Задачи 2015 года

Задачи 5 класса

Задача 1.

A. Вовочка согнул из куска проволоки квадрат со стороной 9 сантиметров. Затем он разогнул проволоку и согнул из неё равносторонний треугольник. Какова длина стороны этого треугольника?

Решение: $9 \times 4 \div 3 = 12$ см.

B. Мальчик Дима в течение 2 часов надувает шары. Каждые три минуты он надувает 8 шаров, а каждый десятый шар у него лопается. Сколько шаров будет у Димы?

Решение: В двух часах 120 минут, отсюда Дима надует $\frac{120}{3} \cdot 8 = 320$ шариков. В результате того, что некоторые шарики лопаются, останется $320 - 320 \div 10 = 320 - 32 = 288$ шариков.

C. Мальчики Миша, Никита и Олег делят конфеты. Сначала Миша взял себе 20% всех конфет и ещё 12 конфет. Затем Никита взял 25% оставшихся конфет и ещё 15 конфет. Наконец, Олег взял 30% оставшихся конфет и ещё 21 конфету. И конфеты закончились. Кто из мальчиков взял больше конфет?

Решение: То, сколько конфет взял каждый из мальчиков, легко установить «обратным ходом».

После первой части хода Олега оставалась 21 конфета, и это составляло 70% от количества конфет, которое было до хода Олега. Значит, до хода Олега на столе лежало $\frac{21}{0.7} = 30$ конфет — и все их взял Олег.

После первой части хода Никиты оставалось $30 + 15 = 45$ конфет, которые составляли 75% от всех имеющихся конфет. Таким образом, перед ходом Никиты на столе было $\frac{45}{0.75} = 60$ конфет, 30 из которых взял Олег, а, соответственно, 30 — Никита.

Наконец, после первой части хода Миши на столе оставалось 72 конфеты, которые составляли 80% от конфет, имевшихся в наличии до начала дележа. Значит, в начале было $\frac{72}{0.8} = 90$ конфет, по 30 из которых взяли Олег и Никита — соответственно, Мише также досталось 30 конфет.

Таким образом, мальчики взяли поровну конфет.

Задача 2.

B. Три числа A, B и C связаны соотношениями:

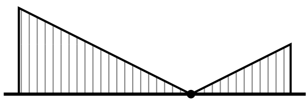
$$A + B = 12.3; \qquad B + C = 18.9; \qquad A + C = 6.1.$$

Не находя эти числа, укажите самое большое среди них. Результат обоснуйте.

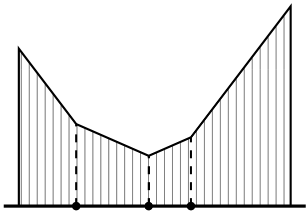
Решение: $B > C$, так как $A + B$ больше, чем $A + C$. Также $B > A$, так как $B + C > A + C$. Отсюда B — самое большое из чисел.

C. Тренер расставил спортсменов на прямой дорожке. По сигналу тренера спортсмены бегут к одному из них, на которого указывает тренер, а затем возвращаются на свои места. Какой из спортсменов пробежит наибольшее расстояние после нескольких таких стартов?

Решение: Отметим на прямой спортсмена, на которого в какой-то момент указал тренер, и изобразим зависимость расстояния, которое должны пробежать другие спортсмены, от их положения на прямой.



Например, после выбора тренером трёх спортсменов зависимость расстояния, которое пробегут другие спортсмены за три старта, от их положения на прямой, будет выглядеть так:



В любом случае, после нескольких стартов зависимость преодолённого расстояния от положения на дорожке будет выглядеть как сумма нескольких функций, изображённых на первом рисунке в этом пункте. Всякая такая функция имеет два локальных максимума на краях дорожки — то есть достаточно близко к каждому из краёв дорожки **все** функции, появляющиеся в процессе стартов, будут возрастать при движении к этому краю.

Поэтому наибольшее расстояние будет пройдено одним из крайних спортсменов — чтобы понять, каким именно, в каждом случае нужно смотреть на них индивидуально.

Задача 4.

A. На ёлке 2015 шаров. На один синий шар приходится 4 красных. На сколько процентов синих шаров на ёлке меньше, чем красных?

Решение: По определению,

Величина A на k процентов меньше величины B, если

$$A = \frac{100 - k}{100} \cdot B.$$

Красных шаров на ёлке в 4 раза больше, чем синих — иными словами, синих шаров в 4 раза или на 75% меньше, чем красных.

B. Добрыня Никитич раз мечом направо махнёт — 3 врага упадёт, раз мечом налево махнёт — 2 врага упадёт. Рубится богатырь — раз налево, два раза направо. За сколько взмахов богатырь разобьёт вражье войско, состоящее из 564 человек? А если рубится богатырь — раз направо, два раза налево?

Решение: За один «период» при первом способе борьбы Добрыня убивает 8 врагов, а при втором способе — 7.

$564 : 8 = 70$ (остаток 4). В таком случае Добрыне понадобится $70 \cdot 3 + 2$ взмаха: после 70 «периодов» останутся 4 врага, которых можно будет убить за два дополнительных взмаха.

$564 : 7 = 80$ (остаток 4). Добрыне понадобится $80 \cdot 3 + 2$ взмаха — после 80 «периодов», опять же, останется 4 врага, которых можно убить за два взмаха.

C. Вовочке на дом задали разделить некоторое число на 2, 3 и 6. Папа, проверяя домашнее задание, услышал от Вовочки следующее:

«Я забыл, какое число задали, поэтому делил другое число, которое сам придумал, — и два раза разделилось без остатка, а один раз получился остаток». Папа уверен, что Вовочка допустил ошибку. Как он об этом догадался?

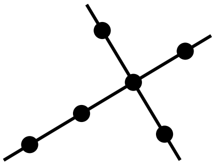
Решение: Если у Вовочки получилось разделить придуманное им число нацело на 6, то он точно неправ: если число нацело делится на 6, то оно делится на 2 и на 3, и остатка получиться не могло.

Если же Вовочке удались деления на 2 и на 3, то придуманное им число автоматически делится на 6. То есть, если у Вовочки получились два деления, то и третье тоже должно было получиться.

Задача 5.

A. Боря утверждает, что он может нарисовать 6 точек на двух прямых, три на одной и 4 на другой. Может ли такое быть?

Решение: Да, конечно может:



B. Сколькими способами можно разрезать шнурок от ботинка длиной 36 см на кусочки длиной 3 см и 5 см?

Решение: Выпишем сначала все способы представить *число* 36 в виде суммы нескольких чисел 3 и 5. Их не так много:

$$36 = 3 \cdot 12$$

$$36 = 3 \cdot 7 + 5 \cdot 3$$

$$36 = 3 \cdot 2 + 5 \cdot 6$$

Способ разрезать шнурок на 12 одинаковых кусков ровно один. Теперь рассмотрим второе представление: нам предстоит разрезать шнурок на 10 кусков, 3 из которых имеют длину 5. В каждом разрезании куски упорядочены от левого конца шнурка к правому, поэтому каждое разрезание определяется тем, под какими номерами из имеющихся десяти идут куски длины 5.

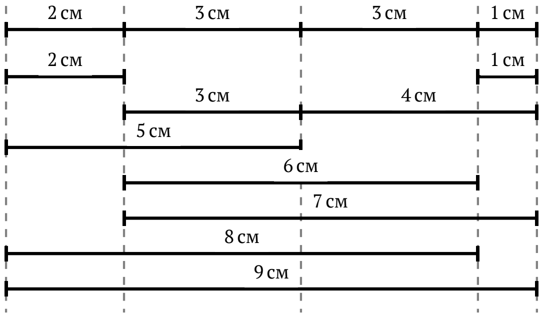
Выбрать три номера из десяти можно C_{10}^3 способами — таково определение биномиального коэффициента. Значит, это и есть количество способов разрезать шнурок на 7 кусков длиной 3 см и 3 куска длиной 5 см.

Со случаем, когда 6 кусков имеют длину 5, поступим аналогично. Получаем ответ:

$$1 + C_{10}^{3} + \cdot C_{10}^{6}.$$

C. У мальчика Лёвы есть волшебная линейка длиной 9 сантиметров. Может ли он нанести на эту линейку три промежуточных деления так, чтобы любой отрезок длиной от 1 до 9 сантиметров можно было измерить с точностью до сантиметра?

Решение: Поставим дополнительные деления на расстоянии 2, 5 и 8 сантиметров от левого края линейки. Любой отрезок натуральной длины может быть получен как отрезок между этими делениями и краями линейки — покажем, как это сделать:



Задача 6.

A. Пять хамелеонов съедают всех мух с пяти кустов за пять минут. На сколько надо увеличить число хамелеонов, чтобы они съели всех мух с 50 кустов за 50 минут?

Решение: Количество хамелеонов не нужно увеличивать, потому что в их изначальном составе за 10 «подходов» по 5 минут хамелеоны объедят все 50 кустов.

B. В школе 350 учеников и 175 парт. Ровно половина девочек сидит за одной партой с мальчиками. Можно ли пересадить учеников так, чтобы ровно половина мальчиков сидела за одной партой с девочками?

Решение: Если ровно половина девочек сидит с мальчиками, то другая половина девочек занимает некоторое количество парт полностью. То есть, половина всех девочек — это чётное число, а отсюда количество девочек делится на 4.

Если бы мы хотели, чтобы ровно половина мальчиков сидела за партой с девочками, то по аналогичным причинам количество мальчиков должно было бы делиться на 4. Однако одновременно делиться на 4 количества девочек и мальчиков не могут, так как тогда оказалось бы, что 350 делится на 4, а это неверно.

С. В классе учится не менее 12 девочек и не более 16 мальчиков. У каждого из них в классе одинаковое число друзей, среди которых обязательно есть девочка и мальчик. Известно также, что у каждой девочки друзей среди мальчиков больше, чем среди девочек, а у каждого мальчика друзей среди девочек не больше, чем среди мальчиков. Какое наименьшее число друзей может быть у школьников в этом классе?

Обозначим наименьшее число друзей у школьников через D и докажем, что $D = 6$. Мы знаем, что в классе Д девочек и М мальчиков, при этом

$$12 \leq \text{Д}; \qquad \text{М} \leq 16.$$

1) $D > 2$. Действительно, если бы у школьников было по 2 друга, то девочки не могли бы иметь друзей–девочек, что противоречит условию.

2) $D > 3$. Если у каждого школьника было бы по 3 друга, то каждая девочка могла бы иметь не менее двух друзей–мальчиков, а каждый мальчик — не более одной подруги–девочки. Обозначив за $\mathcal{F}$ количество дружеских связей «мальчик–девочка», получим

$$2 \cdot 12 \leq 2 \cdot \text{Д} \leq \mathcal{F} \leq \text{М} \leq 16 \text{ — противоречие.}$$

3) $D > 4$. Если у каждого школьника по 4 друга, то каждая девочка имеет не менее трёх друзей–мальчиков, а каждый мальчик — не более двух друзей–девочек. Получаем, что

$$3 \cdot 12 \leq 3 \cdot \text{Д} \leq \mathcal{F} \leq 2 \cdot \text{М} \leq 2 \cdot 16 \text{ — противоречие.}$$

4) $D > 5$ — аналогично предыдущему пункту.

5) $D = 6$. Приведём пример дружеских связей между 16 мальчиками и 12 девочками, удовлетворяющих условию. Разделим мальчиков на 4 группы по 4 человека, а девочек — на 4 группы

по 3 человека; разобьём эти группы на пары. Пусть в каждой группе все девочки знакомы друг с другом, все мальчики знакомы друг с другом, а также каждая девочка знает всех мальчиков из группы, парной её группе.

Тогда каждый мальчик знаком с 3 девочками и 3 мальчиками, а каждая девочка — с 2 девочками и 4 мальчиками. Эта ситуация подходит под условие задачи.

Задачи 6 класса

Задача 1.

A. Мальчик Боря согнул из проволоки два квадрата. Когда мальчик Вова положил эти квадраты друг к другу, то получился прямоугольник с бо́льшей стороной 8 дм. Может ли Боря определить, сколько проволоки он израсходовал на квадраты?

Решение: Да, конечно: из того, что бо́льшая сторона прямоугольника равна 8 дм, легко следует, что его меньшая сторона — 4 дм. Тогда квадраты, сложенные Борей, имели сторону 4 дм, и потрачено им было $16 + 16 = 32$ дм проволоки.

B. Коротышки из Цветочного города решили украсить цветами клумбу в форме прямоугольника. Полезная длина клумбы — 240 см, а полезная ширина — 120 см. Цветы было решено сажать в узлах квадратной сетки на расстоянии 20 см друг от друга. Незнайка подсчитал, что нужно

$$(240 : 20) \times (120 : 20) = 12 \times 6 = 72$$

кустика рассады. К сожалению, их не хватило. Сколько же необходимо было привезти кустиков рассады?

Решение: Незнайкины расчёты сработали бы, если бы кустики были посажены в центры квадратов 20×20, на которые можно побить клумбу. Однако коротышки сажали цветы не в центры, а в вершины таких квадратов. Вершин очевидно больше, чем центров: у каждого квадрата есть, например, нижняя левая вершина, и у различных квадратов они различны — однако после выбора всех нижних левых вершин останутся ещё какие-то — например, самая верхняя правая.

Как же посчитать все вершины квадратной сетки? Вершины делятся на строчки, и строчек этих $(120 : 20) + 1$ — внизу от каждого ряда квадратов, а также самая верхняя. Вершин в каждой строчке $(240 : 20) + 1$ — слева от каждого квадрата, а также самая правая.

Получаем ответ на задачу:

$$((120 : 20) + 1) \times ((240 : 20) + 1) = 7 \times 13 = 91.$$

C. У мальчика Димы есть инновационные ножницы и кусок нанолески длиной 192 см. Может ли Дима отрезать от этого куска кусок длиной 90 см? (Нанолеска такова, что её куски можно сгибать пополам, а также прикладывать друг к другу.)

Решение: $192/2^5 = 6$ — сложив леску пять раз пополам, мы получим 32 слоя длиной 6 см. Взяв 15 таких слоёв подряд, мы получим кусок длиной 90 см, его остаётся только отрезать ножницами.

Задача 4.

A. У доктора Ватсона в пальто 4 кармана. В каждый карман он кладёт не менее одного патрона и не больше четырёх патронов. Может ли Шерлок Холмс узнать, сколько патронов в карманах у доктора Ватсона, если ему известно, что в карманах у него разное число патронов?

Решение: Различных натуральных чиселот 1 до 4 — ровно 4 штуки, столько же, сколько карманов у Ватсона. Поэтому единственный вариант разложить патроны так, как указано в условии, — в первый карман один патрон, ..., в четвёртый карман четыре патрона.

На этом основании Холмс может наверняка утверждать, что у Ватсона

$$1 + 2 + 3 + 4 = 10 \text{ патронов.}$$

B. На прощальной вечеринке танцуют девушка Катя и 7 юношей — Боря, Женя, Илья, Гоша, Андрей, Данил и Максим. У каждого из них есть воздушные шарики. Какое наименьшее число шариков может быть у этих весельчаков, если среди них нет двух с одинаковым числом воздушных шариков?

Решение: Попробуем минимизировать количество шариков у танцующих. У танцора с наименьшим количеством шариков всё-таки хотя бы один воздушный шарик. У «второго снизу» по количеству шариков их хотя бы два — и, наконец, у самого богатого на шарики их как минимум 8. Отсюда получаем оценку снизу на общее количество шариков —

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 8 = 36.$$

С. Однажды Винни Пух, Пятачок и ослик Иа-Иа пошли ловить рыбу. Улов оказался не очень большим. Винни Пух поймал половину общего улова без $\frac{2}{5}$ того, что поймали Пятачок и Иа-Иа. Пятачок поймал треть общего улова и $\frac{1}{5}$ того, что поймали Винни Пух и Иа-Иа. Улов ослика Иа-Иа отличался от улова Пятачка на 1 кг. Сколько весил весь улов?

Решение: Обозначим улов Винни Пуха через В, улов Пятачка через П и улов Иа-Иа через И. Тогда на основании данных задачи можно составить систему уравнений:

$$\begin{cases} \text{В} = \frac{1}{2} \cdot (\text{В} + \text{П} + \text{И}) - \frac{2}{5} \cdot (\text{П} + \text{И})\,; \\ \text{П} = \frac{1}{3} \cdot (\text{В} + \text{П} + \text{И}) + \frac{1}{5} \cdot (\text{В} + \text{И})\,; \\ \text{И} = \text{П} \pm 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\text{В} + 0.2\text{П} + 0.2\text{И} = 0; \\ 0.8\text{В} - \text{П} + 0.8\text{И} = 0; \\ \text{И} = \text{П} \pm 1. \end{cases}$$

Прибавим ко второй строке первую, умноженную на 0.8:

$$\begin{cases} -\text{В} + 0.2\text{П} + 0.2\text{И} = 0; \\ -0.84\text{П} + 0.96\text{И} = 0; \\ \text{И} = \text{П} \pm 1. \end{cases}$$

Из второй строки получившейся системы видно, что $0.84\text{П} = 0.69\text{И}$, то есть $\text{И} < \text{П}$, и, значит, $\text{И} = \text{П} - 1$. Теперь всё просто:

$$0.84 \cdot П = 0.96 \cdot (П - 1)$$
$$0.12 \cdot П = 0.96$$

- $П = 8$
- $И = 7$
- $В = 0.2 \cdot 8 + 0.2 \cdot 7 = 3$

Таким образом, весь улов весил $8 + 7 + 3 = 18$ килограммов.

Задача 5.

A. «Сейчас 6 часов вечера,» — сказал мальчик Вовочка. Интересно, какую часть составляет оставшаяся часть суток от прошедшей и какая часть суток осталась?

Решение: Осталось 6 часов, а прошло 18. Поэтому осталась четвёртая часть суток, и она составляет третью часть от трёх четвертей, которые уже прошли.

C. Можно ли в выражении

$$\frac{A+B}{C} + \frac{D}{E+F}$$

заменить буквы числами 1, 2, 3, 4, 5, 6 так, чтобы различным буквам соответствовали различные числа, и значение получившегося выражения было бы равно 1?

Решение: Приведём дроби в выражении к общему знаменателю:

$$\frac{(A+B)(E+F)+CD}{C(E+F)}.$$

То, что значение этой дроби равно 1, значит, что её числитель равен её знаменателю:

$$(A+B)\underline{(E+F)} + CD = C\underline{(E+F)}$$
$$(A+B-C)(E+F) + CD = 0$$
$$(C-A-B)(E+F) = CD$$

Чтобы равенство было выполнено, число C должно быть больше, чем сумма A и B, и, значит, каждое из них. Вооружившись этим соображением, несложно найти ответ: $A = 1$, $B = 2$, $C = 6$, $D = 4$, $E = 3$, $F = 5$.

$$\frac{1+2}{6} + \frac{4}{3+5} = 1.$$

Задача 6.

A. Одним пакетиком чая можно заварить 2 или 3 чашки чая. Маша и Оля разделили пачку чая пополам. Маша заварила 51 чашку чая, а Оля — 73 чашки. Можно ли догадаться, сколько пакетиков чая было в пачке?

Решение: $73 - 51 = 22$ — на столько больше раз Оля использовала пакетик на три чашки, чем Маша. Это значит, что Оля по крайней мере столько раз заваривала пакетиком только две чашки чая.

$22 \cdot 2 = 44$. Значит, Оле осталось заварить 7 чашек, это можно сделать только тремя пакетиками — $7 = 3 + 2 + 2$. Значит, у Оли было 25 пакетиков, а в пачке — 50.

B. Незнайка составил числовой ребус

$$\text{ЭНЭ} + \text{БЭНЭ} = \text{РАБА},$$

в котором разным буквам соответствуют разные цифры. Знайка, посмотрев на ребус, сказал, что цифра, зашифрованная буквой Р, не может быть чётной. Прав ли Знайка?

Решение: Знайка неправ, цифра Р вполне может быть чётной: например, равенство

$$636 + 7636 = 8272$$

является решением ребуса из условия.

C. В коробочке лежат болтики, шайбочки винтики и гаечки — всего 107 штук. Известно, что болтиков в 3 раза больше, чем шайбочек, а шайбочек в 2 раза больше, чем винтиков. Кроме того, винтиков больше, чем гаечек. Сколько гаечек в коробке?

Решение: Заметим, что болтиков, по условию, в 6 раз больше, чем винтиков. То есть, если обозначить количество винтиков за В, а гаечек — за Г, мы получим, что

$$(6 + 2 + 1) \cdot \text{В} + \text{Г} = 107, \qquad \text{В} > \text{Г}.$$

Единственный ответ в таком случае — $\text{В} = 11$, $\text{Г} = 8$: в противном случае число гаечек будет больше, чем множитель у девятки.

Ответ: 8 гаечек.

Задачи 7 класса

Задача 1.

A. Заяц убегает от Волка, который находится от него на расстоянии 100 м. Один прыжок Зайца равен 2 м, а Волка — 3 м. Пока Волк делает 4 прыжка, Заяц делает 5 прыжков. За сколько своих прыжков Волк догонит Зайца?

Решение: $4 \cdot 3 = 12$, $5 \cdot 2 = 10$ — отсюда за четыре волчьих прыжка расстояние между Зайцем и Волком сокращается на 2 м. Значит, Волку потребуется

$$4 \cdot \frac{100}{2} = 200 \text{ прыжков.}$$

B. Вовочке известно, что 24 числа таковы, что среди их попарных произведений ровно 100 отрицательных. Может ли Вовочка определить, сколько среди этих чисел положительны, сколько отрицательных и сколько нулей?

Решение: Количество отрицательных попарных произведений в наборе равно $P \cdot N$, где P — количество положительных чисел в наборе, N — количество отрицательных чисел в наборе.

Для того, чтобы установить P и N, нам нужно представить 100 в виде произведения двух чисел, сумма которых не превосходит 24. Способ сделать это ровно один — $P = 10$, $N = 10$.

Ответ: 10 положительных чисел, 10 отрицательных и 4 нуля.

C. Какое наименьшее число различных цифр нужно выбрать, чтобы любое число от 1 до 100 включительно можно было представить в виде суммы выбранных цифр, в которой каждую из них разрешается использовать не более четырёх раз?

Решение: Докажем, что четырьмя цифрами обойтись нельзя. Среди выбранных цифр, очевидно, должна быть единица. Единицей можно «набрать» числа от 1 до 4 — поэтому второе число, которое мы берём, не должно превосходить 5.

Добавив к нашему «черновику» набора самые большие цифры, 8 и 9, мы заметим, что

$$4 \cdot (1 + 5 + 8 + 9) = 92 < 100,$$

поэтому набор из четырёх цифр нам не подойдет.

А вот набора из пяти цифр — 1, 5, 6, 8, 9 — вполне хватит.

Задача 3.

A. Какой длины получится полоса, если 1 кубический километр разрезать на кубические метры и выложить их в длину?

Решение: $1\,\text{км}^3 = 1\,000\,000\,000\,\text{м}^3$ — поэтому получившаяся полоса будет иметь длину

$$1\,000\,000\,000\,\text{м} = 1\,000\,000\,\text{км}.$$

B. Возьмём отрезок $[0, 1]$. Отрежем от него четверть слева, потом четверть от оставшейся части справа, потом четверть от оставшейся части слева и т. д. Какая точка отрезка точно не будет отрезана?

Решение: На первом шаге мы отрезали слева кусок длиной $\frac{1}{4}$. На втором шаге, справа, — кусок длиной $\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4}$. На третьем шаге, снова слева, — кусок длины $\frac{1}{4} \cdot (\frac{3}{4})^2$. Таким образом, на $2k - 1$–м шаге мы будем отрезать с левой стороны оставшегося отрезка кусок длиной

$$\frac{1}{4} \cdot \left(\left(\frac{3}{4}\right)^2\right)^{k-1}.$$

Так можно посчитать длину всего, что будет отрезано слева:

$$\frac{1}{4} \cdot \left(1 + \frac{9}{16} + \left(\frac{9}{16}\right)^2 + \left(\frac{9}{16}\right)^3 + \ldots\right).$$

Чтобы узнать, чему равна эта сумма, вспомним, как считается сумма геометрической прогрессии:

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

При $q < 1$ число q^{n+1} стремится к нулю при больших n, поэтому сумма всего ряда $1 + q + q^2 + \ldots$ будет равна

$$\frac{1}{1 - q}.$$

Применив это соображение к сумме, которую мы считаем, получим

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1 - \frac{9}{16}} = \frac{4}{7}.$$

На $2k$–м шаге мы отрезаем с правой стороны кусок длиной

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(\left(\frac{3}{4}\right)^2\right)^{k-1}.$$

Поэтому всего с правой стороны будет отрезано

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{7} = \frac{3}{7}.$$

Таким образом, нетронутой будет оставаться единственная точка — $\frac{4}{7}$.

C. На плоскости расположено несколько отрезков. Мальчик Вова отмечает несколько точек пересечения этих отрезков (не обязательно все), считает для каждой отмеченной точки число отрезков, содержащих эту точку, и находит сумму этих чисел. Мальчик Дима считает для каждого из отрезков число отмеченных Вовой точек, лежащих на нём, и находит сумму своих чисел. У кого из мальчиков сумма больше?

Решение: Рассмотрим все пары вида (*отрезок*, *отмеченная точка на этом отрезке*). Вова посчитал в точности все такие пары, так как для каждой отмеченной точки им были учтены все отрезки, которым принадлежит эта точка. Дима тоже посчитал в точности все такие пары, потому что для каждого отрезка учёл все точки, образующие подобные пары с этим отрезком.

Поэтому числа у мальчиков получились одинаковые.

Задача 5.

A. Красная Шапочка имела 2 заряженных револьвера. Убегая от Волка, она дважды в него попала, трижды промазала, и один раз случилась осечка. У Красной Шапочки осталось 7 патронов. Сколькими патронами заряжается револьвер?

Решение: Посчитаем, сколько патронов было у Красной шапочки изначально:

$$7 \text{ осталось} + 2 \text{ в цель} + 3 \text{ мимо} = 12.$$

При осечке патрон не вылетает из пистолета, поэтому технически остаётся у хозяина. Так как у Красной Шапочки два револьвера, то в каждом из них — по 6 патронов.

B. В каждую клетку таблицы 4×4 вписано число 0 или 1 так, что в клетках любого квадрата 2×2 стоит ровно 3 одинаковых числа. Какие значения может принимать сумма чисел в такой таблице?

Решение: Таблица 4×4 естественным образом делится на 4 непересекающихся квадрата 2×2. Сумма чисел внутри каждого из них нечётна (так как там либо три единицы и ноль, либо три нуля и единица). Значит, сумма чисел, поставленных в таблицу вообще, должна быть чётной.

Также заметим, что сумма чисел в таблице не меньше 4 и не превосходит 12 (опять же, посмотрим на суммы чисел в четырёх квадратах 2×2). Значит, остались только варианты 4, 6, 8, 10, 12. Приведём примеры, когда достигается каждый из них:

4:

1	0	1	0
0	0	0	0
1	0	1	0
0	0	0	0

6:

1	0	1	1
0	0	0	1
0	1	0	0
0	0	0	1

8:

0	1	1	1
0	0	1	0
1	0	0	0
1	1	0	1

10:

1	0	1	1
0	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1

12:

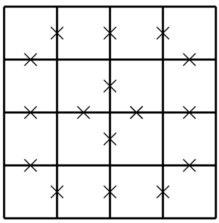
1	0	1	0
1	1	1	1
1	0	1	0
1	1	1	1

С. Квадрат 4×4 состоит из 16 клеток. Какое наименьшее число сторон клеток в этой таблице надо отметить, чтобы у каждой клетки было не менее двух отмеченных сторон?

Решение: Отмеченная сторона принадлежит максимум двум клеткам. У каждой клетки должно быть минимум по 2 отмеченных стороны — поэтому отметок нам нужно сделать не менее чем

$$16 \cdot 2 \ : \ 2 = 16.$$

Приведём пример того, как можно сделать 16 отметок:



Задачи 8 класса

Задача 1.

A. Найдите значение выражения $13 - x$, если значение разности $x - 13$ противоположно числу -13.

Решение: Число $13 - x$ является противоположным к числу $x - 13$, и в условиях задачи равно -13.

B. В выражении

$$\frac{x+y}{z} + t$$

буквы заменили числами 1, 2, 3 и 4 (разные буквы на разные числа). Какое наименьшее значение может принимать это выражение?

Решение: Увеличение чисел x, y и t при прочих равных увеличивает значение выражения из задачи, а увеличение числа z — уменьшает. Поэтому, чтобы как можно сильнее уменьшить значение выражения из задачи, нужно подставить самое большое число вместо z. Поэтому $z = 4$.

Получается выражение $\frac{1}{4}(x+y) + t$. Самое маленькое число выгодно оставить как есть, а числа побольше — «усмирить» коэффициентом $\frac{1}{4}$. Поэтому ответ на задачу —

$$\frac{2+3}{4} + 1 = \frac{9}{4}.$$

C. Решите уравнение

$$x = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1+x}}}$$

Решение:

$$\cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1+x}}} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1+x}{2+x}} = \frac{2+x}{3+2x};$$

$$x = \frac{2+x}{3+2x}.$$

Осталось решить квадратное уравнение:

$$\begin{aligned} 2x^2 + 3x &= x + 2 \\ 2x^2 + 2x - 2 &= 0 \\ x^2 + x - 1 &= 0 \\ \mathcal{D} &= 5 \\ x &= \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}. \end{aligned}$$

Нужно также проверить, что каждое из двух значений x не обращает в ноль ни один знаменатель при вычислении цепной дроби — в нашем случае, когда в знаменателе всегда будет $\sqrt{5}$ с ненулевым коэффициентом, это очевидно.

Задача 2.

A. Какое из следующих утверждений неверно?

1) 4101 и 2115 — не взаимно простые числа;
2) 97 — простое число;
3) $\text{НОД}\,(21, 1001) = 1$;
4) $\text{НОК}\,(15, 14) = 210$.

Решение: Неверно третье утверждение: $\text{НОД}\,(21, 1001)$ на самом деле равен 7. Проверку остальных утверждений мы оставляем читателю.

B. Сколько девяток встретится в последовательности 1, 2, 3, …, 2014, 2015?

Решение: Среди чисел 2001–2015 ровно одна девятка, поэтому мы исключим их из рассмотрения на протяжении дальнейшего решения.

Среди чисел от 1 до 10 встречается ровно одна девятка. Значит, среди чисел от 1 до 100 в младшем разряде встретится 10 девяток. Ещё 10 девяток на каждую сотню придут из второго разряда чисел 90–99.

Поэтому среди чисел от 1 до 1000 встретится $10 \cdot (10 + 10) = 200$ девяток, пришедших из двух младших разрядов. Ещё 100 девяток встретится в третьем разряде чисел 900–999. Итого, на каждую тысячу приходится 300 цифр 9 в трёх младших разрядах.

В задаче мы имеем дело числами от 1 до 2000 — в них встретится 600 цифр 9, и ещё одна — после 2000. Ответ: 601 цифра 9.

C. Последовательность составляется по следующему правилу:

$$53,\ 503,\ 5003,\ 50003,\ 500003,\ \ldots$$

Докажите, что в ней есть по крайней мере одно составное число.

Решение: Мы докажем, что в данной последовательности найдётся **бесконечно много** чисел, делящихся на 7. Для начала заметим, что k–ое число в нашей последовательности имеет вид

$$5 \cdot 10^k + 3.$$

Также обратим внимание на то, что при возведении числа 10 в натуральные степени остатки результата при делении на 7 «зацикливаются»:

$$1,\ 3,\ 2,\ 6,\ 4,\ 5,\ 1,\ 3,\ \ldots$$

В частности, для бесконечно многих k число 10^k имеет остаток 5 при делении на 7. В таком случае $5 \cdot 10^k + 3$ делится на 7, что и требовалось.

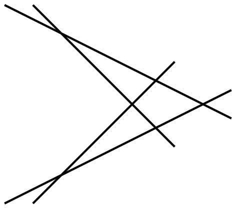
Задача 3.

A. Четыре прямые попарно пересекаются. Какое наибольшее число точек пересечения может получиться?

Решение: Точек пересечения не может быть больше, чем собственно пересечений. В свою очередь, пересечений

$$\frac{4 \cdot 3}{2} = 6.$$

Получить 6 точек пересечения совсем просто:



Задача 5.

A. У какого трёхзначного числа больше всего множителей?

Решение: Очевидно, что при данном количестве простых множителей самым маленьким числом является степень двойки. Поэтому среди трёхзначных чисел будем искать степень двойки — подойдёт число 512 с девятью простыми множителями.

B. Из цифр 2, 5, 8 составили семизначное число (возможно, некоторые из этих цифр и не участвовали в записи). Может ли оно делиться нацело на 15?

Решение: Докажем, что результат проделанной в условии процедуры не мог делиться даже на 3. Действительно, всякое число сравнимо по модулю 3 со своей суммой цифр, а каждая из цифр 2, 5, 8 сравнима с двойкой.

Поэтому составленное из них число будет сравнимо по модулю 3 с числом $2 \cdot 7 = 14$, которое на 3 не делится.

C. Пусть a — нечётное число, большее 3. Какой цифрой (чётной или нечётной) является предпоследняя цифра числа a^2?

Решение: Число a можно представить в виде $10 \cdot Y + x$, где x — последняя цифра числа a, и потому нечётная. В свою очередь,

$$(10 \cdot Y + x)^2 = 100 \cdot Y^2 + 20 \cdot Yx + x^2.$$

В этой сумме первое слагаемое не оказывает никакого влияния на предпоследнюю цифру a^2, а второе слагаемое не влияет на чётность предпоследней цифры числа a^2.

Остаётся перебрать квадраты нечётных цифр — 01, 09, 25, 49, 81 — и выяснить, что их предпоследняя цифра чётна. Поэтому искомая предпоследняя цифра в данной задаче будет чётной.

Задача 7.

A. Как изменится частное, если делитель увеличить на $\frac{1}{5}$ его величины?

Решение: $\frac{x}{y+\frac{1}{5}y} = \frac{5}{6} \cdot \frac{x}{y}$.

B. В выражении $2 : 3 : 5 : 7 : 11 : 13$, расставляя по-разному скобки, можно получить разные дроби. Можно ли таким образом получить дробь
$$\frac{2 \cdot 5 \cdot 7}{3 \cdot 11 \cdot 13}?$$

Решение: Отметим, что все числа, данные в задаче, являются простыми, поэтому в некотором месте получающейся дроби будет находиться данный множитель, только если это было «предусмотрено» тем, как оказались расставлены знаки деления. Иными словами, произведение или частное двух чисел из задачи не могут делиться на другое число из задачи.

Теперь осталось заметить, что числа 5 и 7, стоящие рядом в исходном выражении, после приведения выражения к виду единой дроби всегда будут оказываться в разных её частях, вне зависимости от того, как между ними и вокруг них расставлены пары скобок. То есть они не могут одновременно попасть в числитель.

Поэтому дробь, данную в условии, получить нельзя.

C. Про натуральные числа m и n известно, что $m > n$, и число
$$2001m^2 - 40mn - n^2$$
нацело делится на 14. Какое наименьшее значение может принимать выражение $m^2 - n^2$?

Решение: Заметим, что $2001m^2 - 40mn - n^2$ сравнимо с выражением $-(m-n)^2$ по модулю 14:
$$(2001m^2 - 40mn - n^2) + (m^2 - 2mn + n^2) =$$
$$= 2002m^2 - 42mn, \text{ что делится на 14.}$$

Отсюда $-(m-n)^2$ делится на 14, и $(m-n)^2$ делится на 14. Так как 14 не является квадратом натурального числа, то $m - n$ тоже должно делиться на 14 (и не быть равным нулю, по условию).

Теперь,

$$(n + 14k)^2 - n^2 = 28nk + 196k^2.$$

Это выражение тем меньше, чем меньше n и k. Минимальные значения для n и k — 1 и 1 соответственно. Поэтому минимальное значение выражения из условия — $28 + 196 = 224$.