно либо решить квадратное уравнение, либо, например, представить $-18$ в виде произведения двух чисел, различающихся на 3 — одно из них и будет $x + 3$. Ни то, ни другое не представляет труда.

## Задача 5. Многонациональные захватчики

**A.** **Здесь должна быть картинка.**

**B.** Пусть 99 государств захватили себе первые 99 клеток верхнего ряда таблицы, а сотое государство — вторую сверху клетку оставшегося столбца таблицы, где ещё не было ни одного государства.

Единственное государство, которое могло бы заселить оставшуюся клетку верхнего ряда, чтобы не нарушить условие задачи, — сотое. Однако и оно не может там обосноваться, потому что тогда в соответствующем столбце за ним будет целых две клетки.

**C.** При любом $k$ захват клеток, описанный в условии, невозможен.

**Здесь должна быть картинка.**

Будем смотреть на клетки , соседние с главной диагональю. Первые две из них должны быть захвачены, чтобы обеспечить двух захваченных соседей угловой клетки. Следующие две не могут быть захвачены, так как у второй клетки на диагонали уже есть два захваченных соседа. Так как размеры таблицы нечётны, получаем, что две соседних клетки противоположного угла таблицы должны быть не захвачены — и это будет нарушать условие задачи.

## Задача 6. Порезать торт на День рождения

**A.** Проведём три параллельных разреза через торт. Если они вместе с какими тремя разрезами образуют замкнутую ломаную, то есть звено, идущее от одного крайнего разреза к другому — то есть, пересекающее средний разрез. Таким образом, построить несамопересекающуюся ломаную нельзя.

**B.** **Здесь должна быть картинка.**

**C.** Задача сводится к задаче разрезания квадрата на пять фигур одинаковой площади и с одинаковой длиной пересечения с внешними сторонами квадрата. Для этого разделим каждую сторону квадрата на пять равных по длине отрезков и соединим концы этих отрезков с центром квадрата. Получим 20 треугольников одинаковой площади с одинаковой длиной основания. Искомые фигуры получим, объединяя соседние треугольники по четыре штуки.

Разрезание куба строится из разрезания квадрата просто: достаточно «протащить» разрезание квадрата через куб по вертикали.

## Задача 7. Взвешивания

**A.** Пусть картофель весит $P$ граммов, а кот — $K$ граммов. Пусть погрешность составляет $M$ граммов.

Тогда $P + M = 1000$, $K + M = 4400$, $P + K + M = 5000$. Отсюда $P = 600$ (вычтем из третьего равенства второе), $K = 4000$ (вычтем из третьего первое), $M = 400$.

**B.** Поделим 729 монет на три равных кучки. Положим две из них на весы — если одна из них окажется легче другой, то в ней находится фальшивая монета. Если они равны по весу, то фальшивая монета находится в оставшейся трети.

Таким образом, за один ход мы умеем уменьшать количество «подозреваемых» монет втрое. $729 = 3^6$, поэтому через шесть ходов останется одна монета, которая может быть фальшивой — она и окажется фальшивой.

**C.** Выложим на весы одну монету из первого мешка, две монеты из второго мешка, … 15 монет из 15-го мешка. Если бы все монеты были настоящими, их суммарная масса была бы равна $20 \cdot (1 + \ldots + 15)$ граммов. По факту мы получим бо́льшую массу — она будет отличаться от приведённой нами ранее на $5 \cdot$ (№ мешка с фальшивыми монетами) граммов. Так мы и выясним, где фальшивки.

## Задача 8. Шутка

**A.** Ответ «нет» в задаче–шутке смотрелся бы странно, поэтому в этом пункте подразумевается ответ «да»: из башни можно откачать воздух и сделать лестницу почти отвесной — тогда стул без ножек сможет двигаться вертикально вниз так же, как и его 30-ногий собрат, но ему не будет мешать сопротивление воздуха, наличествующее снаружи башни; в общем, он окажется быстрее.

**B.** Пусть $x_A$ задач было придумано вчера, $x_B$ — сегодня и $x_C$ — завтра. Тогда из условия

$$\begin{cases} x_B = 1.5(x_A + x_C) \\ x_B = 3x_C \\ x_A = 4 \end{cases}$$

Осталось только решить эти уравнения. Из первых двух легко вывести, что $x_A = x_C$, тогда $x_B = 1.5 \cdot 8 = 12$.

**C.** Автомобиль не сможет доехать до Пекина, так как за любое конечное время после своего старта он проезжает не более чем $80 + 40 + 20 + \ldots = 160$ километров.

## Задача 9. Вовочка и клетчатая тетрадь

**A.** У Вовочки есть клетчатая тетрадь (клетки — одинаковые, квадратные), линейка без делений и карандаш. Площадь каждой клетки в тетради — 100 мм$^2$. Как Вовочке имеющимися средствами построить квадрат площадью 1000 мм$^2$?

Заметим, что $10^2 + 30^2 = 1000$. То есть, прямоугольный треугольник с катетами 10 мм, 30 мм (который легко нарисовать по клеткам) имеет гипотенузу $\sqrt{1000}$ мм$^2$.

Расположив четыре таких треугольника, как показано на рисунке, получим квадрат со стороной $\sqrt{1000}$ мм$^2$, площадь которого равна 1000 мм$^2$.

**B.** **Здесь должна быть картинка**

Смотреть рисунок.

**C.** Аналогично пункту B данной задачи мы умеем делить на произвольное количество частей любой отрезок, начало и конец которого — узлы сетки. Также $80 \cdot 25 = 2000$ — поэтому, если мы научимся строить треугольник площадью $\sqrt{2000}$ мм$^2$, мы сможем поделить каждую из его сторон на пять частей и получить 25 квадратов нужной нам площади в 80 мм$^2$.

Наконец, $2000 = 20^2 + 40^2$; далее аналогично пункту A.

## Задача 10. Игра

**A.** Это игра–шутка: значение суммы не зависит от расстановки в ней скобок — сумма в любом случае будет равна 2017, то есть нечётна. Отсюда победит первый игрок.

**B.** У первого игрока есть выигрышная стратегия. Первым ходом он должен переложить 3 камня из первой кучки во вторую. Затем он должен реагировать на ходы второго игрока следующим образом:

Если второй перекладывает $x$ камней из первой кучки во вторую, то первый должен переложить $5 - x$ камней также из первой кучки во вторую.

Если же второй перекладывает камни из второй кучки в первую, то первый должен вернуть эти камни обратно во вторую кучку.

Заметим, что после хода первого игрока количество камней во второй кучке всегда имеет остаток 3 от деления на 5, а после хода второго игрока количество камней во второй кучке никогда не имеет такого остатка. Это значит, что второй игрок не может переложить все камни во вторую кучку, вынудив первого сделать ход, при котором ему придётся выкидывать камни из мешка.

То есть, (а) первый всегда может сделать ход, соответствующей придуманной нами стратегии, (б) выкидыванием камней из мешка занимается исключительно второй игрок. Он и проиграет.

**C.** Начнём со случая $n = 13$. Если первый игрок взял $k$ камней, то второй может взять $13 - k$ и победить. Если $n$ не превосходит 14 и не равно 13, то все камни может взять за один ход первый игрок.

Для $n \geq 15$ рассмотрим два случая:

$n$ делится на 13. Заметим, что после любого хода первого игрока оставшееся количество камней не будет делиться на 13. Зато второй в случае любого хода первого сможет сделать так, что после его хода количество камней, оставшихся в кучке, будет вновь делиться на 13. Для этого на взятие $k$ камней, $1 \leq k \leq 12$, нужно ответить взятием $13 - k$ камней, на взятие 14 камней — 12 камнями, а на взятие 15 камней — 11 камнями. Ноль делится на 13 — кучка может остаться пустой только после хода второго игрока.

$n$ не делится на 13. Тогда выигрышная стратегия есть у первого игрока. Своим первым ходом он берёт от 1 до 12 камней так, чтобы осталось количество, кратное 13 — а затем играет так, как играл бы второй игрок в предыдущем пункте.

Ответ: если $n$ делится на 13, выигрывает второй игрок; иначе выигрывает первый.

# Задачи 8 класса

## Задача 1. Неизвестные цифры

**A.** Заметим, что в слове «Мизантроп» 9 различных букв; а также буква Х, встречаясь в этом ребусе, является уже десятой. При этом ни одна из уже перечисленных нами букв не может быть равна нулю — в одном случае произведение в правой части получится нулевым, в другом же в числе ХРОМОТА окажется ведущий ноль.

**B.** Между младшим и предпоследним разрядами в этом примере должен был случиться перенос разряда, так как в противном случае Е+Е=*9, что невозможно из соображений чётности.

Отсюда Е+Е+1 должно оканчиваться на 9. Значит, Е равно 4 или 9.

Если Е равно 9, то М+М=19, что невозможно (М$\leq$9).

Если Е равно 4, то М+М=14, тогда М=7. Тогда посмотрим на букву Р: Р+Р оканчивается на 4.

Тогда либо Р равно либо 2, либо 7. Последний случай невозможен, так как тогда Р совпадает с М. Значит, остаётся ребус вида $2 \cdot$ К247 $=$ Ж494. На значения букв К и Ж не влияют никакие другие части выражения, поэтому можно взять произвольное К от 1 до 4 и Ж=2·К — у ребуса будет 4 решения.

**C.** Пусть на доске были написаны числа $x_0 \dots x_9$, $x_i = n + i$, $n$ — какое-то натуральное.

Пусть стёрто число $x_k$. Тогда $2017 = 9n + 1 + \ldots + 9 - k$. 2017 имеет остаток 1 при делении на 9, значит, и левая часть тоже должна иметь остаток 1. $1 + \ldots + 9 = 45$, это делится на 9 — значит, $k$ имеет остаток 8, и поэтому равно 8.

Значит, сумма 9 последовательных натуральных чисел равна 2015, $9n = 1980$, $n = 220$. Поэтому с доски стёрто число 228.

## Задача 2. Искусное владение числами

**A.**

| | | |
|---|---|---|
| 8 | 3 | 4 |
| 1 | 5 | 9 |
| 6 | 7 | 2 |

**B.** 15317.

**C.** Давайте искать число, делящееся на 144: это число *несильно, но достаточно* больше 95, и делимость на него очень просто проверить: $144 = 16 \cdot 9$: делимость на 16 зависит от последних четырёх цифр, а делимость на 9 — от суммы цифр в целом, которая и так будет равна 144.

Положим последние четыре цифры равными 3232 — нам останется распределить 134 на 91 разряд. Для этого воспользуемся 43 двойками и 48 единицами.

## Задача 3. Плавучий зоопарк

**A.** Здесь должна быть картинка.

**B.** Конечно же, минимальное количество углов у пересечения — 3. Если мы найдём максимальное количество и приведём пример, когда оно достигается, то все промежуточные количества углов будет несложно получить.

Верхняя оценка на количество углов — 24: каждая из шести сторон шестиугольника могла бы пересекать каждую из четырёх сторон четырёхугольника. В свою очередь, пример, когда пересечение фигур — 6 четырёхугольников, легко построить.

**C.** Если $m$ и $n$ чётны, то ответ — от трёх до $mn$ углов (смотреть предыдущий пункт). Если $m$ чётно, $n$ нечётно, то каждая из $m$ сторон $m$-угольника пересекает не более $n-1$ стороны $n$-угольника, так как количество точек пересечения любой прямой с любым многоугольником чётно: прямая должна «входить» и «выходить» из многоугольника. Пример, когда пересечение имеет $m(n-1)$ углов, строится по аналогии с первым пунктом.

При нечётных $m$ и $n$ ответ — $(m-1)(n-1)$, пример приводится аналогично. Больше углов пересечение не может иметь по следующей причине: $m$ угольник не может пересечь $n$-угольник «слева направо» больше $m-1$ раза, и каждое пересечение будет давать *в среднем* не более $n-1$ угла.

## Задача 4. Вовочка и клетчатая тетрадь

**A.** У Вовочки есть клетчатая тетрадь (клетки — одинаковые, квадратные), линейка без делений и карандаш. Площадь каждой клетки в тетради — 100 мм$^2$. Как Вовочке имеющимися средствами построить квадрат площадью 1000 мм$^2$?

Заметим, что $10^2 + 30^2 = 1000$. То есть, прямоугольный треугольник с катетами 10 мм, 30 мм (который легко нарисовать по клеткам) имеет гипотенузу $\sqrt{1000}$ мм$^2$.

Расположив четыре таких треугольника, как показано на рисунке, получим квадрат со стороной $\sqrt{1000}$ мм$^2$, площадь которого равна 1000 мм$^2$.

**B. Здесь должна быть картинка**

Смотреть рисунок.

**C.** Аналогично пункту B данной задачи мы умеем делить на произвольное количество частей любой отрезок, начало и конец которого — узлы сетки. Также $80 \cdot 25 = 2000$ — поэтому, если мы научимся строить треугольник площадью $\sqrt{2000}$ мм$^2$, мы сможем поделить каждую из его сторон на пять частей и получить 25 квадратов нужной нам площади в 80 мм$^2$.

Наконец, $2000 = 20^2 + 40^2$; далее аналогично пункту A.

## Задача 5. Загадывание чисел

**A.** Пусть оказалось, что $a+b$ делится на $b$, где $a$ и $b$ — числа, загаданные мальчиками. Тогда

$$a + b = k \cdot b,$$

и, соответственно

$$a = (k - 1) \cdot b.$$

Таким образом, $a$ делится на $b$ — и наибольший общий делитель этих двух чисел равен $b$.

**B.** Ответ на первый вопрос — да, конечно: 3 и 20 — взаимно простые числа, а их остатки от деления на 17 совпадают и, разумеется, не взаимно просты.

Чтобы показать, что числа $a$ и $b$ из второго вопроса пункта обязаны быть взаимно простыми, рассмотрим число

$$\max(a, b) + 1.$$

Остатки при делении чисел $a$ и $b$ на него равны им самим и по условию взаимно просты — значит, $a$ и $b$ взаимно просты.

**C.** Наша задача — решить уравненение

$$(x + 3)(x + 4)(x + 5)(x + 6) = 288.$$

Рассмотрим произведения пары крайних множителей и пары средних множителей:

$$(x^2 + 9x + 18)(x^2 + 9x + 20) = 288.$$

Иными, словами,

$$Y(Y+2) = 288.$$

Разложим число 288 на множители: $288 = 2^5 \cdot 3^2$. Получается, есть ровно два способа представить 288 в виде произведения двух чисел, различающихся на 2: $16 \cdot 18$ и $(-18) \cdot (-16)$.

В каждом из этих двух случаев, чтобы найти $x$, нужно либо решить квадратное уравнение, либо, например, представить $-18$ в виде произведения двух чисел, различающихся на 3 — одно из них и будет $x+3$. Ни то, ни другое не представляет труда.

## Задача 6. Пути автобуса неисповедимы

**A.** Описанная в условии задачи ситуация возможна при любом количестве городов — достаточно соединить все города дорогами по кругу, «хороводом», и 4 марта отправить автобус из каждого города в следующий.

**B.** Автобусов, выехавших из городов на П (и, соответственно, приехавших в города на К) больше, чем собственно городов на К. В силу принципа Дирихле, в каком-то городе на К будет больше одного автобуса.

**C.** Если автобусы смогли разъехаться, то либо четыре города оказались разбиты на пары так, что автобусы из городов пары поменялись местами, либо из четырёх городов собрался цикл, и каждый автобус отправился в следующий город цикла.

**Здесь должна быть картинка.**

Есть три способа разбить четыре города на пары и три способа провести через них цикл длины 4 — такие соединения дорогами нам подходят. Также подойдёт любая ситуация, которая «надстроена» над перечисленными нами: то есть, взять все дороги и добавлены какие-то ещё.

## Задача 7. Переводчики с немецкого

**A.** Разложим на простые множители числа 116 и 217: $116 = 2^2 \cdot 29$, $217 = 7 \cdot 31$. Эти числа взаимно просты, то есть, у них единственный общий множитель — единица. Поэтому переводчику надо перевести 116 брошюр и 217 заметок.

**B.** Заметим, что если текстов каждой тематики было бы по одному и каждому переводчику надо было бы перевести ровно один текст, то у начальника не возникло бы проблем. Тогда давайте сведём задачу распределения $3n$ текстов, по $n$ на тему, к задаче распределения $3(n-1)$ текстов, по $n-1$ на тему.

Среди трёх переводчиков найдётся тот, кто указал наименьшее число различных тематик текстов в своём списке желаний. Выделим ему один текст одной из его желаемых тематик. Среди оставшихся двух переводчиков есть тот, у кого тематик поменьше. Он точно хочет себе хотя бы один текст тематики, отличной от той, которую мы уже дали первому переводчику. Выделим ему текст этой тематики.

Остался третий переводчик. Если он хотел себе текст третьей тематики, которая ещё никому не выдана, всё хорошо. Если вдруг он «заказывал» только два различных вида текстов, и это те самые виды, которые уже «отданы» первому и второму переводчикам, то у кого-то из них (предположим, у второго) в списке желаний есть третья тематика. Дадим ему эту самую третью тему, а третьему переводчику — то, что раньше было у второго.

Таким образом мы успешно раздали три текста — раздавая по три текста разных тематик, дойдём до ситуации, когда текстов осталось по одному.

**C.** Текст длины 1 бьётся одним способом, текст длины 2 — двумя способами. Теперь рассмотрим последнее слово в тексте из $n$ слов — оно может быть либо самостоятельным, либо частью сочетания. В первом случае нам останется побить на слова и сочетания текст длины $n-1$, во втором — текст длины $n-2$.

Таким образом, ответ на задачу для $n$ равен сумме ответов для $n-1$ и $n-2$. Этому условию и полученным нами начальным данным удовлетворяет последовательность чисел Фибоначчи. Поэтому ответ — $\mathcal{F}_n$.

## Задача 8. Примечательный учебный день

**A.** К высоте $m$ метров дерево подходит, имея $(m-1)!$ ветвей. Соответственно, ответ на задачу — 11! веток.

**B.** Очевидно, что больше 13 рассадок не бывает: мальчик обязан сидеть с одной из девочек. 13 же рассадок реализовать просто: нужно взять какую-то рассадку, и каждый день сдвигать девочек относительно мальчиков «по кругу».

**C.** Давайте решим задачу в общем случае: есть класс из $4k+2$ человек — придумать $4k+1$ способов рассадить их за парты так, чтобы одна пара не появлялась в двух разных рассадках (больше нельзя по очевидной причине — каждый человек может сидеть не более чем с $4k+1$ другими).

Будем изображать $i$–ую рассадку, ставя число $i$ в клетки таблицы $(4k+2)\times(4k+2)$, из которой выкинута центральная диагональ. Наша задача тогда — расставить числа от 1 до $4k+1$ в клетки таблицы, так чтобы (а) каждое число было написано ровно $2k$ раз (б) встречалось в каждом столбце и каждой строке ровно по одному разу (в) его вхождения в таблицу были бы симметричны относительно центральной диагонали. Построим расстановку.

В первую строку таблицы впишем числа от 1 до $4k+1$ справа налево, а в первый столбец — снизу вверх. Заполняя $i$-ую строку, $1 < i < 4k-1$, поступим так: зарезервируем самую правую клетку строки, не будем её трогать; в остальные клетки впишем числа от 1 до $4k+1$, сдвинув их на одну клетку влево относительно предыдущей строки. После этого в самую правую клетку запишем число, которое должно было стоять на центральной диагонали. Последнюю строку получим отражением относительно центральной диагонали уже сформированного последнего столбца.

Приведём пример такой таблицы для $k=2$ (в задаче было $k=6$):

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |
| 9 | | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 8 |
| 8 | 7 | | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 9 | 6 |
| 7 | 6 | 5 | | 3 | 2 | 1 | 9 | 8 | 4 |
| 6 | 5 | 4 | 3 | | 1 | 9 | 8 | 7 | 2 |
| 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | | 8 | 7 | 6 | 9 |
| 4 | 3 | 2 | 1 | 9 | 8 | | 6 | 5 | 7 |
| 3 | 2 | 1 | 9 | 8 | 7 | 6 | | 4 | 5 |
| 2 | 1 | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | | 3 |
| 1 | 8 | 6 | 4 | 2 | 9 | 7 | 5 | 3 | |

Несложно убедиться в том, что она обладает нужными нам свойствами.

## Задача 9. О числах маленьких и больших

**A.** Без ограничения общности будем считать, что $b \geq a \geq 2$. Тогда

$$a + b \overset{(1)}{\leq} 2 \cdot \max(a, b) \overset{(2)}{\leq} \min(a, b) \cdot \max(a, b) = a \cdot b.$$

Теперь, если оба числа $a$, $b$ строго больше двух, то неравенство (2) становится строгим, а если только одно — то неравенство (1) становится строгим. Что и требовалось.

**B.** (а): Пусть $a$ — первая цифра числа $X$.

Чтобы найти число $X$, которое при удалении первой цифры станет в 57 раз меньше, нужно придумать такую цифру $a$, что $a \cdot 10^{\cdots} = 56 \cdot (X - a \cdot 10^{\cdots})$. Для этого, в частности, число $a00\ldots0$ должно делиться на 56. Число 70000 отлично подойдёт. Получаем ответ:

$$1250 \cdot 57 = 71250.$$

(б): Чтобы найти ответ в этом пункте, нужно подобрать такую цифру $a$, что $a00\ldots0$ делится на 57. Пусть такая есть: $57 \mid a \cdot 10^k$. 10 взаимно просто с 57, поэтому тогда $57 \mid a \cdot 10^{k-1}$. Продолжая уменьшать степень десятки, пользуясь этим соображением, получим $57 \mid a$. Но ненулевая цифра не может делится на 57 — получаем противоречие.

**C.** Отдельно рассмотрим случай $n = 4$: $4 = 2 \cdot 2 = 2 + 2$. Если же составное $n$ строго больше четырёх, что его можно представить в виде $a \cdot b$, $a \geq 2$, $b > 2$.

Из пункта A мы знаем, что тогда $a + b < a \cdot b = n$. Тогда можно взять $n - a - b$ единиц, и получить

$$a + b + 1 + \ldots + 1 = a \cdot b \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1 = n.$$

## Задача 10. Игра

**A.** Это игра–шутка: значение суммы не зависит от расстановки в ней скобок — сумма в любом случае будет равна 2017, то есть нечётна. Отсюда победит первый игрок.

**B.** У первого игрока есть выигрышная стратегия. Первым ходом он должен переложить 3 камня из первой кучки во вторую. Затем он должен реагировать на ходы второго игрока следующим образом:

Если второй перекладывает $x$ камней из первой кучки во вторую, то первый должен переложить $5 - x$ камней также из первой кучки во вторую.

Если же второй перекладывает камни из второй кучки в первую, то первый должен вернуть эти камни обратно во вторую кучку.

Заметим, что после хода первого игрока количество камней во второй кучке всегда имеет остаток 3 от деления на 5, а после хода второго игрока количество камней во второй кучке никогда не имеет такого остатка. Это значит, что второй игрок не может переложить все камни во вторую кучку, вынудив первого сделать ход, при котором ему придётся выкидывать камни из мешка.

То есть, (а) первый всегда может сделать ход, соответствующей придуманной нами стратегии, (б) выкидыванием камней из мешка занимается исключительно второй игрок. Он и проиграет.

**C.** Начнём со случая $n = 13$. Если первый игрок взял $k$ камней, то второй может взять $13 - k$ и победить. Если $n$ не превосходит 14 и не равно 13, то все камни может взять за один ход первый игрок.

Для $n \geq 15$ рассмотрим два случая:

$n$ делится на 13. Заметим, что после любого хода первого игрока оставшееся количество камней не будет делиться на 13. Зато второй в случае любого хода первого сможет сделать так, что после его хода количество камней, оставшихся в кучке, будет вновь делиться на 13. Для этого на взятие $k$ камней, $1 \leq k \leq 12$, нужно ответить взятием $13 - k$ камней, на взятие 14 камней — 12 камнями, а на взятие 15 камней — 11 камнями. Ноль делится на 13 — кучка может остаться пустой только после хода второго игрока.

$n$ не делится на 13. Тогда выигрышная стратегия есть у первого игрока. Своим первым ходом он берёт от 1 до 12 камней так, чтобы осталось количество, кратное 13 — а затем играет так, как играл бы второй игрок в предыдущем пункте.

Ответ: если $n$ делится на 13, выигрывает второй игрок; иначе выигрывает первый.

## Задача 11. Возводим в степень

**A.** Подойдёт, например, 423 (делится на 9), 424 (делится на 4), 425 (делится на 25).

**B.** Укажите наименьшее натуральное число такое, что его половина — квадрат натурального числа, его треть — куб натурального числа, а его пятая часть — пятая степень натурального числа.

Будем искать это число в виде $2^m 3^n 5^k$: по условию, эти множители должны в него входить, а лишнего нам не надо. Ясно следующее:

$m$ делится на 3 и на 5, но нечётно;
$n$ делится на 2 и на 5, но имеет остаток 1 по модулю 3;
$k$ делится на 2 и на 3, но имеет остаток 1 по модулю 5.

Найдём наименьшие подходящие $m$, $n$ и $k$ — это 15, 10 и 6. Ответ: $2^{15} \cdot 3^{10} \cdot 5^6$.

**C.** Пусть нам надо придумать цепочку длины $n$. Возьмём $n$ произвольных простых чисел $p_1 \dots p_n$ — их квадраты являются попарно взаимно простыми.

В силу Китайской теоремы об остатках найдётся достаточно большое число $N$, сравнимое с $i$ по модулю $p_i^2$, $1 \le i \le n$. Искомой цепочкой будет $N - n \dots N - 1$.

## Задача 12. Шутка

**A.** Ответ «нет» в задаче–шутке смотрелся бы странно, поэтому в этом пункте подразумевается ответ «да»: из башни можно откачать воздух и сделать лестницу почти отвесной — тогда стул без ножек сможет двигаться вертикально вниз так же, как и его 30-ногий собрат, но ему не будет мешать сопротивление воздуха, наличествующее снаружи башни; в общем, он окажется быстрее.

**B.** Пусть $x_A$ задач было придумано вчера, $x_B$ — сегодня и $x_C$ — завтра. Тогда из условия

$$\begin{cases} x_B = 1.5(x_A + x_C) \\ x_B = 3x_C \\ x_A = 4 \end{cases}$$

Осталось только решить эти уравнения. Из первых двух легко вывести, что $x_A = x_C$, тогда $x_B = 1.5 \cdot 8 = 12$.

**C.** Автомобиль не сможет доехать до Пекина, так как за любое конечное время после своего старта он проезжает не более чем $80 + 40 + 20 + \ldots = 160$ километров.

# Задачи 2012 года

## Задачи 5 класса

### Задача 4.

**A.** Старуха Шапокляк очень любит животных. Все ее животные, кроме двух, — собаки, все, кроме двух, — кошки, и все, кроме двух, — попугаи, остальные — крыски. Сколько каких животных у старухи Шапокляк?

***Решение:*** Пусть у Шапокляк $s$ собак, $c$ кошек, $p$ попугаев и $k$ крысок. Тогда

$$\begin{cases} c + p + k = 2 \\ s + p + k = 2 \\ s + c + k = 2 \end{cases}$$

Вычитая эти равенства друг из друга, можно получить, что $s = c = p$. Более того, эти три числа обязаны не превосходить 1, потому что иначе суммы в левой части равенств будут больше двух.

Первый случай: $s = c = p = 0$. Тогда у Шапокляк две крыски, а других животных нет. Второй случай: $s = c = p = 1$. Тогда у шапокляк одна собака, одна кошка и один попугай, а крыс нет.

Оба ответа являются верными — более того, для получения полного балла за задачу оба должны быть приведены.

**B.** Четверо пятиклассников Андрей, Борис, Вася и Гена решили определить свой вес. Однако все четверо мальчиков на весы не помещались, поэтому они стали взвешиваться по трое или по двое. Оказалось, что Андрей, Боря и Вася вместе весят 90 кг, Боря, Вася и Гена — 92 кг, а Андрей и Гена — 58 кг. Сколько весят все мальчики вместе?

***Решение:*** Давайте сложим четыре результата, которые получились у мальчиков в условии задачи. Заметим, что тогда получится дважды вес всех мальчиков вместе, и он равен 240 кг. Значит, мальчики вместе весят 120 кг.

## Задача 5.

**B.** С 1 января цена билета в кинотеатр возросла по сравнению с декабрем на 20%, а выручка от продажи билетов возросла на 14%. Как изменилась посещаемость кинотеатра? Увеличилась или уменьшилась?

***Решение:*** Если бы посещаемость кинотеатра не изменилась, то выручка бы увеличилась так же, как и цена билета — на 20 процентов. Однако общая выручка уменьшилась — значит, посетителей стало приходить меньше. Можно даже посчитать, насколько меньше: $\frac{1.14}{1.20} = 0.95$ — то есть, в кинотеатр теперь ходит 95% от прежнего количества посетителей.

**C.** В мешке у Деда Мороза лежат 10 красно-синих (т.е. одна половина красная, а другая — синяя), 7 сине-зеленых, 5 зелено-красных шаров. Какое наименьшее число шаров должен вынуть из мешка Дед Мороз, чтобы нашелся такой цвет, который будет присутствовать в окраске не менее чем в пяти из вынутых шаров?

***Решение:*** Что означает, что нашёлся цвет, присутствующий в окраске пяти шаров? Это означает, что нашлись два сорта шаров (например, красно-зелёные и сине-зелёные), шаров из которых *в сумме* хотя бы пять.

Пусть Дед Мороз вынул пять шаров. Среди них должны присутствовать все три имеющихся типа, иначе есть два, которые в сумме дадут вынутые пять. Значит, шары распределены по типам как 2-2-1 или 3-1-1. Во втором случае какой шар ни возьми следующим — первый и второй или первый и третий типы в сумме дадут 5.

В первом случае можно взять ещё один шар третьего типа, а следующий, седьмой, уже даст нам пять шаров в сумме у двух типов.

Ответ — 7 шаров.

### Задача 6.

**A.** Дед рассказывал своим внучатам: «В комнате стояло 5 стульев. На них сидели 4 матери, 4 дочки, 3 бабушки, 2 прабабушки и 1 прапрабабушка. При этом каждая из них сидела на отдельном стуле.» «Это невозможно», — возразили внучата. «Я сам видел», — ответил дед. Правду ли сказал дед внучатам?

***Решение:*** Как ни странно, дед не соврал. Представим себе пять женщин: $^{(1)}$совсем девочка, $^{(2)}$её мама, $^{(3)}$её бабушка, $^{(4)}$её прабабушка, $^{(5)}$её прапрабабушка.

Дочерьми здесь являются четверо: (1)–(4), и матерями тоже четверо: (2)–(5). Трое, (3)–(5), — бабушки; двое, (4)–(5), — прабабушки; одна прапрабабушка.

**C.** Буратино не хотел ходить в школу, и черепаха Тортилла решила его проучить. Она не просто отдала ему Золотой ключик, а задала ему непростую задачу. Она вынесла три коробочки: красную, синюю и зеленую. На красной коробочке было написано «Здесь лежит Золотой ключик», на синей — «Зеленая коробочка пуста», а на зеленой — «Здесь сидит гадюка». Тортилла прочитала надписи Буратино и сказала: «Действительно, в одной коробочке лежит Золотой ключик, в другой — сидит гадюка, а третья коробочка пуста, но все эти надписи неверные». Где лежит Золотой ключик?

***Решение:*** Надпись на синей коробочке неверна — значит, зелёная коробочка непуста. И надпись на зелёной коробочке неверна — значит, в ней не гадюка. Отсюда в зелёной коробке лежит Золотой ключик.

# Задачи 6 класса

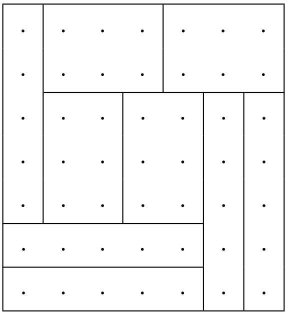
### Задача 2.

**B.** Гастрабайтер Гаджи хочет замостить квадратную комнату $7 \times 7$ метров панелями $1 \times 5$ и $2 \times 3$ метров. Сколько панелей ему понадобится? Приведите пример такого замощения. Может ли он обойтись другим количеством панелей?

***Решение:*** Разберёмся сначала с количеством панелей. Пусть есть замощение с $A$ панелями $1 \times 5$ и $B$ панелями $2 \times 3$. Тогда число

$49 - 5A$ должно делиться на 6 — в частности быть чётным. Среди всех чётных чисел, получающихся как $49 - 5A$ (4, 14, 24, 34, 44) на 6 делится только 24. Таким образом, замощение может состоять исключительно из 5 панелей $1 \times 5$ и 4 панелей $2 \times 3$.

Зная это, придумать замощение несложно:



**С.** У Карлсона было 20 банок варенья. Он расставил их на трех полках так, что на каждой полке стояло одинаковое количество литров варенья. На первую полку Карлсон поставил одну большую и четыре средних банки варенья, на вторую — две большие и шесть литровых банок, на третью — одну большую, три средних и три литровых банки. Сколько литров варенья было у Карлсона?

***Решение:*** Сравним первую и третью полки Карлсона. На первой четыре средних банки, а на третьей — три средних и ещё три литра. Значит, в одной средней банке три литра варенья. Соответственно, в трёх средних банках — девять литров.

Теперь сравним вторую и третью полки. На третьей — одна большая банка и ещё 12 литров варенья. На второй — две больших и ещё 6 литров. Значит одна большая банка содержит в себе 6 литров варенья.

Таким образом, на второй полке $2 \cdot 6 + 6 = 18$ литров варенья — и столько же на на первой, и столько же на третьей. Значит, у Карлсона 54 литра варенья.

## Задача 3.

**С.** Мальчик Вовочка записал в строчку один за другим 10 первых простых чисел в возрастающем порядке (единица не считается простым числом). Мальчик Дима сначала вычеркнул половину цифр в полученном числе так, что получилось наибольшее число, а затем снова из этого же числа вычеркнул половину цифр так, что получилось наименьшее число. На сколько наибольшее число больше наименьшего?

***Решение:*** Выпишем строку, полученную Вовочкой:

$$2357111317192329.$$

В ней 16 цифр, значит вычеркнуть надо 8. Первая цифра числа, которе мы получим, лежит среди первых 9 цифр строки — чтобы получить наибольшее число, мы должны максимизировать её. Подойдёт 7. Продолжая тем же образом, получим, что наибольшее число, которое мог получить Дима, —

$$77192329,$$

а наименьшее —

$$11111232.$$

Их разность равна 66081097.

## Задача 7.

**В.** Винни-Пух и Пятачок одновременно отправились в гости к друг другу. Но поскольку Винни-Пух всю дорогу сочинял очередную «шумелку», а Пятачок считал пролетавших галок, они не заметили друг друга при встрече. После встречи Пятачок подошел к дому Винни-Пуха через четыре минуты, а Винни-Пух подошел к дому Пятачка через одну минуту. Сколько минут был в пути каждый из них?

***Решение:*** Пусть $v_{\text{В}}$ — скорость Винни-Пуха, $v_{\Pi}$ — скорость Пятачка, а $t$ — время от их выхода из дома до встречи. Тогда из условия задачи ясно, что расстояние между домами Винни-Пуха и Пятачка выражается как

$$S = (t+1)v_{\text{В}} = (t+4)v_{\Pi} = t(v_{\text{В}} + v_{\Pi}).$$

Рассмотрим вторую и четвёртую части этого равенства:

$$\begin{aligned}
&tv_{\text{В}} + 1 \cdot v_{\text{В}} = tv_{\text{В}} + tv_{\text{П}}\\
&1 \cdot v_{\text{В}} = tv_{\text{П}}\\
&\frac{v_{\text{В}}}{v_{\text{П}}} = \frac{t}{1}
\end{aligned}$$

Теперь, зная это, разберёмся со второй и третьей частями:

$$\begin{aligned}
&(t+1)tv_{\text{П}} = (t+4)v_{\text{П}}, \quad t > 0\\
&t(t+1) = t+4\\
&t^2 = 4 \implies t = 2.
\end{aligned}$$

Таким образом, Винни-Пух был в пути 3 минуты, а Пятачок — 6 минут.

## Задача 8.

**A.** Может ли какая-нибудь степень двойки содержать в своей записи поровну нулей, единиц, двоек, ..., девяток?

***Решение:*** Пусть каждая из цифр встречается в этой степени двойки по $k$ раз. Тогда сумма цифр степени двойки равна $k(0+\ldots+9) = k{\cdot}45$. То есть, по признаку делимости на 3, степень двойки делится на 3. Такого не может быть — получили противоречие.

**B.** Однажды перед сном мальчик Вовочка просчитал вслух от одного до тысячи. Сколько слов произнес Вовочка? Каждое слово считается столько раз, сколько оно произнесено.

***Решение:*** Пусть $D$ — количество слов, которое нужно произнести, чтобы посчитать от 1 до 99. Тогда всего Вовочка произнёс $10D + 900 + 1$ слов: в каждой стоне нужно посчитать от 1 до 99, плюс 900 трёхзначных чисел дают по одному слову для обозначения сотен, плюс слово «тысяча».

Осталось найти $D$. 27 чисел требуют одно слово для произнесения: 1, 2, 3, ..., 19, 20, 30, 40, ..., 80, 90. Все остальные — а их $99 - 27 = 72$ — по два слова. Отсюда

$$D = 72 \cdot 2 + 27 = 171;$$
$$10D + 901 = 2611.$$

# Задачи 7 класса

## Задача 1.

**A.** Существуют ли два таких натуральных числа, наибольший общий делитель которых равен 110, а наименьшее общее кратное равно 2000?

***Решение:*** Таких чисел, конечно же, не существует, ведь наименьшее общее кратное всегда делится на наибольший общий делитель — а 2000 не делится на 110.

**B.** Вовочка умножил два подряд стоящих натуральных числа и получил число, состоящее из цифр 1, 3, 4, 5, 7, 8 и 9. Покажите, что Вовочка ошибся.

***Решение:*** $1+3+4+5+6+7+8+9 = 45-2 = 43$ — имеет остаток 1 при делении на 3. Значит, в соответствии с признаком делимости на 3, число, составленное из этих цифр, также будет иметь остаток 1. Произведение же двух последовательных натуральных чисел может иметь либо остаток 0 ($0 \cdot 1 = 2 \cdot 0 = 0$), либо остаток 2 ($1 \cdot 2 = 2$). Поэтому Вовочка неправ.

**C.** Существуют ли 2012 ненулевых числа, никакие два из которых не равны между собой, таких, что их сумма равна их произведению?

***Решение:*** Укажем, как построить набор из таких чисел: он будет иметь вид

$$1, 2, 3, 4, \ldots, 2011, x;$$

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 2011 + x = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2011 \cdot x.$$

Чтобы выполнить условие задачи, нужно взять $x$, равный

$$\frac{1 + 2 + 3 + \ldots + 2011}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2011 - 1}.$$

Это число строго меньше единицы (очевидно), поэтому не будет совпадать ни с одним из взятых до него.

## Задача 2.

**A.** Прямоугольник разрезами, параллельными его сторонам, разбит на 4 маленьких прямоугольника. Площади трех из них известны. Это 3, 4, 5. Найдите площадь четвертого.

***Решение:*** Ответ в этой задаче зависит от того, какой из прямоугольников, площадь которого известна, находится «между» двумя другими:

| | |
|---|---|
| 4 | 3 |
| $5 \cdot \frac{4}{3} = \frac{20}{3}$ | 5 |

| | |
|---|---|
| 3 | 4 |
| $5 \cdot \frac{3}{4} = \frac{15}{4}$ | 5 |

| | |
|---|---|
| 3 | 5 |
| $4 \cdot \frac{3}{5} = \frac{12}{5}$ | 4 |

**B.** Мальчики Вова и Дима купили по одной новогодней открытке и каждый разрезал свою открытку на два прямоугольника равной площади. Один из прямоугольников мальчики выбросили, а другой оставили себе. Оказалось, что периметр Вовиного прямоугольника равен 14 см, периметр Диминого — 19 см. Найдите периметр и стороны прямоугольной открытки у каждого из мальчиков.

## Задача 3.

**A.** Не используя технические средства, сравните дроби

$$\frac{2012}{2013} \quad \text{и} \quad \frac{2012000000002012}{2013000000002013}.$$

***Решение:*** Эти дроби равны между собой: вторая получается из первой домножением числителя и знаменателя на 1000000000001.

## Задача 4.

**A.** Какую четверку цифр надо приписать справа к числу 2012, чтобы полученное восьмизначное число делилось на 2013?

***Решение:*** Очевидно, что числа 20130000 и 2013 делятся на 2013. Вычитая их друг из друга, получим все возможные ответы:

$$20130002013 = 20127987$$
$$2013000 - 2 \cdot 2013 = 20125974$$
$$2013000 - 3 \cdot 2013 = 20123961$$
$$2013000 - 4 \cdot 2013 = 20121948$$

**С.** Произведение шести последовательных натуральных чисел может быть равно произведению трех последовательных натуральных чисел. Например,

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 8 \cdot 9 \cdot 10 = 720.$$

Есть ли еще такие числа?

***Решение:*** В задаче требуется найти числа $x$, $y$ такие, что

$$x(x+1)\ldots(x+5) = y(y+1)(y+2).$$

Частично раскроем скобки в этом выражении —

$$(x^2+5x)(x^2+5x+4)(x^2+5x+6) = y(y+1)(y+2).$$

Отсюда

$$x^2+5x < y < x^2+5x+4.$$

Для переменной $y$ остаётся три варианта — $x^2+5x+1$, $x^2+5x+2$, $x^2+5x+3$. Подставив каждый из этих вариантов в правую часть, можно убедиться, что решений для $x > 1$ у уравнения не будет.

## Задача 5.

**С.** Вдоль прямолинейной аллеи городского парка растет 5 деревьев. Известны 8 из 10 попарных расстояний между ними: 1 м, 1 м, 2 м, 2 м, 3 м, 3 м, 3 м, 4 м. Найдите два остальных расстояния.

***Решение:*** Очевидно, что все попарные расстояния между деревьями целые — в том числе остальные два: в противном случае нецелых расстояний было бы больше, чем два. Значит, мы можем считать, что все деревья расположены в целых точках вещественной оси.

Некоторые из самых маленьких расстояний среди перечисленных являются расстояниями между соседними деревьями — два однометровых расстояния точно такие. Может быть так, что метровые промежутки между деревьями являются соседними ($a \xleftrightarrow{1\,\text{м}} b \xleftrightarrow{1\,\text{м}} c$), а может, что и нет.

В первом случае одно из двухметровых расстояний получается как сумма однометровых. У оставшегося двухметрового расстояния не остаётся других вариантов, кроме как быть длиной промежутка между соседними деревьями.

Если это два дерева, отличные от $a$, $b$, $c$, то получается следующая ситуация:

$$a \xleftrightarrow{1\,\text{м}} b \xleftrightarrow{1\,\text{м}} c \qquad d \xleftrightarrow{2\,\text{м}} e.$$

Тогда $cd = 3\,\text{м}$, и другие трёхметровые расстояния нам попросту никуда не вписать.

Если одно из этих двух деревьев — $a$ или $c$, то получаем однозначный вариант:

$$d \xleftrightarrow{2\,\text{м}} a \xleftrightarrow{1\,\text{м}} b \xleftrightarrow{1\,\text{м}} c \xleftrightarrow{3\,\text{м}} e,$$

Который, очевидно, не удовлетворяет условию задачи.

Во втором случае двухметровые расстояния также являются расстояниями между соседними деревьями. Это даёт нам однозначный с точностью до симметрии ответ: деревья стоят в точках 0, 1, 3, 4, 6, и оставшиеся два расстояния — 5 и 6.

# Задачи 8 класса

## Задача 3.

**В.** Натуральные числа $m$, $n$ удовлетворяют равенству

$$(m-n)^2 = \frac{4mn}{m+n-1}.$$

Докажите, что $m+n$ – квадрат натурального числа.

***Решение:*** По условию задачи,

$$(m-n)^2(m+n-1)-4mn=0.$$

Продолжим цепочку равенств:

$$\begin{aligned}&(m-n)^2(m+n-1)-4mn=\\&=m^3+n^3-m^2n-mn^2-m^2-2mn-n^2=\\&=(m+n)(m^2-mn+n^2)-mn(m+n)-(m+n)^2=\\&=(m+n)(m-n)^2-(m+n)^2.\end{aligned}$$

Отсюда можно понять, что число $m+n$ является отношением двух квадратов а, значит, и само квадрат.

**C.** Вещественные числа $x$, $y$ удовлетворяют соотношениям

$$x^2+xy+y^2=4 \quad \text{и} \quad x^4+x^2y^2+y^4=8.$$

Найти значение выражения $x^6+x^3y^3+y^6$.

***Решение:***

$$\begin{cases}(x+y)^2-xy=4\\(x+y)^4-4xy(x+y)^2+2(xy)^2=8\\\textit{Найти } (x+y)^6-6xy(x+y)^4+9(xy)^2(x+y)^2-(xy)^3\end{cases}$$

$$\begin{cases}T_1-T_2=4 \qquad (T_1=T_2+4)\\T_1^2-4T_1T_2+2T_2^2=8\end{cases}$$

$$(T_2+4)^2-4(T_2+4)T_2+2T_2^2=8$$

$$-T_2^2-8T_2+8=0$$

$$T_2=-4\pm2\sqrt{6} \qquad (T_1=\pm2\sqrt{6})$$

Теперь мы знаем сумму и произведение $x$ и $y$. Можно как подставить значения $T_1$ и $T_2$ в выражение в первой системе, равное исходному, так и явно найти $x$, $y$ и посчитать нужное выражение для них.

## Задача 4.

**A.** Какое из чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 надо выбросить, чтобы сумма квадратов из трёх оставшихся чисел оказалась равной сумме квадратов других трёх оставшихся чисел?

***Решение:*** Сейчас у нас есть семь «подозреваемых» чисел, которые можно выкинуть. Давайте сократим их количество. Заметим, что если две суммы чисел равны, то они равны и по модулю 2, и по модулю 3. Выпишем остатки от деления квадратов чисел 1–7 на 2 и на 3 и посмотрим, какой из них нужно выкинуть, чтобы можно было поделить оставшееся на две части.

| x | 1 | **2** | 3 | **4** | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2 \bmod 2$ | 1 | **0** | 1 | **0** | 1 | 0 | 1 |
| $x^2 \bmod 3$ | 1 | **1** | 0 | **1** | 1 | 0 | 1 |

Легко понять, что надо сверху выкинуть ноль (чтобы сумма оставшихся чисел была чётна), а снизу единицу. То есть, либо $2^2$, либо $4^2$.

Сумма $1^2 + \ldots + 7^2$ равна 140. $\frac{140-4}{2} = 68$, $68 - 49 = 19$ — двумя из трёх квадратов, которые мы поместим вместе с 49, нельзя собрать 19 (потому что 19 вообще не получается как сумма двух квадратов), поэтому вариант с выкидыванием двойки не подходит.

Наконец, $\frac{140-16}{2} = 62$, $49 + 9 + 4 = 62 = 36 + 25 + 1$. Это и есть ответ.

**C.** Найдите все пары $(x, y)$ неотрицательных целых чисел, удовлетворяющих равенству

$$x - y = x^2 + xy + y^2.$$

***Решение:*** Заметим, что при $x \geq 2$ правая часть строго больше $x$, а левая — не больше его. Значит, $x = 0$ или $x = 1$. Если $x = 0$, то $-y = y^2$, $y = 0$. Если $x = 1$, то $1 - y = y^2 + y + 1$, $y(y + 2) = 0$, $y = 0$.

Ответ: $(0, 0)$, $(1, 0)$.

## Задача 7.

**A.** У бизнесмена Березова было предприятий в 3 раза меньше, чем у бизнесмена Романова. Если бы Березов отсудил еще столько же предприятий у Романова, сколько имел, то у них обоих число предприятий стало бы одинаково. Сколько предприятий было у бизнесмена Романова?

***Решение:*** Любое число предприятий, кратное трём.

Действительно, если у Романова сейчас $3x$ предприятий, то у Березова $x$. И если Березов отсудит $x$ предприятий у Романова, то у обоих станет поровну — по $2x$. И этот результат не зависит от конкретного $x$, то есть, рассуждения можно проделать при любом его значении.

# Задачи Петербургских турниров юных математиков

## Задачи 2018 года

### Задача 1. Узоры на скатерти Улама

Расположим натуральные числа в виде спирали, как показано на рисунке ниже. Полученная картинка называется скатертью Улама.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 37 | 36 | 35 | 34 | 33 | 32 | 31 |
| 38 | 17 | 16 | 15 | 14 | 13 | 30 |
| 39 | 18 | 5 | 4 | 3 | 12 | 29 |
| 40 | 19 | 6 | 1 | 2 | 11 | 28 |
| 41 | 20 | 7 | 8 | 9 | 10 | 27 |
| 42 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 |
| 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | … |

В этой задаче требуется изучить закономерности и узоры, связанные с расположением разных числовых последовательности на скатерти. Интерес представляют не только гипотезы, полученные, например, на компьютере, но и явные соотношения.

**1.** Выясните, как на скатерти Улама описываются числовые последовательности на вертикальных, горизонтальных и диагональных прямых.

**2.** Исследуйте на скатерти расположения

a) квадратных чисел $\mathcal{F}_n^{(4)}$,

b) треугольных чисел $\mathcal{F}_n^{(3)}$ (найдите количество ветвей на получающейся картинке),

c) фигурных чисел разных порядков $\mathcal{F}_n^{(m)}$,

d) многомерных фигурных чисел.

**3.** Исследуйте на скатерти Улама расположения арифметических и геометрических прогрессий. Попробуйте также описать расположения известных числовых последовательностей, возникающих в комбинаторике: чисел Фибоначчи, чисел Каталана и т.п.

**4.** Рассмотрите другие нумерации целых точек всей плоскости или каких-то фигур на этой плоскости. Например, занумеруем сектор следующим образом:

$$\begin{array}{cccccc}
1 & & & & & \\
2 & 3 & & & & \\
4 & 5 & 6 & & & \\
7 & 8 & 9 & 10 & & \\
11 & 12 & 13 & 14 & 15 & \\
16 & 17 & 18 & 19 & 20 & 21
\end{array}$$

Ответьте на сформулированные выше вопросы для новых нумераций.

## Задача 2. Префиксные отображения

Пусть $X_1, X_2, X_3, \ldots$ — последовательность множеств. Обозначим через $P$ множество всех последовательностей $a = (a_1, a_2, \ldots,)$, где $a_i \in X_i$. Последовательность $a^{(i)}$ элементов $P$ (то есть последовательность последовательностей) назовём сходящейся к элементу $a \in P$, если для каждого фиксированного $n$ последовательность $a_n^{(i)}$ стабилизируется и $a_n^{(i)} = a_n$ для достаточно больших $i$. Подмножество $C \subseteq P$ называется замкнутым, если любая сходящаяся последовательность элементов из $C$ сходится к элементу из $C$. Отображение $F : P \to P$ называется замкнутым, если оно переводит замкнутые подмножества в замкнутые подмножества.

Рассмотрим набор отображений

$$f_i : X_1 \times \ldots \times X_i \longrightarrow X_i,$$

каждое из которых будем называть префиксными компонентами. По префиксным компонентам зададим префиксное отображение — функцию

$F : P \to P$, действующую по формуле

$$F(x_1, x_2, x_3, \dots) = (f_1(x_1), f_2(x_1, x_2), f_3(x_1, x_2, x_3), \dots).$$

1. Приведите пример функции, не являющейся префиксным отображением. Докажите, что если все $X_i$ конечны, то любое префиксное отображение замкнуто.

2. Пусть $X_i = \mathbb{R}^{n_i}$. Докажите, что если компоненты префиксного отображения являются линейными отображениями, то такое префиксное отображение замкнуто.

3. Пусть компоненты $f_i$ не зависят от первых $i-1$ переменной для любого $i$, то есть существуют функции $g_i : X_i \to X_i$ такие, что $f_i(a_1, \dots, a_i) = g_i(a_i)$. Докажите, что такое префиксное отображение замкнуто.

4. Покажите, что если все $X_i$ бесконечны, то существует незамкнутое префиксное отображение. А если некоторые из $X_i$ конечны?

5. Пусть $X_i = \mathbb{R}^2$. Существуют ли незамкнутые префиксные отображения, компоненты которых заданы многочленами?

6. Пусть $X_i = \mathbb{R}^{n_i}$. Предложите свои условия, при которых префиксное отображение будет замкнутым.

## Задача 3. Обобщенные гиперболические и тригонометрические системы

Пусть $n \geq 2$. Набор бесконечно–дифференцируемых функций $\mathbf{H}_n = (H_1, \dots, H_n)$ из $\mathbf{R}$ в $\mathbf{R}$ назовём *гиперболической системой* порядка $n$, если $H_i' = H_{i+1}$ для $1 \leq i < n$, $H_n' = H_1$ и $H_i(0) = \delta_{i,n}$. Аналогично, набор бесконечно–дифференцируемых функций $\mathbf{T}_n = (T_1, \dots, T_n)$ из $\mathbf{R}$ в $\mathbf{R}$ называется *тригонометрической системой* порядка $n$, если $T_i' = T_{i+1}$ для $1 \leq i < n$, $T_n' = -T_1$ и $T_i(0) = \delta_{i,n}$.

1. Докажите, что пары $(\mathrm{sh}(t), \mathrm{ch}(t))$ и $(\sin(t), \cos(t))$ задают, соответственно, единственные возможные гиперболические и тригонометрические системы порядка 2. В явном виде опишите гиперболические и тригонометрические системы порядка $n$.

2. Докажите, что для гиперболических и тригонометрических систем порядка 2 выполнены формулы Эйлера: $H_2(t) + H_1(t) = e^t$ и $T_2(t) + iT_1(t) = e^{it}$. Обобщите их на произвольные системы $\mathbf{H}_n, \mathbf{T}_n$.

3. При всех $1 \le i \le n$ выразите $H_i(s+t)$ через $H_j(s), H_k(t)$ и $T_i(s+t)$ через $T_j(s), T_k(t)$. Кроме того, исследуйте функции из наборов $\mathbf{H}_n$ и $\mathbf{T}_n$ на четность и нечетность.

   Пусть $\lambda \in \mathbf{R}_+$. Изучите предыдущие пункты для модифицированных систем $\mathbf{H}_n^\lambda$ и $\mathbf{T}_n^\lambda$, в определении которых фигурируют равенства $H_n'(t) = \lambda H_1(t)$ и $T_n'(t) = -\lambda T_1(t)$, соответственно.

4. Докажите, что для гиперболических и тригонометрических систем порядка 2 выполнены соотношения $H_2^2(t) - H_1^2(t) = 1$ и $T_2^2(t) + T_1^2(t) = 1$. Иными словами, образы при отображениях $L_2 : t \mapsto (H_1(t), H_2(t))$ и $M_2 : t \mapsto (T_1(t), T_2(t))$ из $\mathbf{R}$ в $\mathbf{R}^2$ могут быть заданы алгебраическими уравнениями. Выясните, можно ли задать образы при отображениях

$$L_n : t \longmapsto (H_1(t), \ldots, H_n(t))$$
$$M_n : t \longmapsto (T_1(t), \ldots, T_n(t))$$

   из $\mathbf{R}$ в $\mathbf{R}^n$ алгебраическими уравнениями. В частности, найдите однородные многочлены $p_n, q_n$ степени $n$ такие, что для $f_n := p_n - 1$ и $g_n := q_n - 1$ выполнено

$$f_n(H_1(t), \ldots, H_n(t)) = 0,$$
$$g_n(T_1(t), \ldots, T_n(t)) = 0$$

   при любом $t$. Например, $f_2(x, y) = y^2 - x^2 - 1$ и $g_2(x, y) = y^2 + x^2 - 1$. Верно ли, что многочлены $f_n, g_n \in \mathbf{Q}[x_1, \ldots, x_n]$ неприводимы?

5. Опишите все перестановки $\sigma \in S_n$, для которых $p_n(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) = p_n(x_1, \ldots, x_n)$ при всех $x_1, \ldots, x_n$. Аналогичный вопрос для $q_n$.

6. Опишите все точки образов $L_n$ и $M_n$ в $\mathbf{R}^n$ с целыми координатами. Опишите все точки с рациональными координатами.

   Придумайте, как по двум целым / рациональным точкам из образов $L_n, M_n$ получить новую целую / рациональную точку на $L_n$ и $M_n$ соответственно. Изучите получающееся «сложение точек».

## Задача 4. Многоугольники

1. Пусть $F_1$ и $F_2$ - два выпуклых многоугольника, множества вершин которых совпадают. Покажите, что $F_1$ равен $F_2$.

2. Пусть $F_1$ и $F_2$ не обязательно выпуклы, но удовлетворяют условию про вершины. Выясните, что можно сказать про их расположение.

3. Пусть $F_1$ и $F_2$ выпуклы, а середины сторон $F_1$ лежат в $F_2$. Как связаны площади $F_1$ и $F_2$?

4. Пусть $F_1$ и $F_2$ выпуклы, а середины сторон $F_1$ лежат в $F_2$ и середины сторон $F_2$ лежат в $F_1$. Верно ли, что такие многоугольники равны?

5. Зафиксируем $0 \leq \alpha \leq 1$. Точка на стороне многоугольника называется его $\alpha$–серединой, если она делит эту сторону в отношении $\alpha : (1-\alpha)$. Известно, что для каждой стороны $F_1$ какая-то $\alpha$–середина лежит в $F_2$. Что можно сказать про площади $F_1$ и $F_2$?

6. Исследуйте предыдущие вопросы в случае, когда один из многоугольников не обязательно выпуклый.

## Задача 5. Конечные вычисления

Основная идея этой задачи — исследование дискретных аналогов дифференцирования и интегрирования. Интерес представляют явные сравнения непрерывных и дискретных конструкций между собой.

Обозначим через **Seq** множество всех вещественных числовых последовательностей. Сами последовательности будем обозначать символами $x_n \in \mathbf{Seq}$, а их соответствующие элементы (значения) под номером $k$ через $x_n[k]$ (начиная с 0). Таким образом, $x_n = y_n \iff x_n[k] = y_n[k], \forall k \geq 0$.

Определим функции $\Delta, \int$ из **Seq** в **Seq** по правилам

$$(\Delta x_n)[k] := x_n[k+1] - x_n[k]$$
$$\left(\int x_n dn\right)[k] := \sum_{i=0}^{k-1} x_n[i].$$

Они называются разностным оператором и оператором суммирования, а последовательности $\Delta x_n, \int x_n dn$ — производной и интегралом $x_n$ соответственно. Если $\Delta F_n = x_n$, то $F_n$ называется первообразной $x_n$. Если $A$ — некоторый оператор (т.е. функция из **Seq** в **Seq**), то $A^n$ — это новый оператор, являющийся композицией $A$ с собой $n$ раз.

1. Опишите связи между производной, интегралом, первообразной и сдвигом $x_n$, где под сдвигом понимается $(\mathbf{E}x_n)[k] = x_n[k+1]$. Кроме того, найдите явную формулу для $\Delta^m x_n$.

Константы $c \in \mathbf{R}$ задают постоянные и показательные последовательности $\mathrm{c}, \mathrm{c}^n \in \mathbf{Seq}$ по формулам $\mathrm{c}[k] := c$ и $\mathrm{c}^n[k] := c^k$. Кроме того, определим для $m = 0, 1, 2, \ldots$ последовательности $n^m$ и $n^{\underline{m}}$ степеней и падающих степеней по формулам $n^m[k] := k^m$ и $n^{\underline{m}}[k] := k(k-1)(k-2)\cdot\ldots\cdot(k-(m-1))$. Набор всех последовательностей из $\mathbf{Seq}$, которые могут быть выражены как линейные комбинации последовательностей $1, n, n^2, \ldots, n^{m-1}$, обозначим через $\boldsymbol{P}_m$. Аналогично, через $\boldsymbol{FP}_m$ обозначим последовательности, являющиеся линейными комбинациями падающих степеней $1$, $n$, $n^{\underline{2}}$, …, $n^{\underline{m-1}}$. Последовательности из $\boldsymbol{P}_m$ или $\boldsymbol{FP}_m$ будем называть полиномиальными.

**2.** Выясните, как связаны между собой $\boldsymbol{P}_m$ и $\boldsymbol{FP}_m$ и предложите какие–нибудь интересные эквивалентные описания последовательностей из этих множеств. Точнее, сравните $\boldsymbol{P}_i$ и $\Delta^j$. А как связаны между собой $\int x_n dn$ и $\boldsymbol{P}_i$?

**3.** Найдите дискретные аналоги формул Ньютона–Лейбница и интегрирования по частям. Затем найдите в явном виде $\int n\,dn$, $\int n^2 dn$, $\int \boldsymbol{F}_n^{(3)} dn$, $\int \lambda^n dn$, $\int n\lambda^{n-1} dn$, $\int n^2 2^{n-1} dn$, $\int \boldsymbol{F}_n^{(m)} dn$. Существует ли комбинаторное / геометрическое решение? Предложите свои собственные числовые последовательности и опишите их производные и интегралы. Например, рассмотрите известные числовые последовательности такие, как числа Фибоначчи.

**4.** Рассмотрим последовательность $S_n^{(m)}$, которая определяется по формуле $S_n^{(m)} := \int n^m dn$. Покажите, что $S_n^{(m)}$ является полиномиальной последовательностью и в явном виде выразите её через последовательности степеней или падающих степеней.

**5.** Для каждой последовательности $x_n \in \mathbf{Seq}$ определим её последовательность Тейлора $\langle x_n \rangle$ по правилу $\langle x_n \rangle[k] := (\Delta^k x_n)[0]$. Найдите последовательности Тейлора ваших любимых последовательностей. Например, последовательностей падающих степеней. Кроме того, докажите, что функция $x_n \mapsto \langle x_n \rangle$ обратима и в явном виде найдите её обратную.

Обозначим через $\boldsymbol{P}_\infty$ множество всех формальных бесконечных комбинаций вида

$$x_n = \alpha_0 + \alpha_1 n^{\underline{1}} + \alpha_2 n^{\underline{2}} + \ldots,$$

где $\alpha_k \in \mathbf{R}$. Каждая такая комбинация, в действительности, определяет числовую последовательность $x_n \in \mathbf{Seq}$, потому что при каждом $k$ сумма $x_n[k]$ будет конечна.

Например, $\boldsymbol{P}_m \subset \boldsymbol{P}_\infty$ при всех $m \geq 1$. Докажите, что каждая последовательность в **Seq** может быть представлена в таком виде и явно найдите соответствующие коэффициенты $\alpha_k$.

**6.** Придумайте свои обобщения полученных результатов. Например, изучите периодические или рекуррентные последовательности, их производные, интегралы и связанные с ними тождества — рассмотрите функцию $\Delta_T(x_n)[k] := x_n[k+T] - x_n[k]$, придумайте аналог биномиальной теоремы для падающих степеней, изучите «дифференциальные уравнения» вида $\sum_{i=1}^m \alpha_i \Delta^i(x_n) = 0$, исследуйте частные производные последовательностей от двух индексов $x_{n,m}$ и кратные интегралы $\int\int x_{n,m} dn\, dm$ или привлеките иные методы дискретной математики для изучения разных классов последовательностей.

## Задача 6. Геометрия и алгебра слов

Рассмотрим некоторое конечное множество $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$, которое будем называть алфавитом. Для каждого элемента $a \in A$ введём дополнительно символ $a^{-1}$. Множество всх таких символов обозначим за $A^{-1}$. Теперь определим расширенный алфавит $\mathbb{Q} = A \cup A^{-1}$. Тем самым можно рассмотреть набор

$$\mathbb{Q}^* = \{\varepsilon, a_1, a_2, \ldots, a_1^{-1}, a_2^{-1}, \ldots, a_1 a_1, a_1 a_2, \ldots, a_1 a_1^{-1}, a_1 a_2^{-1}, \ldots\}$$

всех слов, которые можно получить из букв алфавита $\mathbb{Q}$, где $\varepsilon$ — пустое слово длины ноль. На этом наборе определена операция приписывания слов, которую можно рассматривать как функцию $\mathbb{Q}^* \times \mathbb{Q}^* \to \mathbb{Q}^*$. Например, $abaa \cdot ba = abaaba$. Коротко будем записывать $a^n = a \cdot \ldots \cdot a$ ($n$ раз).

Зафиксируем некоторый набор изометрий $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\} \subseteq \mathrm{Isom}(\mathbf{R}^n)$ пространства $\mathbf{R}^n$. Мы можем компонировать данные изометрии между собой: $xy := x \circ y$. Для каждой изометрии $x \in X$ по–определению есть обратное отображение $x^{-1}$, которое тоже будет изометрией. Теперь определена функция $f_X : \mathbb{Q}^* \longrightarrow \mathrm{Isom}(\mathbf{R}^n)$, которая действует следующим образом: буквам $a_i$ сопоставляются изометрии $x_i$, буквам $a_i^{-1}$ сопоставляются изометрии $x_i^{-1}$, пустому слову $\varepsilon$ сопоставляется тождественное отображение $\mathrm{id}$, а образ длинного слова вычисляется по рекуррентному правилу $f_X(w_1 w_2) = f_X(w_1) \cdot f_X(w_2)$.

На геометрическом уровне некоторые получающиеся слова будут совпадать. Например, если $x, y$ — это переносы на векторы $(1, 0)$ и $(0, 1)$ в $\mathbf{R}^2$, то изометрии $xy$ и $yx$ равны. Кроме того, если $z, w$ — это отражение относительно начала координат и поворот против часовой стрелки на $\pi/2$ относительно нуля, то $zx \neq xz$, $z^2 = w^4 = \mathrm{id}$ и $y^{-1}wx = \mathrm{id}$. Таким образом, некоторые слова в получающемся языке должны интерпретироваться как совпадающие. Будем говорить, что два слова $u, v \in \mathbb{O}^*$ являются $X$–эквивалентными, если $f_X(u) = f_X(v)$. Через $W_X$ обозначается фактормножество множества $\mathbb{O}^*$ по получающемуся отношению эквивалентности (такое множество однозначно задаётся каким–нибудь полным набором из попарно неэквивалентных слов, то есть таким набором, что любое слово $v \in \mathbb{O}^*$ эквивалентно слову из него, но никакие два разных слова из в наборе друг другу не эквивалентны).

**0.** Докажите, что $X$–эквивалентность является отношением эквивалентности на $\mathbb{O}^*$.

Через $R \subseteq \mathbb{O}^*$ будем обозначать какой-то фиксированный набор слов, а слова из $R$ будем называть *пустыми* (на геометрическом уровне пустые слова будут отвечать тождественным изометриям). Будем говорить, что два слова $w, u \in \mathbb{O}^*$ являются $R$–эквивалентными и писать $u \equiv v$, если $u$ можно получить из $w$ с помощью многократного применения следующей операции: между любыми двумя буквами слова $w$ (или с краю) можно вставить (приписать) любое слово из $\overline{R} := R \cup \{\varepsilon\} \cup \{aa^{-1} \mid a \in A\} \cup \{a^{-1}a \mid a \in A\}$, а также из слова $w$ можно вычеркнуть отрезок (часть), равный одному из слов в $\overline{R}$. Считается, что если вычеркнуть из слова само слово, то останется слово длины ноль, т.е. $\varepsilon$. Через $\langle \mathbb{O} \mid R \rangle$ обозначается фактормножество $\mathbb{O}^*$ по такому отношению эквивалентности.

**0.** Докажите, что $R$–эквивалентность является отношением эквивалентности на $\mathbb{O}^*$ и проверьте, что если $u, v, w, w' \in \mathbb{O}^*$ и $w \equiv w'$, то $uwv \equiv uw'v$.

В этой задаче предлагается изучить алгебраические аспекты изометрий, в основном возникающих как движения (чаще, отражения) из

$$Fix(\Phi) := \{\varphi \in \mathrm{Isom}(\mathbf{R}^n) \mid \varphi(\Phi) = \Phi\},$$

сохраняющие данную геометрическую фигуру $\Phi$ в $\mathbf{R}^n$.

**1.** Пусть $A = \{a, b\}$ и $R = \{a^2, b^2, abab\}$. Тогда, например, $bab \equiv aabab \equiv a \equiv abb \equiv \varepsilon a \varepsilon b \varepsilon b \varepsilon$.

a) Докажите, что любое слово из $\mathbb{Q}^*$, в действительности, $R$–эквивалентно одному из слов из $\{\varepsilon, a, b, ab\}$.

b) Найдите пару $(X = \{x, y\}, f_X)$ из двух изометрий $x, y \neq \mathrm{id}$ и функции $f_X : \mathbb{Q}^* \to \mathrm{Isom}(\mathbf{R}^n)$, для которой отношения $R$– и $X$–эквивалентности совпадают. Можно ли выбрать $x, y \in Fix(\Phi)$ для подходящей фигуры $\Phi$ и в какой наименьшей размерности?

c) Докажите, что слова $\varepsilon, a, b, ab$ все попарно $R$–неэквивалентны.

**2.** Пусть $X = \{x, y\}$, где $x, y$ — это нетривиальный перенос на вектор $(1, 0)$ и нетривиальная скользящая симметрия в перпендикулярном направлении соответственно.

a) Докажите, что $xyx = y$, то есть $xyxy^{-1} = \mathrm{id}$.

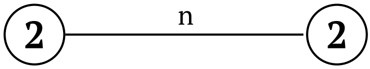
b) Пусть $A = \{a, b\}$ и $R = \{abab^{-1}\} \subseteq \mathbb{Q}^*$. Определена функция $f_X$, переводящая $a, b$ в $x, y$ и продолжающаяся на все слова алфавита $\mathbb{Q}$ по установленным в условии правилам. Докажите, что отношения $R$– и $X$–эквивалентности совпадают.

**3.** Рассмотрим квадратную табличку из $m \times m$ натуральных чисел $d_{i,j} \geq 2$, среди которых может встретиться символ $\infty$. Построим по ней граф $\Gamma = (V, E)$, в котором $V = \{r_1, r_2, \ldots, r_m\}$, а вершины $r_i, r_j$ соединены ребром в том и только в том случае, когда $d_{i,j} \geq 3$ (включая $\infty$). В вершинах графа $\Gamma$ изображаются числа $d_{i,i}$, а число $d_{i,j}$ рисуется на ребре $(r_i, r_j)$ в том и только в том случае, когда $d_{i,j} \geq 4$ (включая $\infty$). Этими условиями исходная таблица восстанавливается по графу однозначно. Пусть $A = V$, а $R \subseteq \mathbb{Q}^*$ всех слов вида $(r_i r_j)^{d_{i,j}}$, где $i \neq j$, и всех слов вида $r_i^{d_{i,i}}$. Если $d_{i,j} = \infty$, то соответствующее слово не входит в $R$. Будем обозначать $G_\Gamma := \langle \mathbb{Q} \mid R \rangle$. Решения дальнейших вопросов интересны даже при малых $m$.

a) Опишите $G_\Gamma$ для графа с одной вершиной с $d_{1,1} = n$, где $n \geq 2$. Найдите такую изометрию $a$, для которой $a^k \neq \mathrm{id}$ при $1 \leq k < n$ но $a^n = \mathrm{id}$. В частности, найдите пару $(X, f_X)$, для которой отношения $R$– и $X$–эквивалентности совпадают.

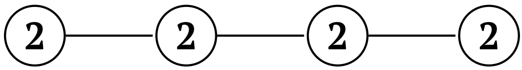
b) Опишите $G_\Gamma$ для графа с $n$ изолированными вершинами, где $d_{i,i} = 2$, и найдите пару $(X, f_X)$, для которой отношения $R$– и $X$–эквивалентности совпадают. А что, вообще, происходит с алфавитом при взятии дюзъюнктного объединения графов?

c) Опишите $G_\Gamma$ для графа ниже ($n \geq 2$ или $n = \infty$) и найдите пару $(X, f_X)$, для которой отношения $R$– и $X$–эквивалентности совпадают.




d) Решите аналогичную задачу для графа


e) Более общо, решите аналогичную задачу для графа из $n$ вершин, являющегося простой ломаной.




**4.** По графу $\Gamma$ построим квадратичную форму на $\mathbf{R}^m$

$$Q_\Gamma(x_1, \dots, x_m) = \sum_{i=1}^{m} x_i^2 - \sum_{(i,j)\in E} x_i x_j.$$

Найдите соответствующие квадратичные формы для графов из предыдущих пунктов и исследуйте их на положительную определённость. Докажите, что если квадратичная форма $Q_\Gamma$ является положительно определённой, то граф $\Gamma$

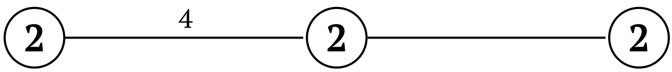
a) не содержит циклов

b) не содержит вершин степени 4 и больше

c) содержит не более одной вершины степени 3

Что ещё можно сказать про граф $\Gamma$, если соответствуюшая форма положительно определена?

**5.** Рассмотрите граф ниже и найдите пару $(X, f_X)$, для которой отношения $R$– и $X$–эквивалентности совпадают.




Исследуйте ситуацию, при которой такой граф состоит из $n$ вершин и продолжается вправо ребрами с $d_{i,i+1} = 3$, $i \geq 2$.

## Задача 7. Факториалы Бхаргавы

В 2000 году лауреат Филдсовской премии Манжул Бхаргава нашёл обобщение целочисленного факториала, в котором для каждого подмножества $S \subseteq \mathbf{Z}$ определяется $n!_S$, причём, $n!_{\mathbf{Z}} = n!$. Оказалось, что его конструкция естественным образом обобщает наиболее интересные свойства обычного факториала. Ссылка на статью: *goo.gl/zF3p5N* (The Factorial Function and Generalizations, Manjul Bhargava). В этой задаче предлагается продолжить исследование Бхаргавы в конкретном направлении. Одной из основ этого продолжения служит следующее утверждение.

**1.** Докажите, что любое положительное рациональное число может быть представлено в виде частного произведений факториалов (не обязательно различных) простых чисел. Например,

$$\frac{10}{9} = \frac{2! \cdot 5!}{3! \cdot 3! \cdot 3!}.$$

Напомним конструкцию Бхаргавы. Зафиксируем подмножество $S \subseteq \mathbf{Z}$ и простое число $p \in \mathbf{P}$. Построим последовательность $a_0, a_1, \ldots \in S$ следующим образом: выберем произвольное $a_0 \in S$; выберем элемент $a_1 \in S$ так, чтобы разность $a_1 - a_0$ делилась на наименьшую возможную степень числа $p$; выберем элемент $a_2 \in S$ так, чтобы разность $(a_2 - a_0)(a_2 - a_1)$ делилась на наименьшую возможную степень числа $p$, и так далее. На шаге $k$ выберем $a_k \in S$ так, чтобы разность $(a_k - a_0) \cdot \ldots \cdot (a_k - a_{k-1})$ делилась на наименьшую возможную степень числа $p$. Вместе с построенной последовательностью $a_n$ мы получаем также монотонно возрастающую последовательность соответствующих степеней $p$

$$\nu_k(S,p) := p^{\mathrm{ord}_p\left(\prod_{i=0}^{k-1}(a_k - a_i)\right)},$$

где $\nu_0(S,p) = 1$. Теперь обобщённый факториал на $S$ для $k \geq 0$ определяется по формуле

$$k!_S := \prod_{p \in \mathbf{P}} \nu_k(S,p).$$

**2.** Проверьте, что последовательность $\nu_k(S,p)$ не зависит от выбора $a_k$. Кроме того, докажите, что для каждого $S \subseteq \mathbf{Z}$ в произведении выше лишь конечное число множителей не равно единице.

**3.** Пусть $S = a\mathbf{Z} + b := \{an + b \mid n \in \mathbf{Z}\}$ или $S = \{q^k \mid k \in \mathbf{Z}_{\geq 0}\}$.

a) Какие значения может принимать отношение факториалов $n!_S/m!_S$ в зависимости от $a, b, q$?

b) Ответьте на предыдущий вопрос, если числа $n = p, m = q$ предполагаются простыми.

c) Опишите возможные значения, которые может принимать биномиальный коэффициент Бхаргавы

$$\binom{n}{k}_S := \frac{n!_S}{k!_S(n-k)!_S}.$$

d) Ответьте на предыдущий вопрос, если числа $n = p$ предполагаются простыми.

**4.** Ответьте на вопросы предыдущего пункта для произвольного $S$.

**5.** Исследуйте вопросы п. 3 (а,б) и 4, описав возможные отношения произведений факториалов Бхаргавы.

## Задача 8. О приближении кривых

Кривой на плоскости называется инъективное непрерывное отображение $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$. Нас будут интересовать кривые из класса $\mathbf{C}^\infty$ — те, для которых каждая из компонент отображения $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ непрерывно дифференцируется бесконечное число раз.

Пусть $\zeta, \gamma\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$. Кривую $\zeta$ будем называть $\varepsilon$*–близкой* к кривой $\gamma$, если

$$\zeta(a) = \gamma(a),\;\; \zeta(b) = \gamma(b),\;\; \forall\, t \in [a,b]\ \exists\, s \in [a,b]\colon\ \operatorname{dist}\left(\zeta(t), \gamma(s)\right) < \varepsilon.$$

Кривую $\zeta$ будем называть $\varepsilon$*–приближением* $\gamma$, если

$$\zeta(a) = \gamma(a),\;\; \zeta(b) = \gamma(b),\;\; \forall\, t \in [a,b]\ \operatorname{dist}\left(\zeta(t), \gamma(t)\right) < \varepsilon.$$

Пусть $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ — регулярная кривая. Её $\varepsilon$–длиной называется число

$$L_\varepsilon(\gamma) = \inf\ \left\{L(\zeta) \mid \zeta \text{ — } \varepsilon\text{–приближение } \gamma\right\}.$$

**1.** Докажите, что у регулярных кривых любой длины бывают сколь угодно длинные регулярные приближения. Иными словами, для любого числа $\mathcal{D} > 0$ и для любой регулярной кривой $\gamma$ существует регулярная кривая $\zeta\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ с длиной $L(\zeta) > \mathcal{D}$, являющаяся её $\varepsilon$–приближением.

**2.** Докажите, что для любой регулярной кривой $\gamma$ существует константа $\varepsilon_0$ такая, что при $\varepsilon < \varepsilon_0$ инфимум из определения $\varepsilon$–длины совпадает с инфимумами длин (а) кривых, $\varepsilon$–близких к $\gamma$; (б) ломаных, $\varepsilon$–близких к $\gamma$. Укажите, как найти $\varepsilon_0$.

**3.** Пусть $\gamma$ — регулярная кривая, про которую известно, что её кривизна ограничена сверху числом $\frac{1}{r}$. При $\varepsilon < \frac{r}{2}$ дайте как можно более точную нижнюю оценку на $L_\varepsilon(\gamma)$ (и проверьте, достигается ли она).

**4.** Для регулярной кривой $\gamma$ докажите, что $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} L_\varepsilon(\gamma) = L(\gamma)$. Докажите то же самое для произвольной непрерывной кривой конечной длины.

Перейдём от кривых к ломаным на плоскости. Пусть $\mathcal{C}_n$ — множество несамопересекающихся ломаных с вершинами в точках множества $\frac{1}{n}\mathbb{Z} \times \frac{1}{n}\mathbb{Z}$ и рёбрами длины $\frac{1}{n}$. Несложно перенести определение $\varepsilon$–близости на случай ломаных — расстояние $\mathrm{dist}$ между двумя точками на плоскости нам теперь будет удобнее определить как

$$\mathrm{dist}\Big((x,y),\,(z,t)\Big) = \max\{|x-z|,\,|t-y|\} \text{ (проверьте, что это метрика).}$$

Дана регулярная кривая $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$, причем $\gamma(0), \gamma(1) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$. Ее $n$–пикселизацией (обозначим через $\gamma_n$) будем называть кратчайшую ломаную из $\mathcal{C}_n$, которая $1/n$–близка к $\gamma$. Обозначим $\mathcal{P}_n(\gamma) = L(\gamma_n)$.

**5.** Для данной ломаной $\lambda \in \mathcal{C}_1$ и чисел $n, \varepsilon \in \mathbb{N}$ как можно более точно оцените длину самой короткой и самой длинной ломаных из $\mathcal{C}_n$, $\varepsilon$–близких к $\lambda$ (и проверьте, достигаются ли ваши оценки).

**6.** Для произвольной регулярной кривой $\gamma$ оцените $\mathcal{P}_n(\gamma)$ и найдите $\lim\limits_{n\to\infty} \mathcal{P}_n(\gamma)$.

**7.** Предложите и исследуйте свои обобщения данной задачи: например, можно рассмотреть другие метрики и другие сетки допустимых вершин на плоскости.

# Задача 9. Экстремальные тетраэдры

Задачи на плоскости.

**1.** Среди всех треугольников, вписанных в единичную окружность, найдите треугольник с

a) максимальным периметром,

b) максимальной площадью,

c) максимальным радиусом вписанной окружности.

**2.** Шириной треугольника в направлении $\alpha$, где $\alpha \in [0, \pi]$, называется величина $w(\alpha)$, равная длине проекции треугольника на прямую, образующую с осью абсцисс угол $\alpha$. Средней шириной треугольника называется величина

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi w(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha.$$

a) Придумайте, как по периметру треугольника найти его среднюю ширину.

b) Среди всех треугольников, вписанных в единичную окружность, найдите треугольник с максимальной средней шириной.

Задачи в $\mathbf{R}^3$.

**3.** a) Среди всех тетраэдров, вписанных в единичную сферу, найдите тетраэдр с максимальным объемом.

b) Докажите следующее обобщенное тождество параллелограмма: если $X_1, \ldots, X_n$ — векторы в $\mathbb{R}^3$, где $n$ — натуральное число, то

$$\sum_{1\le i<j\le n} \|X_i - X_j\|^2 + \|\sum_{i=1}^n X_i\|^2 = n\sum_{i=1}^n \|X_i\|^2.$$

c) Среди всех тетраэдров, вписанных в единичную сферу, найдите тетраэдр с максимальной суммой длин ребер.

d) Пусть дан тетраэдр в $\mathbb{R}^3$. Известно, что любое его ребро ортогонально плоскости, проходящей через середину этого ребра и оставшиеся две вершины тетраэдра. Докажете, что тетраэдр правильный.

e) Среди всех тетраэдров, вписанных в единичную сферу, найдите тетраэдр с максимальной площадью поверхности (суммой площадей граней).

   f) Среди всех тетраэдров, вписанных в единичную сферу, найдите тетраэдр с максимальным радиусом вписанной сферы.

**4.** Пусть тетраэр $ABCD$ вписан в единичную сферу с центром $O$. Суммой углов обзора тетраэдра называется величина

$$\sphericalangle AOB + \sphericalangle AOC + \sphericalangle AOD + \sphericalangle BOC + \sphericalangle BOD + \sphericalangle COD.$$

Среди всех тетраэдров, вписанных в единичную сферу, найдите тетраэдр с максимальной суммой углов обзора.

**5.** a) Используя полярные координаты в $\mathbb{R}^3$, обобщите понятние средней ширины треугольника на трехмерный случай (для тетраэдра).

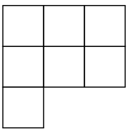
   b) Среди всех тетраэдров, вписанных в единичную окружность, попробуйте найти тетраэдр с максимальной средней шириной.

**6.** Многомерным обобщением треугольника и тетраэдра в $\mathbb{R}^n$ является симплекс — многогранник, у которого $n+1$ вершина. Попытайтесь пункты 3) – 5) обобщить на многомерный случай.

## Задача 10. Динамические системы

Зафиксируем натуральное число $n$ и рассмотрим множество $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ возможных остатков при делении на $n$. В этой задаче предлагается изучить некоторые разбиения $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ на подмножества (классы эквивалентности) и исследовать динамику этих разбиений при малых изменениях задающих их параметров. Изменения при этом будут контролироваться некоторой функцией $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$. Каждое разбиение $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ задаёт представление числа $n$ в виде суммы неотрицательных слагаемых, а следовательно, задаёт диаграмму Юнга соответствующего порядка. Интерес вызывает как количество строчек в этой диаграмме, так и их длина.

Рассмотрим наименьшее отношение эквивалентности на $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, при котором каждый остаток $[x]$ эквивалентен остатку $[f(x)]$. В зависимости от $f$ и $n$ найдите число всех классов, на которые полученное отношение делит $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Например, при $n = 7$ функция $f(x) = 4x + 1$ задаёт разбиение $\mathbf{Z}/7\mathbf{Z} = \{[0], [1], [5]\} \cup \{[2]\} \cup \{[3], [6], [4]\}$ и диаграмму



Интерес в представляют как гипотезы и наблюдения, связанные с динамикой ответов, так и строгие доказательства. Какая трансформация $f$ вносит большее изменение: умножение на два $f(x) \mapsto 2f(x)$ или прибавление единицы $f(x) \mapsto f(x) + 1$? Предлагается проводить исследование в следующем порядке:

**1.** Изучите случаи $f_a(x) = ax$, где а — фиксированное целое число, и $f(x) = x^2$.

**2.** Изучите случай $f_{a,b}(x) = ax + b$, начиная с совсем малых целых b. Опробуйте оба подхода: фиксируйте $a, b$ и меняйте $n$ или фиксируйте $n$ и меняйте $a, b$, а затем изучите форму получающихся диаграмм.

   a) Траекторией $x$ называется последовательность $x, f_{a,b}(x), f_{a,b}(f_{a,b}(x)), \ldots$. В предположении $(a, n) > 1$, опишите остатки $[x]$, трактории которых образуют цикл.

   b) Постарайтесь описать траекторию остатка $[0]$.

   c) Постарайтесь найти те характеристики получающихся диаграмм Юнга, которые поддаются вычислению в зависимости от $n, a, b$.

   d) Фиксируйте $a, b$ и опишите чезаровские средние (по $n$) мощностей получающихся классов эквивалентности. Затем попробуйте брать средние по другой переменной ($a$ или $b$).

**3.** Изучите случаи $f_m(x) = x^m$ и $f(x) = x^2 + 1$.

**4.** Выясните, для каких полиномиальных функций $f$ искомые числа классов эквивалентности и их размеров поддаются явному вычислению, и проведите соответствующее исследование. Например, выясните, какие замены функции $f \mapsto g$ приводят к незначительным изменениям ответов.

## Задача 11. ПОЗ–коды

*Сотрите мне память (Н.В. Гоголь. Вий)*
*Стереть нельзя исправить (крылатое выражение)*

Возможно, вам знакома перфокарта — картонка, в которой можно пробивать отверстия. С помощью перфокарты удобно хранить информацию в машиночитаемом виде: есть отверстие — 1, нет — 0. У перфокарты есть важное свойство: любой 0 легко меняется на 1, но обратная замена крайне затруднена. Память с таким свойством называют *памятью с однократной записью (ПОЗ)*, или по-английски *Write-Once Memory (WOM)*. Один бит такой памяти называется *витом*.

Ограничение казалось бы не позволяет такую память перезаписывать несколько раз, но в 1982 году Р.Ривест и А.Шамир в статье «How to Reuse a “Write-Once” Memory» предложили кодировку, позволяющую ценой некоторого увеличения объёма носителя предоставить возможность перезаписи информации.

Например, с помощью трёх витов оказывается возможно записать некоторое двухбитовое число, а потом однократно заменить его на другое:

| *число* | *кодировка для первой записи* | *кодировка для повторной записи* |
|---|---|---|
| 00 | 000 | 111 |
| 01 | 100 | 011 |
| 10 | 010 | 101 |
| 11 | 001 | 110 |

Допустим, можно сперва записать 10, используя код 010, а потом записать число 01 на его место, заменив третий вит на 1 и получив код 011.

Недавно эта область исследований получила второе дыхание в связи с распространением флэш-памяти (обладающей очень похожими свойствами). Ниже мы предлагаем вам задачи, связанные с данной областью:

1. Представим себе проездной билет, стоимость которого (целое число от 0 до $n-1$) запоминается с помощью $k$ витов — скажем, компостируется при покупке. Предложите кодировку, позволяющую исключить увеличивающее стоимость изменение витов (докомпостирование билета) после покупки. Приведите по возможности точные верхние и нижние оценки на число $k$ для вашей кодировки. Также предложите теоретические верхние и нижние оценки на количество витов в кодировках с такими свойствами.

2. В условиях п.1 предложите кодировку, исключающую любое изменение стоимости после покупки. Иными словами, кодировку, в которой любые дополнительные изменения витов делают код любого числа некорректным (не соответствующим никакому числу). Также приведите оценки для предложенной кодировки и теоретические оценки.

**3.** Представим себе проездной билет, в котором используется ПОЗ для хранения числа поездок. После каждой поездки число уменьшается на 1, пока не достигнет нуля. Предложите кодировку, позволяющую хранить эту информацию по возможности максимально эффективно по памяти. Дайте как теоретические, так и достигаемые вашей кодировкой верхние и нижние оценки необходимого количества витов. Убедитесь, что предложенный вами код не позволяет увеличить количество поездок в процессе перезаписи значений.

**4.** Пусть в ПОЗ хранится не число поездок, а оплаченная стоимость в рублях, при этом при поездке со счёта снимается либо 40, либо 45 рублей (в зависимости, например, от вида транспорта). Возможно ли с учётом этого ограничения сделать кодировку более эффективной по памяти и улучшить оценки из п.3?

**5.** Обобщите результат из п.4 на случай произвольного набора стоимостей поездки.

**6.** Рассмотрим ситуацию, когда мы записываем события на длинную ленту. Скажем, речь может идти о показаниях скорости — увеличилась ли она на 1 от предыдущего наблюдения, уменьшилась ли на 1 или осталась прежней. Сравнительно легко иметь дело с ситуациями, когда каждое следующее событие имеет ровно $2^k$ значений — тогда мы про каждое событие будем дописывать к ленте ровно $k$ витов и сразу переходить к следующему. Однако, можете ли вы предложить более эффективную по памяти кодировку в той ситуации, когда количество вариантов, например, равно 3? Естественно, вы можете, помимо добавления новых витов, исправлять какие-то из предыдущих.

**7.** Рассмотрите п.6 для произвольного количества вариантов значений, добавляемых на каждом шаге.

**8.** Предложите какие-нибудь свои аналогичные задачи и кодировки, подходящие для их решения. Этот пункт также подходит для изложения кодировок, придуманных вами в процессе решения задачи, но не подошедших под условия.

# Задачи 2017 года

## Задача 1. Уйдём на Север

Снежная Королева возвращается обратно на Север и собирает чемоданы. За то время, что она провела вне дома, она накопила множество льдинок самой разной формы и хочет их все взять с собой. Помогите Снежной Королеве быстрее собрать вещи.

**1.** У Снежной Королевы есть стеллаж с плоскими квадратными чемоданами и множество льдинок треугольной формы, которыми она дорожит. Какова наименьшая сторона плоского квадратного чемодана, в которую поместятся одновременно две плоские льдинки в форме равнобедренных прямоугольных треугольников с длинами катетов $a$ и $b$, соответственно? А две льдинки в форме равносторонних треугольников? В плоские чемоданы льдинки укладываются только в один слой.

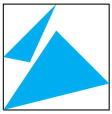


Рис. 1: Две треугольные льдинки в не самом подходящем плоском квадратном чемодане

**2.** Настала очередь прозрачных картин изо льда. В какой плоский квадратный чемодан поместятся две ледяные квадратные картины со сторонами $a$ и $b$, соответственно?

**3.** Стеллаж с квадратными чемоданами опустел. Но в ящике комода обнаружились чемоданы самых разных форм. Первыми на глаза попалась стопка с несчётным числом плоских прямоугольных чемоданов. Как выглядят прямоугольные чемоданы наименьшей площади, в которые можно поместить льдинки уже рассмотренных форм?

**4.** Для ускорения сборов удобнее класть более двух льдинок в чемодан. В какой прямоугольный чемодан лучше всего убрать 3 одинаковые равносторонние льдинки? А 4? Что будет в случае льдинок — прямоугольных треугольников?

5. Кубические чемоданы отлично подходят для упаковки объёмных льдинок-тетраэдров. Решите задачу для различных пар таких льдинок.

6. Рассмотрите льдинки и чемоданы других форм. Например, круглые льдинки-тарелки и треугольные чемоданы.

## Задача 2. Вас снимают

Пусть $I \subseteq \mathbb{R}$ является объединением непересекающихся отрезков на прямой. Обозначим за $L(I)$ длину множества $I$, то есть сумму длин соответствующих отрезков. Подмножество плоскости $A$ будем называть фигурой, если оно ограничено, замкнуто и его пересечение с любой прямой есть объединение конечного числа отрезков (определения **??** и **??** ниже). В частности, любой многоугольник является фигурой. Зафиксируем некоторую декартову систему координат на плоскости. Для фигуры $A$ определим её $x$-снимок, как функцию $f_x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, которая по точке $t$ на прямой $OX$ вычисляет длину пересечения $A$ с прямой, проходящей через $t$ и перпендикулярной $OX$

$$f_x(t) = L(A \cap \{(t, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \text{ любое}\}).$$

Аналогично определим $y$-снимок фигуры $A$ как

$$f_y(t) = L(A \cap \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 \mid x \text{ любое}\}).$$

1. Какая фигура обладает следующими $x$- и $y$-снимками:

$$f_x(t) = f_y(t) = \begin{cases} 0, & t \le 0 \\ \frac{7t}{12}, & 0 \le t \le 3 \\ \frac{21}{12}, & 3 \le t \le 4 \\ -\frac{7t}{12} + \frac{49}{12}, & 4 \le t \le 8 \\ 0, & 8 \le t \end{cases} ?$$

2. Найдите способ восстановить фигуру $A$, а также варианты её расположения по $x$- и $y$-снимкам, если известно, что
а) $A$ — некоторый прямоугольник;
б) $A$ — некоторый треугольник;

в) $A$ — некоторый четырёхугольник.
Можно ли обойтись только одним снимком?

**3.** Приведите пример двух неравных фигур на плоскости, имеющих одинаковые $x$- и $y$-снимки.

**4.** Пусть $A$ некоторая фигура. Можно ли восстановить и, если можно, то как, по $x$- и $y$-снимкам следующую информацию:
а) $A$ имеет площадь $S$;
б) $A$ является невыпуклой фигурой (см. определение **??**);
в) $A$ является многоугольником с $n$ вершинами;
г) $A$ содержит фиксированную точку $(x_0, y_0)$?
Можно ли добиться ответов на эти вопросы, если заранее известна дополнительная информация про $A$? Например, если известно, что $A$ выпуклая и центрально-симметричная фигура?

**5.** Повернём исходную систему координат относительно начала отсчёта на угол $\alpha$ против часовой стрелки. $x$-снимок в новой системе координат назовём $\alpha$-снимком. Так например, 0-снимок это $x$-снимок, $\frac{\pi}{2}$-снимок это $y$-снимок. Исследуйте предыдущие пункты, если вместо $x$- и $y$- снимков даны $\alpha$- и $\beta$-снимки, для некоторых неравных углов $\alpha$ и $\beta$? Можно ли узнать дополнительную информацию (например, восстановить любую фигуру), если даны три разных снимка?

## Задача 3. Целые структуры

**1.** Пусть даны два целых числа $a$ и $b$. Множеством, подчинённым $a$ и $b$ назовём $S$, подмножество в $\mathbb{Z}$, удовлетворяющее свойствам:
а) $a, b \in S$;
б) Для любого $x \in S$ число $-x$ лежит в $S$;
в) Для всех $x$ и $y$ из $S$ число $ax + by$ также лежит в $S$.
Пусть $a = 2$, а $b = 3$. Покажите, что любое подчинённое 2 и 3 множество $S$ обязательно содержит 1.

**2.** Опишите наименьшее множество $S$, подчинённое $a$ и $b$, если $a = b = 1$. Что будет, если $a = 2$, $b = 3$?

**3.** Рассмотрите аналогичную задачу для $a = 4$, $b = 5$.

**4.** При каком условии на $a$ и $b$ в любом $a, b$-подчинённом множестве $S$ найдётся число, имеющее остаток $k$ по модулю $n$ для всех $0 \leq k < n$.

5. Пусть $a$ и $b$ взаимно просты. Покажите, что любое подчинённое $a$ и $b$ множество содержит 1.

6. Натуральной плотностью множества $A \subseteq \mathbb{Z}$ назовём предел отношения
$$\lim_{n\to\inf ty}\frac{|\{x\in A \mid -n\leq x\leq n\}|}{2n},$$
если этот предел существует. Верно ли, что для не взаимно простых $a$ и $b$ размер наименьшего подчинённого $a$ и $b$ множества имеет натуральную плотность 0?

## Задача 4. Задача №4 Буйство красок

Известный художник Петров имеет следующую манеру письма: он разбивает квадратный холст $n\times n$ на квадратики $1\times 1$, после чего каждый квадратик закрашивает в один из $k$ цветов, имеющихся в наличии. Так как на картине не указан верх и низ, то искусствоведы и сам Петров считают две картины, отличающиеся поворотом на $90^\circ$, одинаковыми.

1. В детстве Петров писал на холсте $2\times 2$. Известно, что за это время он написал более 100, но менее 200 различных картин, при этом с холстов $2\times 2$ на большие он перешёл после того, как написал картины размера $2\times 2$ всеми доступными ему способами. Сколько красок было у Петрова в детстве? Сколько в точности картин $2\times 2$ он написал?

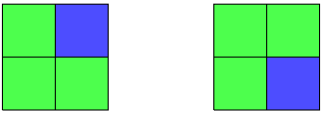


Рис. 2: Две неразличимые детские картины Петрова $2\times 2$ на двух цветах

2. Обретя популярность, Петров переключился на масштабные проекты с холстами $n\times n$, $n\geq 3$ и числом красок $k$. Найдите асимптотику или формулу для числа различных картин, которые мог написать Петров на полотнах $3\times 3$, $4\times 4$, при $k\to\inf ty$. Оцените число возможных картин Петрова при других $n$ или дайте точную формулу.

3. Для систематизации картин Петрова искусствоведы предложили несколько классификаций, основанных на том, что две картины Петрова

не стоит различать, если они отличаются цепочкой определённых преобразований. Найдите конкретные значения, оцените при больших $n$ и $k$ или дайте точную формулу числа работ Петрова по классификациям, основанным на преобразованиях:

а) Поворот на $90^\circ$ и отражения относительно осей симметрии квадрата;

б) Преобразования из пункта а) и преобразование, сдвигающее все строчки квадрата, кроме первой, на 1 вниз, а нижнюю строчку ставящее наверх.

в) Преобразования из пункта а) и преобразования, меняющие цвета на картине: цвет $i$ на цвет $j$, цвет $j$ на цвет $i$, и не меняющее остальные цвета. Назовём такие преобразования элементарными перекрашиваниями.

г) Преобразования из пункта а) и преобразования, позволяющие в одном из столбцов сдвинуть все квадратики на 1 по циклу.

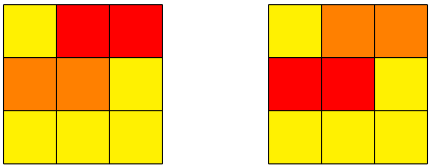


Рис. 3: Картины, отличающиеся заменой оранжевого и красного цветов

4. Художник Иванов решил превзойти Петрова и стал разбивать равносторонний треугольник со стороной $n$ на треугольники со стороной 1 и раскрашивать их в $k$ цветов. Исследуйте аналогичный предыдущим пунктам вопрос. В частности, рассмотрите классификации, разрешающие преобразования:
   а) Поворот на $120^\circ$;
   б) Поворот на $120^\circ$ и отражения относительно осей симметрии треугольника;
   в) Преобразования из пункта б) и элементарные перекрашивания;
   г) Преобразования из пункта а) и преобразование, сдвигающее по циклу цвета в одном горизонтальном ряду большого треугольника.

5. Рассмотрите другие, в том числе трёхмерные, разбиения и их раскраски. Придумайте другие классификации.

## Задача 5. Дискретная непрерывность

Будем говорить, что два целых числа $a$ и $b$ соседние, если $|a-b| \leq 1$. Пусть $I$ — некоторое подмножество внутри целых чисел. Отображение $f\colon I \to \mathbb{Z}$ назовём дискретно непрерывным, если для любых двух соседних чисел $a, b \in I$ их образы $f(a)$ и $f(b)$ тоже соседние.

1. Пусть $a < b$ — два целых числа. Целочисленным отрезком $[a, b]$ будем называть подмножество целых чисел $[a, b] = \{x \in \mathbb{Z} \mid a \leq x \leq b\}$. Пусть дано дискретно-непрерывное отображение $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$. Покажите, что для любого целого числа $x \in [f(a), f(b)]$ существует $c$, такое, что $a \leq c \leq b$ и $f(c) = x$.

2. Пусть $n \in \mathbb{N}$ — некоторое натуральное число. Рассмотрим функцию $\rho_1(x, y)\colon \mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^n \to \mathbb{R}$, заданную по правилу

$$\rho_1(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|, \text{ где } x = (x_1, \ldots, x_n), \text{ а } y = (y_1, \ldots, y_n).$$

Будем говорить, что точки $x, y \in \mathbb{Z}^n$ соседние, если $\rho_1(a, b) \leq 1$. Пусть $A$ — подмножество в $\mathbb{Z}^n$, а $k \in \mathbb{N}$. Отображение $f\colon A \to \mathbb{Z}^k$ назовём дискретно-непрерывным, если для любых соседних $x$, $y \in A$ их образы $f(x)$ и $f(y)$ соседние в $\mathbb{Z}^k$. Для каждого натурального числа $m$ определим множества

$$D^n_m = \{x \in \mathbb{Z}^n \mid |x_i| \leq m\} \text{ и } S^{n-1}_m = \{x \in D^n_m \mid \exists i \leq n\ |x_i| = r\}.$$

Пусть дискретно-непрерывное отображение $f\colon S^1_m \to \mathbb{Z}^2$, а $x \in \mathbb{Z}^2$ не лежит в $f(S^1_m)$. Для любого луча $l$, исходящего из точки $x$ и не содержащего точек $f(S^1_m)$, можно определить число $i_{l,f}$ его пересечений с ломаной, построенной по $f$. Сделаем это следующим образом:

$$i_{l,f} = \frac{1}{2}\Big|\{(a, b) \mid a,\ b \in S^1_m,\ \ \rho_1(a, b) = 1 \text{ и } l \text{ пересекает отрезок, соединяющий } f$$

Число $\frac{1}{2}$ появляется из-за того, что одно и тоже пересечение соответствует и паре $(a, b)$, и паре $(b, a)$. Покажите, что чётность $i_{l,f}$ не зависит от выбора $l$ и, следовательно, является характеристикой точки $x$.

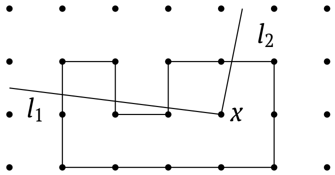


Рис. 4: Ломаная и два луча, исходящие из одной точки, с $i_{l_1,f} = 3$ и $i_{l_2,f} = 1$

**3.** Точку $x \in \mathbb{Z}^2$, не лежащую в $f(S^1_m)$, назовём внутренней по отношению к $f$, если $i_{l,f}$ нечётно, и внешней, если $i_{l,f}$ чётно. Пусть дано дискретно-непрерывное отображение $g\colon D^2_m \to \mathbb{Z}^2$. Положим $f = g|_{S^1_m}$ — сужение отображения $g$. Покажите, что для любой $f$-внутренней точки $x$ существует $y \in D^2_k$, что $g(y) = x$.

**4.** Определим метрические пространства (см. метрика) $\mathbb{Z}^{n,p}$, где $p = \inf ty$, или $p \geq 1$ — вещественное число, следующим образом:

$$\mathbb{Z}^{n,\inf ty} = (\mathbb{Z}^n, \max\{|x_i - y_i| : i \in \overline{1,n}\}) \text{ и при } p \text{ вещественном } \mathbb{Z}^{n,p} = (\mathbb{Z}^n, \rho_p),$$

где $\rho_p(x,y) = (\sum_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|^p)^{1/p}$. Заметим, что если $n = 1$, то все метрики $\rho_p$ совпадают, поэтому при $n = 1$ индекс $p$ можно опустить. Естественным образом, расстояние ограничивается и на подмножества указанных метрических пространств. Определение понятия $L$-липшицевого отображения можно найти в конце (см. определение **??**).

**а)** Покажите, что 1-липшицевы отображения из $\mathbb{Z}^{n,1} \to \mathbb{Z}^{k,1}$ являются дискретно-непрерывными и наоборот.

**б)** Опишите все пары чисел $L_1$ и $L_2$, такие что отображение $f\colon \mathbb{Z}^{2,p} \to \mathbb{Z}^{2,p}$ липшицево с константой $L_1$ тогда и только тогда, когда оно $L_2$-липшицево.

**в)** Исследуйте взаимосвязь между условиями липшицевости для отображений $f\colon \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2$ в метриках $\rho_p$ и $\rho_q$ с различными константами $L$.

**5.** Пусть $L$ — натуральное число. Покажите, что для любого $L$-липшицевого отображения $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ и любого целочисленного отрезка $[a,b]$

$$\frac{|f([a,b])|}{|\operatorname{conv}(f([a,b]))|} \geq \frac{1}{L},$$

где $|f([a,b])|$ — это количество точек в образе $[a,b]$, а $\mathrm{conv}(f([a,b]))$ — наименьший отрезок, содержащий $f([a,b])$.

6. Зададим расстояние на $D_m^n$ с помощью метрики $\rho_1$. Сформулируйте и докажите аналог пункта 6 задачи для $L$-липшицевых отображений из $D_m^2 \to \mathbb{Z}^{2,q}$.

7. Обобщите все указанные теоремы на случай размерности больше 2. Опишите все $L$-липшицевы биекции из $\mathbb{Z}^{n,p} \to \mathbb{Z}^{n,q}$ для маленьких $L$.

## Задача 6. Гипергеометрическая прогрессия

1. Рассмотрим следующее рекуррентное соотношение:

$$p(n)a_n = q(n)a_{n-1}, \text{ для } n > n_0 \text{ и } a_{n_0} = \lambda,$$

где $\lambda$ — некоторое вещественное число, а $p(n)$ и $q(n)$ — некоторые многочлены с вещественными коэффициентами. Выведите явную формулу для его решения.

2. Последовательность из предыдущего пункта назовём гипергеометрической прогрессией. Будем говорить, что многочлены $p$ и $q$ определяют эту прогрессию. Являются или нет частными случаями гипергеометрической прогрессии: а) геометрическая прогрессия; б) арифметическая прогрессия; в) $a_n = n!$; г) $a_n = C_n^k$ для фиксированного $k$; д) $a_n = \frac{(-1)^n+1}{2}$? Если да, то какие многочлены их задают?

3. Рассмотрим рекуррентное соотношение

$$p(n)a_n = q(n)a_{n-1} + r(n)a_{n-2},$$

где $p(n)$, $q(n)$, $r(n)$ — некоторые многочлены. При каких $p$, $q$ и $r$ у такого рекуррентного соотношения нет решений в виде гипергеометрической прогрессии?

4. Исследуйте предыдущий вопрос для соотношения

$$p_0(n)a_n = p_1(n)a_{n-1} + p_2(n)a_{n-2} + \cdots + p_k(n-k)a_{n-k},$$

где $k$ фиксировано, $p_i(n)$ — некоторые многочлены.

**5.** Пусть даны две гипергеометрические прогрессии $a_n$ и $b_n$. При каких условиях на многочлены, задающие $a_n$ и $b_n$, существуют числа $r_1(n)$ и $r_2(n)$, что $r_1(n)a_n + r_2(n)b_n = 0$ для всех $n$?

**6.** Исследуйте предыдущий вопрос для большего числа гипергеометрических прогрессий.

**7.** Пусть $a_n$ и $b_n$ — две последовательности. Определим последовательность $a * b_n$ равенством

$$a * b_n = \sum_{0 \leq i \leq n} a_i b_{n-i}.$$

Предположим, что $a_n$ и $b_n$ — гипергеометрические прогрессии. Всегда ли последовательность $a * b_n$ есть конечная сумма гипергеометрических прогрессий? Если нет, то какие условия надо наложить на $a_n$ и $b_n$, чтобы это было верно? Начните со случая геометрических прогрессий.

**8.** Исследуйте существование решений в виде гипергеометрических функций для рекуррентного соотношения

$$p(0,n)a_n = p(1,n)a_{n-1} + \cdots + p(k, n-k)a_{n-k} + \cdots + p(n_0, n-n_0)a_{n_0},$$

где $p(n,k)$ — гипергеометрическая функция по $n$ и по $k$.

## Задача 7. Зависимые матрицы

**1.** Пусть $B$, $C$ и $D$ матрицы $2 \times 2$ с коэффициентами из $\mathbb{R}$ (см. определение **??** ниже). Линейным уравнением в матрицах относительно матрицы $X$ назовём уравнение вида:

$$CXD = B.$$

Матрица $A \in M_2(\mathbb{R})$ называется его решением, если

$$C \cdot A \cdot D = B,$$

где $\cdot$ обозначает произведение матриц (см. определение **??**). Обозначение произведения для краткости будем опускать. Решите уравнение:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

**2.** Покажите, что уравнение $CXD = B$ разрешимо тогда и только тогда, когда разрешимы уравнения $CX = B$ и $XD = B$. При каких условиях на $C$ и $D$ уравнение $CXD = B$ разрешимо при любых $B$?

**3.** Естественным образом, можно определить обобщённые линейные уравнения:

$$C_1XD_1 + C_2XD_2 + \cdots + C_nXD_n = B.$$

Исследуйте разрешимость таких уравнение для любых $B$ и решите обобщённое линейное уравнение:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

**4.** Последовательность матриц вида $A_n = C^n A_0$ назовём геометрической прогрессией. Опишите все решения линейного рекуррентного соотношения $A_{n+1} = CA_nD$, являющиеся геометрическими прогрессиями. Можно ли любое решение такого рекуррентного соотношения представить в виде суммы геометрических прогрессий? В частности, ответьте на указанные вопросы для соотношения

$$A_{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} A_n \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

**5.** Исследуйте аналогичный вопрос для рекуррентных соотношений вида $A_{n+1} = CA_n + A_nD$.

**6.** Рассмотрите рекуррентное соотношение $A_{n+1} = C_1A_nD_1 + C_2A_nD_2$. Исследуйте существование у этого рекуррентного соотношения решения в виде геометрической прогрессии. В частности, опишите все решения, являющиеся геометрическими прогрессиями для соотношения

$$A_{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} A_n \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} A_n \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**7.** Исследуйте выразимость в геометрических прогрессиях решений линейных рекуррентных соотношений вида

$$A_{n+1} = C_1A_nD_1 + C_2A_{n-1}D_2,$$

а также линейных рекуррентных соотношений большего порядка.

## Задача 8. Можно ли разрезать?

**1.** Пусть $\varphi$ — некоторый угол. Покажите, что

$$\cos n\varphi = p(\cos\varphi),$$

где $p(x)$ — это многочлен степени $n$ с целыми коэффициентами.

**2.** Покажите, что угол между гипотенузой и катетом в прямоугольном треугольнике со сторонами 3, 4, 5 не равен:
а) $\frac{k\pi}{5}$, где $k$ — целое; б) $\frac{k\pi}{l}$, где $k$ и $l$ — целые неотрицательные числа.

**3.** Можно ли так изобразить равносторонний треугольник на координатной плоскости, чтобы координаты вершин являлись рациональными числами?

**4.** Опишите все треугольники с рациональными координатами вершин и углами вида $\frac{k\pi}{l}$, где $k$ и $l$ — целые неотрицательные числа. Такие углы в дальнейшем будем называть рациональными.

**5.** Разрезанием многоугольника $P$ назовём такой набор многоугольников $P_i$, где $1 \leq i \leq n$ внутри $P$, что $P = \bigcup_{1\leq i\leq n} P_i$ и при $i \neq j$ многоугольники $P_i$ и $P_j$ могут пересекаться лишь по точкам на границе. Пусть дан прямоугольник $ABCD$ со сторонами $a$ и $b$. Опишите все $a$ и $b$, при которых его можно разрезать на три треугольника с рациональными углами. Приведите примеры разрезаемых и неразрезаемых прямоугольников.

**6.** Найдите критерий, при котором многоугольник может быть разрезан каким-либо образом на треугольники с рациональными углами.

**7.** Два многоугольника $P$ и $Q$ с рациональными углами, назовём рационально равносоставленными, если существует разрезание $\{P_i\}_{i\in\overline{1,n}}$ для $P$ и разрезание $\{Q_i\}_{i\in\overline{1,n}}$ для $Q$, такие что фигуры $P_i$ и $Q_i$ равны и имеют рациональные углы для всех $i$. Например,

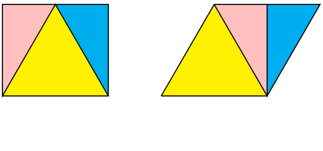


Рис. 5: Разрезание на попарно равные треугольники с рациональными углами.

Найдите необходимые и достаточные условия рациональной равносоставленности двух фигур. Приведите примеры рационально равносоставленных и не рационально равносоставленных многоугольников.

## Задача 9. Порядки

Пусть $M_1$ и $M_2$ — два упорядоченных множества (см. определение **??**). Отображение $f\colon M_1 \to M_2$ называется монотонным, если для любых $x$ и $y$ из $M_1$, таких, что $x \leq y$, выполнено, что $f(x) \leq f(y)$ относительно порядка на $M_2$. Монотонное отображение $f\colon M_1 \to M_2$ называется изоморфизмом, если $f$ биективно и обратное отображение $f^{-1}: M_2 \to M_1$ также монотонно.

1. Пусть $f\colon M \to N$ — изоморфизм двух упорядоченных множеств. Покажите, что для любого $x \in M$ множество $M_{\leq x} = \{y \in M \,|\, y \leq x\}$ изоморфно $N_{\leq f(x)} = \{y \in N \,|\, y \leq f(x)\}$.

2. Опишите все изоморфизмы из $\mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$, где $\mathcal{P}(X)$ — множество всех подмножеств множества $X$, упорядоченных по отношению включения $\subseteq$.

3. Пусть $M_1$ и $M_2$ — два упорядоченных множества. Тогда введём на $M_1 \times M_2$ порядок следующим образом:

$$(x_1, y_1) \leq_{nat} (x_2, y_2) \text{ тогда и только тогда, когда } x_1 \leq x_2 \text{ и } y_1 \leq y_2.$$

Обозначим получившееся упорядоченное множество как $M_1 \times_{nat} M_2$. Будем называть такой порядок естественным. Введём на $M_1 \times M_2$ другой порядок:

$$\begin{aligned}(x_1, y_1) \leq_{lex} (x_2, y_2) \iff& \\ \iff& \ x_1 < x_2 \\ &\text{или } \ x_1 = x_2 \text{ и } y_1 \leq y_2\end{aligned}$$

Обозначим это упорядоченное множество как $M_1 \times_{lex} M_2$.

Покажите, что следующие упорядоченные множества не изоморфны между собой: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N} \times_{nat} \mathbb{N}$, $\mathbb{N} \times_{lex} \mathbb{N}$, $\mathbb{Z} \times_{nat} \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} \times_{lex} \mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$.

4. Изоморфны или нет следующие множества: $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q} \times_{lex} \mathbb{R}$, $\mathbb{Z} \times_{lex} \mathbb{R}$, $\mathbb{Q} \times_{lex} \mathbb{R}$, $\mathbb{R} \times_{lex} \mathbb{R} \times_{lex} \mathbb{R}$?

5. Какие из следующих множеств изоморфны: $(\mathbb{Z} \times_{lex} \mathbb{Z}) \times_{nat} \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} \times_{lex} (\mathbb{Z} \times_{nat} \mathbb{Z})$, $(\mathbb{Z} \times_{lex} \mathbb{N}) \times_{nat} \mathbb{Z}$?

6. Рассмотрите предыдущий вопрос, когда сомножителей больше чем три, “скобки” можно расставлять произвольным образом и на произведениях можно ввести операцию одним из двух описанных выше способов.

7. Опишите все изоморфизмы между найденными парами изоморфных упорядоченных множеств.

## Задача 10. Лучше меньше, да лучше

Пусть $a_n$ — некоторая последовательность вещественных чисел, такая, что ряд $\sum_{n=1}^{inf ty} |a_n|$ сходится. Определим $S(\{a_n\})$ как множество всех подсумм ряда $\sum_{n=1}^{inf ty} a_n$, а именно:

$$S(\{a_n\}) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \exists \Gamma \subseteq \mathbb{N}, \text{ что } x = \sum_{k \in \Gamma} a_k \right\}.$$

1. Пусть $a_n = \frac{1}{2^n}$. Найдите $S(\{a_n\})$.

2. Будем говорить, что множество $A \subseteq \mathbb{R}$ имеет меру 0, если $\forall \varepsilon > 0$ существует не более чем счётный набор интервалов $(x_k, y_k)$, таких что
$$A \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} (x_k, y_k) \text{ и } \sum_{k \in \mathbb{N}} |y_k - x_k| < \varepsilon.$$
Рассмотрим последовательность $a_n = \left(\frac{2}{5}\right)^n$. Покажите, что $S(\{a_n\})$ имеет меру 0.

3. Покажите, что $S(\{\frac{1}{n^2}\})$ содержит внутри себя некоторый отрезок ненулевой длины.

4. Мерой замкнутого множества $A$ на прямой назовём
$$\mu(A) = \inf \Big\{t \in \mathbb{R} \mid \text{существует набор интервалов } (x_k, y_k),$$
$$\text{что } A \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} (x_k, y_k) \text{ и } \sum_{k \in \mathbb{N}} |y_k - x_k| = t \Big\}.$$
Приведите пример последовательности $a_n$, что $S(\{a_n\})$ не содержит отрезка, но является множеством ненулевой меры. Что можно сказать про меру $S(\{a_n\})$, где $a_n$ — геометрическая прогрессия?

5. Рассмотрим множество $\mathbb{C}$ всех комплексных чисел. Будем говорить, что последовательность комплексных чисел $x_n$ сходится к некоторому числу $x$, если последовательности из вещественных и мнимых частей $\Re x_n$ и $\Im x_n$ сходятся к $\Re x$ и $\Im x$, соответственно. Таким образом, возникает возможность по последовательности комплексных чисел $a_n$ определить

$$S(\{a_n\}) = \Big\{x \in \mathbb{C} \,|\, \exists \Gamma \subseteq \mathbb{N},\ \text{что } x = \sum_{k \in \Gamma} a_k\Big\},$$

где под суммой ряда подразумевается предел последовательности

$$x_n = \sum_{\substack{k \in \Gamma \\ k \le n}} a_k.$$

Опишите $S(\{\left(\frac{1}{2i}\right)^n\})$. Найдите последовательность $a_n$, что $S(\{a_n\})$ — круг радиуса 1 на плоскости.

6. Дайте определение меры замкнутого множества на плоскости и приведите пример последовательности $a_n$, что $S(\{a_n\})$ является множеством ненулевой меры и не содержит ни одного круга.

7. Рассмотрите последовательности в $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$, отличные от геометрической прогрессии. Предложите способ узнать $\mu(S(\{a_n\}))$. Насколько произвольным может быть множество вида $S(\{a_n\})$?

# Задачи 2016 года

## Задача 1. Геометрическая вероятность

Пункты этой задачи связаны с расположениями различных случайно взятых геометрических фигур. Что в каждом конкретном случае следует подразумевать под случайной фигурой того или иного вида, находится во власти решающего задачу, хотя, безусловно, требует обоснований. Одно можно сказать наверняка: вероятность — это число от 0 до 1.

1. Пусть на плоскости задана квадратная решётка со стороной 1. Возьмём число $\varepsilon > 0$ и вокруг точек решётки построим круги радиуса $\varepsilon$. Какова вероятность для случайной точки не попасть в объединение этих кругов?

2. На плоскость, расчерченную параллельными прямыми на расстоянии $h$ друг от друга падает случайный отрезок длины меньшей или равной $a$. Какова вероятность того, что этот отрезок пересечёт какую-то прямую? А каково математическое ожидание числа точек пересечения?

3. Та же задача, но теперь вместо отрезка на плоскость попадает крестик — пара отрезков одинаковой фиксированной длины $a$, пересекающихся в своих центрах и перпендикулярных друг-другу. А что будет, если угол между отрезками не равен $\pi/2$?

4. Пусть дан некий круг радиуса $r$. Какова вероятность того, что конец отрезка длины $a$ лежит за пределами круга, если это случайный отрезок, чья середина лежит в круге?

5. Пусть плоскость замощена одинаковыми параллелограммами. На плоскость кидают случайный параллелограмм, среди тех

   **а)** у которых площадь меньше или равна $S$.

   **б)** у которых длина сторон меньше $a$.

   **в)** у которых длины диагоналей меньше $a$.

   Какова вероятность того, что вершина какого-то параллелограмма из замощения лежит в случайном параллелограмме?

6. А если рассмотреть случайный эллипс с такими условиями?

7. Рассмотрим случайный четырёхугольник с длинами сторон $a, b, c, d$. Какова вероятность, что он будет содержать точку из решётки? Какова вероятность, что он будет пересекаться с набором параллельных линий, расстояние между которыми равно $h$?

8. А что такое случайный $n$-угольник на плоскости с какими-то ограничениями? Какова вероятность для него содержать некоторую точку из решётки или пересекаться с семейством параллельных прямых?

## Задача 2. Гипернатуральные числа

1. Рассмотрим натуральные числа $n \neq 1$, $m_1$ и $m_2$. Покажите, что $n^{m_1} - 1 \;\vdots\; n^{m_2} - 1$ тогда и только тогда, когда $m_1 \;\vdots\; m_2$.

**2.** Покажите, что для всех взаимнопростых чисел $m$ и $n$ существуют такие натуральные $k$ и $l$, что $m^l - 1 \vdots n$ и $n^k - 1 \vdots m$.

**3.** Гипернатуральным числом назовём отображение из множества простых чисел $\mathbb{P}$ в множество $\mathbb{N} \cup \{0, \infty\}$. Естественным образом каждому натуральному числу можно сопоставить такое отображение, а именно, если $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_n^{\alpha_n}$, где $p_i$ - различные простые, то соответствующее отображение задано формулой

$$n(q) = \begin{cases} \alpha_i, & q = p_i \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Также можно определить произведение, наименьшее общее кратное и наибольший общий делитель по следующим формулам:

$$x_1 \cdot x_2(q) = x_1(q) + x_2(q),$$

$$\text{НОК}\,(x_1, x_2)(q) = \max\,(x_1(q), x_2(q)),$$

$$\text{НОД}\,(x_1, x_2)(q) = \min(x_1(q), x_2(q)).$$

Будем говорить, что $x \vdots y$, если $\forall q \in \mathbb{P}\ x(q) \geq y(q)$. Рассмотрим некоторое множество $A$ гипернатуральных чисел. Определим наименьшее общее кратное всех элементов из $A$ по формуле $\text{НОК}\,(A)(q) = \sup\limits_{x \in A}\{x(q)\}$. Теперь для гипернатурального числа $x$ и натурального $n$ определим

$$n^x - 1 = \text{НОК}\,\Big(\{n^m - 1 \mid m \in \mathbb{N},\, x \vdots m\}\Big).$$

Решите следующие задачи:

**а)** Вычислите $3^x - 1$, $5^x - 1$ и, в целом, $p^x - 1$, где $p$-простое, а $x = (\infty, \infty, \dots)$.

**б)** Верно ли, что $n^x - 1 = n^y - 1$ тогда и только тогда, когда $x = y$, где $x$ и $y$ гипернатуральные, $n \in \mathbb{N}$ .

**в)** Покажите, что уравнение $3^x - 1 = 5^y - 1$ неразрешимо в гипернатуральных числах. Аналогично покажите, что уравнение $3^x - 1 = 11^y - 1$ не имеет гипернатуральных решений.

**4.** Пусть $l^\infty = \text{НОК}\,(\{l^n \mid n \in \mathbb{N}\})$. Попробуйте найти $p^{l^\infty} - 1$ для некоторых простых $p$ и $l$.

5. Попробуйте разобрать случай уравнения $p^x - 1 = l^y - 1$ для бесконечных серий простых чисел или дайте ответ для произвольных простых.

6. Бывают ли решения у уравнения $n^x - 1 = m^y - 1$, когда $n$ и $m$ взаимнопростые натуральные числа? А когда не взаимнопростые?

7. Попробуйте решить другие уравнения в гипернатуральных числах, например, $n^x - a = n^y - b$.

## Задача 3. Шоколадки

Мальчик Коля пришёл в магазин выбирать шоколадку в поход. Так как вкусам своих товарищей он не видел возможности угодить, то Коля решил из всех шоколадок выбрать ту, которую проще всего поделить поровну. А именно, пусть шоколадка представляет собой прямоугольник $a \times b$, $a, b \in \mathbb{N}$, состоящий из $a \cdot b$ долек. Колю интересуют те формы шоколадок, где число долек делится поровну между участниками похода. Но вот беда, Коля точно не знает, сколько людей идёт в поход.

1. Считая, что в походе с одинаковой вероятностью могут оказаться от 2 до 10 человек, найдите все такие формы шоколадок из не более чем 100 долек, количество долек в которых с наибольшей вероятностью будет делиться на количество участников похода. Сколько различных конфигураций подойдёт? А если не более 50-ти долек?

2. При заданных ограничениях на размер шоколадки и на количество участников похода, те шоколадки, которые с наибольшей вероятностью делятся поровну, будем называть оптимальными. Решение с наименьшим числом долек будем назвать минимальной оптимальной шоколадкой.

   **а)** Покажите, что при фиксированном максимальном числе участников похода и росте ограничения на число шоколадок размер минимальной оптимальной шоколадки стабилизируется. Как описать размер (количество долек) минимальной шоколадки в зависимости от ограничения на число человек? Оцените, с какого места ограничение на размер не имеет значения.

   **б)** Покажите, что при фиксированной верхней оценке на размер шоколадки и росте возможного числа людей, количество долек в минимальной шоколадке стабилизируется. Опишите и оцените размер минимальной шоколадки после стабилизации.

**в)** Сколько различных конфигураций для минимальных шоколадок из пунктов а) и б)?

**3.** Опишите алгоритм построения оптимальной шоколадки при заданных ограничениях. Какова сложность Вашего алгоритма?

**4.** Допустим теперь, что в магазине бывают не все шоколадки, а только вида $a \times b$, где $b \geq a \geq \varepsilon b$, для некоторого фиксированного $\varepsilon \leq 1$. Изменится ли количество долек в минимальной оптимальной шоколадке с таким условием? Оцените количество оптимальных шоколадок, удовлетворяющих этому условию.

**5.** Рассмотрим ситуацию, когда каждый из $d$ людей, которым Коля предложил идти в поход, пойдут в него — $i$-ый с вероятностью $p_i \leq 1$. Будучи несколько ленивым, Коля хочет найти не самое оптимальное, а $\varepsilon$-оптимальное решение, то есть такую шоколадку, которая делится нацело между участниками с вероятностью в $\varepsilon \leq 1$ раз меньше, чем для оптимальной шоколадки. Предложите свои варианты решения этой задачи, если:

**а)** Для всякого $1 \leq i \leq d$ $p_i = p < 1$.

**б)** $\varepsilon$ достаточно маленькое ($\varepsilon = \frac{1}{100}$).

## Задача 4. Матрицы и периоды

**1.** Рассмотрим целочисленную матрицу $2 \times 2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Возьмём некоторый целочисленный вектор $\binom{x}{y}$, натуральное число $n$ и построим последовательность

$$x_k = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mod n.$$

Здесь и далее под записью $\mod n$ подразумевается взятие остатка от деления на $n$. Покажите, что эта последовательность будет чисто периодической, то есть существует такое $m \in \mathbb{N}$ со свойством

$x_{k+m} = x_k$ для любого $k \in \mathbb{N}$. Каков период этой последовательности в зависимости от $x$, $y$ и $n$?

**2.** Рассмотрим целочисленную матрицу, некоторый начальный вектор и натуральное число $n$. Рассмотрим последовательность, аналогичную предыдущему пункту

$$x_k = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mod n.$$

**а)** Покажите, что эта последовательность не обязательно чисто периодическая.

**б)** Тем не менее, период у этой последовательности есть, то есть найдётся такое $m$, что для всех достаточно больших $k > N x_{k+m} = x_k$.

**в)** Оцените период этой последовательности в зависимости от $n$. Достигается ли Ваша оценка для какой-либо матрицы?

**г)** Как описать те матрицы, последовательности для которых всегда будут чисто периодичны для любых $x$, $y$ и $n$?

**3.** Рассмотрим матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

**а)** Чему равны периоды последовательностей для начального вектора $\binom{1}{0}$, если число $n$ — некоторое простое число?

**б)** Покажите, что если $n|l$, то тогда $\pi(n)|\pi(l)$, где $|$ означает то, что первое число делит второе, а $\pi(n)$, сокращение для $\pi(A, x, n)$, период последовательности, построенной по матрице $A$, начальному вектору $x$ и некоторому $n$.

**в)** Попробуйте связать периоды по модулю $n$, $m$ и $nm$.

**4.** Как изменится период, если для указанных выше матриц в качестве начального вектора взять не вектор $\binom{1}{0}$, а другой?

**5.** Рассмотрите аналогичную задачу для матриц произвольного размера.

## Задача 5. Отмеченные точки

На плоскости отметим несколько точек $P_1, \ldots, P_n$. Будем пошагового добавлять новые точки по следующему правилу: если точки $P$ и $P'$, $Q$ и $Q'$ уже отмечены, а отрезки $PP'$ и $QQ'$ пересекаются по единственной точке $N$, то эта точка будет отмечена на следующем шаге, если не была отмечена ранее.

1. **а)** Покажите, что если изначально точек было не более 4, то после первого шага нельзя будет отметить ни одной новой точки.

   **б)** Найдите все такие конфигурации изначальных точек, что после некоторого числа шагов точек добавить уже нельзя.

2. Покажите, что есть такая комбинация из более чем пяти точек, к которой после любого шага всё равно можно добавить точки.

3. Рассмотрим множество $M_i = M_{i,P_1,\ldots,P_n}$ — множество всех точек, которые были отмечены на шаге $i$, если мы стартовали с $P_1, \ldots, P_n$. Определим $M_\infty = \bigcup\limits_{i=0}^{\infty} M_i$ — множество всех точек добавленных на каком-либо шаге.

4. Дайте описание для $cl(M_\infty)$ — замыкания множества $M_\infty$, где под замыканием множества А подразумевается множество всех точек $x$ плоскости, что для всякого $\varepsilon > 0$ существует точка $y \in A$ такая, что $\mathrm{dist}(x, y) < \varepsilon$, где $\mathrm{dist}(x, y)$ обозначает обычное расстояние. Покажите, что получившаяся фигура обязательно является выпуклым многоугольником в объединении с конечным числом точек.

5. Рассмотрим выпуклый многоугольник $P$ с вершинами $P_1, \ldots, P_n$. Построим по этим вершинам множество $Q = cl(M_\infty)$. Каким может быть отношение площади $Q$ к площади $P$?

6. Каково отношение площадей в случае правильного $n$-угольника для $n \geq 5$?

7. Рассмотрим выпуклый прямоугольник $ABCD$. Рассмотрим некоторую точку $E$ внутри. При каком выборе $E$ достигается максимум площади $cl(M_{\infty,A,B,C,D,E})$? Для параллелограмма? Для произвольного выпуклого четырёхугольника? Каково будет отношение площади получившегося множества к площади изначальной фигуры?

8. Исследуйте другие вопросы, связанные с площадями для многоугольников с большим числом сторон. Рассмотрите ситуацию в трёх измерениях — как нужно модифицировать определение?

**9.** Что будет, если исходных точек суть бесконечно много? Например, если исходное множество точек — это объединение нескольких кривых?

## Задача 6. Раздутия и стягивания

**1.** Рассмотрение этой задачи мы начнём с описания некоторого множества преобразований отрезка $[0,1]$ в себя. Число вида $\frac{k}{2^n}$, где $k,n \in \mathbb{Z}$ будем называть двоично-рациональным. Разбиением отрезка называется набор конечного числа точек в нём, а отрезки, соединяющие соседние точки между собой или крайние с концами отрезка — элементами разбиения. Будем называть отрезок $[a,b]$ диадическим, если $a = \frac{k}{2^n}$, а $b = \frac{k+1}{2^n}$, где $k,n \in \mathbb{N}$. Непрерывное отображение $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ называется кусочно-линейным, если существует разбиение отрезка $[a,b]$, так что $f(x) = qx+r$ для некоторых $q,r \in \mathbb{R}$ на каждом элементе разбиения. Кусочно-линейную непрерывную биекцию $f$ из отрезка $[a,b]$ в отрезок $[c,d]$ такую, что найдётся разбиение $[a,b]$, что его элементы $I_k$ — диадические отрезки, а $f|_{I_k}(x) = 2^n x + r$ для некоторых $n \in \mathbb{Z}$, $r \in \mathbb{R}$, будем называть $pl_2$-преобразованием отрезка $[a,b]$ в отрезок $[c,d]$. Рассмотрим множество $F$, состоящее из всех $pl_2$-преобразований отрезка $[0,1]$ в себя. Например, такая функция лежит в $F$:

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \le x < \frac{1}{4} \\ x + \frac{1}{4}, & \frac{1}{4} \le x < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}, & \frac{1}{2} \le x \le 1 \end{cases}.$$

**а)** Покажите, что если $f \in F$, то $f(0) = 0,\ f(1) = 1$.

**б)** Покажите, что отображение из $F$ переводит некоторое разбиение отрезка $[0,1]$ на диадические отрезки в новое разбиение $[0,1]$ на диадические.

**в)** Покажите, что если $f,g \in F$, то $f \circ g \in F$.

**г)** Покажите, что если $f \in F$, то $f^{-1} \in F$.

**д)** Покажите, что если $f \in F,\ f \neq \mathrm{Id}_{[0,1]}$, тогда $f^{(n)} \neq \mathrm{Id}_{[0,1]}$. Иными словами, $F$ образует группу относительно композиции, в которой нет элементов конечного порядка.

**е)** Покажите, что для любых двух разбиений отрезка $[0,1]$ на одинаковое число диадических интервалов существует единственная $f \in F$, переводящая каждый элемент первого разбиения линейно в элемент второго.

**ё)** Покажите, что у любого такого преобразования $f \in F$ число неподвижных точек, не лежащих ни на каком неподвижном отрезке, конечно. Чем можно ограничить число этих неподвижных точек? А у $f^{(n)}$? Здесь $f^{(n)}$ обозначает композицию $f$ с собой $n$ раз.

**ж)** А сколько может быть различных неподвижных точек у преобразования, которое построено с помощью операции композиции из двух функций $f, g$ в зависимости от числа их неподвижных точек?

**з)** Обобщите все указанные свойства на $pl_2$-преобразования между произвольными отрезками.

**2.** Циклическим $pl_2$-преобразованием $f\colon [a, b] \to [c, d]$ отрезков с двоично-рациональными концами называется отображение $f\colon [a, b] \to [c, d]$, разрывное не более чем в одной точке $x_1$, такое что $f(a) = f(b), f(x_1) = d$, функция $f|_{[a,x_1]}$ — $pl_2$-преобразование на образ, а $g = f|_{(x_1,b]}$ — доопределяется до $pl_2$-преобразования на образ тем что $g(x_1) = c$. В частности, если точки разрыва нет, то это просто $pl_2$-преобразование.

**а)** Покажите, что такое отображение задаёт непрерывную биекцию из окружности длины $b - a$ в окружность длины $d - c$.

**б)** Определите композицию циклических $pl_2$-преобразований, так, чтобы оно было согласовано с композицией обычных $pl_2$-преобразован

**в)** Покажите, что множество $T$ всех циклических $pl_2$-преобразований $[0, 1]$ в себя образует группу.

**г)** Опишите элементы конечного порядка в этой группе.

**3.** Покажите, что для любого отрезка $[a, b]$, $a = k/2^n$, $b = l/2^m$ существует $pl_2$-преобразование $f\colon [a, b] \to [0, 1]$, $k, l, n, m \in \mathbb{Z}$.

**4.** Весом на отрезке $[0, n]$, $n \in \mathbb{N}$ назовём функцию $W\colon V \to \mathbb{Z}$, где $V = \{0, 1, \ldots, n\}$. Пусть даны отрезки $[0, n]$, $[0, n + 1]$ и веса $W$, $W_1$ на них. Будем говорить, что эти два отрезка с весом связаны преобразованием раздутия в отрезке $[i, i + 1]$, $i < n, i \in \mathbb{N}$, если для

$pl_2$-преобразования $f\colon [0,n] \to [0,n+1]$, заданного по формуле

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0,i] \\ 2x-i, & x \in [i,i+1] \\ x+1, & x \in [i+1,n] \end{cases}$$

и переводящего целые точки в целые, верно

$$W_1(k) = \begin{cases} W(f^{-1}(k)), & k \neq i, i+1, i+2 \\ W(f^{-1}(k)) - 1, & k \in \{i, i+2\} \\ -1, & k = i+1 \end{cases}.$$

Обратное преобразование $f^{-1}$ назовём стягиванием точки $x = i+1$ на взвешенном отрезке $[0,n+1]$. Вес $W$ на отрезке $[0,n]$ называется циклическим, если $W(0) = W(n)$. Если $i \neq 0, n-1$, то циклическое раздутие отрезка $[0,n]$ с циклическим весом $W$ в отрезке $[i,i+1]$ - это просто раздутие в соответствующем отрезке (проверьте, что новый вес в этом случае тоже циклический). В случае $i = 0$, надо лишь уменьшить $W_1(n+1) = W(n) - 1 = W(0) - 1 = W_1(0)$, так, чтобы новый вес стал циклическим. В случае $i = n-1$ определим циклическое $pl_2$-преобразование

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & x \in [0,n-1] \\ 2x-n+2, & x \in [n-1,n-\frac{1}{2}] \\ 2x-2n+1, & x \in (n-\frac{1}{2},n] \end{cases}.$$

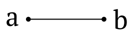
Веса вводятся так же, через формулы для прообразов и соотношение $W_1(n+1) = W_1(0) = -1$. Стягивание — обратное преобразование.

Теперь, если есть набор отрезков с весами $\Gamma_0, \ldots, \Gamma_n$ и преобразований $f_i\colon \Gamma_{i-1} \to \Gamma_i$, каждое из которых либо раздутие, либо стягивание, то композиция $f_n \circ \ldots \circ f_1$ называется преобразованием $\Gamma_0 \to \Gamma_n$. Аналогично определим циклическое преобразование отрезков с циклическими весами. Отрезок с циклическим весом будем рисовать как замкнутую ломанную, где около вершин подписаны веса. Отрезок с весом, который нельзя стянуть, называется минимальным.

**а)** Какие $pl_2$-преобразования $f$ получаются допустимыми для отрезка [0,1] и всех возможных весов на нём?

**б)** Покажите, что любой отрезок с весом преобразуется в минимальный. Аналогично для циклических весов и циклических преобразований. Единственным ли образом определён соответствующий минимальный отрезок с весом? Попробуйте найти какой-нибудь канонический минимальный отрезок с весом, в который преобразуется данный. Какая у него длина?

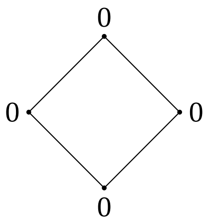
**в)** Покажите, что у взвешенного разбиения отрезка [0,1] с точками разбиения на концах




где $a, b \in \mathbb{Z}$ веса, нет нетривиальных преобразований в себя.

**г)** Покажите, что у любого взвешенного отрезка нет нетривиальных преобразований в себя. Но могут быть такие, которые меняют веса на концах.

**д)** Опишите группу циклических преобразований.




**е)** Попробуйте описать группу циклических преобразований любого отрезка с нулевыми весами.

**5.** Считая, что мы определили допустимые преобразования цепей и циклов как графов, дайте определения допустимых преобразований произвольных графов.

## Задача 7. Учимся считать

$F$ - произвольное поле, $\binom{n}{k}$ — число сочетаний из $n$ элементов по $k$.

**1.** Посчитайте, чему равно

$$-\binom{b+1}{0}\binom{b+c}{b-1}\binom{c+1}{c-1}+\binom{b+1}{1}\binom{b+c}{b}\binom{c+1}{c}-$$
$$-\binom{b+1}{2}\binom{b+c}{b+1}\binom{c+1}{c+1}.$$

Ответ будет заметно короче этого выражения!

**2.** Представьте следующие числа в виде произведения и частного некоторых факториалов:

$$\binom{4}{0}^3-\binom{4}{1}^3+\binom{4}{2}^3-\binom{4}{3}^3+\binom{4}{4}^3$$

и

$$\binom{6}{0}^3-\binom{6}{1}^3+\binom{6}{2}^3-\binom{6}{3}^3+\binom{6}{4}^3-\binom{6}{5}^3+\binom{6}{6}^3.$$

**3.** Попытайтесь как-то обобщить без строгого доказательства полученные результаты.

**4.** Посчитайте, чему равен коэффициент многочлена $[x^2y^2z^2](x-y)^2(y-z)^2(z-x)^2$, где $[\,]$ означает взятие коэффициента при соответствующем мономе. А $[x^2y^2z^2](x-y)(x-y-1)(y-z)(y-z-1)(z-x)(z-x-1)$? В каких целочисленных точках куба $(0\le x\le 3)\times(0\le y\le 3)\times(0\le z\le 3)$ эти многочлены принимают ненулевые значения? Что можно сказать про значения этих многочленов в целых точках данного куба и про указанный коэффициент?

**5.** Докажите интерполяционную формулу Лагранжа: если $C$ - произвольное подмножество $F$ размера $d+1$, а $f$ - многочлен степени не выше $d$, то

$$f=\sum_{a\in C}f(a)\prod_{c\in C,c\neq a}\frac{x-c}{a-c}.$$

**6.** Пусть $f\in F[x_1,x_2]$ - многочлен от двух переменных суммарной степени $deg(f)\le d_1+d_2$, а $C_1,C_2$ - произвольные подмножества $F$ размера $|C_i|\ge d_i+1$. Тогда

$$\sum_{c_1\in C_1}\sum_{c_2\in C_2}\frac{f(c_1,c_2)}{\phi_1'(c_1)\phi_2'(c_2)}=[x_1^{d_1}x_2^{d_2}]f(x_1,x_2),$$

где $\phi_i(z)=\prod_{c\in C_i}(z-c)$.

7. Постарайтесь усилить и доказать теорему из пункта 6. Можете ли Вы придумать способ выразить коэффициент многочлена при произвольном мономе через его значение в заданных точках (как в предыдущем пункте, например)?

8. Постарайтесь посчитать, чему равен коэффициент многочлена $[x^a y^a z^a](x-y)^a(y-z)^a(z-x)^a$ двумя разными способами и получить отсюда загадочное тождество.

9. Постарайтесь придумать тождество, обобщающее все тождества этой задачи, и доказать его.

## Задача 8. Разрезания куба

1. Рассмотрим куб $3 \times 3 \times 3$. Мы хотим разрезать его на кубики $1 \times 1 \times 1$. За один раз можно сделать разрез в одной плоскости, при этом перед следующим разрезом можно переставлять в пространстве уже отрезанные части. За какое минимальное число разрезов можно справиться?

2. Рассмотрите теперь куб $n \times n \times n$. За сколько разрезаний можно справиться? Объясните, почему за меньшее число нельзя?

3. А сколькими разными способами можно произвести такое разрезание (способы различны, если на каком-то шаге от кубика отрезаны разные множества)? А если называть разрезания разными, когда на каком-то шаге в них отличаются наборы отрезанных фигур?

4. Рассмотрим равносторонний треугольник на плоскости с длиной стороны $n$. Мы хотим разрезать его на равносторонние треугольники с длинной стороны 1. За сколько разрезаний это возможно? Сколькими способами?

5. Рассмотрите аналогичную задачу для $d$-мерного куба и $d$-мерного симплекса.

6. Проверьте, что трёхмерный куб $n \times n \times n$ можно разрезать на $4n^3$ прямоугольных тетраэдров и $n^3$ правильных тетраэдров. Каково наименьшее число разрезаний?

7. Рассмотрите другие возможные разрезания.

# Задача 9. Маляры

Графом $G = (V, E)$ называется множество $V$ и симметричное отношение инцидентности $E \subset V \times V$. Множество $V$ называется множеством вершин, а $E$ — множеством ребер. Если $E \cap \{(v, v) | v \in V\} = \varnothing$, то говорят, что в графе нет петель. Мы будем рассматривать только такие графы.

Правильной раскраской графа $G$ в $n$ цветов называется отображение $col : V \to [n] = \{1, 2, \ldots, n\}$ такое, что никаким двум инцидентным вершинам не сопоставляется один и тот же цвет, то есть $(v, v') \in E \Rightarrow col(v) \neq col(v')$. Хроматическим числом графа $G$ называется наименьшее $n$, для которого существует правильная раскраска в $n$ цветов. Хроматическое число обозначается $\chi(G)$.

Пусть $(M, d)$ — метрическое пространство. Положим, $V = M$ и $E = \{(m, m') \in M \times M \mid d(m, m') = 1\}$. Тогда по определению $\chi(M) = \chi(G)$, где $G = (V, E)$.

Во всех последующих пунктах через $\mathbb{R}$ обозначается множество вещественных чисел, через $\mathbb{R}^n$ обозначается метрическое пространство, точки которого являются упорядоченными наборами из $n$ чисел, а расстояние определяется по формуле

$$d((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)) = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (x_j - y_j)^2}.$$

Все подмножества $\mathbb{R}^n$ считаются метрическими пространствами с индуцированной из $\mathbb{R}^n$ метрикой.

1. Докажите, что $\chi(\mathbb{R}^2) \geq 4$, то есть плоскость нельзя раскрасить в 3 цвета. Предъявите раскраску плоскости в 7 цветов: $\chi(\mathbb{R}^2) \leq 7$.

2. Докажите, что $\chi(\mathbb{R}^n) \geq n + 2$.

3. Зафиксируем положительное число $\varepsilon < \sqrt{3/7}$. Покажите, что $5 \leq \chi(\mathbb{R}^2 \times [0, \varepsilon]) \leq 7$.

4. Зафиксируем положительное число $\varepsilon < 10^{-3}$. Покажите, что $\chi(\mathbb{R}^2 \times [0, \varepsilon]^2) \geq 6$

5. Зафиксируем простое число $p$. Через $\mathbb{F}_p$ будем обозначать поле из $p$ элементов. Пусть $n$ — натуральное число, рассмотрим граф $G_n^p = (V_n^{(p)}, E_n^{(p)})$, где $V_n^{(p)} = (\mathbb{F}_p)^n$, а $E_n^{(p)} = \{(v, w) \in V_n^{(p)} \times V_n^{(p)} \mid v \cdot w = 1\}$, где

$$(v_1, \ldots, v_n) \cdot (w_1, \ldots, w_n) = \sum_{j=1}^{n} v_j w_j.$$

Оцените $\chi(G_n^2)$, $\chi(G_n^3)$ при больших $n$.

**6.** Оцените $\chi(G_n^p)$ при больших $n$ для произвольного $p$.

## Задача 10. Как подгонять и не оплошать

В некотором конкурсе участвуют $n$ команд из $k$ участников. Команды уже отыграли, и осталось лишь определить победителя. При равенстве очков одно место может распределиться среди нескольких команд (как на математической олимпиаде).

Каждый участник команды заработал некоторую оценку из интервала $[0, 1]$. Таким образом, результаты команд, исходя из которых надо их упорядочить, записаны невозрастающими последовательностями из $k$ неотрицательных чисел. И для того, чтобы подвести итог, необходимо придумать функцию $f\colon [0, 1]^k \to \mathbb{R}$, которая будет вычислять окончательный результат каждой команды.

А теперь — главный нюанс. Выбор этой функции целиком во власти жюри. Предположим, что некий член жюри, ответственный за выбор функции, пытается предложить капитанам команд подобрать $f$ таким образом, чтобы команда этого капитана не оказалась, ммм..., в последних рядах.

Но не всё так просто. С одной стороны понятно, что стоит пообещать первое место наибольшему числу команд, однако, если ответственный обнадёжит тем, что потом не сможет сделать, то обиженная команда обязательно разболтает о его предложении.

Вдобавок, Комитетом По Защите Прав Олимпиадников установлены следующие правила: функция $f$ должна иметь вид

$$f(x_1, \dots, x_k) = \left(\sum_{j=1}^{k} w_j x_j^l\right)^{1/l}$$

для некоторого вещественного числа $l \geq 1$ и весов $w_1 \geq w_2 \geq \dots \geq w_k > 0$.

**1.** Пусть $k = 3,\ n = 4$ и результаты оказались следующими:

$$(0.3, 0.1, 0.1),\ (0.2, 0.2, 0.1),\ (0.15, 0.14, 0.14),\ (0.13, 0.1, 0.1).$$

Стоит ли обещать помощь последней команде?

**2.** Будем говорить, что $(x_1, \ldots, x_k)$ мажорирует $(y_1, \ldots, y_k)$, если $\sum\limits_{i=1}^{j} x_i > \sum\limits_{i=1}^{j} y_i$ для любого $j$. Предположим, что ни для каких двух команд не верно, что результаты одной мажорируют результаты другой.

Какое максимальное число команд гарантировано можно вывести на первое место?

**3.** Пусть $A \subset [0,1]^k$ — некоторое открытое подмножество. Вероятностью того, что результаты данной команды попали в множество $A$, будем считать $|A|$, где $|A|$ — объем множества $A$. Результаты команд считаются независимыми в совокупности.

Пусть $k, n$ и некоторое натуральное число $j$ фиксированы. С какой вероятностью можно подобрать $l, w_1, \ldots, w_k$ для того, чтобы вывести на первое место ровно $j$ команд?

## Задача 11. Как бы поделить

**1.** Многочлен $f(x) \in F[x]$ с коэффициентами из поля $F$ называется неприводимым, если все его делители в $F[x]$ имеют вид $c$, $cf(x)$, $c \in F \setminus \{0\}$. Покажите, что следующие многочлены неприводимы, как многочлены с рациональными коэффициентами:

**а)** $x^2 + 2bx + 1$ , где $b \in \mathbb{Z}$, $|b| > 1$.

**б)** $x^4 + 1$.

**2.** Разложите на неприводимые множители $x^{18} - 1$ над рациональными числами. Найдите нетривиальное разложение на множители числа $2^{18} - 1$.

**3.** Хорошо известно, что многочлен $\Phi_n(x) = \prod_{(k,n)=1, k<n}(x - e^{2\pi i k/n})$ является многочленом с целыми коэффициентами и что $x^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(x)$. Покажите, что многочлен $\Phi_n(x)$ неприводим над $\mathbb{Q}$.

**4.** Для каких $n$ многочлен $\Phi_n$, взятый по модулю простого $p$ (что корректно, так как он с целыми коэффициентами), приводим в поле из $p$ элементов? Например, при $p = 11$?

**5.** Покажите, что над полем из $p$ элементов многочлен $x^p - x + 1$ неприводим. Покажите, что он является делителем $x^{p^p - 1} - 1$. Делителем какого $\Phi_d(x)$ является $x^p - x + 1$?

**6.** Рассмотрим некоторый целочисленный многочлен $g(y) \in \mathbb{Z}[y]$. Например, $g(y) = ay^n$. Для каких $g(y)$ и $d$ многочлен $\Phi_d(g(y))$ не является неприводимым над $\mathbb{Q}$?

**7.** Что можно сказать, если вместо $\Phi_d(x)$ взять какой-то другой неприводимый многочлен? Можно ли взять $g(y)$ маленькой степени (меньше степени исходного многочлена)? Бесконечно ли число таких $g(y)$?

## Задача 12. Выпуклые функции

Напомним, что функция $F\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ называется выпуклой, если

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^d,\ t \in [0,1] \quad tF(x) + (1-t)F(y) \geq F(tx + (1-t)y).$$

**1.** Хорошо известно, что выпуклая функция из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$ непрерывна. Покажите, что это выполнено и в случае большей размерности.

**2.** Теперь рассмотрим ситуацию похитрее. Пусть $d = 2$ и $f(x_1, x_2)$ выпукла по каждой координате в отдельности, то есть при фиксированном $x_1$ она выпукла, как функция от $x_2$ и наоборот. Покажите, что $f$ непрерывна.

**3.** Покажите то же самое для $d > 2$.

**4.** Пусть $F$ выпукла и положительно однородна порядка 1, т.е. $F(\lambda x) = |\lambda| F(x)\ \forall x \in \mathbb{R}^d$. Покажите, что такая функция неотрицательна.

**5.** Пусть функция $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ является выпуклой по каждой переменной и положительно однородна порядка 1. Докажите, что функция $F$ неотрицательна.

**6.** Функция $F$ называется липшицевой, если существует такая $L > 0$, что

$$|f(x) - f(y)| < L|x - y|\ \forall x, y \in \mathbb{R}^d.$$

Функция $F\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ называется субгармоничной, если для всякой точки $x_0$ и шарика $Q$ с центром в точке $x_0$ $F(x_0) \leq \frac{1}{\mathrm{Vol}(Q)} \int\limits_Q F(x)dx$, где $\mathrm{Vol}(Q)$ обозначает объём шара $Q$.

Пусть функция $F : \mathbb{R}^{2d} \to \mathbb{R}$ липшицева, положительно однородна порядка 1, и для каждого $j \in [1, d]$ субгармонична по переменным $(x_j, x_{j+d})$. Докажите, что функция $F$ неотрицательна, если:

**а)** $d$ равно единице.

**б)** $d$ — произвольное натуральное число.

**7.** Постройте контрпример для случая нечётной размерности. Например, в $\mathbb{R}^3$.

# Задачи 2015 года

## Задача 1. Определители

Напомним, что на множестве квадратных матриц размера $n$ есть функция $\Delta$, сопоставляющая матрице некоторое число, которое называется определителем этой матрицы. Эта функция однозначно задаётся следующими условиями: если матрица $A$ представлена в виде $(u_1, \ldots, u_n)$, где $u_i$ столбцы чисел, то тогда

**1.** Если случилось так, что столбец $u_i = v + \lambda v'$, где $v$ и $v'$ столбцы, а $\lambda$ — некоторое число, то

$$\Delta(A) = \Delta(u_1, \ldots, u_{i-1}, v, u_{i+1}, \ldots, u_n) + \lambda\Delta(u_1, \ldots, u_{i-1}, v', u_{i+1}, \ldots, u_n).$$

**2.** Для любых $1 \leq i < j \leq n$ выполнено

$$\Delta(A) = -\Delta(u_1, \ldots, u_{i-1}, u_j, u_{i+1}, \ldots, u_{j-1}, u_i, u_{j+1}, \ldots, u_n).$$

**3.** $\Delta(E) = 1$, где $E$ матрица, такая что $E_{ij} = 0$, для $i \neq j$ и $E_{ii} = 1$.

Так, например, определитель для матрицы $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}$ размера 2 может быть вычислен по формуле

$$\Delta(A) = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}.$$

Матрица $A$ называется симметричной, если $A_{ij} = A_{ji}$ для всех возможных $i$ и $j$.

Главным минором порядка $k$, или просто $k$-ым главным минором матрицы $A$, называется число, равное определителю матрицы $C$ размера $k$, где $C_{i,j} = A_{i,j}$ $(1 \leq i, j \leq k)$. Будем обозначать это число $\Delta_k(A)$. Последовательностью главных миноров матрицы $A$ называется строка $(\Delta_1(A), \ldots, \Delta_n(A))$.

**1.** Покажите, что если $A$ симметричная матрица размера 2, составленная из вещественных чисел и её первый главный минор равен 0, то её определитель отрицателен.

2. Докажите, что для комплексных симметричных матриц $2 \times 2$ в качестве последовательности главных миноров реализуется любая строка комплексных чисел.

3. Исследуйте эти же вопросы для матриц $3 \times 3$.

4. Для любого натурального $n$ найдите все упорядоченные наборы $(B_1, \ldots, B_n)$ $F^n$, для каждого из которых найдется симметричная матрица A размера $n$ с элементами из $F$, у которой последовательность главных миноров совпадает с $(B_1, \ldots, B_n)$, а $F$ – одно из следующих множеств

   **а)** $\mathbb{R}$,

   **б)** $\mathbb{C}$,

   **в)** $\mathbb{Q}$,

   **г)** любое другое поле.

5. Исследуйте вопрос пункта 4 для целочисленных матриц, матриц с коэффициентами в целых гауссовых числах и т.д.

6. Предложите свои обобщения этой задачи и решите их.

## Задача 2. Короткие дороги

В некоторой стране идёт активное строительство дорог. Основная задача состоит в том, чтобы соединить между собой все города наименьшей по общей длине системой дорог. В данном случае будем считать, что города - это точки на плоскости, а система дорог - это набор отрезков, не пересекающихся между собой нигде, за исключением, возможно, своих концов. Назовём точку — точкой разветвления дорог, если в этой точке встречаются три или более дороги. Стоит отметить, что концом отрезка не обязательно является город.

1. Определите, как выглядит оптимальная система дорог, если в стране всего три города, находящихся на равном расстоянии; на разных расстояниях друг от друга. Найдите длину этой сети дорог.

2. Покажите, что для любой конфигурации городов оптимальная сеть дорог образует дерево с вершинами в городах и точках разветвления дорог.

3. Выясните, какие возможны конфигурации дорог в точках разветвления.

4. Оцените число рёбер в этом графе.

5. Найдите оптимальную конфигурацию для страны, чьи города расположены в вершинах прямоугольника; в вершинах других многоугольников.

6. Оцените длину оптимальной системы дорог для произвольной конфигурации; для городов, находящихся в вершинах выпуклого многоугольника. Оптимальна ли Ваша оценка?

7. Верно ли, что Ваши необходимые условия реализации графа в качестве оптимальной системы дорог являются достаточными.

8. Обобщите и решите задачу, когда точки лежат на сфере, а дороги проходят по дугам больших окружностей. Рассмотрите случай других метрических пространств.

## Задача 3. Различные расстояния

Рассмотрим $M$ некоторое множество точек в $k$-мерном пространстве. Пусть $D(M) = \left|\left\{r = dist\left(x_i, x_j\right) |x_i, x_j \in M;\ \ x_i \neq x_j\right\}\right|$ - количество различных расстояний между точками множества $M$. Определим теперь

$$D_k(n) = \min_{\substack{|M|=n \\ M\subset\mathbb{R}^k}} D(M).$$

К примеру, $D_2(3) = 1$.

1. Найдите $D_2(4), D_2(5), D_2(6)$.

2. Оцените последовательность $D_2(n)$ сверху и снизу.

3. Решите пункты 1 и 2 в трёхмерном пространстве.

4. Найдите $D_n(n+2), D_n(n+3), D_n(n+4)$.

5. Верно ли, что существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} D_n(n+c)$ для любого натурального $c$. Если да, то чему он равен?

6. Рассмотрите предыдущий вопрос для последовательности $D_n(cn^k)$ при фиксированных $c$ и $k$.

7. Верно ли, что $D_k(n)$ и $D_k(n+1)$ обязаны отличаются не более чем на 1?

**8.** Предложите верхнюю и нижнюю оценки для $D_k(n)$ при фиксированных $k$.

**9.** Обобщите задачу на другие пространства. Попробуйте оценить число различных конфигураций, при которых достигается минимум (с точностью до движений и подобия).

## Задача 4. Циркуляции

Пусть $G$ - неориентированный граф со множеством рёбер $E$ и множеством вершин $V$. При этом будем допускать в графе $G$ кратные рёбра и петли. Введём множество $\overline{E} = \{(e, x, y) | e \in E;\ x, y \in V;\ x \text{ и } y \text{ концы ребра } e\}$, каждый элемент которого задаёт ребро с выбранной ориентацией. Целочисленной циркуляцией на графе $G$ назовём функцию $f\colon \overline{E} \to \mathbb{Z}$, удовлетворяющую двум условиям

а) $f(e, x, y) = -f(e, y, x)$.

б) Для любой вершины $x$ $\sum\limits_{\substack{e:\ \exists y \\ (e,x,y)\in\overline{E}}} f(e, x, y) = 0$ (Закон Кирхгофа).

$k$-циркуляцией для $k \geq 2$ называется циркуляция $f$, такая что $0 < |f(x)| < k, x \in \overline{E}$.

**1.** Покажите, что если из связного графа $G$ можно убрать одно ребро $e$, так что граф $G - e$ окажется несвязным(такое ребро будем называть мостом), то на этом графе не существует ни одной $k$-циркуляции ни для какого $k$.

**2.** Покажите, что 2-циркуляция на графе без мостов существует тогда и только тогда, когда степень любой вершины чётна.

**3.** Назовём потоковым числом графа $G$ наименьшее такое $k$, что на $G$ есть $k$-циркуляция. Если такого $k$ нет, будем говорить, что потоковое число равно $\infty$. Будем обозначать это число как $\eta(G)$. Верно ли, что если в графе нет мостов, то $\eta(G) < \infty$?

**4.** Найдите $\eta(K_{2n+1})$, для различных $n$, где $K_{2n+1}$ - полный граф на $2n+1$ вершине.

**5.** Найдите $\eta(K_4)$. Посчитайте, сколько различных $k$-циркуляций на $K_4$.

**6.** Найдите $\eta(K_{2n})$.

**7.** Пусть $P$ - граф Петерсена. Покажите, что на этом графе нет 4-циркуляции. Верно ли, что любой граф, на котором нет 4-циркуляции содержит подразбиение графа $P$.

**8.** Пусть $H$ - абелева группа, например группа остатков $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. $H$-циркуляцией называется отображение $f\colon \overline{E} \to H$, удовлетворяющее условиям а) и б). Исследуйте количество $H$-циркуляций на различных графах. Напишите оценку количества $H$-циркуляций для конечной группы $H$.

## Задача 5. Календарь

Рассмотрим окружность радиуса $n \in \mathbb{N}$ с центром в начале некоторой фиксированной системы координат. Число $n$ назвается календарным, если на этой окружности есть в точности 12 точек с целочисленными координатами.

**1.** Приведите пример календарных чисел.

**2.** Бесконечно ли множество календарных чисел?

**3.** Чему равна плотность множества календарных чисел, то есть предел
$$\lim_{x\to\infty} \frac{|\{0 < n \leq x \,|\, n - \text{ календарное } \}|}{x}.$$

**4.** Рассмотрите вместо окружностей эллипсы, заданные уравнением $x^2 + qy^2 = n$, где $q$ - натуральное число без квадратов. При каких $q$ есть такое $n$, что у этого уравнения есть ровно 12 решений.

**5.** Рассмотрите «циферблатные» числа, где каждой минуте соответствовала бы точка на окружности с целыми координатами.

**6.** Какое количество целых решений может быть у уравнения $x^2+qy^2 = n$?

## Задача 6. Обобщение теоремы Штейнера-Лемуса

**1.** Пусть задано вещественное положительное число $n$. На сторонах AB, BC треугольника ABC отметим точки $C_n$ и $A_n$ соответственно так, что $\frac{|\widehat{BAA_n}|}{|\widehat{CAA_n}|} = \frac{|\widehat{BCC_n}|}{|\widehat{ACC_n}|} = n$, где $|\widehat{CAA_n}|$ обозначает градусную меру угла $CAA_n$. Известная теорема Штейнера-Лемуса утверждает, что равенство длин биссектрисс $|AA_1| = |CC_1|$ влечет равенство длин сторон $|AB| = |BC|$. Проверьте истинность утверждения: «Отрезки

$AA_n$ и $CC_n$ имеют равные длины тогда и только тогда, когда стороны AB и BC имеют равные длины» в каждом из следующих случаев:

**а)** $n = 2$

**б)** $n$ - произвольное натуральное число.

**в)** $n$ - произвольное положительное рациональное число.

**г)** $n$ - произвольное положительное вещественное число.

**2.** Сформулируйте и исследуйте аналогичную задачу, если точки $A_n$ и $C_n$ выбираются на прямых AB, BC соответственно так, что лучи $AA_n$, $C_n$ делят внешние углы при вершинах A и C треугольника ABC в равных отношениях.

**3.** Предложите свои обобщения или направления исследования в этой задаче и изучите их.

## Задача 7. Иррациональные корни рациональных уравнений

**1.** Известно, что уравнение $x^4+ax^3+29x^2+bx+4=0$ с рациональными коэффициентами имеет корнем число $2+\sqrt{3}$. Найдите остальные корни этого уравнения.

**2.** Обоснуйте следующее утверждение про рациональные корни уравнения вида $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^i$ с целыми коэффициентами (если они, конечно, существуют): если $x_0$ – рациональный корень такого уравнения, то он обязательно равен $x_0 = \frac{p}{q}$, где $p$ – делитель свободного члена (т.е. $a_0$), а $q$ – делитель $a_n$. На основании этого соображения постройте алгоритм нахождения таких корней. Распространите этот алгоритм на уравнения такого же типа с рациональными коэффициентами.

**3.** Попробуйте предложить алгоритм определения (с обоснованием) корней вида $a+b\cdot\sqrt{2}, a+b\cdot\sqrt{3}, \ldots$ где $a, b \in \mathbb{Q}$, для таких уравнений (по крайней мере, постройте алгоритмы определения таких корней).

**4.** Может, вы сможете определять корни более сложного вида $a+b\cdot\sqrt{2}+c\cdot\sqrt{3}$ или $a+b\cdot\sqrt[3]{2}$?

**5.** Предложите алгоритм определения корней исходя из их общего вида, такого как $a+b\cdot\sqrt{m}$, $a+b\cdot\sqrt{m}+c\cdot\sqrt{k}$ и т.п., где $m, k, \ldots$ – заранее неизвестные натуральные числа.

**6.** Попробуйте оценить сложность предлагаемых алгоритмов.

**7.** Рассмотрите корни уравнений еще более сложного вида (с корнями различных степеней или с «композицией» корней и т.п.).

**8.** Предложите свои обобщения или направления исследования в этой задаче и изучите их (например, попробуйте рассмотреть подобные задачи для систем уравнений с двумя и более переменными, а также уравнения с коэффициентами из множества

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \left\{x + y \cdot \sqrt{2} | x, y \in \mathbb{Q}\right\}.$$

## Задача 8. Функция Эйлера

Пусть $n$ - натуральное число, большее единицы. Обозначим за $\phi(n)$ количество таких целых $0 < x < n$, что $x$ взаимно просто с $n$.

$$\phi(n) = |\{0 < x < n | (x, n) = 1\}|$$

**1.** Покажите, что для любого $n \geq 3$ есть такое натуральное число $k(n)$, что

$$\underbrace{\phi(\phi(\cdots\phi(n)))}_{k(n)\text{ раз}} = \phi^{\circ k(n)}(n) = 2.$$

**2.** Оцените число $k(n)$ сверху и снизу, где

**а)** $n$ - число вида $\{3^s 2^t\}_{s,t \in \mathbb{N}}$.

**б)** $n$ - есть произведение всех различных простых меньших заданного числа.

**в)** $n$ - произвольное натуральное число.

**3.** Рассмотрим уравнение $\phi(n) = m$ относительно $n$. Оцените число его решений

**а)** сверху.

**б)** снизу.

**4.** Обобщите предыдущий пункт на случай уравнений $\phi(\phi(\cdots\phi(n))) = m$. При каких $m$ они разрешимы? Какова плотность множества значений функции $\phi^{\circ k}$, где плотность понимается в смысле задачи 5.

**5.** Число $n$ назовём совершенным, если $n = \sum\limits_{i=1}^{k(n)+1} \phi^{\circ i}(n)$. Докажите, что числа вида $3^k$ являются совершенными.

**6.** Постройте другие примеры совершенных чисел. Существуют ли совершенные числа, не делящиеся на 3? Какие числа не являются совершенными?

## Задача 9. Игры с карточками

**1.** Есть три автомата: первый по карточке с числами $(a, b)$, $a, b \in \mathbb{Z}$ выдаёт карточку с числами $(a - b, b)$; второй – карточку $(a + b, b)$; третий – карточку $(b, a)$. Все автоматы возвращают заложенные в них изначально карточки.

**а)** Пусть у вас в начале на руках имеется карточка $(19, 86)$. Можно ли получить карточку а) $(31, 13)$; б) $(12, 21)$?

**б)** Попробуйте найти все карточки $(x, y)$, которые можно получить из карточки $(19, 86)$. Докажите, что других карточек получить нельзя.

**в)** Пусть у вас имеется карточка с числами $(a, b)$. Попробуйте найти все карточки $(x, y)$, которые можно получить.

**2.** Есть три автомата: первый по карточке $(a, b)$, $a, b \in \mathbb{N}$ выдаёт карточку с числами $(a+1, b+1)$; второй – карточку $(a/2, b/2)$ (он работает только тогда, когда $a$ и $b$ чётные); третий – по двум карточкам с числами $(a, b)$ и $(b, c)$ печатает карточку с числами $(a, c)$. Все автоматы возвращают заложенные в них карточки.

**а)** Можно ли с помощью этих операций из карточки $(5, 19)$ получить карточку а) $(1, 50)$; б) $(1, 100)$?

**б)** Найдите все натуральные n, такие, что можно из карточки $(5, 19)$ получить карточку $(1, n)$. Докажите, что при остальных натуральных $n$ это сделать не получится.

**в)** Определите множество всех карточек $(m, n)$, $m, n \in \mathbb{N}$, которые можно получить из карточки $(5, 19)$.

**3.** Пусть первоначально имеется карточка с числами $(a, b)$, $a, b \in \mathbb{N}$, $a < b$, и автоматы такие же, как в пункте 2.

**а)** Для различных пар $a$, $b$ определите, при каких $n$ можно из заданной карточки $(a, b)$ получить карточку с числами $(1, n)$? Докажите, что при остальных натуральных n это сделать не получится.

**б)** Для различных пар $a$, $b$ определите множество всех карточек $(m, n)$, $m, n \in \mathbb{N}$, которые можно получить из карточки $(a, b)$.

**в)** Пусть первоначально имеется набор из $k$ карточек с числами $(a_1, b_1), \ldots, (a_k, b_k)$. При каких натуральных $m$ и $n$ можно получить карточку с числами $(m, n)$ (конечно, в зависимости от исходного набора карточек)?

**4.** Придумайте свои обобщения или направления исследования этой задачи и изучите их. Например, рассмотрите систему автоматов, способных выполнять над карточками какие-нибудь другие операции.

## Задача 10. Числовые квадраты

Возьмем 9 девятиклеточных квадратов.

**1.** Можно ли разместить в клетках этих квадратов натуральные числа от 1 до 9 так, чтобы затем было возможно соединить все 9 квадратов в один квадратный коврик $9 \times 9$ таким образом, что одновременно выполняются условия:

**а)** Сумма чисел по каждой диагонали в любом девятиклеточном квадрате равнялась 15.

**б)** Сумма чисел в каждом из четырёх квадратов $2 \times 2$, входящих в состав девятиклеточного квадрата, а также сумма чисел, расположенных в клетках, прилегающих к сторонам центрального квадратика, равнялась 16 в первом девятиклеточном квадрате коврика, 17 - во втором, 18 - в третьем и далее последовательно 19, 20, 21, 22, 23, 24.

**в)** В каждом столбце и в каждой строке полного квадрата $9 \times 9$ содержались бы все числа от 1 до 9 в произвольной последовательности.

**2.** Можно ли расположить числа так, чтобы сумма чисел по углам каждого из центральных $3 \times 3$, $5 \times 5$, $7 \times 7$, $9 \times 9$ квадратов окажется равной 20?

**3.** Можно ли расположить числа так, чтобы суммы, вдоль прямых, симметричных относительно одной из диагоналей квадрата $9 \times 9$, оказались одинаковыми, причём суммы эти уменьшались бы регулярно на 5 единиц по мере удаления прямых от другой диагонали большого квадрата?

4. Можно ли расположить числа так, чтобы кроме предыдущих условий оказалось, что суммы квадратов чисел вдоль прямых, симметричных относительно той же диагонали полного квадрата, оказались одинаковы?

5. Найдите как можно больше дополнительных числовых свойств у образовавшегося полного квадрата и докажите их.

6. Предложите наиболее экономный алгоритм составления требуемого числового квадрата $9 \times 9$ и обоснуйте его корректность. Сформулируйте аналогичные задачи для квадратов произвольного размера.

## Задача 11. Почти арифметические прогрессии

Попробуйте построить теорию «почти арифметических прогрессий». В качестве исходных направлений исследования могут быть следующие. Пусть $a_1, d_1, d_2, n$ – фиксированные натуральные числа. Конечную последовательность чисел $a_1, a_2, , a_n$, будем называть почти арифметической прогрессией, если для любого $k$, $2 \leq k \leq n$, $a_k = a_{k-1} + d_1$ или $a_k = a_{k-1} + d_2$. Множество всех таких почти арифметических прогрессий длины $n$ обозначим через $P_n(a_1, d_1, d_2)$.

1. Укажите последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n$ из $P_n(a_1, d_1, d_2)$, у которой наименьшее количество членов равняется полусумме своих соседей.

2. Укажите последовательность из $P_n(a_1, d_1, d_2)$, у которой среди чисел $a_1 + a_n, a_2 + a_{n-1}, \ldots$ наименьшее количество равных между собой.

3. Сколько различных последовательностей содержит множество
$$P_n(a_1, d_1, d_2)?$$

4. Сколько различных сумм может быть у последовательностей из множества $P_n(a_1, d_1, d_2)$?

5. Какое наибольшее количество последовательностей из $P_n(a_1, d_1, d_2)$ имеет одинаковую сумму всех своих членов?

6. Пусть $P_{3n+1}(a_1, 1, 2, 3)$ – множество всех последовательностей $a_1, \ldots,$ $a_{3n+1}$ таких, что при любом k, $2 \leq k \leq 3n + 1$ имеет место одно из

равенств $a_k = a_{k-1}+1$, $a_k = a_{k-1}+2$, $a_k = a_{k-1}+3$. У какого наибольшего количества последовательностей из $P_{3n+1}(a_1, 1, 2, 3)$ одинаковая сумма всех членов?

**7.** Сколько различных последовательностей содержит множество

$$P_{3n+1}(a_1, 1, 2, 3)?$$

**8.** Предложите свои направления исследования или обобщения этой задачи и изучите их.

## Задача 12. Периодические дифференциальные уравнения

**1.** Дана функция $f(x, y)\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f \in C(\mathbb{R}^2), f_y' \in C(\mathbb{R}^2)$ и $f(x+T, y) = f(x, y)$ для любых $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Далее, существуют такие числа a, b, что $f(x, a) \cdot f(x, b) < 0$ для любого вещественного $x$.

**а)** Докажите, что дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$ имеет $T$-периодическое решение.

**б)** Докажите, что если $f'_y > 0$, то это периодическое решение единственно.

**2.** Дано уравнение $y' = -y^{2k+1} + f(x)$, $f(x+T) = f(x)$, $f$ - непрерывна на вещественной прямой.

**а)** Докажите, что существует $T$-периодическое решение.

**б)** Докажите, что это решение единственно.

**3.** Найдите все периодические решения уравнения $y' = (y-a)(y-b)$, где $a$, $b$ - вещественные числа.
Средним за период для периодической функции $f(x)$ называется величина $\frac{1}{T}\int\limits_0^T f(x)\,dx$. Ниже везде предполагается, что функции $f, f_1, f_2 \in C(\mathbb{R})$ и $T$-периодические.

**4.** Дано уравнение $y' = (y-a)(y-f(x))$.

**а)** Найдите необходимое и достаточное условие на среднее за период функции $f$, при котором это уравнение имеет $T$-периодическое решение(отличное от константы).

**б)** Сколько вообще периодических решений может иметь это уравнение?

**5.** Исследуйте те же вопросы для уравнения $y' = (y-a)^2(y-f(x))$

**6.** Проведите исследование уравнения $y' = (y-a)^m(y-f(x))^n$ на предмет существования периодических решений в зависимости от натуральных параметров $n, m$ и величины $\frac{1}{T}\int\limits_0^T f(x)dx$.