

При поддержке Фонда Президентских грантов

# **Математика НОН-СТОП**

## **Сборник задач**

Б.А. Золотов      Д.Г. Штукенберг

И.А. Чистяков      А.В. Семенов      И.С. Алексеев

Фонд «Время Науки»

Санкт-Петербург  
2019

# Предисловие

*И.А. Чистяков — Президент фонда «Время науки», директор ЧОУ ОиДО «Лаборатория непрерывного математического образования», вице-президент Европейского турнира юных математиков, автор задач Олимпиады «Математика НОН-СТОП» в 2010–2015 годах*

Дорогие юные математики, коллеги, друзья! Вы держите в руках не просто сборник олимпиадных задач, а скорее книгу, в которой рассказывается о системе математического образования, созданной фондом поддержки молодых ученых «Время науки».

Проекты фонда взаимосвязаны и не могут рассматриваться отдельно друг от друга. Одной из главных задач фонда является привлечение талантливой молодежи к занятиям наукой, в частности математикой. При содействии фонда работает целая структура дополнительного образования, а также система научных семинаров, турнир юных математиков, олимпиада «Математика НОН-СТОП», Летняя профильная математическая школа, Балтийский научно-инженерный конкурс. Опыт создания этой системы оказался настолько успешным, что многие из мероприятий фонда проводятся теперь в различных российских регионах. Так, например, Балтийский научно-инженерный конкурс имеет на сегодняшний день 17 региональных представительств.

Однако по порядку. Основой содержательной математической деятельности является семинар. В 1992 году группа молодых (тогда) петербургских математиков, среди которых были к. ф.-м. н. С.М. Шиморин, к. ф.-м. н. Д.Г. Бенуа, И.А. Чистяков и вскоре присоединившиеся к ним к. ф.-м. н. Т.Н. Шилкин, д. ф.-м. н. С.И. Кублановский, А.О. Виро, к. ф.-м. н. А.А. Флоринский, Е.А. Абакумов стали вести научные семинары для старшеклассников и руководить научными проектами. Так возникла «Лаборатория непрерывного математического образования» (ЛНМО) — в те годы молодежный научный коллектив, ставящий перед собой задачу привлечения к занятиям наукой тех школьников, которые обладали незаурядными математическими способностями, но тем не менее по некото-

рым причинам в большей своей части не имели значительных олимпиадных достижений.

Время, в которое начинала свою деятельность ЛНМО, было непростым, даже скорее трудным для большинства молодых математиков. Многие из них уехали из страны, другие сменили сферу деятельности. Количество способных к математике студентов стало снижаться, несмотря на все усилия декана математико-механического факультета СПбГУ профессора Г.А. Леонова — человека, благодаря которому факультет пережил самые тяжелые годы. Математическое сообщество старело, и привлечение к математике школьников стало одной из основных задач.

В 1994 году ЛНМО стала сотрудничать с Математико-механическим факультетом СПбГУ. Это сразу дало свои плоды. Так, в 1992 году в ЛНМО работало всего 3 математических семинара. С.М. Шиморин и И.А. Чистяков руководили семинарами по математическому анализу, Д.Г. Бегуна — по алгебре. В 1995 году в Лаборатории было открыто уже 10 научных семинаров. Среди руководителей семинаров этого периода — профессор М.М. Лесохин, профессор Н.А. Широков, профессор В.М. Нежинский, к. ф.-м. н. В.Л. Кобельский, к. ф.-м. н. В.Ю. Добрынин.

Впоследствии ЛНМО стала частным образовательным учреждением, где работа в системе научных семинаров и спецкурсов является вершиной в процессе получения школьником среднего образования.

Семинары 90-х годов воспитали первую плеяду учеников, которые впоследствии стали научными руководителями школьников и студентов, закончили математико-механический факультет СПбГУ, аспирантуру и защитили кандидатские диссертации. Выпускниками ЛНМО защищены 42 кандидатских диссертации, из каждого выпуска ЛНМО до половины выпускников становятся аспирантами, до 7-8 — кандидатами наук.

Сейчас благодаря гранту Фонда Президентских грантов в ЛНМО работает 27 математических семинаров, а всего по разным специальностям — 61. Среди руководителей — д. ф.-м. н. С.И. Кублановский, к. ф.-м. н. А.В. Смоленский, к. ф.-м. н. Р.А. Гученко, к. ф.-м. н. Ю.А. Ильин, к. ф.-м. н. С.О. Иванов, аспиранты А.В. Семенов, В.А. Соснило, А.А. Зайковский и многие другие.

В то же время ощущался дефицит научного общения участников семинаров с другими школьниками, тоже делающими свои первые шаги в науке. Поэтому получили развитие научные конференции школьников, в числе которых отметим Сахаровские чтения, проводимые лицеем ФТШ в Петербурге (Я.Д. Бирман, к. х. н. Н.М. Химин, Д.В. Фредерикс, к. ф.-м. н.

М.Г. Иванов, Е.А. Нинбург), и конференцию, посвященную памяти академика С.Н. Бернштейна. Большую поддержку в это время оказали профессор М.П. Юшков и профессор В.С. Виденский. Будучи совсем небольшой, конференция памяти Бернштейна привлекала к себе тех юных исследователей, которые уже в 9–11 классе могли потратить на научную работу значительное время. Высокий уровень профессионального научного жюри стал отличительной карточкой этой конференции.

В Москве в области математики лидирующее положение занимали конференция при МЭИ (Московском энергетическом институте), благодаря усилиям А.А. Егорова, к. ф.-м. н. А.П. Савина, Ж.М. Раббота, к. ф.-м. н. В.Н. Дубровского и к. п. н. Л.Б. Огурз; конференция «Династия–Аван-

гارد», математическое направление которой возглавляет к. ф.-м. н. Д.В. Андреев; конференция «Юниор» (профессора А.Д. Модяев, Н.М. Леонова, А.В. Михалев и Н.А. Кудряшев).

Одновременно возникли международные конференции, из числа которых отметим конференцию молодых ученых (ICYS), первым победителем которой стал Владимир Камоцкий, занимавшийся в семинаре по гомологической алгебре (руководитель Д.Г. Бенуа, ныне известный математик). Абсолютный рекорд этого научного форума принадлежит выпускнику научных семинаров Дмитрию Парилову: он в 9, 10 и 11 классах был награжден золотой медалью, став абсолютным победителем. Дмитрий Владимирович Парилев защитил кандидатскую диссертацию и успешно работает в России.

В 1998 году Россия впервые приняла участие в международном конкурсе научных и инженерных достижений учащихся — ISEF, собирающем более полутора тысяч школьников из более чем 60 стран мира. 30 учеников ЛНМО награждены премиями научного жюри, еще 10 — премиями Карла Менгера, присуждаемыми Американским математическим обществом.

Пять научных работ отмечены высшими премиями научного жюри, именами петербургских школьников — Сергея Иванова, Евгения Лохару, Евгения Амосова, Артема Викторова и Гаджи Османова — названы малые планеты Солнечной системы. С.О. Иванов и Е.Э. Лохару защитили кандидатские диссертации и активно работают в области математики. Сергей Олегович Иванов в 2014 году назван лучшим молодым математиком Санкт-Петербурга, 14 выпускников лаборатории награждены премиями имени В.А. Рохлина.

Камерная научная конференция, посвященная памяти академика

С.Н. Бернштейна, не могла уже справиться с нарастающим числом работ и была преобразована в конференцию им. академика П.Л. Чебышева, родоначальника Петербургской математической школы, а в 2004 году — в Балтийский научно-инженерный конкурс. На первом Балтийском научно-инженерном конкурсе было представлено 60 проектов; в 2019 году на юбилейном XV конкурсе в отборочных этапах приняли участие 2059 юных исследователей, а в финале представлены более 400 проектов из более чем 60 регионов России и Белоруссии.

Председателем научного жюри Балтийского конкурса является профессор Н.А. Широков, секцию математики возглавляет профессор Н.М. Нежинский; подсекции — к. ф.-м. н. А.В. Смоленский, а также к. п. н. В.В. Крылов. Второй год работает жюри ПОМИ РАН, которое возглавляет профессор А.И. Назаров.

Развитие научной и проектной деятельности высветило ряд проблем, без решения которых далее невозможно развивать научные семинары. Для выполнения серьезных математических исследований школьник должен знать важнейшие разделы математики. Так возникла идея проведения летних профильных математических школ, в которых аспиранты и молодые кандидаты наук погружали старшеклассников в разделы математики, которые были совершенно необходимы для решения математических задач. Часто на семинарах летней школы ставились и задачи для исследования, и школьники успевали получить значительные результаты в их решении.

Пытливый подростковый ум нуждается в постоянной подпитке, решении модельных задач, которые построены по следующему принципу. Каждая задача начинается введением в теорию, в котором ученику разъясняются основные определения. При этом первые пункты задачи более или менее известны. По мере продвижения по задаче пункты усложняются, решения последних пунктов не известны автору задачи и часто являются темой самостоятельного научного исследования.

В качестве реализации этой идеи появилось несколько турниров юных математиков, проводящихся в разных городах по схожим правилам. Участниками таких турниров были в основном старшеклассники. Один из таких турниров — Санкт-Петербургский турнир юных математиков — проводится как раз при поддержке Фонда «Время Науки».

Форма проведения турнира была заимствована из Белорусских турниров юных математиков (к. ф.-м. н. Б.В. Задворный), хотя петербургский турнир отличается более жесткими правилами проведения и трудностью задач. В последнее время петербургские турниры юных матема-

тивов проводятся и для 5–7 классов (средняя и младшая лига). Факт существования этих турниров, по нашему убеждению, способствуют привлечению к занятиям наукой талантливых детей, которые впоследствии станут учениками научных семинаров ЛНМО. Руководитель проекта — И.С. Алексеев. Жюри турниров возглавляют к. ф.-м. н. Ю.А. Ильин и профессор В.М. Нежинский.

Усилиями европейских математиков по аналогичным правилам организован международный турнир, участниками которого становятся победители национальных турниров. Президентом конкурса является профессор Давид Змейков.

Олимпиада «Математика НОН-СТОП» выполняет ту же функцию, что и младшая и средняя лиги Турнира юных математиков, — привлекать школьников 4–8 классов к решению исследовательских задач. Нам казалось неразумным сразу приступить к решению этой трудной задачи, необходимо было воспитать молодых математиков — составителей исследовательских задач и найти в Петербурге школы, понимающие важность этого проекта. С этими задачами олимпиада прекрасно справилась.

В первые годы олимпиады отбор задач был традиционен, они подбирались из числа задач петербургских, московских, белорусских олимпиад, однако усложнялись правила ее выполнения. Каждая задача олимпиады состояла из трех пунктов, решение первого из которых оценивалось в 3 балла, решение второго — в 6 баллов, а третьего в 9 баллов. В зачет по каждой задаче входил тот пункт, за который участник получил наибольшее число баллов.

Тем самым школьнику необходимо не только решать задачи, но и продумывать стратегию работы на олимпиаде. Многие школьники, которые брались за решение только сложных пунктов, зачастую делали в них ошибки и получали невысокий балл на олимпиаде. Такая же участь ждала тех, кто решал простые пункты, их суммарный балл также был невысок.

Большое значение мы придавали тому факту, что школьники, которые не справились с решениями задач во время олимпиады, дома и в школе могли продолжить их решение. А наиболее глубокие школьники получали приглашение заниматься в научных семинарах и учиться в профильных математических классах, организуемых на основе государственно-частного партнерства ЛНМО и ГБОУ СОШ №564.

Тем самым была решена задача по привлечению школьников к за-

нениям математикой, а также сформировался коллектив студентов–математиков, способных предлагать исследовательские задачи. Ис 2016 года олимпиада «Математика НОН-СТОП» приобрела задуманную форму. Каждая задача *базовых вариантов*, как и прежде, состоит из трех пунктов, последний из которых наиболее сложен, размышления по этому пункту могут привести школьника к решению научной проблемы. Для школьников 7–8 классов появился *профильный вариант*, для реализации возможности поиска одаренных детей, которые не занимаются в математических кружках, даже если, возможно, учатся в математических школах.

Это дало результат. Многие дети из общеобразовательных школ получили возможность занятий в профильных научных семинарах. Олимпиада поддерживается кафедрой математического образования и информатики АППО (к. п. н. Е.Ю. Лукичева) и входит в перечень региональных конкурсов интеллектуальной направленности Правительства СПб. В олимпиаде участвуют более тысячи школьников Санкт-Петербурга и Ленинградской области.

Руководитель проекта — Б.А. Золотов, победитель олимпиады «Математика НОН-СТОП» 2011 года. Председатель жюри — Д.Г. Штукенберг.

Книга адресована не только школьникам, интересующимся математикой, но и учителям и организаторам математического образования. Руководители научно-исследовательских работ школьников смогут почерпнуть из сборника темы для исследования.

# Оглавление

Предисловие	I
От авторов	1



# От авторов

Олимпиада «Математика НОН-СТОП» проводится с 2010 года, за это время значительно выросло как число её участников, так и интерес, проявляемый к ней в том числе со стороны образовательных организаций Санкт-Петербурга и известных фондов, которые теперь оказывают поддержку олимпиаде.

В 2010–2015 годах составителем условий задачи был И.А. Чистяков, а олимпиада включала в себя варианты для 5–8 классов из 6–12 задач, поделённых на пункты А, В и С. С 2016 года условия задач для олимпиады составляют Б.А. Золотов и Д.Г. Штукенберг (Дмитрий Григорьевич — сотрудник ЛНМО, Борис Алексеевич — выпускник и сотрудник ЛНМО).

Одновременно с этим в олимпиаде появился профильный вариант для 7–8 классов: задачи профильного варианта представляют из себя целую исследовательскую проблему, раскрывающуюся перед школьником пункт за пунктом. Последним нововведением олимпиады стал вариант для четвёртого класса, присутствующий с 2017 года.

Первая часть этой книги — условия олимпиад, прошедших в 2016–18 годах. Задачи можно давать детям на занятиях в математических кружках; они позволяют примерно ориентироваться на то, какими будут задания на олимпиаде «Математика НОН-СТОП» в ближайшем будущем. Авторы задач — Б.А. Золотов, Д.Г. Штукенберг, И.С. Алексеев.

Следом за условиями задач 2016–18 гг. во второй части этой книги, представлены их решения, предложенные самими авторами задач (рассмотрены в том числе задачи профильных вариантов). Если при разборе задачи возникают трудности или стало интересно ознакомиться с необычными методами решения, стоит посмотреть как раз вторую часть книги. Автор разбора 2017–18 — Б.А. Золотов, 2016 — Д.Г. Штукенберг.

В третьей части книги представлены избранные, наиболее оригинальные задачи 2011–15 годов, сразу с решениями. Обычно таких задач оставалось по 3–4 на вариант. Авторы разборов 2012–15 — Б.А. Золотов, А.В. Семенов, 2011 — Л.А. Бакунец, И.Г. Прокофьева, Д.Г. Штукенберг.

Четвёртая часть этой книги — условия задач петербургских турниров юных математиков (СПбТЮМ). СПбТЮМ проводится с 2015 года и от-

личается интересными, сложными заданиями — некоторые из них впоследствии перерастают в научные работы, представляемые на различных конференциях школьников. В этой книге мы собрали все задачи, бывшие на турнирах с самого основания СПбТЮМ. Авторы задач — К.М. Чепуркин и И.С. Алексеев.

Наконец в пятой части книги мы привели несколько тем для школьной научной работы. Данные темы, с одной стороны, интересны для науки, а с другой стороны, как нам представляется, посильны детям. Подобные темы могут быть любопытны для школьников, желающих выступить на научных конференциях, проводимых, например, под эгидой фонда «Время науки».

Желаем приятного и познавательного чтения!