Условия задач 2017 года

Задачи 4 класса

Задача 1. Обаятельный домовёнок

A. Про домовёнка Кузю издано 40 статей. Кузя решил заняться их чтением с целью узнать о себе что-нибудь новое. Каждый день Кузя читает по 6 статей, но при этом издаётся 4 новых. Как скоро Кузя догонит издателей?

B. Кузя напечатал 10 000 квадратиков со стороной 1 см, после этого у него в картридже закончились чернила. Сколько квадратиков со стороной 2 см он сможет напечатать, если у него есть полный картридж, аналогичный имевшемуся?

C. Дана таблица 7×7. В центры её клеток Кузя вбил гвоздики. Проведите линию через все гвоздики так, чтобы сделать при этом как можно меньшее количество поворотов (линию при этом можно вести только горизонтально и вертикально).

Задача 2. Велопоход

A. Девочка въезжает в горку длиной 400 метров со скоростью 10 километров в час. Как долго она будет это делать?

B. Начинающая Полина едет на велосипеде без остановок со скоростью 15 км/ч, а опытный Дмитрий Григорьевич — со скоростью 34 км/ч, но остановки на отдых отнимают у него столько же времени, сколько он находится в движении. Кто же в итоге быстрее?

C. Подъём в горку и спуск с неё имеют одинаковую длину. Степан на гоночном велосипеде въезжает в горку со скоростью 10 км/ч, а спускается со скоростью 40 км/ч. А Пётр на тракторе едет с постоянной скоростью 17 км/ч. Кто из них быстрее преодолеет подъём и спуск?

Задача 3. Буквы на белом листе

A. Какие буквы русского алфавита можно перерисовать в другие, добавляя линии?

B. Какая буква русского алфавита, если написать её на листе бумаги, поделит его на наибольшее число областей?

C. Вдохновившись предыдущими пунктами этой задачи, мальчик Гера Симонов написал на листе бумаги две буквы О. На сколько областей они могли поделить лист?

Задача 4. Делить и резать, резать и делить

A. Как двумя линиями разделить прямоугольник на четыре части одинаковой площади, имея только карандаш и линейку без разметки?

B. Изобразите фигуру, которую можно одним прямым разрезом поделить на три части одинаковой площади.

C. Каждый из двух разрезов делит фигуру на две части одинаковой площади. Обязательно ли вместе они делят фигуру на четыре части одинаковой площади?

Задача 5. О, как мы далеки!

A. На прямой дороге расположены четыре остановки: A, B, C, D (не обязательно в таком порядке). Известно, что расстояние между остановками A и D равно 1 км, между B и C — 2 км, между B и D — 3 км, между A и B — 4 км, а между C и D — 5 км. Чему равно расстояние между остановками A и C?

B. Вдоль прямой аллеи растут четыре дерева. Расстояния между соседними равны 63, 14 и 84 метра соответственно. Сколько деревьев надо ещё посадить, чтобы расстояние между любыми двумя соседними деревьями было одинаковым?

C. Можно ли на прямой отметить точки A, B, C, D и E так, чтобы расстояния между ними оказались равны: $AB = 6$, $BC = 7$, $CD = 10$, $DE = 9$, $AE = 12$? Если можно, то покажите как, если нет — объясните, почему.

Задача 6. Быть врачом — весьма ответственно!

A. Доктор оперирует Геометричного дождевого червя. Особенность червя в том, что, отдыхая, он выворачивается линией из шести отрезков, которая пересекает каждый свой отрезок ровно один раз. При этом он ещё и кусает себя за хвост. Как выглядит отдыхающий Геометричный червь?

B. Другой доктор учится закреплять сломанные кости. На экзамене ему выдали шесть абсолютно прямых костей одинаковой длины. Он должен завязать на этих костях 12 узлов хирургической нитью, причём на каждой кости должно быть по 4 узелка. Каждый узел связывает не более двух костей. Помогите врачу справиться с этим заданием.

C. Ещё три доктора — Айболит, Пеппер и Ватсон — по очереди оперируют заразного больного, при этом у них всего две пары перчаток. Перчатки можно надевать наизнанку и друг на друга. По медицинским правилам руки разных хирургов не должны касаться одной поверхности перчаток. Оперировать одной рукой нельзя. Могут ли хирурги обойтись данными им перчатками?

Задачи 5 класса

Задача 1. Поделим – посмотрим

A. На какое наибольшее число областей делят плоскость 4 прямоугольных треугольника?

B. На какое наибольшее число областей может разбить прямая семиугольник? Докажите, что на большее число никакой семиугольник разбить нельзя.

C. На какое наибольшее число областей делят плоскость 15 одинаковых по размеру квадратов, все стороны которых горизонтальны либо вертикальны?

Задача 2. Шутка

A. Дана 200-этажная башня. Стул с 30 ножками скидывают с её крыши, и одновременно с этим более лёгкий стул совсем без ножек отправляют катиться вниз по лестнице внутри башни. Может ли безногий стул достигнуть земли быстрее, чем летящий?

B. Выписка из дневника автора задач олимпиады «Математика НОН-СТОП»:

> *Так, вчера я придумал всего четыре задачи... Мне снилось, что сегодня я придумаю в полтора раза больше задач, чем в сумме за день, когда сегодня останется вчера, и за день, для которого сегодня должно было наступить завтра... Однако в день, который будет вчера для завтра и был завтра для вчера, я придумал в три раза больше задач, чем за послезавтрашнее вчера... Что за сны-то такие странные в последнее время?..*

Если верить сну, сколько задач должен был придумать автор в день, когда он оставил эту заметку?

C. Автомобиль выехал из Петербурга в Пекин и сломался через 80 километров. На исправление неполадок ушло, правда, всего две минуты. Однако, проехав ещё 40 километров, автомобиль вновь сломался, но вновь был отремонтирован за две минуты. Далее перед каждой следующей поломкой автомобиль проезжал вдвое меньше, чем перед предыдущей, но приводился в рабочее состояние за неизменные две минуты. Доедет ли он в итоге до Пекина?

Задача 3. О, как мы далеки!

A. На прямой дороге расположены четыре остановки: A, B, C, D (не обязательно в таком порядке). Известно, что расстояние между остановками A и D равно 1 км, между B и C — 2 км, между B и D — 3 км, между A и B — 4 км, а между C и D — 5 км. Чему равно расстояние между остановками A и C?

B. Вдоль прямой аллеи растут четыре дерева. Расстояния между соседними равны 63, 14 и 84 метра соответственно. Сколько деревьев надо ещё посадить, чтобы расстояние между любыми двумя соседними деревьями было одинаковым?

C. Можно ли на прямой отметить точки A, B, C, D и E так, чтобы расстояния между ними оказались равны: $AB = 6$, $BC = 7$, $CD = 10$, $DE = 9$, $AE = 12$? Если можно, то покажите как, если нет — объясните, почему.

Задача 4. Простые, но такие сложные

A. Натуральное число называется простым, если оно нацело делится только на себя и на единицу. Найдите все такие простые числа p, что числа $p + 2$ и $p + 4$ тоже простые.

B. Натуральное число n является произведением двух простых чисел. Каждое из этих простых чисел увеличили на 1. Произведение полученных чисел оказалось на 100 больше, чем n. Чему равно число n? Найдите все возможные варианты и объясните, почему других нет.

C. В ряд расположены 50 выключателей, все в положении «выключено». Мимо них проходят 50 электриков — k-ый из них переключает каждый k-ый выключатель (включает, если он был выключен, и наоборот). Например, седьмой электрик переключит фонари под номерами 7, 14, 21, 28 и так далее. Какие фонари останутся включенными после прохода электриков?

Задача 5. Неизвестные цифры

A. Имеет ли данный ребус решение — то есть, можно ли сопоставить разным буквам разные цифры так, чтобы равенство стало верным:

$$\text{М}\cdot\text{И}\cdot\text{З}\cdot\text{А}\cdot\text{Н}\cdot\text{Т}\cdot\text{Р}\cdot\text{О}\cdot\text{П} = \text{ХРОМОТА}?$$

B. Решите ребус (то есть, сопоставьте разным буквам разные цифры, а одинаковым — одинаковые так, чтобы равенство стало верным):

$$\text{КРЕМ} + \text{КРЕМ} = \text{ЖЕЛЕ}; \quad \text{известно, что Л} = 9.$$

C. Учитель написал на доске 10 последовательных чисел. Шаловливый Стёпа, уходя после уроков домой, стёр одно — и тут же забыл, какое. Он помнил только, что сумма оставшихся на доске чисел равна 2017. Какое же конкретно число он стёр?

Задача 6. И пусть Бетховен услышит

Девочка Лина играет на круговом фортепиано аналог «Лунной сонаты» собственного сочинения. На таком фортепиано клавиши расположены в виде кольца, а исполнитель должен предварительно залезть внутрь этой конструкции. Таким образом, если идти слева направо, после всех 88 клавиш ноты начинаются с начала.

A. Первую часть сонаты Лина начинает с клавиши под номером один. Сначала она прыгает на один шаг вправо. Затем на две клавиши влево. Потом на три клавиши вправо, четыре клавиши влево, и так далее. На каком шаге Лина первый раз нажмёт на клавишу под номером 45?

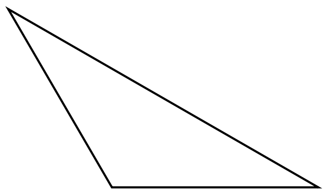
B. Вторую часть сонаты Лина подпевает: ЛЯ, ЛЮ-ЛЯ, ЛЮ-ЛЮ-ЛЮ-ЛЯ, ЛЮ-ЛЮ-ЛЮ-ЛЮ-ЛЮ-ЛЮ-ЛЮ-ЛЮ-ЛЯ,… (перед каждой букой Л добавляется ЛЮ). На каждое ЛЮ или ЛЯ она, начиная с первой клавиши, идёт слева направо и нажимает по одной клавише на фортепиано. Когда первый раз «ЛЯ» Лины будет пропето одновременно с нажатием клавиши под номером 48?

C. Третью часть сонаты Лина играет, нажимая сначала на первую клавишу, потом прыгает на одну клавишу вправо, потом ещё на две клавиши, ещё на три, . . ., ещё на 100. После этого она повторяет такую мелодию ещё 1935 раз. На какую по счёту клавишу она нажмёт последней?

Задачи 6 класса

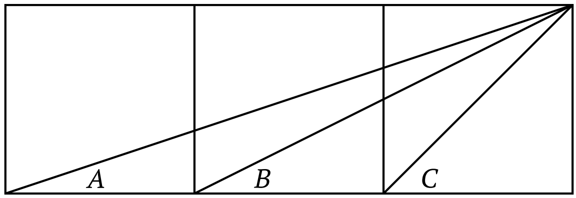
Задача 1. Разрезания и углы

A. Разрежьте тупоугольный треугольник ниже на семь остроугольных треугольников. Прямоугольный треугольник не считается остроугольным.



B. Дан квадрат со стороной 1 см. Покажите, как разрезать его на остроугольные треугольники.

C. Докажите, что сумма величин углов A и B на рисунке равна величине угла C.



Задача 2. Пока не пришёл лифтёр

Витя и Петя живут в бесконечном вверх и вниз доме и очень любят кататься на лифте. Как-то раз неведомые хулиганы сломали кнопки во всех лифтах так, что те могли двигаться только на n этажей вверх или вниз и на m этажей вверх или вниз.

A. Мальчики не растерялись — сели каждый в свой лифт и одновременно выехали с нулевого этажа, причём Витя с каждый раз едет на n этажей вверх, а Петя — на m этажей вверх. Оказалось, что первый раз они побывали на одном и том же этаже под номером 123. Чему могли быть равны n, m?

B. Петя находится этажом выше Вити. Петин лифт умеет ездить на k этажей вверх или вниз, Витин — на $k+1$ этаж вверх или вниз. Мальчики начинают ездить на лифтах, как им заблагорассудится. Может ли Петя управлять своим лифтом так, чтобы никогда не встретиться с Витей на одном этаже? Обязательно ли для этого Пете знать этаж, на котором в данный момент находится Витя?

C. Теперь Витя решил с помощью двух кнопок — на n этажей вверх или на m вниз — добраться на лифте с нулевого этажа до первого. И у него получилось. Докажите, что НОД $(n, m) = 1$.

Задача 3. На плоскости

A. Квадрат разрезан на 36 квадратиков. Из них 35 имеют площади, равные 1, а один имеет площадь большую 1. Какую?

B. Дано 12 прочных секций забора одинаковой длины. Какое наибольшее число изолированных областей можно отгородить ими от бесконечного плоского пастбища?

C. Докажите, что любой четырёхугольник имеет хотя бы одну высоту, выходящую из какой-нибудь вершины, попадающую на одну из его сторон, а не на продолжение.

Задача 4. Неземное стихосложение

A. Известный венерианский поэт несколько лет назад написал знаменитое незамысловатое стихотворение, начальные строчки которого мы приводим:

Два два.
Три два.
Два два два.
Три три.
Три два два.
Пять два.

Продолжите его, напишите последующие три строчки.

B. Венерианскому поэту на День рождения подарили большой круглый торт, и он прямым разрезом поделил его пополам. Придумайте форму блюдца такую, что на одно блюдце этой формы нельзя положить полторта, но на два одинаковых блюдца такой формы можно положить целый торт.

C. В Венерианском литературном обществе состоит 2017 поэтов. Докажите, что среди них найдутся трое, знакомые каждый друг с другом, или трое, не знакомые друг с другом.

Задача 5. Простые, но такие сложные

A. Натуральное число называется простым, если оно нацело делится только на себя и на единицу. Найдите все такие простые числа p, что числа $p+2$ и $p+4$ тоже простые.

B. Натуральное число n является произведением двух простых чисел. Каждое из этих простых чисел увеличили на 1. Произведение полученных чисел оказалось на 100 больше, чем n. Чему равно число n? Найдите все возможные варианты и объясните, почему других нет.

C. В ряд расположены 50 выключателей, все в положении «выключено». Мимо них проходят 50 электриков — k-ый из них переключает каждый k-ый выключатель (включает, если он был выключен, и наоборот). Например, седьмой электрик переключит фонари под номерами 7, 14, 21, 28 и так далее. Какие фонари останутся включенными после прохода электриков?

Задача 6. Шутка

A. Дана 200-этажная башня. Стул с 30 ножками скидывают с её крыши, и одновременно с этим более лёгкий стул совсем без ножек отправляют катиться вниз по лестнице внутри башни. Может ли безногий стул достигнуть земли быстрее, чем летящий?

B. Выписка из дневника автора задач олимпиады «Математика НОН-СТОП»:

> *Так, вчера я придумал всего четыре задачи... Мне снилось, что сегодня я придумаю в полтора раза больше задач, чем в сумме за день, когда сегодня останется вчера, и за день, для которого сегодня должно было наступить завтра... Однако в день, который будет вчера для завтра и был завтра для вчера, я придумал в три раза больше задач, чем за послезавтрашнее вчера... Что за сны-то такие странные в последнее время?..*

Если верить сну, сколько задач должен был придумать автор в день, когда он оставил эту заметку?

C. Автомобиль выехал из Петербурга в Пекин и сломался через 80 километров. На исправление неполадок ушло, правда, всего две минуты. Однако, проехав ещё 40 километров, автомобиль вновь сломался, но вновь был отремонтирован за две минуты. Далее перед каждой следующей поломкой автомобиль проезжал вдвое меньше, чем перед предыдущей, но приводился в рабочее состояние за неизменные две минуты. Доедет ли он в итоге до Пекина?

Задача 7. Многонациональные захватчики

A. Армии девяти государств вторглись на остров, имеющий форму таблицы 5×5. Каждая из армий хочет захватить себе по ячейке на этом острове так, чтобы любая из незахваченных ячеек имела бы общую сторону ровно с одной захваченной. Помогите им это сделать.

B. Армии ста государств вторглись на остров, имеющий форму таблицы 100×100, и захватили себе каждая по одной клетке. Теперь они хотят поделить остров между собой так, чтобы клетки в каждой строке и в каждом столбце все принадлежали разным государствам. Всегда ли можно поделить между государствами оставшиеся после изначального захвата клетки так, чтобы не нарушить поставленное условие?

C. Армия одного государства вторглась на остров, заселённый аборигенами. Известно, что остров имеет форму таблицы $(2k+1)\times(2k+1)$. Может ли эта армия захватить некоторые клетки острова таким образом, чтобы каждая клетка имела ровно две захваченных, соседних с ней по стороне?

Задача 8. Все числа состоят из цифр

A. Существует ли такое двузначное число, что если поменять в нём цифры местами, оно станет в три раза больше?

B. Илья и Алексей разгадывают числовой шифр XYZ из трёх цифр. Им известно, что искомое число делится на 9 и не делится на 10. Кроме того, первые две цифры образуют двузначное число XY, которое является квадратом некоторого натурального числа, а две последние цифры образуют двузначное число YZ, которое меньше 40. Помогите ребятам разгадать шифр.

C. Натуральное число n имеет 61 разряд и состоит из двоек, троек и четверок. При этом двоек на 19 больше, чем четверок. Найти остаток от деления числа n на 9.

Задачи 7 класса

Задача 1. Переводчики с немецкого

A. Переводчику нужно перевести несколько рекламных брошюр и несколько газетных заметок. Он подсчитал, что если увеличить в некоторое целое число раз количество имеющихся у него брошюр, то их станет 116. А если увеличить в такое же число раз количество имеющихся газетных заметок, то их станет 217. Сколько же брошюр и сколько заметок предстоит перевести?

B. Перед коллективом из трёх переводчиков стоит задача перевести 16 журналистских обзоров, 16 художественных текстов и 16 технических. Каждый из них сказал, сколько текстов какой специфики хочет перевести, причём пожелание каждого включало 16 текстов.

Более того, в сумме переводчики хотят перевести ровно 16 журналистских, 16 художественных и 16 технических текстов. Докажите, что их начальник может распределить тексты для перевода так, чтобы удовлетворить пожеланиям каждого из переводчиков.

C. Переводчик работает с текстом на 2-немецком. Текст на 2-немецком характерен тем, что значение может быть заключено не только в словах, но и в сочетаниях из двух подряд идущих слов. При этом всякое отдельное слово и всякое сочетание имеют своё значение. Сколькими способами можно разбить текст из n слов на слова и сочетания?

Задача 2. Гонки улиток

A. Две улитки ползут снизу вверх по столбу высотой 7 метров. Первая за день проползает 5 метров, но за ночь скатывается на 4 метра. Вторая за день преодолевает 3 метра, а за ночь соскальзывает лишь на 1. Какая из улиток быстрее доберётся до верха столба?

B. Дан клетчатый лист 31×31. В центре каждой клетки сидит по улитке. В полночь каждая улитка переползает на одну из четырёх клеток, соседних с её родной. Докажите, что в какой-то из клеток теперь нет ни одной улитки.

C. Высоко-высоко на стене сидит улитка. Прямо под ней, у подножия стены — ещё одна. Верхняя улитка хочет встретиться с нижней, а нижняя — избежать встречи с верхней. Про каждую улитку известна её максимальная скорость. Докажите, что у более быстрой улитки из этих двоих всегда есть возможность осуществить своё собственное желание.

Задача 3. Участники «Математики НОН-СТОП»

A. Парты в одном из кабинетов, где проходит олимпиада, стоят в три колонки по шесть парт в каждой. За 20 минут до олимпиады в кабинете сидело 8 школьников. Докажите, что из кабинета пока что можно утащить две свободные парты, стоящие друг за другом. А если бы школьников было 9?

B. Не оставляет никакого сомнения, что некоторые участники нашей олимпиады (в прошлом году, например, их было более 400) знакомы друг с другом. Докажите, что найдутся два участника, имеющие одинаковое количество знакомых среди других участников олимпиады.

C. Докажите, что среди участников олимпиады «Математика НОН-СТОП» найдутся трое, знакомые каждый друг с другом, или трое, не знакомые друг с другом.

Задача 4. Загадывание чисел

A. Ваня и Даня загадали по числу. Сложив эти два числа, мальчики выяснили, что их сумма делится на одно из них. Чему равен наибольший общий делитель чисел, загаданных мальчиками?

B. Галя и Валя загадали по числу. Оказалось, что загаданные девочками числа взаимно просты. Могут ли остатки от деления этих чисел на 17 оказаться не взаимно простыми? С другой стороны, верно ли, что если остатки a и b от деления на любое число взаимно просты, то и a взаимно просто с b?

C. Болек загадывает число. Лёлек просит его прибавить к загаданному числу сначала 3, потом 4, потом 5, потом 6, и наконец перемножить полученные четыре результата. У Болека получилось 288. Помогите Лёлеку найти загаданное число!

Задача 5. Многонациональные захватчики

A. Армии девяти государств вторглись на остров, имеющий форму таблицы 5×5. Каждая из армий хочет захватить себе по ячейке на этом острове так, чтобы любая из незахваченных ячеек имела бы общую сторону ровно с одной захваченной. Помогите им это сделать.

B. Армии ста государств вторглись на остров, имеющий форму таблицы 100×100, и захватили себе каждая по одной клетке. Теперь они хотят поделить остров между собой так, чтобы клетки в каждой строке и в каждом столбце все принадлежали разным государствам. Всегда ли можно поделить между государствами оставшиеся после изначального захвата клетки так, чтобы не нарушить поставленное условие?

C. Армия одного государства вторглась на остров, заселённый аборигенами. Известно, что остров имеет форму таблицы $(2k+1)\times(2k+1)$.

Может ли эта армия захватить некоторые клетки острова таким образом, чтобы каждая клетка имела ровно две захваченных, соседних с ней по стороне?

Задача 6. Порезать торт на День рождения

A. Девочке Глаше на День рождения подарили большой круглый торт. Может ли её непоседливый брат Гоша сделать в нём три непересекающихся прямых разреза так, чтобы нельзя было провести ещё трёх разрезов, которые вместе с исходными образовывали бы замкнутую несамопересекающуюся шестизвенную ломаную?

B. Девочке Зине на День рождения тоже подарили большой круглый торт, а она прямым разрезом поделила его пополам. Придумайте форму блюдца такую, что на одно блюдце этой формы нельзя положить полторта, но на два одинаковых блюдца такой формы можно положить целый торт.

C. Мальчику Феде на День рождения подарили торт в форме большого куба. Его верх и бока равномерно политы шоколадной глазурью с кокосовой крошкой. Помогите Феде разделить торт так, чтобы ему и четырём его друзьям досталось поровну объёма торта и поровну глазури.

Задача 7. Взвешивания

A. Кухонные весы врут — число, которое они показывают, на какое-то фиксированное количество граммов больше, чем реально лежащая на них масса. При взвешивании картофеля получилось 1000 граммов, при взвешивании домашнего кота — 4400 граммов. При взвешивании кота вместе с картофелем — 5000 граммов. Чему же равна погрешность весов?

B. Даны 729 монет, из них одна фальшивая — немного легче настоящих. Найдите её за 6 взвешиваний на двухчашечных весах без гирь.

C. Весы на рынке умеют показывать суммарную массу лежащих на них предметов. Есть 15 мешков: в 14 настоящие монеты, каждая весом по 20 граммов, и в последнем фальшивые — весом по 25 граммов. Как за одно взвешивание определить, в каком из мешков лежат фальшивые монеты?

Задача 8. Шутка

A. Дана 200-этажная башня. Стул с 30 ножками скидывают с её крыши, и одновременно с этим более лёгкий стул совсем без ножек отправляют катиться вниз по лестнице внутри башни. Может ли безногий стул достигнуть земли быстрее, чем летящий?

B. Выписка из дневника автора задач олимпиады «Математика НОН-СТОП»:

> *Так, вчера я придумал всего четыре задачи... Мне снилось, что сегодня я придумаю в полтора раза больше задач, чем в сумме за день, когда сегодня останется вчера, и за день, для которого сегодня должно было наступить завтра... Однако в день, который будет вчера для завтра и был завтра для вчера, я придумал в три раза больше задач, чем за послезавтрашнее вчера... Что за сны-то такие странные в последнее время?..*

Если верить сну, сколько задач должен был придумать автор в день, когда он оставил эту заметку?

C. Автомобиль выехал из Петербурга в Пекин и сломался через 80 километров. На исправление неполадок ушло, правда, всего две минуты. Однако, проехав ещё 40 километров, автомобиль вновь сломался, но вновь был отремонтирован за две минуты. Далее перед каждой следующей поломкой автомобиль проезжал вдвое меньше, чем перед предыдущей, но приводился в рабочее состояние за неизменные две минуты. Доедет ли он в итоге до Пекина?

Задача 9. Вовочка и клетчатая тетрадь

A. У Вовочки есть клетчатая тетрадь (клетки — одинаковые, квадратные), линейка без делений и карандаш. Площадь каждой клетки в тетради — 100 мм^2. Как Вовочке имеющимися средствами построить квадрат площадью 1000 мм^2?

B. Вовочка нарисовал в тетради отрезок длиной 50 мм. Как Вовочке имеющимися средствами поделить его на 3 равных части, на 7 равных частей?

C. Площадь каждой клетки в тетради — по-прежнему 100 мм^2. Как при помощи линейки без делений и карандаша построить квадрат площадью 80 мм^2?

Задача 10. Игра

A. 2017 единиц стоит в ряд, между ними поставлены плюсы. Двое по очереди ставят пары скобок в выражении так, что после каждого хода оно остаётся осмысленным, причём пару скобок нельзя ставить дважды на одни и те же места. Расставив 2016 пар скобок, они считают значение получившегося выражения — если оно чётно, выигрывает второй, иначе первый. Кто победит при правильной игре?

B. Даны две кучи камней: в одной 23 камня, вторая пока пустая. Также дан мешок с 2017 камнями. Разрешены два типа ходов. Можно брать 1, 2, 3 или 4 камня и перекладывать их из первой кучи во вторую. Также можно перекладывать 1, 2, 3 или 4 камня (если они там есть) из второй кучи в первую — при этом столько же камней, сколько взято, нужно выкинуть из мешка в окно. Играют двое; проигрывает тот, кто выкидывает последний камень из мешка. Кто победит при правильной игре?

C. Дана куча, в которой n камней. Играют двое; за ход можно убирать из кучи 1, 2, 3, ..., 8, 10, 12 или 14 камней. Выигрывает убравший последний камень. Кто победит при правильной игре? Не забудьте, что ответ должен зависеть от n.

Задачи 8 класса

Задача 1. Неизвестные цифры

A. Имеет ли данный ребус решение — то есть, можно ли сопоставить разным буквам разные цифры так, чтобы равенство стало верным:

$$\text{М}\cdot\text{И}\cdot\text{З}\cdot\text{А}\cdot\text{Н}\cdot\text{Т}\cdot\text{Р}\cdot\text{О}\cdot\text{П} = \text{ХРОМОТА}\,?$$

B. Решите ребус (то есть, сопоставьте разным буквам разные цифры, а одинаковым — одинаковые так, чтобы равенство стало верным):

$$\text{КРЕМ} + \text{КРЕМ} = \text{ЖЕЛЕ}; \quad \text{известно, что Л} = 9.$$

C. Учитель написал на доске 10 последовательных чисел. Шаловливый Стёпа, уходя после уроков домой, стёр одно — и тут же забыл, какое. Он помнил только, что сумма оставшихся на доске чисел равна 2017. Какое же конкретно число он стёр?

Задача 2. Искусное владение числами

A. Расставьте в таблицу 3×3 числа от 1 до 9 так, чтобы в каждой строке, в каждом столбце и в каждой из двух главных диагоналей сумма чисел равнялась 15.

B. Придумайте число такое, что оно делится на 17, его сумма цифр равна 17 и оканчивается оно тоже на 17.

C. Придумайте (или расскажите, как построить) 95-значное число, в котором нет нулей и которое делится на свою сумму цифр.

Задача 3. Плавучий зоопарк

A. *Друзьям посвящается.* Австралийская сколиозная кобра спит, изогнувшись замкнутой шестизвенной ломаной, пересекающей каждое своё звено ровно один раз. Схематично изобразите спящую кобру.

B. Североамериканский кролик-зануда, сидя на капитанском мостике в ожидании своей подруги, рисует на земле четырёхугольники и шестиугольники. Пересечение шестиугольника и четырёхугольника — понятное дело, какой-то многоугольник. Сколько он может иметь углов?

C. Сколько углов может иметь пересечение n–угольника и m–угольника при произвольных m и n?

Задача 4. Вовочка и клетчатая тетрадь

A. У Вовочки есть клетчатая тетрадь (клетки — одинаковые, квадратные), линейка без делений и карандаш. Площадь каждой клетки в тетради — $100\,мм^2$. Как Вовочке имеющимися средствами построить квадрат площадью $1000\,мм^2$?

B. Вовочка нарисовал в тетради отрезок длиной 50 мм. Как Вовочке имеющимися средствами поделить его на 3 равных части, на 7 равных частей?

C. Площадь каждой клетки в тетради — по-прежнему $100\,мм^2$. Как при помощи линейки без делений и карандаша построить квадрат площадью $80\,мм^2$?

Задача 5. Загадывание чисел

A. Ваня и Даня загадали по числу. Сложив эти два числа, мальчики выяснили, что их сумма делится на одно из них. Чему равен наибольший общий делитель чисел, загаданных мальчиками?

B. Галя и Валя загадали по числу. Оказалось, что загаданные девочками числа взаимно просты. Могут ли остатки от деления этих чисел на 17 оказаться не взаимно простыми? С другой стороны, верно ли, что если остатки a и b от деления на любое число взаимно просты, то и a взаимно просто с b?

C. Болек загадывает число. Лёлек просит его прибавить к загаданному числу сначала 3, потом 4, потом 5, потом 6, и наконец перемножить полученные четыре результата. У Болека получилось 288. Помогите Лёлеку найти загаданное число!

Задача 6. Пути автобуса неисповедимы

A. В стране Экляндии несколько городов, некоторые соединены между собой дорогами. Между городами ходят автобусы. Известно, что дорог столько же, сколько городов. 4 марта из каждого города выехало по автобусу, а 5 марта каждый автобус приехал в город, соединённый прямой дорогой с его родным. При каком количестве городов возможно, что 5 марта в каждом городе окажется ровно по одному автобусу?

B. В стране Двуляндии названия городов начинаются исключительно на буквы П и К. При этом каждая дорога соединяет город на букву П с городом на К. Наконец, городов на П на 16 больше, чем городов на букву К. 4 марта из каждого города выехало по автобусу, а 5 марта каждый автобус приехал в город, соединённый дорогой с его родным. Докажите, что в каком-то из городов теперь более одного автобуса.

C. На острове Квадрайлэнд четыре города. Перечислите все способы соединить эти города дорогами так, чтобы автобусы из них могли разъехаться и 5 марта оказаться по одному в городе.

Задача 7. Переводчики с немецкого

A. Переводчику нужно перевести несколько рекламных брошюр и несколько газетных заметок. Он подсчитал, что если увеличить в некоторое целое число раз количество имеющихся у него брошюр, то их станет 116. А если увеличить в такое же число раз количество имеющихся газетных заметок, то их станет 217. Сколько же брошюр и сколько заметок предстоит перевести?

B. Перед коллективом из трёх переводчиков стоит задача перевести 16 журналистских обзоров, 16 художественных текстов и 16 технических. Каждый из них сказал, сколько текстов какой специфики хочет перевести, причём пожелание каждого включало 16 текстов. Более того, в сумме переводчики хотят перевести ровно 16 журналистских, 16 художественных и 16 технических текстов. Докажите, что их начальник может распределить тексты для перевода так, чтобы удовлетворить пожеланиям каждого из переводчиков.

C. Переводчик работает с текстом на 2-немецком. Текст на 2-немецком характерен тем, что значение может быть заключено не только в словах, но и в сочетаниях из двух подряд идущих слов. При этом всякое отдельное слово и всякое сочетание имеют своё значение. Сколькими способами можно разбить текст из n слов на слова и сочетания?

Задача 8. Примечательный учебный день

A. Во дворе школы появилось странное дерево. Сначала оно казалось обыкновенным ростком, но потом, достигнув высоты два метра, ствол разделился на две ветки. Когда дерево доросло до трёх метров, каждая из веток разделилась на три ветки. Соответственно, по достижении деревом высоты m метров каждая ветка делилась на m более мелких веток. Со сколькими ветками дерево достигнет высоты 12 метров?

B. Тем временем в кабинете биологии учитель Анастасия Спиридоновна осознала: перед ней 26 ужасных детей — 13 неугомонных мальчиков и 13 не менее неугомонных девочек. Она завела себе за правило каждую неделю менять рассадку детей в классе так, чтобы за партой всегда сидели один мальчик и одна девочка, но при этом пара, сидящая за партой, не сидела бы вместе ни в одну из предыдущих недель. На протяжении скольких недель она сможет следовать заведённому себе правилу?

C. Каким станет ответ в предыдущем пункте, если за партой могут сидеть также и два мальчика, и две девочки?

Задача 9. О числах маленьких и больших

A. «Произведение двух чисел – это мелко и ничтожно! — утверждал Незнайка. — Вот сумма – это другое дело! Глядите, $1 + 5 > 1 \cdot 5$ и даже $1 + 1000 > 1 \cdot 1000$, вот как!» Докажите, тем не менее, что если числа $a \geq 2$, $b > 2$, то их сумма строго меньше их произведения.

B. Единица, стоящая первой в числе 1'000'000 уверена, что при зачёркивании первой цифры числа от него остаётся сущий пустяк. Помогите ей разобраться, существуют ли натуральные числа, которые при зачёркивании первой цифры уменьшаются ровно в (а) 57 раз (б) 58 раз.

C. Пусть дано составное число $n \geq 4$. Докажите, что n можно представить в виде произведения нескольких (более одного) натуральных чисел, так что их сумма также равна n.

Задача 10. Игра

A. 2017 единиц стоит в ряд, между ними поставлены плюсы. Двое по очереди ставят пары скобок в выражении так, что после каждого хода оно остаётся осмысленным, причём пару скобок нельзя ставить дважды на одни и те же места. Расставив 2016 пар скобок, они считают значение получившегося выражения — если оно чётно, выигрывает второй, иначе первый. Кто победит при правильной игре?

B. Даны две кучи камней: в одной 23 камня, вторая пока пустая. Также дан мешок с 2017 камнями. Разрешены два типа ходов. Можно брать 1, 2, 3 или 4 камня и перекладывать их из первой кучи во вторую. Также можно перекладывать 1, 2, 3 или 4 камня (если они там есть) из второй кучи в первую — при этом столько же камней, сколько взято, нужно выкинуть из мешка в окно. Играют двое; проигрывает тот, кто выкидывает последний камень из мешка. Кто победит при правильной игре?

C. Дана куча, в которой n камней. Играют двое; за ход можно убирать из кучи 1, 2, 3, ..., 8, 10, 12 или 14 камней. Выигрывает убравший последний камень. Кто победит при правильной игре? Не забудьте, что ответ должен зависеть от n.

Задача 11. Возводим в степень

A. Приведите пример трёх подряд идущих натуральных чисел таких, что каждое из них делится на квадрат какого-нибудь простого числа.

B. Укажите наименьшее натуральное число такое, что его половина — квадрат натурального числа, его треть — куб натурального числа, а его пятая часть — пятая степень натурального числа.

C. Докажите, что можно придумать сколь угодно длинную цепочку идущих подряд натуральных чисел, каждое из которых делится на квадрат какого-нибудь простого.

Задача 12. Шутка

A. Дана 200-этажная башня. Стул с 30 ножками скидывают с её крыши, и одновременно с этим более лёгкий стул совсем без ножек отправляют катиться вниз по лестнице внутри башни. Может ли безногий стул достигнуть земли быстрее, чем летящий?

B. Выписка из дневника автора задач олимпиады «Математика НОН-СТОП»:

> *Так, вчера я придумал всего четыре задачи... Мне снилось, что сегодня я придумаю в полтора раза больше задач, чем в сумме за день, когда сегодня останется вчера, и за день, для которого сегодня должно было наступить завтра... Однако в день, который будет вчера для завтра и был завтра для вчера, я придумал в три раза больше задач, чем за послезавтрашнее вчера... Что за сны-то такие странные в последнее время?..*

Если верить сну, сколько задач должен был придумать автор в день, когда он оставил эту заметку?

C. Автомобиль выехал из Петербурга в Пекин и сломался через 80 километров. На исправление неполадок ушло, правда, всего две минуты. Однако, проехав ещё 40 километров, автомобиль вновь сломался, но вновь был отремонтирован за две минуты. Далее перед каждой следующей поломкой автомобиль проезжал вдвое меньше, чем перед предыдущей, но приводился в рабочее состояние за неизменные две минуты. Доедет ли он в итоге до Пекина?

Задачи профильного варианта 7 класса

Задача 1. Без нулей

Двадцать восемь, двадцать девять, двадцать десять...

Рассмотрим обыкновенную десятичную систему счисления и то, как в ней записываются натуральные числа. Мы хотим найти способ избавиться от нулей в записи этих чисел. Давайте вместо нуля введём цифру «десять», которую будем записывать как X и употреблять наравне с другими цифрами. После такой модификации системы счисления число 30, например, станет записываться как 2X, число 100 — как 9X, число 3107 — как 2XX7.

1. Переведите числа 110, 2202, 500’000 из десятичной системы счисления в модифицированную. Переведите числа 1X17, XXXX, 512 из модифицированной системы счисления в десятичную.

2. Объясните, почему всякое число имеет единственную запись в нашей модифицированной системе счисления.

3. Опишите алгоритм перевода чисел из десятичной системы в модифицированную и обратно.

4. Докажите, что запись числа в модифицированной системе счисления всегда не длиннее его записи в десятичной. Приведите пример, когда она строго короче десятичной.

5. Опишите правила сложения и умножения в столбик в модифицированной системе счисления (см. рис. R). Отличаются ли они от правил в обыкновенной десятичной системе?

$$
\begin{array}{cccccc}
 & & 1 & X & X & 3 \\
\times & & & 4 & X & 7 \\
\hline
 & 1 & \overset{7}{4} & \overset{7}{7} & \overset{2}{2} & 1 \\
1 & \overset{X}{X} & \overset{X}{X} & \overset{2}{2} & X & \\
\overset{4}{8} & \overset{4}{4} & \overset{1}{1} & 2 & & \\
\hline
\overset{1}{X} & \overset{1}{6} & \overset{1}{6} & \overset{1}{2} & 2 & 1
\end{array}
$$

рис. R

6. Придумайте способ распространить модифицированную систему счисления и на неположительные числа. В частности, как записать ноль в этой системе счисления?

7. В модифицированной системе счисления попробуйте сформулировать признаки делимости на

   — 2, 4, произвольную степень двойки;

   — 5, 25, произвольную степень пятёрки;

   — 3, 9;

   — 11.

8. Что ещё можно сказать про модифицированную систему счисления? Как построить её аналог, используя двоичную систему вместо десятичной? Предложите свои направления исследования и изучите их.

Задача 2. Дорога до метро

Рассмотрим клетчатую сетку, её рёбра и узлы. Путём между двумя узлами будем называть последовательность рёбер, их соединяющую. Длину пути в разных случаях будем определять по-разному, однако стандартный способ — понимать под длиной пути количество рёбер в нём.

Определим *k–окрестность* узла — это множество всех узлов, до которых от данного существует путь длиной не более чем *k*. На рисунке M1 изображены путь длины 3 и 3–окрестность центрального узла.

1. Длину пути можно ввести и по-другому. Давайте определим её как сумму величин смещения пути по горизонтали и по вертикали. Скажем, путь на рисунке M2 будет тогда иметь длину 5. Как будет выглядеть 4-окрестность фиксированного узла при так определёной длине?

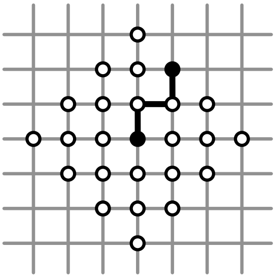


рис. M1

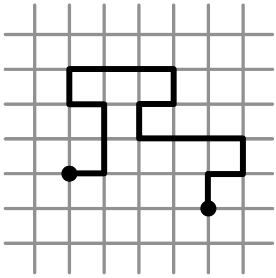


рис. M2

2. А если мы определим длину пути как максимум; как минимум; как модуль разности величин смещения по горизонтали и по вертикали?

3. Рассмотрим два определения длины пути: стандартным способом и как в пункте 1. Понятно, что один путь может иметь разную длину в первом и во втором смысле. Докажите, тем не менее, что любая k–окрестность в смысле первой длины и в смысле второй длины выглядит одинаково.

4. Пусть длина пути определена стандартным образом. Пусть узел B отстоит от узла A на m клеток вправо и на n клеток вниз. Сколько кратчайших путей ведут из A в B?

Давайте теперь выберем из клетчатой сетки несколько узлов и некоторые рёбра между ними. Назовём выбранное нами *городом*. Расположим в каких-то из узлов города *станции метро*. Расстоянием от узла внутри города до данной станции метро будем называть длину (в стандартном смысле) кратчайшего пути между ними, лежащего внутри города. На рисунке M3 изображены пример города, пара станций метро, а также кратчайшие пути от одного из узлов до станций.

5. Для каждого узла в городе найдём ближайшую к нему станцию метро и расстояние до неё. Найдём в городе все узлы, в которых найденное расстояние достигает своего максимума. Теперь для каждого узла посчитаем сумму расстояний от него до всех станций метро и тоже найдём узлы, где эта сумма достигает максимального значения.

   Придумайте город и расстановку в нём станций метро такую, что множества узлов, где максимально кратчайшее расстояние, и узлов, где максимальна сумма расстояний, не пересекаются.

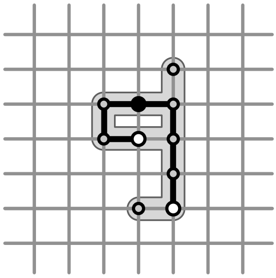


рис. М3

6. Докажите, что какой бы ни была расстановка станций метро в произвольном городе, максимальная сумма расстояний и максимальное среднее расстояние до станций всегда достигаются в одних и тех же узлах.

7. Для каждого узла в городе найдём самую далёкую от него станцию метро и расстояние до неё. Найдём в городе все узлы, в которых найденное расстояние достигает своего максимума.

   Придумайте город и расстановку в нём станций метро такую, что три множества: узлов, где максимально кратчайшее расстояние; узлов, где максимальна сумма расстояний; узлов, где максимально наибольшее расстояние — не пересекаются.

8. Какие ещё особенные узлы можно рассматривать в городе со станциями метро? Предложите свои направления исследования и изучите их.

Задачи профильного варианта 8 класса

Задача 1. Через тернии к звёздам

1. Рассмотрим вершины правильного n–угольника. Расстоянием между двумя вершинами будем называть длину кратчайшего пути между ними по сторонам n–угольника; расстояние между вершинами A и B обозначается $d(A, B)$ — смотреть рисунок S1. Докажите, что для любых трёх вершин A, B, C выполнено неравенство $d(A, B) + d(B, C) \geq d(A, C)$.

2. Для данного n–угольника, сколько различных значений принимает расстояние между его вершинами? Для данной вершины, сколько других вершин n–угольника находятся на фиксированном расстоянии от неё? Сколько вершин n–угольника наиболее удалены от данной?

3. Обратите внимание на то, что расстояние между вершинами не меняется при вращении n–угольника. Попробуйте определить расстояние между вершинами так, чтобы оно менялось при поворотах многоугольника. Правда ли, что любое расстояние, сохраняющееся при вращении, отличается от нашего умножением на какое-то число?

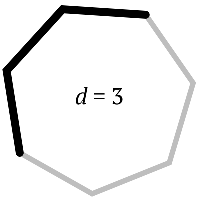


рис. S1

(7, 2)–звезда   Не звезда

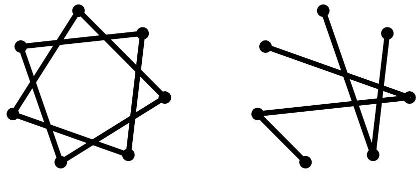


рис. S2

4. Фиксируем правильный n–угольник. Тогда (n, k)–звезда — минимальный набор замкнутых ломаных наименьшей длины такой, что любые две вершины n–угольника, находящиеся на расстоянии k друг от друга, соединены ребром одной из ломаных набора (смотреть рисунок S2). Сколько для данного n существует (n, k)–звёзд, состоящих из одной ломаной?

5. Для данных n и k, из скольки ломаных состоит (n, k)–звезда?

6. Для данных n и ℓ, сколько (n, k)–звёзд состоит ровно из ℓ ломаных?

7. Через $\varphi(n)$ обозначим количество натуральных чисел, меньших n и взаимно простых с n. Используя свои знания о звёздах, докажите формулу

$$\sum_{d \text{ делит } n} \varphi(d) = n.$$

Задача 2. Без нулей

Двадцать восемь, двадцать девять, двадцать десять...

Рассмотрим обыкновенную десятичную систему счисления и то, как в ней записываются натуральные числа. Мы хотим найти способ избавиться от нулей в записи этих чисел. Давайте вместо нуля введём цифру «десять», которую будем записывать как X и употреблять наравне с другими цифрами. После такой модификации системы счисления число 30, например, станет записываться как 2X, число 100 — как 9X, число 3107 — как 2XX7.

1. Переведите числа 110, 2202, 500’000 из десятичной системы счисления в модифицированную. Переведите числа 1X17, XXXX, 512 из модифицированной системы счисления в десятичную.

2. Объясните, почему всякое число имеет единственную запись в нашей модифицированной системе счисления.

3. Опишите алгоритм перевода чисел из десятичной системы в модифицированную и обратно.

4. Докажите, что запись числа в модифицированной системе счисления всегда не длиннее его записи в десятичной. Приведите пример, когда она строго короче десятичной.

5. Опишите правила сложения и умножения в столбик в модифицированной системе счисления (см. рис. R). Отличаются ли они от правил в обыкновенной десятичной системе?

```
    1XX3
 ×   4X7
 -------
    772
   14721
   XX2
  1XX2X
  441
  8412
 -------
  1111
  X66221
```

рис. R

6. Придумайте способ распространить модифицированную систему счисления и на неположительные числа. В частности, как записать ноль в этой системе счисления?

7. В модифицированной системе счисления попробуйте сформулировать признаки делимости на

   — 2, 4, произвольную степень двойки;

   — 5, 25, произвольную степень пятёрки;

— 3, 9;

— 11.

8. Что ещё можно сказать про модифицированную систему счисления? Как построить её аналог, используя двоичную систему вместо десятичной? Предложите свои направления исследования и изучите их.

Задача 3. Дорога до метро

Рассмотрим клетчатую сетку, её рёбра и узлы. Путём между двумя узлами будем называть последовательность рёбер, их соединяющую. Длину пути в разных случаях будем определять по-разному, однако стандартный способ — понимать под длиной пути количество рёбер в нём.

Определим k–*окрестность* узла — это множество всех узлов, до которых от данного существует путь длиной не более чем k. На рисунке M1 изображены путь длины 3 и 3–окрестность центрального узла.

1. Длину пути можно ввести и по-другому. Давайте определим её как сумму величин смещения пути по горизонтали и по вертикали. Скажем, путь на рисунке M2 будет тогда иметь длину 5. Как будет выглядеть 4-окрестность фиксированного узла при так определённой длине?

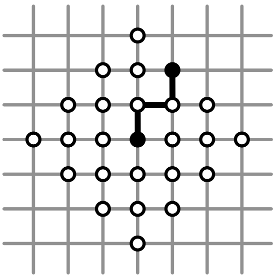


рис. M1

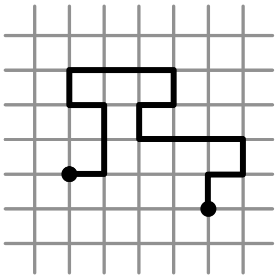


рис. M2

2. А если мы определим длину пути как максимум; как минимум; как модуль разности величин смещения по горизонтали и по вертикали?

3. Рассмотрим два определения длины пути: стандартным способом и как в пункте 1. Понятно, что один путь может иметь разную длину в первом и во втором смысле. Докажите, тем не менее, что любая k–окрестность в смысле первой длины и в смысле второй длины выглядит одинаково.

4. Пусть длина пути определена стандартным образом. Пусть узел B отстоит от узла A на m клеток вправо и на n клеток вниз. Сколько кратчайших путей ведут из A в B?

Давайте теперь выберем из клетчатой сетки несколько узлов и некоторые рёбра между ними. Назовём выбранное нами *городом*. Расположим в каких-то из узлов города *станции метро*. Расстоянием от узла внутри города до данной станции метро будем называть длину (в стандартном смысле) кратчайшего пути между ними, лежащего внутри города. На рисунке М3 изображены пример города, пара станций метро, а также кратчайшие пути от одного из узлов до станций.

5. Для каждого узла в городе найдём ближайшую к нему станцию метро и расстояние до неё. Найдём в городе все узлы, в которых найденное расстояние достигает своего максимума. Теперь для каждого узла посчитаем сумму расстояний от него до всех станций метро и тоже найдём узлы, где эта сумма достигает максимального значения.

Придумайте город и расстановку в нём станций метро такую, что множества узлов, где максимально кратчайшее расстояние, и узлов, где максимальна сумма расстояний, не пересекаются.

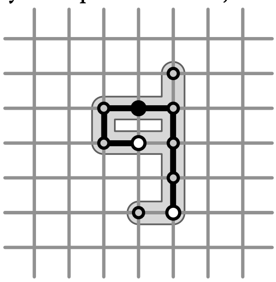


рис. М3

6. Докажите, что какой бы ни была расстановка станций метро в произвольном городе, максимальная сумма расстояний и максимальное среднее расстояние до станций всегда достигаются в одних и тех же узлах.

7. Для каждого узла в городе найдём самую далёкую от него станцию метро и расстояние до неё. Найдём в городе все узлы, в которых найденное расстояние достигает своего максимума.

Придумайте город и расстановку в нём станций метро такую, что три множества: узлов, где максимально кратчайшее расстояние; узлов, где максимальна сумма расстояний; узлов, где максимально наибольшее расстояние — не пересекаются.

8. Какие ещё особенные узлы можно рассматривать в городе со станциями метро? Предложите свои направления исследования и изучите их.

Решения задач 2017 года

Задачи 4 класса

Задача 1. Обаятельный домовёнок

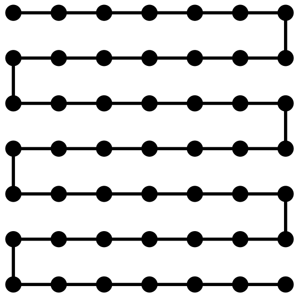
A. $6 - 4 = 2$, отсюда Кузя догоняет издателей со скоростью 2 статьи в день. На то, чтобы нагнать 40 статей, у него уйдёт 20 дней.

B. Площадь квадратика 2×2 в 4 раза больше площади квадратика 1×1, поэтому на него уходит в 4 раза больше чернил. Значит, на том же картридже Кузя сможет напечатать $10000 \div 4 = 2500$ квадратиков 2×2.

C. Среди гвоздиков почти каждого горизонтального ряда как минимум на двух должны быть сделаны повороты: ведь нитка входит и выходит из этого ряда. Однако найдутся два горизонтальных ряда гвоздиков, где нитка начинается или кончается — поэтому количество поворотов нитки может быть оценено сверху числом

$$2 \cdot 5 + 2 = 12.$$

Протянуть нитку, сделав 12 поворотов, просто: можно, например, стартовать из верхней левой клетки и пойти до конца направо, потом, сделав два поворота, спуститься на ряд вниз и пойти налево — и так далее, смотреть рисунок.



Задача 2. Велопоход

A.
$$t = \frac{S}{v} = \frac{400\,\text{м}}{10\,\text{км/ч}} = \frac{0.4\,\text{км}}{10\,\text{км/ч}} = \frac{1}{25}\ \text{ч}.$$

Это, в свою очередь, равно 2.4 минутам.

B. Остановки занимают половину времени Дмитрия Григорьевича, поэтому его средняя скорость будет в два раза меньше его скорости в движении — и равна 17 км/ч. Это, тем не менее, выше средней скорости Полины, которая равна 15 км/ч. Поэтому Д. Г. быстрее

C. Пусть длина подъёма в горку равна x километров. Тогда время, за которое Степан преодолеет подъём и спуск, в часах равно

$$\frac{x}{10} + \frac{x}{40} = \frac{5x}{40} = \frac{x}{8}.$$

Время же, которое потратит Пётр, равно $\frac{2x}{17}$ — и нам нужно сравнить эти два числа. Посмотрим на их отношение:

$$\frac{x \cdot 17}{8 \cdot 2x} = \frac{17}{16} > 1.$$

То есть, Пётр всё-таки будет ехать дольше.

Задача 3. Буквы на белом листе

A.

Б $\longrightarrow$ В	З $\longrightarrow$ В	О $\longrightarrow$ Ю	Ш $\longrightarrow$ Щ
Г $\longrightarrow$ Б	И $\longrightarrow$ Й	Р $\longrightarrow$ В	Ь $\longrightarrow$ Б
Г $\longrightarrow$ П	К $\longrightarrow$ Ж	С $\longrightarrow$ О	Ь $\longrightarrow$ Ы
Г $\longrightarrow$ Т	Л $\longrightarrow$ Д	Ц $\longrightarrow$ Щ	Ь $\longrightarrow$ Ъ
Е $\longrightarrow$ В	У $\longrightarrow$ Х		

Остальные буквы (в их «типографском» начертании) ни во что превратить нельзя. Однако эта задача оставляет большую свободу трактовок, поэтому оценивалась в пользу участника.

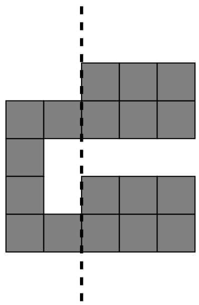
B. Если лист бесконечный, то это буквы ‘В’ и ‘Ф’, имеющие в своём составе два «кольца». Если же мы рассматриваем обычный лист бумаги А4, то на нём можно написать букву ‘Ж’, распространив её до краёв листа — и она поделит его на 6 областей.

C. От двух областей (когда они написаны одна поверх другой) — до 9, когда они пересекаются в двух точках и касаются краёв листа.

Задача 4. Делить и резать, резать и делить

A. Нужно провести две диагонали — четыре треугольника, на которые они поделят прямоугольник, будут иметь равную площадь.

B. Смотреть рисунок:



C. Проведём в круге два диаметра под углом 45°. Каждый из них поделит круг на две равных части, однако вдвоём они делят круг на 4 части, площади которых равны $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{8}$ площади круга.

Задача 5. О, как мы далеки!

A. Не умаляя общности, пусть остановка A находится левее D. Тогда остановка C — либо слева от A, либо справа от D.

Если остановка C слева от A, то она находится на расстоянии 4 от неё. Но тогда нам некуда поставить B, так чтобы $AB = 4$, $BC = 2$. Отсюда C находится справа, и $AC = 6$.

B. Сажая новое дерево, мы бьём промежуток между прежде соседними деревьями на два меньших промежутка. Если мы добились того, что расстояние между соседними деревьями стало равным d, то d является делителем 63, 84 и 14.

$\text{НОД}(63, 84, 14) = 7$, поэтому деревья можно посадить каждые 7 метров (и большего расстояния между соседними добиться нельзя). Отсюда ответ —

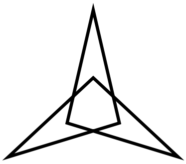
$$(63/7 - 1) + (84/7 - 1) + (14/7 - 1) = 20 \text{ деревьев}.$$

C. Да, точки можно расставить:

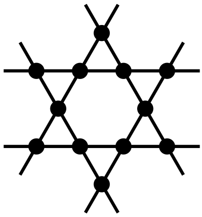
$$A \overset{3}{\longleftrightarrow} D \overset{3}{\longleftrightarrow} B \overset{6}{\longleftrightarrow} E \overset{1}{\longleftrightarrow} C.$$

Задача 6. Быть врачом — весьма ответственно!

A. Геометричный червь имеет форму замкнутой ломаной — например, он может изгибаться так, как показано на рисунке.



B. Обозначим кости отрезками, а узелки — кружками. Доктор может связать, например, такую конфигурацию, которая удовлетворяет условию:



C. Да, стратегия для докторов может быть следующая: Айболит надевает первую пару перчаток, а на неё сверху вторую; Пеппер оперирует только во второй паре перчаток (её внешняя сторона касалась только пациента, а внутренняя чистая). Наконец, Ватсон делает операцию, надев на себя вывернутую первую пару перчаток (её новая внутренняя сторона — ещё чистая), а сверху на неё — вторую.

Внешняя сторона второй пары перчаток по-прежнему соприкасалась только с пациентом, а то, что у первой и второй пар перчаток находятся в контакте грязные стороны, нас не волнует.

Задачи 5 класса

Задача 1. Поделим – посмотрим

A. Пусть даны два прямоугольных треугольника. Каждая сторона первого из них может пересекать второй треугольник не более чем дважды, в сиду выпуклости прямоугольного треугольника. Значит, два прямоугольных треугольника могут иметь не более шести пересечений (причём шесть пересечений получить можно — достаточно взглянуть на «звезду Давида»).

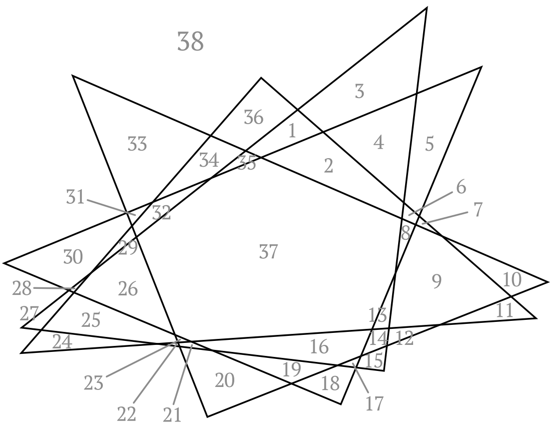
Заметим теперь, что для замкнутой линии количество областей, которые она добавляет к картинке, равно количеству её пересечений с другими, уже имеющимися, линиями.

Первый треугольник делит плоскость на две области. Второй, пересекаясь с ним максимум 6 раз, добавит ещё шесть областей. Третий треугольник может не более чем по шесть раз пересечь первые два, то же верно и про четвёртый треугольник.

Отсюда мы получаем верхнюю оценку на количество областей:

$$2 + 6 + 6 \cdot 2 + 6 \cdot 3 = 38.$$

Мы уже доказали, что больше 38 областей получить нельзя — в свою очередь, получить ровно 38 можно, для этого достаточно расположить треугольники «достаточно хаотично»:



В. Прямая может «входить» в семиугольник и «выходить» из него. При этом изначально она находится снаружи и в конце должна оказаться там же. Каждую сторону семиугольника прямая пересекает не более одного раза, а количество пересечений должно быть чётным. Значит, прямая пересекает максимум шесть сторон, «проходя» через семиугольник трижды.

Получается, она делит семиугольник на максимум на четыре части: до первого пересечения, между первым и вторым, между вторым и третьим, после третьего пересечения.

C. Два одинаково ориентированных квадрата пересекаются максимум в двух точках (если не совпадают). Это значит, что k–ый нарисованный квадрат добавляет на картинку не более $2(k-1)$ новых областей. Отсюда ответ на задачу — $2+2+4+\ldots+2\cdot 14 = 2+2\cdot 105 = 312$.

Изобразить 15 попарно пересекающихся квадратов несложно — достаточно взять один и 14 раз немного сдвинуть его по диагонали.

Задача 2. Шутка

A. Ответ «нет» в задаче–шутке смотрелся бы странно, поэтому в этом пункте подразумевается ответ «да»: из башни можно откачать воздух и сделать лестницу почти отвесной — тогда стул без ножек сможет двигаться вертикально вниз так же, как и его 30-ногий собрат, но ему не будет мешать сопротивление воздуха, наличествующее снаружи башни; в общем, он окажется быстрее.

B. Пусть x_A задач было придумано вчера, x_B — сегодня и x_C — завтра. Тогда из условия

$$\begin{cases} x_B = 1.5(x_A + x_C) \\ x_B = 3x_C \\ x_A = 4 \end{cases}$$

Осталось только решить эти уравнения. Из первых двух легко вывести, что $x_A = x_C$, тогда $x_B = 1.5 \cdot 8 = 12$.

C. Автомобиль не сможет доехать до Пекина, так как за любое конечное время после своего старта он проезжает не более чем $80+40+20+\ldots = 160$ километров.

Задача 3. О, как мы далеки!

Смотреть 4 класс, задачу №5.

Задача 4. Простые, но такие сложные

A. Хотя бы одно из чисел p, $p+2$, $p+4$ должно делиться на 3 — это можно понять, рассмотрев всевозможные остатки при делении p на 3. Единственное простое число, делящееся на 3, — это 3.

$p+4$ не может быть равно трём, потому что тогда $p = -1$ — не простое. $p+2$ не может быть равно трём, потому что тогда $p = 1$ — не простое. Остаётся единственный ответ —

$$p = 3, \quad p+2 = 5, \quad p+4 = 7.$$

Все эти числа простые.

B. Пусть $n = p_1 \cdot p_2$. Тогда $n + 100 = (p_1 + 1)(p_2 + 1) = n + p_1 + p_2 + 1$. Таким образом, мы ищем простые числа p_1 и p_2, такие что $p_1 + p_2 = 99$. Сумма двух чисел нечётна — значит, одно из них обязательно должно быть чётным. Отсюда единственный ответ — $p_1 = 2$, $p_2 = 97$, так как 2 — единственное простое число.

C. Рассмотрим выключатель под номером k. Какие электрики переключат его? Очевидно, что те, номера которых являются делителями числа k. Изначально все выключатели были выключенными, поэтому включенными в конце останутся те, номера которых имеют нечётное число делителей. Известный факт заключается в том, что этому условию удовлетворяют только квадраты натуральных чисел.

Таким образом, включенными останутся выключатели с номерами–полными квадратами: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49.

Задача 5. Неизвестные цифры

A. Заметим, что в слове «Мизантроп» 9 различных букв; а также буква Х, встречаясь в этом ребусе, является уже десятой. При этом ни одна из уже перечисленных нами букв не может быть равна нулю — в одном случае произведение в правой части получится нулевым, в другом же в числе ХРОМОТА окажется ведущий ноль.

B. Между младшим и предпоследним разрядами в этом примере должен был случиться перенос разряда, так как в противном случае Е+Е=*9, что невозможно из соображений чётности.

Отсюда Е+Е+1 должно оканчиваться на 9. Значит, Е равно 4 или 9.

Если Е равно 9, то М+М=19, что невозможно (М$\leq$9).

Если Е равно 4, то М+М=14, тогда М=7. Тогда посмотрим на букву Р: Р+Р оканчивается на 4.

Тогда либо Р равно либо 2, либо 7. Последний случай невозможен, так как тогда Р совпадает с М. Значит, остаётся ребус вида $2 \cdot$ К247 $=$ Ж494.

На значения букв К и Ж не влияют никакие другие части выражения, поэтому можно подбирать их отдельно, руководствуясь лишь тем, что $2 \cdot$ К $=$ Ж.

К не может быть равно 1, потому что тогда Ж $=$ 2, а цифра 2 уже занята. Равно как К не может быть равно 2 и 4: цифра 4 тоже занята. К не может быть больше или равно 5, потому что тогда случится перенос через разряд. Поэтому остаётся единственный ответ:

$$\begin{array}{cccc} 3 & 2 & 4 & 7 \\ 3 & 2 & 4 & 7 \\ \hline 6 & 4 & 9 & 4 \end{array}$$

C. Пусть на доске были написаны числа $x_0 \dots x_9$, $x_i = n + i$, n — какое-то натуральное.

Пусть стёрто число x_k. Тогда $2017 = 10n + 1 + \ldots + 9 - k$. 2017 имеет остаток 7 при делении на 10, значит, и левая часть тоже должна иметь остаток 7. $1 + \ldots + 9 = 45$, имеет остаток 5 — значит, k имеет остаток 8, и поэтому равно 8.

Значит, сумма десяти последовательных натуральных чисел равна 2025, $10n = 1980$, $n = 198$. Поэтому с доски стёрто число 206.

Задача 6. И пусть Бетховен услышит

A. Заметим, что клавиша с номером 45 находится ровно напротив клавиши с номером 1. Также заметим, что Лина нажимает симметричные клавиши, всё больше отдаляясь от первой: сначала первую справа, потом первую слева, потом вторую справа, потом вторую слева.

Таким образом каждая клавиша окажется нажатой ровно один раз, и клавиша номер 45 будет последней — то есть, нажатой на 88-ом шаге.

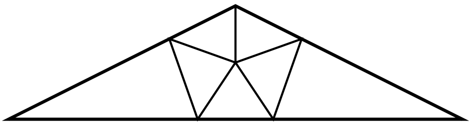
B. Заметим, что номера клавиш, на которых Лина поёт «ЛЯ», — это остатки степеней двойки (начиная с числа 2) при делении на 88. То есть, мы ищем наименьшую степень двойки, имеющую вид $88k+48$. Перебором можно установить, что это 4096. Отсюда на 4095 шаге Лина споёт «ЛЯ», нажимая на 48-ю клавишу.

C. За одну мелодию Лина охватывает $1+1+2+3+\ldots+100=\frac{100\cdot101}{2}+1$ $=5051$ клавиш. Значит, за всю игру ей будет охвачено $1935\cdot5051$ клавиш, и нам нужно найти остаток этого числа при делении на 88, он и даст нам номер последней нажатой клавиши. Остаток числа 1935 равен -1, остаток числа 5051 — 35. Таким образом, последней нажатой клавишей будет $88-35=53$–я.

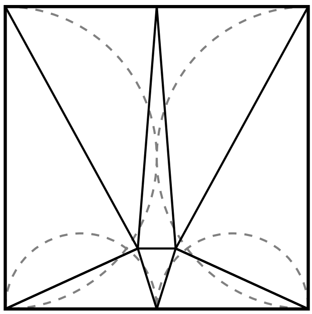
Задачи 6 класса

Задача 1. Разрезания и углы

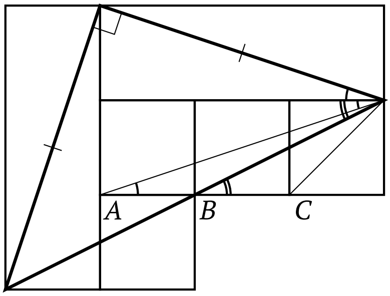
A. Повернём треугольник и разрежем — смотреть рисунок:



B. Будем пользоваться следующим соображением: если вершина треугольника лежит за границами круга, диаметром которого является противолежащая ей сторона, то угол в этой вершине острый.



C. Смотреть рисунок: отмеченные углы равны в силу построения и теоремы о накрест лежащих углах.



Проведём ещё несколько доволнительных построений — получившийся треугольник будет прямоугольным и равнобедренным, то есть угол, равный сумме A и B, по величине равен 45° и, соответственно, углу C.

Задача 2. Пока не пришёл лифтёр

A. Если первый общий этаж для мальчиков — 123-ий, то НОК $(n, m) = 123$ (так как первый общий этаж как раз и имеет номер, соответствующий наименьшему общему кратному). $123 = 3 \cdot 41$, поэтому n и m могут быть равным 1, 123 или 3, 41.

B. Без ограничения общности можно считать, что Витя находится на нулевом этаже, а Петя — на первом. Тогда Витин лифт перемещается только по этажам, номера которых делятся на $k+1$. Если $k = 0$, Петя остаётся на месте, и Витя, конечно, может к нему приехать.

Если же $k > 0$, то Витя не может приехать на первый этаж (1 не делится на $k+1$), поэтому если Петя просто будет оставаться на месте, он не встретится с Витей.

C. Заметим, что номер текущего этажа, на котором находится Витя, равен сумме со слагаемыми вида $\pm m$ и $\pm n$. Любая такая сумма делится на НОД (n, m), а единственный делитель единицы — это она сама. Поэтому НОД $(n, m) = 1$.

Задача 3. На плоскости

A. 35 квадратиков 1×1 должны формировать разность двух квадратов — это значит, что нам надо представить 35 в виде разности квадратов двух целых чисел. Единственный способ это сделать (это можно установить несложным перебором) —

$$35 = 18^2 - 17^2.$$

Поэтому единственный способ расположить квадраты согласно условию — вдоль двух сторон квадрата 18×18 уложить квадратики 1×1, а оставшееся место занять квадратом 17×17. Его площадь будет равна 289.

B. 12 заборов строятся в каком-то порядке, один за другим. Ни один, ни два забора ничего не отгораживают, как их ни поставь. Зато третий забор может, пересекая первый и второй, огородить одну область. И вообще — n–ый забор, пересекая все предыдущие, может отгородить $n - 2$ новых области. Таким образом, ответ на эту задачу — $1 + \ldots + 10 = 55$. Построить пример расстановки заборов, отгораживающей именно это количество областей, несложно.

C. Возьмём самую длинную сторону четырёхугольника $ABCD$ — пусть это сторона AB. Один из углов, прилежащих к ней, должен быть острым (не умаляя общности — угол DAB), иначе сторона CD будет длиннее AB. Рассмотрим сторону DA и вершину D.

Высота DH из точки D на стоону AB упадёт именно что на сторону AB, а не на её продолжение, так как иначе

$$|AD|^2 \underset{\text{Th. Пифагора}}{=} |AH|^2 + |DH|^2 \underset{\substack{AH\text{ — продол-}\\ \text{жение } AB}}{>} |AB|^2 + |DH|^2 > |AB|^2.$$

Откуда AD длиннее AB, что противоречит изначальному выбору стороны AB.

Задача 4. Неземное стихосложение

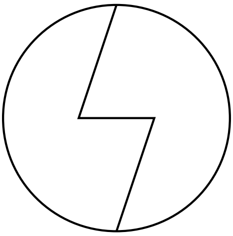
A. Поэт в своём стихотворении занимается расложением последовательных чисел в сумму простых, меньших данного числа (например, число 4 он не использовал, придумывая разложение для шести). Записываются простые числа в порядке убывания. Поэтому следующие три строчки будут иметь вид:

Два два два два.

Три три два два.

Пять три.

B.



C. Будем соединять знакомых поэтов белой ниткой, а незнакомых — чёрной ниткой. Рассмотрим поэта Васю — к нему привязаны 2016 ниток, значит среди них уж точно есть три нитки одного цвета. Пусть это белые нитки. Рассмотрим поэтов, находящихся на других концах этих ниток.

Если какие-то два из этих трёх по’тов знакомы, то образуется белый треугольник из них и поэта Васи. Если же они все попарно незнакомы друг с другом — то нам не хуже, это тоже вариант из условия задачи.

Задача 5. Простые, но такие сложные

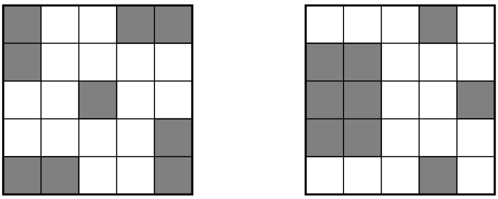
Смотреть 5 класс, задачу №4.

Задача 6. Шутка

Смотреть 5 класс, задачу №2.

Задача 7. Многонациональные захватчики

A. Государства могли захватить следующие клетки:

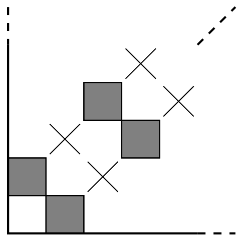


Оказывается, эти два способа, с точностью до поворотов и отражений, исчерпывают все возможные стратегии захвата, удовлетворяющие условию.

B. Пусть 99 государств захватили себе первые 99 клеток верхнего ряда таблицы, а сотое государство — вторую сверху клетку оставшегося столбца таблицы, где ещё не было ни одного государства.

Единственное государство, которое могло бы заселить оставшуюся клетку верхнего ряда, чтобы не нарушить условие задачи, — сотое. Однако и оно не может там обосноваться, потому что тогда в соответствующем столбце за ним будет целых две клетки.

C. При любом k захват клеток, описанный в условии, невозможен.



Будем смотреть на клетки, соседние с главной диагональю. Первые две из них должны быть захвачены, чтобы обеспечить двух захваченных соседей угловой клетки (у которой всего два соседа). Следующие две не могут быть захвачены, так как у второй клетки на диагонали уже есть два захваченных соседа. Так как размеры таблицы нечётны, получаем, что две соседних клетки противоположного угла таблицы должны быть не захвачены — и это будет нарушать условие задачи.

Задача 8. Все числа состоят из цифр

A. Запишем условие из задачи: $\overline{xy} = 3 \cdot \overline{yx}$. Это значит то же, что

$$\begin{aligned} &10x + y = 30y + 3x;\\ &7x = 29y. \end{aligned}$$

И правая, и левая части равенства должны делиться на 29. Это значит, что x делится на 29 — единственная цифра, кратная, 29, это ноль. Разумеется, при $x = 0$ решений у данной задачи нет — значит, нет и вообще.

B. Последовательно будем интерпретировать условие задачи. То, что искомое число не делится на 10, значит, что $Z \neq 0$. То, что число YZ меньше 40, значит, что Y равен 0, 1, 2 или 3. Единственное двузначное число, являющееся квадратом и оканчивающееся на цифры 0–3 — это 81. Таким образом, $X = 8$, $Y = 1$.

Наконец, для цифры Z остаётся два возможных варианта, чтобы число XYZ делилось на 9 — 0 и 9. Так как мы с самого начала поняли, что $Z \neq 0$, получается $Z = 9$.

Ответ: искомое число — 819.

C. Попробуем посчитать сумму цифр числа n — по признаку делимости на 9, её остаток будет таким же, как у самого числа n. 19 разрядов из 61 занимают двойки — если отбросить эти 19 разрядов, двоек и четвёрок будет поровну. Пусть четвёрки в числе занимают t разрядов. Тогда сумма цифр числа n равна

$$19 \cdot 2 + 4 \cdot t + 2 \cdot t + 3 \cdot (61 - 19 - 2t) =$$

$$= 38 + 6t + 3 \cdot 42 - 6t = 38 + 3 \cdot 42 = 164.$$

Остаток при делении 164 на 9 равен 2 — значит, и число n сравнимо с 2 по модулю 9.

Задачи 7 класса

Задача 1. Переводчики с немецкого

A. Разложим на простые множители числа 116 и 217: $116 = 2^2 \cdot 29$, $217 = 7 \cdot 31$. Эти числа взаимно просты, то есть, у них единственный общий множитель — единица. Поэтому переводчику надо перевести 116 брошюр и 217 заметок.

B. Зафиксируем, сколько текстов какой тематики попросил себе каждый из переводчиков:

	Журнал.	Худож.	Техн.
Переводчик 1	r_1	f_1	t_1
Переводчик 2	r_2	f_2	t_2
Переводчик 3	r_3	f_3	t_3

Условие задачи утверждает, что сумма чисел в каждой строке и в каждом столбце равна 16. При таком условии распределить тексты совсем просто: упорядочим по отдельности все художественные, все технические, все журналистские тексты (по дате публикации или даже лексикографически) и выдадим первому переводчику первые r_1 журналистских, f_1 художественных и t_1 технических.

Второму переводчику выдадим соответственно первые r_2, f_2, t_2 текстов из оставшихся. После этого текстов останется ровно столько, сколько указал в своих запросах третий переводчик.

C. Текст длины 1 бьётся одним способом, текст длины 2 — двумя способами. Теперь рассмотрим последнее слово в тексте из n слов — оно может быть либо самостоятельным, либо частью сочетания. В первом случае нам останется побить на слова и сочетания текст длины $n - 1$, во втором — текст длины $n - 2$.

Таким образом, ответ на задачу для n равен сумме ответов для $n - 1$ и $n-2$. Этому условию и полученным нами начальным данным удовлетворяет последовательность чисел Фибоначчи. Поэтому ответ — $\mathcal{F}_n$.

Задача 2. Гонки улиток

A. Улитки доползут до верха одновременно — каждая за три дня.

B. Покрасим клетки листа в белый и чёрный, как на шахматной доске. Чёрных и белых клеток будет разное количество (всё-таки площадь листа нечётна), и при этом улитка переползает с белой клетки на чёрную, а с чёрной — на белую. Поэтому улиткам, стартовавшим в клетках цвета, которого больше, не хватит клеток цвета, которого меньше.

C. Пусть более быстрая улитка — верхняя. Тогда план её действий таков: спуститься вертикально вниз в точку, где сидела другая улитка, а затем догнать её по её же пути.

Пусть более быстрая улитка — нижняя. План её действий — поползти перпендикулярно от стены. Кратчайший путь от начального положения верхней улитки до точки, где находится нижняя улитка, всегда будет длиннее расстояния, пройденного нижней улиткой — поэтому более медленная верхняя не сможет её догнать.

Задача 3. Участники «Математики НОН-СТОП»

A. Парты в одном из кабинетов, где проходит олимпиада, стоят в три колонки по шесть парт в каждой. За 20 минут до олимпиады в кабинете сидело 8 школьников. Докажите, что из кабинета пока что можно утащить две свободные парты, стоящие друг за другом. А если бы школьников было 9?

Побьём парты на пары стоящих друг за другом, по три пары в ряду. Получится девять пар, а школьников пока всего восемь. Значит, одна пара парт полностью свободна, и её можно утащить.

Если же школьников 9, то посадим по школьнику за 1, 3 и 5 парты каждого ряда — и ничего нельзя будет унести.

B. Пусть участников всего N. Если среди участников есть один, не знакомый ни с кем, то не может быть участника, знакомого со всеми. Если же есть участник, который со всеми знаком, то каждый знаком хоть с кем-то.

Таким образом, либо все участники знакомы с 0—$(N-2)$ людьми каждый, либо все они знакомы с 1—$N-1$ людьми каждый. В любом случае на N участников получается $(N-1)$ вариантов, поэтому найдутся двое с одинаковым числом знакомых.

C. Возьмём шесть участников, нам хватит. Будем соединять красной линией знакомых, а синей линией — незнакомых. Все участники окажутся попарно соединены.

Из каждого участника выходит по пять линий, значит как минимум три из них имеют один цвет. Пусть из данного участника выходит три красных линии — посмотрим на людей, в которых они приходят. Если между ними есть хоть одна красная линия, получается красный треугольник с участником, выбранным нами изначально. Если же между ними все линии синие, то это даёт нам синий треугольник, то есть они попарно незнакомы. Что и требовалось.

Задача 4. Загадывание чисел

A. Пусть оказалось, что $a+b$ делится на b, где a и b — числа, загаданные мальчиками. Тогда

$$a + b = k \cdot b,$$

и, соответственно

$$a = (k-1) \cdot b.$$

Таким образом, a делится на b — и наибольший общий делитель этих двух чисел равен b.

B. Ответ на первый вопрос — да, конечно: 3 и 20 — взаимно простые числа, а их остатки от деления на 17 совпадают и, разумеется, не взаимно просты.

Чтобы показать, что числа a и b из второго вопроса пункта обязаны быть взаимно простыми, рассмотрим число

$$\max(a, b) + 1.$$

Остатки при делении чисел a и b на него равны им самим и по условию взаимно просты — значит, a и b взаимно просты.

C. Наша задача — решить уравненение

$$(x+3)(x+4)(x+5)(x+6) = 288.$$

Рассмотрим произведения пары крайних множителей и пары средних множителей:

$$(x^2+9x+18)(x^2+9x+20) = 288.$$

Иными, словами,

$$Y(Y+2) = 288.$$

Разложим число 288 на множители: $288 = 2^5 \cdot 3^2$. Получается, есть ровно два способа представить 288 в виде произведения двух чисел, различающихся на 2: $16 \cdot 18$ и $(-18) \cdot (-16)$.

В каждом из этих двух случаев, чтобы найти x, нужно либо решить квадратное уравнение, либо, например, представить -18 в виде произведения двух чисел, различающихся на 3 — одно из них и будет $x+3$. Ни то, ни другое не представляет труда.

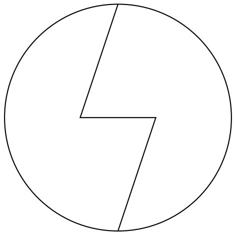
Задача 5. Многонациональные захватчики

Смотреть 6 класс, задачу №7.

Задача 6. Порезать торт на День рождения

A. Проведём три параллельных разреза через торт. Если они вместе с какими тремя разрезами образуют замкнутую ломаную, то есть звено, идущее от одного крайнего разреза к другому — то есть, пересекающее средний разрез. Таким образом, построить несамопересекающуюся ломаную нельзя.

B.



C. Задача сводится к задаче разрезания квадрата на пять фигур одинаковой площади и с одинаковой длиной пересечения с внешними сторонами квадрата. Для этого разделим каждую сторону квадрата на пять равных по длине отрезков и соединим концы этих отрезков с центром квадрата. Получим 20 треугольников одинаковой площади с одинаковой длиной основания. Искомые фигуры получим, объединяя соседние треугольники по четыре штуки.

Разрезание куба строится из разрезания квадрата просто: достаточно «протащить» разрезание квадрата через куб по вертикали.

Задача 7. Взвешивания

A. Пусть картофель весит P граммов, а кот — K граммов. Пусть погрешность составляет M граммов.

Тогда $P + M = 1000$, $K + M = 4400$, $P + K + M = 5000$. Отсюда $P = 600$ (вычтем из третьего равенства второе), $K = 4000$ (вычтем из третьего первое), $M = 400$.

B. Поделим 729 монет на три равных кучки. Положим две из них на весы — если одна из них окажется легче другой, то в ней находится фальшивая монета. Если они равны по весу, то фальшивая монета находится в оставшейся трети.

Таким образом, за один ход мы умеем уменьшать количество «подозреваемых» монет втрое. $729 = 3^6$, поэтому через шесть ходов останется одна монета, которая может быть фальшивой — она и окажется фальшивой.

C. Выложим на весы одну монету из первого мешка, две монеты из второго мешка, ... 15 монет из 15-го мешка. Если бы все монеты были настоящими, их суммарная масса была бы равна $20 \cdot (1 + \ldots + 15)$ граммов. По факту мы получим бóльшую массу — она будет отличаться от приведённой нами ранее на $5 \cdot$ (№ мешка с фальшивыми монетами) граммов. Так мы и выясним, где фальшивки.

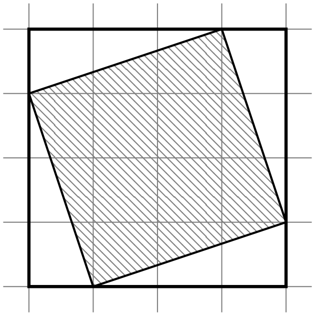
Задача 8. Шутка

Смотреть 5 класс, задачу №2.

Задача 9. Вовочка и клетчатая тетрадь

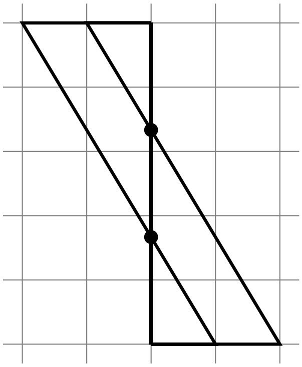
A. У Вовочки есть клетчатая тетрадь (клетки — одинаковые, квадратные), линейка без делений и карандаш. Площадь каждой клетки в тетради — $100\,мм^2$. Как Вовочке имеющимися средствами построить квадрат площадью $1000\,мм^2$?

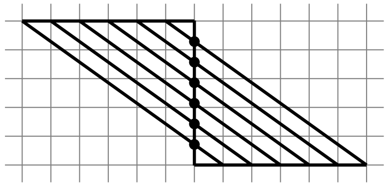
Заметим, что $10^2 + 30^2 = 1000$. То есть, прямоугольный треугольник с катетами 10 мм, 30 мм (который легко нарисовать по клеткам) имеет гипотенузу $\sqrt{1000}\,мм^2$.



Расположив четыре таких треугольника, как показано на рисунке, получим квадрат со стороной $\sqrt{1000}\,мм^2$, площадь которого равна $1000\,мм^2$.

B. Воспользуемся тем фактом, что расстояние между сторонами параллелограмма постоянно, и получим требуемое деление — смотреть рисунок.





C. Аналогично пункту B данной задачи мы умеем делить на произвольное количество частей любой отрезок, начало и конец которого — узлы сетки. Также $80 \cdot 25 = 2000$ — поэтому, если мы научимся строить треугольник площадью $\sqrt{2000}$ мм^2, мы сможем поделить каждую из его сторон на пять частей и получить 25 квадратов нужной нам площади в 80 мм^2.

Наконец, $2000 = 20^2 + 40^2$; далее аналогично пункту A.

Задача 10. Игра

A. Это игра–шутка: значение суммы не зависит от расстановки в ней скобок — сумма в любом случае будет равна 2017, то есть нечётна. Отсюда победит первый игрок.

B. У первого игрока есть выигрышная стратегия. Первым ходом он должен переложить 3 камня из первой кучки во вторую. Затем он должен реагировать на ходы второго игрока следующим образом:

Если второй перекладывает x камней из первой кучки во вторую, то первый должен переложить $5 - x$ камней также из первой кучки во вторую.

Если же второй перекладывает камни из второй кучки в первую, то первый должен вернуть эти камни обратно во вторую кучку.

Заметим, что после хода первого игрока количество камней во второй кучке всегда имеет остаток 3 от деления на 5, а после хода второго игрока количество камней во второй кучке никогда не имеет такого остатка. Это значит, что второй игрок не может переложить все камни во вторую кучку, вынудив первого сделать ход, при котором ему придётся выкидывать камни из мешка.

То есть, (а) первый всегда может сделать ход, соответствующей придуманной нами стратегии, (б) выкидыванием камней из мешка занимается исключительно второй игрок. Он и проиграет.

C. Начнём со случая $n = 13$. Если первый игрок взял k камней, то второй может взять $13 - k$ и победить. Если n не превосходит 14 и не равно 13, то все камни может взять за один ход первый игрок.

Для $n \geq 15$ рассмотрим два случая:

n делится на 13. Заметим, что после любого хода первого игрока оставшееся количество камней не будет делиться на 13. Зато второй в случае любого хода первого сможет сделать так, что после его хода количество камней, оставшихся в кучке, будет вновь делиться на 13. Для этого на взятие k камней, $1 \leq k \leq 12$, нужно ответить взятием $13 - k$ камней, на взятие 14 камней — 12 камнями, а на взятие 15 камней — 11 камнями. Ноль делится на 13 — кучка может остаться пустой только после хода второго игрока.

n не делится на 13. Тогда выигрышная стратегия есть у первого игрока. Своим первым ходом он берёт от 1 до 12 камней так, чтобы осталось количество, кратное 13 — а затем играет так, как играл бы второй игрок в предыдущем пункте.

Ответ: если n делится на 13, выигрывает второй игрок; иначе выигрывает первый.

Задачи 8 класса

Задача 1. Неизвестные цифры

Смотреть 5 класс, задачу №5.

Задача 2. Искусное владение числами

A.

8	3	4
1	5	9
6	7	2

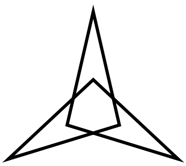
B. 15317.

C. Давайте искать число, делящееся на 144: это число *несильно, но достаточно* больше 95, и делимость на него очень просто проверить: $144 = 16 \cdot 9$: делимость на 16 зависит от последних четырёх цифр, а делимость на 9 — от суммы цифр в целом, которая и так будет равна 144.

Положим последние четыре цифры равными 3232 — нам останется распределить 134 на 91 разряд. Для этого воспользуемся 43 двойками и 48 единицами.

Задача 3. Плавучий зоопарк

A. Итак, мы знаем, что кобра спит, укусив себя за хвост и изогнувшись замкнутой ломаной. Например, её положение может выглядеть так:



B. Конечно же, минимальное количество углов у пересечения — 3. Если мы найдём максимальное количество и приведём пример, когда оно достигается, то все промежуточные количества углов будет несложно получить.

Верхняя оценка на количество углов — 24: каждая из шести сторон шестиугольника могла бы пересекать каждую из четырёх сторон четырёхугольника. В свою очередь, пример, когда пересечение фигур — 6 четырёхугольников, легко построить.

C. Если m и n чётны, то ответ — от трёх до mn углов (смотреть предыдущий пункт). Если m чётно, n нечётно, то каждая из m сторон m-угольника пересекает не более $n-1$ стороны n-угольника, так как количество точек пересечения любой прямой с любым многоугольником чётно: прямая должна «входить» и «выходить» из многоугольника. Пример, когда пересечение имеет $m(n-1)$ углов, строится по аналогии с первым пунктом.

При нечётных m и n ответ — $(m-1)(n-1)$, пример приводится аналогично. Больше углов пересечение не может иметь по следующей причине: m угольник не может пересечь n-угольник «слева направо» больше $m-1$ раза, и каждое пересечение будет давать *в среднем* не более $n-1$ угла.

Задача 4. Вовочка и клетчатая тетрадь

Смотреть 7 класс, задачу №9.

Задача 5. Загадывание чисел

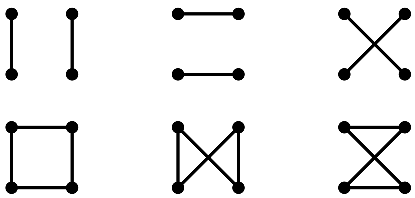
Смотреть 7 класс, задачу №4.

Задача 6. Пути автобуса неисповедимы

A. Описанная в условии задачи ситуация возможна при любом количестве городов — достаточно соединить все города дорогами по кругу, «хороводом», и 4 марта отправить автобус из каждого города в следующий.

B. Автобусов, выехавших из городов на П (и, соответственно, приехавших в города на К) больше, чем собственно городов на К. В силу принципа Дирихле, в каком-то городе на К будет больше одного автобуса.

C. Если автобусы смогли разъехаться, то либо четыре города оказались разбиты на пары так, что автобусы из городов пары поменялись местами, либо из четырёх городов собрался цикл, и каждый автобус отправился в следующий город цикла.



Есть три способа разбить четыре города на пары и три способа провести через них цикл длины 4 — такие соединения дорогами нам подходят. Также подойдёт любая ситуация, которая «надстроена» над перечисленными нами: то есть, взять все дороги и добавлены какие-то ещё.

Задача 7. Переводчики с немецкого

Смотреть 7 класс, задачу №1.

Задача 8. Примечательный учебный день

A. К высоте m метров дерево подходит, имея $(m-1)!$ ветвей. Соответственно, ответ на задачу — 11! веток.

B. Очевидно, что больше 13 рассадок не бывает: мальчик обязан сидеть с одной из девочек. 13 же рассадок реализовать просто: нужно взять какую-то рассадку, и каждый день сдвигать девочек относительно мальчиков «по кругу».

C. Давайте решим задачу в общем случае: есть класс из $4k+2$ человек — придумать $4k+1$ способов рассадить их за парты так, чтобы одна пара не появлялась в двух разных рассадках (больше нельзя по очевидной причине — каждый человек может сидеть не более чем с $4k+1$ другими).

Будем изображать i–ую рассадку, ставя число i в клетки таблицы $(4k+2)\times(4k+2)$, из которой выкинута центральная диагональ. Наша задача тогда — расставить числа от 1 до $4k+1$ в клетки таблицы, так чтобы (а) каждое число было написано ровно $2k$ раз (б) встречалось в каждом столбце и каждой строке ровно по одному разу (в) его вхождения в таблицу были бы симметричны относительно центральной диагонали. Построим расстановку.

В первую строку таблицы впишем числа от 1 до $4k+1$ справа налево, а в первый столбец — снизу вверх. Заполняя i-ую строку, $1 < i < 4k-1$, поступим так: зарезервируем самую правую клетку строки, не будем её трогать; в остальные клетки впишем числа от 1 до $4k+1$, сдвинув их на одну клетку влево относительно предыдущей строки. После этого в самую правую клетку запишем число, которое должно было стоять на центральной диагонали. Последнюю строку получим отражением относительно центральной диагонали уже сформированного последнего столбца.

Приведём пример такой таблицы для $k=2$ (в задаче было $k=6$):

	9	8	7	6	5	4	3	2	1
9		7	6	5	4	3	2	1	8
8	7		5	4	3	2	1	9	6
7	6	5		3	2	1	9	8	4
6	5	4	3		1	9	8	7	2
5	4	3	2	1		8	7	6	9
4	3	2	1	9	8		6	5	7
3	2	1	9	8	7	6		4	5
2	1	9	8	7	6	5	4		3
1	8	6	4	2	9	7	5	3	

Несложно убедиться в том, что она обладает нужными нам свойствами.

Задача 9. О числах маленьких и больших

А. Без ограничения общности будем считать, что $b \geq a \geq 2$. Тогда

$$a + b \overset{(1)}{\leq} 2 \cdot \max(a, b) \overset{(2)}{\leq} \min(a, b) \cdot \max(a, b) = a \cdot b.$$

Теперь, если оба числа a, b строго больше двух, то неравенство (2) становится строгим, а если только одно — то неравенство (1) становится строгим. Что и требовалось.

В. (а): Пусть a — первая цифра числа X.

Чтобы найти число X, которое при удалении первой цифры станет в 57 раз меньше, нужно придумать такую цифру a, что $a \cdot 10^{\cdots} = 56 \cdot (X - a \cdot 10^{\cdots})$. Для этого, в частности, число $a00\ldots0$ должно делиться на 56. Число 70000 отлично подойдёт. Получаем ответ:

$$1250 \cdot 57 = 71250.$$

(б): Чтобы найти ответ в этом пункте, нужно подобрать такую цифру a, что $a00\ldots0$ делится на 57. Пусть такая есть: $57 \mid a \cdot 10^k$. 10 взаимно просто с 57, поэтому тогда $57 \mid a \cdot 10^{k-1}$. Продолжая уменьшать степень десятки, пользуясь этим соображением, получим $57 \mid a$. Но ненулевая цифра не может делится на 57 — получаем противоречие.

C. Отдельно рассмотрим случай $n = 4$: $4 = 2 \cdot 2 = 2 + 2$. Если же составное n строго больше четырёх, что его можно представить в виде $a \cdot b$, $a \geq 2$, $b > 2$.

Из пункта А мы знаем, что тогда $a + b < a \cdot b = n$. Тогда можно взять $n - a - b$ единиц, и получить

$$a + b + 1 + \ldots + 1 = a \cdot b \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1 = n.$$

Задача 10. Игра

Смотреть 7 класс, задачу №10.

Задача 11. Возводим в степень

A. Подойдёт, например, 423 (делится на 9), 424 (делится на 4), 425 (делится на 25).

B. Укажите наименьшее натуральное число такое, что его половина — квадрат натурального числа, его треть — куб натурального числа, а его пятая часть — пятая степень натурального числа.

Будем искать это число в виде $2^m 3^n 5^k$: по условию, эти множители должны в него входить, а лишнего нам не надо. Ясно следующее:

m делится на 3 и на 5, но нечётно;
n делится на 2 и на 5, но имеет остаток 1 по модулю 3;
k делится на 2 и на 3, но имеет остаток 1 по модулю 5.

Найдём наименьшие подходящие m, n и k — это 15, 10 и 6. Ответ: $2^{15} \cdot 3^{10} \cdot 5^6$.

C. Пусть нам надо придумать цепочку длины n. Возьмём n произвольных простых чисел $p_1 \ldots p_n$ — их квадраты являются попарно взаимно простыми.

В силу Китайской теоремы об остатках найдётся достаточно большое число N, сравнимое с i по модулю p_i^2, $1 \leq i \leq n$. Искомой цепочкой будет $N - n \ldots N - 1$.

Задача 12. Шутка

Смотреть 5 класс, задачу №2.