Задачи 2016 года

Задачи 5 класса

Задача 1. Шутка

A. Поскольку это шутка, засчитывался любой минимально обоснованный ответ. Например, можно предположить, что на третий раз не сломается ни одной ножки, так как в ходе предыдущих двух падений все шаткие ножки уже сломались.

Если же решать задачу всерьёз, то легко увидеть, что указанных исходных данных недостаточно для ответа на вопрос.

B. Обозначим стоимость книги за b. Тогда осталось заплатить $b - 200$ рублей. Половина заплаченного — 100 рублей; половина заплаченного плюс то, что осталось заплатить —

$$b - 200 + 100 = b - 100.$$

Осталось бы заплатить, если заплачена половина заплаченного и ещё столько, сколько осталось заплатить —

$$b - (b - 100) = 100.$$

И мы знаем, что $b - 200 = 3 \cdot 100$. Отсюда стоимость книги — 500 рублей.

C. Путешественник отправился вокруг света на восток, его дорога заняла 80 дней ($80 \cdot 24$ часов, чтобы быть точным). Каждый день путешественник ночует на $\frac{1}{80}$ длины экватора восточнее, то есть Солнце в зените оказывается на $\frac{1}{80}$ часть суток раньше, чем в месте предыдущей ночёвки.

Таким образом, время между ночёвками составляет у путешественника только 23.7 часа (да, возможно он не будет высыпаться, но это уже другая история).

В момент возврата в точку отправления окажется, что за 80 дней для путешественника солнце было в зените $80 \cdot 24 \div 23.7 \approx 81$ раз, и календари у путешественника и у ждущих его людей разойдутся. Для избежания таких расхождений при движении с запада на восток при пересечении линии перемены дат принято перелистывать календарь на один день назад.

Представим теперь, что путешественник обходит землю не рядом с экватором, а вокруг полюса по кругу маленького радиуса. В процессе обхода путешественник будет быстро сменять часовые пояса: если он, к примеру, начнёт движение в полночь 31 декабря от линии перемены дат, то через несколько сот метров он придёт в место, где местное время уже 5 часов утра, потом, ещё чуть дальше, будет 18 часов вечера… Путешественник за какой-нибудь час «проживёт» день 31 декабря, подойдёт к линии перемены дат в 23:59 по местному времени последнего перед линией часового пояса, подождёт чуток, чтобы на часах появилось 0:00, поздравит всех с Новым годом, а затем, сделав ещё два шага вперёд через линию, вернётся в ночь 31 декабря.

Во всех этих случаях не совершается какого-то необычного путешествия во времени — совершается путешествие по часовым поясам. А добавление или исчезновение дня возникает за счёт изменения продолжительности суток. Космонавты на МКС, совершающей оборот вокруг Земли каждые два часа, во избежание путаницы не обращают внимание на местное время и живут по гринвичскому времени (по времени нулевого меридиана).

Задача 2. Числа и суммы

A. Число 0 меньше количества цифр в нём. Число 0.1 меньше собственной суммы цифр. Несложно, тем не менее, убедиться, что натуральных чисел с такими свойствами не найдётся.

B. Если в числе во всех разрядах, кроме старшего — девятки, то ответом будет само это число (любое меньшее число неизбежно будет иметь меньшие цифры хоть в одном разряде, и не будет иметь бóльших цифр).

В противном случае, нужно вычесть 1 из цифры в старшем разряде (а если там и так 1 — отбросить его), а числа во всех остальных разрядах заменить на 9. В самом деле, чтобы ещё увеличить сумму цифр такого числа, надо увеличивать (или добавлять) старший разряд, а, сделав это, мы получим число, большее исходного.

C. Будем пользоваться способом Гаусса, который заключается в том, что сумма чисел от 1 до k равна

$$\frac{k \cdot (k+1)}{2}.$$

Можно сосчитать, что у Пети получилось

$$\frac{mn \cdot (mn-1)}{2}.$$

А Васи получилось

$$\frac{m \cdot (m-1)}{2} + \frac{n \cdot (n-1)}{2}.$$

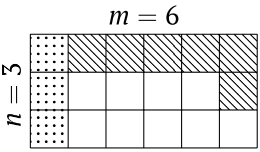
Заметим, что если $m, n > 1$, то $mn \geq m+n$. В самом деле, в таких ограничениях

$$(m-1)(n-1) \geq 1$$

А, значит,

$$mn = (m-1)(n-1) + m + n - 1 \geq 1 + m + n - 1 = m + n.$$

Несмотря на сложные манипуляции с цифрами, идея данного доказательства — геометрическая, ведь в прямоугольнике $m \times n$, если m и n как минимум 2, мы всегда можем отметить n клеток вдоль одной стороны, $m-1$ клетку вдоль другой стороны, и ещё одну клетку где-то в середине.



Рассмотрим следующую цепочку неравенств:

$$(mn)^2 - mn \geq (m+n)^2 - mn = m^2 + mn + n^2 >$$
$$> m^2 + n^2 > (m^2 - m) + (n^2 - n).$$

Нетрудно убедиться, что левая формула в цепочке — это удвоенная сумма Пети, а правая — удвоенная сумма Васи.

Рассмотрим теперь оставшиеся случаи, когда $m = 1$ или $n = 1$. Поскольку в этом случае $mn = \max(m, n)$, число у Васи окажется больше.

Ответ: если $m > 1$ и $n > 1$, то бо́льшее число у Пети, если же $m = 1$ или $n = 1$, то бо́льшее число у Васи.

Задача 3. Деление и остатки

A. Если d делится на 564, то существует такой k, что $k \cdot 564 = d$. Попробуем подобрать: $2 \cdot 564 = 1128$, $3 \cdot 564 = 1692$, $4 \cdot 564 = 2256$. Ни на одно из получившихся чисел 2016 не делится, и дальше перебирать бессмысленно: числа не делятся на числа, бо́льшие себя. Вывод: Настя ошиблась.

B. Вторая подруга ошибается. Например, пусть $a = 7, b = 6, c = 5$. Тогда остаток от деления a на b равен 1, а остаток от деления 1 на снова равен 1. С другой стороны, остаток от деления a на c равен 2.

C. Введём обозначения. Выпишем определение для деления с остатком a на b:

$$a = k \cdot b + p, \quad 0 \leq p < b.$$

То же для деления p на c:

$$p = s \cdot c + q, \quad 0 \leq q < c.$$

Произведём подстановку: $a = k \cdot b + s \cdot c + q$.

Если b делится на c, то существует такое t, что $b = t \cdot c$, то есть

$$a = (k \cdot t + s) \cdot c + q, \quad \text{и по-прежнему } 0 \leq q < c.$$

Прямое утверждение доказано.

Обратное утверждение: равенство верно для любого a только тогда, когда b делится на c. Переформулируем: если b не делится на c, то равенство выполнено не для любого a. Давайте найдём такой a по данным b и c. Возьмём $a = b$, тогда левая часть $(a \bmod b) \bmod c = 0$, а правая —

$$a \bmod c = b \bmod c \neq 0.$$

Отдельно заметим, что даже если b не делится на c, то при некоторых a (например, $a = 0$) равенство из условия всё равно будет выполнено.

Задача 4. Спички и пионеры

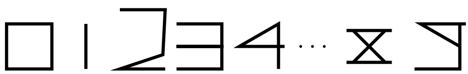
A. Ясно, что величина числа в десятичной записи в первую очередь зависит от количества его разрядов. Поэтому построим самое длинное число из самых «дешёвых» цифр: 1111111. У нас остаётся одна спичка: удлиннить число мы уже не можем, остаётся только увеличивать цифры. Самая большая цифра из трёх спичек — 7, поэтому ответ на задачу — 7111111.

B. Да, вполне возможно, это были Аустри, Бримир, Вестри, Гандальв, Двалин, Ёрд, Ингви, Кили, Лит, Мотсогнир, Нии, Ори, Регин, Судри, Торин, Фили, Хефти, Эйкинскьяльди, Яри и Пётр.

C. Несколько неформальная задача, требовалось любое достаточно разумное рассуждение, например такое.

Самая сложная цифра — 8. Любая другая цифра может быть выложена упрощением её структуры (изъятием и частичным перекладыванием спичек). Чтобы выложить восьмёрку, нужно получить две замкнутые области. Самая простая фигура из прямых с замкнутой областью внутри — треугольник. Поэтому меньше трёх спичек никак не получится.

Однако, из трёх спичек можно составить только один треугольник, поэтому на самом деле требуется минимум 4. Имея 4 спички, выложить все остальные цифры становится просто:



Задача 5. Плохая компания

A. Не более трёх девочек. Докажем от противного: пусть их есть не меньше четырёх — тогда давайте возьмём этих четырёх и добавим к ним ещё кого-нибудь; получится, что среди этих пятерых человек есть как минимум четыре девочки, что противоречит условию.

B. В стране не более 35 миллионов здоровых. Пусть их больше — хотя бы 35 миллионов и один человек. Тогда возьмём именно эту часть населения, и условие будет нарушено: в ней не будет ни одного носителя. Пожалуй, министр ошибается.

C. Если среди p человек есть q девочек, то в компании не более $p - q$ мальчиков. Если их больше, то мы можем заменить девочек в данной выборке на мальчиков, в выборку не вошедших, и нарушить условие. Значит, в компании не менее $N - (p - q)$ девочек.

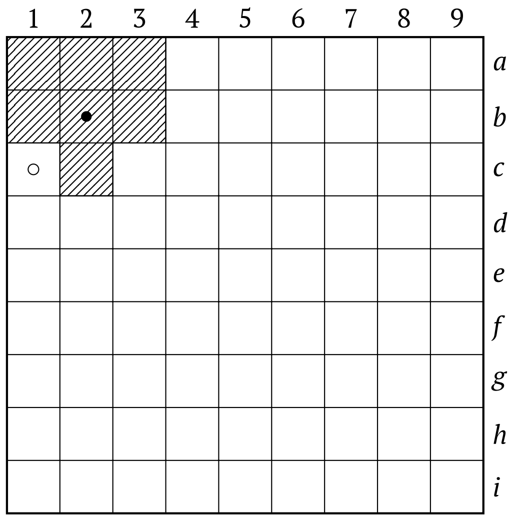
Аналогично рассуждая, можем прийти к выводу, что у нас всего не более $s - t$ не-блондинок, то есть не менее $N - (p - q) - (s - t)$ блондинок.

Задача 6. Эти необычные механизмы

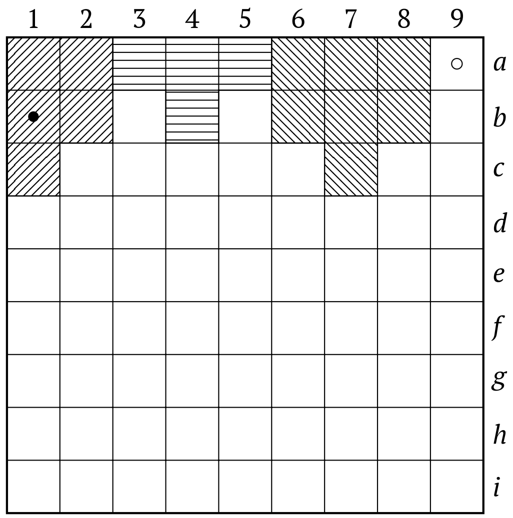
A. Легко заметить, что шестерёнки, находящиеся в зацеплении, всегда вращаются в разных направлениях. В данной задаче имеется пять шестерёнок в цикле — если бы их было 4, можно было бы организовать их вращение так, чтобы соседние вращались в разные стороны. Но так как их нечётное количество, то найдутся две соседних шестерёнки, которые должны будут вращаться в одну сторону.

B. Это невозможно. Рассмотрим левый верхний угол доски (поле $a1$) и подумаем, какое Золото может его бить. Всего возможно четыре позиции: две в первой вертикали, и две во второй.

Если Золото стоит на второй вертикали, на поле $b2$ (или $a2$), тогда поле $c1$ ($b1$, соответственно) окажется не под боем: легко увидеть, что Золото, бьющее это поле, обязательно заденет и поле $c2$ ($b2$, соответственно).



Если же Золото стоит на первой вертикали, на поле *b*1 (или *a*1), то фигуры не «уложатся» вдоль доски: поскольку Золото имеет ширину 3, то оно должно далее стоять на *b*4 (*a*4) — чтобы бить поле *a*3, затем на *b*7 (*a*7) — чтобы бить поле *a*6, и поле *a*9 окажется не под боем.



C. Давайте вычислим: время на проезд n участков без остановки — это время на проезд первого участка со скоростью 54 км/ч, второго — со скоростью 48 км/ч, третьего — со скоростью 42 км/ч, и т.д. плюс время на ремонт колёс. Или, формулой (время выражено в минутах):

$$T(n) = \left(\frac{12}{54} + \frac{12}{48} + \dots + \frac{12}{60 - 6 \cdot n}\right) \cdot 60 + 10 + 3 \cdot n$$

Средняя скорость (в километрах в минуту), соответственно, будет равна расстоянию, поделённому на время, т.е. $\frac{12 \cdot n}{T(n)}$.

Теперь с конкретными цифрами:

Участки	Время на проезд	Средняя скорость
1	$\frac{12}{54} \cdot 60 + 13 = 26\frac{1}{3}$	$\frac{36}{79} \approx 0.456$
2	$\left(\frac{12}{54} + \frac{12}{48}\right) \cdot 60 + 16 = 44\frac{1}{3}$	$\frac{72}{133} \approx 0.541$
3	$\left(\frac{12}{54} + \frac{12}{48} + \frac{12}{42}\right) \cdot 60 + 19 = 64\frac{10}{21}$	$\frac{378}{677} \approx 0.558$
4	$\left(\frac{12}{54} + \frac{12}{48} + \frac{12}{42} + \frac{12}{36}\right) \cdot 60 + 22 = 87\frac{10}{21}$	$\frac{1008}{1837} \approx 0.549$

Итого, наиболее выгодная тактика — проезжать три участка, после чего заменять все потерянные колёса.

Задачи 6 класса

Задача 1. Падающие стулья

A. Смотреть задачу 1А варианта 5 класса.

B. Потребуется $n + m \cdot 3 - 2$ подпила минимум.

Предположим, что данного количества может не хватить, то есть существует схема подпила, при которой опасным будет только $m - 1$ стул. Стул безопасен, если у него не более 1 подпила, то есть остальные $n - m + 1$ стульев имеют $n - m + 1$ подпилов в сумме максимум. Остаётся $n + m \cdot 3 - 2 - n + m - 1 = m \cdot 4 - 3$ подпилов на $m - 1$ стул, то есть какой-то стул будет иметь 5 подпилов, что невозможно.

Однако, если неудачно подпилить $n + m \cdot 3 - 3$ ножек (у всех стульев по одной и у выбранного $m - 1$ ещё три оставшихся), то такого количества подпилов может уже не хватить.

C. Игра заканчивается тогда, когда у одного из стульев оказываются перепиленными хотя бы две ножки. Иными словами, все «интересные» ходы происходят, когда у каждого из стульев перепилено не более одной ножки, и поэтому количество «интересных» ходов не превосходит n.

Все игры делятся на три группы:

1. Игры, где $a_1 = a_2 = 0$.

Любая такая игра будет бесконечной, потому что у каждого из игроков есть возможность «пропустить ход», не перепилив ни одной ножки. Осталось посчитать количество таких игр. Число m может меняться в промежутке от 1 до $n-1$, поэтому есть $n-1$ вариант его выбрать. После этого можно дать либо Пете, либо Васе возможность перепиливать ровно m ножек (против $m-1$ у его противника). Всего игр получилось

$$2 \cdot (n-1).$$

2. Игры, где ровно одно из чисел a_1, a_2 равно нулю.

В любой такой игре побеждает игрок, у которого есть возможность «пропустить ход», ничего не перепиливая — это может быть либо Петя, либо Вася, в зависимости от установленных ими правил.

Посчитаем количество таких игр. При $m = 1$ возможны две игры: Петя ничего не перепиливает, Вася перепиливает ровно одну ножку, либо наоборот. Для каждого m от 2 до $n-1$ возможно 4 игры:

П.: от 0 до m В.: от 1 до $m-1$	П.: от 0 до $m-1$ В.: от 1 до m
П.: от 1 до m В.: от 0 до $m-1$	П.: от 1 до $m-1$ В.: от 0 до m

Всего игр получилось

$$4 \cdot (n-2) + 2.$$

2. Игры, где $a_1 = a_2 = 1$.

Этот случай интересен тем, что он наименее тривиальный (на каждом ходу всегда что-то происходит) и при этом присутствует явная асимметрия в возможностях игроков: одному из них доступна одна лишняя возможность — перепилить m ножек.

Докажем, что именно этот игрок всегда будет выходить победителем.

1) Петя перепиливает от 1 до m ножек, Вася — от 1 до $m-1$ ножек.

Если n не делится на m, побеждает Петя: первым ходом он перепиливает по одной ножке у $n \bmod m$ стульев, затем, если Вася перепиливает k ножек, отвечает ему перепиливанием $m-k$

ножек. Таким образом, все n стульев исчерпаются после хода Пети.

Если n не делится на $m+1$, побеждает, опять же, Петя, с точно такой же стратегией (отвечать Васе перепиливанием $m+1-k$ ножек).

Если n делится и на $m+1$, и на m, то первым ходом Петя должен перепилить одну ножку у одного стула. Тогда после хода Васи останется от $n-2$ до $n-m$ стульев с неподпиленными ножками — это число, очевидно, положительно и не делится на $m+1$, поэтому, начиная с этого момента, Петя может действовать согласно стратегии, описанной в предыдущем абзаце.

2) Петя перепиливает от 1 до $m-1$ ножек, Вася — от 1 до m ножек.

Если n делится на m или на $m+1$, выигрышная стратегия для Васи очевидна: оставлять после каждой пары ходов «Петя, Вася» число, по-прежнему кратное соответственно m или $m+1$.

Если n не делится ни на m, ни на $m+1$, то после хода Пети Вася может сделать число стульев, оставшихся без неподпиленных ножек, кратным одному из этих чисел (ему доступны все возможные величины остатков натуральных чисел по модулям m и $m+1$) — а после этого продолжать согласно стратегии, описанной в предыдущем абзаце.

Посчитаем количество игр такого вида: для каждого m в пределах от 2 до $n-1$ существует две игры (различающиеся тем, кто из игроков «одарен» ходом в m ножек). Отсюда ответ —

$$2 \cdot (n-2).$$

Если сложить ответы, полученные нами в разных случаях, получится $8n-12$ игр.

Задача 2. Детский сад

A. 10 детей рисуют 10 рисунков за 20 минут — то есть каждый из детей рисует один рисунок в течении 20 минут. 50 детей будут, соответственно, рисовать 50 рисунков за те же 20 минут. d детей будут рисовать r рисунков за $20 \cdot \lceil r \div d \rceil$ минут: распределим рисунки более или менее поровну между детьми — и далее мы знаем, что один ребёнок рисует один рисунок за 20 минут.

B. Площадь растёт быстрее у Вовы: например, потому, что бо́льшую длину имеет внешняя часть обруча, а ширина полосы прилепляемого пластилина та же; значит, расход материала с внешней части будет выше.

Тот же результат можно поулчить с помощью формул для площади круговой полосы, сравнив

$$S_1 = \pi\left((r_1+1)^2 - r_1^2\right) \text{ и } S_2 = \pi\left(r_2^2 - (r_2-1)^2\right).$$

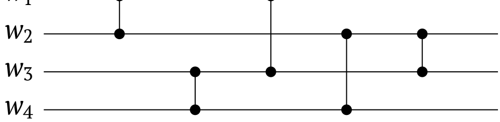
C. Всего возможно $4! = 24$ варианта расположения детей по весу (мы должны переставить детей в правильном порядке, и возможны все перестановки 4 элементов), поэтому будет требоваться не менее пяти взвешиваний (4 взвешивания дадут только $2^4 = 16$ вариантов ответа, что недостаточно для выбора перестановки).

Покажем, что пяти взвешиваний достаточно.

Без уменьшения общности можем говорить не о детях, а о значениях их веса. Пусть задан список весов (w_1, w_2, w_3, w_4). Будем стремиться к тому, чтобы значения в нём были записаны по возрастанию веса, чтобы если выполнено $i < j$, то выполнено $w_i < w_j$

Рассмотрим операцию *сравнения и обмена* (p, q): сравним w_p и w_q, и если они стоят в списке в неправильном порядке (то есть $p < q$, но $w_p > w_q$) — поменяем местами. Тогда требуемая перестановка будет получена, если будут выполнены следующие операции сравнения и обмена: $(1,2)$, $(3,4)$, $(1,3)$, $(2,4)$, $(2,3)$.

Для наглядности изобразим эти сравнения и обмены в виде *сортировочной сети*: каждая горизонтальная линия соответствует элементу списка, вертикальные соединения — операции сравнения и обмена.



Продемонстрируем работу данных сравнений на примере: пусть у детей был вес в килограммах $(20, 25, 15, 10)$. Тогда:

1. сравнение и обмен $(1,2)$ не изменит список весов;
2. сравнив $(3,4)$, мы получим $(20, 25, 10, 15)$;

3. сравнение $(1, 3)$ даст $(10, 25, 20, 15)$;
4. сравнение $(2, 4)$ даст $(10, 15, 20, 25)$;
5. сравнение $(2, 3)$ оставит список без изменений.

Почему это работает? После первых двух сравнений $w_1 < w_2$ и $w_3 < w_4$. Затем мы на третьем шагу выбираем общий минимум (сравнивая минимумы пар), на четвёртом — общий максимум. И на пятом шагу правильно расставляем два оставшихся средних элемента.

Задача 3. Числа, выписанные на доску

A. Число делится на 72 тогда и только тогда, когда делится на 8 и на 9. Поскольку $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$, любое число, составленное из этих цифр, делится на 9. Чтобы число делилось на 8, требуется, чтобы последние его три цифры как число делились на 8.

Чтобы число было минимальным, в его начале должны быть минимально возможные цифры. К сожалению, мы не можем ставить в первый разряд 0 (запись чисел с ведущими нулями не очень грамотная, а Коля — мальчик очень аккуратный), поэтому в первый разряд поставим следующую возможную цифру — 1. Остальные же цифры отсортируем по возрастанию. Мы получим

$$1001223344556677889 9$$

Это число нечётное, поэтому не делится на 8. Надо найти ближайшее к нему большее его, которое бы делилось.

По признаку делимости число $\overline{abc}$ делится на 8, если $4a + 2b + c$ делится на 8. Нетрудно видеть, что двух цифр 8 и нечётных 7 и 9 недостаточно для делимости: поскольку неизбежно $c = 8$, то и $4a+2b \vdots 8$, значит, $2a+b \vdots 4$, то есть $b \vdots 2$ и $(a+b \div 2) \vdots 2$. Поэтому, если $b = c = 8$, то $a \vdots 2$. Поэтому нам надо добавить ещё одну чётную цифру к рассмотрению, 6.

Какие числа, делящиеся на 8, можно собрать из одной шестёрки и цифр 8,8,9,9? Рассуждая аналогично предыдущему абзацу, построим таблицу:

Позиция 6	Последние 3 цифры	Всё число
$a = 6$	688	1001223344556779 9688
$b = 6$	968	100122334455677899 68
$c = 6$	896	100122334455677898 96

Из перечисленных вариантов выберем минимальный, это и будет ответ на задачу:

$$1001223344556778 9896$$

B. Вместо чисел a и b, сумма которых равна $a + b$, на доске может оказаться одно из чисел $a - 2b$ или $b - 2a$. Заметим, что в первом случае сумма чисел на доске уменьшится на $3b$, а во втором случае — на $3a$. Это значит, что остаток от деления на 3 всей суммы чисел на доске остаётся неизменным.

Можно заключить, что если на доске получился ноль, то изначальная сумма чисел делилась на 3. Однако

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 121 = \frac{121 \cdot 122}{2} \quad -$$

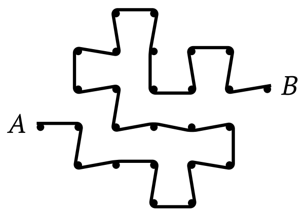
на три не делится. Поэтому ноль не мог получиться.

C. Пусть заданы числа $a_1, \ldots, a_n$. Рассмотрим остатки от деления суммы начальных отрезков этих чисел на n: $a_1 \bmod n$, $(a_1 + a_2) \bmod n$, $(a_1 + a_2 + a_3) \bmod n$ и т.д. Всего есть n таких отрезков, поэтому, возможно, все остатки будут различны. Если это так, тогда среди них обязательно будет остаток 0.

В противном случае обязательно какой-то из остатков повторится два раза: $(a_1 + \cdots + a_k) \bmod n = (a_1 + \cdots + a_l) \bmod n$, $k < l$. Тогда неизбежно $(a_{k+1} + \cdots + a_l) \bmod n = 0$.

Задача 4. Линии и сетки

A. Нитку можно натянуть, например, так:

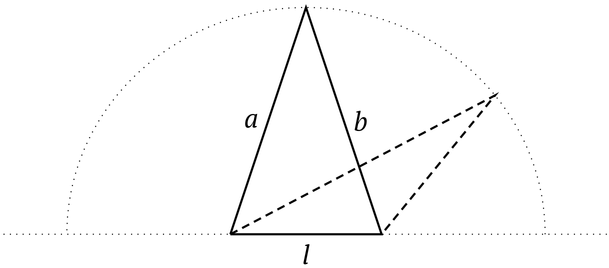


B. Легко заметить, что любая прямая, проведённая через прямоугольник, пересечёт не более $a-1$ вертикальных внутренних линий сетки и не более $b-1$ горизонтальных линий.

Представим, что мы идём вдоль прямой слева направо. Сперва мы попадаем в какую-то из клеток прямоугольника через его внешнюю границу, и каждое следующее горизонтальное или вертикальное пересечение даёт нам одну новую клетку на нашем пути — мы переходим в неё либо через правую сторону, либо через верхнюю/нижнюю. Если мы не пересекали углы клеток, то всего получится $1+(a-1)+(b-1)$ клеток на нашем пути: одна начальная, $a-1$ клеток при пересечении правой стороны и $b-1$ при пересечении верхней/нижней стороны. Если же мы пересекаем угол, количество клеток на пути будет ещё меньше — мы одновременно проходим и через горизонтальную и через вертикальную линию, без промежуточной клетки.

Таким образом, ответ — нет. Впрочем, если же мы ослабим условие и будем считать, что линия проходит по клетке если она даже только задевает границу клетки — то да, достаточно хотя бы раз задеть пересечение линий сетки (мы тогда сможем заявить, что побывали во всех четырёх клетках, соседних с пересечением).

C. Площадь треугольника — это полупроизведение основания на высоту. Основание фиксировано, а вот высота зависит от двух других сторон a и b. Начнём от ситуации, когда $a=b=\frac{P-l}{2}$ — то есть треугольник равнобедренный. Если мы будем увеличивать, например, a, то b неизбежно придётся уменьшить, чтобы сохранить периметр. Соответственно, треугольник накренится и сожмётся по высоте, площадь его уменьшится. Значит, наибольшая площадь будет в случае равнобедренного треугольника.



Теперь выразим это же более формально. Посчитаем площадь треугольника по формуле Герона. Для этого введём обозначение для полупериметра треугольника $p = \frac{P}{2}$. Для подсчёта нам требуется знать длину всех сторон, поэтому введём длину второй стороны a как параметр (третью сторону мы получим как $P - l - a$):

$$S(a) = \sqrt{p \cdot (p - l) \cdot (p - a) \cdot (l + a - p)}$$

Формула монотонно зависит от всех сомножителей подкоренного произведения, а при изменении a меняются только $p - a$ и $l + a - p$, поэтому вместо поиска точки максимума всей функции мы можем искать точку максимума только у $(p - a) \cdot (l + a - p)$, обозначим это выражение за $g(a)$.

Раскроем скобки: $g(a) = -a^2 + (2p - l)a + lp - p^2$. Это квадратичная парабола, рога параболы направлены вниз, и потому максимум её, как известно, достигается в точке

$$a = -\frac{(2p - l)}{2 \cdot (-1)} = p - \frac{l}{2}$$

Осталось посчитать ответ (шаги по преобразованию формулы опустим):

$$S = \sqrt{\frac{P \cdot (P - 2l) \cdot l^2}{16}}$$

Задача 5. Разделение на подмножества

A. Могут, если в компаниях разное количество мальчиков: допустим, в первой компании десять мальчиков с 1 рублём, а во второй — пять мальчиков с 1 рублём.

B. Будем обозначать чёрный отрезок цифрой 1, а белый — 0, и пусть a_n — цвет отрезка прямой, содержащей точку n.

Покажем от противного, что Петя не сможет покрасить отрезки желаемым образом. Пусть ему это удалось. Заметим тогда, что при любом n выполнено

$$a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} = 2,$$
$$a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + a_{n+4} = 2.$$

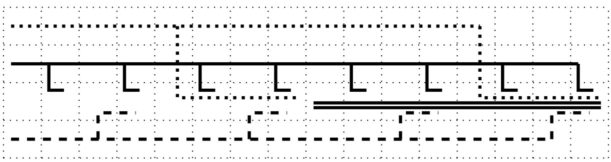
Значит, $a_n = a_{n+4}$.

Возьмём такое n, что $a_{n-1} = 0$ и $a_n = 1$ (такое n существует, поскольку иначе начиная с некоторого места все отрезки покрашены одинаково, что невозможно). По этим данным однозначно вытекает, что $a_{n+3} = 0$. А вот a_{n+1} может быть разным. Рассмотрим два случая:

1. $a_{n+1} = 1$. Тогда $a_{n+2} = 0$ и $a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+11} = 1 + 0 + 0 + 1 + 1 + 0 + 0 + 1 + 1 + 0 + 0 = 5$, противоречие.
2. $a_{n+1} = 0$. Тогда $a_{n+2} = 1$ и $a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+11} = 0 + 1 + 0 + 1 + 0 + 1 + 0 + 1 + 0 + 1 + 0 = 5$, снова противоречие.

C. Рассмотрим некоторую клетку, и рассмотрим вопрос «водятся ли в клетке муравьи типа T». Всего возможно четыре вопроса и ответы на вопрос не зависят друг от друга: мы можем ответить «да, да, нет, нет», можем «нет, нет, да, нет», и вообще, любая комбинация возможна. Итого, получается $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ вариантов.

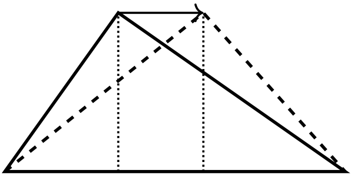
Пример расселения муравьёв, в котором реализуются все комбинации, приведён ниже. Каждый тип линии соответствует какому-то типу муравьёв; если линия проходит через клетку, то данная клетка принадлежит ареалу.



Задача 6. Лыжная секция

A. Зададим себе уточняющий вопрос: в какой день в секции станет ровно 12 участников? На второй день рано: мы можем получить максимально $1 + 5 + 5 = 11$ участников, если каждый день приходит по пятеро. На третий уже поздно: минимально получится $1 + 4 + 4 + 4 = 13$ участников. Поэтому ровно 12 участников в секции не могло быть ни в какой день.

B. Рассмотрим треугольник, образованный отрезками, соединяющими текущее положение лыжников.



При соблюдении правил перемещения его площадь всегда постоянна: если принять отрезок, соединяющий двух стоящих лыжников, за основание треугольника, то перемещения третьего лыжника не меняют его высоту. Посчитаем площадь итогового треугольника (нетрудно видеть, что он прямоугольный):

$$\frac{90 \cdot 120}{2}$$

Однако, площадь исходного треугольника явно меньше:

$$\frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 100\right) \cdot 100}{2} < \frac{(0.9 \cdot 100) \cdot 100}{2} < \frac{90 \cdot 120}{2}$$

Значит, правила перемещения в какой-то момент были нарушены.

C. Возможны два сценария, в результате которых лыжник возвращается на своё место: «локальный» (если лыжник №1 обогнал лыжника №2, а потом лыжник №2 обогнал лыжника №1) и «глобальный» (лыжник №1 обогнал всех и вернулся на своё место, имея круг в запасе).

При «локальном» сценарии количество обгонов всегда чётное (всех, кого вы обогнали, вы должны пропустить вперёд). При «глобальном» сценарии, когда лыжник обгоняет своих остальных 563 товарищей, возможно нечётное количество обгонов. Если же в гонке участвует 563 лыжника, то оба сценария предполагают чётное количество обгонов.

Более формально данный результат можно доказать, переведя его на язык перестановок. Будем записывать положение лыжников как n-элементную перестановку начального положения. При этом, поскольку гонка кольцевая и положение лыжников можно начать отсчитывать с любого места, мы отождествляем между собой циклические сдвиги перестановок:

$$\text{если } \sigma(x) = ((\tau(x) + k) \bmod n) + 1, \text{ то } \sigma \equiv \tau$$

Если $n = 564$, то циклический сдвиг позволяет сделать из чётной перестановки нечётную. Однако, если $n = 563$, то сдвиг всегда сохраняет чётность. А раз к тому же исходная и целевая перестановки — чётные, то и количество транспозиций неизбежно будет чётным.

Задача 7. В поисках чисел

A. Первый ребус. Справа число РОМАШКА — в нём 7 знаков, оно не меньше 1000000. Слева, в произведении, 6 различных цифр, одна цифра повторяется два раза, значит, максимальное значение этого выражения $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 544320$. Данный ребус не имеет решений.

Второй ребус. Заметим, что УРАУРА $= 1001 \cdot$ УРА, однако $1001 = 11 \cdot 91$. Число 11 простое, но в левой части равенства все числа — одноразрядные, поэтому левая часть на 11 не делится. Значит, и этот ребус не имеет решений.

B. Поскольку групп всего 4, а чисел — 6, то либо найдётся группа с тремя числами, либо две группы будут содержать по два числа. В первом случае заметим, что произведение трёх минимальных чисел из диапазона от 3 до 8 равно 60. Во втором случае выберем ту группу, в которой нет числа 3: произведение её элементов как минимум $4 \cdot 5 = 20$.

C. Рассмотрим минимальное простое число, бóльшее n, пусть это p. Понятно, что $n!$ не делится на p и тем более не делится на $2p$. Пусть существует составное число t, такое, что $n! \vdots t$.

Согласно постулату Бертрана, между n и $2n$ есть хотя бы одно простое число, поэтому $2p < 4n$. Отсюда, $t < 4n$.

Поскольку p — минимальное простое, большее n, то t может быть целиком представлено в виде произведения сомножителей $n!$:

$$t = 2^{a_2} \cdot \ldots n^{a_n}$$

Заметим, что наиболее выгодный вариант — иметь в качестве t степень некоторого простого числа: $t = q^{a_q}$. Ведь если $n!$ не делится на t, то значит, что один из простых сомножителей t имеет слишком высокую степень. Давайте оставим только его, это только сделает t меньше, а делимости не добавит.

В этот момент мы можем остановиться и предложить следующий алгоритм поиска числа: рассмотрим простые числа от 1 до n, и найдём минимальную степень s_q для каждого, такую, что k^{s_q} не делит $n!$. Также найдём минимальное простое число p, такое, что $p > n$. После чего найдём среди $2p$ и полученных чисел q^{s_q} минимальное — это и будет ответ.

Задача 8. Числа, цифры и приключения

A. Стоимость спички в листочках при использовании в процессе оплаты некоторой цифры — это значение данной цифры, поделённое на количество спичек в ней. Давайте посчитаем эти значения:

$$\frac{0}{6}, \frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{4}, \frac{5}{5}, \frac{6}{6}, \frac{7}{3}, \frac{8}{7}, \frac{9}{6}$$

Очевидно, самая выгодная цифра — 0 (можно получить спички бесплатно), однако, если отбросить данный вариант как жульнический, то стоит остановиться на цифре 2, которой соответствует самое маленькое ненулевое число из ряда выше.

B. $953 = 32 \cdot 29 + 25$. То есть, за один проход по экватору гусеница сделает 32 оборота и ещё сдвинется на 25 секций в ходе 33 оборота. Исходя из этого, номер секции на линии старта после k оборотов можно выразить как $(k \cdot 25) \bmod 29$. Поскольку 29 и 25 взаимно просты, то за 29 оборотов каждая из секций по разу побывает на линии старта.

То же касается и свежеустановленной секции: она также будет оказываться на линии старта раз в 29 оборотов.

C. Этот способ получения простых не работает уже с 6 простым числом: $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 + 1 = 30031 = 59 \cdot 509$.

Задачи 7 класса

Задача 1. Деление и остатки

Смотреть задачу 3 варианта 5 класса.

Задача 2. Пятница

A. Перепишем условие формально: Если x — количество молока в миллилитрах в обычной кружке, то за первый раз мама разлила $4 \cdot x + 1.2 \cdot x$ миллилитров — и это 30% от двух литров. Давайте тогда составим уравнение:

$$4 \cdot x + 1.2 \cdot x = 0.3 \cdot 2000$$

Легко видеть, что $x = \frac{600}{5.2} = 115.38\ldots$, и искомая 20% разница составила чуть больше 23 миллилитров.

B. Представим, что Исинбай бежит с обычной человеческой скоростью v, за ним бежит тигр в q раз быстрее, со скоростью qv. За t секунд Исинбай пробежит расстояние vt, тигр — qvt, поэтому Исинбай никогда не должен подходить к тигру ближе, чем на $(q-1)vt$ метров, иначе тигр его успеет догнать за один приём, не отдыхая. Обычный человек бегает короткую дистанцию со скоростью примерно 30 км/ч, или $8.(3)$ м/с, что даёт оценку $x = 8.(3) \cdot (q-1)t$ метров для безопасного расстояния.

Отрицательный x означает, что тигр бегает медленнее человека, и потому к нему можно безопасно подходить практически вплотную.

C. Для задания каждой расстановки мы должны выбрать пять пятниц для Дани и три для Кости.

У Дани всего есть $C_7^5 = 21$ вариант иметь пять пятниц на неделе. В каждом из вариантов для Кости нужно выбрать из пяти Даниных пятниц две ($C_5^2 = 10$), и из двух не-пятниц одну ($C_2^1 = 2$). Итого, всего есть $21 \cdot 10 \cdot 2 = 420$ расстановок пятниц.

Задача 3. Эксперименты с клавиатурой

A. Для набора одиночного символа А. должен нажать несколько раз клавишу с символом, и, после этого, несколько раз `Backspace`. В итоге на экране должен остаться один символ: $1 = x \cdot 5 - y \cdot 8$. Из данного уравнения видно, что $y = \frac{x \cdot 5 - 1}{8}$.

Поскольку y монотонно возрастает с ростом x, нам достаточно найти такой минимальный положительный целый x, что y будет целым и неотрицательным. Если $x = 1$, то $y = 0.5$, не подходит (мы не можем нажать клавишу наполовину). $x = 2$ даёт $y = 1.125$, $x = 3$ даёт

$y = 1.75$, $x = 4$ даёт $y = 2.375$, и $x = 5$ даёт $y = 3$. То есть, для набора одного символа А. нужно 8 нажатий на клавиатуре: пять раз нажать символ и три раза — `Backspace`.

Аналогично, для Б. $y = \frac{x \cdot 7 - 1}{4}$, и минимальный подходящий x равен 3, при этом Б. для набора символа требуется 7 нажатий на клавиатуре.

Поэтому обычно Б. будет печатать несколько быстрее, чем А., хотя в особых случаях (скажем, в случае текста, в котором каждая буква повторяется по пппппяяяяяттттттььььь раз подряд) преимущество будет у А.

B. `АБВГДЕЖЗ` — эту строчку А. печатает за 2 секунды (8 букв и два раза `Caps Lock`), Б. же печатает её за 4 секунды.

Обратный вариант невозможен: если А. будет даже дважды нажимать `Caps Lock` для ввода каждой заглавной буквы, его скорость ввода будет две буквы за 1.2 секунды (6 нажатий на 2 буквы). Б., в свою очередь, печатает две буквы за 1 секунду. То есть разность в скорости печати — 1.2 раза в худшем случае, что значительно меньше требуемых 2 раз.

C. В данных условиях всё, что мы можем — нажать четыре клавиши в каком-то порядке за секунду, после этих нажатий на экране появится буква. Всего возможно $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ комбинаций, что даёт возможность выбрать одну из 16 букв за одну секунду. Однако, в русском 33 буквы, значит, какие-то из букв мы ввести не сможем. Если же какие-то 17 букв мы не будем различать (объединим в одну) — скажем, обозначим все буквы, начиная с `О`, как `Щ`, то мы как раз получим 16-буквенный алфавит: `АБВГДЕЁЖЗИЙКЛМНЩ`. Текст, кщнещнщ, после такого изменения алщавища бщдещ выглядеть нещбщщнщ.

Задача 4. Факториалы

A. 33!, очевидно, делится на 9. Значит, сумма всех цифр числа должна делиться на 9. Если мы просуммируем все цифры числа, получим $139 + \square$. При этом, должны быть выполнены два условия:

$$(139 + \square) \bmod 9 = 0 \text{ и } \square \leq 9$$

Перебрав все 10 вариантов для $\square$, можем убедиться, что единственный подходящий из них — 8.

B. Воспользуемся двумя признаками делимости: на 9 и на 11 (на оба эти числа делится $n!$, если $n \geq 12$). В большинстве случаев признака делимости на 9 хватит и мы можем восстановить стёртую цифру аналогично пункту A данной задачи. Однако, если сумма известных цифр числа делится на 9, то то возможны два варианта для стёртой цифры: 0 и 9.

В этом случае воспользуемся признаком делимости на 11: просуммируем значения, стоящие на чётных местах, и значения, стоящие на нечётных местах. Если разница между суммами и так делится на 11, была стёрта цифра 0 (его добавление на место не поменяет делимости). В противном случае была стёрта цифра 9.

C. Перегруппируем исходное выражение:

$$1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot \ldots \cdot n! = (1! \cdot 1! \cdot 2) \cdot (3! \cdot 3! \cdot 4) \cdot \ldots \cdot ((n-1)! \cdot (n-1)! \cdot n)$$

И ещё раз:

$$\underbrace{1!^2 \cdot 3!^2 \cdot \ldots \cdot (n-1)!^2}_{\text{квадрат целого}} \cdot \underbrace{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n}_{\text{s}}$$

Рассмотрим внимательнее подвыражение s:

$$s = 2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (n-2) \cdot n = 2^{\frac{n}{2}} \cdot \left(\frac{n}{2}\right)!$$

Поскольку n кратно четырём (существует t, что $n = 4 \cdot t$), то $2^{\frac{n}{2}} = (2^t)^2$.

Значит, нужно вычеркнуть факториал $\frac{n}{2}$, это единственный сомножитель, не являющийся полным квадратом.

Задача 5. Ох уж эти школьницы!

A. Разложим 22887 на сомножители (попробуем понять, где Арина поставила знаки умножения). Число делится на 9 (т.к. сумма цифр 27), и частное равно 2543 — числу, выглядящему, как четыре оценки, записанные подряд.

Более тщательная проверка покажет, что это действительно простое число (нам надо проверять его делимость на простые числа, не превосходящие 53, состоящие только из цифр 1,2,3,4 и 5, таких немного), то есть у Арины получилась формула $2543 \cdot 3 \cdot 3$ (с точностью до перестановки сомножителей).

Теперь осталось посчитать средний балл: $3\frac{1}{3}$.

B. Пусть Ольга придумала числа p и q, и пусть для определённости $p > q$. Введём новую переменную $t = p - q$. Тогда $p^2 - q^2 = (q+t)^2 - q^2 = t^2 + 2qt = t(t+2q)$.

Из условия мы знаем, что $p^2 - q^2 = 3476$, разложим на множители: $3476 = 2 \cdot 2 \cdot 11 \cdot 79$. Нужно теперь эти множители распределить между t и $t + 2q$.

Заметим, что t не может быть максимальным сомножителем. Кроме того, поскольку t обязательно должен быть чётным (иначе всё произведение нечётно), то и выражение $t + 2q$ тоже должно быть чётным. Эти требования дают нам единственное решение: $t = 22$ и $t + 2q = 2 \cdot 79$, отсюда $q = 68$ и $p = 90$.

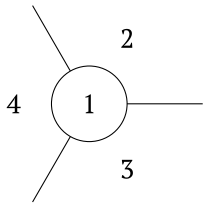
C. Вычислим разность двух чисел пары:

$$\overline{abcde} - \overline{bcdea} = 10000 \cdot a + \overline{bcde} - 10 \cdot \overline{bcde} - a = 9999 \cdot a - 9 \cdot \overline{bcde}$$

Поскольку $9999 \bmod 41 = 36$, то мы легко подберём числа, при которых правило нарушается. Например, возьмём $a = b = 1, c = d = e = 0$. Тогда $11000 \bmod 41 = 12$ и $10001 \bmod 41 = 38$.

Задача 6. Очень умные муравьи

A. Муравьи могли бы разделить плоскость так:

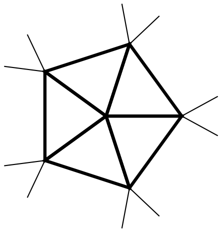


B. Ответ на задачу зависит от того, какую точку мы считаем началом восхождения. Давайте считать, что муравьи совершают восхождение из внутреннего объёма коробки, из самого её центра. Тогда расстояние от центра до середины стенки равно 0.5 метра, расстояние от середины стенки до угла коробки по теореме Пифагора равно $\sqrt{0.5^2 + 0.5^2}$, и расстояние от центра коробки до угла по той же теореме

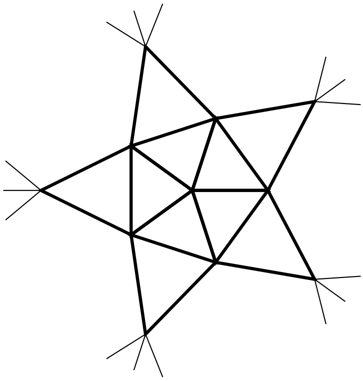
$$\sqrt{(0.5^2 + 0.5^2) + 0.5^2} \approx 0.866$$

Поскольку муравьи в 1000 раз короче людей, нам нужно увеличить все размеры в 1000 раз — и мы получим высоту холма чуть больше 866 метров.

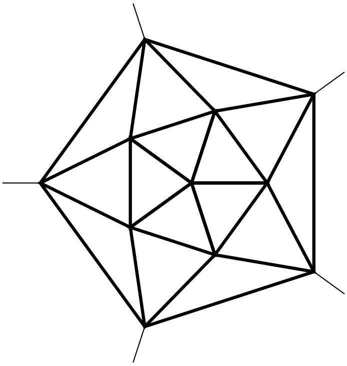
C. Рассмотрим какую-нибудь вершину сетки. Из неё выходит пять отрезков, причём эти отрезки — стороны пяти треугольников, касающихся данной вершины.



Отрезки, выходящие из вершин, соединённых стороной треугольника, обязаны соединяться — иначе к треугольнику будет прилегать не другой треугольник, а более сложная фигура.



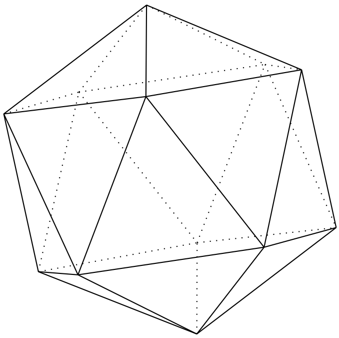
В свою очередь, отрезки, выходящие из вершин, соединённых общей двузвенной ломаной, должны совпадать — иначе в сетке появятся многоугольники с числом вершин, большим трёх.



И снова, все отрезки, выходящие из вершин, соединённых стороной, должны соединяться. Заметим, что точка соединения — общая для 1 и 2 отрезка, 2 и 3 отрезка, и т.п., поэтому она общая для всех отрезков. Из неё будет выходить 5 отрезков, значит, мы не можем больше добавить ни одной вершины к нашей сетке.

Всё шаги по построению сетки были вынужденными, и у нас получилась конечная сетка. А поскольку муравьёв счётное количество, им нужно счётное количество треугольников. Поэтому ответ на вопрос задачи отрицательный.

Дополнительно заметим, что структура из треугольников, которая получилась — это структура икосаэдра, одного из пяти правильных многогранников.



Задача 7. Несправедливый турнир

А. Нет, поскольку самый слабый участник всегда проигрывает свою встречу. Значит, он всегда будет оказываться в худшей группе, с кем бы ни играл. В итоге, он окажется внизу таблицы.

B. Введём определение: если N. состязается сильнее некоторого другого участника, то мы назовём того участника «слабым», если слабее — назовём его «сильным». Исходно имеется не более $2^{t-1}-2$ сильных участников.

Чтобы оказаться в финале с аутсайдером, N. должен проиграть все встречи, кроме последней. Значит, в первой встрече участник N. должен встречаться с сильным. Вместе с N. в группе проигравших окажется не более $\frac{2^{t-1}-2}{2}-1=2^{t-2}-2$ сильных участников: сильный может проиграть только сильному, всего $\frac{2^{t-1}-2}{2}$ пар, но одну из пар сильных мы обязаны разорвать, чтобы N. проиграл.

Повторив рассуждение можно вывести общую формулу: после раунда k в группе проигравших всего может остаться не более $2^{t-k-1}-2$ сильных. Значит, после раунда $t-2$ сильных не останется, и N. избежит встречи с аутсайдером, выиграв в раунде $t-1$.

C. Введём определения аналогично предыдущему пункту: если N. состязается сильнее некоторого другого участника, то мы назовём того участника «слабым», если слабее — назовём его «сильным». Исходно есть не менее 2^{t-1} сильных.

Пусть в первом туре N. соревнуется с сильным, и все остальные сильные соревнуются в паре с другими сильными. Тогда после раунда в группе проигравших останется не менее $2^{t-2}-1$ сильных. Во втором раунде мы снова составим пару N. с сильным, добавим не меньше $\frac{2^{t-2}-2}{2}=2^{t-3}-1$ пар сильных, и после второго раунда в группе проигравших останется N и не меньше $2^{t-3}-1$ сильных. Повторив это построение пар k раз, мы получим, что после k раунда в группе проигравших останется N. и не меньше $2^{t-k-1}-1$ сильных.

Итак, N. после $t-1$ раунда окажется в проигравшей все раунды группе. А вторым участником этой группы будет самый слабый участник соревнования: ведь все остальные участники, кроме этих двоих, смогли выиграть хоть у кого-то.

Для точности заметим, что условие неявно предполагает, что аутсайдер и N. — это разные участники. Если же такого требования нет, то мы сможем утверждать только об участии N. в состязании за последнее и предпоследнее места.

Задача 8. Дело-то житейское

A. См. задачу **1B** из варианта 5 класса.

B. По принципу Дирихле нельзя рассадить n кроликов в $n-1$ клетку так, чтобы в каждой клетке оказалось ровно по кролику. Мы будем раскладывать по $n-1$ ящикам n сайтов, и в ящик номер k мы будем класть сайт, у которого k ссылок на другие сайты. Принцип Дирихле докажет требуемое.

C. Заметим, что максимально в строке имеется 4 промежутка между закрашенными цифрами (промежуток — число — промежуток — число — промежуток — число — промежуток). С другой стороны, минимально в строке $9+19\cdot 2=47$ символов и максимально может быть закрашено $3\cdot 2=6$ цифр. То есть, минимальная длина промежутка $41\div 4>10$ символов, значит, одноразрядное число может быть закрашено только если это число 1.

Пусть же число 1 не закрашено. Тогда заметим, что длина промежутка до первой закрашенной цифры — нечётна $(9+x\cdot 2)$, но длина промежутка между первым и вторым закрашенным числом — чётна.

Значит, закраска возможна только если число 1 закрашено. Для завершённости приведём корректный пример такой закраски:

$$\underline{1}23456789101112\underline{13}14151617181920\underline{21}22232425262728\underline{29}$$

Задача 9. День, когда Стёпа всё испортил

A. Стёпа, например, мог бы попробовать посчитать в двоичной системе: согнутый палец означает 0, распрямлённый означает 1. Всего десять пальцев, поэтому самое большое число, которое можно показать так, равно $2^{10}-1=1023$.

Хотя, конечно, данный совет — это только самое начало дела. Показ некоторых комбинаций (скажем, числа 0101001010_2 — распрямлены безымянный и указательный пальцы на обеих руках) может потребовать тренировки.

B. Весы Всезнамуса после вмешательства Стёпы показывают всегда на w_0 больше, надо определить w_0. Взвесив бутылку воды получим $r_1 = w_1 + w_0$, взвесив кусок циркония получим $r_2 = w_2 + w_0$, взвесив оба предмета получим $r_{12} = w_1 + w_2 + w_0$. Давайте теперь вычтем из двух первых результатов третий и получим желаемое: $r_1 + r_2 - r_{12} = w_1 + w_0 + w_2 + w_0 - w_1 - w_2 - w_0 = w_0$.

C. Стёпа, падая с высоты h, падает равноускоренно. За время падения t Стёпа пролетит $at^2 / 2$ метров, где a — ускорение свободного падения в мире игры Portal, причём $at^2 / 2 = h$. Отсюда $t = \sqrt{2h / a}$ и вертикальная скорость у земли $v_\downarrow = \sqrt{2ah}$.

После прохождения через портал Стёпа летит горизонтально с данной скоростью, но вертикальная скорость снова равна 0, поэтому Стёпа снова наберёт $v_\downarrow$ вертикальной скорости, и итоговая скорость будет равна

$$\sqrt{v_\downarrow^2 + v_\downarrow^2}.$$

И вообще, после n прыжков итоговая скорость будет $\sqrt{n \cdot v_\downarrow^2}$.

Соответственно, нижний портал в ходе $n + 1$ прыжка окажется на расстоянии

$$h \cdot \sqrt{n \cdot v_\downarrow^2}$$

от стены, то есть будет удаляться всё с меньшим и меньшим шагом, пропорционально $\sqrt{n}$.

Задача 10. Хитрый Миша

A. Посетители тира ведут огонь из вершины X равнобедренного треугольника XAB по его основанию AB. Заметим, что отрезок XP, соединяющий вершину с точкой попадания пули на основании треугольника P, делит треугольник на два других, XAP и XBP. Площадь же этих треугольников равна полупроизведению оснований на расстояния от пулевой дырки до соответствующих прямых h_A и h_B:

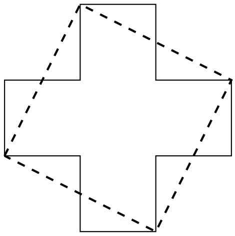
$$S(XAP) = \frac{|XA| \cdot h_A}{2} \qquad S(XBP) = \frac{|XB| \cdot h_B}{2}$$

Однако, поскольку $|XA| = |XB|$, имеем

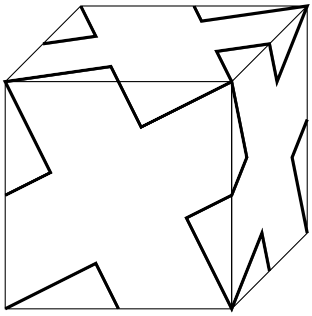
$$S(XAB) = S(XAP) + S(XBP) = \frac{|XA| \cdot h_A + |XB| \cdot h_B}{2} = |XA| \cdot (h_A + h_B)$$

Площадь треугольника XAB и длина боковых сторон не зависит от выбора P, значит, и $h_A + h_B$ тоже не зависит от выбора P. Поэтому, если следовать предложению Миши, награждать придётся всех посетителей тира.

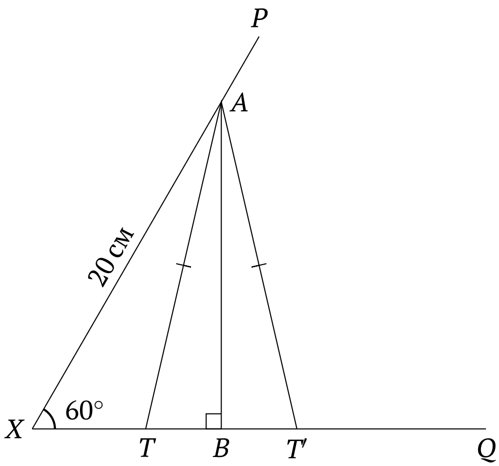
B. Будем заклеивать куб со стороной $\sqrt{5}$ крестиками, сопоставляя одному из шести крестиков одну из шести граней кубика. Будем приклеивать крестик к квадратной грани «под наклоном»:



Тогда, загибая уголки у крестиков, получим заклеивание кубика:



C. Построим чертёж. Искомое расстояние $t = |XT|$. Так как $|AT| = |AT'|$, то треугольник TAT' — равнобедренный. Если посередине между T и T' отметить ещё одну точку, B, то треугольник XAB будет прямоугольным (т.к. высота и медиана к основанию в равнобедренном треугольнике совпадают). Значит, $\angle XAB = 30^\circ$, отсюда $|XB| = \frac{|XA|}{2} = 10\,\text{см}$. Значит, $t = 8\,\text{см}$.



Задачи 8 класса

Задача 1. Числа и суммы

Смотреть задачу 2 варианта 5 класса.

Задача 2. Детский сад

Смотреть задачу 2 варианта 6 класса.

Задача 3. Факториалы

Смотреть задачу 4 варианта 7 класса.

Задача 4. В поисках чисел

Смотреть задачу 7 варианта 6 класса.

Задача 5. Проблемы завуча

A. Средний рост в параллели: $\frac{161+162+\ldots+220}{60} = \frac{361\cdot 30}{60} = 190.5$, обозначим его за A.

Обозначим сумму ростов школьников в классе i как H_i. Покажем, что максимальный минимальный средний рост школьников достигается, когда $H_1 = H_2 = H_3$: в этом случае, очевидно, $\frac{H_i}{20} = A$. Покажем это в два приёма: во-первых, продемонстрируем, что максимальный минимальный средний рост не превышает A, а потом покажем, что A достижим.

Пусть есть два класса, в которых средний рост различается, и пусть $H_1 < H_2 \leq H_3$. Тогда минимальный средний рост ниже A:

$$A = \frac{H_1 + H_2 + H_3}{60} > \frac{3H_1}{60} = \frac{H_1}{20}$$

Теперь покажем достижимость A: построим пример такого разбиения на классы, что $H_1 = H_2 = H_3$.

Класс	Состав класса: рост учеников
1	$181, 182 \ldots 200$
2	$171, 172 \ldots 179, 201, 202 \ldots 210$
3	$161, 162 \ldots 169, 211, 212 \ldots 220$

B. Монета пролезет, если найдутся такая проекция монеты и такая деформация листа с отверстием, что монета может быть размещена целиком внутри деформированного отверстия. Так как монета круглая, то любая проекция содержит отрезок длины $2r$. С другой стороны, проекция ребра ничего кроме этого отрезка и не содержит. Отсюда вывод: монета пролезет тогда и только тогда, когда в отверстие помещается отрезок длины $2r$.

Давайте найдём наиболее выгодную деформацию. Поскольку лист очень гибкий, мы можем изменить форму отверстия, сохранив периметр. Давайте отверстие вытягивать, в пределе получив прямую узкую щель длины πR; это самая длинная фигура с требуемым периметром, однако, она нас по-прежнему устраивает.

Чтобы монета пролезла, нужно, чтобы длина щели равнялась диаметру монеты. Отсюда, $R = \frac{2r}{\pi}$.

C. Если мы имеем возможность вращать куб, то нам нужно найти его проекцию с самым маленьким радиусом описанной окружности. Такая проекция получится, сли поставить куб на одну из его вершин, так чтобы противоположная вершина находилась строго над ней.

Обозначим вершину, на которую мы ставим куб, через v_0, а противоположную ей вершину — за v_1. Тогда окружность, описанная вокруг проекции куба, будет проходить через проекции сразу всех 6 его оставшихся вершин. Заметим, что вершина v_0 и три вершины, смежные с ней, образуют симметричную треугольную пирамиду, основание которой — треугольник со стороной $\sqrt{2}$.

В свою очередь, радиус описанной окружности такого треугольника равен

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

Задача 6. Фигуры в шахматах

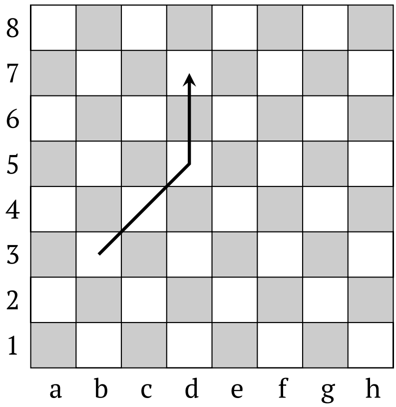
A. Для определённости будем учитывать в общем количестве пройденных клеток начальные и конечные клетки.

Ферзь путешествует с поля (a, b) на поле (c, d). Рассмотрим разницу начальных и конечных координат. Пусть для определённости разница в номере колонки не меньше, чем в номере строки ($|a - c| \geq$

$|b-d|$). Поскольку ферзь не прыгает через клетки, он должен пройти не меньше $|a-c|+1$ клетки (иначе окажется, что через какую-то вертикаль из находящихся между a и c он перепрыгнет, не побывав на ней).

Однако, если ферзь пройдёт по диагонали $|b-d|+1$ клеток, и оставшиеся $|a-c|-|b-d|$ клеток пройдёт по горизонтали, то посетит в точности $|a-c|+1$ клетку. Поэтому ответ на задачу — максимум разниц координат плюс один: $\max(|a-c|, |b-d|)+1$.

Ниже на картинке показан пример движения ферзя с поля **b3** на поле **d7**. Ферзь посетит на своём маршруте $\max(|2-4|, |3-7|)+1=5$ клеток.



B. Корблюд имеет четыре возможных хода, которые в процессе перемещения можно повторять сколько угодно раз. Давайте укажем для каждого хода Корблюда его *сдвиг* — координаты поля, в котором Корблюд окажется после хода, если изначально он стоит на поле $(0,0)$:

Текстовое описание хода	Сдвиг
вправо и вверх	$(1,3)$
вправо и вниз	$(1,-3)$
влево и вниз	$(-1,-2)$
влево и вверх	$(-1,2)$

Несложно понять, что порядок ходов значения не имеет, и для итогового перемещения важно только количество ходов каждого типа.

Давайте введём обозначения для количества ходов Корблюда каждого типа ($n_{\nearrow}$, $n_{\searrow}$, $n_{\swarrow}$ и $n_{\nwarrow}$) и составим уравнение: Корблюд может сдвинуться на (p, q) клеток, если уравнение $n_{\nearrow}(1,3) + n_{\searrow}(1,-3) + n_{\swarrow}(-1,-2) + n_{\nwarrow}(-1,2) = (p,q)$ имеет решение.

Подберём коэффициенты, позволяющие получить все возможные единичные сдвиги $(0,1)$, $(0,-1)$, $(1,0)$ и $(-1,0)$, это легко сделать простым перебором ходов:

Сдвиг	$n_{\nearrow}$	$n_{\searrow}$	$n_{\swarrow}$	$n_{\nwarrow}$
$(1,0)$	3	1	3	0
$(-1,0)$	1	3	0	3
$(0,1)$	1	0	1	0
$(0,-1)$	0	1	0	1

Каким бы ни было перемещение, его можно всегда представить как комбинацию единичных сдвигов, которые, в свою очередь, можно представить как комбинацию ходов Корблюда. Значит, Корблюд может достигнуть любой клетки доски из любой.

Для решения второй части задачи выпишем сдвиги для ходов Корблюда Диагонального и попробуем, например, получить единичный сдвиг вверх, найдя решения уравнения:

$$n_{\nearrow}(1,3) + n_{\searrow}(1,-2) + n_{\swarrow}(-1,-3) + n_{\nwarrow}(-1,2) = (0,1)$$

Преобразуем уравнение для координат в систему уравнений:

$$\begin{cases} (n_{\nearrow} - n_{\swarrow}) + (n_{\searrow} - n_{\nwarrow}) = 0 \\ 3 \cdot (n_{\nearrow} - n_{\swarrow}) - 2 \cdot (n_{\searrow} - n_{\nwarrow}) = 1 \end{cases}$$

Заменим $n_{\nearrow} - n_{\swarrow}$ на x и $n_{\searrow} - n_{\nwarrow}$ на y:

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ 3x - 2y = 1 \end{cases}$$

То есть $x = -y$, отсюда $5x = 1$, а это уравнение не имеет решений в целых числах (мы должны сделать на 0.2 хода больше вправо и вверх, чем влево и вниз). Значит, и исходное уравнение не имеет решений, а потому и Корблюд Диагональный не сможет обойти всю доску.

Заметим, что если рассмотреть перемещение вверх на кратное 5 число клеток, то уравнение станет разрешимым ($5x = 5$, $x = 1$,

$y = -1$). Это возможно, например, при $n_{\nearrow} = n_{\nwarrow} = 1$ и $n_{\swarrow} = n_{\searrow} = 0$: идём вправо и вверх, после чего влево и вверх. Но это будет решением уже какой-то другой задачи.

C. Пусть нам дана фигура, имеющая четыре возможных хода. Выпишем эти ходы в порядке обхода по часовой стрелке, начиная с верхнего правого угла: $(1, a), (1, -b), (-1, -c), (-1, d)$, где a,b,c и d могут быть равны 2 или 3. Например, для Корблюда из пункта **B** это будет $(1, 3), (1, -3), (-1, -2), (-1, 2)$. Выпишем вертикальные сдвиги фигуры в строку (назовём эту строку *сигнатурой* фигуры): *abcd*. Скажем, Корблюд имеет сигнатуру 3322, а Диагональный корблюд — 3232. Всего таких строк 16, поэтому без учёта симметрии имеется 16 возможных фигур.

Однако, с учётом симметрии некоторые фигуры мы должны отождествить: а именно, все зеркально симметричные по горизонтали и вертикали. То есть, фигура *abcd*, отражённая по горизонтали — это *badc*, отражённая по вертикали — это *dcba*, отражённая и по горизонтали и по вертикали (центральная симметрия) — *cdab*.

С учётом этого подсчитаем количество фигур, сгруппировав их по количеству троек в сигнатурах и указав симметричные варианты для фигуры, если такие фигуры ранее не встречались:

		симметрия		
тройки	фигура	гориз.	верт.	центр.
0	2222			
1	3222	2322	2223	2232
2	3322		2233	
	3232	2323		
	2332	3223		
3	3332	3323	2333	3233
4	3333			

Как нетрудно заметить, всего получилось 7 различных фигур, все остальные можно получить из них с помощью симметрий.

Фигуры 3322 и 3232 рассмотрены в пункте **B**, фигура 3322 позволяет обойти всё поле, а фигура 3232 — нет.

Фигура 2332. По своей идее она подобна фигуре 3322. Фигура 2332 «развёрнута» на 90° градусов относительно фигуры 3322, поэтому для неё легко получить единичные сдвиги вправо и влево, а сдвиги вверх и вниз получатся сложными:

Сдвиг	$n_{\nearrow}$	$n_{\searrow}$	$n_{\nwarrow}$	$n_{\swarrow}$
$(1,0)$	1	0	0	1
$(-1,0)$	0	1	1	0
$(0,1)$	3	1	0	3
$(0,-1)$	0	1	1	0

Фигуры 2222 и 3333. В случае фигуры 2222 перемещение по вертикали всегда кратно 2, значит, клетки с нечётными вертикальными координатами будут нам недоступны. Аналогично, в случае фигуры 3333 недоступны клетки с координатами (x, y), где y не кратен 3.

Фигура 3222. Единичные сдвиги $(0,1)$ и $(-1,0)$ получить легко, а вот сдвиги $(0,-1)$ и $(1,0)$ заставляют задуматься. Вместо того, чтобы подбирать эти решения, давайте воспользуемся «тяжёлой артиллерией» — построим и решим соответствующие диофантовы уравнения.

Составим уравнение: $n_{\nearrow}(1,3)+n_{\searrow}(1,-2)+n_{\swarrow}(-1,-2)+n_{\nwarrow}(-1,2) = (0,-1)$

Преобразуем:

$$\begin{cases} (n_{\nearrow} + (n_{\searrow} - n_{\nwarrow} - n_{\swarrow}) = 0 \\ 3 \cdot n_{\nearrow} - 2 \cdot (n_{\searrow} - n_{\nwarrow} + n_{\swarrow}) = -1 \end{cases}$$

Обозначим $n_{\nearrow}$ за x и $n_{\searrow} - n_{\nwarrow} + n_{\swarrow}$ за y. Рассмотрим уравнение $3x - 2y = -1$, выразим y из него: $y = \frac{1+3x}{2}$. Но нас устраивают не все такие y, а только целые. Значит, $1 + 3x$ должно делиться на 2, то есть $3x \bmod 2 = 1$.

Легко видно, что $x = 1$ удовлетворяет этому условию. Пусть ещё какой-то t удовлетворяет условию $3t \bmod 2 = 1$. Тогда $3(x - t) \bmod 2 = 3x \bmod 2 - 3t \bmod 2 = 0$, а поскольку 2 и 3 взаимнопросты, то $(x-t) \,⋮\, 2$. То есть, все значения, удовлетворяющие условию, строятся по правилу $x = 2k + 1$. Отсюда $y = \frac{4+6k}{2} = 3k + 2$.

Второе уравнение системы разрешено, подставим значения в первое уравнение: $(2k + 1) + (3k + 2) - 2 \cdot n_{\swarrow} = 0$. Решений у него много, давайте, например, возьмём $k = 1$ и $n_{\swarrow} = 4$, и это приведёт к

$n_{\nearrow} = x = 3$, а из $n_{\searrow} - n_{\nwarrow} + 4 = y = 5$ можем взять $n_{\searrow} = 1$ и $n_{\nwarrow} = 0$.

И последнее уравнение:

$$n_{\nearrow}(1,3) + n_{\searrow}(1,-2) + n_{\swarrow}(-1,-2) + n_{\nwarrow}(-1,2) = (1,0).$$

Здесь $3x - 2y = 0$, отчего $x = 2k$, $y = 3k$ и $2k + 3k - 2 \cdot n_{\swarrow} = 1$ и если выбрать $k = 1$, то $n_{\swarrow} = 2$. Тогда $n_{\nearrow} = x = 2$, и из замены $n_{\searrow} - n_{\nwarrow} + 2 = y = 3$ выберем $n_{\searrow} = 1$ и $n_{\nwarrow} = 0$.

Сдвиг	$n_{\nearrow}$	$n_{\searrow}$	$n_{\swarrow}$	$n_{\nwarrow}$
$(1,0)$	2	1	2	0
$(0,-1)$	3	1	4	0
$(0,1)$	1	0	1	0
$(-1,0)$	2	0	0	3

Фигура 3332. Попробуем здесь ещё один метод: сведём эту фигуру к фигуре 2332. Заметим, что $(1,3) + (1,-3) + (-1,2) = (1,2)$, то есть последовательность из трёх ходов (вправо и вверх, вправо и вниз, влево и вверх) заменяет отсутствующий у нас ход $(1,2)$. Остальные же ходы у 2332 и 3332 совпадают. Значит, любое перемещение 2332 доступно и для 3332.

Итого: четыре фигуры (3322, 2332, 3222 и 3332) могут обойти всё поле, а три оставшиеся (2222, 3333, 3232) не могут.

Отдельно заметим, что решение диофантовых уравнений — важная область алгебры, и, хотя для некоторых типов таких уравнений есть разработанные методы решения, в общем случае задача неразрешима. Вопрос о поиске общего метода решения был поставлен Гильбертом в 1900 году («10 проблема Гильберта»), и в 1970 году Юрий Матиясевич показал, что такого метода нет.

Задача 7. Пятница

Смотреть задачу 2 варианта 7 класса.

Задача 8. Очень умные муравьи

Смотреть задачу 6 варианта 7 класса.

Задача 9. Эксперименты с клавиатурой

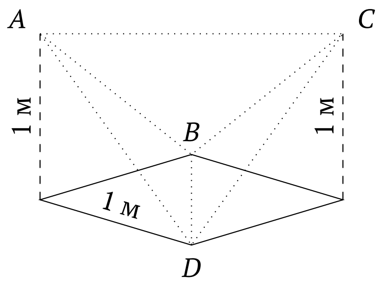
Смотреть задачу 3 варианта 7 класса.

Задача 10. Первым делом — самолёты

A. Поскольку на стене установлен точечный источник света (лампа), лучи от него расходятся в стороны под некоторым углом. Поэтому тень от ближе расположенного к лампе объекта будет больше, чем от дальше расположенного (рассмотрим предельный случай: небольшую близко расположенную лампу можно закрыть ладонью целиком; от далеко расположенной ладонью можно разве что заслонить глаза).

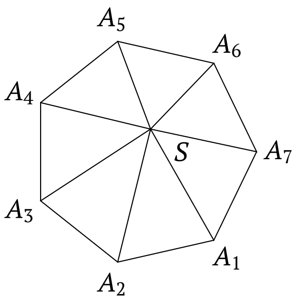
Если самолётик немного наклонить, то тень от более близкой к лампе части крыла будет больше, чем от более далёкой. Поэтому если тень от нижней часть самолётика больше, то самолётик наклонён к лампе, а если тень от верхней части больше — самолётик наклонён от лампы.

B. Пока вертолёты стоят на земле, расстояние между противоположными вертолётами равно $\sqrt{2}$. Нам надо добиться, чтобы расстояние и между соседними составило $\sqrt{2}$.



Поднимем в воздух вертолёты A и C на высоту 1 метр. Теперь все вертолёты имеют попарные расстояния $\sqrt{2}$.

C. Пусть S — точка посадки ракеты. Тогда площадь семиугольника равна сумме площадей треугольников, образованных точкой S и соседними вершинами семиугольника A_i и A_{i+1}.



Площадь треугольника SA_iA_{i+1} равна $\frac{h_i \cdot 2\,\text{км}}{2} = \mathsf{h_i}$ км^2, где h_i — расстояние от S до прямой, продолжающей сторону семиугольника A_iA_{i+1}.

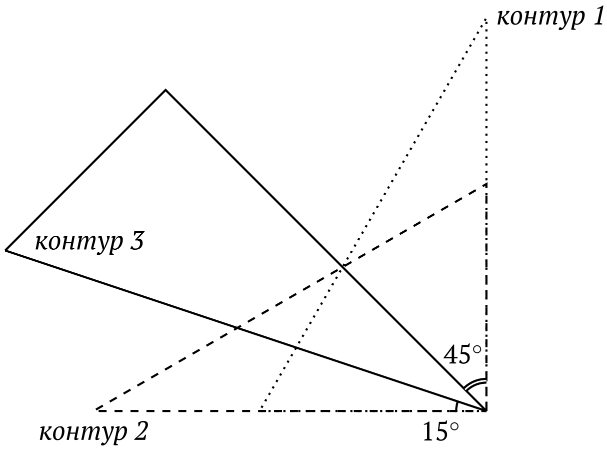
Отсюда можем сделать вывод, что сумма расстояний до прямых $h_1 + h_2 + \ldots + h_7$ численно равна площади семиугольника и потому постоянна.

Задача 11. Несправедливый турнир

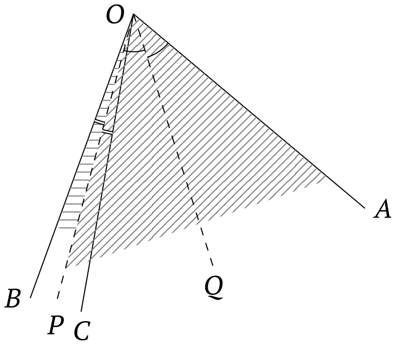
Смотреть задачу 7 варианта 7 класса.

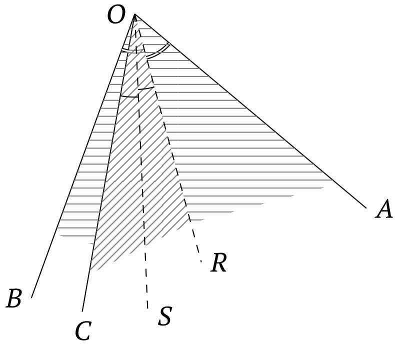
Задача 12. Попытки осмысления биссектрис

А. Обведём треугольник (*контур 1*), потом перевернём его и снова обведём (*контур 2*). Луч, исходящий из прямого угла, проходящий через пересечение контуров 1 и 2 — биссектриса прямого угла, делящая его на два угла по 45°. Если приложить к этой биссектрисе треугольник (*контур 3*), то мы получим искомый 15° угол.



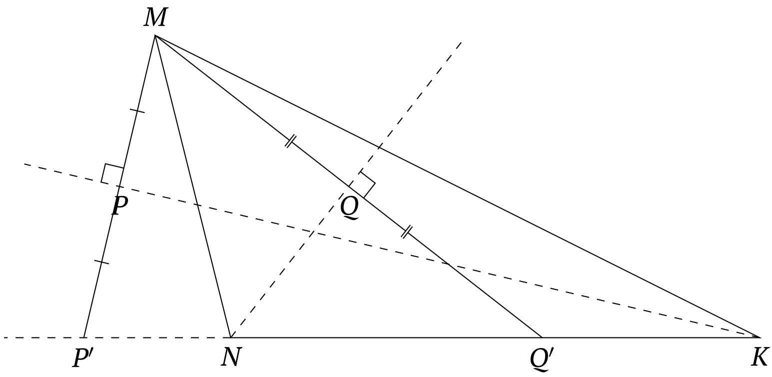
B. Данное определение биссектрисы зависит от выбора начальной грани. Рассмотрим пример, где различие очевидно. Дан трёхгранный угол, образованный гранями AOB, AOC и BOC, причём угол BOC значительно меньше углов AOC и BOA. Если мы разобьём сперва плоский угол BOC биссектрисой OP, а потом построим биссектрису OQ, разбив угол AOQ, то она будет лежать почти в середине угла (левый рисунок). Противоположный порядок разбиения угла даст нам биссектрису OS, сильно смещённую к грани BOC (правый рисунок).





Чуть более формальное пояснение. Возьмём трёхгранный угол и будем уменьшать угол BOC до нуля. При очень маленьких значениях этого угла окажется, что биссектриса QO почти совпадает с биссектрисой угла AOB. Однако, угол SOC — только половина угла ROC, то есть примерно четверть угла AOB.

C. Продолжим перпендикуляр к биссектрисе KP до продолжения основания треугольника и обозначим точку пересечения как P'. Заметим, что $|MP| = |PP'|$ так как треугольники MPK и $P'PK$ равны (они имеют два равных угла и общую сторону). Аналогично, $|MQ| = |QQ'|$. Следовательно, так как прямые $|PQ|$ и $|P'Q'|$ отсекают от угла QMP равные отрезки, то по обратной теореме Фалеса эти прямые параллельны.


M
P
Q
P′
N
Q′
K