Оглавление

Задания 2018 года

Задачи 4 класса.

Задача 1. Где-то я это уже видел

A. Первое число в дате (оно соответствует дню в месяце) меняется от 1 до 31, а второе (соответствует месяцу) — от 1 до 12. С другой сторооны, как мы знаем, часы пронумерованы от 0 до 23, а минуты — от 0 до 59.

Таким образом, днём в месяце и одновременно часом могут быть числа от 1 до 23, а месяцем и одновременно минутой — от 1 до 12. Кроме того, в каждом месяце точно есть хотя бы 23 дня.

Поэтому ответ — $23 \cdot 12 = 276$.

B. Давайте всегда использовать «развёрнутую» дату. Тогда любой месяц (от 1 до 12) может стоять на месте часа, а любой день (от 1 до 31) на месте минуты. Ответ — все дни в году.

C. Есть всего 12 букв русского алфавита, похожих на буквы английского алфавита (ГОСТ Р 50577-93):

А, В, **Е**, К, М, Н, **О**, Р, С, Т, Х, **У**.

Жирным мы отметили гласные — их всего 4; соответственно, согласных 8. Выбрать сочетание «гласная-согласная-согласная» можно $4 \cdot 8 \cdot 8$ способами, а «гласная-гласная-согласная» — $4 \cdot 4 \cdot 8$ способами. Вариантов для числа на номере всегда ровно 1000 — от 000 до 999.

Когда гласная одна, она может стоять на одном из трёх мест, поэтому ответ в таком случае будет равен

$$3 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 1000.$$

Когда гласных две, согласная может стоять на одном из трёх мест. Поэтому ответ —

$$3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 1000.$$

Задача 2. Напрасно называют север крайним

A. Это задача–шутка: принималось большинство ответов, хотя, например понятно, что туристическая группа на 10–градусном морозе отморозит себе половину ног, а на 20–градусном — все.

B. Все долготы Земного шара оказываются очень близко друг к другу около полюсов. Так что, возможно, Мюнхгаузен просто обошёл по кругу (скажем, километровому) Северный или Южный полюс.

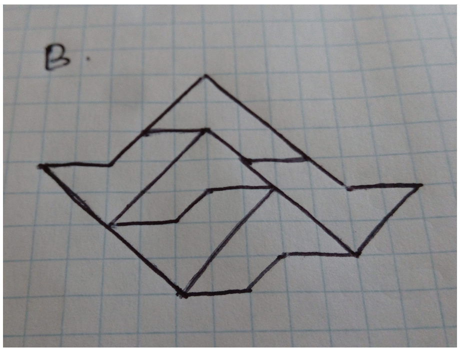
C. Пусть четыре города — B, C, D и E расположены очень близко друг к другу — попарно на расстоянии в один километр. А пятый город — A — очень далеко, в 100 километрах. Пусть больше нет никаких городов. Тогда A должен быть соединён дорогой с какими-то из четырёх оставшихся городов, но ни один из тех городов не должен быть соединён с A.

Задача 3. Разрезания

A. Поделим каждую из сторон квадрата на семь равных отрезков и рассмотрим 28 треугольников, получающихся, если соединить центр квадрата с краями каждого из этих отрезков. Все эти треугольники имеют одинаковую площадь (так как у них одинаковы основание и высота) и равные длины сторон, лежащие на сторонах квадрата (по построению).

Чтобы получить 7 многоугольников, требуемых в условии, объединим по четыре соседних треугольника.

B. Смотреть рисунок:



C. Аналогично тому, что было проделано в первом пункте данной задачи, мы умеем резать квадрат на три многоугольника равной площади с равной длиной сторон, лежащих на сторонах квадрата.

Разрежем каждый квадратный «слой» пирамиды на три таких многоугольника одинаковым образом (с точностью до подобия). Тогда в объединении всех слоёв получатся три многогранника одинакового объёма, несущие на себе одинаковое количество краски («выходящие» на стороны пирамиды одинаковой площадью своей границы).

Задача 4. Летающий цирк

Если вы скажете слово «матрас», он наденет ведро себе на голову.

A. Все слова в этой задаче состоят из букв А, М, Р, С, Т. Постараемся поставить эти буквы в соответствие с действиями Лэмберта. Для этого составим таблицу: сколько каких букв находится в словах, адресованных Лэмберту.

	А	М	Р	С	Т
МАТРАС	2	1	1	1	1
СТАРТ	1	0	1	1	2
МАРС	1	1	1	1	0

Услышав слово **«МАТРАС»**, Лэмберт среди прочего поёт два куплета из песни — значит, буква 'А' отвечает за куплеты. По аналогичным причинам (посмотрим, каких букв две в слове **«СТАРТ»**), 'Т' — это ноги в коробке. 'М' — это то, чего нет в слове **«СТАРТ»**, но есть в **«МАТРАС»** — это надевание ведра.

Для 'Р' и 'С' остаются снятие перчаток и „Караул!" — но нам неважно, что из действий какой букве соответствует, потому что 'Р' и 'С' встречаются во всех рассматриваемых словах по одному разу.

Отсюда ответ: Лэмберт закричит „Караул!", споёт один куплет, наденет на голову ведро и снимет перчатки.

B. Да, джентльмен сможет купить себе шляпу, так как цена, называемая продавцом, не возрастает (пока финансовые возможности джентльмена остаются ниже её), а количество финансов, имеющееся у джентльмена, на каждом шаге растёт ровно на 1.

Можно также явно проделать процедуру, описанную в задаче, и выяснить, через сколько именно шагов шляпа окажется у джентльмена (получится точно меньше десяти) — но мы не будем делать этого здесь, оставив читателю в качестве упражнения.

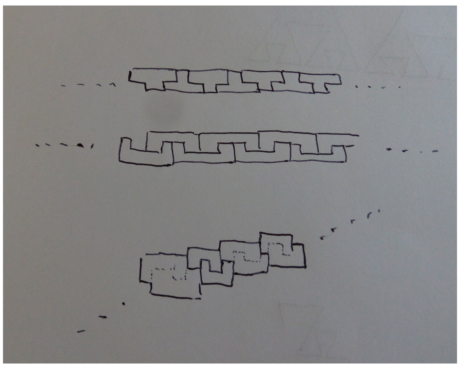
C. Пусть Тревор преувеличивает всё в a раз, а Джереми — преуменьшает в b раз, а кот стоит s рублей. Тогда, из условия задачи,

$$\begin{aligned} &s \cdot a = 9600 \\ &a \div b = 4 \\ &s \cdot a \div b = 2400 \\ &s \div b = 150 \end{aligned}$$

Сравнив первое и третье равенства, получаем, что $b = 4$. Подставив найденное b в четвертое равенство, получим $s = 600$.

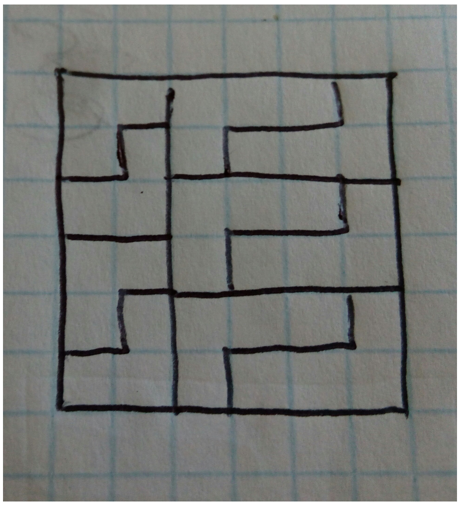
Задача 5. Мощения

A. Из этой фигуры можно собрать горизонтальную полоску ширины 2, которой очевидно можно замостить плоскость (смотреть рисунок).



B. Из второй фигуры можно собрать горизонтальную полоску ширины 3, которой очевидно можно замостить плоскость. Из первой же фигуры соберём «лесенку» (смотреть рисунок выше): так как и верхний, и нижний её край имеет вид «на три клетки вправо–на клетку вверх», этой лесенкой можно замостить плоскость, прикладывая её к себе.

C. Смотреть рисунок:



Задача 6. Ужасный гадкий аккуратный подсчёт

A. Квадратов 1×1 — $4 \cdot 5 = 20$ штук. Квадратов размером 2×2 — $3 \cdot 4 = 12$ штук. Квадратов 3×3 и 4×4 — 6 и 2 соответственно. Таким образом, всего квадратов

$$20 + 12 + 6 + 2 = 40.$$

Количество прямоугольников можно посчитать более «продвинутым» образом: заметим, что прямоугольников размером $a \times b$ можно найти ровно $(4-a+1)\cdot(5-b+1)$ штук. Число a меняется от 0 до 4 — отсюда $4 - a + 1$ меняется в тех же пределах. То же самое с $5 - b + 1$ — оно меняется от 0 до 5.

Отсюда можно заключить, что сумма чисел вида $(4 - a + 1) \cdot (5 - b + 1)$ при всевозможных a и b будет равна сумме всех чисел вида $a \cdot b$. Как посчитать сумму всех чисел вида $a \cdot b$? Заметим, что при раскрытии скобок в произведении

$$(1 + 2 + 3 + 4 + 5) \cdot (1 + 2 + 3 + 4)$$

получится сумма из всех слагаемых, которые нам нужны. Отсюда прямоугольников можно найти $15 \cdot 10 = 150$ штук.

B. Всего раскрасок $n!$ — в «первом» секторе может стоять n цветов, в следующем — $n - 1$, и так далее. Из одной раскраски вращением круга можно получить ровно n раскрасок (включая её саму) — поэтому ответ равен $\frac{n!}{n} = (n-1)!$.

C. В верхней полосе может стоять один из шести имеющихся цветов. Во второй полосе — любой из шести цветов, кроме уже стоящего в первой. В нижней полосе — любой из цветов, кроме уже стоящего во второй. Таким образом, ответ — $6 \cdot 5 \cdot 5 = 150$.

Задачи 5 класса.

Задача 1. Летающий цирк

Если вы скажете слово «матрас», он наденет ведро себе на голову.

A. Все слова в этой задаче состоят из букв А, М, Р, С, Т. Постараемся поставить эти буквы в соответствие с действиями Лэмберта. Для этого составим таблицу: сколько каких букв находится в словах, адресованных Лэмберту.

	А	М	Р	С	Т
МАТРАС	2	1	1	1	1
СТАРТ	1	0	1	1	2
МАРС	1	1	1	1	0

Услышав слово **«МАТРАС»**, Лэмберт среди прочего поёт два куплета из песни — значит, буква 'А' отвечает за куплеты. По аналогичным причинам (посмотрим, каких букв две в слове **«СТАРТ»**), 'Т' — это ноги в коробке. 'М' — это то, чего нет в слове **«СТАРТ»**, но есть в **«МАТРАС»** — это надевание ведра.

Для 'Р' и 'С' остаются снятие перчаток и „Караул!" — но нам неважно, что из действий какой букве соответствует, потому что 'Р' и 'С' встречаются во всех рассматриваемых словах по одному разу.

Отсюда ответ: Лэмберт закричит „Караул!", споёт один куплет, наденет на голову ведро и снимет перчатки.

B. Да, джентльмен сможет купить себе шляпу, так как цена, называемая продавцом, не возрастает (пока финансовые возможности джентльмена остаются ниже её), а количество финансов, имеющееся у джентльмена, на каждом шаге растёт ровно на 1.

Можно также явно проделать процедуру, описанную в задаче, и выяснить, через сколько именно шагов шляпа окажется у джентльмена (получится точно меньше десяти) — но мы не будем делать этого здесь, оставив читателю в качестве упражнения.

C. Пусть Тревор преувеличивает всё в a раз, а Джереми — преуменьшает в b раз, а кот стоит s рублей. Тогда, из условия задачи,

$$\begin{aligned} s \cdot a &= 9600 \\ a \div b &= 4 \\ s \cdot a \div b &= 2400 \\ s \div b &= 150 \end{aligned}$$

Сравнив первое и третье равенства, получаем, что $b = 4$. Подставив найденное b в четвертое равенство, получим $s = 600$.

Задача 2. Рукопожатия

A. Давайте «расклеим» восьмёрку, превратив её в обычный круглый хоровод — тогда существо, стоящее в центре восьмёрки, «продублируется». Если оно было крабом, то получится хоровод из 19 крабов и 17 пауков; в противном случае — 18 крабов и 18 пауков. Если в круговом хороводе крабов больше, чем пауков, то какие-то два краба неизбежно будут держаться за лапы, что запрещено.

Отсюда можно заключить, что в центре стоял паук. Придумать хоровод, соответствующий условию, с пауком в центре не представляет ни малейшего труда.

B. Могло оказаться так, что ровно один человек в компании выиграл машину. Построим соответствующий пример. Возьмём «победителя» — у него есть пять друзей. У каждого из них есть ещё по четыре друга (кроме выигравшего машину), пусть все эти друзья различны. $1 + 5 + 4 \cdot 5$ — у нас получилось 26 человек, от каждого из которых не более чем два рукопожатия до выигравшего машину человека.

Однако, для того чтобы довести пример до конца, нам надо установить дружеские связи между людьми, у которых их пока меньше 5 — а именно, между теми, от кого до победителя лотереи два рукопожатия (их 20 человек). Каждому из них нужно «изобрести» ещё по 4 друга.

Поступим просто: поставим эти 20 человек по кругу в произвольном порядке и назначим друзьями каждого двух его правых соседей и двух его левых соседей. Задача решена.

C. Пусть внутренних рейсов в Авиаландии ровно M, а международных из неё — ровно N. Каждый внутренний рейс имеет в Авиаландии два «конца», а каждый международный — только один. Всего в города Авиаландии прибывает $5 \cdot 6 = 30$ рейсов. Получаем

$2 \cdot M + N = 30.$

Отсюда N должно быть чётным числом (так как $2 \cdot N$ — чётное).

Задача 3. Современная мебельная фабрика

A. Закроем один из открытых ящиков, открыв тот, что через два ящика «налево» от него. Затем закроем его, открыв следующий, ещё через два ящика слева. На четвёртом шаге мы закроем два ящика, один из которых был противоположным исходному.

B. При первом сценарии после действий Фёдора в ведре осталось $\frac{6}{10}$ красителя, разведённого там Сергеем, так как 4 литра раствора из 10 были вылиты.

При втором сценарии Фёдор сначала выливал обычный раствор, а затем — раствор с меньшей концентрацией красителя. То есть, количества красителя в ведре до выливания двух литров и после отличались в 0.8 раз. В итоге в ведре осталось $\frac{8}{10} \cdot \frac{8}{10} = 0.64$ от исходного красителя.

Ответ: больше красителя осталось во второй день.

C. Экспериментальный стул с использованием нанотехнологий (одна из инноваций заключается, например, в том, что у такого стула ровно 720 ножек) падает с лестницы (в качестве испытания, разумеется). Выяснилось, что при падении он потерял в три раза меньше ножек, чем у него бы осталось, потеряй он в три раза меньше ножек, чем у него осталось сейчас. Так сколько же ножек осталось у стула?

Пусть стул потерял t ножек. Составим уравнение:

$$t = \frac{1}{3} \cdot \left(\underbrace{720 - \underbrace{\frac{1}{3} \cdot \underbrace{(720 - t)}_{\text{чем у него осталось сейчас}}}_{\text{в три раза меньше ножек}}}_{\text{осталось бы, потеряй он}} \right)$$

Это линейное уравнение. Его решение — $t = 180$. Это и есть ответ на данную задачу.

Задача 4. Игры

A. Выигрышная стратегия есть у первого игрока: превым ходомон должен положить игровую фигуру в центр прямоугольника, разделив его на две равных непересекающихся фигуры — а затем ему достаточно повторять ходы, сделанные вторым игроком в одной из фигур, симметрично в другой фигуре. Понятно, что если второй смог сделать ход, то первый тоже сможет.

B. Выигрышная стратегия есть у второго игрока: пока он находится сзади, первый может делать только ходы по одному шагу вперёд. Второму надо следовать за ним — и когда тот шагнёт в клетку №301 (второй будет стоять в 229-ой), перепрыгнуть через него и выиграть.

C. Первому надо вырезать свою букву 'Г' по центру верхней стороны квадрата. То, что он выигрывает после этого, доказывается перебором возможных ходов второго игрока: после каждого возможного хода первый игрок может походить так, что буква 'L' второго игрока не может быть вписана никуда.

Задача 5. Прогрессивное сложение

A. $95500 > 50095$.

B. Если ни одно из трёх чисел P, Q, R не является префиксом другого, то всё просто: надо отсортировать числа лексикографически и сложить в порядке «от большего к меньшему». Если одно из чисел — префикс другого (например, P — префикс Q), то всё не так однозначно: надо сравнить их общую первую цифру и первую цифру Q, следующую за вхождением P в Q. Если второе больше, то надо ставить Q перед P, иначе — P перед Q.

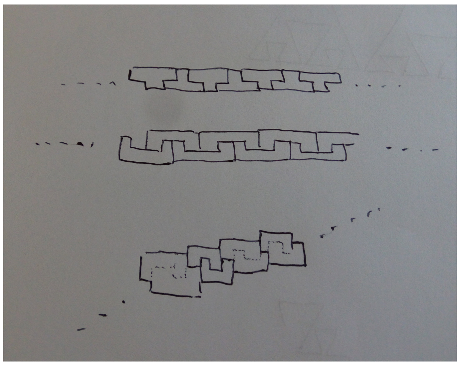
Если P — префикс Q, которое, в свю очередь, является префиксом R, или P и Q — различные префиксы R, действовать следует аналогично.

C. Нет, так не бывает:

$$P \oplus Q \;=\; P \cdot \underset{n \geq 1}{10^n} + Q \;>\; P + Q.$$

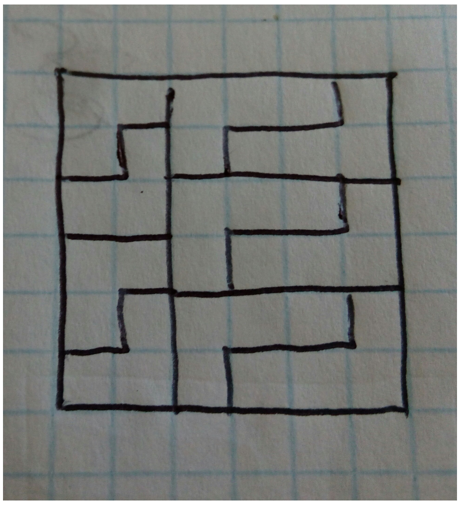
Задача 6. Мощения

A. Из этой фигуры можно собрать горизонтальную полоску ширины 2, которой очевидно можно замостить плоскость (смотреть рисунок).



B. Из второй фигуры можно собрать горизонтальную полоску ширины 3, которой очевидно можно замостить плоскость. Из первой же фигуры соберём «лесенку» (смотреть рисунок выше): так как и верхний, и нижний её край имеет вид «на три клетки вправо–на клетку вверх», этой лесенкой можно замостить плоскость, прикладывая её к себе.

C. Смотреть рисунок:



Задачи 6 класса.

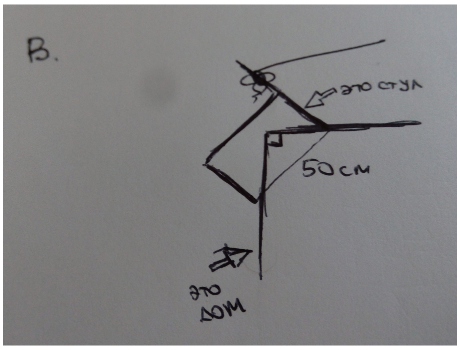
Задача 1. Клиренсы

A.

$$740/2 - 175 = 195\,(\text{мм}).$$

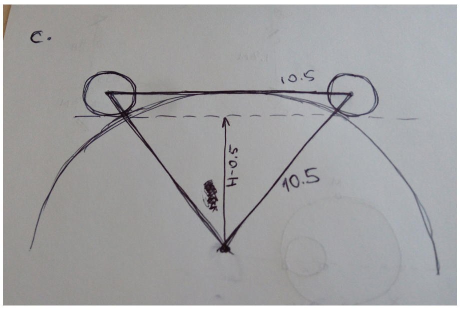
B. Расстояние между соседними ножками стула — 50 см. К ножкам стула прикрепили колёсики и стали втаскивать его за верёвку по стене многоэтажки (которая имеет форму куба) так, что стул едет по стене колёсиками. Каково должно быть расстояние от сидения стула до земли, чтобы он смог въехать со стены многоэтажки на её крышу, не поцарапав нижнюю сторону сиденья?

Угол дома «поднимается» над линией, соединяющей основания ножек стула, на расстояние, равное высоте прямоугольного треугольника с гипотенузой 50 сантиметров. Эта величина максимальна, очевидно, когда треугольник равнобедренный — тогда она равна 25 см. Поэтому расстояние от сиденья до земли должно быть не меньше 25 см.



C. Автобус с диаметром колёс 1 метр и колёсной базой 10.5 метров (так называют расстояние между передней осью и задней) стоит на планете Маленького принца, диаметр которой 20 метров. Каким должен быть дорожный просвет (расстояние от пола до земли) у автобуса, чтобы он не царапал днищем грунт?

Треугольник, образованный центром планеты и центрами колёс автобуса, — равносторонний со стороной 10.5 см: одна из сторон равна колёсной базе, а две других — сумме радиуса планеты (10 метров) и радиуса колеса (0.5 метра).



Дорожный просвет автобуса — расстояние от его пола (который должен касаться верхней точки планеты) до прямой, соединяющей нижние точки колёс. В нашем случае — это разность $R-(H-0.5)$, где H — высота равностороннего треугольника, а 0.5 — радиус колеса.

$$H = 10.5\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$R-(H-0.5) = 11 - 10.5\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

(это примерно 1.9 метра)

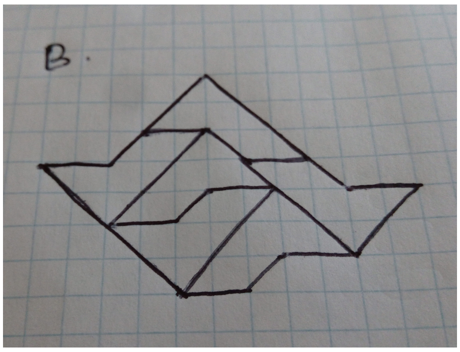
Это и есть ответ на задачу.

Задача 2. Разрезания

A. Поделим каждую из сторон квадрата на семь равных отрезков и рассмотрим 28 треугольников, получающихся, если соединить центр квадрата с краями каждого из этих отрезков. Все эти треугольники имеют одинаковую площадь (так как у них одинаковы основание и высота) и равные длины сторон, лежащие на сторонах квадрата (по построению).

Чтобы получить 7 многоугольников, требуемых в условии, объединим по четыре соседних треугольника.

B. Смотреть рисунок:



C. Аналогично тому, что было проделано в первом пункте данной задачи, мы умеем резать квадрат на три многоугольника равной площади с равной длиной сторон, лежащих на сторонах квадрата.

Разрежем каждый квадратный «слой» пирамиды на три таких многоугольника одинаковым образом (с точностью до подобия). Тогда в объединении всех слоёв получатся три многогранника одинакового объёма, несущие на себе одинаковое количество краски («выходящие» на стороны пирамиды одинаковой площадью своей границы).

Задача 3. Игры

A. Выигрышная стратегия есть у первого игрока: превым ходомон должен положить игровую фигуру в центр прямоугольника, разделив его на две равных непересекающихся фигуры — а затем ему достаточно повторять ходы, сделанные вторым игроком в одной из фигур, симметрично в другой фигуре. Понятно, что если второй смог сделать ход, то первый тоже сможет.

B. Выигрышная стратегия есть у второго игрока: пока он находится сзади, первый может делать только ходы по одному шагу вперёд. Второму надо следовать за ним — и когда тот шагнёт в клетку №301 (второй будет стоять в 229-ой), перепрыгнуть через него и выиграть.

C. Первому надо вырезать свою букву ‘Г’ по центру верхней стороны квадрата. То, что он выигрывает после этого, доказывается перебором возможных ходов второго игрока: после каждого возможного хода первый игрок может походить так, что буква ‘L’ второго игрока не может быть вписана никуда.

Задача 4. Модельки

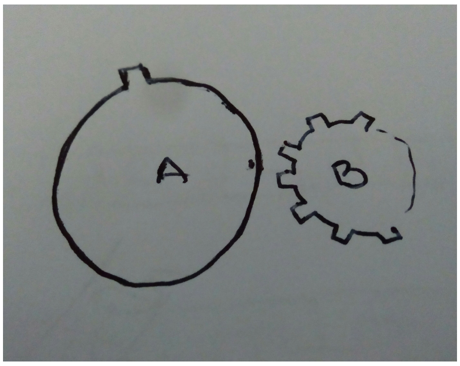
A. Свойства подобных фигур говорят нам, что объём фигур, подобных с коэффициентом k, различается в k^3 раз. Масса тела равна плотности вещества, умноженной на взятый его объём — поэтому она также должна уменьшаться в k^3 раз при уменьшении тела в k раз.

В свою очередь, $1200 / 43^3 = 0.015$: 15 граммов — слишком маленький вес для модельки, но это вполне объяснимо: сделана она всё-таки грубее, чем оригинальная машина, и металл в ней сравнительно более толстый.

B. Мы хотели бы отметить, что длина меридиана, 40 000 километров, это **вся окружность** Земли, а не её половина. То есть Парижский меридиан проходит через две долготы: 2.33° в. д. и 177.67° з. д..

Таким образом, самолёту нужно пролететь 40 000 км, затрачивая на километр 0.54 минуты. $40000 \cdot 0.54 \div 60 = 360$ (часов).

C. С одной стороны, если есть «классическая» плоская система из шестерёнок, то в ней передача вращения симметрична. С другой — можно с применением некоторой креативности придумать «несимметричную» систему. Например, такую, как на рисунке:



При вращении шестерёнки A она каждый оборот будет цепляться своим единственным зубом за шестерёнку B, и та будет вращаться. При вращении же шестерёнки B в текущем положении шестерёнок она не будет касаться A и передавать ей вращение.

Задача 5. Напрасно называют север крайним

A. Это задача–шутка: принималось большинство ответов, хотя, например понятно, что туристическая группа на 10–градусном морозе отморозит себе половину ног, а на 20–градусном — все.

B. Все долготы Земного шара оказываются очень близко друг к другу около полюсов. Так что, возможно, Мюнхгаузен просто обошёл по кругу (скажем, километровому) Северный или Южный полюс.

C. Пусть четыре города — B, C, D и E расположены очень близко друг к другу — попарно на расстоянии в один километр. А пятый город — A — очень далеко, в 100 километрах. Пусть больше нет никаких городов. Тогда A должен быть соединён дорогой с какими-то из четырёх оставшихся городов, но ни один из тех городов не должен быть соединён с A.

Задача 6. Где-то я это уже видел

A. Первое число в дате (оно соответствует дню в месяце) меняется от 1 до 31, а второе (соответствует месяцу) — от 1 до 12. С другой сторооны, как мы знаем, часы пронумерованы от 0 до 23, а минуты — от 0 до 59.

Таким образом, днём в месяце и одновременно часом могут быть числа от 1 до 23, а месяцем и одновременно минутой — от 1 до 12. Кроме того, в каждом месяце точно есть хотя бы 23 дня.

Поэтому ответ — $23 \cdot 12 = 276$.

B. Давайте всегда использовать «развёрнутую» дату. Тогда любой месяц (от 1 до 12) может стоять на месте часа, а любой день (от 1 до 31) на месте минуты. Ответ — все дни в году.

C. Есть всего 12 букв русского алфавита, похожих на буквы английского алфавита (ГОСТ Р 50577-93):

А, В, **Е**, К, М, Н, **О**, Р, С, Т, Х, **У**.

Жирным мы отметили гласные — их всего 4; соответственно, согласных 8. Выбрать сочетание «гласная-согласная-согласная» можно $4 \cdot 8 \cdot 8$ способами, а «гласная-гласная-согласная» — $4 \cdot 4 \cdot 8$ способами. Вариантов для числа на номере всегда ровно 1000 — от 000 до 999.

Когда гласная одна, она может стоять на одном из трёх мест, поэтому ответ в таком случае будет равен

$$3 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 1000.$$

Когда гласных две, согласная может стоять на одном из трёх мест. Поэтому ответ —

$$3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 1000.$$

Задача 7. Ужасный гадкий аккуратный подсчёт

A. Квадратов 1×1 — $4 \cdot 5 = 20$ штук. Квадратов размером 2×2 — $3 \cdot 4 = 12$ штук. Квадратов 3×3 и 4×4 — 6 и 2 соответственно. Таким образом, всего квадратов

$$20 + 12 + 6 + 2 = 40.$$

Количество прямоугольников можно посчитать более «продвинутым» образом: заметим, что прямоугольников размером $a \times b$ можно найти ровно $(4-a+1) \cdot (5-b+1)$ штук. Число a меняется от 0 до 4 — отсюда $4 - a + 1$ меняется в тех же пределах. То же самое с $5 - b + 1$ — оно меняется от 0 до 5.

Отсюда можно заключить, что сумма чисел вида $(4 - a + 1) \cdot (5 - b + 1)$ при всевозможных a и b будет равна сумме всех чисел вида $a \cdot b$. Как посчитать сумму всех чисел вида $a \cdot b$? Заметим, что при раскрытии скобок в произведении

$$(1 + 2 + 3 + 4 + 5) \cdot (1 + 2 + 3 + 4)$$

получится сумма из всех слагаемых, которые нам нужны. Отсюда прямоугольников можно найти $15 \cdot 10 = 150$ штук.

B. Всего раскрасок $n!$ — в «первом» секторе может стоять n цветов, в следующем — $n - 1$, и так далее. Из одной раскраски вращением круга можно получить ровно n раскрасок (включая её саму) — поэтому ответ равен $\frac{n!}{n} = (n-1)!$.

C. В верхней полосе может стоять один из шести имеющихся цветов. Во второй полосе — любой из шести цветов, кроме уже стоящего в первой. В нижней полосе — любой из цветов, кроме уже стоящего во второй. Таким образом, ответ — $6 \cdot 5 \cdot 5 = 150$.

Задача 8. Фургончик

A. Мы знаем, что $(p_1+1)(p_2+1) = p_1p_2+15$. Если раскрыть скобки, получается $p_1+p_2 = 14$. Единственные простые числа, подходящие под это условие, — 11 и 3. Это и есть ответ.

B. Для того, чтобы выяснить, какие ноги ещё не были переставлены, нам нужно отыскать все нечётные числа между 2 и 40, не делящиеся на 3. Это 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 25, 29, 31, 35, 37. Проверить, что мы выписали все нужные числа, несложно — достаточно посмотреть на их остатки при делении на 6: числа должны иметь вид $6k - 1$ или $6k + 1$ (остальные остатки от деления на 6 либо чётные, либо 3). Получилось 12 чисел — это ответ на задачу.

C. Будем измерять расстояние, которое проехал Саша за день, не в километрах, а в метрах. Понятно, что расстояние между A и G равно сумме со знаками + или − расстояний между городами, которые указаны в задаче. Осталось только заметить, что все расстояния в метрах (12000, 18000, 10500, 19500, ...) делятся на 3, а их предполагаемая сумма — 41000 — почему-то нет. Значит, в атласе дана неверная информация.

Задачи 7 класса.

Задача 1. Современная мебельная фабрика

A. Закроем один из открытых ящиков, открыв тот, что через два ящика «налево» от него. Затем закроем его, открыв следующий, ещё через два ящика слева. На четвёртом шаге мы закроем два ящика, один из которых был противоположным исходному.

B. При первом сценарии после действий Фёдора в ведре осталось $\frac{6}{10}$ красителя, разведённого там Сергеем, так как 4 литра раствора из 10 были вылиты.

При втором сценарии Фёдор сначала выливал обычный раствор, а затем — раствор с меньшей концентрацией красителя. То есть, количества красителя в ведре до выливания двух литров и после отличались в 0.8 раз. В итоге в ведре осталось $\frac{8}{10} \cdot \frac{8}{10} = 0.64$ от исходного красителя.

Ответ: больше красителя осталось во второй день.

C. Экспериментальный стул с использованием нанотехнологий (одна из инноваций заключается, например, в том, что у такого стула ровно 720 ножек) падает с лестницы (в качестве испытания, разумеется). Выяснилось, что при падении он потерял в три раза меньше ножек, чем у него бы осталось, потеряй он в три раза меньше ножек, чем у него осталось сейчас. Так сколько же ножек осталось у стула?

Пусть стул потерял t ножек. Составим уравнение:

$$t = \frac{1}{3} \cdot \left(\underbrace{720 - \underbrace{\frac{1}{3} \cdot \underbrace{(720 - t)}_{\text{чем у него осталось сейчас}}}_{\text{в три раза меньше ножек}}}_{\text{осталось бы, потеряй он}} \right)$$

Это линейное уравнение. Его решение — $t = 180$. Это и есть ответ на данную задачу.

Задача 2. Прогрессивное сложение

A. $95500 > 50095$.

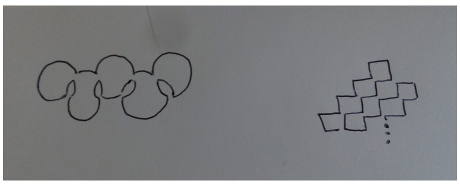
B. Если ни одно из трёх чисел P, Q, R не является префиксом другого, то всё просто: надо отсортировать числа лексикографически и сложить в порядке «от большего к меньшему». Если одно из чисел — префикс другого (например, P — префикс Q), то всё не так однозначно: надо сравнить их общую первую цифру и первую цирфу Q, следующую за вхождением P в Q. Если второе больше, то надо ставить Q перед P, иначе — P перед Q.

Если P — префикс Q, которое, в свю очередь, является префиксом R, или P и Q — различные префиксы R, действовать следует аналогично.

C. Подойдут, например, числа $a = 5$, $b = 9$: $9 \oplus c$ — это как минимум двузначное число, которое не может быть равно пяти.

Задача 3. На салфетке

A. Смотреть рисунок:



B. Обозначим количество узлов у треугольника Серпинского степени n через $T(n)$.

У треугольника степени 1 — три узла, $T(1) = 3$. Треугольник степени $k+1$ получается из трёх треугольников степени k поставновкой их друг на друга — при этом три пары узлов (посередине сторон нового треугольника) склеиваются в просто три узла. Таким образом,

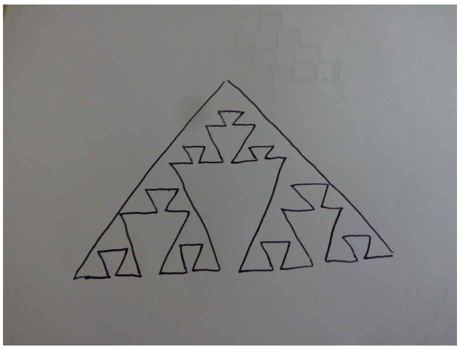
$$\begin{aligned} &T(k) = 3T(k-1) - 3 = \\ &= 3(3T(k-2) - 3) - 3 = \ldots = \\ &= 3^{k-1} \cdot T(1) - 3^{k-1} - 3^{k-2} - \ldots - 3 = \\ &= 3^k - 3^{k-1} - 3^{k-2} - \ldots - 3 = \\ &= 3^k - \frac{3^k - 1}{3 - 1} = \frac{3^k + 1}{2}. \end{aligned}$$

Посчитать количество отрезков в наклонном квадрате и того проще: они образуют $2n$ «лесенок», в каждой из которых по $2n$ отрезков. Поэтому ответом будет число $4n^2$.

C. Научиться рисовать треугольник Серпинского, не отрывая пера от бумаги, можно последовательно: сначала первую степень, потом вторую, потом третью...

Будем делать так: сначала, идя по нижней стороне, рисуем все «внутренности» треугольника, а потом «замыкаем» его двумя верхними сторонами. При этом «внутренности» треугольника степени $n+1$ — это трижды «внутренности» треугольника степени n.

Таким образом получится изображение треугольника степени 4:



а также любой другой степени, по аналогии.

Задача 4. Не модельная, а модальная!

Пусть есть событие X, которое может происходить или не происходить в зависимости от того, какой сегодня день. Например, событие $X =$ «сегодня суббота» случается раз в семь дней, а событие «сегодня я смотрел на часы» — каждый день.

A. Фраза $\square\triangledown X$ означает дословно следующее: для каждого дня, начиная с сегодняшнего, в какой-то момент после него случится событие X. То есть, из какого дня вперёд ни посмотри — там, в будущем, обязательно хотя бы единожды случится событие

X. На самом деле эта фраза эквивалентна следующей: «в бесконечное количество дней после сегодняшнего произойдёт событие X».

Очевидно, что $\Box\triangledown$ сегодня суббота — верно: после любого дня когда-то в будущем обязательно наступит суббота.

B. Докажем, что из первой фразы следует вторая. Действительно: первая утверждает, что $\triangledown\Box X$ верно для любого дня, начиная с сегодняшнего — в том числе и для сегодняшнего.

Теперь докажем, что из второй фразы следует первая. Вторая фраза означает: начиная с какого-то дня в будущем (назовём его $\boldsymbol{D}$) каждый день будет происходить событие X. Зная это, нам нужно доказать $\Box\triangledown\Box X$: для каждого дня d указать такой день после него, начиная с которого X выполняется каждый день.

Так вот если d раньше $\boldsymbol{D}$, то $\boldsymbol{D}$ подойдёт в качестве искомого дня. Если же $\boldsymbol{D}$ раньше d, то после самого d событие X выполняется каждый день — возьмём d в качестве искомого дня.

C. Легко убедиться, что $\Box X$, $\triangledown X$, $\Box\triangledown X$ и $\triangledown\Box X$ — попарно неэквивалентные фразы. Пусть X_1 — «сегодня не 1 января 2000 года», X_2 — «сегодня у Пети Иванова последний звонок в школе», X_3 — «сегодня День рождения Пети Иванова», X_4 — «Пете Иванову уже исполнилось 18 лет»; достаточно проверить, что все X_i делают верными разные наборы утверждений.

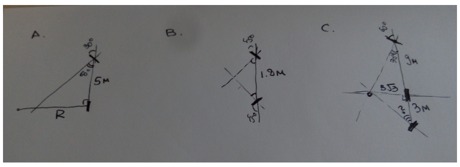
Теперь докажем, что любая фраза с более длинной приставкой из $\Box$ и $\triangledown$ эквивалентна одной из приведённых ранее. Понятно, что $\Box\Box$ и $\triangledown\triangledown$ в любом месте приставки можно заменить на соответственно $\Box$ и $\triangledown$ без изменения смысла фразы. Значит, мы можем рассматривать только фразы, в приставке которых идёт не более одного квадратика / треугольничка подряд.

Согласно пункту B, $\Box\triangledown\Box$ можно заменить на $\triangledown\Box$ без изменения смысла фразы. Аналогично, $\triangledown\Box\triangledown$ можно заменить на $\Box\triangledown$. Поэтому любую приставку мы можем сократить до содержащей не более двух символов — а все такие мы уже перечислили.

Задача 5. Без пробуксовки

A. Машина ездит по окружности вокруг точки, где пересекаются линии, перпендикулярные переднему и заднему колёсам, проходящие через их центр. Эти линии вместе с отрезком между колёсами машины образуют прямоугольный треугольник (см. рисунок), один из углов которого — 60 градусов, а один из катетов — 5 м.

Тогда $R = 5\sqrt{3}$ (отношения сторон прямоугольного треугольника с углом 60° — известные величины).



B. Теперь нас интересует высота прямоугольного равнобедренного треугольника с основанием 1.8 м. Она равна 0.9 м. То есть, погрузчик ездит вокруг точки, расположенной на 0.9 м левее, чем середина его левого борта.

C. Аналогично первому пункту данной задачи, найдём расстояние от не поворачивающегося колеса до точки, вокруг которой ездит автобус. Оно равно $\frac{9}{\sqrt{3}} = 3\sqrt{3}$: опять же, мы, зная один из катетов прямоугольного треугольника с углом 60°, ищем другой.

Теперь заметим, что среднее и заднее колёса, а также точка, вокруг ездит автобус, образуют прямоугольный треугольник с катетами 3 и $3\sqrt{3}$ метра. Значит, его углы — 30 и 60 градусов. Отсюда заднее колесо нужно повернуть на 30 градусов.

Задача 6. Как провожают транспортёры...

A. Если наблюдатель движется со скоростью $\frac{1}{3}v$ навстречу транспортёру, собственная скорость которого равна $\frac{1}{6}v$, их скорость сближения равна $\frac{1}{2}v$ — то есть, для наблюдателя этот транспортёр выглядит всего лишь в два раза медленннее, чем исходный.

В такой ситуации взрослый питон проехал бы мимо наблюдателя за 28 секунд. Но питон–детёныш короче, и для его проезда понадобится $28 \cdot \frac{3}{4} = 21$ секунда.

B. Чтобы не обманываться длинами кубиков (как это сделало большинство участников олимпиады), мы на время заменим их на передние их точки относительно движения транспортёра. Расстояние между этими точками будет равно 15 сантиметров.

При попадании на более быстрый транспортёр расстояние между этими точками увеличится вдвое и составит 30 см. Чтобы получить расстояние между кубиками, из этой величины надо вычесть 5 сантиметров — получится 25 см.

Распространённая ошибка заключалась в том, что участники олимпиады умножали на 2 расстояние между концом первого кубика и началом второго. Это неправомерно, потому что две названные точки играют разную роль, и умножать расстояние между ними на 2 при решении задачи — это как мерить половину прыгунов в длину по дальней точке касания, а половину — по ближней.

C. Очевидно, что оптимальное деление песка между транспортёрами происходит тогда, когда они заканчивают работу одновременно: иначе у опустевшего транспортёра остаётся ресурс, когда он простаивает, а второй транспортёр работает вместо двоих.

Поэтому песок нужно поделить в отношении $2:1$, отдав в два раза больше в два раза более быстрому транспортёру. Получится 400 кг первому и 800 кг второму.

Задача 7. Одновременное вычитание

A. Возьмём пять чисел: 0, 0, 0, 0, 6. Очевидно, для них мы не можем добиться того, чего просят в задаче, потому что по факту можем уменьшать только одно число.

B. *Примечание автора:* эта задача на самом деле о том, что первая группа гомологий плоскости равна $\{0\}$. *:)*

Рассмотрим точку с весом, наибольшим по модулю. Не умаляя общности предположим, что её вес положителен. Так как сумма весов всех точек равна нулю, найдутся какие-то точки с отрицательным весом, суммарный вес которых «перевести» нашу по модулю. Соединим выбранную точку с найденными с помощью кривых так, чтобы (а) вес выбранной точки обратился после этого в ноль (б) модули весов найденных точек не увеличились.

Таким образом, (а) модули весов всех точек не увеличились (б) количество точек с нулевым весом увеличилось хотя бы на одну. На каждом шаге, при повторении процедуры, описанной в предыдущем абзаце, эти полуинварианты будут сохраняться — поэтому мы добьёмся ситуации, когда вес всех точек окажется нулевым (сумма весов всех точек сохраняется на каждом шаге).

C. Возьмём дорогу с наименьшим весом и пустим по ней машину, на номере которой написан вес этой дороги. Когда машина въедет в какой-то город, она сможет из него выехать: её номер равен наименьшему среди всех весов дорог, а сумма входящих в город равна сумме исходящих — поэтому из города выходит дорога весом не меньше, чем число на номере машины.

Так машина будет ездить по городам, пока не окажется в городе, в котором она уже побывала. Тогда возьмём все дороги, по которым машина ездила между двумя посещениями этого города, и вычтем из их веса число на номере машины — и заставим машину ездить по кругу через эти города. При этом сумма весов всех дорог строго уменьшится.

Опять возьмём дорогу, вес которой на этот раз наименьший среди всех, и повторим описанную процедуру. Пока наименьший среди всех вес дороги не равен нулю (то есть, пока есть дороги с положительным весом), будем повторять эту процедуру. Очевидно, в итоге оставшиеся веса всех дорог обратятся в ноль.

Задача 8. Сетки на плоскости

A. Заметим, что рёбра на пути можно менять местами без изменения начала, конца и длины пути. Заметим также, что по рёбрам каждого из трёх направлений в сетке кратчайший путь ходит максимум в одну сторону, потому что иначе «подвинем» противоположно направленные проходы друг к другу и сократим их, укоротив путь.

Пусть путь использовал все три сорта рёбер в сетке. Тогда мы переставим его рёбра так, что сначала он будет идти в одну сторону по рёбрам первого сорта, затем по рёбрам второго, затем по рёбрам третьего.

Теперь возьмём треугольник и проставим на его сторонах те направления, в которых мы ходим по рёбрам соответствующей ориентации. Получилось три вектора — заметим теперь, что один из них равен сумме других!

Если кратчайший путь действительно использовал все три ориентации рёбер, то можно переставить рёбра в этом пути так, чтобы проход по двум подряд идущим рёбрам превратить в проход по одному. То есть, на такой уж путь и кратчайший.

B. Окуню достаточно перегрызть три узла около угла сетки.

C. Сумма углов четырёхугольника равна 360°. Искомое замощение плоскости получится, если складывать четырёхугольники так, чтобы в одной вершине сходились четыре угла соседних четырёхугольников, и чтобы два соседних четырёхугольника всегда соприкасались по соответственной стороне соответственными вершинами.

Задача 9. Ужасный гадкий аккуратный подсчёт

A. Всего раскрасок $n!$ — в «первом» секторе может стоять n цветов, в следующем — $n-1$, и так далее. Из одной раскраски вращением круга можно получить ровно n раскрасок (включая её саму) — поэтому ответ равен $\frac{n!}{n} = (n-1)!$.

B. В верхней полосе может стоять один из шести имеющихся цветов. Во второй полосе — любой из шести цветов, кроме уже стоящего в первой. В нижней полосе — любой из цветов, кроме уже стоящего во второй. Таким образом, ответ — $6 \cdot 5 \cdot 5 = 150$.

C. Эта задача чуть сложнее пункта A: нужно поделить 6! на число вращений куба. Сколько же их?

Возьмём «верхнюю» грань куба. При вращении она может оказаться на месте одной из шести граней (включая себя). Теперь посмотрим на одну из граней, соседних с ней. При вращении та может перейти в одну из четырёх граней, соседних с той, на месте которой оказалась верхняя. Заметим, что положение этих двух граней (для которого есть ровно 24 варианта) однозначно определяет положение всех остальных. Поэтому ответ на задачу — $\frac{6!}{24} = 30$.

Задача 10. Средние арифметические

A. Придумайте четыре набора по пять чисел каждый так, чтобы максимум средних арифметических этих наборов был больше, чем среднее арифметическое наибольших чисел этих наборов.

1, 2, 3, 4, 5; 1, 2, 3, 4, 5; 1, 2, 3, 4, 5; 10001, 10002, 10003, 10004, 10005.

Максимум средних равен 10003, а среднее арифметическое максимумов — 255.

B. После разбиения детей на классы у нас будет четыре «самых низких» ребёнка, по одному на класс. Расставим их по росту. Одним из них точно будет тот, чей рост — 101 сантиметр. Рост второго будет не больше 131, третьего — не больше 161, четвёртого — не больше 191, потому что между этими отметками вмещается ровно по тридцать детей, и если не все они будут в одном классе, то более высокий самый низкий ребёнок окажется среди них.

Таким образом, у нас есть оценка сверху на величину, которую мы пытаемся максимизировать — $\frac{1}{4}(101 + 131 + 161 + 191)$. Попробуем добиться того, чтобы среднее арифметическое четырёх ростов было именно таким. Для этого можно разбить детей на классы «подряд» — первые тридцать в первый класс, вторые тридцать — во второй, ...

Так и сделаем.

C. Заметим, что какое разбиение детей на классы ни возьми, — сумма средних арифметических ростов детей в классах будет постоянна (и равна 362 см). Значит, минимум наибольший, когда все средние арифметические совпадают. Значит, нужно составлять классы, симметричные относительно 90,5. Например, в первый класс отправить первые десять детей и последние десять, а во второй — вторую и предпоследнюю десятки детей.

Задачи 8 класса.

Задача 1. У магазина

A. Понятно, что Фёдор и Кирилл увеличивают все числа в одинаковое число раз. И „144“, названное Фёдором, есть квадрат этого числа (так как он назвал то, во сколько раз увеличивает всё Кирилл, сам увеличив это число). Тогда оба продавца умножают всё на 12.

Соответственно, учебник стоит $43200 \div 144 = 300$ рублей — так как его цена прошла через уста, опять же, обоих продавцов.

B. Делимость на 99 значит делимость на 9 и на 11. Восстановить стёртую цифру можно почти однозначно, посчитав сумму оставшихся цифр и найдя остаток от деления её на 9. Проблема может возникнуть, если сумма оставшихся на номере цифр делится на 9 — тогда непонятно, 0 нам ставить на пустое место или 9.

Признак делимости на 11 говорит нам, что знакопеременная сумма цифр числа должна делиться на 11. Заметим, что при постановке цифр 9 и 0 на одно и то же место не может оказаться так, что оба результата будут делиться на 11. Поэтому получится однозначный ответ.

C. То, как происходит торг между продавцом и покупателем, на самом деле, повторяет работу алгоритма Евклида. Алгоритм Евклида всегда завершается — значит и торг завершится.

При этом на каждом шаге торга хотя бы одна из названных цен уменьшается хотя бы на 1, поэтому в любой момент времени количество шагов торга оценивается сверху суммой цен, называемых покупателем и продавцом. Поэтому количество шагов всегда будет строго меньше суммы текущих чисел.

Пусть изначально названы цены a и $b = a + t$. Тогда на следующем шаге торга будут названы цены a и t. Тогда количество шагов торга строго меньше, чем

$$a + t \underbrace{+1}_{\substack{\text{один шаг} \\ \text{уже сделан}}} = b + 1 \leq 21.$$

Торг с 20 шагами легко придумать: пусть изначально были названы цены 1 и 20.

Задача 2. Ужасный гадкий аккуратный подсчёт

A. Всего раскрасок $n!$ — в «первом» секторе может стоять n цветов, в следующем — $n - 1$, и так далее. Из одной раскраски вращением круга можно получить ровно n раскрасок (включая её саму) — поэтому ответ равен $\frac{n!}{n} = (n-1)!$.

B. В верхней полосе может стоять один из шести имеющихся цветов. Во второй полосе — любой из шести цветов, кроме уже стоящего в первой. В нижней полосе — любой из цветов, кроме уже стоящего во второй. Таким образом, ответ — $6 \cdot 5 \cdot 5 = 150$.

C. Эта задача чуть сложнее пункта A: нужно поделить 6! на число вращений куба. Сколько же их?

Возьмём «верхнюю» грань куба. При вращении она может оказаться на месте одной из шести граней (включая себя). Теперь посмотрим на одну из граней, соседних с ней. При вращении та может перейти в одну из четырёх граней, соседних с той, на месте которой оказалась верхняя. Заметим, что положение этих двух граней (для которого есть ровно 24 варианта) однозначно определяет положение всех остальных. Поэтому ответ на задачу — $\frac{6!}{24} = 30$.

Задача 3. Не модельная, а модальная!

Пусть есть событие X, которое может происходить или не происходить в зависимости от того, какой сегодня день. Например, событие $X =$ «сегодня суббота» случается раз в семь дней, а событие «сегодня я смотрел на часы» — каждый день.

A. Фраза $\Box\triangledown X$ означает дословно следующее: для каждого дня, начиная с сегодняшнего, в какой-то момент после него случится событие X. То есть, из какого дня вперёд ни посмотри — там, в будущем, обязательно хотя бы единожды случится событие X. На самом деле эта фраза эквивалентна следующей: «в бесконечное количество дней после сегодняшнего произойдёт событие X».

Очевидно, что $\Box\triangledown$ сегодня суббота — верно: после любого дня когда-то в будущем обязательно наступит суббота.

B. Докажем, что из первой фразы следует вторая. Действительно: первая утверждает, что $\triangledown\Box X$ верно для любого дня, начиная с сегодняшнего — в том числе и для сегодняшнего.

Теперь докажем, что из второй фразы следует первая. Вторая фраза означает: начиная с какого-то дня в будущем (назовём его $\boldsymbol{D}$) каждый день будет происходить событие X. Зная это, нам нужно доказать $\Box\triangledown\Box X$: для каждого дня d указать такой день после него, начиная с которого X выполняется каждый день.

Так вот если d раньше $\boldsymbol{D}$, то $\boldsymbol{D}$ подойдёт в качестве искомого дня. Если же $\boldsymbol{D}$ раньше d, то после самого d событие X выполняется каждый день — возьмём d в качестве искомого дня.

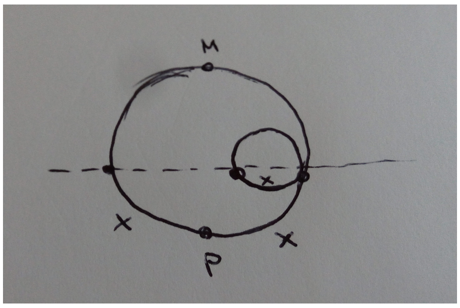
C. Легко убедиться, что $\Box X$, $\triangledown X$, $\Box\triangledown X$ и $\triangledown\Box X$ — попарно неэквивалентные фразы. Пусть X_1 — «сегодня не 1 января 2000 года», X_2 — «сегодня у Пети Иванова последний звонок в школе», X_3 — «сегодня День рождения Пети Иванова», X_4 — «Пете Иванову уже исполнилось 18 лет»; достаточно проверить, что все X_i делают верными разные наборы утверждений.

Теперь докажем, что любая фраза с более длинной приставкой из $\Box$ и $\triangledown$ эквивалентна одной из приведённых ранее. Понятно, что $\Box\Box$ и $\triangledown\triangledown$ в любом месте приставки можно заменить на соответственно $\Box$ и $\triangledown$ без изменения смысла фразы. Значит, мы можем рассматривать только фразы, в приставке которых идёт не более одного квадратика / треугольничка подряд.

Согласно пункту B, $\Box\triangledown\Box$ можно заменить на $\triangledown\Box$ без изменения смысла фразы. Аналогично, $\triangledown\Box\triangledown$ можно заменить на $\Box\triangledown$. Поэтому любую приставку мы можем сократить до содержащей не более двух символов — а все такие мы уже перечислили.

Задача 4. Катим круг

A. «Расправим» большую окружность — заметим, что дуга, составляющая её половину, равна по длине окружности круга, который мы катим. Это значит, что, проехав эту дугу, круг снова коснётся её отмеченной точкой.



B. Длина дуги круга между точкой его касания с окружностью и отмеченной точкой равна длине дуги окружности между точкой её касания с кругом и точкой P. Обозначим эту длину через x. Отложим дугу длиной x налево от точки P (смотреть рисунок). Отрезок, соединяющий точку касания круга с окружностью и конец новой дуги, будет горизонтальным.

При этом дуга длины x на круге получается из дуги длины x на окружности гомотетией с коэффициентом $\frac{1}{2}$ и центром в точке касания круга с окружностью: эти дуги отложены из одной точки на окружностях, радиусы которых отличаются в два раза.

Горизонтальный отрезок переходит при гомотетии в горизонтальный отрезок — поэтому концы дуги на квадрате также лежат на одной горизонтальной прямой.

C. В силу того же факта, что дуга на квадрате получается из дуги на окружности гомотетией с коэффициентом $\frac{1}{2}$, её конец будет находится ровно посередине между концами большой дуги — то есть, ровно над точкой P, потому как большая дуга изначально строилась симметричной.

Задача 5. Средние арифметические

A. Придумайте четыре набора по пять чисел каждый так, чтобы максимум средних арифметических этих наборов был больше, чем среднее арифметическое наибольших чисел этих наборов.

1, 2, 3, 4, 5; 1, 2, 3, 4, 5; 1, 2, 3, 4, 5; 10001, 10002, 10003, 10004, 10005.

Максимум средних равен 10003, а среднее арифметическое максимумов — 255.

B. После разбиения детей на классы у нас будет четыре «самых низких» ребёнка, по одному на класс. Расставим их по росту. Одним из них точно будет тот, чей рост — 101 сантиметр. Рост второго будет не больше 131, третьего — не больше 161, четвёртого — не больше 191, потому что между этими отметками вмещается ровно по тридцать детей, и если не все они будут в одном классе, то более высокий самый низкий ребёнок окажется среди них.

Таким образом, у нас есть оценка сверху на величину, которую мы пытаемся максимизировать — $\frac{1}{4}(101 + 131 + 161 + 191)$. Попробуем добиться того, чтобы среднее арифметическое четырёх ростов было именно таким. Для этого можно разбить детей на классы «подряд» — первые тридцать в первый класс, вторые тридцать — во второй, ...

Так и сделаем.

C. Заметим, что какое разбиение детей на классы ни возьми, — сумма средних арифметических ростов детей в классах будет постоянна (и равна 362 см). Значит, минимум наибольший, когда все средние арифметические совпадают. Значит, нужно составлять классы, симметричные относительно 90,5. Например, в первый класс отправить первые десять детей и последние десять, а во второй — вторую и предпоследнюю десятки детей.

Задача 6. Игры

A. Выигрышная стратегия есть у первого игрока: превым ходомон должен положить игровую фигуру в центр прямоугольника, разделив его на две равных непересекающихся фигуры — а затем ему достаточно повторять ходы, сделанные вторым игроком в одной из фигур, симметрично в другой фигуре. Понятно, что если второй смог сделать ход, то первый тоже сможет.

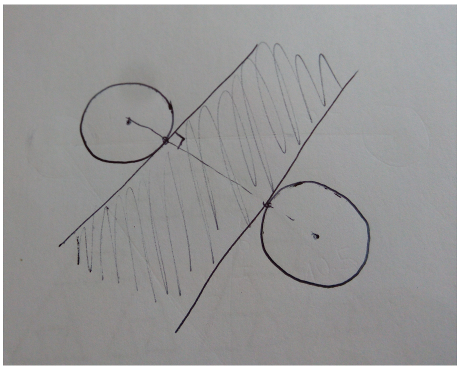
B. Выигрышная стратегия есть у второго игрока: пока он находится сзади, первый может делать только ходы по одному шагу вперёд. Второму надо следовать за ним — и когда тот шагнёт в клетку №301 (второй будет стоять в 229-ой), перепрыгнуть через него и выиграть.

C. Первому надо вырезать свою букву 'Г' по центру верхней стороны квадрата. То, что он выигрывает после этого, доказывается перебором возможных ходов второго игрока: после каждого возможного хода первый игрок может походить так, что буква 'L' второго игрока не может быть вписана никуда.

Задача 7. Об одной задаче классификации

A. Очевидно, что ширина этой полосы не может быть больше, чем расстояние между самыми близкими друг к другу точками кругов. Сделаем ширину полосы равной этому расстоянию.

Для этого соединим центры кругов отрезком и построим касательные к кругам в в точках пересечения отрезка с их границей. Они будут параллельны и образуют полосу максимально допустимой ширины (смотреть рисунок).



B.–C. Сработает похожий метод: надо найти ближайшие друг к другу точки квадратов и соединить их отрезком — искомая полоса получится, если провести к данному отрезку перпендикуляры в его концах.

С одной стороны, её ширина будет максимально допустимой, потому что она будет равна расстоянию между ближайшими точками квадратов, а большая ширина запрещена.

С другой стороны, ни одна точка из квадратов не попадёт внутрь этой полосы, потому что квадрат — выпуклый многоугольник. В силу этого он либо лежит по одну сторону от прямой, проходящей через точку его границы, либо лежит по обе стороны, и с каждой из сторон от прямой находится часть стороны, на которой лежала точка, через которую мы проводили прямую.

Но тогда на части этой стороны, лежащей внутри полосы, найдётся точка, которая ближе к другому концу отрезка, лежащем на другом краю полосы, что противоречит построению полосы.

Задача 8. Одновременное вычитание

A. Возьмём пять чисел: 0, 0, 0, 0, 6. Очевидно, для них мы не можем добиться того, чего просят в задаче, потому что по факту можем уменьшать только одно число.

B. *Примечание автора:* эта задача на самом деле о том, что первая группа гомологий плоскости равна $\{0\}$. *:)*

Рассмотрим точку с весом, наибольшим по модулю. Не умаляя общности предположим, что её вес положителен. Так как сумма весов всех точек равна нулю, найдутся какие-то точки с отрицательным весом, суммарный вес которых «перевести» нашу по модулю. Соединим выбранную точку с найденными с помощью кривых так, чтобы (а) вес выбранной точки обратился после этого в ноль (б) модули весов найденных точек не увеличились.

Таким образом, (а) модули весов всех точек не увеличились (б) количество точек с нулевым весом увеличилось хотя бы на одну. На каждом шаге, при повторении процедуры, описанной в предыдущем абзаце, эти полуинварианты будут сохраняться — поэтому мы добьёмся ситуации, когда вес всех точек окажется нулевым (сумма весов всех точек сохраняется на каждом шаге).

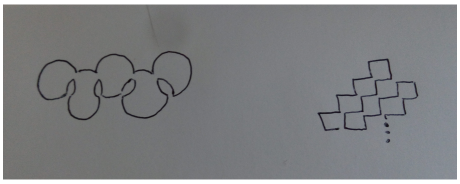
C. Возьмём дорогу с наименьшим весом и пустим по ней машину, на номере которой написан вес этой дороги. Когда машина въедет в какой-то город, она сможет из него выехать: её номер равен наименьшему среди всех весов дорог, а сумма входящих в город равна сумме исходящих — поэтому из города выходит дорога весом не меньше, чем число на номере машины.

Так машина будет ездить по городам, пока не окажется в городе, в котором она уже побывала. Тогда возьмём все дороги, по которым машина ездила между двумя посещениями этого города, и вычтем из их веса число на номере машины — и заставим машину ездить по кругу через эти города. При этом сумма весов всех дорог строго уменьшится.

Опять возьмём дорогу, вес которой на этот раз наименьший среди всех, и повторим описанную процедуру. Пока наименьший среди всех вес дороги не равен нулю (то есть, пока есть дороги с положительным весом), будем повторять эту процедуру. Очевидно, в итоге оставшиеся веса всех дорог обратятся в ноль.

Задача 9. На салфетке

A. Смотреть рисунок:



B. Обозначим количество узлов у треугольника Серпинского степени n через $T(n)$.

У треугольника степени 1 — три узла, $T(1) = 3$. Треугольник степени $k+1$ получается из трёх треугольников степени k поставновкой их друг на друга — при этом три пары узлов (посередине сторон нового треугольника) склеиваются в просто три узла. Таким образом,

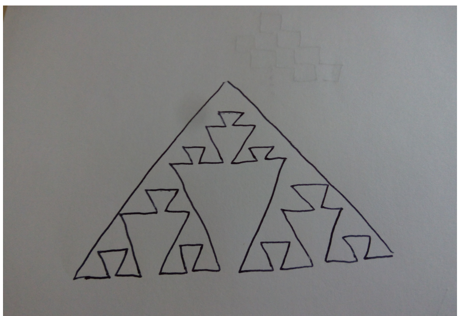
$$\begin{aligned}
&T(k) = 3T(k-1) - 3 = \\
&= 3(3T(k-2) - 3) - 3 = \ldots = \\
&= 3^{k-1} \cdot T(1) - 3^{k-1} - 3^{k-2} - \ldots - 3 = \\
&= 3^k - 3^{k-1} - 3^{k-2} - \ldots - 3 = \\
&= 3^k - \frac{3^k - 1}{3 - 1} = \frac{3^k + 1}{2}.
\end{aligned}$$

Посчитать количество отрезков в наклонном квадрате и того проще: они образуют $2n$ «лесенок», в каждой из которых по $2n$ отрезков. Поэтому ответом будет число $4n^2$.

C. Научиться рисовать треугольник Серпинского, не отрывая пера от бумаги, можно последовательно: сначала первую степень, потом вторую, потом третью...

Будем делать так: сначала, идя по нижней стороне, рисуем все «внутренности» треугольника, а потом «замыкаем» его двумя верхними сторонами. При этом «внутренности» треугольника степени $n+1$ — это трижды «внутренности» треугольника степени n.

Таким образом получится изображение треугольника степени 4:



а также любой другой степени, по аналогии.

Задача 10. Необходимости и достаточности

A. Скорость мышки равна $10 \cdot 35 = 350$ см/с, а скорость кошки — $55 \cdot 9 = 495$ см/с. Несомненно, кошка быстрее.

B. Сколько вылетов нужно сделать винтовому самолёту? Каждого Йожина надо осыпать трижды — получается 300 осыпаний. Каждый вылет даёт два осыпания — поэтому нужно 150.

А реактивному? Аналогичным образом получаем $100 \cdot 8 \div 5 = 160$ вылетов. Таким образом, винтовой самолёт на 10 вылетов эффективнее.

C. Обозначим через x_k массу еды, которая была в наличии у велосипедистов *перед* k–ым обедом. Мы знаем, что $x_{31} = 0$, и ищем x_1. Давайте выразим x_k через $x_k + 1$. В соответствии с условием задачи,

$$x_k \quad = \quad \underbrace{0.1 \cdot x_k + 2}_{\text{съедят за } k\text{–ым обедом}} \quad + \quad x_{k+1}.$$

Откуда

$$x_k = \frac{20}{9} + \frac{10}{9} x_{k+1};$$

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{20}{9} + \frac{10}{9} \cdot \frac{20}{9} + \left(\frac{10}{9}\right)^2 \cdot x_3 = \\ &= \frac{20}{9} + \frac{10}{9} \cdot \frac{20}{9} + \ldots + \left(\frac{10}{9}\right)^{28} \cdot \frac{20}{9} = \\ &= \frac{20}{9} \cdot \frac{\left(\frac{10}{9}\right)^{29} - 1}{\frac{10}{9} - 1} \text{ — это ответ на задачу.} \end{aligned}$$

Задача 11. Рукопожатия

A. Давайте «расклеим» восьмёрку, превратив её в обычный круглый хоровод — тогда существо, стоящее в центре восьмёрки, «продублируется». Если оно было крабом, то получится хоровод из 19 крабов и 17 пауков; в противном случае — 18 крабов и 18 пауков. Если в круговом хороводе крабов больше, чем пауков, то какие-то два краба неизбежно будут держаться за лапы, что запрещено.

Отсюда можно заключить, что в центре стоял паук. Придумать хоровод, соответствующий условию, с пауком в центре не представляет ни малейшего труда.

B. Могло оказаться так, что ровно один человек в компании выиграл машину. Построим соответствующий пример. Возьмём «победителя» — у него есть пять друзей. У каждого из них есть ещё по четыре друга (кроме выигравшего машину), пусть все эти друзья различны. $1 + 5 + 4 \cdot 5$ — у нас получилось 26 человек, от каждого из которых не более чем два рукопожатия до выигравшего машину человека.

Однако, для того чтобы довести пример до конца, нам надо установить дружеские связи между людьми, у которых их пока меньше 5 — а именно, между теми, от кого до победителя лотереи два рукопожатия (их 20 человек). Каждому из них нужно «изобрести» ещё по 4 друга.

Поступим просто: поставим эти 20 человек по кругу в произвольном порядке и назначим друзьями каждого двух его правых соседей и двух его левых соседей. Задача решена.

C. Пусть внутренних рейсов в Авиаландии ровно M, а международных из неё — ровно N. Каждый внутренний рейс имеет в Авиаландии два «конца», а каждый международный — только один. Всего в города Авиаландии прибывает $5 \cdot 6 = 30$ рейсов. Получаем

$2 \cdot M + N = 30.$

Отсюда N должно быть чётным числом (так как $2 \cdot N$ — чётное).

Задача 12. Прогрессивное сложение

A. $95500 > 50095$.

B. Если ни одно из трёх чисел P, Q, R не является префиксом другого, то всё просто: надо отсортировать числа лексикографически и сложить в порядке «от большего к меньшему». Если одно из чисел — префикс другого (например, P — префикс Q), то всё не так однозначно: надо сравнить их общую первую цифру и первую цирфу Q, следующую за вхождением P в Q. Если второе больше, то надо ставить Q перед P, иначе — P перед Q.

Если P — префикс Q, которое, в свю очередь, является префиксом R, или P и Q — различные префиксы R, действовать следует аналогично.

C. Подойдут, например, числа $a = 5, b = 9$: $9 \oplus c$ — это как минимум двузначное число, которое не может быть равно пяти.

Задания 2017 года

Задачи 4 класса.

Задача 1. Обаятельный домовёнок

A. $6-4=2$, отсюда Кузя догоняет издателей со скоростью 2 статьи в день. На то, чтобы нагнать 40 статей, у него уйдёт 20 дней.

B. Площадь квадратика 2×2 в 4 раза больше площади квадратика 1×1, поэтому на него уходит в 4 раза больше чернил. Значит, на том же картридже Кузя сможет напечатать $10000\div4=2500$ квадратиков 2×2.

C. Среди гвоздиков почти каждого горизонтального ряда как минимум на двух должны быть сделаны повороты: ведь нитка входит и выходит из этого ряда. Однако найдутся два горизонтальных ряда гвоздиков, где нитка начинается или кончается — поэтому количество поворотов нитки может быть оценено сверху числом $2\cdot5+2=12$.

Протянуть нитку, сделав 12 поворотов, просто: можно, например, стартовать из верхней левой клетки и пойти до конца направо, потом, сделав два поворота, спуститься на ряд вниз и пойти налево — и так далее.

Задача 2. Велопоход

A.

$$t=\frac{S}{v}=\frac{400\,\text{м}}{10\,\text{км/ч}}=\frac{0.4\,\text{км}}{10\,\text{км/ч}}=\frac{1}{25}\ \text{ч.}$$

Это, в свою очередь, равно 2.4 минутам.

B. Остановки занимают половину времени Дмитрия Григорьевича, поэтому его средняя скорость будет в два раза меньше его скорости в движении — и равна 17 км/ч. Это, тем не менее, выше средней скорости Полины, которая равна 15 км/ч. Поэтому Д. Г. быстрее

C. Подъём в горку и спуск с неё имеют одинаковую длину. Степан на гоночном велосипеде въезжает в горку со скоростью 10 км/ч, а спускается со скоростью 40 км,ч. А Пётр на тракторе едет с постоянной скоростью 17 км,ч. Кто из них быстрее преодолеет подъём и спуск?

Пусть длина подъёма в горку равна x километров. Тогда время, за которое Степан преодолеет подъём и спуск, в часах равно

$$\frac{x}{10}+\frac{x}{40}=\frac{5x}{40}=\frac{x}{8}.$$

Время же, которое потратит Пётр, равно $\frac{2x}{17}$ — и нам нужно сравнить эти два числа. Посмотрим на их отношение:

$$\frac{x \cdot 17}{8 \cdot 2x} = \frac{17}{16} > 1.$$

То есть, Пётр всё-таки будет ехать дольше.

Задача 3. Буквы на белом листе

A. ‘Б’ можно превратить в В;

‘Г’ можно превратить в Б;

‘Е’ можно превратить в В;

‘Л’ можно превратить в Д;

‘С’ можно превратить в О.

Остальные буквы (в их «типографском» начертании) ни во что превратить нельзя. Однако эта задача оставляет большую свободу трактовок, поэтому оценивалась в пользу участника.

B. Если лист бесконечный, то это буквы ‘В’ и ‘Ф’, имеющие в своём составе два «кольца». Если же мы рассматриваем обычный лист бумаги А4, то на нём можно написать букву ‘Ж’, распространив её до краёв листа — и она поделит его на 6 областей.

C. От двух областей (когда они написаны одна поверх другой) — до 9, когда они пересекаются в двух точках и касаются краёв листа.

Задача 4. Делить и резать, резать и делить

A. Нужно провести две диагонали — четыре треугольника, на которые они поделят прямоугольник, будут иметь равную площадь.

B. **Здесь должна быть картинка.**

C. Проведём в круге два диаметра под углом 45°. Каждый из них поделить круг на две равных части, однако вдвоём они делят круг на 4 части, площади которых равны $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{8}$ площади круга.

Задача 5. О, как мы далеки!

A. Не умаляя общности, пусть остановка A находится левее D. Тогда остановка C — либо слева от A, либо справа от D.

Если остановка C слева от A, то она находится на расстоянии 4 от неё. Но тогда нам некуда поставить B так чтобы $AB = 4$, $BC = 2$. Отсюда C находится справа, и $AC = 6$.

B. Вдоль прямой аллеи растут четыре дерева. Расстояния между соседними равны 63, 14 и 84 метра соответственно. Сколько деревьев надо ещё посадить, чтобы расстояние между любыми двумя соседними деревьями было одинаковым?

Сажая новое дерево, мы бьём промежуток между прежде соседними деревьями на два меньших промежутка. Если мы добились того, что расстояние между соседними деревьями стало равным d, то d является делителем 63, 84 и 14.

НОД $(63, 84, 14) = 7$, поэтому деревья можно посадить каждые 7 метров (и большего расстояния между соседними добиться нельзя). Отсюда ответ —

$$(63/7 - 1) + (84/7 - 1) + (14/7 - 1) = 20 \text{ деревьев.}$$

C. Да, точки можно расставить:

$$A \xleftrightarrow{3} D \xleftrightarrow{3} B \xleftrightarrow{6} E \xleftrightarrow{1} C.$$

Задача 6. Быть врачом — весьма ответственно!

A–B. Здесь должна быть картинка

C. Да, стратегия для докторов будет следующая: Айболит надевает первую пару перчаток, а на неё сверху вторую; Пеппер оперирует только во второй паре перчаток (её внешняя сторона касалась только пациента, а внутренняя чистая. Наконец, Ватсон делает операцию, надев на себя вывернутую первую пару перчаток (её новая внутренняя сторона — ещё чистая), а сверху на неё — вторую.

Внешняя сторона второй пары перчаток по-прежнему касалась только пациента, а то, что между и второй парой перчаток соприкасаются уже грязные стороны, нас не волнует.

Задачи 5 класса.

Задача 1. Поделим – посмотрим

A. Первые два треугольника, пересекаясь, образуют 6 областей: внешность, два «края» каждого из треугольников и их пересечение. Заметим теперь, что для замкнутой линии количество областей, которые она добавляет к картинке, равно количеству её пересечений с другими, уже имеющимися, линиями. Третий треугольник пересечёт не более восьми линий — он может максимум дважды «входить» и «выходить» из имеющихся двух треугольников. Четвёртый треугольник добавит максимум 12 областей, по тем же причинам.

Таким образом, ответ — $6 + 8 + 12 = 26$ областей, пример легко построить.

B. Прямая может «входить» в семиугольник и «выходить» из него. При этом изначально она находится снаружи и в конце должна оказаться там же. Каждую сторону семиугольника прямая пересекает не более одного раза, а количество пересечений должно быть чётным. Значит, прямая пересекает максимум шесть сторон, «проходя» через семиугольник трижды.

Получается, она делит семиугольник на максимум на четыре части: до первого пересечения, между первым и вторым, между вторым и третьим, после третьего пересечения.

C. На какое наибольшее число областей делят плоскость 15 одинаковых по размеру квадратов, все стороны которых горизонтальны либо вертикальны?

Два одинаково ориентированных квадрата пересекаются максимум в двух точках (если не совпадают). Это значит, что k–ый нарисованный квадрат добавляет на картинку не более $2(k-1)$ новых областей. Отсюда ответ на задачу — $2+2+4+\ldots+2\cdot 14 = 2 + 2 \cdot 105 = 312$.

Изобразить 15 попарно пересекающихся квадратов несложно — достаточно взять один и 14 раз немного сдвинуть его по диагонали.

Задача 2. Шутка

A. Ответ «нет» в задаче–шутке смотрелся бы странно, поэтому в этом пункте подразумевается ответ «да»: из башни можно откачать воздух и сделать лестницу почти отвесной — тогда стул без ножек сможет двигаться вертикально вниз так же, как и его 30-ногий собрат, но ему не будет мешать сопротивление воздуха, наличествующее снаружи башни; в общем, он окажется быстрее.

B. Пусть x_A задач было придумано вчера, x_B — сегодня и x_C — завтра. Тогда из условия

$$\begin{cases} x_B = 1.5(x_A + x_C) \\ x_B = 3x_C \\ x_A = 4 \end{cases}$$

Осталось только решить эти уравнения. Из первых двух легко вывести, что $x_A = x_C$, тогда $x_B = 1.5 \cdot 8 = 12$.

C. Автомобиль не сможет доехать до Пекина, так как за любое конечное время после своего старта он проезжает не более чем $80 + 40 + 20 + \ldots = 160$ километров.

Задача 3. О, как мы далеки!

A. Не умаляя общности, пусть остановка A находится левее D. Тогда остановка C — либо слева от A, либо справа от D.

Если остановка C слева от A, то она находится на расстоянии 4 от неё. Но тогда нам некуда поставить B так чтобы $AB = 4$, $BC = 2$. Отсюда C находится справа, и $AC = 6$.

B. Вдоль прямой аллеи растут четыре дерева. Расстояния между соседними равны 63, 14 и 84 метра соответственно. Сколько деревьев надо ещё посадить, чтобы расстояние между любыми двумя соседними деревьями было одинаковым?

Сажая новое дерево, мы бьём промежуток между прежде соседними деревьями на два меньших промежутка. Если мы добились того, что расстояние между соседними деревьями стало равным d, то d является делителем 63, 84 и 14.

НОД $(63, 84, 14) = 7$, поэтому деревья можно посадить каждые 7 метров (и большего расстояния между соседними добиться нельзя). Отсюда ответ —

$$(63/7 - 1) + (84/7 - 1) + (14/7 - 1) = 20 \text{ деревьев.}$$

C. Да, точки можно расставить:

$$A \xleftrightarrow{3} D \xleftrightarrow{3} B \xleftrightarrow{6} E \xleftrightarrow{1} C.$$

Задача 4. Простые, но такие сложные

A. Хотя бы одно из чисел p, $p+2$, $p+4$ должно делиться на 3 — это можно понять, рассмотрев всевозможные остатки при делении p на 3. Единственное простое число, делящееся на 3, — это, собственно, 3.

$p+4$ не может быть равно трём, потому что тогда $p = -1$ — не простое. $p+2$ не может быть равно трём, потому что тогда $p = 1$ — не простое. Остаётся единственные ответ — $p = 3$, $p+2 = 5$, $p+4 = 7$. Все эти числа простые.

B. Пусть $n = p_1 \cdot p_2$. Тогда $n + 100 = (p_1 + 1)(p_2 + 1) = n + p_1 + p_2 + 1$. Таким образом, мы ищем простые числа p_1 и p_2, такие что $p_1 + p_2 = 99$. Сумма двух чисел нечётна — значит, одно из них обязательно должно быть чётным. Отсюда единственный ответ — $p_1 = 2$, $p_2 = 97$.

C. Рассмотрим выключатель под номером k. Какие электрики переключат его? Очевидно, что те, номера которых являются делителями числа k. Изначально все выключатели выключенными, поэтому включенными в конце останутся те, номера которых имеют нечётное чило делителей. Известный факт заключается в том, что этому условию удовлетворяют только квадраты натуральных чисел.

Таким образом, включенными останутся выключатели с номерами–полными квадратами.

Задача 5. Неизвестные цифры

A. Заметим, что в слове «Мизантроп» 9 различных букв; а также буква Х, встречаясь в этом ребусе, является уже десятой. При этом ни одна из уже перечисленных нами букв не может быть равна нулю — в одном случае произведение в правой части получится нулевым, в другом же в числе ХРОМОТА окажется ведущий ноль.

B. Между младшим и предпоследним разрядами в этом примере должен был случиться перенос разряда, так как в противном случае Е+Е=*9, что невозможно из соображений чётности.

Отсюда Е+Е+1 должно оканчиваться на 9. Значит, Е равно 4 или 9.

Если Е равно 9, то М+М=19, что невозможно (М$\leq$9).

Если Е равно 4, то М+М=14, тогда М=7. Тогда посмотрим на букву Р: Р+Р оканчивается на 4.

Тогда либо Р равно либо 2, либо 7. Последний случай невозможен, так как тогда Р совпадает с М. Значит, остаётся ребус вида $2 \cdot$ К247 = Ж494. На значения букв К и Ж не влияют никакие другие части выражения, поэтому можно взять произвольное К от 1 до 4 и Ж=2·К — у ребуса будет 4 решения.

C. Пусть на доске были написаны числа $x_0 \ldots x_9$, $x_i = n + i$, n — какое-то натуральное.

Пусть стёрто число x_k. Тогда $2017 = 9n + 1 + \ldots + 9 - k$. 2017 имеет остаток 1 при делении на 9, значит, и левая часть тоже должна иметь остаток 1. $1 + \ldots + 9 = 45$, это делится на 9 — значит, k имеет остаток 8, и поэтому равно 8.

Значит, сумма 9 последовательных натуральных чисел равна 2015, $9n = 1980$, $n = 220$. Поэтому с доски стёрто число 228.

Задача 6. И пусть Бетховен услышит

A. Заметим, что клавиша с номером 45 находится ровно напротив клавиши с номером 1. Также заметим, что Лина нажимает симметричные клавиши, всё больше отдаляясь от первой: сначала первую справа, потом первую слева, потом вторую справа, потом вторую слева.

Таким образом каждая клавиша окажется нажатой ровно один раз, и клавиша номер 45 будет последней — то есть, нажатой на 88-ом шаге.

B. Заметим, что номера клавиш, на которых Лина поёт «ЛЯ», — это остатки степеней двойки (начиная с числа 2) при делении на 88. То есть, мы ищем наименьшую степень двойки, имеющую вид $88k + 48$. Перебором можно установить, что это 4096. Отсюда на 4095 шаге Лина споёт «ЛЯ», нажимая на 48-ю клавишу.

C. За одну мелодию Лина охватывает $1+1+2+3+\ldots+100 = \frac{100\cdot 101}{2}+1 = 5051$ клавиш. Значит, за всю игру ей будет охвачено $1935\cdot 5051$ клавиш, и нам нужно найти остаток этого числа при делении на 88, он и даст нам номер последней нажатой клавиши. Остаток числа 1935 равен -1, остаток числа 5051 — 35. Таким образом, последней нажатой клавишей будет $88 - 35 = 53$–я.

Задачи 6 класса.

Задача 1. Разрезания и углы

A–B. Здесь должна быть картинка

C. Здесь должна быть картинка.

Смотреть рисунок: отмеченные углы равны в силу построения и теоремы о накрест лежащих углах. Проведём ещё несколько доволнительных построений: получившийся треугольник — прямоугольный и равнобедренный, то есть угол, равный сумме A и B, — $45°$, то есть, равен по величине углу C.

Задача 2. Пока не пришёл лифтёр

A. Если первый общий этаж для мальчиков — 123-ий, то $\text{НОК}\,(n, m) = 123$ (так как первый общий этаж как раз и имеет номер, соответствующий наименьшему общему кратному). $123 = 3\cdot 41$, поэтому n и m могут быть равным 1, 123 или 3, 41.

B. Без ограничения общности можно считать, что Витя находится на нулевом этаже, а Петя — на первом. Тогда Витин лифт перемещается только по этажам, номера которых делятся на $k+1$. Если $k = 0$, Петя остаётся на месте, и Витя, конечно, может к нему приехать.

Если же $k > 0$, то Витя не может приехать на первый этаж (1 не делится на $k + 1$), поэтому если Петя просто будет оставаться на месте, он не встретится с Витей.

C. Заметим, что номер текущего этажа, на котором находится Витя, равен сумме со слагаемыми вида $\pm m$ и $\pm n$. Любая такая сумма делится на $\text{НОД}\,(n, m)$, а единственный делитель единицы — это она сама. Поэтому $\text{НОД}\,(n, m) = 1$.

Задача 3. На плоскости

A. Единственный способ расположить квадраты согласно условию — вдоль двух сторон квадрата 18×18 уложить квадратики 1×1, а оставшееся место занять квадратом 17×17. Его площадь будет равна 289.

B. 12 заборов строятся в каком-то порядке, один за другим. Ни один, ни два забора ничего не отгораживают, как их ни поставь. Зато третий забор может, пересекая первый и второй, огородить одну область. И вообще — n–ый забор, пересекая все предыдущие, может отгородить $n-2$ новых области. Таким образом, ответ на эту задачу — $1+\ldots+10=55$. Построить пример расстановки заборов, отгораживающей именно это количество областей, несложно.

C. Возьмём самую длинную сторону четырёхугольника $ABCD$ — пусть это сторона AB. Один из углов, прилежащих к ней, должен быть острым (не умаляя общности — угол DAB), иначе сторона CD будет длиннее AB. Рассмотрим сторону DA и вершину D.

Высота DH из точки D на стоону AB упадёт именно что на сторону AB, а не на её продолжение, так как иначе

$$|AD|^2 \underset{\text{Th. Пифагора}}{=} |AH|^2+|DH|^2 \underset{\substack{AH\text{ — продол-}\\ \text{жение }AB}}{>} |AB|^2+|DH|^2>|AB|^2.$$

Откуда AD длиннее AB, что противоречит изначальному выбору стороны AB.

Задача 4. Неземное стихосложение

A. Поэт в своём стихотворении занимается расложением последовательных чисел в сумму простых, меньших данного числа (например, число 4 он не использовал, придумывая разложение для шести). Записываются простые числа в порядке убывания. Поэтому следующие три строчки будут иметь вид:

Два два два два.

Три три два два.

Пять три.

B. Здесь должна быть картинка

C. Будем соединять знакомых поэтов белой ниткой, а незнакомых — чёрной ниткой. Рассмотрим поэта Васю — к нему привязаны 2016 ниток, значит среди них уж точно есть три нитки одного цвета. Пусть это белые нитки. Рассмотрим поэтов, находящихся на других концах этих ниток.

Если какие-то два из этих трёх пожтов знакомы, то образуется белый треугольник из них и поэта Васи. Если же они все попарно незнакомы друг с другом — то нам не хуже, это тоже вариант из условия задачи.

Задача 5. Простые, но такие сложные

A. Хотя бы одно из чисел p, $p+2$, $p+4$ должно делиться на 3 — это можно понять, рассмотрев всевозможные остатки при делении p на 3. Единственное простое число, делящееся на 3, — это, собственно, 3.

$p+4$ не может быть равно трём, потому что тогда $p = -1$ — не простое. $p+2$ не может быть равно трём, потому что тогда $p = 1$ — не простое. Остаётся единственные ответ — $p = 3$, $p + 2 = 5$, $p + 4 = 7$. Все эти числа простые.

B. Пусть $n = p_1 \cdot p_2$. Тогда $n + 100 = (p_1 + 1)(p_2 + 1) = n + p_1 + p_2 + 1$. Таким образом, мы ищем простые числа p_1 и p_2, такие что $p_1 + p_2 = 99$. Сумма двух чисел нечётна — значит, одно из них обязательно должно быть чётным. Отсюда единственный ответ — $p_1 = 2$, $p_2 = 97$.

C. Рассмотрим выключатель под номером k. Какие электрики переключат его? Очевидно, что те, номера которых являются делителями числа k. Изначально все выключатели выключенными, поэтому включенными в конце останутся те, номера которых имеют нечётное чило делителей. Известный факт заключается в том, что этому условию удовлетворяют только квадраты натуральных чисел.

Таким образом, включенными останутся выключатели с номерами–полными квадратами.

Задача 6. Шутка

A. Ответ «нет» в задаче–шутке смотрелся бы странно, поэтому в этом пункте подразумевается ответ «да»: из башни можно откачать воздух и сделать лестницу почти отвесной — тогда стул без ножек сможет двигаться вертикально вниз так же, как и его 30-ногий собрат, но ему не будет мешать сопротивление воздуха, наличествующее снаружи башни; в общем, он окажется быстрее.

B. Пусть x_A задач было придумано вчера, x_B — сегодня и x_C — завтра. Тогда из условия

$$\begin{cases} x_B = 1.5(x_A + x_C) \\ x_B = 3x_C \\ x_A = 4 \end{cases}$$

Осталось только решить эти уравнения. Из первых двух легко вывести, что $x_A = x_C$, тогда $x_B = 1.5 \cdot 8 = 12$.

C. Автомобиль не сможет доехать до Пекина, так как за любое конечное время после своего старта он проезжает не более чем $80 + 40 + 20 + \ldots = 160$ километров.

Задача 7. Многонациональные захватчики

A. Здесь должна быть картинка.

B. Пусть 99 государств захватили себе первые 99 клеток верхнего ряда таблицы, а сотое государство — вторую сверху клетку оставшегося столбца таблицы, где ещё не было ни одного государства.

Единственное государство, которое могло бы заселить оставшуюся клетку верхнего ряда, чтобы не нарушить условие задачи, — сотое. Однако и оно не может там обосноваться, потому что тогда в соответствующем столбце за ним будет целых две клетки.

C. При любом k захват клеток, описанный в условии, невозможен.

Здесь должна быть картинка.

Будем смотреть на клетки , соседние с главной диагональю. Первые две из них должны быть захвачены, чтобы обеспечить двух захваченных соседей угловой клетки. Следующие две не могут быть захвачены, так как у второй клетки на диагонали уже есть два захваченных соседа. Так как размеры таблицы нечётны, получаем, что две соседних клетки противоположного угла таблицы должны быть не захвачены — и это будет нарушать условие задачи.

Задача 8. Все числа состоят из цифр

A. Запишем условие из задачи: $\overline{xy} = 3 \cdot \overline{yx}$. Это значит то же, что

$$10x + y = 30y + 3x;$$
$$7x = 29y.$$

И правая, и левая части равенства должны делить на 29. Это значит, что x делится на 29 — единственная цифра, кратная, 29, это ноль. Разумеется, при $x = 0$ решений у данной задачи нет — значит, нет и вообще.

B. Последовательно будем интерпретировать условие задачи. То, что искомое число не делится на 10, значит, что $Z \neq 0$. То, что число YZ меньше 40, значит, что Y равен 0, 1, 2 или 3. Единственное двузначное число, являющееся квадратом и оканчивающееся на цифры 0–3 — это 81. Таким образом, $X = 8$, $Y = 1$.

Наконец, для цифры Z остаётся два возможных варианта, чтобы число XYZ делилось на 9 — 0 и 9. Так как мы с самого начала поняли, что $Z \neq 0$, получается $Z = 9$.

Ответ: искомое число — 819.

C. Попробуем посчитать сумму цифр числа n — по признаку делимости на 9, её остаток будет таким же, как у самого числа n. 19 разрядов из 61 занимают двойки — если отбросить эти 19 разрядов, двоек и четвёрок будет поровну. Пусть четвёрки в числе занимают t разрядов. Тогда сумма цифр числа n равна

$$19 \cdot 2 + 4 \cdot t + 2 \cdot t + 3 \cdot (61 - 19 - 2t) =$$
$$= 38 + 6t + 3 \cdot 42 - 6t = 38 + 42 = 80.$$

Остаток при делении 80 на 9 равен 8 — значит, и число n сравнимо с 8 по модулю 9.

Задачи 7 класса.

Задача 1. Переводчики с немецкого

A. Разложим на простые множители числа 116 и 217: $116 = 2^2 \cdot 29$, $217 = 7 \cdot 31$. Эти числа взаимно просты, то есть, у них единственный общий множитель — единица. Поэтому переводчику надо перевести 116 брошюр и 217 заметок.

B. Заметим, что если текстов каждой тематики было бы по одному и каждому переводчику надо было бы перевести ровно один текст, то у начальника не возникло бы проблем. Тогда давайте сведём задачу распределения $3n$ текстов, по n на тему, к задаче распределения $3(n-1)$ текстов, по $n-1$ на тему.

Среди трёх переводчиков найдётся тот, кто указал наименьшее число различных тематик текстов в своём списке желаний. Выделим ему один текст одной из его желаемых тематик. Среди оставшихся двух переводчиков есть тот, у кого тематик поменьше. Он точно хочет себе хотя бы один текст тематики, отличной от той, которую мы уже дали первому переводчику. Выделим ему текст этой тематики.

Остался третий переводчик. Если он хотел себе текст третьей тематики, которая ещё никому не выдана, всё хорошо. Если вдруг он «заказывал» только два различных вида текстов, и это те самые виды, которые уже «отданы» первому и второму переводчикам, то у кого-то из них (предположим, у второго) в списке желаний есть третья тематика. Дадим ему эту самую третью тему, а третьему переводчику — то, что раньше было у второго.

Таким образом мы успешно раздали три текста — раздавая по три текста разных тематик, дойдём до ситуации, когда текстов осталось по одному.

C. Текст длины 1 бьётся одним способом, текст длины 2 — двумя способами. Теперь рассмотрим последнее слово в тексте из n слов — оно может быть либо самостоятельным, либо частью сочетания. В первом случае нам останется побить на слова и сочетания текст длины $n-1$, во втором — текст длины $n-2$.

Таким образом, ответ на задачу для n равен сумме ответов для $n-1$ и $n-2$. Этому условию и полученным нами начальным данным удовлетворяет последовательность чисел Фибоначчи. Поэтому ответ — $\mathcal{F}_n$.

Задача 2. Гонки улиток

A. Улитки доползут до верха одновременно — каждая за три дня.

B. Покрасим клетки листа в белый и чёрный, как на шахматной доске. Чёрных и белых клеток будет разное количество (всё-таки площадь листа нечётна), и при этом улитка переползает с белой клетки на чёрную, а с чёрной — на белую. Поэтому улиткам, стартовавшим в клетках цвета, которого больше, не хватит клеток цвета, которого меньше.

C. Пусть более быстрая улитка — верхняя. Тогда план её действий таков: спуститься вертикально вниз в точку, где сидела другая улитка, а затем догнать её по её же пути.

Пусть более быстрая улитка — нижняя. План её действий — поползти перпендикулярно от стены. Кратчайший путь от начального положения верхней улитки до точки, где находится нижняя улитка, всегда будет длиннее расстояния, пройденного нижней улиткой — поэтому более медленная верхняя не сможет её догнать.

Задача 3. Участники «Математики НОН-СТОП»

A. Парты в одном из кабинетов, где проходит олимпиада, стоят в три колонки по шесть парт в каждой. За 20 минут до олимпиады в кабинете сидело 8 школьников. Докажите, что из кабинета пока что можно утащить две свободные парты, стоящие друг за другом. А если бы школьников было 9?

Побьём парты на пары стоящих друг за другом, по три пары в ряду. Получится девять пар, а школьников пока всего восемь. Значит, одна пара парт полностью свободна, и её можно утащить.

Если же школьников 9, то посадим по школьнику за 1, 3 и 5 парты каждого ряда — и ничего нельзя будет унести.

B. Пусть участников всего N. Если среди участников есть один, не знакомый ни с кем, то не может быть участника, знакомого со всеми. Если же есть участник, который со всеми знаком, то каждый знаком хоть с кем-то.

Таким образом, либо все участники знакомы с 0—$(N-2)$ людьми каждый, либо все они знакомы с 1—$N-1$ людьми каждый. В любом случае на N участников получается $(N-1)$ вариантов, поэтому найдутся двое с одинаковым числом знакомых.

C. Возьмём шесть участников, нам хватит. Будем соединять красной линией знакомых, а синей линией — незнакомых. Все участники окажутся попарно соединены.

Из каждого участника выходит по пять линий, значит как минимум три из них имеют один цвет. Пусть из данного участника выходит три красных линии — посмотрим на людей, в которых они приходят. Если между ними есть хоть одна красная линия, получается красный треугольник с участником, выбранным нами изначально. Если же между ними все линии синие, то это даёт нам синий треугольник, то есть они попарно незнакомы. Что и требовалось.

Задача 4. Загадывание чисел

A. Пусть оказалось, что $a+b$ делится на b, где a и b — числа, загаданные мальчиками. Тогда

$$a+b=k\cdot b,$$

и, соответственно

$$a=(k-1)\cdot b.$$

Таким образом, a делится на b — и наибольший общий делитель этих двух чисел равен b.

B. Ответ на первый вопрос — да, конечно: 3 и 20 — взаимно простые числа, а их остатки от деления на 17 совпадают и, разумеется, не взаимно просты.

Чтобы показать, что числа a и b из второго вопроса пункта обязаны быть взаимно простыми, рассмотрим число

$$\max(a,b)+1.$$

Остатки при делении чисел a и b на него равны им самим и по условию взаимно просты — значит, a и b взаимно просты.

C. Наша задача — решить уравненение

$$(x+3)(x+4)(x+5)(x+6) = 288.$$

Рассмотрим произведения пары крайних множителей и пары средних множителей:

$$(x^2+9x+18)(x^2+9x+20) = 288.$$

Иными, словами,

$$Y(Y+2) = 288.$$

Разложим число 288 на множители: $288 = 2^5 \cdot 3^2$. Получается, есть ровно два способа представить 288 в виде произведения двух чисел, различающихся на 2: $16 \cdot 18$ и $(-18) \cdot (-16)$.

В каждом из этих двух случаев, чтобы найти x, нужно либо решить квадратное уравнение, либо, например, представить -18 в виде произведения двух чисел, различающихся на 3 — одно из них и будет $x+3$. Ни то, ни другое не представляет труда.

Задача 5. Многонациональные захватчики

A. **Здесь должна быть картинка.**

B. Пусть 99 государств захватили себе первые 99 клеток верхнего ряда таблицы, а сотое государство — вторую сверху клетку оставшегося столбца таблицы, где ещё не было ни одного государства.

Единственное государство, которое могло бы заселить оставшуюся клетку верхнего ряда, чтобы не нарушить условие задачи, — сотое. Однако и оно не может там обосноваться, потому что тогда в соответствующем столбце за ним будет целых две клетки.

C. При любом k захват клеток, описанный в условии, невозможен.

Здесь должна быть картинка.

Будем смотреть на клетки , соседние с главной диагональю. Первые две из них должны быть захвачены, чтобы обеспечить двух захваченных соседей угловой клетки. Следующие две не могут быть захвачены, так как у второй клетки на диагонали уже есть два захваченных соседа. Так как размеры таблицы нечётны, получаем, что две соседних клетки противоположного угла таблицы должны быть не захвачены — и это будет нарушать условие задачи.

Задача 6. Порезать торт на День рождения

A. Проведём три параллельных разреза через торт. Если они вместе с какими тремя разрезами образуют замкнутую ломаную, то есть звено, идущее от одного крайнего разреза к другому — то есть, пересекающее средний разрез. Таким образом, построить несамопересекающуюся ломаную нельзя.

B. **Здесь должна быть картинка.**

C. Задача сводится к задаче разрезания квадрата на пять фигур одинаковой площади и с одинаковой длиной пересечения с внешними сторонами квадрата. Для этого разделим каждую сторону квадрата на пять равных по длине отрезков и соединим концы этих отрезков с центром квадрата. Получим 20 треугольников одинаковой площади с одинаковой длиной основания. Искомые фигуры получим, объединяя соседние треугольники по четыре штуки.

Разрезание куба строится из разрезания квадрата просто: достаточно «протащить» разрезание квадрата через куб по вертикали.

Задача 7. Взвешивания

A. Пусть картофель весит P граммов, а кот — K граммов. Пусть погрешность составляет M граммов.

Тогда $P + M = 1000$, $K + M = 4400$, $P + K + M = 5000$. Отсюда $P = 600$ (вычтем из третьего равенства второе), $K = 4000$ (вычтем из третьего первое), $M = 400$.

B. Поделим 729 монет на три равных кучки. Положим две из них на весы — если одна из них окажется легче другой, то в ней находится фальшивая монета. Если они равны по весу, то фальшивая монета находится в оставшейся трети.

Таким образом, за один ход мы умеем уменьшать количество «подозреваемых» монет втрое. $729 = 3^6$, поэтому через шесть ходов останется одна монета, которая может быть фальшивой — она и окажется фальшивой.

C. Выложим на весы одну монету из первого мешка, две монеты из второго мешка, ... 15 монет из 15-го мешка. Если бы все монеты были настоящими, их суммарная масса была бы равна $20 \cdot (1 + \ldots + 15)$ граммов. По факту мы получим бóльшую массу — она будет отличаться от приведённой нами ранее на $5 \cdot$ (№ мешка с фальшивыми монетами) граммов. Так мы и выясним, где фальшивки.

Задача 8. Шутка

A. Ответ «нет» в задаче–шутке смотрелся бы странно, поэтому в этом пункте подразумевается ответ «да»: из башни можно откачать воздух и сделать лестницу почти отвесной — тогда стул без ножек сможет двигаться вертикально вниз так же, как и его 30-ногий собрат, но ему не будет мешать сопротивление воздуха, наличествующее снаружи башни; в общем, он окажется быстрее.

B. Пусть x_A задач было придумано вчера, x_B — сегодня и x_C — завтра. Тогда из условия

$$\begin{cases} x_B = 1.5(x_A + x_C) \\ x_B = 3x_C \\ x_A = 4 \end{cases}$$

Осталось только решить эти уравнения. Из первых двух легко вывести, что $x_A = x_C$, тогда $x_B = 1.5 \cdot 8 = 12$.

C. Автомобиль не сможет доехать до Пекина, так как за любое конечное время после своего старта он проезжает не более чем $80 + 40 + 20 + \ldots = 160$ километров.

Задача 9. Вовочка и клетчатая тетрадь

A. У Вовочки есть клетчатая тетрадь (клетки — одинаковые, квадратные), линейка без делений и карандаш. Площадь каждой клетки в тетради — $100\,\text{мм}^2$. Как Вовочке имеющимися средствами построить квадрат площадью $1000\,\text{мм}^2$?

Заметим, что $10^2 + 30^2 = 1000$. То есть, прямоугольный треугольник с катетами 10 мм, 30 мм (который легко нарисовать по клеткам) имеет гипотенузу $\sqrt{1000}\,\text{мм}^2$.

Расположив четыре таких треугольника, как показано на рисунке, получим квадрат со стороной $\sqrt{1000}\,\text{мм}^2$, площадь которого равна $1000\,\text{мм}^2$.

B. **Здесь должна быть картинка**

Смотреть рисунок.

C. Аналогично пункту B данной задачи мы умеем делить на произвольное количество частей любой отрезок, начало и конец которого — узлы сетки. Также $80 \cdot 25 = 2000$ — поэтому, если мы научимся строить треугольник площадью $\sqrt{2000}\,\text{мм}^2$, мы сможем поделить каждую из его сторон на пять частей и получить 25 квадратов нужной нам площади в $80\,\text{мм}^2$.

Наконец, $2000 = 20^2 + 40^2$; далее аналогично пункту A.

Задача 10. Игра

A. Это игра–шутка: значение суммы не зависит от расстановки в ней скобок — сумма в любом случае будет равна 2017, то есть нечётна. Отсюда победит первый игрок.

B. У первого игрока есть выигрышная стратегия. Первым ходом он должен переложить 3 камня из первой кучки во вторую. Затем он должен реагировать на ходы второго игрока следующим образом:

Если второй перекладывает x камней из первой кучки во вторую, то первый должен переложить $5 - x$ камней также из первой кучки во вторую.

Если же второй перекладывает камни из второй кучки в первую, то первый должен вернуть эти камни обратно во вторую кучку.

Заметим, что после хода первого игрока количество камней во второй кучке всегда имеет остаток 3 от деления на 5, а после хода второго игрока количество камней во второй кучке никогда не имеет такого остатка. Это значит, что второй игрок не может переложить все камни во вторую кучку, вынудив первого сделать ход, при котором ему придётся выкидывать камни из мешка.

То есть, (а) первый всегда может сделать ход, соответствующей придуманной нами стратегии, (б) выкидыванием камней из мешка занимается исключительно второй игрок. Он и проиграет.

C. Начнём со случая $n = 13$. Если первый игрок взял k камней, то второй может взять $13 - k$ и победить. Если n не превосходит 14 и не равно 13, то все камни может взять за один ход первый игрок.

Для $n \geq 15$ рассмотрим два случая:

n делится на 13. Заметим, что после любого хода первого игрока оставшееся количество камней не будет делиться на 13. Зато второй в случае любого хода первого сможет сделать так, что после его хода количество камней, оставшихся в кучке, будет вновь делиться на 13. Для этого на взятие k камней, $1 \leq k \leq 12$, нужно ответить взятием $13 - k$ камней, на взятие 14 камней — 12 камнями, а на взятие 15 камней — 11 камнями. Ноль делится на 13 — кучка может остаться пустой только после хода второго игрока.

n не делится на 13. Тогда выигрышная стратегия есть у первого игрока. Своим первым ходом он берёт от 1 до 12 камней так, чтобы осталось количество, кратное 13 — а затем играет так, как играл бы второй игрок в предыдущем пункте.

Ответ: если n делится на 13, выигрывает второй игрок; иначе выигрывает первый.

Задачи 8 класса.

Задача 1. Неизвестные цифры

A. Заметим, что в слове «Мизантроп» 9 различных букв; а также буква Х, встречаясь в этом ребусе, является уже десятой. При этом ни одна из уже перечисленных нами букв не может быть равна нулю — в одном случае произведение в правой части получится нулевым, в другом же в числе ХРОМОТА окажется ведущий ноль.

B. Между младшим и предпоследним разрядами в этом примере должен был случиться перенос разряда, так как в противном случае Е+Е=*9, что невозможно из соображений чётности.

Отсюда Е+Е+1 должно оканчиваться на 9. Значит, Е равно 4 или 9.

Если Е равно 9, то М+М=19, что невозможно (М≤9).

Если Е равно 4, то М+М=14, тогда М=7. Тогда посмотрим на букву Р: Р+Р оканчивается на 4.

Тогда либо Р равно либо 2, либо 7. Последний случай невозможен, так как тогда Р совпадает с М. Значит, остаётся ребус вида $2 \cdot$ К247 $=$ Ж494. На значения букв К и Ж не влияют никакие другие части выражения, поэтому можно взять произвольное К от 1 до 4 и Ж=2·К — у ребуса будет 4 решения.

C. Пусть на доске были написаны числа $x_0 \ldots x_9$, $x_i = n + i$, n — какое-то натуральное.

Пусть стёрто число x_k. Тогда $2017 = 9n + 1 + \ldots + 9 - k$. 2017 имеет остаток 1 при делении на 9, значит, и левая часть тоже должна иметь остаток 1. $1 + \ldots + 9 = 45$, это делится на 9 — значит, k имеет остаток 8, и поэтому равно 8.

Значит, сумма 9 последовательных натуральных чисел равна 2015, $9n = 1980$, $n = 220$. Поэтому с доски стёрто число 228.

Задача 2. Искусное владение числами

A.

8	3	4
1	5	9
6	7	2

B. 15317.

C. Давайте искать число, делящееся на 144: это число *несильно, но достаточно* больше 95, и делимость на него очень просто проверить: $144 = 16 \cdot 9$: делимость на 16 зависит от последних четырёх цифр, а делимость на 9 — от суммы цифр в целом, которая и так будет равна 144.

Положим последние четыре цифры равными 3232 — нам останется распределить 134 на 91 разряд. Для этого воспользуемся 43 двойками и 48 единицами.

Задача 3. Плавучий зоопарк

A. Здесь должна быть картинка.

B. Конечно же, минимальное количество углов у пересечения — 3. Если мы найдём максимальное количество и приведём пример, когда оно достигается, то все промежуточные количества углов будет несложно получить.

Верхняя оценка на количество углов — 24: каждая из шести сторон шестиугольника могла бы пересекать каждую из четырёх сторон четырёхугольника. В свою очередь, пример, когда пересечение фигур — 6 четырёхугольников, легко построить.

C. Если m и n чётны, то ответ — от трёх до mn углов (смотреть предыдущий пункт). Если m чётно, n нечётно, то каждая из m сторон m-угольника пересекает не более $n-1$ стороны n-угольника, так как количество точек пересечения любой прямой с любым многоугольником чётно: прямая должна «входить» и «выходить» из многоугольника. Пример, когда пересечение имеет $m(n-1)$ углов, строится по аналогии с первым пунктом.

При нечётных m и n ответ — $(m-1)(n-1)$, пример приводится аналогично. Больше углов пересечение не может иметь по следующей причине: m угольник не может пересечь n-угольник «слева направо» больше $m-1$ раза, и каждое пересечение будет давать *в среднем* не более $n-1$ угла.

Задача 4. Вовочка и клетчатая тетрадь

A. У Вовочки есть клетчатая тетрадь (клетки — одинаковые, квадратные), линейка без делений и карандаш. Площадь каждой клетки в тетради — $100\,\text{мм}^2$. Как Вовочке имеющимися средствами построить квадрат площадью $1000\,\text{мм}^2$?

Заметим, что $10^2 + 30^2 = 1000$. То есть, прямоугольный треугольник с катетами 10 мм, 30 мм (который легко нарисовать по клеткам) имеет гипотенузу $\sqrt{1000}\,\text{мм}^2$.

Расположив четыре таких треугольника, как показано на рисунке, получим квадрат со стороной $\sqrt{1000}\,\text{мм}^2$, площадь которого равна $1000\,\text{мм}^2$.

B. Здесь должна быть картинка

Смотреть рисунок.

C. Аналогично пункту B данной задачи мы умеем делить на произвольное количество частей любой отрезок, начало и конец которого — узлы сетки. Также $80 \cdot 25 = 2000$ — поэтому, если мы научимся строить треугольник площадью $\sqrt{2000}\,\text{мм}^2$, мы сможем поделить каждую из его сторон на пять частей и получить 25 квадратов нужной нам площади в $80\,\text{мм}^2$.

Наконец, $2000 = 20^2 + 40^2$; далее аналогично пункту А.

Задача 5. Загадывание чисел

A. Пусть оказалось, что $a + b$ делится на b, где a и b — числа, загаданные мальчиками. Тогда

$$a + b = k \cdot b,$$

и, соответственно

$$a = (k - 1) \cdot b.$$

Таким образом, a делится на b — и наибольший общий делитель этих двух чисел равен b.

B. Ответ на первый вопрос — да, конечно: 3 и 20 — взаимно простые числа, а их остатки от деления на 17 совпадают и, разумеется, не взаимно просты.

Чтобы показать, что числа a и b из второго вопроса пункта обязаны быть взаимно простыми, рассмотрим число

$$\max(a, b) + 1.$$

Остатки при делении чисел a и b на него равны им самим и по условию взаимно просты — значит, a и b взаимно просты.

C. Наша задача — решить уравненение

$$(x + 3)(x + 4)(x + 5)(x + 6) = 288.$$

Рассмотрим произведения пары крайних множителей и пары средних множителей:

$$(x^2 + 9x + 18)(x^2 + 9x + 20) = 288.$$

Иными, словами,

$$Y(Y + 2) = 288.$$

Разложим число 288 на множители: $288 = 2^5 \cdot 3^2$. Получается, есть ровно два способа представить 288 в виде произведения двух чисел, различающихся на 2: $16 \cdot 18$ и $(-18) \cdot (-16)$.

В каждом из этих двух случаев, чтобы найти x, нужно либо решить квадратное уравнение, либо, например, представить -18 в виде произведения двух чисел, различающихся на 3 — одно из них и будет $x + 3$. Ни то, ни другое не представляет труда.

Задача 6. Пути автобуса неисповедимы

A. Описанная в условии задачи ситуация возможна при любом количестве городов — достаточно соединить все города дорогами по кругу, «хороводом», и 4 марта отправить автобус из каждого города в следующий.

B. Автобусов, выехавших из городов на П (и, соответственно, приехавших в города на К) больше, чем собственно городов на К. В силу принципа Дирихле, в каком-то городе на К будет больше одного автобуса.

C. Если автобусы смогли разъехаться, то либо четыре города оказались разбиты на пары так, что автобусы из городов пары поменялись местами, либо из четырёх городов собрался цикл, и каждый автобус отправился в следующий город цикла.

Здесь должна быть картинка.

Есть три способа разбить четыре города на пары и три способа провести через них цикл длины 4 — такие соединения дорогами нам подходят. Также подойдёт любая ситуация, которая «надстроена» над перечисленными нами: то есть, взять все дороги и добавлены какие-то ещё.

Задача 7. Переводчики с немецкого

A. Разложим на простые множители числа 116 и 217: $116 = 2^2 \cdot 29$, $217 = 7 \cdot 31$. Эти числа взаимно просты, то есть, у них единственный общий множитель — единица. Поэтому переводчику надо перевести 116 брошюр и 217 заметок.

B. Заметим, что если текстов каждой тематики было бы по одному и каждому переводчику надо было бы перевести ровно один текст, то у начальника не возникло бы проблем. Тогда давайте сведём задачу распределения $3n$ текстов, по n на тему, к задаче распределения $3(n-1)$ текстов, по $n-1$ на тему.

Среди трёх переводчиков найдётся тот, кто указал наименьшее число различных тематик текстов в своём списке желаний. Выделим ему один текст одной из его желаемых тематик. Среди оставшихся двух переводчиков есть тот, у кого тематик поменьше. Он точно хочет себе хотя бы один текст тематики, отличной от той, которую мы уже дали первому переводчику. Выделим ему текст этой тематики.

Остался третий переводчик. Если он хотел себе текст третьей тематики, которая ещё никому не выдана, всё хорошо. Если вдруг он «заказывал» только два различных вида текстов, и это те самые виды, которые уже «отданы» первому и второму переводчикам, то у кого-то из них (предположим, у второго) в списке желаний есть третья тематика. Дадим ему эту самую третью тему, а третьему переводчику — то, что раньше было у второго.

Таким образом мы успешно раздали три текста — раздавая по три текста разных тематик, дойдём до ситуации, когда текстов осталось по одному.

C. Текст длины 1 бьётся одним способом, текст длины 2 — двумя способами. Теперь рассмотрим последнее слово в тексте из n слов — оно может быть либо самостоятельным, либо частью сочетания. В первом случае нам останется побить на слова и сочетания текст длины $n-1$, во втором — текст длины $n-2$.

Таким образом, ответ на задачу для n равен сумме ответов для $n-1$ и $n-2$. Этому условию и полученным нами начальным данным удовлетворяет последовательность чисел Фибоначчи. Поэтому ответ — $\mathcal{F}_n$.

Задача 8. Примечательный учебный день

A. К высоте m метров дерево подходит, имея $(m-1)!$ ветвей. Соответственно, ответ на задачу — $11!$ веток.

B. Очевидно, что больше 13 рассадок не бывает: мальчик обязан сидеть с одной из девочек. 13 же рассадок реализовать просто: нужно взять какую-то рассадку, и каждый день сдвигать девочек относительно мальчиков «по кругу».

C. Давайте решим задачу в общем случае: есть класс из $4k+2$ человек — придумать $4k+1$ способов рассадить их за парты так, чтобы одна пара не появлялась в двух разных рассадках (больше нельзя по очевидной причине — каждый человек может сидеть не более чем с $4k+1$ другими).

Будем изображать i–ую рассадку, ставя число i в клетки таблицы $(4k+2)\times(4k+2)$, из которой выкинута центральная диагональ. Наша задача тогда — расставить числа от 1 до $4k+1$ в клетки таблицы, так чтобы (а) каждое число было написано ровно $2k$ раз (б) встречалось в каждом столбце и каждой строке ровно по одному разу (в) его вхождения в таблицу были бы симметричны относительно центральной диагонали. Построим расстановку.

В первую строку таблицы впишем числа от 1 до $4k+1$ справа налево, а в первый столбец — снизу вверх. Заполняя i-ую строку, $1<i<4k-1$, поступим так: зарезервируем самую правую клетку строки, не будем её трогать; в остальные клетки впишем числа от 1 до $4k+1$, сдвинув их на одну клетку влево относительно предыдущей строки. После этого в самую правую клетку запишем число, которое должно было стоять на центральной диагонали. Последнюю строку получим отражением относительно центральной диагонали уже сформированного последнего столбца.

Приведём пример такой таблицы для $k=2$ (в задаче было $k=6$):

	9	8	7	6	5	4	3	2	1
9		7	6	5	4	3	2	1	8
8	7		5	4	3	2	1	9	6
7	6	5		3	2	1	9	8	4
6	5	4	3		1	9	8	7	2
5	4	3	2	1		8	7	6	9
4	3	2	1	9	8		6	5	7
3	2	1	9	8	7	6		4	5
2	1	9	8	7	6	5	4		3
1	8	6	4	2	9	7	5	3	

Несложно убедиться в том, что она обладает нужными нам свойствами.

Задача 9. О числах маленьких и больших

A. Без ограничения общности будем считать, что $b\geq a\geq 2$. Тогда

$$a + b \overset{(1)}{\leq} 2 \cdot \max(a, b) \overset{(2)}{\leq} \min(a, b) \cdot \max(a, b) = a \cdot b.$$

Теперь, если оба числа a, b строго больше двух, то неравенство (2) становится строгим, а если только одно — то неравенство (1) становится строгим. Что и требовалось.

B. (а): Пусть a — первая цифра числа X.

Чтобы найти число X, которое при удалении первой цифры станет в 57 раз меньше, нужно придумать такую цифру a, что $a \cdot 10^{\cdots} = 56 \cdot (X - a \cdot 10^{\cdots})$. Для этого, в частности, число $a00\ldots0$ должно делиться на 56. Число 70000 отлично подойдёт. Получаем ответ:

$$1250 \cdot 57 = 71250.$$

(б): Чтобы найти ответ в этом пункте, нужно подобрать такую цифру a, что $a00\ldots0$ делится на 57. Пусть такая есть: $57 \mid a \cdot 10^k$. 10 взаимно просто с 57, поэтому тогда $57 \mid a \cdot 10^{k-1}$. Продолжая уменьшать степень десятки, пользуясь этим соображением, получим $57 \mid a$. Но ненулевая цифра не может делится на 57 — получаем противоречие.

C. Отдельно рассмотрим случай $n = 4$: $4 = 2 \cdot 2 = 2 + 2$. Если же составное n строго больше четырёх, что его можно представить в виде $a \cdot b$, $a \geq 2$, $b > 2$.

Из пункта А мы знаем, что тогда $a + b < a \cdot b = n$. Тогда можно взять $n - a - b$ единиц, и получить

$$a + b + 1 + \ldots + 1 = a \cdot b \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1 = n.$$

Задача 10. Игра

A. Это игра–шутка: значение суммы не зависит от расстановки в ней скобок — сумма в любом случае будет равна 2017, то есть нечётна. Отсюда победит первый игрок.

B. У первого игрока есть выигрышная стратегия. Первым ходом он должен переложить 3 камня из первой кучки во вторую. Затем он должен реагировать на ходы второго игрока следующим образом:

Если второй перекладывает x камней из первой кучки во вторую, то первый должен переложить $5 - x$ камней также из первой кучки во вторую.

Если же второй перекладывает камни из второй кучки в первую, то первый должен вернуть эти камни обратно во вторую кучку.

Заметим, что после хода первого игрока количество камней во второй кучке всегда имеет остаток 3 от деления на 5, а после хода второго игрока количество камней во второй кучке никогда не имеет такого остатка. Это значит, что второй игрок не может переложить все камни во вторую кучку, вынудив первого сделать ход, при котором ему придётся выкидывать камни из мешка.

То есть, (а) первый всегда может сделать ход, соответствующей придуманной нами стратегии, (б) выкидыванием камней из мешка занимается исключительно второй игрок. Он и проиграет.

C. Начнём со случая $n = 13$. Если первый игрок взял k камней, то второй может взять $13 - k$ и победить. Если n не превосходит 14 и не равно 13, то все камни может взять за один ход первый игрок.

Для $n \geq 15$ рассмотрим два случая:

n делится на 13. Заметим, что после любого хода первого игрока оставшееся количество камней не будет делиться на 13. Зато второй в случае любого хода первого сможет сделать так, что после его хода количество камней, оставшихся в кучке, будет вновь делиться на 13. Для этого на взятие k камней, $1 \leq k \leq 12$, нужно ответить взятием $13 - k$ камней, на взятие 14 камней — 12 камнями, а на взятие 15 камней — 11 камнями. Ноль делится на 13 — кучка может остаться пустой только после хода второго игрока.

n не делится на 13. Тогда выигрышная стратегия есть у первого игрока. Своим первым ходом он берёт от 1 до 12 камней так, чтобы осталось количество, кратное 13 — а затем играет так, как играл бы второй игрок в предыдущем пункте.

Ответ: если n делится на 13, выигрывает второй игрок; иначе выигрывает первый.

Задача 11. Возводим в степень

A. Подойдёт, например, 423 (делится на 9), 424 (делится на 4), 425 (делится на 25).

B. Укажите наименьшее натуральное число такое, что его половина — квадрат натурального числа, его треть — куб натурального числа, а его пятая часть — пятая степень натурального числа.

Будем искать это число в виде $2^m 3^n 5^k$: по условию, эти множители должны в него входить, а лишнего нам не надо. Ясно следующее:

m делится на 3 и на 5, но нечётно;
n делится на 2 и на 5, но имеет остаток 1 по модулю 3;
k делится на 2 и на 3, но имеет остаток 1 по модулю 5.

Найдём наименьшие подходящие m, n и k — это 15, 10 и 6. Ответ: $2^{15} \cdot 3^{10} \cdot 5^6$.

C. Пусть нам надо придумать цепочку длины n. Возьмём n произвольных простых чисел $p_1 \dots p_n$ — их квадраты являются попарно взаимно простыми.

В силу Китайской теоремы об остатках найдётся достаточно большое число N, сравнимое с i по модулю p_i^2, $1 \leq i \leq n$. Искомой цепочкой будет $N - n \dots N - 1$.

Задача 12. Шутка

A. Ответ «нет» в задаче–шутке смотрелся бы странно, поэтому в этом пункте подразумевается ответ «да»: из башни можно откачать воздух и сделать лестницу почти отвесной — тогда стул без ножек сможет двигаться вертикально вниз так же, как и его 30-ногий собрат, но ему не будет мешать сопротивление воздуха, наличествующее снаружи башни; в общем, он окажется быстрее.

B. Пусть x_A задач было придумано вчера, x_B — сегодня и x_C — завтра. Тогда из условия

$$\begin{cases} x_B = 1.5(x_A + x_C) \\ x_B = 3x_C \\ x_A = 4 \end{cases}$$

Осталось только решить эти уравнения. Из первых двух легко вывести, что $x_A = x_C$, тогда $x_B = 1.5 \cdot 8 = 12$.

C. Автомобиль не сможет доехать до Пекина, так как за любое конечное время после своего старта он проезжает не более чем $80 + 40 + 20 + \ldots = 160$ километров.

Задания 2012 года

Задачи 5 класса.

Задача 4.

A. Старуха Шапокляк очень любит животных. Все ее животные, кроме двух, — собаки, все, кроме двух, — кошки, и все, кроме двух, — попугаи, остальные — крыски. Сколько каких животных у старухи Шапокляк?

Решение: Пусть у Шапокляк s собак, c кошек, p попугаев и k крысок. Тогда

$$\begin{cases} c+p+k=2 \\ s+p+k=2 \\ s+c+k=2 \end{cases}$$

Вычитая эти равенства друг из друга, можно получить, что $s = c = p$. Более того, эти три числа обязаны не превосходить 1, потому что иначе суммы в левой части равенств будут больше двух.

Первый случай: $s = c = p = 0$. Тогда у Шапокляк две крыски, а других животных нет. Второй случай: $s = c = p = 1$. Тогда у шапокляяк одна собака, одна кошка и один попугай, а крыс нет.

Оба ответа являются верными — более того, для получения полного балла за задачу оба должны быть приведены.

B. Четверо пятиклассников Андрей, Борис, Вася и Гена решили определить свой вес. Однако все четверо мальчиков на весы не помещались, поэтому они стали взвешиваться по трое или по двое. Оказалось, что Андрей, Боря и Вася вместе весят 90 кг, Боря, Вася и Гена — 92 кг, а Андрей и Гена — 58 кг. Сколько весят все мальчики вместе?

Решение: Давайте сложим четыре результата, которые получились у мальчиков в условии задачи. Заметим, что тогда получится дважды вес всех мальчиков вместе, и он равен 240 кг. Значит, мальчики вместе весят 120 кг.

Задача 5.

B. С 1 января цена билета в кинотеатр возросла по сравнению с декабрем на 20%, а выручка от продажи билетов возросла на 14%. Как изменилась посещаемость кинотеатра? Увеличилась или уменьшилась?

Решение: Если бы посещаемость кинотеатра не изменилась, то выручка бы увеличилась так же, как и цена билета — на 20 процентов. Однако общая выручка уменьшилась — значит, посетителей стало приходить меньше. Можно даже посчитать, насколько меньше: $\frac{1.14}{1.20} = 0.95$ — то есть, в кинотеатр теперь ходит 95% от прежнего количества посетителей.

C. В мешке у Деда Мороза лежат 10 красно-синих (т.е. одна половина красная, а другая — синяя), 7 сине-зеленых, 5 зелено-красных шаров. Какое наименьшее число шаров должен вынуть из мешка Дед Мороз, чтобы нашелся такой цвет, который будет присутствовать в окраске не менее чем в пяти из вынутых шаров?

Решение: Что означает, что нашёлся цвет, присутствующий в окраске пяти шаров? Это означает, что нашлись два сорта шаров (например, красно-зелёные и сине-зелёные), шаров из которых *в сумме* хотя бы пять.

Пусть Дед Мороз вынул пять шаров. Среди них должны присутствовать все три имеющихся типа, иначе есть два, которые в сумме дадут вынутые пять. Значит, шары распределены по типам как 2-2-1 или 3-1-1. Во втором случае какой шар ни возьми следующим — первый и второй или первый и третий типы в сумме дадут 5.

В первом случае можно взять ещё один шар третьего типа, а следующий, седьмой, уже даст нам пять шаров в сумме у двух типов.

Ответ — 7 шаров.

Задача 6.

A. Дед рассказывал своим внучатам: «В комнате стояло 5 стульев. На них сидели 4 матери, 4 дочки, 3 бабушки, 2 прабабушки и 1 прапрабабушка. При этом каждая из них сидела на отдельном стуле.» «Это невозможно», — возразили внучата. «Я сам видел», — ответил дед. Правду ли сказал дед внучатам?

Решение: Как ни странно, дед не соврал. Представим себе пять женщин: $^{(1)}$совсем девочка, $^{(2)}$её мама, $^{(3)}$её бабушка, $^{(4)}$её прабабушка, $^{(5)}$её прапрабабушка.

Дочерьми здесь являются четверо: (1)–(4), и матерями тоже четверо: (2)–(5). Трое, (3)–(5), — бабушки; двое, (4)–(5), — прабабушки; одна прапрабабушка.

C. Буратино не хотел ходить в школу, и черепаха Тортилла решила его проучить. Она не просто отдала ему Золотой ключик, а задала ему непростую задачу. Она вынесла три коробочки: красную, синюю и зеленую. На красной коробочке было написано «Здесь лежит Золотой ключик», на синей — «Зеленая коробочка пуста», а на зеленой — «Здесь сидит гадюка». Тортилла прочитала надписи Буратино и сказала: «Действительно, в одной коробочке лежит Золотой ключик, в другой — сидит гадюка, а третья коробочка пуста, но все эти надписи неверные». Где лежит Золотой ключик?

Решение: Надпись на синей коробочке неверна — значит, зелёная коробочка непуста. И надпись на зелёной коробочке неверна — значит, в ней не гадюка. Отсюда в зелёной коробке лежит Золотой ключик.

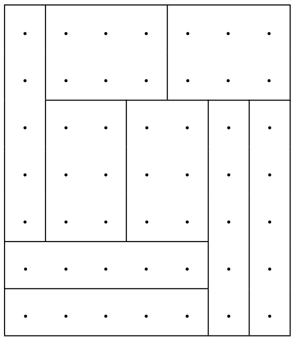
Задачи 6 класса.

Задача 2.

B. Гастрабайтер Гаджи хочет замостить квадратную комнату 7×7 метров панелями 1×5 и 2×3 метров. Сколько панелей ему понадобится? Приведите пример такого замощения. Может ли он обойтись другим количеством панелей?

Решение: Разберёмся сначала с количеством панелей. Пусть есть замощение с A панелями 1×5 и B панелями 2×3. Тогда число $49 - 5A$ должно делиться на 6 — в частности быть чётным. Среди всех чётных чисел, получающихся как $49 - 5A$ (4, 14, 24, 34, 44) на 6 делится только 24. Таким образом, замощение может состоять исключительно из 5 панелей 1×5 и 4 панелей 2×3.

Зная это, придумать замощение несложно:



С. У Карлсона было 20 банок варенья. Он расставил их на трех полках так, что на каждой полке стояло одинаковое количество литров варенья. На первую полку Карлсон поставил одну большую и четыре средних банки варенья, на вторую — две большие и шесть литровых банок, на третью — одну большую, три средних и три литровых банки. Сколько литров варенья было у Карлсона?

Решение: Сравним первую и третью полки Карлсона. На первой четыре средних банки, а на третьей — три средних и ещё три литра. Значит, в одной средней банке три литра варенья. Соответственно, в трёх средних банках — девять литров.

Теперь сравним вторую и третью полки. На третьей — одна большая банка и ещё 12 литров варенья. На второй — две больших и ещё 6 литров. Значит одна большая банка содержит в себе 6 литров варенья.

Таким образом, на второй полке $2 \cdot 6 + 6 = 18$ литров варенья — и столько же на на первой, и столько же на третьей. Значит, у Карлсона 54 литра варенья.

Задача 3.

С. Мальчик Вовочка записал в строчку один за другим 10 первых простых чисел в возрастающем порядке (единица не считается простым числом). Мальчик Дима сначала вычеркнул половину цифр в полученном числе так, что получилось наибольшее число, а затем снова из этого же числа вычеркнул половину цифр так, что получилось наименьшее число. На сколько наибольшее число больше наименьшего?

Решение: Выпишем строку, полученную Вовочкой:

$$2357111317192329.$$

В ней 16 цифр, значит вычеркнуть надо 8. Первая цифра числа, которе мы получим, лежит среди первых 9 цифр строки — чтобы получить наибольшее число, мы должны максимизировать её. Подойдёт 7. Продолжая тем же образом, получим, что наибольшее число, которое мог получить Дима, —

$$77192329,$$

а наименьшее —

$$11111232.$$

Их разность равна 66081097.

Задача 7.

В. Винни-Пух и Пятачок одновременно отправились в гости к друг другу. Но поскольку Винни-Пух всю дорогу сочинял очередную «шумелку», а Пятачок считал пролетавших галок, они не заметили друг друга при встрече. После встречи Пятачок подошел к дому Винни-Пуха через четыре минуты, а Винни-Пух подошел к дому Пятачка через одну минуту. Сколько минут был в пути каждый из них?

Решение: Пусть $v_В$ — скорость Винни-Пуха, $v_П$ — скорость Пятачка, а t — время от их выхода из дома до встречи. Тогда из условия задачи ясно, что расстояние между домами Винни-Пуха и Пятачка выражается как

$$S = (t+1)v_В = (t+4)v_П = t(v_В + v_П).$$

Рассмотрим вторую и четвёртую части этого равенства:

$$\begin{aligned} &tv_В + 1 \cdot v_В = tv_В + tv_П \\ &1 \cdot v_В = tv_П \\ &\frac{v_В}{v_П} = \frac{t}{1} \end{aligned}$$

Теперь, зная это, разберёмся со второй и третьей частями:

$$\begin{aligned} &(t+1)tv_П = (t+4)v_П, \quad t > 0 \\ &t(t+1) = t+4 \\ &t^2 = 4 \implies t = 2. \end{aligned}$$

Таким образом, Винни-Пух был в пути 3 минуты, а Пятачок — 6 минут.

Задача 8.

А. Может ли какая-нибудь степень двойки содержать в своей записи поровну нулей, единиц, двоек, ..., девяток?

Решение: Пусть каждая из цифр встречается в этой степени двойки по k раз. Тогда сумма цифр степени двойки равна $k(0 + \ldots + 9) = k \cdot 45$. То есть, по признаку делимости на 3, степень двойки делится на 3. Такого не может быть — получили противоречие.

В. Однажды перед сном мальчик Вовочка просчитал вслух от одного до тысячи. Сколько слов произнес Вовочка? Каждое слово считается столько раз, сколько оно произнесено.

Решение: Пусть D — количество слов, которое нужно произнести, чтобы посчитать от 1 до 99. Тогда всего Вовочка произнёс $10D + 900 + 1$ слов: в каждой стоне нужно посчитать от 1 до 99, плюс 900 трёхзначных чисел дают по одному слову для обозначения сотен, плюс слово «тысяча».

Осталось найти D. 27 чисел требуют одно слово для произнесения: $1, 2, 3, \ldots, 19, 20$, 30, 40, ..., 80, 90. Все остальные — а их $99 - 27 = 72$ — по два слова. Отсюда

$$D = 72 \cdot 2 + 27 = 171;$$
$$10D + 901 = 2611.$$

Задачи 7 класса.

Задача 1.

A. Существуют ли два таких натуральных числа, наибольший общий делитель которых равен 110, а наименьшее общее кратное равно 2000?

Решение: Таких чисел, конечно же, не существует, ведь наименьшее общее кратное всегда делится на наибольший общий делитель — а 2000 не делится на 110.

B. Вовочка умножил два подряд стоящих натуральных числа и получил число, состоящее из цифр 1, 3, 4, 5, 7, 8 и 9. Покажите, что Вовочка ошибся.

Решение: $1+3+4+5+6+7+8+9 = 45-2 = 43$ — имеет остаток 1 при делении на 3. Значит, в соответствии с признаком делимости на 3, число, составленное из этих цифр, также будет иметь остаток 1. Произведение же двух последовательных натуральных чисел может иметь либо остаток 0 ($0 \cdot 1 = 2 \cdot 0 = 0$), либо остаток 2 ($1 \cdot 2 = 2$). Поэтому Вовочка неправ.

C. Существуют ли 2012 ненулевых числа, никакие два из которых не равны между собой, таких, что их сумма равна их произведению?

Решение: Укажем, как построить набор из таких чисел: он будет иметь вид

$$1, 2, 3, 4, \ldots, 2011, x;$$

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 2011 + x = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2011 \cdot x.$$

Чтобы выполнить условие задачи, нужно взять x, равный

$$\frac{1 + 2 + 3 + \ldots + 2011}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2011 - 1}.$$

Это число строго меньше единицы (очевидно), поэтому не будет совпадать ни с одним из взятых до него.

Задача 2.

A. Прямоугольник разрезами, параллельными его сторонам, разбит на 4 маленьких прямоугольника. Площади трех из них известны. Это 3, 4, 5. Найдите площадь четвертого.

Решение: Ответ в этой задаче зависит от того, какой из прямоугольников, площадь которого известна, находится «между» двумя другими:

4	3
$5 \cdot \frac{4}{3} = \frac{20}{3}$	5

3	4
$5 \cdot \frac{3}{4} = \frac{15}{4}$	5

3	5
$4 \cdot \frac{3}{5} = \frac{12}{5}$	4

B. Мальчики Вова и Дима купили по одной новогодней открытке и каждый разрезал свою открытку на два прямоугольника равной площади. Один из прямоугольников мальчики выбросили, а другой оставили себе. Оказалось, что периметр Вовиного прямоугольника равен 14 см, периметр Диминого — 19 см. Найдите периметр и стороны прямоугольной открытки у каждого из мальчиков.

Задача 3.

A. Не используя технические средства, сравните дроби

$$\frac{2012}{2013} \quad \text{и} \quad \frac{2012000000002012}{2013000000002013}.$$

Решение: Эти дроби равны между собой: вторая получается из первой домножением числителя и знаменателя на 1000000000001.

Задача 4.

A. Какую четверку цифр надо приписать справа к числу 2012, чтобы полученное восьмизначное число делилось на 2013?

Решение: Очевидно, что числа 20130000 и 2013 делятся на 2013. Вычитая их друг из друга, получим все возможные ответы:

$$20130002013 = 20127987$$
$$2013000 - 2 \cdot 2013 = 20125974$$
$$2013000 - 3 \cdot 2013 = 20123961$$
$$2013000 - 4 \cdot 2013 = 20121948$$

C. Произведение шести последовательных натуральных чисел может быть равно произведению трех последовательных натуральных чисел. Например,

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 8 \cdot 9 \cdot 10 = 720.$$

Есть ли еще такие числа?

Решение: В задаче требуется найти числа x, y такие, что

$$x(x+1)\dots(x+5) = y(y+1)(y+2).$$

Частично раскроем скобки в этом выражении —

$$(x^2 + 5x)(x^2 + 5x + 4)(x^2 + 5x + 6) = y(y + 1)(y + 2).$$

Отсюда

$$x^2 + 5x < y < x^2 + 5x + 4.$$

Для переменной y остаётся три варианта — x^2+5x+1, x^2+5x+2, x^2+5x+3. Подставив каждый из этих вариантов в правую часть, можно убедиться, что решений для $x > 1$ у уравнения не будет.

Задача 5.

C. Вдоль прямолинейной аллеи городского парка растет 5 деревьев. Известны 8 из 10 попарных расстояний между ними: 1 м, 1 м, 2 м, 2 м, 3 м, 3 м, 3 м, 4 м. Найдите два остальных расстояния.

Решение: Очевидно, что все попарные расстояния между деревьями целые — в том числе остальные два: в противном случае не-целых расстояний было бы больше, чем два. Значит, мы можем считать, что все деревья расположены в целых точках вещественной оси.

Некоторые из самых маленьких расстояний среди перечисленных являются расстояниями между соседними деревьями — два однометровых расстояния точно такие. Может быть так, что метровые промежутки между деревьями являются соседними ($a \xleftrightarrow{1\,\text{м}} b \xleftrightarrow{1\,\text{м}} c$), а может, что и нет.

В первом случае одно из двухметровых расстояний получается как сумма однометровых. У оставшегося двухметрового расстояния не остаётся других вариантов, кроме как быть длиной промежутка между соседними деревьями.

Если это два дерева, отличные от a, b, c, то получается следующая ситуация:

$$a \xleftrightarrow{1\,\text{м}} b \xleftrightarrow{1\,\text{м}} c \qquad d \xleftrightarrow{2\,\text{м}} e.$$

Тогда $cd = 3$ м, и другие трёхметровые расстояния нам попросту никуда не вписать.

Если одно из этих двух деревьев — a или c, то получаем однозначный вариант:

$$d \xleftrightarrow{2\,\text{м}} a \xleftrightarrow{1\,\text{м}} b \xleftrightarrow{1\,\text{м}} c \xleftrightarrow{3\,\text{м}} e,$$

Который, очевидно, не удовлетворяет условию задачи.

Во втором случае двухметровые расстояния также являются расстояниями между соседними деревьями. Это даёт нам однозначный с точностью до симметрии ответ: деревья стоят в точках 0, 1, 3, 4, 6, и оставшиеся два расстояния — 5 и 6.

Задачи 8 класса.

Задача 3.

B. Натуральные числа m, n удовлетворяют равенству

$$(m-n)^2 = \frac{4mn}{m+n-1}.$$

Докажите, что $m+n$ – квадрат натурального числа.

Решение: По условию задачи,

$$(m-n)^2(m+n-1) - 4mn = 0.$$

Продолжим цепочку равенств:

$$\begin{aligned}
&(m-n)^2(m+n-1) - 4mn = \\
&= m^3 + n^3 - m^2n - mn^2 - m^2 - 2mn - n^2 = \\
&= (m+n)(m^2 - mn + n^2) - mn(m+n) - (m+n)^2 = \\
&= (m+n)(m-n)^2 - (m+n)^2.
\end{aligned}$$

Отсюда можно понять, что число $m+n$ является отношением двух квадратов а, значит, и само квадрат.

C. Вещественные числа x, y удовлетворяют соотношениям

$$x^2 + xy + y^2 = 4 \quad \text{и} \quad x^4 + x^2y^2 + y^4 = 8.$$

Найти значение выражения $x^6 + x^3y^3 + y^6$.

Решение:

$$\begin{cases}
(x+y)^2 - xy = 4 \\
(x+y)^4 - 4xy(x+y)^2 + 2(xy)^2 = 8 \\
\textit{Найти } (x+y)^6 - 6xy(x+y)^4 + 9(xy)^2(x+y)^2 - (xy)^3
\end{cases}$$

$$\begin{cases}
T_1 - T_2 = 4 \qquad (T_1 = T_2 + 4) \\
T_1^2 - 4T_1T_2 + 2T_2^2 = 8
\end{cases}$$

$$\begin{aligned}
&(T_2+4)^2 - 4(T_2+4)T_2 + 2T_2^2 = 8 \\
&-T_2^2 - 8T_2 + 8 = 0 \\
&T_2 = -4 \pm 2\sqrt{6} \qquad (T_1 = \pm 2\sqrt{6})
\end{aligned}$$

Теперь мы знаем сумму и произведение x и y. Можно как подставить значения T_1 и T_2 в выражение в первой системе, равное исходному, так и явно найти x, y и посчитать нужное выражение для них.

Задача 4.

A. Какое из чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 надо выбросить, чтобы сумма квадратов из трёх оставшихся чисел оказалась равной сумме квадратов других трёх оставшихся чисел?

Решение: Сейчас у нас есть семь «подозреваемых» чисел, которые можно выкинуть. Давайте сократим их количество. Заметим, что если две суммы чисел равны, то они равны и по модулю 2, и по модулю 3. Выпишем остатки от деления квадратов чисел 1–7 на 2 и на 3 и посмотрим, какой из них нужно выкинуть, чтобы можно было поделить оставшееся на две части.

x	1	**2**	3	**4**	5	6	7
$x^2 \bmod 2$	1	**0**	1	**0**	1	0	1
$x^2 \bmod 3$	1	**1**	0	**1**	1	0	1

Легко понять, что надо сверху выкинуть ноль (чтобы сумма оставшихся чисел была чётна), а снизу единицу. То есть, либо 2^2, либо 4^2.

Сумма $1^2 + \ldots + 7^2$ равна 140. $\frac{140-4}{2} = 68$, $68 - 49 = 19$ — двумя из трёх квадратов, которые мы поместим вместе с 49, нельзя собрать 19 (потому что 19 вообще не получается как сумма двух квадратов), поэтому вариант с выкидыванием двойки не подходит.

Наконец, $\frac{140-16}{2} = 62$, $49 + 9 + 4 = 62 = 36 + 25 + 1$. Это и есть ответ.

C. Найдите все пары (x, y) неотрицательных целых чисел, удовлетворяющих равенству

$$x - y = x^2 + xy + y^2.$$

Решение: Заметим, что при $x \geq 2$ правая часть строго больше x, а левая — не больше его. Значит, $x = 0$ или $x = 1$. Если $x = 0$, то $-y = y^2$, $y = 0$. Если $x = 1$, то $1 - y = y^2 + y + 1$, $y(y + 2) = 0$, $y = 0$.

Ответ: $(0, 0)$, $(1, 0)$.

Задача 7.

A. У бизнесмена Березова было предприятий в 3 раза меньше, чем у бизнесмена Романова. Если бы Березов отсудил еще столько же предприятий у Романова, сколько имел, то у них обоих число предприятий стало бы одинаково. Сколько предприятий было у бизнесмена Романова?

Решение: Любое число предприятий, кратное трём.

Действительно, если у Романова сейчас $3x$ предприятий, то у Березова x. И если Березов отсудит x предприятий у Романова, то у обоих станет поровну — по $2x$. И этот результат не зависит от конкретного x, то есть, рассуждения можно проделать при любом его значении.