Задачи Петербургских турниров юных математиков

Задачи 2018 года

Задача 1. Узоры на скатерти Улама

Расположим натуральные числа в виде спирали, как показано на рисунке ниже. Полученная картинка называется скатертью Улама.

37	36	35	34	33	32	31
38	17	16	15	14	13	30
39	18	5	4	3	12	29
40	19	6	1	2	11	28
41	20	7	8	9	10	27
42	21	22	23	24	25	26
43	44	45	46	47	48	…

В этой задаче требуется изучить закономерности и узоры, связанные с расположением разных числовых последовательности на скатерти. Интерес представляют не только гипотезы, полученные, например, на компьютере, но и явные соотношения.

1. Выясните, как на скатерти Улама описываются числовые последовательности на вертикальных, горизонтальных и диагональных прямых.

2. Исследуйте на скатерти расположения

a) квадратных чисел $\mathcal{F}_n^{(4)}$,

b) треугольных чисел $\mathcal{F}_n^{(3)}$ (найдите количество ветвей на получающейся картинке),

c) фигурных чисел разных порядков $\mathcal{F}_n^{(m)}$,

d) многомерных фигурных чисел.

3. Исследуйте на скатерти Улама расположения арифметических и геометрических прогрессий. Попробуйте также описать расположения известных числовых последовательностей, возникающих в комбинаторике: чисел Фибоначчи, чисел Каталана и т.п.

4. Рассмотрите другие нумерации целых точек всей плоскости или каких-то фигур на этой плоскости. Например, занумеруем сектор следующим образом:

$$\begin{array}{cccccc}
1 & & & & & \\
2 & 3 & & & & \\
4 & 5 & 6 & & & \\
7 & 8 & 9 & 10 & & \\
11 & 12 & 13 & 14 & 15 & \\
16 & 17 & 18 & 19 & 20 & 21
\end{array}$$

Ответьте на сформулированные выше вопросы для новых нумераций.

Задача 2. Префиксные отображения

Пусть $X_1, X_2, X_3, \dots$ — последовательность множеств. Обозначим через P множество всех последовательностей $a = (a_1, a_2, \dots,)$, где $a_i \in X_i$. Последовательность $a^{(i)}$ элементов P (то есть последовательность последовательностей) назовём сходящейся к элементу $a \in P$, если для каждого фиксированного n последовательность $a_n^{(i)}$ стабилизируется и $a_n^{(i)} = a_n$ для достаточно больших i. Подмножество $C \subseteq P$ называется замкнутым, если любая сходящаяся последовательность элементов из C сходится к элементу из C. Отображение $F : P \to P$ называется замкнутым, если оно переводит замкнутые подмножества в замкнутые подмножества.

Рассмотрим набор отображений

$$f_i : X_1 \times \dots \times X_i \longrightarrow X_i,$$

каждое из которых будем называть префиксными компонентами. По префиксным компонентам зададим префиксное отображение — функцию $F : P \to P$, действующую по формуле

$$F(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (f_1(x_1), f_2(x_1, x_2), f_3(x_1, x_2, x_3), \ldots).$$

1. Приведите пример функции, не являющейся префиксным отображением. Докажите, что если все X_i конечны, то любое префиксное отображение замкнуто.

2. Пусть $X_i = \mathbb{R}^{n_i}$. Докажите, что если компоненты префиксного отображения являются линейными отображениями, то такое префиксное отображение замкнуто.

3. Пусть компоненты f_i не зависят от первых $i-1$ переменной для любого i, то есть существуют функции $g_i : X_i \to X_i$ такие, что

$$f_i(a_1, \ldots, a_i) = g_i(a_i).$$

Докажите, что такое префиксное отображение замкнуто.

4. Покажите, что если все X_i бесконечны, то существует незамкнутое префиксное отображение. А если некоторые из X_i конечны?

5. Пусть $X_i = \mathbb{R}^2$. Существуют ли незамкнутые префиксные отображения, компоненты которых заданы многочленами?

6. Пусть $X_i = \mathbb{R}^{n_i}$. Предложите свои условия, при которых префиксное отображение будет замкнутым.

Задача 3. Обобщенные гиперболические и тригонометрические системы

Пусть $n \geq 2$. Набор бесконечно–дифференцируемых функций $\mathbf{H}_n = (H_1, \ldots, H_n)$ из $\mathbf{R}$ в $\mathbf{R}$ назовём *гиперболической системой* порядка n, если $H_i' = H_{i+1}$ для $1 \leq i < n$, $H_n' = H_1$ и $H_i(0) = \delta_{i,n}$. Аналогично, набор бесконечно–дифференцируемых функций $\mathbf{T}_n = (T_1, \ldots, T_n)$ из $\mathbf{R}$ в $\mathbf{R}$ называется *тригонометрической системой* порядка n, если $T_i' = T_{i+1}$ для $1 \leq i < n$, $T_n' = -T_1$ и $T_i(0) = \delta_{i,n}$.

1. Докажите, что пары $(\mathrm{sh}(t), \mathrm{ch}(t))$ и $(\sin(t), \cos(t))$ задают, соответственно, единственные возможные гиперболические и тригонометрические системы порядка 2. В явном виде опишите гиперболические и тригонометрические системы порядка n.

2. Докажите, что для гиперболических и тригонометрических систем порядка 2 выполнены формулы Эйлера: $H_2(t) + H_1(t) = e^t$ и $T_2(t) + iT_1(t) = e^{it}$. Обобщите их на произвольные системы $\mathbf{H}_n, \mathbf{T}_n$.

3. При всех $1 \leq i \leq n$ выразите $H_i(s+t)$ через $H_j(s), H_k(t)$ и $T_i(s+t)$ через $T_j(s), T_k(t)$. Кроме того, исследуйте функции из наборов $\mathbf{H}_n$ и $\mathbf{T}_n$ на четность и нечетность.

Пусть $\lambda \in \mathbf{R}_+$. Изучите предыдущие пункты для модифицированных систем $\mathbf{H}_n^\lambda$ и $\mathbf{T}_n^\lambda$, в определении которых фигурируют равенства $H_n'(t) = \lambda H_1(t)$ и $T_n'(t) = -\lambda T_1(t)$, соответственно.

4. Докажите, что для гиперболических и тригонометрических систем порядка 2 выполнены соотношения $H_2^2(t) - H_1^2(t) = 1$ и $T_2^2(t) + T_1^2(t) = 1$. Иными словами, образы при отображениях $L_2 : t \mapsto (H_1(t), H_2(t))$ и $M_2 : t \mapsto (T_1(t), T_2(t))$ из $\mathbf{R}$ в $\mathbf{R}^2$ могут быть заданы алгебраическими уравнениями. Выясните, можно ли задать образы при отображениях

$$L_n : t \longmapsto (H_1(t), \ldots, H_n(t))$$
$$M_n : t \longmapsto (T_1(t), \ldots, T_n(t))$$

из $\mathbf{R}$ в $\mathbf{R}^n$ алгебраическими уравнениями. В частности, найдите однородные многочлены p_n, q_n степени n такие, что для $f_n := p_n - 1$ и $g_n := q_n - 1$ выполнено

$$f_n(H_1(t), \ldots, H_n(t)) = 0,$$
$$g_n(T_1(t), \ldots, T_n(t)) = 0$$

при любом t. Например, $f_2(x, y) = y^2 - x^2 - 1$ и $g_2(x, y) = y^2 + x^2 - 1$. Верно ли, что многочлены $f_n, g_n \in \mathbf{Q}[x_1, \ldots, x_n]$ неприводимы?

5. Опишите все перестановки $\sigma \in S_n$, для которых $p_n(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) = p_n(x_1, \ldots, x_n)$ при всех $x_1, \ldots, x_n$. Аналогичный вопрос для q_n.

6. Опишите все точки образов L_n и M_n в $\mathbf{R}^n$ с целыми координатами. Опишите все точки с рациональными координатами.

Придумайте, как по двум целым / рациональным точкам из образов L_n, M_n получить новую целую / рациональную точку на L_n и M_n соответственно. Изучите получающееся «сложение точек».

Задача 4. Многоугольники

1. Пусть F_1 и F_2 - два выпуклых многоугольника, множества вершин которых совпадают. Покажите, что F_1 равен F_2.

2. Пусть F_1 и F_2 не обязательно выпуклы, но удовлетворяют условию про вершины. Выясните, что можно сказать про их расположение.

3. Пусть F_1 и F_2 выпуклы, а середины сторон F_1 лежат в F_2. Как связаны площади F_1 и F_2?

4. Пусть F_1 и F_2 выпуклы, а середины сторон F_1 лежат в F_2 и середины сторон F_2 лежат в F_1. Верно ли, что такие многоугольники равны?

5. Зафиксируем $0 \leq \alpha \leq 1$. Точка на стороне многоугольника называется его α–серединой, если она делит эту сторону в отношении $\alpha : (1-\alpha)$. Известно, что для каждой стороны F_1 какая-то α–середина лежит в F_2. Что можно сказать про площади F_1 и F_2?

6. Исследуйте предыдущие вопросы в случае, когда один из многоугольников не обязательно выпуклый.

Задача 5. Конечные вычисления

Основная идея этой задачи — исследование дискретных аналогов дифференцирования и интегрирования. Интерес представляют явные сравнения непрерывных и дискретных конструкций между собой.

Обозначим через **Seq** множество всех вещественных числовых последовательностей. Сами последовательности будем обозначать символами $x_n \in \mathbf{Seq}$, а их соответствующие элементы (значения) под номером k через $x_n[k]$ (начиная с 0). Таким образом, $x_n = y_n \iff x_n[k] = y_n[k], \forall k \geq 0$.

Определим функции $\Delta, \int$ из **Seq** в **Seq** по правилам

$$(\Delta x_n)[k] := x_n[k+1] - x_n[k]$$

$$\left(\int x_n dn\right)[k] := \sum_{i=0}^{k-1} x_n[i].$$

Они называются разностным оператором и оператором суммирования, а последовательности $\Delta x_n, \int x_n dn$ — производной и интегралом x_n соответственно. Если $\Delta F_n = x_n$, то F_n называется первообразной x_n. Если A — некоторый оператор (т.е. функция из **Seq** в **Seq**), то A^n — это новый оператор, являющийся композицией A с собой n раз.

1. Опишите связи между производной, интегралом, первообразной и сдвигом x_n, где под сдвигом понимается $(\mathbf{E}x_n)[k] = x_n[k+1]$. Кроме того, найдите явную формулу для $\Delta^m x_n$.

Константы $c \in \mathbf{R}$ задают постоянные и показательные последовательности $\mathrm{c}, \mathrm{c}^n \in \mathbf{Seq}$ по формулам $\mathrm{c}[k] := c$ и $\mathrm{c}^n[k] := c^k$. Кроме того, определим для $m = 0, 1, 2, \ldots$ последовательности n^m и $n^{\underline{m}}$ степеней и падающих степеней по формулам $n^m[k] := k^m$ и $n^{\underline{m}}[k] := k(k-1)(k-2)\cdot\ldots\cdot(k-(m-1))$. Набор всех последовательностей из $\mathbf{Seq}$, которые могут быть выражены как линейные комбинации последовательностей $1, n, n^2, \ldots, n^{m-1}$, обозначим через $\boldsymbol{P}_m$. Аналогично, через $\boldsymbol{FP}_m$ обозначим последовательности, являющиеся линейными комбинациями падающих степеней 1, n, $n^{\underline{2}}, \ldots, n^{\underline{m-1}}$. Последовательности из $\boldsymbol{P}_m$ или $\boldsymbol{FP}_m$ будем называть полиномиальными.

2. Выясните, как связаны между собой $\boldsymbol{P}_m$ и $\boldsymbol{FP}_m$ и предложите какие–нибудь интересные эквивалентные описания последовательностей из этих множеств. Точнее, сравните $\boldsymbol{P}_i$ и Δ^j. А как связаны между собой $\int x_n dn$ и $\boldsymbol{P}_i$?

3. Найдите дискретные аналоги формул Ньютона–Лейбница и интегрирования по частям. Затем найдите в явном виде $\int n\, dn$, $\int n^2 dn$, $\int \boldsymbol{F}_n^{(3)} dn$, $\int \lambda^n dn$, $\int n\lambda^{n-1} dn$, $\int n^2 2^{n-1} dn$, $\int \boldsymbol{F}_n^{(m)} dn$. Существует ли комбинаторное / геометрическое решение? Предложите свои собственные числовые последовательности и опишите их производные и интегралы. Например, рассмотрите известные числовые последовательности такие, как числа Фибоначчи.

4. Рассмотрим последовательность $S_n^{(m)}$, которая определяется формулой $S_n^{(m)} := \int n^m dn$. Покажите, что $S_n^{(m)}$ является полиномиальной последовательностью и в явном виде выразите её через последовательности степеней или падающих степеней.

5. Для каждой последовательности $x_n \in \mathbf{Seq}$ определим её последовательность Тейлора $\langle x_n \rangle$ по правилу $\langle x_n \rangle[k] := (\Delta^k x_n)[0]$. Найдите последовательности Тейлора ваших любимых последовательностей. Например, последовательностей падающих степеней. Кроме того, докажите, что функция $x_n \mapsto \langle x_n \rangle$ обратима и в явном виде найдите её обратную.

Обозначим через $\boldsymbol{P}_\infty$ множество всех формальных бесконечных комбинаций вида

$$x_n = \alpha_0 + \alpha_1 n^{\underline{1}} + \alpha_2 n^{\underline{2}} + \ldots,$$

где $\alpha_k \in \mathbf{R}$. Каждая такая комбинация, в действительности, определяет числовую последовательность $x_n \in \mathbf{Seq}$, потому что при каждом k сумма $x_n[k]$ будет конечна.

Например, $\boldsymbol{P}_m \subset \boldsymbol{P}_\infty$ при всех $m \geq 1$. Докажите, что каждая последовательность в **Seq** может быть представлена в таком виде и явно найдите соответствующие коэффициенты α_k.

6. Придумайте свои обобщения полученных результатов. Например, изучите периодические или рекуррентные последовательности, их производные, интегралы и связанные с ними тождества — рассмотрите функцию $\Delta_T(x_n)[k] := x_n[k+T] - x_n[k]$, придумайте аналог биномиальной теоремы для падающих степеней, изучите «дифференциальные уравнения» вида $\sum_{i=1}^m \alpha_i \Delta^i(x_n) = 0$, исследуйте частные производные последовательностей от двух индексов $x_{n,m}$ и кратные интегралы $\int\int x_{n,m} dn\ dm$ или привлеките иные методы дискретной математики для изучения разных классов последовательностей.

Задача 6. Геометрия и алгебра слов

Рассмотрим некоторое конечное множество $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$, которое будем называть алфавитом. Для каждого элемента $a \in A$ введём дополнительно символ a^{-1}. Множество всх таких символов обозначим за A^{-1}. Теперь определим расширенный алфавит $\mathbb{Q} = A \cup A^{-1}$. Тем самым можно рассмотреть набор

$$\mathbb{Q}^* = \{\varepsilon, a_1, a_2, \ldots, a_1^{-1}, a_2^{-1}, \ldots, a_1a_1, a_1a_2, \ldots, a_1a_1^{-1}, a_1a_2^{-1}, \ldots\}$$

всех слов, которые можно получить из букв алфавита $\mathbb{Q}$, где ε — пустое слово длины ноль. На этом наборе определена операция приписывания слов, которую можно рассматривать как функцию $\mathbb{Q}^* \times \mathbb{Q}^* \to \mathbb{Q}^*$. Например, $abaa \cdot ba = abaaba$. Коротко будем записывать $a^n = a \cdot \ldots \cdot a$ (n раз).

Зафиксируем некоторый набор изометрий $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ (все x_i — элементы $\mathrm{Isom}(\mathbf{R}^n)$) пространства $\mathbf{R}^n$. Мы можем компонировать данные изометрии между собой: $xy := x \circ y$. Для каждой изометрии $x \in X$ по-определению есть обратное отображение x^{-1}, которое тоже будет изометрией. Теперь определена функция $f_X : \text{Ꝏ}^* \longrightarrow \mathrm{Isom}(\mathbf{R}^n)$, которая действует следующим образом: буквам a_i сопоставляются изометрии x_i, буквам a_i^{-1} сопоставляются изометрии x_i^{-1}, пустому слову ε сопоставляется тождественное отображение id, а образ длинного слова вычисляется по рекуррентному правилу $f_X(w_1w_2) = f_X(w_1) \cdot f_X(w_2)$.

На геометрическом уровне некоторые получающиеся слова будут совпадать. Например, если x, y — это переносы на векторы $(1, 0)$ и $(0, 1)$ в $\mathbf{R}^2$, то изометрии xy и yx равны. Кроме того, если z, w — это отражение относительно начала координат и поворот против часовой стрелки на $\pi/2$ относительно нуля, то $zx \neq xz$, $z^2 = w^4 = \mathrm{id}$ и $y^{-1}wx = \mathrm{id}$. Таким образом, некоторые слова в получающемся языке должны интерпретироваться как совпадающие. Будем говорить, что два слова $u, v \in \text{Ꝏ}^*$ являются X–эквивалентными, если $f_X(u) = f_X(v)$. Через W_X обозначается фактормножество множества Ꝏ^* по получающемуся отношению эквивалентности (такое множество однозначно задаётся каким–нибудь полным набором из попарно неэквивалентных слов, то есть таким набором, что любое слово $v \in \text{Ꝏ}^*$ эквивалентно слову из него, но никакие два разных слова из в наборе друг другу не эквивалентны).

0. Докажите, что X–эквивалентность является отношением эквивалентности на Ꝏ^*.

Через $R \subseteq \mathbb{O}^*$ будем обозначать какой-то фиксированный набор слов, а слова из R будем называть *пустыми* (на геометрическом уровне пустые слова будут отвечать тождественным изометриям). Будем говорить, что два слова $w, u \in \mathbb{O}^*$ являются R–эквивалентными и писать $u \equiv v$, если u можно получить из w с помощью многократного применения следующей операции: между любыми двумя буквами слова w (или с краю) можно вставить (приписать) любое слово из $\overline{R} := R \cup \{\varepsilon\} \cup \{aa^{-1} \mid a \in A\} \cup \{a^{-1}a \mid a \in A\}$, а также из слова w можно вычеркнуть отрезок (часть), равный одному из слов в $\overline{R}$. Считается, что если вычеркнуть из слова само слово, то останется слово длины ноль, т.е. ε. Через $\langle \mathbb{O} \mid R\rangle$ обозначается фактормножество $\mathbb{O}^*$ по такому отношению эквивалентности.

0. Докажите, что R–эквивалентность является отношением эквивалентности на $\mathbb{O}^*$ и проверьте, что если $u, v, w, w' \in \mathbb{O}^*$ и $w \equiv w'$, то $uwv \equiv uw'v$.

В этой задаче предлагается изучить алгебраические аспекты изометрий, в основном возникающих как движения (чаще, отражения) из

$$Fix(\Phi) := \{\varphi \in \mathrm{Isom}(\mathbf{R}^n) \mid \varphi(\Phi) = \Phi\},$$

сохраняющие данную геометрическую фигуру Φ в $\mathbf{R}^n$.

1. Пусть $A = \{a, b\}$ и $R = \{a^2, b^2, abab\}$. Тогда, например, $bab \equiv aabab \equiv a \equiv abb \equiv \varepsilon a \varepsilon b \varepsilon b \varepsilon$.

a) Докажите, что любое слово из $\mathbb{O}^*$, в действительности, R–эквивалентно одному из слов из $\{\varepsilon, a, b, ab\}$.

b) Найдите пару $(X = \{x, y\}, f_X)$ из двух изометрий $x, y \neq \mathrm{id}$ и функции $f_X : \mathbb{O}^* \to \mathrm{Isom}(\mathbf{R}^n)$, для которой отношения R– и X–эквивалентности совпадают. Можно ли выбрать $x, y \in Fix(\Phi)$ для подходящей фигуры Φ и в какой наименьшей размерности?

c) Докажите, что слова ε, a, b, ab все попарно R–неэквивалентны.

2. Пусть $X = \{x, y\}$, где x, y — это нетривиальный перенос на вектор $(1, 0)$ и нетривиальная скользящая симметрия в перпендикулярном направлении соответственно.

a) Докажите, что $xyx = y$, то есть $xyxy^{-1} = \mathrm{id}$.

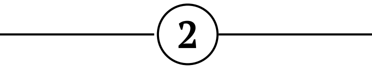
b) Пусть $A = \{a, b\}$ и $R = \{abab^{-1}\} \subseteq \text{Ꝏ}^*$. Определена функция f_X, переводящая a, b в x, y и продолжающаяся на все слова алфавита Ꝏ по установленным в условии правилам. Докажите, что отношения R– и X–эквивалентности совпадают.

3. Рассмотрим квадратную табличку из $m \times m$ натуральных чисел $d_{i,j} \geq 2$, среди которых может встретиться символ ∞. Построим по ней граф $\Gamma = (V, E)$, в котором $V = \{r_1, r_2, \ldots, r_m\}$, а вершины r_i, r_j соединены ребром в том и только в том случае, когда $d_{i,j} \geq 3$ (включая ∞). В вершинах графа Γ изображаются числа $d_{i,i}$, а число $d_{i,j}$ рисуется на ребре (r_i, r_j) в том и только в том случае, когда $d_{i,j} \geq 4$ (включая ∞). Этими условиями исходная таблица восстанавливается по графу однозначно. Пусть $A = V$, а $R \subseteq \text{Ꝏ}^*$ всех слов вида $(r_i r_j)^{d_{i,j}}$, где $i \neq j$, и всех слов вида $r_i^{d_{i,i}}$. Если $d_{i,j} = \infty$, то соответствующее слово не входит в R. Будем обозначать $G_\Gamma := \langle \text{Ꝏ} \mid R \rangle$. Решения дальнейших вопросов интересны даже при малых m.

a) Опишите G_Γ для графа с одной вершиной с $d_{1,1} = n$, где $n \geq 2$. Найдите такую изометрию a, для которой $a^k \neq \mathrm{id}$ при $1 \leq k < n$ но $a^n = \mathrm{id}$. В частности, найдите пару (X, f_X), для которой отношения R– и X–эквивалентности совпадают.

b) Опишите G_Γ для графа с n изолированными вершинами, где $d_{i,i} = 2$, и найдите пару (X, f_X), для которой отношения R– и X–эквивалентности совпадают. А что, вообще, происходит с алфавитом при взятии дюзъюнктного объединения графов?

c) Опишите G_Γ для графа ниже ($n \geq 2$ или $n = \infty$) и найдите пару (X, f_X), для которой отношения R– и X–эквивалентности совпадают.



d) Решите аналогичную задачу для графа

e) Более общо, решите аналогичную задачу для графа из n вершин, являющегося простой ломаной.

4. По графу Γ построим квадратичную форму на $\mathbf{R}^m$

$$Q_\Gamma(x_1, \ldots, x_m) = \sum_{i=1}^{m} x_i^2 - \sum_{(i,j)\in E} x_i x_j.$$

Найдите соответствующие квадратичные формы для графов предыдущих пунктов и исследуйте их на положительную определённость. Докажите, что если квадратичная форма Q_Γ является положительно определённой, то граф Γ

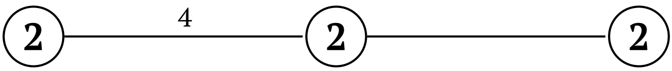
a) не содержит циклов

b) не содержит вершин степени 4 и больше

c) содержит не более одной вершины степени 3

Что ещё можно сказать про граф Γ, если соответствуюшая форма положительно определена?

5. Рассмотрите граф ниже и найдите пару (X, f_X), для которой отношения $R-$ и $X-$эквивалентности совпадают.



Исследуйте ситуацию, при которой такой граф состоит из n вершин и продолжается вправо ребрами с $d_{i,i+1} = 3$, $i \geq 2$.

Задача 7. Факториалы Бхаргавы

В 2000 году лауреат Филдсовской премии Манжул Бхаргава нашёл обобщение целочисленного факториала, в котором для каждого подмножества $S \subseteq \mathbf{Z}$ определяется $n!_S$, причём, $n!_{\mathbf{Z}} = n!$. Оказалось, что его конструкция естественным образом обобщает наиболее интересные свойства обычного факториала. Ссылка на статью: *goo.gl/zF3p5N* (The Factorial Function and Generalizations, Manjul Bhargava). В этой задаче предлагается продолжить исследование Бхаргавы в конкретном направлении. Одной из основ этого продолжения служит следующее утверждение.

1. Докажите, что любое положительное рациональное число может быть представлено в виде частного произведений факториалов (не обязательно различных) простых чисел. Например,

$$\frac{10}{9} = \frac{2! \cdot 5!}{3! \cdot 3! \cdot 3!}.$$

Напомним конструкцию Бхаргавы. Зафиксируем подмножество $S \subseteq \mathbf{Z}$ и простое число $p \in \mathbf{P}$. Построим последовательность $a_0, a_1, \ldots \in S$ следующим образом: выберем произвольное $a_0 \in S$; выберем элемент $a_1 \in S$ так, чтобы разность $a_1 - a_0$ делилась на наименьшую возможную степень числа p; выберем элемент $a_2 \in S$ так, чтобы разность $(a_2 - a_0)(a_2 - a_1)$ делилась на наименьшую возможную степень числа p, и так далее. На шаге k выберем $a_k \in S$ так, чтобы разность $(a_k - a_0) \cdot \ldots \cdot (a_k - a_{k-1})$ делилась на наименьшую возможную степень числа p. Вместе с построенной последовательностью a_n мы получаем также монотонно возрастающую последовательность соответствующих степеней p

$$\nu_k(S,p) := p^{\operatorname{ord}_p\left(\Pi_{i=0}^{k-1}(a_k - a_i)\right)},$$

где $\nu_0(S,p) = 1$. Теперь обобщённый факториал на S для $k \geq 0$ определяется по формуле

$$k!_S := \prod_{p \in \mathbf{P}} \nu_k(S,p).$$

2. Проверьте, что последовательность $\nu_k(S,p)$ не зависит от выбора a_k. Кроме того, докажите, что для каждого $S \subseteq \mathbf{Z}$ в произведении выше лишь конечное число множителей не равно единице.

3. Пусть $S = a\mathbf{Z} + b := \{an + b \mid n \in \mathbf{Z}\}$ или $S = \{q^k \mid k \in \mathbf{Z}_{\geq 0}\}$.

a) Какие значения может принимать отношение факториалов

$$n!_S / m!_S$$

в зависимости от a, b, q?

b) Ответьте на предыдущий вопрос, если числа $n = p, m = q$ предполагаются простыми.

c) Опишите возможные значения, которые может принимать биномиальный коэффициент Бхаргавы

$$\binom{n}{k}_S := \frac{n!_S}{k!_S (n-k)!_S}.$$

d) Ответьте на предыдущий вопрос, если числа $n = p$ предполагаются простыми.

4. Ответьте на вопросы предыдущего пункта для произвольного S.

5. Исследуйте вопросы п. 3 (а,б) и 4, описав возможные отношения произведений факториалов Бхаргавы.

Задача 8. О приближении кривых

Кривой на плоскости называется инъективное непрерывное отображение $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$. Нас будут интересовать кривые из класса $\mathbf{C}^\infty$ — те, для которых каждая из компонент отображения $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ непрерывно дифференцируется бесконечное число раз.

Пусть $\zeta, \gamma\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$. Кривую ζ будем называть ε*–близкой* к кривой γ, если

$$\zeta(a) = \gamma(a),\ \ \zeta(b) = \gamma(b),\ \ \forall\, t \in [a,b]\ \exists\, s \in [a,b]\colon\ \operatorname{dist}(\zeta(t), \gamma(s)) < \varepsilon.$$

Кривую ζ будем называть ε*–приближением* γ, если

$$\zeta(a) = \gamma(a),\ \ \zeta(b) = \gamma(b),\ \ \forall\, t \in [a,b]\ \operatorname{dist}(\zeta(t), \gamma(t)) < \varepsilon.$$

Пусть $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ — регулярная кривая. Её ε–длиной называется число

$$L_\varepsilon(\gamma) = \inf\ \{L(\zeta) \mid \zeta \text{ — } \varepsilon\text{–приближение } \gamma\}.$$

1. Докажите, что у регулярных кривых любой длины бывают сколь угодно длинные регулярные приближения. Иными словами, для любого числа $\mathcal{D} > 0$ и для любой регулярной кривой γ существует регулярная кривая $\zeta\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ с длиной $L(\zeta) > \mathcal{D}$, являющаяся её ε–приближением.

2. Докажите, что для любой регулярной кривой γ существует константа ε_0 такая, что при $\varepsilon < \varepsilon_0$ инфимум из определения ε–длины совпадает с инфимумами длин (а) кривых, ε–близких к γ; (б) ломаных, ε–близких к γ. Укажите, как найти ε_0.

3. Пусть γ — регулярная кривая, про которую известно, что её кривизна ограничена сверху числом $\frac{1}{r}$. При $\varepsilon < \frac{r}{2}$ дайте как можно более точную нижнюю оценку на $L_\varepsilon(\gamma)$ (и проверьте, достигается ли она).

4. Для регулярной кривой γ докажите, что $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} L_\varepsilon(\gamma) = L(\gamma)$. Докажите то же самое для произвольной непрерывной кривой конечной длины.

Перейдём от кривых к ломаным на плоскости. Пусть $\mathcal{C}_n$ — множество несамопересекающихся ломаных с вершинами в точках множества $\frac{1}{n}\mathbb{Z} \times \frac{1}{n}\mathbb{Z}$ и рёбрами длины $\frac{1}{n}$. Несложно перенести определение ε–близости на случай ломаных — расстояние dist между двумя точками на плоскости нам теперь будет удобнее определить как

$$\mathrm{dist}\Big((x,y),\ (z,t)\Big) = \max\{|x-z|,\ |t-y|\}\ \text{(проверьте, что это метрика).}$$

Дана регулярная кривая $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$, причем $\gamma(0), \gamma(1) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Ее n–пикселизацией (обозначим через γ_n) будем называть кратчайшую ломаную из $\mathcal{C}_n$, которая $1/n$–близка к γ. Обозначим $\mathcal{P}_n(\gamma) = L(\gamma_n)$.

5. Для данной ломаной $\lambda \in \mathcal{C}_1$ и чисел $n, \varepsilon \in \mathbb{N}$ как можно более точно оцените длину самой короткой и самой длинной ломаных из $\mathcal{C}_n$, ε–близких к λ (и проверьте, достигаются ли ваши оценки).
6. Для произвольной регулярной кривой γ оцените $\mathcal{P}_n(\gamma)$ и найдите $\lim\limits_{n\to\infty} \mathcal{P}_n(\gamma)$.
7. Предложите и исследуйте свои обобщения данной задачи: например, можно рассмотреть другие метрики и другие сетки допустимых вершин на плоскости.

Задача 9. Экстремальные тетраэдры

Задачи на плоскости.

1. Среди всех треугольников, вписанных в единичную окружность, найдите треугольник с
   a) максимальным периметром,
   b) максимальной площадью,
   c) максимальным радиусом вписанной окружности.
2. Шириной треугольника в направлении α, где $\alpha \in [0, \pi]$, называется величина $w(\alpha)$, равная длине проекции треугольника на прямую, образующую с осью абсцисс угол α. Средней шириной треугольника называется величина
$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} w(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha.$$

a) Придумайте, как по периметру треугольника найти его среднюю ширину.

b) Среди всех треугольников, вписанных в единичную окружность, найдите треугольник с максимальной средней шириной.

Задачи в $\mathbf{R}^3$.

3. a) Среди всех тетраэдров, вписанных в единичную сферу, найдите тетраэдр с максимальным объемом.

b) Докажите следующее обобщенное тождество параллелограмма: если $X_1, \ldots, X_n$ — векторы в $\mathbb{R}^3$, где n — натуральное число, то

$$\sum_{1 \le i < j \le n} \|X_i - X_j\|^2 + \|\sum_{i=1}^{n} X_i\|^2 = n \sum_{i=1}^{n} \|X_i\|^2.$$

c) Среди всех тетраэдров, вписанных в единичную сферу, найдите тетраэдр с максимальной суммой длин ребер.

d) Пусть дан тетраэдр в $\mathbb{R}^3$. Известно, что любое его ребро ортогонально плоскости, проходящей через середину этого ребра и оставшиеся две вершины тетраэдра. Докажете, что тетраэдр правильный.

e) Среди всех тетраэдров, вписанных в единичную сферу, найдите тетраэдр с максимальной площадью поверхности (суммой площадей граней).

f) Среди всех тетраэдров, вписанных в единичную сферу, найдите тетраэдр с максимальным радиусом вписанной сферы.

4. Пусть тетраэр $ABCD$ вписан в единичную сферу с центром O. Суммой углов обзора тетраэдра называется величина

$$\sphericalangle AOB + \sphericalangle AOC + \sphericalangle AOD + \sphericalangle BOC + \sphericalangle BOD + \sphericalangle COD.$$

Среди всех тетраэдров, вписанных в единичную сферу, найдите тетраэдр с максимальной суммой углов обзора.

5. a) Используя сферические координаты в трёхмерном пространстве, обобщите понятие средней ширины треугольника на случай $\mathbb{R}^3$ (для тетраэдра).

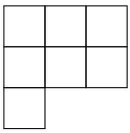
b) Среди всех тетраэдров, вписанных в единичную окружность, попробуйте найти тетраэдр с максимальной средней шириной.

6. Многомерным обобщением треугольника и тетраэдра в $\mathbb{R}^n$ является симплекс — многогранник, у которого $n+1$ вершина. Попытайтесь пункты 3) – 5) обобщить на многомерный случай.

Задача 10. Динамические системы

Зафиксируем натуральное число n и рассмотрим множество $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ возможных остатков при делении на n. В этой задаче предлагается изучить некоторые разбиения $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ на подмножества (классы эквивалентности) и исследовать динамику этих разбиений при малых изменениях задающих их параметров. Изменения при этом будут контролироваться некоторой функцией $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$. Каждое разбиение $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ задаёт представление числа n в виде суммы неотрицательных слагаемых, а следовательно, задаёт диаграмму Юнга соответствующего порядка. Интерес вызывает как количество строчек в этой диаграмме, так и их длина.

Рассмотрим наименьшее отношение эквивалентности на $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, при котором каждый остаток $[x]$ эквивалентен остатку $[f(x)]$. В зависимости от f и n найдите число всех классов, на которые полученное отношение делит $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Например, при $n = 7$ функция $f(x) = 4x + 1$ задаёт разбиение $\mathbf{Z}/7\mathbf{Z} = \{[0], [1], [5]\} \cup \{[2]\} \cup \{[3], [6], [4]\}$ и диаграмму



Интерес в представляют как гипотезы и наблюдения, связанные с динамикой ответов, так и строгие доказательства. Какая трансформация f вносит большее изменение: умножение на два $f(x) \mapsto 2f(x)$ или прибавление единицы $f(x) \mapsto f(x) + 1$? Предлагается проводить исследование в следующем порядке:

1. Изучите случаи $f_a(x) = ax$, где а — фиксированное целое число, и $f(x) = x^2$.

2. Изучите случай $f_{a,b}(x) = ax + b$, начиная с совсем малых целых b. Опробуйте оба подхода: фиксируйте a, b и меняйте n или фиксируйте n и меняйте a, b, а затем изучите форму получающихся диаграмм.

a) Траекторией x называется последовательность

$$x,\ f_{a,b}(x),\ f_{a,b}(f_{a,b}(x)),\ \ldots$$

В предположении $(a, n) > 1$, опишите остатки $[x]$, трактории которых образуют цикл.

b) Постарайтесь описать траекторию остатка $[0]$.

c) Постарайтесь найти те характеристики получающихся диаграмм Юнга, которые поддаются вычислению в зависимости от n, a, b.

d) Фиксируйте a, b и опишите чезаровские средние (по n) мощностей получающихся классов эквивалентности. Затем попробуйте брать средние по другой переменной (a или b).

3. Изучите случаи $f_m(x) = x^m$ и $f(x) = x^2 + 1$.

4. Выясните, для каких полиномиальных функций f искомые числа классов эквивалентности и их размеров поддаются явному вычислению, и проведите соответствующее исследование. Например, выясните, какие замены функции $f \mapsto g$ приводят к незначительным изменениям ответов.

Задача 11. ПОЗ–коды

Сотрите мне память (Н.В. Гоголь. Вий)
Стереть нельзя исправить (крылатое выражение)

Возможно, вам знакома перфокарта — картонка, в которой можно пробивать отверстия. С помощью перфокарты удобно хранить информацию в машиночитаемом виде: есть отверстие — 1, нет — 0. У перфокарты есть важное свойство: любой 0 легко меняется на 1, но обратная замена крайне затруднена. Память с таким свойством называют *памятью с однократной записью (ПОЗ)*, или по-английски *Write-Once Memory (WOM)*. Один бит такой памяти называется *витом*.

Ограничение казалось бы не позволяет такую память перезаписывать несколько раз, но в 1982 году Р.Ривест и А.Шамир в статье «How to Reuse a “Write-Once” Memory» предложили кодировку, позволяющую ценой некоторого увеличения объёма носителя предоставить возможность перезаписи информации.

Например, с помощью трёх витов оказывается возможно записать некоторое двухбитовое число, а потом однократно заменить его на другое:

число	*кодировка для первой записи*	*кодировка для второй записи*
00	000	111
01	100	011
10	010	101
11	001	110

Допустим, можно сперва записать 10, используя код 010, а потом записать число 01 на его место, заменив третий вит на 1 и получив код 011.

Недавно эта область исследований получила второе дыхание в связи с распространением флэш-памяти (обладающей очень похожими свойствами). Ниже мы предлагаем вам задачи, связанные с данной областью:

1. Представим себе проездной билет, стоимость которого (целое число от 0 до $n-1$) запоминается с помощью k витов — скажем, компостируется при покупке. Предложите кодировку, позволяющую исключить увеличивающее стоимость изменение витов (докомпостирование билета) после покупки. Приведите по возможности точные верхние и нижние оценки на число k для вашей кодировки. Также предложите теоретические верхние и нижние оценки на количество витов в кодировках с такими свойствами.

2. В условиях п.1 предложите кодировку, исключающую любое изменение стоимости после покупки. Иными словами, кодировку, в которой любые дополнительные изменения витов делают код любого числа некорректным (не соответствующим никакому числу). Также приведите оценки для предложенной кодировки и теоретические оценки.

3. Представим себе проездной билет, в котором используется ПОЗ для хранения числа поездок. После каждой поездки число уменьшается на 1, пока не достигнет нуля. Предложите кодировку, позволяющую хранить эту информацию по возможности максимально эффективно по памяти. Дайте как теоретические, так и достигаемые вашей кодировкой верхние и нижние оценки необходимого количества витов. Убедитесь, что предложенный вами код не позволяет увеличить количество поездок в процессе перезаписи значений.

4. Пусть в ПОЗ хранится не число поездок, а оплаченная стоимость в рублях, при этом при поездке со счёта снимается либо 40, либо 45 рублей (в зависимости, например, от вида транспорта). Возможно ли с учётом этого ограничения сделать кодировку более эффективной по памяти и улучшить оценки из п.3?

5. Обобщите результат из п.4 на случай произвольного набора стоимостей поездки.

6. Рассмотрим ситуацию, когда мы записываем события на длинную ленту. Скажем, речь может идти о показаниях скорости — увеличилась ли она на 1 от предыдущего наблюдения, уменьшилась ли на 1 или осталась прежней. Сравнительно легко иметь дело с ситуациями, когда каждое следующее событие имеет ровно 2^k значений — тогда мы про каждое событие будем дописывать к ленте ровно k витов и сразу переходить к следующему. Однако, можете ли вы предложить более эффективную по памяти кодировку в той ситуации, когда количество вариантов, например, равно 3? Естественно, вы можете, помимо добавления новых витов, исправлять какие-то из предыдущих.

7. Рассмотрите п.6 для произвольного количества вариантов значений, добавляемых на каждом шаге.

8. Предложите какие-нибудь свои аналогичные задачи и кодировки, подходящие для их решения. Этот пункт также подходит для изложения кодировок, придуманных вами в процессе решения задачи, но не подошедших под условия.

Задачи 2017 года

Задача 1. Уйдём на Север

Снежная Королева возвращается обратно на Север и собирает чемоданы. За то время, что она провела вне дома, она накопила множество льдинок самой разной формы и хочет их все взять с собой. Помогите Снежной Королеве быстрее собрать вещи.

1. У Снежной Королевы есть стеллаж с плоскими квадратными чемоданами и множество льдинок треугольной формы, которыми она

дорожит. Какова наименьшая сторона плоского квадратного чемодана, в которую поместятся одновременно две плоские льдинки в форме равнобедренных прямоугольных треугольников с длинами катетов a и b, соответственно? А две льдинки в форме равносторонних треугольников? В плоские чемоданы льдинки укладываются только в один слой.

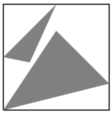


Рис. 1: Две треугольные льдинки в не самом подходящем плоском квадратном чемодане

2. Настала очередь прозрачных картин изо льда. В какой плоский чемодан квадратной формы поместятся две ледяные квадратные картины со сторонами a и b, соответственно?

3. Стеллаж с квадратными чемоданами опустел. Но в ящике комода обнаружились чемоданы самых разных форм. Первыми на глаза попалась стопка с несчётным числом плоских прямоугольных чемоданов. Как выглядят прямоугольные чемоданы с наименьшей площадm., в которые можно поместить льдинки уже рассмотренных форм?

4. Для ускорения сборов удобнее класть более двух льдинок в чемодан. В какой прямоугольный чемодан лучше всего убрать 3 одинаковые равносторонние льдинки? А 4? Что будет в случае льдинок — прямоугольных треугольников?

5. Кубические чемоданы отлично подходят для упаковки объёмных льдинок-тетраэдров. Решите задачу для различных пар таких льдинок.

6. Рассмотрите льдинки и чемоданы других форм. Например, круглые льдинки-тарелки и треугольные чемоданы.

Задача 2. Вас снимают

Пусть $I \subseteq \mathbb{R}$ является объединением непересекающихся отрезков на прямой. Обозначим за $L(I)$ длину множества I, то есть сумму длин соответствующих отрезков. Подмножество плоскости A будем называть фигурой, если оно ограничено, замкнуто и его пересечение с любой прямой есть объединение конечного числа отрезков. В частности, любой многоугольник является фигурой. Зафиксируем некоторую декартову систему координат на плоскости. Для фигуры A определим её x-снимок, как функцию $f_x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, которая по точке t на прямой OX вычисляет длину пересечения A с прямой, проходящей через t и перпендикулярной OX

$$f_x(t) = L(A \cap \{(t, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \text{ любое}\}).$$

Аналогично определим y-снимок фигуры A как

$$f_y(t) = L(A \cap \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 \mid x \text{ любое}\}).$$

1. Какая фигура обладает следующими x- и y-снимками:

$$f_x(t) = f_y(t) = \begin{cases} 0, & t \le 0 \\ \frac{7t}{12}, & 0 \le t \le 3 \\ \frac{21}{12}, & 3 \le t \le 4 \\ -\frac{7t}{12} + \frac{49}{12}, & 4 \le t \le 8 \\ 0, & 8 \le t \end{cases} ?$$

2. Найдите способ восстановить фигуру A, а также варианты её расположения по x- и y-снимкам, если известно, что
а) A — некоторый прямоугольник;
б) A — некоторый треугольник;
в) A — некоторый четырёхугольник.
Можно ли обойтись только одним снимком?

3. Приведите пример двух неравных фигур на плоскости, имеющих одинаковые x- и y-снимки.

4. Пусть A некоторая фигура. Можно ли восстановить и, если можно, то как, по x- и y-снимкам следующую информацию:
а) A имеет площадь S;
б) A является невыпуклой фигурой;
в) A является многоугольником с n вершинами;
г) A содержит фиксированную точку (x_0, y_0)?
Можно ли добиться ответов на эти вопросы, если заранее известна

дополнительная информация про A? Например, если известно, что A выпуклая и центрально-симметричная фигура?

5. Повернём исходную систему координат относительно начала отсчёта на угол α против часовой стрелки. x-снимок в новой системе координат назовём α-снимком. Так например, 0-снимок это x-снимок, $\frac{\pi}{2}$-снимок это y-снимок. Исследуйте предыдущие пункты, если вместо x- и y- снимков даны α- и β-снимки, для некоторых неравных углов α и β? Можно ли узнать дополнительную информацию (например, восстановить любую фигуру), если даны три разных снимка?

Задача 3. Целые структуры

1. Пусть даны два целых числа a и b. Множеством, подчинённым a и b назовём S, подмножество в $\mathbb{Z}$, удовлетворяющее свойствам:
а) $a, b \in S$;
б) Для любого $x \in S$ число $-x$ лежит в S;
в) Для всех x и y из S число $ax + by$ также лежит в S.
Пусть $a = 2$, а $b = 3$. Покажите, что любое подчинённое 2 и 3 множество S обязательно содержит 1.

2. Опишите наименьшее множество S, подчинённое a и b, если $a = b = 1$. Что будет, если $a = 2$, $b = 3$?

3. Рассмотрите аналогичную задачу для $a = 4$, $b = 5$.

4. При каком условии на a и b в любом a, b-подчинённом множестве S найдётся число, имеющее остаток k по модулю n для всех $0 \leq k < n$.

5. Пусть a и b взаимно просты. Покажите, что любое подчинённое a и b множество содержит 1.

6. Натуральной плотностью множества $A \subseteq \mathbb{Z}$ назовём предел отношения
$$\lim_{n \to inf ty} \frac{|\{x \in A \mid -n \leq x \leq n\}|}{2n},$$
если этот предел существует. Верно ли, что для не взаимно простых a и b размер наименьшего подчинённого a и b множества имеет натуральную плотность 0?

Задача 4. Задача №4 Буйство красок

Известный художник Петров имеет следующую манеру письма: квадратный холст $n \times n$ он разбивает на квадратики 1×1, после чего каждый квадратик закрашивает в один из k цветов, имеющихся в наличии. Так как на картине не указан верх и низ, то искусствоведы и сам Петров считают две картины, отличающиеся поворотом на 90°, одинаковыми.

1. В детстве Петров писал на холсте 2×2. Известно, что за это время он написал более 100, но менее 200 различных картин, при этом с холстов 2×2 на большие он перешёл после того, как написал картины размера 2×2 всеми доступными ему способами. Сколько красок было у Петрова в детстве? Сколько в точности картин 2×2 он написал?

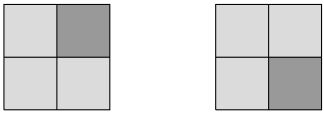


Рис. 2: Две неразличимые детские картины Петрова 2×2 на двух цветах

2. Обретя популярность, Петров переключился на масштабные проекты с холстами $n \times n$, $n \geq 3$ и числом красок k. Найдите асимптотику или формулу для числа различных картин, которые мог написать Петров на полотнах 3×3, 4×4, при $k \to \inf ty$. Оцените число возможных картин Петрова при других n или дайте точную формулу.

3. Для систематизации картин Петрова искусствоведы предложили несколько классификаций, основанных на том, что две картины Петрова не стоит различать, если они отличаются цепочкой определённых преобразований. Найдите конкретные значения, оцените при больших n и k или дайте точную формулу числа работ Петрова по классификациям, основанным на преобразованиях:
а) Поворот на 90° и отражения относительно осей симметрии квадрата;
б) Преобразования из пункта а) и преобразование, сдвигающее все строчки квадрата, кроме первой, на 1 вниз, а нижнюю строчку ставящее наверх.
в) Преобразования из пункта а) и преобразования, меняющие цвета

на картине: цвет i на цвет j, цвет j на цвет i, и не меняющее остальные цвета. Назовём такие преобразования элементарными перекрашиваниями.
г) Преобразования из пункта а) и преобразования, позволяющие в одном из столбцов сдвинуть все квадратики на 1 по циклу.

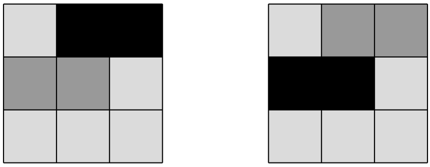


Рис. 3: Картины, отличающиеся заменой двух цветов

4. Художник Иванов решил превзойти Петрова и стал разбивать равносторонний треугольник со стороной n на треугольники со стороной 1 и раскрашивать их в k цветов. Исследуйте аналогичный предыдущим пунктам вопрос. В частности, рассмотрите классификации, разрешающие преобразования:
а) Поворот на 120°;
б) Поворот на 120° и отражения относительно осей симметрии треугольника;
в) Преобразования из пункта б) и элементарные перекрашивания;
г) Преобразования из пункта а) и преобразование, сдвигающее по циклу цвета в одном горизонтальном ряду большого треугольника.

5. Рассмотрите другие, в том числе трёхмерные, разбиения и их раскраски. Придумайте другие классификации.

Задача 5. Дискретная непрерывность

Будем говорить, что два целых числа a и b соседние, если $|a - b| \leq 1$. Пусть I — некоторое подмножество внутри целых чисел. Отображение $f : I \to \mathbb{Z}$ назовём дискретно непрерывным, если для любых двух соседних чисел $a, b \in I$ их образы $f(a)$ и $f(b)$ тоже соседние.

1. Пусть $a < b$ — два целых числа. Целочисленным отрезком $[a, b]$ будем называть подмножество целых чисел $[a, b] = \{x \in \mathbb{Z} \mid a \leq x \leq b\}$.

Пусть дано дискретно-непрерывное отображение $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$. Покажите, что для любого целого числа $x \in [f(a), f(b)]$ существует c, такое, что $a \leq c \leq b$ и $f(c) = x$.

2. Пусть $n \in \mathbb{N}$ — некоторое натуральное число. Рассмотрим функцию $\rho_1(x, y)\colon \mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^n \to \mathbb{R}$, заданную по правилу

$$\rho_1(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|, \text{ где } x = (x_1, \ldots, x_n), \text{ а } y = (y_1, \ldots, y_n).$$

Будем говорить, что точки $x, y \in \mathbb{Z}^n$ соседние, если $\rho_1(a, b) \leq 1$. Пусть A — подмножество в $\mathbb{Z}^n$, а $k \in \mathbb{N}$. Отображение $f\colon A \to \mathbb{Z}^k$ назовём дискретно-непрерывным, если для любых соседних $x, y \in A$ их образы $f(x)$ и $f(y)$ соседние в $\mathbb{Z}^k$. Для каждого натурального числа m определим множества

$$D_m^n = \{x \in \mathbb{Z}^n \mid |x_i| \leq m\} \text{ и } S_m^{n-1} = \{x \in D_m^n \mid \exists i \leq n\ |x_i| = r\}.$$

Пусть дискретно-непрерывное отображение $f\colon S_m^1 \to \mathbb{Z}^2$, а $x \in \mathbb{Z}^2$ не лежит в $f(S_m^1)$. Для любого луча l, исходящего из точки x и не содержащего точек $f(S_m^1)$, можно определить число $i_{l,f}$ его пересечений с ломаной, построенной по f. Сделаем это следующим образом:

$$i_{l,f} = \frac{1}{2} \cdot \Big|\{(a, b) \mid a,\ b \in S_m^1,\ \rho_1(a, b) = 1 \\ \text{ и } l \text{ пересекает отрезок, соединяющий } f(a) \text{ и } f(b)\}\Big|.$$

Число $\frac{1}{2}$ появляется из-за того, что одно и тоже пересечение соответствует и паре (a, b), и паре (b, a). Покажите, что чётность $i_{l,f}$ не зависит от выбора l и, следовательно, является характеристикой точки x.

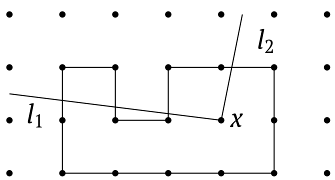


Рис. 4: Ломаная и два луча, исходящие из одной точки, с $i_{l_1,f} = 3$ и $i_{l_2,f} = 1$

3. Точку $x \in \mathbb{Z}^2$, не лежащую в $f(S^1_m)$, назовём внутренней по отношению к f, если $i_{l,f}$ нечётно, и внешней, если $i_{l,f}$ чётно. Пусть дано дискретно-непрерывное отображение $g\colon D^2_m \to \mathbb{Z}^2$. Положим $f = g|_{S^1_m}$ — сужение отображения g. Покажите, что для любой f-внутренней точки x существует $y \in D^2_k$, что $g(y) = x$.

4. Определим метрические пространства $\mathbb{Z}^{n,p}$, где $p = \infty$, или $p \geq 1$ — вещественное число, следующим образом:

$$\mathbb{Z}^{n,\infty} = \left(\mathbb{Z}^n, \max\{|x_i - y_i| : i \in \overline{1,n}\}\right);$$
$$\text{а при } p \text{ — вещественном } \mathbb{Z}^{n,p} = (\mathbb{Z}^n, \rho_p),$$

где $\rho_p(x,y) = (\sum_{1\leq i\leq n} |x_i - y_i|^p)^{1/p}$. Заметим, что если $n = 1$, то все метрики ρ_p совпадают, поэтому при $n = 1$ индекс p можно опустить. Естественным образом, расстояние ограничивается и на подмножества указанных метрических пространств.

а) Покажите, что 1-липшицевы отображения из $\mathbb{Z}^{n,1} \to \mathbb{Z}^{k,1}$ являются дискретно-непрерывными и наоборот.

б) Опишите все пары чисел L_1 и L_2, такие что отображение $f\colon \mathbb{Z}^{2,p} \to \mathbb{Z}^{2,p}$ липшицево с константой L_1 тогда и только тогда, когда оно L_2-липшицево.

в) Исследуйте взаимосвязь между условиями липшицевости для отображений $f\colon \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2$ в метриках ρ_p и ρ_q с различными константами L.

5. Пусть L — натуральное число. Покажите, что для любого L-липшицевого отображения $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ и любого целочисленного отрезка $[a,b]$

$$\frac{|f([a,b])|}{|\operatorname{conv}(f([a,b]))|} \geq \frac{1}{L},$$

где $|f([a,b])|$ — это количество точек в образе $[a,b]$, а $\operatorname{conv}(f([a,b]))$ — наименьший отрезок, содержащий $f([a,b])$.

6. Зададим расстояние на D^n_m с помощью метрики ρ_1. Сформулируйте и докажите аналог пункта 6 задачи для L-липшицевых отображений из $D^2_m \to \mathbb{Z}^{2,q}$.

7. Обобщите все указанные теоремы на случай размерности больше 2. Опишите все L-липшицевы биекции из $\mathbb{Z}^{n,p} \to \mathbb{Z}^{n,q}$ для маленьких

L.

Задача 6. Гипергеометрическая прогрессия

1. Рассмотрим следующее рекуррентное соотношение:

$$p(n)a_n = q(n)a_{n-1}, \text{ для } n > n_0 \text{ и } a_{n_0} = \lambda,$$

где λ — некоторое вещественное число, а $p(n)$ и $q(n)$ — некоторые многочлены с вещественными коэффициентами. Выведите явную формулу для его решения.

2. Последовательность из предыдущего пункта назовём гипергеометрической прогрессией. Будем говорить, что многочлены p и q определяют эту прогрессию. Являются или нет частными случаями гипергеометрической прогрессии: а) геометрическая прогрессия; б) арифметическая прогрессия; в) $a_n = n!$; г) $a_n = C_n^k$ для фиксированного k; д) $a_n = \frac{(-1)^n+1}{2}$? Если да, то какие многочлены их задают?

3. Рассмотрим рекуррентное соотношение

$$p(n)a_n = q(n)a_{n-1} + r(n)a_{n-2},$$

где $p(n)$, $q(n)$, $r(n)$ — некоторые многочлены. При каких p, q и r у такого рекуррентного соотношения нет решений в виде гипергеометрической прогрессии?

4. Исследуйте предыдущий вопрос для соотношения

$$p_0(n)a_n = p_1(n)a_{n-1} + p_2(n)a_{n-2} + \cdots + p_k(n-k)a_{n-k},$$

где k фиксировано, $p_i(n)$ — некоторые многочлены.

5. Пусть даны две гипергеометрические прогрессии a_n и b_n. При каких условиях на многочлены, задающие a_n и b_n, существуют числа $r_1(n)$ и $r_2(n)$, что $r_1(n)a_n + r_2(n)b_n = 0$ для всех n?

6. Исследуйте предыдущий вопрос для большего числа гипергеометрических прогрессий.

7. Пусть a_n и b_n — две последовательности. Определим последовательность $a * b_n$ равенством

$$a * b_n = \sum_{0 \le i \le n} a_i b_{n-i}.$$

Предположим, что a_n и b_n — гипергеометрические прогрессии. Всегда ли последовательность $a * b_n$ есть конечная сумма гипергеометрических прогрессий? Если нет, то какие условия надо наложить на a_n и b_n, чтобы это было верно? Начните со случая геометрических прогрессий.

8. Исследуйте существование решений в виде гипергеометрических функций для рекуррентного соотношения

$$p(0,n)a_n = p(1,n)a_{n-1} + \cdots + p(k,n-k)a_{n-k} + \cdots + p(n_0, n-n_0)a_{n_0},$$

где $p(n,k)$ — гипергеометрическая функция по n и по k.

Задача 7. Зависимые матрицы

1. Пусть B, C и D матрицы 2×2 с коэффициентами из $\mathbb{R}$. Линейным уравнением в матрицах относительно матрицы X назовём уравнение вида:

$$CXD = B.$$

Матрица $A \in M_2(\mathbb{R})$ называется его решением, если

$$C \cdot A \cdot D = B,$$

где $\cdot$ обозначает произведение матриц. Обозначение произведения для краткости будем опускать. Решите уравнение:

$$\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) X \left(\begin{smallmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 5 & 1 \\ 5 & 2 \end{smallmatrix}\right).$$

2. Покажите, что уравнение $CXD = B$ разрешимо тогда и только тогда, когда разрешимы уравнения $CX = B$ и $XD = B$. При каких условиях на C и D уравнение $CXD = B$ разрешимо при любых B?

3. Естественным образом, можно определить обобщённые линейные уравнения:

$$C_1XD_1 + C_2XD_2 + \cdots + C_nXD_n = B.$$

Исследуйте разрешимость таких уравнение для любых B и решите обобщённое линейное уравнение:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. Последовательность матриц вида $A_n = C^n A_0$ назовём геометрической прогрессией. Опишите все решения линейного рекуррентного соотношения $A_{n+1} = CA_nD$, являющиеся геометрическими прогрессиями. Можно ли любое решение такого рекуррентного соотношения представить в виде суммы геометрических прогрессий? В частности, ответьте на указанные вопросы для соотношения

$$A_{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} A_n \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Исследуйте аналогичный вопрос для рекуррентных соотношений вида $A_{n+1} = CA_n + A_nD$.

6. Рассмотрите рекуррентное соотношение $A_{n+1} = C_1A_nD_1 + C_2A_nD_2$. Исследуйте существование у этого рекуррентного соотношения решения в виде геометрической прогрессии. В частности, опишите все решения, являющиеся геометрическими прогрессиями для соотношения

$$A_{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} A_n \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} A_n \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

7. Исследуйте выразимость в геометрических прогрессиях решений линейных рекуррентных соотношений вида

$$A_{n+1} = C_1A_nD_1 + C_2A_{n-1}D_2,$$

а также линейных рекуррентных соотношений большего порядка.

Задача 8. Можно ли разрезать?

1. Пусть φ — некоторый угол. Покажите, что

$$\cos n\varphi = p(\cos\varphi),$$

где $p(x)$ — это многочлен степени n с целыми коэффициентами.

2. Покажите, что угол между гипотенузой и катетом в прямоугольном

треугольнике со сторонами 3, 4, 5 не равен:
а) $\frac{k\pi}{5}$, где k — целое; б) $\frac{k\pi}{l}$, где k и l — целые неотрицательные числа.

3. Можно ли так изобразить равносторонний треугольник на координатной плоскости, чтобы координаты вершин являлись рациональными числами?

4. Опишите все треугольники с рациональными координатами вершин и углами вида $\frac{k\pi}{l}$, где k и l — целые неотрицательные числа. Такие углы в дальнейшем будем называть рациональными.

5. Разрезанием многоугольника P назовём такой набор многоугольников P_i, где $1 \le i \le n$ внутри P, что $P = \bigcup_{1 \le i \le n} P_i$ и при $i \ne j$ многоугольники P_i и P_j могут пересекаться лишь по точкам на границе. Пусть дан прямоугольник $ABCD$ со сторонами a и b. Опишите все a и b, при которых его можно разрезать на три треугольника с рациональными углами. Приведите примеры разрезаемых и неразрезаемых прямоугольников.

6. Найдите критерий, при котором многоугольник может быть разрезан каким-либо образом на треугольники с рациональными углами.

7. Два многоугольника P и Q с рациональными углами, назовём рационально равносоставленными, если существует разрезание $\{P_i\}_{i\in\overline{1,n}}$ для P и разрезание $\{Q_i\}_{i\in\overline{1,n}}$ для Q, такие что фигуры P_i и Q_i равны и имеют рациональные углы для всех i. Например,

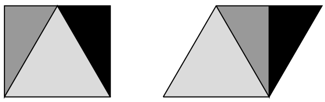


Рис. 5: Разрезание на попарно равные треугольники с рациональными углами.

Найдите необходимые и достаточные условия рациональной равносоставленности двух фигур. Приведите примеры рационально равносоставленных и не рационально равносоставленных многоугольников.

Задача 9. Порядки

Пусть M_1 и M_2 — два упорядоченных множества. Отображение $f\colon M_1 \to M_2$ называется монотонным, если для любых x и y из M_1, таких, что $x \leq y$, выполнено, что $f(x) \leq f(y)$ относительно порядка на M_2. Монотонное отображение $f\colon M_1 \to M_2$ называется изоморфизмом, если f биективно и обратное отображение $f^{-1}\colon M_2 \to M_1$ также монотонно.

1. Пусть $f\colon M \to N$ — изоморфизм двух упорядоченных множеств. Покажите, что для любого $x \in M$ множество $M_{\leq x} = \{y \in M \,|\, y \leq x\}$ изоморфно $N_{\leq f(x)} = \{y \in N \,|\, y \leq f(x)\}$.

2. Опишите все изоморфизмы из $\mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$, где $\mathcal{P}(X)$ — множество всех подмножеств множества X, упорядоченных по отношению включения $\subseteq$.

3. Пусть M_1 и M_2 — два упорядоченных множества. Тогда введём на $M_1 \times M_2$ порядок следующим образом:

   $$(x_1, y_1) \leq_{nat} (x_2, y_2) \text{ тогда и только тогда, когда } x_1 \leq x_2 \text{ и } y_1 \leq y_2.$$

   Обозначим получившееся упорядоченное множество как $M_1 \times_{nat} M_2$. Будем называть такой порядок естественным. Введём на $M_1 \times M_2$ другой порядок:

   $$\begin{aligned}(x_1, y_1) \leq_{lex} (x_2, y_2) \iff& \\ \iff\;& x_1 < x_2 \\ \text{или }\;& x_1 = x_2 \text{ и } y_1 \leq y_2\end{aligned}$$

   Обозначим это упорядоченное множество как $M_1 \times_{lex} M_2$.

   Покажите, что следующие упорядоченные множества не изоморфны между собой: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N} \times_{nat} \mathbb{N}$, $\mathbb{N} \times_{lex} \mathbb{N}$, $\mathbb{Z} \times_{nat} \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} \times_{lex} \mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$.

4. Изоморфны или нет следующие множества: $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q} \times_{lex} \mathbb{R}$, $\mathbb{Z} \times_{lex} \mathbb{R}$, $\mathbb{Q} \times_{lex} \mathbb{R}$, $\mathbb{R} \times_{lex} \mathbb{R} \times_{lex} \mathbb{R}$?

5. Какие из следующих множеств изоморфны: $(\mathbb{Z} \times_{lex} \mathbb{Z}) \times_{nat} \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} \times_{lex} (\mathbb{Z} \times_{nat} \mathbb{Z})$, $(\mathbb{Z} \times_{lex} \mathbb{N}) \times_{nat} \mathbb{Z}$?

6. Рассмотрите предыдущий вопрос, когда сомножителей больше чем три, “скобки” можно расставлять произвольным образом и на про-

изведениях можно ввести операцию одним из двух описанных выше способов.

7. Опишите все изоморфизмы между найденными парами изоморфных упорядоченных множеств.

Задача 10. Лучше меньше, да лучше

Пусть a_n — некоторая последовательность вещественных чисел, такая, что ряд $\sum_{n=1}^{\inf ty} |a_n|$ сходится. Определим $S(\{a_n\})$ как множество всех подсумм ряда $\sum_{n=1}^{\inf ty} a_n$, а именно:

$$S(\{a_n\}) = \big\{x \in \mathbb{R} \,|\, \exists \Gamma \subseteq \mathbb{N}, \text{ что } x = \sum_{k \in \Gamma} a_k\big\}.$$

1. Пусть $a_n = \frac{1}{2^n}$. Найдите $S(\{a_n\})$.

2. Будем говорить, что множество $A \subseteq \mathbb{R}$ имеет меру 0, если $\forall \varepsilon > 0$ существует не более чем счётный набор интервалов (x_k, y_k), таких что
$$A \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} (x_k, y_k) \text{ и } \sum_{k \in \mathbb{N}} |y_k - x_k| < \varepsilon.$$
Рассмотрим последовательность $a_n = \left(\frac{2}{5}\right)^n$. Покажите, что $S(\{a_n\})$ имеет меру 0.

3. Покажите, что $S(\{\frac{1}{n^2}\})$ содержит внутри себя некоторый отрезок ненулевой длины.

4. Мерой замкнутого множества A на прямой назовём
$$\mu(A) = \inf\big\{t \in \mathbb{R} \mid \text{существует набор интервалов } (x_k, y_k),$$
$$\text{что } A \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} (x_k, y_k) \text{ и } \sum_{k \in \mathbb{N}} |y_k - x_k| = t\big\}.$$
Приведите пример последовательности a_n, что $S(\{a_n\})$ не содержит отрезка, но является множеством ненулевой меры. Что можно сказать про меру $S(\{a_n\})$, где a_n — геометрическая прогрессия?

5. Рассмотрим множество $\mathbb{C}$ всех комплексных чисел. Будем говорить, что последовательность комплексных чисел x_n сходится к некоторому числу x, если последовательности из вещественных и мнимых

частей $\Re x_n$ и $\Im x_n$ сходятся к $\Re x$ и $\Im x$, соответственно. Таким образом, возникает возможность по последовательности комплексных чисел a_n определить

$$S(\{a_n\}) = \Big\{x \in \mathbb{C} \,|\, \exists \Gamma \subseteq \mathbb{N}, \text{ что } x = \sum_{k\in\Gamma} a_k\Big\},$$

где под суммой ряда подразумевается предел последовательности

$$x_n = \sum_{\substack{k\in\Gamma\\ k\le n}} a_k.$$

Опишите $S(\{\left(\frac{1}{2i}\right)^n\})$. Найдите последовательность a_n, что $S(\{a_n\})$ — круг радиуса 1 на плоскости.

6. Дайте определение меры замкнутого множества на плоскости и постройте пример последовательности a_n, что $S(\{a_n\})$ является множеством ненулевой меры и не содержит ни одного круга.

7. Рассмотрите последовательности в $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$, отличные от геометрической прогрессии. Предложите способ узнать $\mu(S(\{a_n\}))$. Насколько произвольным может быть множество вида $S(\{a_n\})$?

Задачи 2016 года

Задача 1. Геометрическая вероятность

Пункты этой задачи связаны с расположениями различных случайно взятых геометрических фигур. Что в каждом конкретном случае следует подразумевать под случайной фигурой того или иного вида, находится во власти решающего задачу, хотя, безусловно, требует обоснований. Одно можно сказать наверняка: вероятность — это число от 0 до 1.

1. Пусть на плоскости задана квадратная решётка со стороной 1. Возьмём число $\varepsilon > 0$ и вокруг точек решётки построим круги радиуса ε. Какова вероятность для случайной точки не попасть в объединение этих кругов?

2. На плоскость, расчерченную параллельными прямыми на расстоянии h друг от друга падает случайный отрезок длины меньшей или равной a. Какова вероятность того, что этот отрезок пересечёт ка-

кую-то прямую? А каково математическое ожидание числа точек пересечения?

3. Та же задача, но теперь вместо отрезка на плоскость попадает крестик — пара отрезков одинаковой фиксированной длины a, пересекающихся в своих центрах и перпендикулярных друг-другу. А что будет, если угол между отрезками не равен $\pi/2$?

4. Пусть дан некий круг радиуса r. Какова вероятность того, что конец отрезка длины a лежит за пределами круга, если это случайный отрезок, чья середина лежит в круге?

5. Пусть плоскость замощена одинаковыми параллелограммами. На плоскость кидают случайный параллелограмм, среди тех

   а) у которых площадь меньше или равна S.

   б) у которых длина сторон меньше a.

   в) у которых длины диагоналей меньше a.

   Какова вероятность того, что вершина какого-то параллелограмма из замощения лежит в случайном параллелограмме?

6. А если рассмотреть случайный эллипс с такими условиями?

7. Рассмотрим случайный четырёхугольник с длинами сторон a, b, c, d. Какова вероятность, что он будет содержать точку из решётки? Какова вероятность, что он будет пересекаться с набором параллельных линий, расстояние между которыми равно h?

8. А что такое случайный n-угольник на плоскости с какими-то ограничениями? Какова вероятность для него содержать какую-то точку из решётки или пересекаться с семейством параллельных прямых?

Задача 2. Гипернатуральные числа

1. Рассмотрим натуральные числа $n \neq 1$, m_1 и m_2. Покажите, что $n^{m_1} - 1 \,\vdots\, n^{m_2} - 1$ тогда и только тогда, когда $m_1 \,\vdots\, m_2$.

2. Покажите, что для всех взаимнопростых чисел m и n существуют такие натуральные k и l, что $m^l - 1 \,\vdots\, n$ и $n^k - 1 \,\vdots\, m$.

3. Гипернатуральным числом назовём отображение из множества $\mathbb{P}$ простых чисел в множество $\mathbb{N} \cup \{0, \infty\}$. Естественным образом каждому натуральному числу можно сопоставить такое отображение, а именно, если $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_n^{\alpha_n}$, где p_i - различные простые, то соответствующее отображение задано формулой

$$n(q) = \begin{cases} \alpha_i, & q = p_i \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Также можно определить произведение, наименьшее общее кратное и наибольший общий делитель по следующим формулам:

$$x_1 \cdot x_2(q) = x_1(q) + x_2(q),$$

$$\text{НОК}\,(x_1, x_2)(q) = \max\,(x_1(q), x_2(q)),$$

$$\text{НОД}\,(x_1, x_2)(q) = \min(x_1(q), x_2(q)).$$

Будем говорить, что $x \mathrel{\vdots} y$, если $\forall q \in \mathbb{P}\ x(q) \geq y(q)$. Рассмотрим некоторое множество A гипернатуральных чисел. Определим наименьшее общее кратное всех элементов из A по формуле $\text{НОК}\,(A)(q) = \sup\limits_{x \in A}\{x(q)\}$. Теперь для гипернатурального числа x и натурального n определим

$$n^x - 1 = \text{НОК}\,\left(\{n^m - 1 \mid m \in \mathbb{N},\, x \mathrel{\vdots} m\}\right).$$

Решите следующие задачи:

а) Вычислите $3^x - 1$, $5^x - 1$ и, в целом, $p^x - 1$, где p-простое, а $x = (\infty, \infty, \dots)$.

б) Верно ли, что $n^x - 1 = n^y - 1$ тогда и только тогда, когда $x = y$, где x и y гипернатуральные, $n \in \mathbb{N}$.

в) Покажите, что уравнение $3^x - 1 = 5^y - 1$ неразрешимо в гипернатуральных числах. Аналогично покажите, что уравнение $3^x - 1 = 11^y - 1$ не имеет гипернатуральных решений.

4. Пусть $l^\infty = \text{НОК}\,(\{l^n \mid n \in \mathbb{N}\})$. Попробуйте найти $p^{l^\infty} - 1$ для некоторых простых p и l.

5. Попробуйте разобрать случай уравнения $p^x - 1 = l^y - 1$ для бесконечных серий простых чисел или дайте ответ для произвольных простых.

6. Бывают ли решения у уравнения $n^x - 1 = m^y - 1$, когда n и m взаимнопростые натуральные числа? А когда не взаимнопростые?

7. Попробуйте решить другие уравнения в гипернатуральных числах, например, $n^x - a = n^y - b$.

Задача 3. Шоколадки

Мальчик Коля пришёл в магазин выбирать шоколадку в поход. Так как вкусам своих товарищей он не видел возможности угодить, то Коля решил из всех шоколадок выбрать ту, которую проще всего поделить поровну. А именно, пусть шоколадка представляет собой прямоугольник $a \times b$, $a, b \in \mathbb{N}$, состоящий из $a \cdot b$ долек. Колю интересуют те формы шоколадок, где число долек делится поровну между участниками похода. Но вот беда, Коля точно не знает, сколько людей идёт в поход.

1. Считая, что в походе с одинаковой вероятностью могут оказаться от 2 до 10 человек, найдите все такие формы шоколадок из не более чем 100 долек, количество долек в которых с наибольшей вероятностью будет делиться на количество участников похода. Сколько различных конфигураций подойдёт? А если не более 50-ти долек?

2. При заданных ограничениях на размер шоколадки и на количество участников похода, те шоколадки, которые с наибольшей вероятностью делятся поровну, будем называть оптимальными. Решение с наименьшим числом долек будем назвать минимальной оптимальной шоколадкой.

   а) Покажите, что при фиксированном максимальном числе участников похода и росте ограничения на число шоколадок размер минимальной оптимальной шоколадки стабилизируется. Как описать размер (количество долек) минимальной шоколадки в зависимости от ограничения на число человек? Оцените, с какого места ограничение на размер не имеет значения.

   б) Покажите, что при фиксированной верхней оценке на размер шоколадки и росте возможного числа людей, количество долек в минимальной шоколадке стабилизируется. Опишите и оцените размер минимальной шоколадки после стабилизации.

   в) Сколько различных конфигураций для минимальных шоколадок из пунктов а) и б)?

3. Опишите алгоритм построения оптимальной шоколадки при имеющихся ограничениях. Какова сложность Вашего алгоритма?

4. Допустим теперь, что в магазине бывают не все шоколадки, а только вида $a \times b$, где $b \geq a \geq \varepsilon b$, для некоторого фиксированного $\varepsilon \leq 1$. Изменится ли количество долек в минимальной оптимальной шоколадке с таким условием? Оцените количество оптимальных шоколадок, удовлетворяющих этому условию.

5. Рассмотрим ситуацию, когда каждый из d людей, которым Коля предложил идти в поход, пойдут в него — i-ый с вероятностью $p_i \leq 1$. Будучи несколько ленивым, Коля хочет найти не самое оптимальное, а ε-оптимальное решение, то есть такую шоколадку, которая делится нацело между участниками с вероятностью в $\varepsilon \leq 1$ раз меньше, чем для оптимальной шоколадки. Предложите свои варианты решения этой задачи, если:

а) Для всякого $1 \leq i \leq d$ $p_i = p < 1$.

б) ε достаточно маленькое ($\varepsilon = \frac{1}{100}$).

Задача 4. Матрицы и периоды

1. Рассмотрим целочисленную матрицу 2×2

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Возьмём некоторый целочисленный вектор $\binom{x}{y}$, натуральное число n и построим последовательность

$$x_k = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mod n.$$

Здесь и далее под записью $\mod n$ подразумевается взятие остатка от деления на n. Покажите, что эта последовательность будет чисто периодической, то есть существует такое $m \in \mathbb{N}$ со свойством $x_{k+m} = x_k$ для любого $k \in \mathbb{N}$. Каков период этой последовательности в зависимости от x, y и n?

2. Рассмотрим целочисленную матрицу, некоторый начальный вектор и натуральное число n. Рассмотрим последовательность, аналогичную предыдущему пункту

$$x_k = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mod n.$$

а) Покажите, что эта последовательность не обязательно чисто периодическая.

б) Тем не менее, период у этой последовательности есть, то есть найдётся такое m, что для всех достаточно больших $k > N$ выполнено $x_{k+m} = x_k$.

в) Оцените период этой последовательности в зависимости от n. Достигается ли Ваша оценка для какой-либо матрицы?

г) Как описать те матрицы, последовательности для которых всегда будут чисто периодичны для любых x, y и n?

3. Рассмотрим матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

а) Чему равны периоды последовательностей для начального вектора $\binom{1}{0}$, если число n — некоторое простое число?

б) Покажите, что если $n|l$, то тогда $\pi(n)|\pi(l)$, где $|$ означает то, что первое число делит второе, а $\pi(n)$, сокращение для $\pi(A, x, n)$, период последовательности, построенной по матрице A, начальному вектору x и некоторому n.

в) Попробуйте связать периоды по модулю n, m и nm.

4. Как изменится период, если для указанных выше матриц в качестве начального вектора взять не вектор $\binom{1}{0}$, а другой?

5. Рассмотрите аналогичную задачу для матриц произвольного размера.

Задача 5. Отмеченные точки

На плоскости отметим несколько точек $P_1, \ldots, P_n$. Будем пошагового добавлять новые точки по следующему правилу: если точки P и P', Q и Q' уже отмечены, а отрезки PP' и QQ' пересекаются по единственной точке N, то эта точка будет отмечена на следующем шаге, если не была отмечена ранее.

1. **а)** Покажите, что если изначально точек было не более 4, то после первого шага нельзя будет отметить ни одной новой точки.

б) Найдите все такие конфигурации изначальных точек, что после некоторого числа шагов точек добавить уже нельзя.

2. Покажите, что есть такая комбинация из более чем пяти точек, к которой после любого шага всё равно можно добавить точки.

3. Рассмотрим множество $M_i = M_{i,P_1,\ldots,P_n}$ — множество всех точек, которые были отмечены на шаге i, если мы стартовали с $P_1, \ldots, P_n$. Определим $M_\infty = \bigcup\limits_{i=0}^{\infty} M_i$ — множество всех точек добавленных на каком-либо шаге.

4. Дайте описание для $cl(M_\infty)$ — замыкания множества M_∞, где под замыканием множества A подразумевается множество всех точек x плоскости, что для всякого $\varepsilon > 0$ существует точка $y \in A$ такая, что $\mathrm{dist}(x, y) < \varepsilon$, где $\mathrm{dist}(x, y)$ обозначает обычное расстояние. Покажите, что получившаяся фигура обязательно является выпуклым многоугольником в объединении с конечным числом точек.

5. Рассмотрим выпуклый многоугольник P с вершинами $P_1, \ldots, P_n$. Построим по этим вершинам множество $Q = cl(M_\infty)$. Каким может быть отношение площади Q к площади P?

6. Каково отношение площадей в случае правильного n-угольника для $n \geq 5$?

7. Рассмотрим выпуклый прямоугольник $ABCD$. Рассмотрим какую-то точку E внутри. При каком выборе E достигается максимум площади $cl\left(M_{\infty,A,B,C,D,E}\right)$? Для параллелограмма? Для произвольного выпуклого четырёхугольника? Каково будет отношение площади получившегося множества к площади изначальной фигуры?

8. Исследуйте другие вопросы, связанные с площадями для многоугольников с большим числом сторон. Рассмотрите ситуацию в трёх измерениях — как нужно модифицировать определение?

9. Что будет, если исходных точек суть бесконечно много? Например, если исходное множество точек — это объединение некоторого количества кривых?

Задача 6. Раздутия и стягивания

1. Рассмотрение этой задачи мы начнём с описания некоторого множества преобразований отрезка $[0, 1]$ в себя. Число вида $\frac{k}{2^n}$, где $k, n \in \mathbb{Z}$ будем называть двоично-рациональным. Разбиением отрезка называется набор конечного числа точек в нём, а отрезки, соединяющие соседние точки между собой или крайние с концами отрезка — элементами разбиения. Будем называть отрезок $[a, b]$ диадическим, если $a = \frac{k}{2^n}$, а $b = \frac{k+1}{2^n}$, где $k, n \in \mathbb{N}$. Непрерывное отображение $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ называется кусочно-линейным, если существует разбиение отрезка $[a, b]$, так что $f(x) = qx + r$ для некоторых $q, r \in \mathbb{R}$ на каждом элементе разбиения. Кусочно-линейную непрерывную биекцию f из отрезка $[a, b]$ в отрезок $[c, d]$ такую, что найдётся разбиение $[a, b]$, что его элементы I_k — диадические отрезки, а $f|_{I_k}(x) = 2^n x + r$ для некоторых $n \in \mathbb{Z}$, $r \in \mathbb{R}$, будем называть pl_2-преобразованием отрезка $[a, b]$ в отрезок $[c, d]$. Рассмотрим множество F, состоящее из всех pl_2-преобразований отрезка $[0, 1]$ в себя. Например, такая функция лежит в F:

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \le x < \frac{1}{4} \\ x + \frac{1}{4}, & \frac{1}{4} \le x < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}, & \frac{1}{2} \le x \le 1 \end{cases}.$$

а) Покажите, что если $f \in F$, то $f(0) = 0,\ f(1) = 1$.

б) Покажите, что отображение из F переводит некоторое разбиение отрезка $[0, 1]$ на диадические отрезки в новое разбиение $[0, 1]$ на диадические.

в) Покажите, что если $f, g \in F$, то $f \circ g \in F$.

г) Покажите, что если $f \in F$, то $f^{-1} \in F$.

д) Покажите, что если $f \in F,\ f \ne \mathrm{Id}_{[0,1]}$, тогда $f^{(n)} \ne \mathrm{Id}_{[0,1]}$. Иными словами, F образует группу относительно композиции, в которой нет элементов конечного порядка.

е) Покажите, что для любых двух разбиений отрезка $[0, 1]$ на одинаковое число диадических интервалов существует единственная $f \in F$, переводящая каждый элемент первого разбиения линейно в элемент второго.

ё) Покажите, что у любого такого преобразования $f \in F$ число неподвижных точек, не лежащих ни на каком неподвижном отрезке, конечно. Чем можно ограничить число этих неподвижных точек? А у $f^{(n)}$? Здесь $f^{(n)}$ обозначает композицию f с собой n раз.

ж) А сколько может быть различных неподвижных точек у преобразования, которое построено с помощью операции композиции из двух функций f, g в зависимости от числа их неподвижных точек?

з) Обобщите все указанные свойства на pl_2-преобразования между произвольными отрезками.

2. Циклическим pl_2-преобразованием $f\colon [a,b] \to [c,d]$ отрезков с двоично-рациональными концами называется отображение $f\colon [a,b] \to [c,d]$, разрывное не более чем в одной точке x_1, такое что $f(a) = f(b)$, $f(x_1) = d$, функция $f|_{[a,x_1]}$ — pl_2-преобразование на образ, а $g = f|_{(x_1,b]}$ — доопределяется до pl_2-преобразования на образ посредством того, что $g(x_1) = c$. В частности, если точки разрыва нет, то это просто pl_2-преобразование.

а) Покажите, что такое отображение задаёт непрерывную биекцию из окружности длины $b - a$ в окружность длины $d - c$.

б) Определите композицию циклических pl_2-преобразований, так, чтобы оно было согласовано с композицией обычных pl_2-преобразований.

в) Покажите, что множество T всех циклических pl_2-преобразований $[0, 1]$ в себя образует группу.

г) Опишите элементы конечного порядка в этой группе.

3. Покажите, что для любого отрезка $[a, b]$, $a = k/2^n$, $b = l/2^m$ существует pl_2-преобразование $f\colon [a, b] \to [0, 1]$, $k, l, n, m \in \mathbb{Z}$.

4. Весом на отрезке $[0, n]$, $n \in \mathbb{N}$ назовём функцию $W\colon V \to \mathbb{Z}$, где $V = \{0, 1, \ldots, n\}$. Пусть даны отрезки $[0, n]$, $[0, n + 1]$ и веса W, W_1 на них. Будем говорить, что эти два отрезка с весом связаны преобразованием раздутия в отрезке $[i, i + 1]$, $i < n, i \in \mathbb{N}$, если для

pl_2-преобразования $f\colon [0,n] \to [0,n+1]$, заданного по формуле

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0,i] \\ 2x-i, & x \in [i,i+1] \\ x+1, & x \in [i+1,n] \end{cases}$$

и переводящего целые точки в целые, верно

$$W_1(k) = \begin{cases} W(f^{-1}(k)), & k \neq i, i+1, i+2 \\ W(f^{-1}(k)) - 1, & k \in \{i, i+2\} \\ -1, & k = i+1 \end{cases}.$$

Обратное преобразование f^{-1} назовём стягиванием точки $x = i+1$ на взвешенном отрезке $[0,n+1]$. Вес W на отрезке $[0,n]$ называется циклическим, если $W(0) = W(n)$. Если $i \neq 0, n-1$, то циклическое раздутие отрезка $[0,n]$ с циклическим весом W в отрезке $[i,i+1]$ - это просто раздутие в соответствующем отрезке (проверьте, что новый вес в этом случае тоже циклический). В случае $i = 0$, надо лишь уменьшить $W_1(n+1) = W(n) - 1 = W(0) - 1 = W_1(0)$, так, чтобы новый вес стал циклическим. В случае $i = n-1$ определим циклическое pl_2-преобразование

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & x \in [0,n-1] \\ 2x-n+2, & x \in [n-1, n-\frac{1}{2}] \\ 2x-2n+1, & x \in (n-\frac{1}{2}, n] \end{cases}.$$

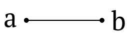
Веса вводятся так же, через формулы для прообразов и соотношение $W_1(n+1) = W_1(0) = -1$. Стягивание — обратное преобразование.

Теперь, если есть набор отрезков с весами $\Gamma_0, \ldots, \Gamma_n$ и преобразований $f_i\colon \Gamma_{i-1} \to \Gamma_i$, каждое из которых либо раздутие, либо стягивание, то композиция $f_n \circ \ldots \circ f_1$ называется преобразованием $\Gamma_0 \to \Gamma_n$. Аналогично определим циклическое преобразование отрезков с циклическими весами. Отрезок с циклическим весом будем рисовать как замкнутую ломанную, где около вершин подписаны веса. Отрезок с весом, который нельзя стянуть, называется минимальным.

а) Какие pl_2-преобразования f получаются допустимыми для отрезка [0,1] и всех возможных весов на нём?

б) Покажите, что любой отрезок с весом преобразуется в минимальный. Аналогично для циклических весов и циклических преобразований. Единственным ли образом определён соответствующий минимальный отрезок с весом? Попробуйте найти какой-нибудь канонический минимальный отрезок с весом, в который преобразуется данный. Какая у него длина?

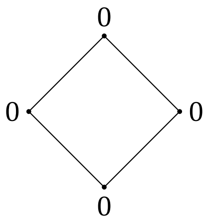
в) Покажите, что у взвешенного разбиения отрезка [0,1] с точками разбиения на концах



где $a, b \in \mathbb{Z}$ веса, нет нетривиальных преобразований в себя.

г) Покажите, что у любого взвешенного отрезка нет нетривиальных преобразований в себя. Но могут быть такие, которые меняют веса на концах.

д) Опишите группу циклических преобразований.



е) Попробуйте описать группу циклических преобразований любого отрезка с нулевыми весами.

5. Считая, что мы определили допустимые преобразования цепей и циклов как графов, дайте определения допустимых преобразований произвольных графов.

Задача 7. Учимся считать

Пусть F - произвольное поле, через

$$\binom{n}{k}$$

будем обозначать число сочетаний из n элементов по k.

1. Посчитайте, чему равно

$$-\binom{b+1}{0}\binom{b+c}{b-1}\binom{c+1}{c-1}+\binom{b+1}{1}\binom{b+c}{b}\binom{c+1}{c}-\\ -\binom{b+1}{2}\binom{b+c}{b+1}\binom{c+1}{c+1}.$$

Ответ будет заметно короче этого выражения!

2. Представьте следующие числа в виде произведения и частного каких-то факториалов:

$$\binom{4}{0}^3-\binom{4}{1}^3+\binom{4}{2}^3-\binom{4}{3}^3+\binom{4}{4}^3$$

и

$$\binom{6}{0}^3-\binom{6}{1}^3+\binom{6}{2}^3-\binom{6}{3}^3+\binom{6}{4}^3-\binom{6}{5}^3+\binom{6}{6}^3.$$

3. Попытайтесь как-то обобщить без строгого доказательства полученные результаты.

4. Посчитайте, чему равен коэффициент многочлена $[x^2y^2z^2](x-y)^2(y-z)^2(z-x)^2$, где $[\,]$ означает взятие коэффициента при соответствующем мономе. А $[x^2y^2z^2](x-y)(x-y-1)(y-z)(y-z-1)(z-x)(z-x-1)$? В каких целочисленных точках куба $(0\le x\le 3)\times(0\le y\le 3)\times(0\le z\le 3)$ эти многочлены принимают ненулевые значения? Что можно сказать про значения этих многочленов в целых точках данного куба и про указанный коэффициент?

5. Докажите интерполяционную формулу Лагранжа: если C - произвольное подмножество F размера $d+1$, а f - многочлен степени не выше d, то

$$f=\sum_{a\in C}f(a)\prod_{c\in C,c\neq a}\frac{x-c}{a-c}.$$

6. Пусть $f\in F[x_1,x_2]$ - многочлен от двух переменных суммарной степени $deg(f)\le d_1+d_2$, а C_1,C_2 - произвольные подмножества F размера $|C_i|\ge d_i+1$. Тогда

$$\sum_{c_1\in C_1}\sum_{c_2\in C_2}\frac{f(c_1,c_2)}{\phi_1'(c_1)\phi_2'(c_2)}=[x_1^{d_1}x_2^{d_2}]f(x_1,x_2),$$

где $\phi_i(z) = \prod_{c \in C_i} (z - c)$.

7. Постарайтесь усилить и доказать теорему из пункта 6. Можете ли Вы придумать способ выразить коэффициент многочлена при произвольном мономе через его значение в заданных точках (как, например, в предыдущем пункте)?

8. Постарайтесь посчитать, чему равен коэффициент многочлена

$$[x^a y^a z^a](x-y)^a(y-z)^a(z-x)^a$$

двумя разными способами и получить отсюда загадочное тождество.

9. Постарайтесь придумать тождество, обобщающее тождества всех пунктов этой задачи, и доказать его.

Задача 8. Разрезания куба

1. Рассмотрим куб $3 \times 3 \times 3$. Мы хотим разрезать его на кубики $1 \times 1 \times 1$. За один раз можно сделать разрез в одной плоскости, при этом перед следующим разрезом можно переставлять в пространстве уже отрезанные части. За какое минимальное число разрезов можно справиться?

2. Рассмотрите теперь куб $n \times n \times n$. За сколько разрезаний можно справиться? Объясните, почему за меньшее число нельзя?

3. А сколькими разными способами можно произвести такое разрезание (способы различны, если на каком-то шаге от кубика отрезаны разные множества)? А если называть разрезания разными, когда на каком-то шаге в них отличаются наборы отрезанных фигур?

4. Рассмотрим равносторонний треугольник на плоскости с длиной стороны n. Мы хотим разрезать его на равносторонние треугольники с длинной стороны 1. За сколько разрезаний это возможно? Сколькими способами?

5. Рассмотрите аналогичную задачу для d-мерного куба и d-мерного симплекса.

6. Проверьте, что трёхмерный куб $n \times n \times n$ можно разрезать на $4n^3$ прямоугольных тетраэдров и n^3 правильных тетраэдров. Каково наименьшее число разрезаний?

7. Рассмотрите другие возможные разрезания.

Задача 9. Маляры

Графом $G = (V, E)$ называется множество V и симметричное отношение инцидентности $E \subset V \times V$. Множество V называется множеством вершин, а E — множеством ребер. Если $E \cap \{(v, v) | v \in V\} = \varnothing$, то говорят, что в графе нет петель. Мы будем рассматривать только такие графы.

Правильной раскраской графа G в n цветов называется отображение $col : V \to [n] = \{1, 2, \dots, n\}$ такое, что никаким двум инцидентным вершинам не сопоставляется один и тот же цвет, то есть $(v, v') \in E \Rightarrow col(v) \neq col(v')$. Хроматическим числом графа G называется наименьшее n, для которого существует правильная раскраска в n цветов. Хроматическое число обозначается $\chi(G)$.

Пусть (M, d) — метрическое пространство. Положим, $V = M$ и

$$E = \{(m, m') \in M \times M \mid d(m, m') = 1\}.$$

Тогда по определению $\chi(M) = \chi(G)$, где $G = (V, E)$.

Во всех последующих пунктах через $\mathbb{R}$ обозначается множество вещественных чисел, через $\mathbb{R}^n$ обозначается метрическое пространство, точки которого являются упорядоченными наборами из n чисел, а расстояние определяется по формуле

$$d((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (x_j - y_j)^2}.$$

Все подмножества $\mathbb{R}^n$ считаются метрическими пространствами с индуцированной из $\mathbb{R}^n$ метрикой.

1. Докажите, что $\chi(\mathbb{R}^2) \geq 4$, то есть плоскость нельзя раскрасить в 3 цвета. Предъявите раскраску плоскости в 7 цветов: $\chi(\mathbb{R}^2) \leq 7$.

2. Докажите, что $\chi(\mathbb{R}^n) \geq n + 2$.

3. Зафиксируем положительное число $\varepsilon < \sqrt{3/7}$. Покажите, что $5 \leq \chi(\mathbb{R}^2 \times [0, \varepsilon]) \leq 7$.

4. Зафиксируем положительное число $\varepsilon < 10^{-3}$. Покажите, что $\chi(\mathbb{R}^2 \times [0, \varepsilon]^2) \geq 6$

5. Зафиксируем простое число p. Через $\mathbb{F}_p$ будем обозначать поле из p элементов. Пусть n — натуральное число, рассмотрим граф $G_n^p = (V_n^{(p)}, E_n^{(p)})$, где $V_n^{(p)} = (\mathbb{F}_p)^n$, а $E_n^{(p)} = \{(v, w) \in V_n^{(p)} \times V_n^{(p)} \mid v \cdot w = 1\}$, где
$$(v_1, \dots, v_n) \cdot (w_1, \dots, w_n) = \sum_{j=1}^{n} v_j w_j.$$
Оцените $\chi(G_n^2)$, $\chi(G_n^3)$ при больших n.

6. Оцените $\chi(G_n^p)$ при больших n для произвольного p.

Задача 10. Как подгонять и не оплошать

В некотором конкурсе участвуют n команд из k участников. Команды уже отыграли, и осталось лишь определить победителя. При равенстве очков одно место может распределиться среди нескольких команд (как на математической олимпиаде).

Каждый участник команды заработал некоторую оценку из интервала $[0, 1]$. Таким образом, результаты команд, исходя из которых надо их упорядочить, записаны невозрастающими последовательностями из k неотрицательных чисел. И для того, чтобы подвести итог, необходимо придумать функцию $f\colon [0, 1]^k \to \mathbb{R}$, которая будет вычислять окончательный результат каждой команды.

А теперь — главный нюанс. Выбор этой функции целиком во власти жюри. Предположим, что член жюри, который отвечает за выбор функции, пытается предложить капитанам команд подобрать f таким образом, чтобы команда этого капитана не оказалась, ммм..., в последних рядах.

Но не всё так просто. С одной стороны понятно, что стоит пообещать первое место наибольшему числу команд, однако, если ответственный обнадёжит тем, что потом не сможет сделать, то обиженная команда обязательно разболтает о его предложении.

Вдобавок, Комитетом По Защите Прав Олимпиадников установлены следующие правила: функция f должна иметь вид
$$f(x_1, \dots, x_k) = \left(\sum_{j=1}^{k} w_j x_j^l \right)^{1/l}$$
для некоторого вещественного числа $l \geq 1$ и весов $w_1 \geq w_2 \geq \dots \geq w_k > 0$.

1. Пусть $k = 3,\ n = 4$ и результаты оказались следующими:

$$(0.3, 0.1, 0.1),\ (0.2, 0.2, 0.1),\ (0.15, 0.14, 0.14),\ (0.13, 0.1, 0.1).$$

Стоит ли обещать помощь последней команде?

2. Будем говорить, что $(x_1, \ldots, x_k)$ мажорирует $(y_1, \ldots, y_k)$, если $\sum\limits_{i=1}^{j} x_i > \sum\limits_{i=1}^{j} y_i$ для любого j. Предположим, что ни для каких двух команд не верно, что результаты одной мажорируют результаты другой.

Какое максимальное число команд гарантировано можно вывести на первое место?

3. Пусть $A \subset [0, 1]^k$ — некоторое открытое подмножество. Вероятностью того, что результаты данной команды попали в множество A, будем считать $|A|$, где $|A|$ — объем множества A. Результаты команд считаются независимыми в совокупности.

Пусть k, n и некоторое натуральное число j фиксированы. С какой вероятностью можно подобрать $l, w_1, \ldots, w_k$ для того, чтобы вывести на первое место ровно j команд?

Задача 11. Как бы поделить

1. Многочлен $f(x) \in F[x]$ с коэффициентами из поля F называется неприводимым, если все его делители в $F[x]$ имеют вид c, $cf(x)$, $c \in F \setminus \{0\}$. Покажите, что следующие многочлены неприводимы, как многочлены с рациональными коэффициентами:

а) $x^2 + 2bx + 1$, где $b \in \mathbb{Z}$, $|b| > 1$.

б) $x^4 + 1$.

2. Разложите на неприводимые множители $x^{18} - 1$ над рациональными числами. Найдите нетривиальное разложение на натуральные множители числа $2^{18} - 1$.

3. Хорошо известно, что многочлен $\Phi_n(x) = \prod_{(k,n)=1, k<n}(x - e^{2\pi ik/n})$ является многочленом с целыми коэффициентами и что

$$x^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(x).$$

Покажите, что многочлен $\Phi_n(x)$ неприводим над $\mathbb{Q}$.

4. Для каких n многочлен Φ_n, взятый по модулю простого p (что корректно, так как он с целыми коэффициентами), приводим в поле из p элементов? Например, при $p = 11$?

5. Покажите, что над полем из p элементов многочлен $x^p - x + 1$ неприводим. Покажите, что он является делителем $x^{p^p - 1} - 1$. Делителем какого $\Phi_d(x)$ является $x^p - x + 1$?

6. Рассмотрим некоторый целочисленный многочлен $g(y) \in \mathbb{Z}[y]$. Например, $g(y) = ay^n$. Для каких $g(y)$ и d многочлен $\Phi_d(g(y))$ не является неприводимым над $\mathbb{Q}$?

7. Что можно сказать, если вместо $\Phi_d(x)$ взять какой-то другой неприводимый многочлен? Можно ли взять $g(y)$ маленькой степени (меньше степени исходного многочлена)? Бесконечно ли число таких $g(y)$?

Задача 12. Выпуклые функции

Напомним, что функция $F\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ называется выпуклой, если

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^d,\ t \in [0,1] \quad tF(x) + (1-t)F(y) \geq F(tx + (1-t)y).$$

1. Хорошо известно, что выпуклая функция из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$ непрерывна. Покажите, что это выполнено и в случае большей размерности.

2. Теперь рассмотрим ситуацию похитрее. Пусть $d = 2$ и $f(x_1, x_2)$ выпукла по каждой координате в отдельности, то есть при фиксированном x_1 она выпукла, как функция от x_2 и наоборот. Покажите, что f непрерывна.

3. Покажите то же самое для $d > 2$.

4. Пусть F выпукла и положительно однородна порядка 1, т.е. $F(\lambda x) = |\lambda| F(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}^d$. Покажите, что такая функция неотрицательна.

5. Пусть функция $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ является выпуклой по каждой переменной и положительно однородна порядка 1. Докажите, что функция F неотрицательна.

6. Функция F называется липшицевой, если существует такая $L > 0$, что
$$|f(x) - f(y)| < L|x - y| \ \forall x, y \in \mathbb{R}^d.$$

Функция $F\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ называется субгармоничной, если для всякой точки x_0 и шарика Q с центром в точке x_0 $F(x_0) \leq \frac{1}{\mathrm{Vol}(Q)} \int\limits_Q F(x)dx$, где $\mathrm{Vol}(Q)$ обозначает объём шара Q.

Пусть функция $F : \mathbb{R}^{2d} \to \mathbb{R}$ липшицева, положительно однородна порядка 1, и для каждого $j \in [1, d]$ субгармонична по переменным (x_j, x_{j+d}). Докажите, что функция F неотрицательна, если:

а) d равно единице.

б) d — произвольное натуральное число.

7. Постройте контрпример для случая нечётной размерности. Например, в $\mathbb{R}^3$.

Задачи 2015 года

Задача 1. Определители

Напомним, что на множестве квадратных матриц размера n есть функция Δ, сопоставляющая матрице некоторое число, которое называется определителем этой матрицы. Эта функция однозначно задаётся следующими условиями: если матрица A представлена в виде $(u_1, \ldots, u_n)$, где u_i столбцы чисел, то тогда

1. Если случилось так, что столбец $u_i = v + \lambda v'$, где v и v' столбцы, а λ — некоторое число, то

$$\Delta(A) = \Delta(u_1, \ldots, u_{i-1}, v, u_{i+1}, \ldots, u_n) + \lambda\Delta(u_1, \ldots, u_{i-1}, v', u_{i+1}, \ldots, u_n).$$

2. Для любых $1 \leq i < j \leq n$ выполнено

$$\Delta(A) = -\Delta(u_1, \ldots, u_{i-1}, u_j, u_{i+1}, \ldots, u_{j-1}, u_i, u_{j+1}, \ldots, u_n).$$

3. $\Delta(E) = 1$, где E матрица, такая что $E_{ij} = 0$, для $i \neq j$ и $E_{ii} = 1$.

Так, например, определитель для матрицы $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}$ размера 2 может быть вычислен по формуле

$$\Delta(A) = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}.$$

Матрица A называется симметричной, если $A_{ij} = A_{ji}$ для всех возможных i и j.

Главным минором порядка k, или просто k-ым главным минором матрицы A, называется число, равное определителю матрицы C размера k, где $C_{i,j} = A_{i,j}$ $(1 \leq i, j \leq k)$. Будем обозначать это число $\Delta_k(A)$. Последовательностью главных миноров матрицы A называется строка

$$(\Delta_1(A), \ldots, \Delta_n(A)).$$

1. Покажите, что если A симметричная матрица размера 2, составленная из вещественных чисел и её первый главный минор равен 0, то её определитель отрицателен.

2. Докажите, что для комплексных симметричных матриц 2×2 в качестве последовательности главных миноров реализуется любая строка комплексных чисел.

3. Исследуйте эти же вопросы для матриц 3×3.

4. Для любого натурального n найдите все упорядоченные наборы $(B_1, \ldots, B_n) \in F^n$, для каждого из которых найдется симметричная матрица А размера n с элементами из F, у которой последовательность главных миноров совпадает с $(B_1, \ldots, B_n)$, а F — одно из следующих множеств

- **а)** $\mathbb{R}$,
- **б)** $\mathbb{C}$,
- **в)** $\mathbb{Q}$,
- **г)** любое другое поле.

5. Исследуйте вопрос пункта 4 для целочисленных матриц, матриц с коэффициентами в целых гауссовых числах и т.д.

6. Предложите свои обобщения этой задачи и решите их.

Задача 2. Короткие дороги

В некоторой стране идёт активное строительство дорог. Основная задача состоит в том, чтобы соединить между собой все города наименьшей по общей длине системой дорог. В данном случае будем считать, что города - это точки на плоскости, а система дорог — это набор отрезков, не пересекающихся между собой нигде, за исключением, возможно, своих концов. Назовём точку точкой разветвления дорог, если в этой точке встречаются три или более дороги. Стоит отметить, что концом отрезка не обязательно является город.

1. Определите, как выглядит оптимальная система дорог, если в стране всего три города, находящихся на равном расстоянии; на разных расстояниях друг от друга. Найдите длину этой сети дорог.
2. Покажите, что для любой конфигурации городов оптимальная сеть дорог образует дерево с вершинами в городах и точках разветвления дорог.
3. Выясните, какие возможны конфигурации дорог в точках разветвления.
4. Оцените число рёбер в этом графе.
5. Найдите оптимальную конфигурацию для страны, чьи города расположены в вершинах прямоугольника; в вершинах других многоугольников.
6. Оцените длину оптимальной системы дорог для произвольного рисунка из городов; для городов, находящихся в вершинах выпуклого многоугольника. Оптимальна ли Ваша оценка?
7. Верно ли, что Ваши необходимые условия реализации графа в качестве оптимальной системы дорог являются достаточными.
8. Обобщите и решите задачу, когда точки лежат на сфере, а дороги проходят по дугам больших окружностей. Рассмотрите случай других метрических пространств.

Задача 3. Различные расстояния

Рассмотрим M некоторое множество точек в k-мерном пространстве. Пусть $D(M) = \left|\left\{r = dist\left(x_i, x_j\right) \left| x_i, x_j \in M;\ x_i \neq x_j\right.\right\}\right|$ - количество различных расстояний между точками множества M. Определим теперь

$$D_k(n) = \min_{\substack{|M|=n \\ M\subset\mathbb{R}^k}} D(M).$$

К примеру, $D_2(3) = 1$.

1. Найдите $D_2(4), D_2(5), D_2(6)$.

2. Оцените последовательность $D_2(n)$ сверху и снизу.

3. Решите пункты 1 и 2 в трёхмерном пространстве.

4. Найдите $D_n(n+2), D_n(n+3), D_n(n+4)$.

5. Верно ли, что существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} D_n(n+c)$ для любого натурального c. Если да, то чему он равен?

6. Рассмотрите предыдущий вопрос для последовательности $D_n(cn^k)$ при фиксированных c и k.

7. Верно ли, что $D_k(n)$ и $D_k(n+1)$ обязаны отличаются не более чем на 1?

8. Предложите верхнюю и нижнюю оценки для $D_k(n)$ при фиксированных k.

9. Обобщите задачу на другие пространства. Попробуйте оценить количество различных конфигураций, при которых достигается минимум (с точностью до движений и подобия).

Задача 4. Циркуляции

Пусть G - неориентированный граф со множеством рёбер E и множеством вершин V. При этом будем допускать в графе G кратные рёбра и петли. Введём множество $\overline{E} = \{(e, x, y) | e \in E;\ x, y \in V;\ x \text{ и } y \text{ — концы ребра } e\}$, каждый элемент которого задаёт ребро с выбранной ориентацией. Целочисленной циркуляцией на графе G назовём функцию $f\colon \overline{E} \to \mathbb{Z}$, удовлетворяющую двум условиям

а) $f(e, x, y) = -f(e, y, x)$.

б) Для любой вершины x $\sum\limits_{\substack{e:\ \exists y \\ (e,x,y)\in\overline{E}}} f(e, x, y) = 0$ (Закон Кирхгофа).

k-циркуляцией для $k \geq 2$ называется циркуляция f, такая что $0 < |f(x)| < k, x \in \overline{E}$.

1. Покажите, что если из связного графа G можно убрать одно ребро e, так что граф $G - e$ окажется несвязным(такое ребро будем называть мостом), то на этом графе не существует ни одной k-циркуляции ни для какого k.

2. Покажите, что 2-циркуляция на графе без мостов существует тогда и только тогда, когда степень любой вершины чётна.

3. Назовём потоковым числом графа G наименьшее такое k, что на G есть k-циркуляция. Если такого k нет, будем говорить, что потоковое число равно ∞. Будем обозначать это число как $\eta(G)$. Верно ли, что если в графе нет мостов, то $\eta(G) < \infty$?

4. Найдите $\eta(K_{2n+1})$, для различных n, где K_{2n+1} - полный граф на $2n+1$ вершине.

5. Найдите $\eta(K_4)$. Посчитайте, сколько различных k-циркуляций на K_4.

6. Найдите $\eta(K_{2n})$.

7. Пусть P - граф Петерсена. Покажите, что на этом графе нет 4-циркуляции. Верно ли, что любой граф, на котором нет 4-циркуляции содержит подразбиение графа P.

8. Пусть H - абелева группа, например группа остатков $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. H-циркуляцией называется отображение $f\colon \overline{E} \to H$, удовлетворяющее условиям а) и б). Исследуйте количество H-циркуляций на различных графах. Напишите оценку количества H-циркуляций для конечной группы H.

Задача 5. Календарь

Рассмотрим окружность радиуса $n \in \mathbb{N}$ с центром в начале некоторой фиксированной системы координат. Число n назвается календарным, если на этой окружности есть в точности 12 точек с целочисленными координатами.

1. Приведите пример календарных чисел.

2. Бесконечно ли множество календарных чисел?

3. Чему равна плотность множества календарных чисел, то есть предел
$$\lim_{x\to\infty} \frac{|\{0 < n \leq x \,|\, n - \text{ календарное }\}|}{x}.$$

4. Рассмотрите вместо окружностей эллипсы, заданные уравнением $x^2 + qy^2 = n$, где q - натуральное число без квадратов. При каких q есть такое n, что у этого уравнения есть ровно 12 решений.

5. Рассмотрите «циферблатные» числа, где каждой минуте соответствовала бы точка на окружности с целыми координатами.

6. Какое количество целых решений может быть у уравнения $x^2+qy^2 = n$?

Задача 6. Обобщение теоремы Штейнера-Лемуса

1. Пусть задано вещественное положительное число n. На сторонах AB, BC треугольника ABC отметим точки C_n и A_n соответственно так, что

$$\frac{|\widehat{BAA_n}|}{|\widehat{CAA_n}|} = \frac{|\widehat{BCC_n}|}{|\widehat{ACC_n}|} = n.$$

Известная теорема Штейнера-Лемуса утверждает, что совпадение длин бисектрисс $|AA_1| = |CC_1|$ влечет равенство длин сторон $|AB| = |BC|$. Проверьте истинность утверждения: «Отрезки AA_n и CC_n имеют равные длины тогда и только тогда, когда стороны AB и BC имеют равные длины» в каждом из следующих случаев:

а) $n = 2$

б) n — произвольное натуральное число.

в) n — произвольное положительное рациональное число.

г) n — произвольное положительное вещественное число.

2. Сформулируйте и исследуйте аналогичную задачу, если точки A_n и C_n выбираются на прямых AB, BC соответственно так, что лучи AA_n, C_n делят внешние углы при вершинах A и C треугольника ABC в равных отношениях.

3. Предложите свои обобщения или направления исследования в этой задаче и изучите их.

Задача 7. Иррациональные корни рациональных уравнений

1. Известно, что уравнение $x^4+ax^3+29x^2+bx+4 = 0$ с рациональными коэффициентами имеет корнем число $2+\sqrt{3}$. Найдите остальные корни этого уравнения.

2. Обоснуйте следующее утверждение про рациональные корни уравнения вида $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^i$ с целыми коэффициентами (если они, конечно, существуют): если x_0 — рациональный корень такого уравнения, то он обязательно равен $x_0 = \frac{p}{q}$, где p — делитель свободного члена (т.е. a_0), а q — делитель a_n. На основании этого соображения постройте алгоритм нахождения таких корней. Распространите этот алгоритм на уравнения такого же типа с рациональными коэффициентами.

3. Попробуйте предложить алгоритм определения (с обоснованием) корней вида $a + b \cdot \sqrt{2}, a + b \cdot \sqrt{3}, \ldots$ где $a, b \in \mathbb{Q}$, для таких уравнений (по крайней мере, постройте алгоритмы определения таких корней).

4. Может, вы сможете определять корни более сложного вида $a + b \cdot \sqrt{2} + c \cdot \sqrt{3}$ или $a + b \cdot \sqrt[3]{2}$?

5. Предложите алгоритм определения корней исходя из их общего вида, такого как $a + b \cdot \sqrt{m}$, $a + b \cdot \sqrt{m} + c \cdot \sqrt{k}$ и т.п., где $m, k, \ldots$ — заранее неизвестные натуральные числа.

6. Попробуйте оценить сложность предлагаемых алгоритмов.

7. Рассмотрите корни уравнений еще более сложного вида (с корнями различных степеней или с «композицией» корней и т.п.).

8. Предложите свои обобщения или направления исследования в этой задаче и изучите их (например, попробуйте рассмотреть подобные задачи для систем уравнений с двумя и более переменными, а также уравнения с коэффициентами из множества
$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \left\{x + y \cdot \sqrt{2} | x, y \in \mathbb{Q}\right\}.$$

Задача 8. Функция Эйлера

Пусть n - натуральное число, большее единицы. Обозначим за $\phi(n)$ количество таких целых $0 < x < n$, что x взаимно просто с n.

$$\phi(n) = |\{0 < x < n | (x, n) = 1\}|$$

1. Покажите, что для любого $n \geq 3$ есть такое натуральное число $k(n)$,

что
$$\underbrace{\phi(\phi(\cdots\phi(n)))}_{k(n)\text{ раз}} = \phi^{\circ k(n)}(n) = 2.$$

2. Оцените число $k(n)$ сверху и снизу, где

а) n — число вида $\{3^s 2^t\}_{s,t\in\mathbb{N}}$.

б) n есть произведение всех различных простых меньших заданного числа.

в) n — произвольное натуральное число.

3. Рассмотрим уравнение $\phi(n) = m$ относительно n. Оцените число его решений

а) сверху.

б) снизу.

4. Обобщите предыдущий пункт на случай уравнений $\phi(\phi(\cdots\phi(n))) = m$. При каких m они разрешимы? Какова плотность множества значений функции $\phi^{\circ k}$, где плотность понимается в смысле задачи 5.

5. Число n назовём совершенным, если $n = \sum\limits_{i=1}^{k(n)+1} \phi^{\circ i}(n)$. Докажите, что числа вида 3^k являются совершенными.

6. Постройте другие примеры совершенных чисел. Существуют ли совершенные числа, не делящиеся на 3? Какие числа не являются совершенными?

Задача 9. Игры с карточками

1. Есть три автомата: первый по карточке с числами (a, b), $a, b \in \mathbb{Z}$ выдаёт карточку с числами $(a - b, b)$; второй — карточку $(a + b, b)$; третий — карточку (b, a). Все автоматы возвращают заложенные в них изначально карточки.

а) Пусть у вас в начале на руках имеется карточка $(19, 86)$. Можно ли получить карточку а) $(31, 13)$; б) $(12, 21)$?

б) Попробуйте найти все карточки (x, y), которые можно получить из карточки $(19, 86)$. Докажите, что других карточек получить нельзя.

в) Пусть у вас имеется карточка с числами (a, b). Попробуйте найти все карточки (x, y), которые можно получить.

2. Есть три автомата: первый по карточке (a, b), $a, b \in \mathbb{N}$ выдаёт карточку с числами $(a+1, b+1)$; второй — карточку $(a/2, b/2)$ (он работает только тогда, когда a и b чётные); третий — по двум карточкам с числами (a, b) и (b, c) печатает карточку с числами (a, c). Все автоматы возвращают заложенные в них карточки.

а) Можно ли с помощью этих операций из карточки $(5, 19)$ получить карточку а) $(1, 50)$; б) $(1, 100)$?

б) Найдите все натуральные n, такие, что можно из карточки с числами $(5, 19)$ получить карточку $(1, n)$. Докажите, что при остальных натуральных n это сделать не получится.

в) Определите множество всех карточек (m, n), $m, n \in \mathbb{N}$, которые можно получить из карточки $(5, 19)$.

3. Пусть первоначально имеется карточка с числами (a, b), $a, b \in \mathbb{N}$, $a < b$, и автоматы такие же, как в пункте 2.

а) Для различных пар a, b определите, при каких n можно из заданной карточки (a, b) получить карточку с числами $(1, n)$? Докажите, что при остальных натуральных n это сделать не получится.

б) Для различных пар a, b определите множество всех карточек (m, n), $m, n \in \mathbb{N}$, которые можно получить из карточки (a, b).

в) Пусть первоначально имеется набор из k карточек с числами $(a_1, b_1), \ldots, (a_k, b_k)$. При каких натуральных m и n можно получить карточку с числами (m, n) (конечно, в зависимости от исходного набора карточек)?

4. Придумайте свои обобщения или направления исследования этой задачи и изучите их. Например, рассмотрите систему автоматов, способных выполнять над карточками какие-нибудь другие операции.

Задача 10. Числовые квадраты

Возьмем 9 девятиклеточных квадратов.

1. Можно ли разместить в клетках этих квадратов натуральные числа от 1 до 9 так, чтобы затем было возможно соединить все 9 квадратов в один квадратный коврик 9×9 таким образом, что одновременно выполняются условия:

а) Сумма чисел по каждой диагонали в любом девятиклеточном квадрате равнялась 15.

б) Сумма чисел в каждом из четырёх квадратов 2×2, входящих в состав девятиклеточного квадрата, а также сумма чисел, расположенных в клетках, прилегающих к сторонам центрального квадратика, равнялась 16 в первом девятиклеточном квадрате коврика, 17 - во втором, 18 - в третьем и далее последовательно 19, 20, 21, 22, 23, 24.

в) В каждом столбце и в каждой строке полного квадрата 9×9 содержались бы все числа от 1 до 9 в произвольной последовательности.

2. Можно ли расположить числа так, чтобы сумма чисел по углам каждого из центральных 3×3, 5×5, 7×7, 9×9 квадратов окажется равной 20?

3. Можно ли расположить числа так, чтобы суммы, вдоль прямых, которые симметричны относительно одной из диагоналей квадрата 9×9, оказались одинаковыми, причём суммы эти уменьшались бы регулярно на 5 единиц по мере удаления прямых от другой диагонали большого квадрата?

4. Можно ли расположить числа так, чтобы кроме предыдущих условий оказалось, что суммы квадратов чисел вдоль прямых, симметричных относительно той же диагонали полного квадрата, оказались одинаковы?

5. Найдите как можно больше дополнительных числовых свойств у образовавшегося полного квадрата и докажите их.

6. Предложите наиболее экономный алгоритм составления требуемого числового квадрата 9×9 и обоснуйте его корректность. Сформулируйте аналогичные задачи для квадратов произвольного размера.

Задача 11. Почти арифметические прогрессии

Попробуйте построить теорию «почти арифметических прогрессий». В качестве исходных направлений исследования могут быть следующие.

Пусть a_1, d_1, d_2, n — фиксированные натуральные числа. Конечную последовательность чисел $a_1, a_2, , a_n$, будем называть почти арифметической прогрессией, если для любого k, $2 \leq k \leq n$, $a_k = a_{k-1} + d_1$ или

$a_k = a_{k-1} + d_2$. Множество всех таких почти арифметических прогрессий длины n обозначим через $P_n(a_1, d_1, d_2)$.

1. Укажите последовательность $a_1, a_2, \dots, a_n$ из $P_n(a_1, d_1, d_2)$, у которой наименьшее количество членов равняется полусумме своих соседей.

2. Укажите последовательность из $P_n(a_1, d_1, d_2)$, у которой среди чисел $a_1 + a_n, a_2 + a_{n-1}, \dots$ наименьшее количество равных между собой.

3. Сколько различных последовательностей содержит множество
$$P_n(a_1, d_1, d_2)?$$

4. Сколько различных сумм может быть у последовательностей, лежащих в множестве $P_n(a_1, d_1, d_2)$?

5. Какое наибольшее количество последовательностей из $P_n(a_1, d_1, d_2)$ имеет одинаковую сумму всех своих членов?

6. Пусть $P_{3n+1}(a_1, 1, 2, 3)$ — множество всех последовательностей $a_1, \dots$, a_{3n+1} таких, что при любом k, $2 \le k \le 3n + 1$ имеет место одно из равенств $a_k = a_{k-1} + 1$, $a_k = a_{k-1} + 2$, $a_k = a_{k-1} + 3$. У какого наибольшего количества последовательностей из $P_{3n+1}(a_1, 1, 2, 3)$ одинаковая сумма всех членов?

7. Сколько различных последовательностей содержит множество
$$P_{3n+1}(a_1, 1, 2, 3)?$$

8. Предложите свои направления исследования или обобщения этой задачи и изучите их.

Задача 12. Периодические дифференциальные уравнения

1. Дана функция $f(x, y)\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f \in C(\mathbb{R}^2), f'_y \in C(\mathbb{R}^2)$ и $f(x + T, y) = f(x, y)$ для любых $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Далее, существуют такие числа a, b, что $f(x, a) \cdot f(x, b) < 0$ для любого вещественного x.

   а) Докажите, что дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$ имеет T-периодическое решение.

б) Докажите, что если $f'_y > 0$, то это периодическое решение единственно.

2. Дано уравнение $y' = -y^{2k+1} + f(x)$, $f(x+T) = f(x)$, f - непрерывна на вещественной прямой.

а) Докажите, что существует T-периодическое решение.

б) Докажите, что это решение единственно.

3. Найдите все периодические решения уравнения $y' = (y-a)(y-b)$, где a, b - вещественные числа.

Средним за период для периодической функции $f(x)$ называется величина $\frac{1}{T}\int\limits_0^T f(x)\,dx$. Ниже везде предполагается, что функции $f, f_1, f_2 \in C(\mathbb{R})$ и T-периодические.

4. Дано уравнение $y' = (y-a)(y-f(x))$.

а) Найдите необходимое и достаточное условие на среднее за период функции f, при котором это уравнение имеет T-периодическое решение (отличное от константы).

б) Сколько вообще периодических решений может быть у этого уравнения?

5. Исследуйте те же вопросы для уравнения $y' = (y-a)^2(y-f(x))$

6. Проведите исследование уравнения $y' = (y-a)^m(y-f(x))^n$ на предмет существования периодических решений в зависимости от натуральных параметров n, m и величины $\frac{1}{T}\int\limits_0^T f(x)dx$.