При поддержке Фонда Президентских грантов

Математика НОН-СТОП

Сборник задач

Б.А. Золотов Д.Г. Штукенберг

И.А. Чистяков А.В. Семенов И.С. Алексеев

Фонд «Время Науки»

Санкт-Петербург

2019

Предисловие

***И.А. Чистяков** — Президент фонда «Время науки», директор ЧОУ ОиДО «Лаборатория непрерывного математического образования», вице-президент Европейского турнира юных математиков, автор задач Олимпиады «Математика НОН-СТОП» в 2010–2015 годах*

Дорогие юные математики, коллеги, друзья! Вы держите в руках не просто сборник олимпиадных задач, а скорее книгу, в которой рассказывается о системе математического образования, созданной фондом поддержки молодых ученых «Время науки».

Проекты фонда взаимосвязаны и не могут рассматриваться отдельно друг от друга. Одной из главных задач фонда является привлечение талантливой молодежи к занятиям наукой, в частности математикой. При содействии фонда работает целая структура дополнительного образования, а также система научных семинаров, турнир юных математиков, олимпиада «Математика НОН-СТОП», Летняя профильная математическая школа, Балтийский научно-инженерный конкурс. Опыт создания этой системы оказался настолько успешным, что многие из мероприятий фонда проводятся теперь в различных российских регионах. Так, например, Балтийский научно-инженерный конкурс имеет на сегодняшний день 17 региональных представительств.

Однако по порядку. Основой содержательной математической деятельности является семинар. В 1992 году группа молодых (тогда) петербургских математиков, среди которых были к. ф.-м. н. С.М. Шиморин, к. ф.-м. н. Д.Г. Бенуа, И.А. Чистяков и вскоре присоединившиеся к ним к. ф.-м. н. Т.Н. Шилкин, д. ф.-м. н. С.И. Кублановский, А.О. Виро, к. ф.-м. н. А.А. Флоринский, Е.А. Абакумов стали вести научные семинары для старшеклассников и руководить научными проектами. Так возникла «Лаборатория непрерывного математического образования» (ЛНМО) — в те годы молодежный научный коллектив, ставящий перед собой задачу привлечения к занятиям наукой тех школьников, которые обладали незаурядными математическими способностями, но тем не менее по некоторым причинам в большей своей части не имели значительных олимпиадных достижений.

Время, в которое начинала свою деятельность ЛНМО, было непростым, даже скорее трудным для большинства молодых математиков. Многие из них уехали из страны, другие сменили сферу деятельности. Количество способных к математике студентов стало снижаться, несмотря на все усилия декана математико-механического факультета СПбГУ профессора Г.А. Леонова — человека, благодаря которому факультет пережил самые тяжелые годы. Математическое сообщество старело, и привлечение к математике школьников стало одной из основных задач.

В 1994 году ЛНМО стала сотрудничать с Математико-механическим факультетом СПбГУ. Это сразу дало свои плоды. Так, в 1992 году в ЛНМО работало всего 3 математических семинара. С.М. Шиморин и И.А. Чистяков руководили семинарами по математическому анализу, Д.Г. Бенуа — по алгебре. В 1995 году в Лаборатории было открыто уже 10 научных семинаров. Среди руководителей семинаров этого периода — профессор М.М. Лесохин, профессор Н.А. Широков, профессор В.М. Нежинский, к. ф.-м. н. В.Л. Кобельский, к. ф.-м. н. В.Ю. Добрынин.

Впоследствии ЛНМО стала частным образовательным учреждением, где работа в системе научных семинаров и спецкурсов является вершиной в процессе получения школьником среднего образования.

Семинары 90-х годов воспитали первую плеяду учеников, которые впоследствии стали научными руководителями школьников и студентов, закончили математико-механический факультет СПбГУ, аспирантуру и защитили кандидатские диссертации. Выпускниками ЛНМО защищены 42 кандидатских диссертации, из каждого выпуска ЛНМО до половины выпускников становятся аспирантами, до 7-8 — кандидатами наук.

Сейчас благодаря гранту Фонда Президентских грантов в ЛНМО работает 27 математических семинаров, а всего по разным специальностям — 61. Среди руководителей — д. ф.-м. н. С.И. Кублановский, к. ф.-м. н. А.В. Смоленский, к. ф.-м. н. Р.А. Гученко, к. ф.-м. н. Ю.А. Ильин, к. ф.-м. н. С.О. Иванов, аспиранты А.В. Семенов, В.А. Соснило, А.А. Зайковский и многие другие.

В то же время ощущался дефицит научного общения участников семинаров с другими школьниками, тоже делающими свои первые шаги в науке. Поэтому получили развитие научные конференции школьников, в числе которых отметим Сахаровские чтения, проводимые лицеем ФТШ в Петербурге (Я.Д. Бирман, к. х. н. Н.М. Химин, Д.В. Фредерикс, к. ф.-м. н.

М.Г. Иванов, Е.А. Нинбург), и конференцию, посвященную памяти академика С.Н. Бернштейна. Большую поддержку в это время оказали профессор М.П. Юшков и профессор В.С. Виденский. Будучи совсем небольшой, конференция памяти Бернштейна привлекала к себе тех юных исследователей, которые уже в 9–11 классе могли потратить на научную работу значительное время. Высокий уровень профессионального научного жюри стал отличительной карточкой этой конференции.

В Москве в области математики лидирующее положение занимали конференция при МЭИ (Московском энергетическом институте), благодаря усилиям А.А. Егорова, к. ф.-м. н. А.П. Савина, Ж.М. Раббота, к. ф.-м. н. В.Н. Дубровского и к. п. н. Л.Б. Огурэ; конференция «Династия–Авангард», математическое направление которой возглавляет к. ф.-м. н. Д.В. Андреев; конференция «Юниор» (профессора А.Д. Модяев, Н.М. Леонова, А.В. Михалев и Н.А. Кудряшев).

Одновременно возникли международные конференции, из числа которых отметим конференцию молодых ученых (ICYS), первым победителем которой стал Владимир Камоцкий, занимавшийся в семинаре по гомологической алгебре (руководитель Д.Г. Бенуа, ныне известный математик). Абсолютный рекорд этого научного форума принадлежит выпускнику научных семинаров Дмитрию Парилову: он в 9, 10 и 11 классах был награжден золотой медалью, став абсолютным победителем. Дмитрий Владимирович Парилов защитил кандидатскую диссертацию и успешно работает в России.

В 1998 году Россия впервые приняла участие в международном конкурсе научных и инженерных достижений учащихся — ISEF, собирающем более полутора тысяч школьников из более чем 60 стран мира. 30 учеников ЛНМО награждены премиями научного жюри, еще 10 — премиями Карла Менгера, присуждаемыми Американским математическим обществом.

Пять научных работ отмечены высшими премиями научного жюри, именами петербургских школьников — Сергея Иванова, Евгения Лохару, Евгения Амосова, Артема Викторова и Гаджи Османова — названы малые планеты Солнечной системы. С.О. Иванов и Е.Э. Лохару защитили кандидатские диссертации и активно работают в области математики. Сергей Олегович Иванов в 2014 году назван лучшим молодым математиком Санкт-Петербурга, 14 выпускников лаборатории награждены премиями имени В.А. Рохлина.

Камерная научная конференция, посвященная памяти академика

С.Н. Бернштейна, не могла уже справиться с нарастающим числом работ и была преобразована в конференцию им. академика П.Л. Чебышева, родоначальника Петербургской математической школы, а в 2004 году — в Балтийский научно-инженерный конкурс. На первом Балтийском научно-инженерном конкурсе было представлено 60 проектов; в 2019 году на юбилейном XV конкурсе в отборочных этапах приняли участие 2059 юных исследователей, а в финале представлены более 400 проектов из более чем 60 регионов России и Белоруссии.

Председателем научного жюри Балтийского конкурса является профессор Н.А. Широков, секцию математики возглавляет профессор Н.М. Нежинский; подсекции — к. ф.-м. н. А.В. Смоленский, а также к. п. н. В.В. Крылов. Второй год работает жюри ПОМИ РАН, которое возглавляет профессор А.И. Назаров.

Развитие научной и проектной деятельности высветило ряд проблем, без решения которых далее невозможно развивать научные семинары. Для выполнения серьезных математических исследований школьник должен знать важнейшие разделы математики. Так возникла идея проведения летних профильных математических школ, в которых аспиранты и молодые кандидаты наук погружали старшеклассников в разделы математики, которые были совершенно необходимы для решения математических задач. Часто на семинарах летней школы ставились и задачи для исследования, и школьники успевали получить значительные результаты в их решении.

Пытливый подростковый ум нуждается в постоянной подпитке, решении модельных задач, которые построены по следующему принципу. Каждая задача начинается введением в теорию, в котором ученику разъясняются основные определения. При этом первые пункты задачи более или менее известны. По мере продвижения по задаче пункты усложняются, решения последних пунктов не известны автору задачи и часто являются темой самостоятельного научного исследования.

В качестве реализации этой идеи появилось несколько турниров юных математиков, проводящихся в разных городах по схожим правилам. Участниками таких турниров были в основном старшеклассники. Один из таких турниров — Санкт-Петербургский турнир юных математиков — проводится как раз при поддержке Фонда «Время Науки».

Форма проведения турнира была заимствована из Белорусских турниров юных математиков (к. ф.-м. н. Б.В. Задворный), хотя петербургский турнир отличается более жесткими правилами проведения и трудностью задач. В последнее время петербургские турниры юных математиков проводятся и для 5–7 классов (средняя и младшая лига). Факт существования этих турниров, по нашему убеждению, способствуют привлечению к занятиям наукой талантливых детей, которые впоследствии станут учениками научных семинаров ЛНМО. Руководитель проекта — И.С. Алексеев. Жюри турниров возглавляют к. ф.-м. н. Ю.А. Ильин и профессор В.М. Нежинский.

Усилиями европейских математиков по аналогичным правилам организован международный турнир, участниками которого становятся победители национальных турниров. Президентом конкурса является профессор Давид Змейков.

Олимпиада «Математика НОН-СТОП» выполняет ту же функцию, что и младшая и средняя лиги Турнира юных математиков, — привлекать школьников 4–8 классов к решению исследовательских задач. Нам казалось неразумным сразу приступить к решению этой трудной задачи, необходимо было воспитать молодых математиков — составителей исследовательских задач и найти в Петербурге школы, понимающие важность этого проекта. С этими задачами олимпиада прекрасно справилась.

В первые годы олимпиады отбор задач был традиционен, они подбирались из числа задач петербургских, московских, белорусских олимпиад, однако усложнялись правила ее выполнения. Каждая задача олимпиады состояла из трех пунктов, решение первого из которых оценивалось в 3 балла, решение второго — в 6 баллов, а третьего в 9 баллов. В зачет по каждой задаче входил тот пункт, за который участник получил наибольшее число баллов.

Тем самым школьнику необходимо не только решать задачи, но и продумывать стратегию работы на олимпиаде. Многие школьники, которые брались за решение только сложных пунктов, зачастую делали в них ошибки и получали невысокий балл на олимпиаде. Такая же участь ждала тех, кто решал простые пункты, их суммарный балл также был невысок.

Большое значение мы придавали тому факту, что школьники, которые не справились с решениями задач во время олимпиады, дома и в школе могли продолжить их решение. А наиболее глубокие школьники получали приглашение заниматься в научных семинарах и учиться в профильных математических классах, организуемых на основе государственно-частного партнерства ЛНМО и ГБОУ СОШ №564.

Тем самым была решена задача по привлечению школьников к занятиям математикой, а также сформировался коллектив студентов–математиков, способных предлагать исследовательские задачи. И с 2016 года олимпиада «Математика НОН-СТОП» приобрела задуманную форму. Каждая задача *базовых вариантов*, как и прежде, состоит из трех пунктов, последний из которых наиболее сложен, размышления по этому пункту могут привести школьника к решению научной проблемы. Для школьников 7–8 классов появился *профильный вариант*, для реализации возможности поиска одаренных детей, которые не занимаются в математических кружках, даже если, возможно, учатся в математических школах.

Это дало результат. Многие дети из общеобразовательных школ получили возможность занятий в профильных научных семинарах. Олимпиада поддерживается кафедрой математического образования и информатики АППО (к. п. н. Е.Ю. Лукичева) и входит в перечень региональных конкурсов интеллектуальной направленности Правительства СПб. В олимпиаде участвуют более тысячи школьников Санкт-Петербурга и Ленинградской области.

Руководитель проекта — Б.А. Золотов, победитель олимпиады «Математика НОН-СТОП» 2011 года. Председатель жюри — Д.Г. Штукенберг.

Книга адресована не только школьникам, интересующимся математикой, но и учителям и организаторам математического образования. Руководители научно-исследовательских работ школьников смогут почерпнуть из сборника темы для исследования.

Оглавление

От авторов

Олимпиада «Математика НОН-СТОП» проводится с 2010 года, за это время значительно выросло как число её участников, так и интерес, проявляемый к ней в том числе со стороны образовательных организаций Санкт-Петербурга и известных фондов, которые теперь оказывают поддержку олимпиаде.

В 2010–2015 годах составителем условий задачи был И.А. Чистяков, а олимпиада включала в себя варианты для 5–8 классов из 6–12 задач, поделённых на пункты A, B и C. С 2016 года условия задач для олимпиады составляют Б.А. Золотов и Д.Г. Штукенберг (Дмитрий Григорьевич — сотрудник ЛНМО, Борис Алексеевич — выпускник и сотрудник ЛНМО).

Одновременно с этим в олимпиаде появился профильный вариант для 7–8 классов: задачи профильного варианта представляют из себя целую исследовательскую проблему, раскрывающуюся перед школьником пункт за пунктом. Последним нововведением олимпиады стал вариант для четвёртого класса, присутствующий с 2017 года.

Первая часть этой книги — условия олимпиад, прошедших в 2016–18 годах. Задачи можно давать детям на занятиях в математических кружках; они позволяют примерно ориентироваться на то, какими будут задания на олимпиаде «Математика НОН-СТОП» в ближайшем будущем. Авторы задач — Б.А. Золотов, Д.Г. Штукенберг, И.С. Алексеев.

Следом за условиями задач 2016–18 гг. во второй части этой книги, представлены их решения, предложенные самими авторами задач (рассмотрены в том числе задачи профильных вариантов). Если при разборе задачи возникают трудности или стало интересно ознакомиться с необычными методами решения, стоит смотреть как раз вторую часть книги. Автор разбора 2017–18 — Б.А. Золотов, 2016 — Д.Г. Штукенберг.

В третьей части книги представлены избранные, наиболее оригинальные задачи 2011–15 годов, сразу с решениями. Обычно таких задач оставалось по 3–4 на вариант. Авторы разборов 2012–15 — Б.А. Золотов, А.В. Семенов, 2011 — Л.А. Бакунец, И.Г. Прокофьева, Д.Г. Штукенберг.

Четвёртая часть этой книги — условия задач петербургских турниров юных математиков (СПбТЮМ). СПбТЮМ проводится с 2015 года и отличается интересными, сложными заданиями — некоторые из них впоследствии перерастают в научные работы, представляемые на различных конференциях школьников. В этой книге мы собрали все задачи, бывшие на турнирах с самого основания СПбТЮМ.

Авторы задач СПбТЮМ — К.М. Чепуркин, И.С. Алексеев.

Наконец в пятой части книги мы привели несколько тем для школьной научной работы. Данные темы, с одной стороны, интересны для науки, а с другой стороны, как нам представляется, посильны детям. Подобные темы могут быть любопытны для школьников, желающих выступить на научных конференциях, проводимых, например, под эгидой фонда «Время науки».

Желаем приятного и познавательного чтения!

Условия задач 2018 года

Задачи 4 класса

Задача 1. Где-то я это уже видел

A. Сколько дат в году могли бы оказаться на экране цифровых часов в качестве времени? *Например, 19 июня — 19:06, а 27 ноября времени не соответствует.*

B. Сколько дат в году могли бы появиться на экране цифровых часов, если разрешено использовать сначала месяц, а потом день? *Например, 27 ноября тогда будет соответствовать время 11:27.*

C. Автомобильный номер в Ленинградской области имеет вид

$\times\ \square\ \square\ \square\ \times\ \times$	47^{RUS}

Вместо квадратиков стоят цифры, а вместо крестиков — буквы русского алфавита, заглавные варианты которых похожи на какие-либо буквы английского алфавита (например, такие буквы — А, Т или У).

На скольких номерах в Ленинградской области есть ровно одна гласная? А ровно две гласных?

Задача 2. Напрасно называют север крайним

A. Один коротышка с двумя ногами поехал кататься на велосипеде. Но так как на дворе была зима, -10 градусов, он отморозил себе одну ногу. Другой коротышка через месяц поехал кататься на велосипеде. Но на дворе по-прежнему была зима, уже -20 градусов, и он отморозил себе все имеющиеся ноги (их также было две).

Сколько ног отморозит себе на 10- и на 20-градусном морозе туристическая группа из 40 коротышек? А их маленький серый кот, у которого ног изначально четыре? А речной рак, у которого восемь ног?

B. Барон Мюнхгаузен говорит, что обошёл вокруг света (то есть побывал на всех возможных долготах Земного шара) за 40 минут. При этом известно, что он не лжёт. Как такое могло произойти?

C. Однажды в стране Северной Болоторфии собрались построить дороги. Каждый город решили соединить дорогой с тремя другими городами, самыми близкими к нему. Может ли статься так, что найдутся города A и B, для которых, согласно указанному правилу, город A должен быть соединён с городом B, а город B с городом A — нет?

Задача 3. Разрезания

A. Укажите, как разрезать произвольный квадрат на 7 многоугольников, у которых одинаковы как площади, так и суммарные длины сторон, лежащих на границе исходного квадрата.

B. Укажите, как разрезать изображённую на рисунке 2 фигуру на 6 равных фигур.

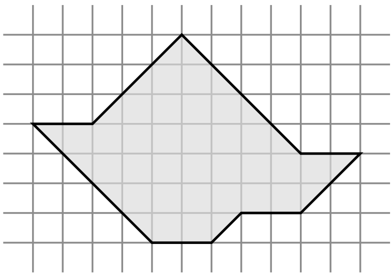


рисунок 2

C. Представьте, что одну из Египетских пирамид (Египетские пирамиды симметричны и имеют в основании квадрат) покрасили розовой краской (покрашены оказались её четыре стороны, но не основание). Как разрезать её на три части одинакового объёма, несущие на себе одинаковое количество краски?

Задача 4. Летающий цирк

Если вы скажете слово «матрас»,
он наденет ведро себе на голову.

A. Если сказать мистеру Лэмберту слово «МАТРАС», он кричит „Караул!“, снимает перчатки, надевает на голову ведро, встаёт одной ногой в коробку из-под телевизора и поёт два куплета из песни про коня.

Если сказать мистеру Лэмберту слово «СТАРТ», он кричит „Караул!“, снимает перчатки, встаёт двумя ногами в коробку из-под телевизора и поёт один куплет из песни про коня.

А что будет, если сказать мистеру Лэмберту слово «МАРС»?

B. У джентльмена есть 34 доллара, и он хочет купить себе шляпу. Продавец называет цену в 120 долларов, но джентльмен должен торговаться. Каждый раз, когда джентльмен торгуется, продавец сбавляет цену до среднего арифметического финансовых возможностей джентльмена и цены, названной на предыдущем шаге, — джентльмен же в это время оглядывается и находит одну долларовую монетку, лежащую на брусчатке. Сможет ли джентльмен когда-нибудь купить себе желанную шляпу?

C. **Тревор:** «Этот сконфуженный кот стоит 9600 рублей.»
Джереми: «Кот дешевле, поскольку Тревор в 4 раза преувеличивает каждое число, которое называет. Хоть он только что и сказал про стоимость кота в 2400 рублей, кот на самом деле стоит 150 рублей.»
Подсчитайте, во сколько раз Джереми преуменьшает каждое произносимое число, и сколько на самом деле стоит сконфуженный кот.

Задача 5. Мощения

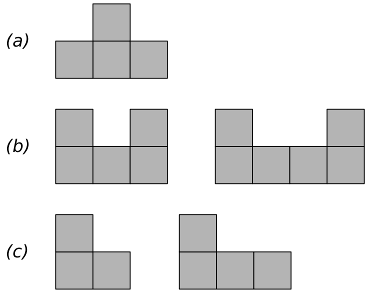


рисунок 4

A. Укажите, как замостить плоскость фигурой с рисунка 4*(a)*.

B. Укажите способ замощения плоскости каждой из двух фигур на рисунке 4*(b)*.

C. Можно ли сложить квадрат какого-либо размера из деревянных плиток в форме фигур, изображённых на рисунке 4*(c)*? При этом необходимо пользоваться плитками обеих форм.

Задача 6. Ужасный гадкий аккуратный подсчёт

A. Из клетчатой бумаги вырезали прямоугольник размером 4×5 клеток. Сколько на нём можно найти квадратов? А прямоугольников?

B. Круг разделён на n секторов одинакового размера. Сколькими способами можно покрасить эти n секторов в n цветов, если две раскраски, получающиеся друг из друга вращением круга, считаются одинаковыми?

C. Есть шесть цветов — красный, белый, синий, зелёный, чёрный, жёлтый. Нам хочется составить из них всевозможные триколоры (то есть флаги, состоящие из трёх горизонтальных цветных полос, как российский или немецкий). При этом если рядом оказываются две полосы одного цвета, они сливаются в одну, поэтому такой флаг не считается триколором. А вот флаг вроде «белый — синий — белый» — считается. Так сколько же триколоров можно составить?

Задачи 5 класса

Задача 1. Летающий цирк

Если вы скажете слово «матрас»,
он наденет ведро себе на голову.

A. Если сказать мистеру Лэмберту слово «МАТРАС», он кричит „Караул!“, снимает перчатки, надевает на голову ведро, встаёт одной ногой в коробку из-под телевизора и поёт два куплета из песни про коня.

Если сказать мистеру Лэмберту слово «СТАРТ», он кричит „Караул!“, снимает перчатки, встаёт двумя ногами в коробку из-под телевизора и поёт один куплет из песни про коня.

А что будет, если сказать мистеру Лэмберту слово «МАРС»?

B. У джентльмена есть 34 доллара, и он хочет купить себе шляпу. Продавец называет цену в 120 долларов, но джентльмен должен торговаться. Каждый раз, когда джентльмен торгуется, продавец сбавляет цену до среднего арифметического финансовых возможностей джентльмена и цены, названной на предыдущем шаге, — джентльмен же в это время оглядывается и находит одну долларовую монетку, лежащую на брусчатке. Сможет ли джентльмен когда-нибудь купить себе желанную шляпу?

C. **Тревор:** «Этот сконфуженный кот стоит 9600 рублей.»
Джереми: «Кот дешевле, поскольку Тревор в 4 раза преувеличивает каждое число, которое называет. Хоть он только что и сказал про стоимость кота в 2400 рублей, кот на самом деле стоит 150 рублей.»
Подсчитайте, во сколько раз Джереми преуменьшает каждое произносимое число, и сколько на самом деле стоит сконфуженный кот.

Задача 2. Рукопожатия

A. Тридцать пять восьминогих существ — 18 крабов и 17 пауков — встали в хоровод, имеющий форму восьмёрки. Это значит, что существо, стоящее в центре этой восьмёрки, держит за лапы четверых своих соседей (благо, лап у него восемь, ему хватит). Известно, что каждый краб держится за лапы исключительно с пауками. Кто стоит в центре восьмёрки — краб или паук?

B. В компании работает двадцать шесть человек, и каждый дружит ровно с пятью другими. После подведения итогов государственной лотереи оказалось, что у каждого сотрудника найдётся друг или же друг его друга (это может быть и сам сотрудник: нетрудно понять, что он является другом всех своих друзей), выигравший в лотерее машину. Обязательно ли хотя бы два человека в этой компании выиграли машины?

C. Известно, что в Авиаландии пять городов: Гирфорд, Вингбург, Флэпстон, Пайлот-Бэй и Фьюлтэнк. Из каждого города летает шесть авиарейсов, внутренних или международных. Докажите, что за границы Авиаландии летает чётное количество авиарейсов.

Задача 3. Современная мебельная фабрика

A. Восемь ящиков экспериментального письменного стола расположены по кругу. Каждый ящик может быть открыт или закрыт. Стол устроен так, что можно одновременно изменять состояние пары ящиков, между которыми ровно два других ящика — то есть можно либо открыть два сразу, либо закрыть два сразу, либо открыть один, закрыв другой.

У стола на витрине открыты два противоположных ящика. Покажите, как за 4 действия закрыть их оба.

B. В понедельник перед обедом обыкновенный мебельщик Сергей растворил пачку красителя для шкафов в десятилитровом ведре воды. В обед обиженный на начальство фабрики Фёдор в отчаянии вылил из ёмкости 4 литра раствора, долил 4 литра воды и тщательно размешал (чтобы замести следы).

На следующий день Сергей снова растворил пачку красителя в 10 литрах воды. На этот раз Фёдор вылил из ведра 2 литра раствора, долил 2 литра воды, тщательно размешал — и повторил ту же последовательность действий ещё раз. В какой из дней в ведре осталось больше красителя?

C. Экспериментальный стул с использованием нанотехнологий (одна из инноваций заключается, например, в том, что у такого стула ровно 720 ножек) падает с лестницы (в качестве испытания, разумеется). Выяснилось, что при падении он потерял в три раза меньше ножек, чем у него бы осталось, потеряй он в три раза меньше ножек, чем у него осталось сейчас. Так сколько же ножек осталось у стула?

Задача 4. Игры

A. Двое по очереди вырезают из клетчатого прямоугольника 5×2018 фигуру, изображённую на рисунке 3*(a)* — при этом её можно отражать и вращать. Проигрывает тот, кто не может вырезать фигуру в очередной раз. У кого из игроков есть выигрышная стратегия?

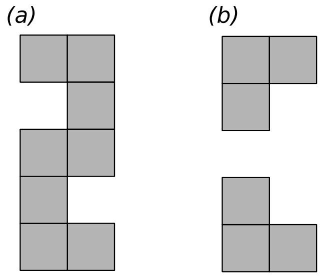


рисунок 3

B. Клетки прямоугольника 1×303 пронумерованы от 1 до 303 слева направо. В клетке №2 стоит фишка первого игрока, а в клетке №1 — второго игрока. Каждый игрок может делать ходы двух типов:

$*$ из клетки под номером k в клетку $k + 1$, если там не стоит фишка другого игрока;

$*$ из клетки под номером k в клетку $k+2m$, если m — натуральное число, и в клетке номер $k + m$ сейчас стоит фишка другого игрока (то есть, фишку соперника можно «перепрыгнуть»).

Выигрывает тот, чья фишка первой окажется в клетке № 303. У кого из игроков есть выигрышная стратегия?

C. Двое по очереди вырезают из клетчатого квадрата 4×4 уголки из трёх клеток, причём первый может вырезать только уголки, ориентированные как буква Г, а второй — только уголки, ориентированные как буква L (см. рис. 3*(b)*). Проигрывает тот, кто не может вырезать очередной уголок. У кого из игроков есть выигрышная стратегия?

Задача 5. Прогрессивное сложение

В свободных школах, не имеющих предрассудков, решили складывать числа, просто приписывая их друг к другу. Мы будем обозначать это действие значком $\oplus$: например, $2 \oplus 2 = 22$, $2000 \oplus 2000 = 20002000$.

В обычной жизни, в каком порядке числа ни складывай, результат остаётся неизменным: $2+3+5 = 5+3+2$. Однако, если выполнять с числами действие $\oplus$, результат может изменяться в зависимости от порядка чисел: $2 \oplus 3 \oplus 5 = 235 \neq 532 = 5 \oplus 3 \oplus 2$.

A. Даны числа 95 и 500. В каком порядке их нужно сложить, чтобы результат получился больше?

B. Даны три произвольных числа P, Q, R. В каком порядке нужно выполнять с ними действие $\oplus$, чтобы получить наибольший возможный результат?

C. Бывает ли так, что $P + Q > P \oplus Q$?

Задача 6. Мощения

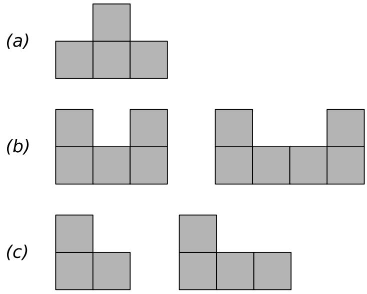


рисунок 4

A. Укажите, как замостить плоскость фигурой с рисунка 4*(a)*.

B. Укажите способ замощения плоскости каждой из двух фигур на рисунке 4*(b)*.

C. Можно ли сложить квадрат какого-либо размера из деревянных плиток в форме фигур, изображённых на рисунке 4*(c)*? При этом необходимо пользоваться плитками обеих форм.

Задачи 6 класса

Задача 1. Клиренсы

A. Диаметр колеса велосипеда — 74 см. На высоте центра колеса расположена *каретка* — узел, вокруг которого крутятся педали. Расстояние от каретки до педали — 175 мм. Каково минимальное расстояние от педали до земли (если на велосипеде едут по прямой, не наклоняясь)? Размерами педалей пренебречь.

B. Расстояние между соседними ножками стула — 50 см. К ножкам стула прикрепили колёсики и стали втаскивать его за верёвку по стене многоэтажки (которая имеет форму куба) так, что стул едет по стене колёсиками. Каково должно быть расстояние от сидения стула до земли, чтобы он смог въехать со стены многоэтажки на её крышу, не поцарапав нижнюю сторону сиденья?

C. Автобус с диаметром колёс 1 метр и колёсной базой 10.5 метров (так называют расстояние между передней осью и задней) стоит на планете Маленького принца, диаметр которой 20 метров. Каким должен быть дорожный просвет (расстояние от пола до земли) у автобуса, чтобы он не царапал днищем грунт?

Задача 2. Разрезания

A. Укажите, как разрезать произвольный квадрат на 7 многоугольников, у которых одинаковы как площади, так и суммарные длины сторон, лежащих на границе исходного квадрата.

B. Укажите, как разрезать изображённую на рисунке 2 фигуру на 6 равных фигур.

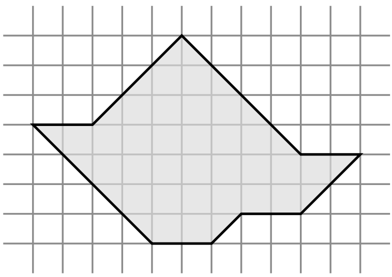


рисунок 2

C. Представьте, что одну из Египетских пирамид (Египетские пирамиды симметричны и имеют в основании квадрат) покрасили розовой краской (покрашены оказались её четыре стороны, но не основание). Как разрезать её на три части одинакового объёма, несущие на себе одинаковое количество краски?

Задача 3. Игры

A. Двое по очереди вырезают из клетчатого прямоугольника 5×2018 фигуру, изображённую на рисунке 3*(a)* — при этом её можно отражать и вращать. Проигрывает тот, кто не может вырезать фигуру в очередной раз. У кого из игроков есть выигрышная стратегия?

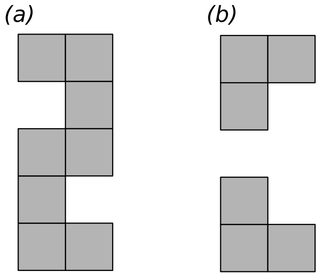


рисунок 3

B. Клетки прямоугольника 1×303 пронумерованы от 1 до 303 слева направо. В клетке №2 стоит фишка первого игрока, а в клетке №1 — второго игрока. Каждый игрок может делать ходы двух типов:

$*$ из клетки под номером k в клетку $k + 1$, если там не стоит фишка другого игрока;

$*$ из клетки под номером k в клетку $k+2m$, если m — натуральное число, и в клетке номер $k + m$ сейчас стоит фишка другого игрока (то есть, фишку соперника можно «перепрыгнуть»).

Выигрывает тот, чья фишка первой окажется в клетке № 303. У кого из игроков есть выигрышная стратегия?

C. Двое по очереди вырезают из клетчатого квадрата 4×4 уголки из трёх клеток, причём первый может вырезать только уголки, ориентированные как буква Г, а второй — только уголки, ориентированные как буква L (см. рис. 3*(b)*). Проигрывает тот, кто не может вырезать очередной уголок. У кого из игроков есть выигрышная стратегия?

Задача 4. Модельки

A. Вовочка подумал: «Если автомобиль „Жигули“ весит 1200 кг, а мама подарила мне модельку масштаба $1 : 43$, сделанную из тех же материалов, что и полноценная машина, то моделька должна весить $1200/43 \approx 28$ килограммов... Однако она ощутимо легче моего кота, про которого мама недавно сказала, что он толстый, потому что преодолел отметку в 6 кило. Где же логика?»

Помогите Вовочке разобраться — почему моделька на самом деле не так тяжела?

B. В 1791 году единица длины **метр** была определена как одна сорокамиллионная часть Парижского меридиана. А в современном спорте популярно измерение не скорости, а *темпа* бегуна — сколько минут он тратит на преодоление километра.

Самый быстрый темп, которого умеет достигать моделька самолёта — 0.54 мин/км. За сколько часов такая моделька долетит вдоль Парижского меридиана от Северного полюса до Южного и обратно?

C. Можно ли собрать из шестерёнок такую систему, что в ней найдутся две шестерёнки A и B, и при вращении A в движение приводятся все остальные шестерёнки, а при вращении B — нет?

Задача 5. Напрасно называют север крайним

A. Один коротышка с двумя ногами поехал кататься на велосипеде. Но так как на дворе была зима, -10 градусов, он отморозил себе одну ногу. Другой коротышка через месяц поехал кататься на велосипеде. Но на дворе по-прежнему была зима, уже -20 градусов, и он отморозил себе все имеющиеся ноги (их также было две).

Сколько ног отморозит себе на 10- и на 20-градусном морозе туристическая группа из 40 коротышек? А их маленький серый кот, у которого ног изначально четыре? А речной рак, у которого восемь ног?

B. Барон Мюнхгаузен говорит, что обошёл вокруг света (то есть побывал на всех возможных долготах Земного шара) за 40 минут. При этом известно, что он не лжёт. Как такое могло произойти?

C. Однажды в стране Северной Болоторфии собрались построить дороги. Каждый город решили соединить дорогой с тремя другими городами, самыми близкими к нему. Может ли статься так, что найдутся города A и B, для которых, согласно указанному правилу, город A должен быть соединён с городом B, а город B с городом A — нет?

Задача 6. Где-то я это уже видел

A. Сколько дат в году могли бы оказаться на экране цифровых часов в качестве времени? *Например, 19 июня — 19:06, а 27 ноября времени не соответствует.*

B. Сколько дат в году могли бы появиться на экране цифровых часов, если разрешено использовать сначала месяц, а потом день? *Например, 27 ноября тогда будет соответствовать время 11:27.*

C. Автомобильный номер в Ленинградской области имеет вид

× □ □ □ × ×	47^{RUS}

Вместо квадратиков стоят цифры, а вместо крестиков — буквы русского алфавита, заглавные варианты которых похожи на какие-либо буквы английского алфавита (например, такие буквы — А, Т или У).

На скольких номерах в Ленинградской области есть ровно одна гласная? А ровно две гласных?

Задача 7. Ужасный гадкий аккуратный подсчёт

A. Из клетчатой бумаги вырезали прямоугольник размером 4×5 клеток. Сколько на нём можно найти квадратов? А прямоугольников?

B. Круг разделён на n секторов одинакового размера. Сколькими способами можно покрасить эти n секторов в n цветов, если две раскраски, получающиеся друг из друга вращением круга, считаются одинаковыми?

C. Есть шесть цветов — красный, белый, синий, зелёный, чёрный, жёлтый. Нам хочется составить из них всевозможные триколоры (то есть флаги, состоящие из трёх горизонтальных цветных полос, как российский или немецкий). При этом если рядом оказываются две полосы одного цвета, они сливаются в одну, поэтому такой флаг не считается триколором. А вот флаг вроде «белый — синий — белый» — считается. Так сколько же триколоров можно составить?

Задача 8. Фургончик

A. Длины стен кузова нового фургона, который строит себе мороженщик Саша, в метрах выражаются двумя различными простыми числами. Известно, что если удлинить каждую из стен на 1 метр, площадь фургона увеличится на 15 м^2. Найдите размеры фургона.

B. В сашином фургоне родилась сороконожка (её ноги пронумерованы от 1 до 40). Она хочет сделать первый шаг — и переставляет первую ногу. Вторым шагом она переставляет все ноги, номера которых делятся на 2. Третьим — все ноги, номера которых делятся на 3 и которые не были переставлены ранее. Сколько ног ей теперь осталось переставить, чтобы окончательно сдвинуться с места?

C. Однажды утром мороженщик Саша отправился развозить мороженое на своём новом фургоне. Он обслуживает семь городов — A, B, C, D, E, F и G — и эти города в каком-то порядке стоят вдоль одного прямого шоссе. Федя выехал из города A и проехал 18 километров до B. Потом — 10.5 километров до C. Затем — 27 километров до D, 15 километров до E и 19.5 километров до F. Наконец — 12 километров до G. Посмотрев вечером в атлас, Саша к своему удивлению узнал, что расстояние от A до G по шоссе указано равным 41 км. Докажите, что информация в атласе неверна.

Задачи 7 класса

Задача 1. Современная мебельная фабрика

A. Восемь ящиков экспериментального письменного стола расположены по кругу. Каждый ящик может быть открыт или закрыт. Стол устроен так, что можно одновременно изменять состояние пары ящиков, между которыми ровно два других ящика — то есть можно либо открыть два сразу, либо закрыть два сразу, либо открыть один, закрыв другой.

У стола на витрине открыты два противоположных ящика. Покажите, как за 4 действия закрыть их оба.

B. В понедельник перед обедом обыкновенный мебельщик Сергей растворил пачку красителя для шкафов в десятилитровом ведре воды. В обед обиженный на начальство фабрики Фёдор в отчаянии вылил из ёмкости 4 литра раствора, долил 4 литра воды и тщательно размешал (чтобы замести следы).

На следующий день Сергей снова растворил пачку красителя в 10 литрах воды. На этот раз Фёдор вылил из ведра 2 литра раствора, долил 2 литра воды, тщательно размешал — и повторил ту же последовательность действий ещё раз. В какой из дней в ведре осталось больше красителя?

C. Экспериментальный стул с использованием нанотехнологий (одна из инноваций заключается, например, в том, что у такого стула ровно 720 ножек) падает с лестницы (в качестве испытания, разумеется). Выяснилось, что при падении он потерял в три раза меньше ножек, чем у него бы осталось, потеряй он в три раза меньше ножек, чем у него осталось сейчас. Так сколько же ножек осталось у стула?

Задача 2. Прогрессивное сложение

В свободных школах, не имеющих предрассудков, решили складывать числа, просто приписывая их друг к другу. Мы будем обозначать это действие значком $\oplus$: например, $2 \oplus 2 = 22$, $2000 \oplus 2000 = 20002000$.

В обычной жизни, в каком порядке числа ни складывай, результат остаётся неизменным: $2+3+5 = 5+3+2$. Однако, если выполнять с числами действие $\oplus$, результат может изменяться в зависимости от порядка чисел: $2 \oplus 3 \oplus 5 = 235 \neq 532 = 5 \oplus 3 \oplus 2$.

A. Даны числа 95 и 500. В каком порядке их нужно сложить, чтобы результат получился больше?

B. Даны три произвольных числа P, Q, R. В каком порядке нужно выполнять с ними действие $\oplus$, чтобы получить наибольший возможный результат?

C. Определим «прогрессивную разность»: $a \ominus b$ — это такое число c, что $b \oplus c = a$ Приведите пример чисел a и b таких, что их разность $a \ominus b$ не определена (нужного числа c не найдётся).

Задача 3. На салфетке

A.

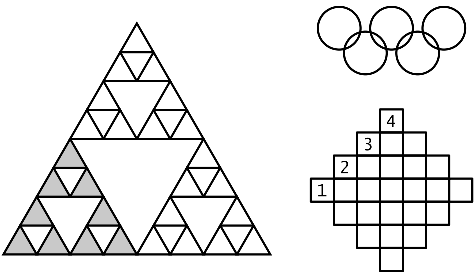


рисунок 5

Укажите, как нарисовать «одним росчерком пера», то есть не отрывая ручки от бумаги и не проходя по одной линии дважды, (а) олимпийские кольца (б) «наклонный квадрат» со стороной 4 (смотреть рисунок 5).

B. Треугольник Серпинского степени 1 — это просто треугольник. Чтобы получить треугольник Серпинского степени $n+1$, нужно поставить «друг на друга» три треугольника Серпинского степени n. На рисунке 5 изображён треугольник Серпинского степени 4, а цветом выделен треугольник Серпинского степени 3. Посчитайте, сколько узлов (точек, где пересекаются два и более непараллельных отрезка) в треугольнике Серпинского степени n. Посчитайте также, сколько отрезков длины 1 составляют «наклонный квадрат» со стороной n.

C. Укажите, как нарисовать одним росчерком пера треугольник Серпинского степени 4, изображённый на рисунке.

Задача 4. Не модельная, а модальная!

Пусть есть событие X, которое может происходить или не происходить в зависимости от того, какой сегодня день. Например, событие $X =$ «сегодня суббота» случается раз в семь дней, а событие «сегодня я смотрел на часы» — каждый день.

Имеются два символа, $\square$ и $\triangledown$, которые рассказывают что-то о разных событиях. Так, фраза «$\square X$» означает «начиная с сегодняшнего дня каждый день случается событие X». Фраза «$\triangledown X$» означает «в будущем найдётся день, когда случится событие X».

Два символа, упомянутых нами, можно комбинировать. Легко понять, что фраза «$\triangledown\square X$» значит «в будущем найдётся день, начиная с которого ежедневно будет происходить событие X». А фраза «$\square\square X$» значит то же самое, что и «$\square X$» (убедитесь в этом сами). Фразы, значащие одно и то же, будем называть эквивалентными.

A. Верно ли утверждение «$\square\triangledown$ сегодня суббота»? Что вообще значит фраза «$\square\triangledown X$»?

B. Докажите, что фразы «$\square\triangledown\square X$» и «$\triangledown\square X$» эквивалентны.

C. Сколько вообще существует попарно неэквивалентных фраз вида «$\_X$» (вместо подчёркивания стоит последовательность из символов $\square$ и $\triangledown$)?

Задача 5. Без пробуксовки

A. Легковая машина с колёсной базой (так называют расстояние между передней и задней осью) 5 метров повернула переднее левое колесо на 30° влево, при этом заднее левое колесо осталось в исходном положении, а правые колёса повернулись так, чтобы машина могла ездить без пробуксовки. С повёрнутыми таким образом колёсами машина стала ездить по окружности. По окружности какого радиуса ездит заднее левое колесо?

B. Погрузчик в супермаркете с колёсной базой 1.8 метра повернул переднее левое колесо на 45° влево, а заднее левое — на столько же в противоположном направлении. Остальные колёса повернулись так, чтобы погрузчик мог ездить без пробуксовки. С повёрнутыми таким образом колёсами погрузчик стал ездить по окружности. Укажите точку, вокруг которой он ездит.

C. Расстояние между передней и средней осью трёхосного автобуса — 9 метров, а между средней и задней — 3 метра. Переднее левое колесо повернулось на 60° влево, среднее левое осталось в прямом положении. На сколько градусов и куда нужно повернуться заднему левому колесу, чтобы автобус смог поехать без пробуксовки?

Задача 6. Как провожают транспортёры...

Транспортёром будем называть движущуюся ленту, на которой можно перемещать предметы (все видели такую на кассе в «Пятёрочке»; ещё её можно сравнить с траволатором на ст. м. «Спортивная»).

A. Если транспортёр движется со скоростью v м/с, то лежащий на нём питон проезжает мимо неподвижного наблюдателя за 14 секунд. Давайте возьмём питона–детёныша (его длина составляет $\frac{3}{4}$ от длины взрослого питона), в шесть раз более медленный транспортёр, а также заставим наблюдателя идти со скоростью $\frac{1}{3}v$ м/с навстречу транспортёру. За какое время детёныш питона пронесётся мимо наблюдателя?

B. Два кубика размером $5 \times 5 \times 5$ см едут по транспортёру, причём расстояние между ними равняется 10 см. С данного транспортёра они попадают на следующий, в два раза более быстрый, и дальше едут по нему. Каково расстояние между ними теперь?

C. В отдел приёма песка фабрики «Весёлый Песочник» привезли 1‘200 кг песка. Из отдела приёма в отдел первичной очистки на фабрике идёт два транспортёра: один переносит 500 граммов песква в секунду, а другой, новый, — 1 кг песка в секунду. Как поделить песок между этими двумя транспортёрами так, чтобы перевезти весь песок из одного отдела в другой за наименьшее время?

Задача 7. Одновременное вычитание

A. На доске написаны пять чисел, сумма которых делится на три. Разрешается одновременно уменьшать на единицу три из написанных на доске чисел. Всегда ли можно добиться того, чтобы на доске в итоге оказалось пять нулей?

B. На плоскости расположено несколько точек, каждой из которых приписан *вес* — целое число. При этом известно, что сумма весов всех точек равна нулю. Точки можно соединять кривыми, у каждой из которых есть *цена*. Если две точки соединены кривой с ценой w (w — целое число), то к весу одной из них прибавляется w, а из веса другой вычитается w (куда именно прибавлять, а откуда вычитать, можно решать самому). Докажите, что можно соединить точки кривыми с какими-то ценами так, чтобы веса всех точек оказались нулевыми.

C. В стране несколько городов, между ними проложены дороги. Для каждой дороги указаны направление (все дороги односторонние) и *вес* — натуральное число. Известно, что для каждого города сумма весов входящих в него дорог равна сумме весов исходящих. Докажите, что несколько машин (на номере каждой из которых написано натуральное число) могли проехать каждая по кругу через несколько городов так, что вес каждой дороги оказался равен сумме номеров машин, побывавших на ней.

Задача 8. Сетки на плоскости

A. Если замостить плоскость равносторонними треугольниками одного размера, то их стороны образуют треугольную сетку (в её форме также обычно строят карточные домики). В треугольной сетке есть три направления рёбер — они соответствуют сторонам складываемых треугольников. Докажите, что любой кратчайший путь по треугольной сетке от одного её узла к другому использует рёбра максимум двух направлений из трёх.

B. В деревне Малые Пауки поставили поперёк реки рыболовную сеть с квадратными ячейками, размером $m \times n$ ячеек. Окунь Виталий умеет сгрызать узлы в сетке, но, так как вода мутная, он не видит, какой именно узел грызёт, то есть каждый раз выгрызает случайный из узлов. Сколько узлов ему нужно сгрызть, чтобы сетка гарантированно развалилась хотя бы на две части?

C. Завхоз офисного здания, на третьем этаже которого есть бесконечно длинный и бесконечно широкий коридор, заказал в ООО „Странные ванные“ бесконечно много четырёхугольных кафельных плиток одинаковой формы и размера (при этом четырёхугольник не обязан быть ни прямоугольником, ни даже выпуклым). Докажите, что какой бы формы ни были плитки, ими всё равно можно покрыть весь пол в коридоре.

Задача 9. Ужасный гадкий аккуратный подсчёт

A. Круг разделён на n секторов одинакового размера. Сколькими способами можно покрасить эти n секторов в n цветов, если две раскраски, получающиеся друг из друга вращением круга, считаются одинаковыми?

B. Есть шесть цветов — красный, белый, синий, зелёный, чёрный, жёлтый. Нам хочется составить из них всевозможные триколоры (то есть флаги, состоящие из трёх горизонтальных цветных полос, как российский или немецкий). При этом если рядом оказываются две полосы одного цвета, они сливаются в одну, поэтому такой флаг не считается триколором. А вот флаг вроде «белый — синий — белый» — считается. Так сколько же триколоров можно составить?

C. Дан кубик. Сколькими способами можно покрасить его грани в 6 цветов (по одному на грань), если две раскраски, получаемые друг из друга вращением кубика, считаются одинаковыми?

Задача 10. Средние арифметические

Напомним: среднее арифметическое набора чисел $a_1 \ldots a_n$ вычисляется по формуле

$$\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}.$$

A. Придумайте четыре набора по пять чисел каждый так, чтобы наибольшее из средних арифметических этих наборов было больше, чем среднее арифметическое наибольших чисел этих наборов.

B. В первый класс школы №265 поступило 120 детей ростом соответственно 101, 102, 103, ..., 220 сантиметров. Завуч хочет распределить их на 4 класса по 30 человек так, чтобы, если в каждом классе взять рост самого низкого ученика, среднее арифметическое полученных четырёх чисел было наибольшим. Как ей это сделать?

C. В первый класс школы №235 поступило 80 детей ростом соответственно 51, 52, 53, ..., 130 сантиметров. Завуч хочет распределить их на 4 класса по 20 человек так, чтобы, если в каждом классе взять средний арифметический рост его учеников, минимум полученных четырёх чисел был наибольшим. Как ей это сделать?

Задачи 8 класса

Задача 1. У магазина

A. Два продавца в магазине, Фёдор и Кирилл, увеличивают все числа, которые называют, в несколько раз.

Фёдор: Кирилл умножает числа, которые произносит, на 144, так что не паникуйте, обсуждая с ним цены.

Кирилл: А ты когда вчера сказал, что учебник истории стоит 43200 рублей, покупатели в обморок упали!

Игорь Евгеньевич, директор магазина: Забавно ссоритесь! Причём если спросить у вас, сколько стоит учебник, вы скажете одну и ту же сумму.

Так во сколько же раз увеличивают числа продавцы — и сколько стоит учебник по истории?

B. Злоумышленник пришёл на парковку магазина и затёр по одной цифре на номерном знаке каждой из стоящих там машин. Он не знал, что числа на всех номерах машин в стране делятся на 99. Докажите, что даже после его пакостей можно однозначно восстановить стёртую цифру на номере каждой машины.

C. Покупатель и продавец в магазине торгуются: покупатель хочет купить товар по одной цене, а продавец — продать по другой (причём не обязательно продавец называет бо́льшую сумму; ему важнее не получить больше прибыли, а настоять на своём). Цены, конечно же, целые и неотрицательные. Торг происходит так: если сумма, названная продавцом, больше названной покупателем, то он вычитает из своей цены покупательскую и соглашается продать товар за получившееся число. В противном случае покупатель вычитает из своей цены сумму, на которой хочет сойтись продавец, и теперь готов купить товар за эту цену. Так происходит, пока один из участников торга не назовёт нулевую цену.

(а) Любой ли торг завершится? (б) Покупатель и продавец называют цены, не превосходящие 20. При каких значениях цен торг будет наиболее долгим?

Задача 2. Ужасный гадкий аккуратный подсчёт

A. Круг разделён на n секторов одинакового размера. Сколькими способами можно покрасить эти n секторов в n цветов, если две раскраски, получающиеся друг из друга вращением круга, считаются одинаковыми?

B. Есть шесть цветов — красный, белый, синий, зелёный, чёрный, жёлтый. Нам хочется составить из них всевозможные триколоры (то есть флаги, состоящие из трёх горизонтальных цветных полос, как российский или немецкий). При этом если рядом оказываются две полосы одного цвета, они сливаются в одну, поэтому такой флаг не считается триколором. А вот флаг вроде «белый — синий — белый» — считается. Так сколько же триколоров можно составить?

C. Дан кубик. Сколькими способами можно покрасить его грани в 6 цветов (по одному на грань), если две раскраски, получаемые друг из друга вращением кубика, считаются одинаковыми?

Задача 3. Не модельная, а модальная!

Пусть есть событие X, которое может происходить или не происходить в зависимости от того, какой сегодня день. Например, событие $X =$ «сегодня суббота» случается раз в семь дней, а событие «сегодня я смотрел на часы» — каждый день.

Имеются два символа, $\square$ и $\triangledown$, которые рассказывают что-то о разных событиях. Так, фраза «$\square X$» означает «начиная с сегодняшнего дня каждый день случается событие X». Фраза «$\triangledown X$» означает «в будущем найдётся день, когда случится событие X».

Два символа, упомянутых нами, можно комбинировать. Легко понять, что фраза «$\triangledown\square X$» значит «в будущем найдётся день, начиная с которого ежедневно будет происходить событие X». А фраза «$\square\square X$» значит то же самое, что и «$\square X$» (убедитесь в этом сами). Фразы, значащие одно и то же, будем называть эквивалентными.

A. Верно ли утверждение «$\square\triangledown$ сегодня суббота»? Что вообще значит фраза «$\square\triangledown X$»?

B. Докажите, что фразы «$\square\triangledown\square X$» и «$\triangledown\square X$» эквивалентны.

C. Сколько вообще существует попарно неэквивалентных фраз вида «_X» (вместо подчёркивания стоит последовательность из символов $\square$ и $\triangledown$)?

Задача 4. Катим круг

В «нижней» точке P окружности радиуса R её касается круг радиуса $\frac{R}{2}$, «нижняя» точка которого, в свою очередь, отмечена (см. рисунок). Круг начинают «вкатывать» вверх по окружности так, что в точке соприкосновения они никогда не скользят друг относительно друга.

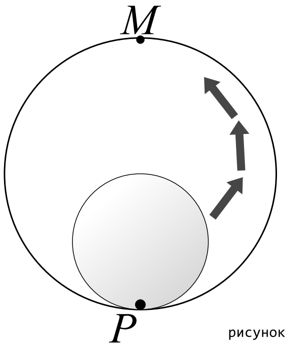


рисунок 1

A. Докажите, что когда круг проедет пол-оборота по окружности и будет касаться её в точке M, то его отмеченная точка окажется там же, в точке M.

B. Докажите, что в любой момент времени точка касания круга с окружностью и отмеченная точка круга находятся на одной горизонтальной прямой.

C. Докажите, что отмеченная точка перемещается строго по вертикальному отрезку.

Задача 5. Средние арифметические

Напомним: среднее арифметическое набора чисел $a_1 \ldots a_n$ вычисляется по формуле

$$\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}.$$

A. Придумайте четыре набора по пять чисел каждый так, чтобы наибольшее из средних арифметических этих наборов было больше, чем среднее арифметическое наибольших чисел этих наборов.

B. В первый класс школы №265 поступило 120 детей ростом соответственно 101, 102, 103, ..., 220 сантиметров. Завуч хочет распределить их на 4 класса по 30 человек так, чтобы, если в каждом классе взять рост самого низкого ученика, среднее арифметическое полученных четырёх чисел было наибольшим. Как ей это сделать?

C. В первый класс школы №235 поступило 80 детей ростом соответственно 51, 52, 53, ..., 130 сантиметров. Завуч хочет распределить их на 4 класса по 20 человек так, чтобы, если в каждом классе взять средний арифметический рост его учеников, минимум полученных четырёх чисел был наибольшим. Как ей это сделать?

Задача 6. Игры

A. Двое по очереди вырезают из клетчатого прямоугольника 5×2018 фигуру, изображённую на рисунке 3*(а)* — при этом её можно отражать и вращать. Проигрывает тот, кто не может вырезать фигуру в очередной раз. У кого из игроков есть выигрышная стратегия?

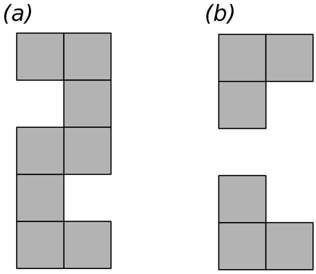


рисунок 3

B. Клетки прямоугольника 1×303 пронумерованы от 1 до 303 слева направо. В клетке №2 стоит фишка первого игрока, а в клетке №1 — второго игрока. Каждый игрок может делать ходы двух типов:

$*$ из клетки под номером k в клетку $k + 1$, если там не стоит фишка другого игрока;

$*$ из клетки под номером k в клетку $k+2m$, если m — натуральное число, и в клетке номер $k + m$ сейчас стоит фишка другого игрока (то есть, фишку соперника можно «перепрыгнуть»).

Выигрывает тот, чья фишка первой окажется в клетке № 303. У кого из игроков есть выигрышная стратегия?

C. Двое по очереди вырезают из клетчатого квадрата 4×4 уголки из трёх клеток, причём первый может вырезать только уголки, ориентированные как буква Г, а второй — только уголки, ориентированные как буква L (см. рис. 3*(b)*). Проигрывает тот, кто не может вырезать очередной уголок. У кого из игроков есть выигрышная стратегия?

Задача 7. Об одной задаче классификации

A. Полосой будем называть часть плоскости, заключённую между двумя параллельными прямыми. Ширина полосы — расстояние между ограничивающими её прямыми. Пусть на плоскости даны два непересекающихся круга. Покажите, как с помощью линейки без делений и циркуля отделить их друг от друга полосой максимальной ширины.

B. В условиях пункта А отделите полосой максимальной ширины два непересекающихся одинаково ориентированных квадрата на плоскости.

C. В условиях пункта A отделите полосой максимальной ширины два произвольных квадрата на плоскости.

Задача 8. Одновременное вычитание

A. На доске написаны пять чисел, сумма которых делится на три. Разрешается одновременно уменьшать на единицу три из написанных на доске чисел. Всегда ли можно добиться того, чтобы на доске в итоге оказалось пять нулей?

B. На плоскости расположено несколько точек, каждой из которых приписан *вес* — целое число. При этом известно, что сумма весов всех точек равна нулю. Точки можно соединять кривыми, у каждой из которых есть *цена*. Если две точки соединены кривой с ценой w (w — целое число), то к весу одной из них прибавляется w, а из веса другой вычитается w (куда именно прибавлять, а откуда вычитать, можно решать самому). Докажите, что можно соединить точки кривыми с какими-то ценами так, чтобы веса всех точек оказались нулевыми.

C. В стране несколько городов, между ними проложены дороги. Для каждой дороги указаны направление (все дороги односторонние) и *вес* — натуральное число. Известно, что для каждого города сумма весов входящих в него дорог равна сумме весов исходящих. Докажите, что несколько машин (на номере каждой из которых написано натуральное число) могли проехать каждая по кругу через несколько городов так, что вес каждой дороги оказался равен сумме номеров машин, побывавших на ней.

Задача 9. На салфетке

A.

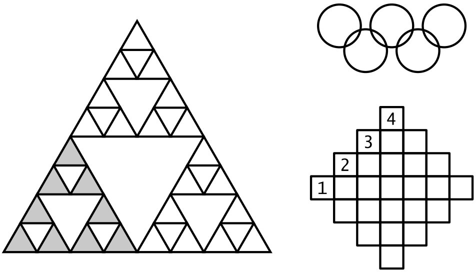


рисунок 5

Укажите, как нарисовать «одним росчерком пера», то есть не отрывая ручки от бумаги и не проходя по одной линии дважды, (а) олимпийские кольца (б) «наклонный квадрат» со стороной 4 (смотреть рисунок 5).

B. Треугольник Серпинского степени 1 — это просто треугольник. Чтобы получить треугольник Серпинского степени $n+1$, нужно поставить «друг на друга» три треугольника Серпинского степени n. На рисунке 5 изображён треугольник Серпинского степени 4, а цветом выделен треугольник Серпинского степени 3. Посчитайте, сколько узлов (точек, где пересекаются два и более непараллельных отрезка) в треугольнике Серпинского степени n. Посчитайте также, сколько отрезков длины 1 составляют «наклонный квадрат» со стороной n.

C. Укажите, как нарисовать одним росчерком пера треугольник Серпинского степени 4, изображённый на рисунке.

Задача 10. Необходимости и достаточности

A. Длина тела мышки — 10 сантиметров, а кошки — 55 сантиметров. Мышка пробегает 35 своих тел за секунду, а кошка — всего 9 своих тел за секунду. Догонит ли кошка мышку?

B. На одном болоте живут 100 ужасных Йожинов. Председатель решил, что с этой ситуацией надо наконец разобраться — обезвредить Йожинов и продать их в зоопарк. Известно, что Йожина можно обезвредить, только скинув на него с самолёта порошок. Председателю нужно выбрать, какой самолёт использовать: винтовой или реактивный.

Винтовой самолёт за один вылет осыпает порошком двух Йожинов, но, чтобы окончательно обезвредить одного Йожина, нужно осыпать его трижды. Реактивный самолёт, в силу своей более высокой скорости, за один вылет осыпает порошком 5 Йожинов, но, так как на каждого Йожина теперь попадает меньше порошка, для обезвреживания его нужно осыпать восемь раз.

Какой же самолёт эффективнее: какому потребуется меньше вылетов, чтобы обезвредить всех Йожинов?

C. Несколько велосипедистов отправились в поход. За обедом они в сумме съедают 2 килограмма еды плюс 0.1 кг за каждый килограмм еды, который они везли на себе до этого. Например, если у них было 10 килограммов еды на всех, то на ближайшем обеде они съедят $2 + 0.1 \cdot 10 = 3$ килограмма, а на следующем — $2 + 0.1 \cdot (10 - 3) = 2.7$ килограммов. В походе планируется 30 обедов (а велосипедисты не завтракают и не ужинают). Сколько еды им нужно взять с собой, чтобы её хватило на весь поход (и в конце похода не осталось ничего лишнего)?

Задача 11. Рукопожатия

A. Тридцать пять восьминогих существ — 18 крабов и 17 пауков — встали в хоровод, имеющий форму восьмёрки. Это значит, что существо, стоящее в центре этой восьмёрки, держит за лапы четверых своих соседей (благо, лап у него восемь, ему хватит). Известно, что каждый краб держится за лапы исключительно с пауками. Кто стоит в центре восьмёрки — краб или паук?

B. В компании работает двадцать шесть человек, и каждый дружит ровно с пятью другими. После подведения итогов государственной лотереи оказалось, что у каждого сотрудника найдётся друг или же друг его друга (это может быть и сам сотрудник: нетрудно понять, что он является другом всех своих друзей), выигравший в лотерее машину. Обязательно ли хотя бы два человека в этой компании выиграли машины?

C. Известно, что в Авиаландии пять городов: Гирфорд, Вингбург, Флэпстон, Пайлот-Бэй и Фьюлтэнк. Из каждого города летает шесть авиарейсов, внутренних или международных. Докажите, что за границы Авиаландии летает чётное количество авиарейсов.

Задача 12. Прогрессивное сложение

В свободных школах, не имеющих предрассудков, решили складывать числа, просто приписывая их друг к другу. Мы будем обозначать это действие значком $\oplus$: например, $2 \oplus 2 = 22$, $2000 \oplus 2000 = 20002000$.

В обычной жизни, в каком порядке числа ни складывай, результат остаётся неизменным: $2+3+5 = 5+3+2$. Однако, если выполнять с числами действие $\oplus$, результат может изменяться в зависимости от порядка чисел: $2 \oplus 3 \oplus 5 = 235 \neq 532 = 5 \oplus 3 \oplus 2$.

A. Даны числа 95 и 500. В каком порядке их нужно сложить, чтобы результат получился больше?

B. Даны три произвольных числа P, Q, R. В каком порядке нужно выполнять с ними действие $\oplus$, чтобы получить наибольший возможный результат?

C. Определим «прогрессивную разность»: $a \ominus b$ — это такое число c, что $b \oplus c = a$ Приведите пример чисел a и b таких, что их разность $a \ominus b$ не определена (нужного числа c не найдётся).

Задачи профильного варианта 7 класса

Задача 1. Римская десятичная система счисления

Интеллект человечества поддерживают лишь те неудобства, которые оно себе создаёт.

Давайте добавим в знакомую нам десятичную систему счисления немного Древнего Рима. Значение числа по его записи мы теперь будем восстанавливать так: начиная с самого правого разряда, сравниваем k–ую цифру числа с $k+1$–ой — и если более старшая цифра оказывается не меньше, то мы прибавляем к результату умножения её на соответствующую степень десятки число, которое получено нами при «раскодировании» первых k разрядов; в противном же случае — вычитаем это число.

Приведём несколько примеров. Записи «742» будет соответствовать число $700 + 40 + 2$, в то время как записи «342» — число $300 - (40 + 2) = 258$ (так как $3 < 4$).

Записи «6342» соответствует число $6300 - 42 = 6258$, а записи «2342» — число $2000 - (300 - (40 + 2)) = 1742$ (здесь сразу $2 < 3$ и $3 < 4$). Записи «55» соответствует число 55.

Чтобы не запутаться, будем обозначать через $S_{\text{Д}}$ число, соответствующее строке S, если воспринимать её как запись в традиционной десятичной системе счисления, а через $S_{\text{Р}}$ — число, соответствующее строке S, если воспринимать её как запись в «римской» десятичной системе счисления. Иными словами,

$$2342_{\text{Р}} \;=\; 1742_{\text{Д}} \;=\; \text{одна тысяча семьсот сорок два} \in \mathbb{N}.$$

1. Какие числа соответствуют следующим записям:

$$333_{\text{Р}},\ 2050_{\text{Р}},\ 10001_{\text{Р}},\ 404004_{\text{Р}}?$$

2. Перевести десятичные числа в десятичную римскую систему счисления (знак «минус» в десятичной римской системе счисления не используется!): $91_{\text{Д}}$, $150_{\text{Д}}$, $-1_{\text{Д}}$, $13_{\text{Д}}$.

3. Опишите все S такие, что $S_{\text{Д}} = S_{\text{Р}}$.

4. Предложите алгоритм построения по **двузначному** положительному десятичному числу (то есть, имеющему вид $xy_{\text{Д}}$) его десятичной римской записи.

5. Пусть $X_{\text{Д}} = Y_{\text{Р}} = N$. Какая десятичная римская запись будет соответствовать числу $10 \cdot N$? Числу $-N$?

6. Приведите пример числа N такого, что есть две **различных** строки S, T, для которых выполнено условие

$$S_{\text{Р}} = T_{\text{Р}} = N.$$

7. Может ли у одного числа быть строго больше двух различных десятичных римских записей?

8. Придумайте признаки делимости на 2, на 5, на 3 в десятичной римской системе счисления.

9. Пусть $Y_{\text{Р}} = N > 0$. Верно ли в десятичной римской системе неравенство

$$\frac{Y_{\text{Д}}}{4} < N \leq Y_{\text{Д}}?$$

10. ***А был ли мальчик?*** Можно ли вообще считать «десятичную римскую систему» системой счисления? Покажите, что, строго говоря, нет: приведите пример числа $M \in \mathbb{N}$, которому не соответствует ни одной десятичной римской записи.

Задача 2. Изображения на плоскости

«Алгоритм Тарского, да? :)

В данной задаче нас будет интересовать возможность представить множество точек на плоскости как множество решений какого-либо уравнения или неравенства. Например, уравнение $x - y = 0$ задаёт прямую с углом наклона 45°, а неравенство $min(x, y) \geq 0$ — первую координатную четверть.

При составлении неравенств и уравнений вам разрешено пользоваться арифметическими действиями — сложением, умножением, вычитанием, делением; функцией модуля — $|\dots|$, а также $\max$ и $\min$ — взятием наибольшего и наименьшего значений из конечного набора чисел.

1. Докажите, что

(а) $A \cdot B > 0$ тогда и только тогда, когда числа A и B одного знака;

(б) $\min(x, y) = \frac{1}{2}\Big(x + y - |x - y|\Big)$;

(в) Даны числа $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$. Докажите, что если $a_k < x < a_{k+1}$, то знак выражения

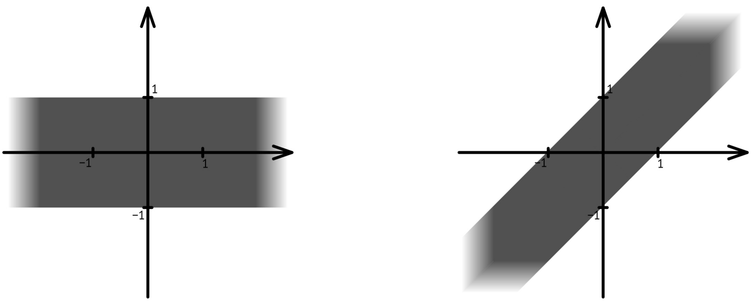
$$(x - a_1) \cdot (x - a_2) \cdot \ldots \cdot (x - a_n)$$

совпадает со знаком выражения $(-1)^n \cdot (-1)^k$.

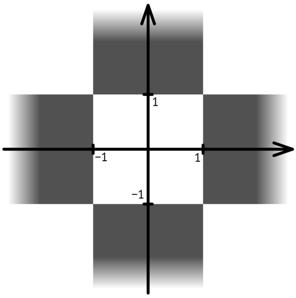
2. Изобразите множество точек (x, y) на плоскости, удовлетворяющих неравенству

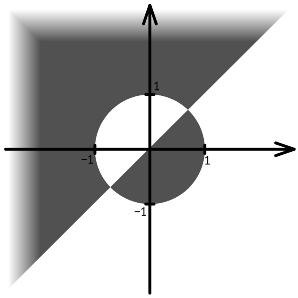
$$\max(|x|, |y|) \geq 1.$$

3. Множеством решений какого неравенства является (а) горизонтальная полоса на плоскости (б) наклонная полоса на плоскости (смотреть рисунок)?

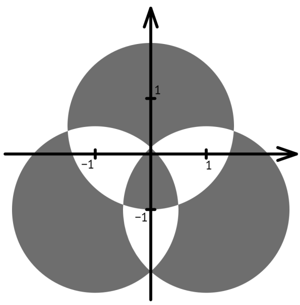


4. Множеством решений какого неравенства является (а) «крестик» на плоскости (б) фигура, полученная из круга и полуплоскости (смотреть рисунок)?

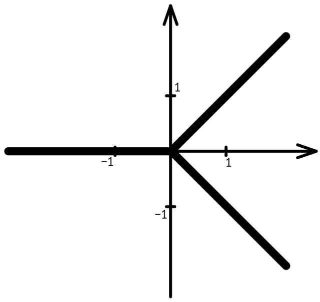


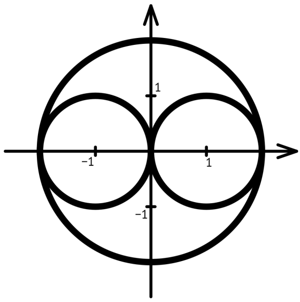


5. Множеством решений какого неравенства является фигура (смотреть рисунок), полученная из трёх кругов радиуса 1.5 с центрами в точках $(1,\ -1)$, $(-1,\ -1)$, $(0,\ 0.5)$?



6. Множеством решений какого уравнения является (а) фигура из трёх окружностей (б) фигура из трёх лучей (смотреть рисунок)?





7. Пусть фигура F_1 — множество решений уравнения $P_1(x, y) = 0$, а F_2 — множество решений уравнения $P_2(x, y) = 0$. Приведите уравнение, решения которого образуют (а) пересечение фигур F_1 и F_2 (б) объединение фигур F_1 и F_2?

8. Пусть фигура F_1 — множество решений неравенства $P_1(x, y) < 0$, а F_2 — множество решений неравенства $P_2(x, y) < 0$. Приведите неравенства, решения которого образуют (а) пересечение фигур F_1 и F_2 (б) объединение фигур F_1 и F_2 (в) множество точек, лежащих либо в фигуре F_1, либо в фигуре F_2, но не в них обеих одновременно?

Задача 3. Простеющие числа

Рассмотрим число 12. Среди чисел, меньших, чем 12, взаимно просты с ним следующие:

$$1, 5, 7, 11.$$

Все они, кроме единицы, являются простыми. А вот среди чисел, меньших 10 и взаимно простых с 10, есть, например, 9 — составное число.

Итак, число называется *простеющим*, если все числа, меньшие его и взаимно простые с ним — 1 или простые. Как мы выяснили, 12 — простеющее число, а 10 — нет.

1. Приведите примеры других простеющих чисел, кроме 12.

---

2. Перечислите все нечётные простеющие числа.

3. Перечислите все простеющие числа, не делящиеся на 3.

4. Перечислите все простеющие числа, не делящиеся на 5.

---

5. Докажите, что число вида $p^2 + 1$, где p — простое, не может быть простеющим.

6. Докажите, что если $n > p_1 \cdot p_2$, p_1 и p_2 — простые числа, и n не делится ни на p_1, ни на p_2, то оно
не может быть простеющим.

7. Докажите, что всякое простеющее число имеет вид $p + 1$, где p — какое-то простое.

---

8. Бесконечно ли множество простеющих чисел?

Задачи профильного варианта 8 класса

Задача 1. Простеющие числа

Рассмотрим число 12. Среди чисел, меньших, чем 12, взаимно просты с ним следующие:

$$1, 5, 7, 11.$$

Все они, кроме единицы, являются простыми. А вот среди чисел, меньших 10 и взаимно простых с 10, есть, например, 9 — составное число.

Итак, число называется *простеющим*, если все числа, меньшие его и взаимно простые с ним — 1 или простые. Как мы выяснили, 12 — простеющее число, а 10 — нет.

1. Приведите примеры других простеющих чисел, кроме 12.

---

2. Перечислите все нечётные простеющие числа.

3. Перечислите все простеющие числа, не делящиеся на 3.

4. Перечислите все простеющие числа, не делящиеся на 5.

---

5. Докажите, что число вида $p^2 + 1$, где p — простое, не может быть простеющим.

6. Докажите, что если $n > p_1 \cdot p_2$, p_1 и p_2 — простые числа, и n не делится ни на p_1, ни на p_2, то оно
не может быть простеющим.

7. Докажите, что всякое простеющее число имеет вид $p + 1$, где p — какое-то простое.

---

8. Бесконечно ли множество простеющих чисел?

Задача 2. Расстояние между множествами

«Знаете, как на русский язык переводится фамилия „Хаусдорф“? Домик в деревне!»

В данной задаче мы рассматриваем **только** конечные множества точек на плоскости, которые всегда будем обозначать буквами A, B, C. Плоскость замечательна тем, что на ней определено расстояние между точками $\mathrm{dist}\,(x, y)$ — его можно мыслить, как длину кратчайшего отрезка, соединяющего x и y. Напомним три основных свойства расстояния между точками:

- $\mathrm{dist}\,(x, y) = \mathrm{dist}\,(y, x)$;
- $\mathrm{dist}\,(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$;
- Для всех x, y, z выполнено «неравенство треугольника»:
$$\mathrm{dist}\,(x, y) + \mathrm{dist}\,(y, z) \geq \mathrm{dist}\,(x, z).$$

Также нам понадобится понятие *наименьшего значения*: если $f(x)$ — выражение, куда можно подставлять разные значения переменной x, то

$$\min_x f(x) \ —$$

это наименьшее число, которое может получиться при подстановке чего-либо в выражение f. Например, $\min_x x^2 = 0$. Похожим образом обозначается наибольшее значение — $\max_x f(x)$.

1. Рассмотрим квадрат $A_1A_2B_1B_2$ со стороной 1. Пусть $M_1 = \{A_1, A_2\}$, $M_2 = \{B_1, B_2\}$. Чему равно число
$$\max_{x \in M_1} \left(\min_{y \in M_2} \mathrm{dist}\,(x, y) \right)?$$
А чему равно
$$\min_{y \in M_2} \left(\max_{x \in M_1} \mathrm{dist}\,(x, y) \right)?$$
Например, для подсчёта первого выражения вам нужно для каждой из точек A_1, A_2 найти расстояние до ближайшей к ней точки из множества M_2, а затем взять наибольшее из этих двух расстояний.

2. Как оказалось, M_1 и M_2 из предыдущего пункта — пример таких множеств, что указанные нами величины для них не совпадают. Докажите, тем не менее, что для любых двух A, B выполнено неравенство:

$$\max_{x\in A}\left(\min_{y\in B}\ \mathrm{dist}\,(x,y)\right)\ \le\ \min_{y\in B}\left(\max_{x\in A}\ \mathrm{dist}\,(x,y)\right).$$

3. Докажите, что по заранее заданному положительному числу r всегда можно подобрать два множества A, B так, что разность двух величин из предыдущего пункта будет равна r. Иными словами, эту разность можно сделать сколь угодно большой.

Также нам потребуется понятие *окрестности множества*. Пусть A — конечное и состоит из точек на плоскости. Тогда его ρ–окрестность — это фигура, являющаяся объединением кругов радиуса ρ с центрами в точках множества A. Для иллюстрации этого понятия предлагаем вам изобразить 1–окрестность множества из двух точек, расстояние между которыми равно 2.

4. Приведите пример A, B таких, что A целиком лежит в 1–окрестности B, но B не лежит в 1–окрестности A.

5. Пусть A, B и C — три конечных множества точек на плоскости. Докажите, что если B целиком лежит в ρ_1–окрестности A, а C целиком лежит в ρ_2–окрестности B, то C целиком лежит в $(\rho_1+\rho_2)$–окрестности множества A.

6. Докажите, что для любого A выполнено

$$\max_{x\in A}\left(\min_{y\in A}\ \mathrm{dist}\,(x,y)\right)\ =\ 0.$$

7. Докажите, что если $\max_{x\in A}\ \left(\min_{y\in B}\ \mathrm{dist}\,(x,y)\right)\le R$, то множество A целиком лежит в R–окрестности множества B. Докажите обратный факт.

8. Пользуясь предыдущими пунктами, проверьте, что для следующего выражения (вместо A и B можно подставлять конечные множества точек на плоскости) выполнены три свойства расстояния, перечисленные в начале этой задачи:

$$\mathrm{DIST}\,(A,B)\ =\ \max\left\{\max_{x\in A}\left(\min_{y\in B}\ \mathrm{dist}\,(x,y)\right),\ \max_{x\in B}\left(\min_{y\in A}\ \mathrm{dist}\,(x,y)\right)\right\}.$$

В частности, первое свойство следует из того, что выражение никак не меняется при замене A на B и наоборот.

Поздравляем вас! Только что вы определили **расстояние Хаусдорфа** — $\mathrm{DIST}\,(A,B)$ — между множествами на плоскости. Это незаменимый объект в математике. Предлагаем вам доказать простейший, но очень важный факт про это расстояние:

9. Если A и B являются подмножествами одного и того же круга радиуса R, то $\mathrm{DIST}\,(A, B) \leq 2R$.

Задача 3. Изображения на плоскости

«Алгоритм Тарского, да? :)

В данной задаче нас будет интересовать возможность представить множество точек на плоскости как множество решений какого-либо уравнения или неравенства. Например, уравнение $x - y = 0$ задаёт прямую с углом наклона $45°$, а неравенство $min(x, y) \geq 0$ — первую координатную четверть.

При составлении неравенств и уравнений вам разрешено пользоваться арифметическими действиями — сложением, умножением, вычитанием, делением; функцией модуля — $|\ldots|$, а также $\max$ и $\min$ — взятием наибольшего и наименьшего значений из конечного набора чисел.

1. Докажите, что

(а) $A \cdot B > 0$ тогда и только тогда, когда числа A и B одного знака;

(б) $\min(x, y) = \frac{1}{2}\Big(x + y - |x - y|\Big)$;

(в) Даны числа $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$. Докажите, что если $a_k < x < a_{k+1}$, то знак выражения

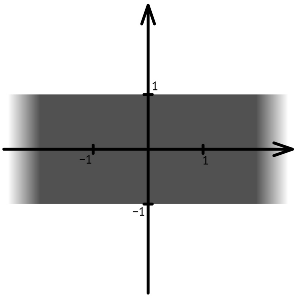
$$(x - a_1) \cdot (x - a_2) \cdot \ldots \cdot (x - a_n)$$

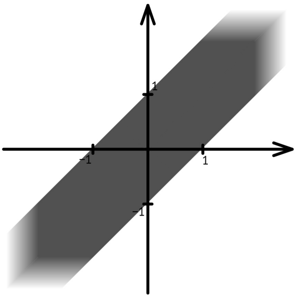
совпадает со знаком выражения $(-1)^n \cdot (-1)^k$.

2. Изобразите множество точек (x, y) на плоскости, удовлетворяющих неравенству

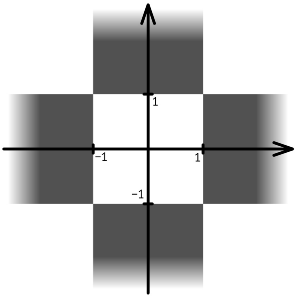
$$\max(|x|, |y|) \geq 1.$$

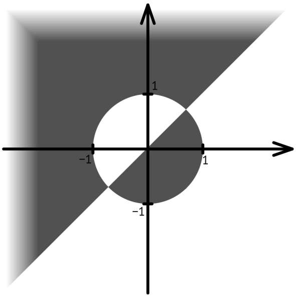
3. Множеством решений какого неравенства является (а) горизонтальная полоса на плоскости (б) наклонная полоса на плоскости (смотреть рисунок)?



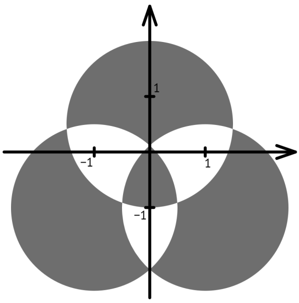


4. Множеством решений какого неравенства является (а) «крестик» на плоскости (б) фигура, полученная из круга и полуплоскости (смотреть рисунок)?

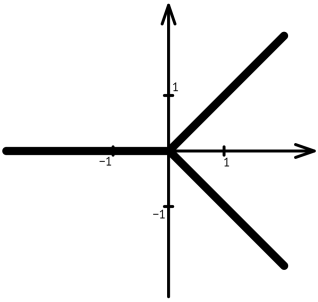


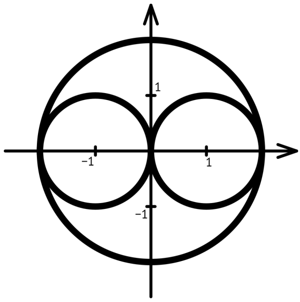


5. Множеством решений какого неравенства является фигура (смотреть рисунок), полученная из трёх кругов радиуса 1.5 с центрами в точках $(1,\ -1)$, $(-1,\ -1)$, $(0,\ 0.5)$?



6. Множеством решений какого уравнения является (а) фигура из трёх окружностей (б) фигура из трёх лучей (смотреть рисунок)?





7. Пусть фигура F_1 — множество решений уравнения $P_1(x, y) = 0$, а F_2 — множество решений уравнения $P_2(x, y) = 0$. Приведите уравнение, решения которого образуют (а) пересечение фигур F_1 и F_2 (б) объединение фигур F_1 и F_2?

8. Пусть фигура F_1 — множество решений неравенства $P_1(x, y) < 0$, а F_2 — множество решений неравенства $P_2(x, y) < 0$. Приведите неравенства, решения которого образуют (а) пересечение фигур F_1 и F_2 (б) объединение фигур F_1 и F_2 (в) множество точек, лежащих либо в фигуре F_1, либо в фигуре F_2, но не в них обеих одновременно?

Условия задач 2017 года

Задачи 4 класса

Задача 1. Обаятельный домовёнок

A. Про домовёнка Кузю издано 40 статей. Кузя решил заняться их чтением с целью узнать о себе что-нибудь новое. Каждый день Кузя читает по 6 статей, но при этом издаётся 4 новых. Как скоро Кузя догонит издателей?

B. Кузя напечатал 10 000 квадратиков со стороной 1 см, после этого у него в картридже закончились чернила. Сколько квадратиков со стороной 2 см он сможет напечатать, если у него есть полный картридж, аналогичный имевшемуся?

C. Дана таблица 7×7. В центры её клеток Кузя вбил гвоздики. Проведите линию через все гвоздики так, чтобы сделать при этом как можно меньшее количество поворотов (линию при этом можно вести только горизонтально и вертикально).

Задача 2. Велопоход

A. Девочка въезжает в горку длиной 400 метров со скоростью 10 километров в час. Как долго она будет это делать?

B. Начинающая Полина едет на велосипеде без остановок со скоростью 15 км/ч, а опытный Дмитрий Григорьевич — со скоростью 34 км/ч, но остановки на отдых отнимают у него столько же времени, сколько он находится в движении. Кто же в итоге быстрее?

C. Подъём в горку и спуск с неё имеют одинаковую длину. Степан на гоночном велосипеде въезжает в горку со скоростью 10 км/ч, а спускается со скоростью 40 км/ч. А Пётр на тракторе едет с постоянной скоростью 17 км/ч. Кто из них быстрее преодолеет подъём и спуск?

Задача 3. Буквы на белом листе

A. Какие буквы русского алфавита можно перерисовать в другие, добавляя линии?

B. Какая буква русского алфавита, если написать её на листе бумаги, поделит его на наибольшее число областей?

C. Вдохновившись предыдущими пунктами этой задачи, мальчик Гера Симонов написал на листе бумаги две буквы О. На сколько областей они могли поделить лист?

Задача 4. Делить и резать, резать и делить

A. Как двумя линиями разделить прямоугольник на четыре части одинаковой площади, имея только карандаш и линейку без разметки?

B. Изобразите фигуру, которую можно одним прямым разрезом поделить на три части одинаковой площади.

C. Каждый из двух разрезов делит фигуру на две части одинаковой площади. Обязательно ли вместе они делят фигуру на четыре части одинаковой площади?

Задача 5. О, как мы далеки!

A. На прямой дороге расположены четыре остановки: A, B, C, D (не обязательно в таком порядке). Известно, что расстояние между остановками A и D равно 1 км, между B и C — 2 км, между B и D — 3 км, между A и B — 4 км, а между C и D — 5 км. Чему равно расстояние между остановками A и C?

B. Вдоль прямой аллеи растут четыре дерева. Расстояния между соседними равны 63, 14 и 84 метра соответственно. Сколько деревьев надо ещё посадить, чтобы расстояние между любыми двумя соседними деревьями было одинаковым?

C. Можно ли на прямой отметить точки A, B, C, D и E так, чтобы расстояния между ними оказались равны: $AB = 6$, $BC = 7$, $CD = 10$, $DE = 9$, $AE = 12$? Если можно, то покажите как, если нет — объясните, почему.

Задача 6. Быть врачом — весьма ответственно!

A. Доктор оперирует Геометричного дождевого червя. Особенность червя в том, что, отдыхая, он выворачивается линией из шести отрезков, которая пересекает каждый свой отрезок ровно один раз. При этом он ещё и кусает себя за хвост. Как выглядит отдыхающий Геометричный червь?

B. Другой доктор учится закреплять сломанные кости. На экзамене ему выдали шесть абсолютно прямых костей одинаковой длины. Он должен завязать на этих костях 12 узлов хирургической нитью, причём на каждой кости должно быть по 4 узелка. Каждый узел связывает не более двух костей. Помогите врачу справиться с этим заданием.

C. Ещё три доктора — Айболит, Пеппер и Ватсон — по очереди оперируют заразного больного, при этом у них всего две пары перчаток. Перчатки можно надевать наизнанку и друг на друга. По медицинским правилам руки разных хирургов не должны касаться одной поверхности перчаток. Оперировать одной рукой нельзя. Могут ли хирурги обойтись данными им перчатками?

Задачи 5 класса

Задача 1. Поделим – посмотрим

A. На какое наибольшее число областей делят плоскость 4 прямоугольных треугольника?

B. На какое наибольшее число областей может разбить прямая семиугольник? Докажите, что на большее число никакой семиугольник разбить нельзя.

C. На какое наибольшее число областей делят плоскость 15 одинаковых по размеру квадратов, все стороны которых горизонтальны либо вертикальны?

Задача 2. Шутка

A. Дана 200-этажная башня. Стул с 30 ножками скидывают с её крыши, и одновременно с этим более лёгкий стул совсем без ножек отправляют катиться вниз по лестнице внутри башни. Может ли безногий стул достигнуть земли быстрее, чем летящий?

B. Выписка из дневника автора задач олимпиады «Математика НОН-СТОП»:

> *Так, вчера я придумал всего четыре задачи... Мне снилось, что сегодня я придумаю в полтора раза больше задач, чем в сумме за день, когда сегодня останется вчера, и за день, для которого сегодня должно было наступить завтра... Однако в день, который будет вчера для завтра и был завтра для вчера, я придумал в три раза больше задач, чем за послезавтрашнее вчера... Что за сны-то такие странные в последнее время?..*

Если верить сну, сколько задач должен был придумать автор в день, когда он оставил эту заметку?

C. Автомобиль выехал из Петербурга в Пекин и сломался через 80 километров. На исправление неполадок ушло, правда, всего две минуты. Однако, проехав ещё 40 километров, автомобиль вновь сломался, но вновь был отремонтирован за две минуты. Далее перед каждой следующей поломкой автомобиль проезжал вдвое меньше, чем перед предыдущей, но приводился в рабочее состояние за неизменные две минуты. Доедет ли он в итоге до Пекина?

Задача 3. О, как мы далеки!

A. На прямой дороге расположены четыре остановки: A, B, C, D (не обязательно в таком порядке). Известно, что расстояние между остановками A и D равно 1 км, между B и C — 2 км, между B и D — 3 км, между A и B — 4 км, а между C и D — 5 км. Чему равно расстояние между остановками A и C?

B. Вдоль прямой аллеи растут четыре дерева. Расстояния между соседними равны 63, 14 и 84 метра соответственно. Сколько деревьев надо ещё посадить, чтобы расстояние между любыми двумя соседними деревьями было одинаковым?

C. Можно ли на прямой отметить точки A, B, C, D и E так, чтобы расстояния между ними оказались равны: $AB = 6$, $BC = 7$, $CD = 10$, $DE = 9$, $AE = 12$? Если можно, то покажите как, если нет — объясните, почему.

Задача 4. Простые, но такие сложные

A. Натуральное число называется простым, если оно нацело делится только на себя и на единицу. Найдите все такие простые числа p, что числа $p + 2$ и $p + 4$ тоже простые.

B. Натуральное число n является произведением двух простых чисел. Каждое из этих простых чисел увеличили на 1. Произведение полученных чисел оказалось на 100 больше, чем n. Чему равно число n? Найдите все возможные варианты и объясните, почему других нет.

C. В ряд расположены 50 выключателей, все в положении «выключено». Мимо них проходят 50 электриков — k-ый из них переключает каждый k-ый выключатель (включает, если он был выключен, и наоборот). Например, седьмой электрик переключит фонари под номерами 7, 14, 21, 28 и так далее. Какие фонари останутся включенными после прохода электриков?

Задача 5. Неизвестные цифры

A. Имеет ли данный ребус решение — то есть, можно ли сопоставить разным буквам разные цифры так, чтобы равенство стало верным:

$$\text{М}\cdot\text{И}\cdot\text{З}\cdot\text{А}\cdot\text{Н}\cdot\text{Т}\cdot\text{Р}\cdot\text{О}\cdot\text{П} = \text{ХРОМОТА}?$$

B. Решите ребус (то есть, сопоставьте разным буквам разные цифры, а одинаковым — одинаковые так, чтобы равенство стало верным):

$$\text{КРЕМ} + \text{КРЕМ} = \text{ЖЕЛЕ}; \quad \text{известно, что Л} = 9.$$

C. Учитель написал на доске 10 последовательных чисел. Шаловливый Стёпа, уходя после уроков домой, стёр одно — и тут же забыл, какое. Он помнил только, что сумма оставшихся на доске чисел равна 2017. Какое же конкретно число он стёр?

Задача 6. И пусть Бетховен услышит

Девочка Лина играет на круговом фортепиано аналог «Лунной сонаты» собственного сочинения. На таком фортепиано клавиши расположены в виде кольца, а исполнитель должен предварительно залезть внутрь этой конструкции. Таким образом, если идти слева направо, после всех 88 клавиш ноты начинаются с начала.

A. Первую часть сонаты Лина начинает с клавиши под номером один. Сначала она прыгает на один шаг вправо. Затем на две клавиши влево. Потом на три клавиши вправо, четыре клавиши влево, и так далее. На каком шаге Лина первый раз нажмёт на клавишу под номером 45?

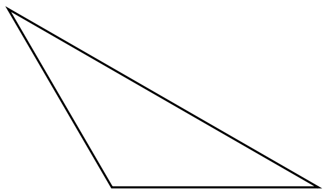
B. Вторую часть сонаты Лина подпевает: ЛЯ, ЛЮ-ЛЯ, ЛЮ-ЛЮ-ЛЮ-ЛЯ, ЛЮ-ЛЮ-ЛЮ-ЛЮ-ЛЮ-ЛЮ-ЛЮ-ЛЮ-ЛЯ,... (перед каждой букой Л добавляется ЛЮ). На каждое ЛЮ или ЛЯ она, начиная с первой клавиши, идёт слева направо и нажимает по одной клавише на фортепиано. Когда первый раз «ЛЯ» Лины будет пропето одновременно с нажатием клавиши под номером 48?

C. Третью часть сонаты Лина играет, нажимая сначала на первую клавишу, потом прыгает на одну клавишу вправо, потом ещё на две клавиши, ещё на три, . . ., ещё на 100. После этого она повторяет такую мелодию ещё 1935 раз. На какую по счёту клавишу она нажмёт последней?

Задачи 6 класса

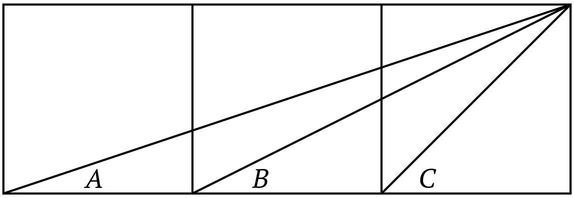
Задача 1. Разрезания и углы

A. Разрежьте тупоугольный треугольник ниже на семь остроугольных треугольников. Прямоугольный треугольник не считается остроугольным.



B. Дан квадрат со стороной 1 см. Покажите, как разрезать его на остроугольные треугольники.

C. Докажите, что сумма величин углов A и B на рисунке равна величине угла C.



Задача 2. Пока не пришёл лифтёр

Витя и Петя живут в бесконечном вверх и вниз доме и очень любят кататься на лифте. Как-то раз неведомые хулиганы сломали кнопки во всех лифтах так, что те могли двигаться только на n этажей вверх или вниз и на m этажей вверх или вниз.

A. Мальчики не растерялись — сели каждый в свой лифт и одновременно выехали с нулевого этажа, причём Витя с каждый раз едет на n этажей вверх, а Петя — на m этажей вверх. Оказалось, что первый раз они побывали на одном и том же этаже под номером 123. Чему могли быть равны n, m?

B. Петя находится этажом выше Вити. Петин лифт умеет ездить на k этажей вверх или вниз, Витин — на $k+1$ этаж вверх или вниз. Мальчики начинают ездить на лифтах, как им заблагорассудится. Может ли Петя управлять своим лифтом так, чтобы никогда не встретиться с Витей на одном этаже? Обязательно ли для этого Пете знать этаж, на котором в данный момент находится Витя?

C. Теперь Витя решил с помощью двух кнопок — на n этажей вверх или на m вниз — добраться на лифте с нулевого этажа до первого. И у него получилось. Докажите, что НОД $(n, m) = 1$.

Задача 3. На плоскости

A. Квадрат разрезан на 36 квадратиков. Из них 35 имеют площади, равные 1, а один имеет площадь большую 1. Какую?

B. Дано 12 прочных секций забора одинаковой длины. Какое наибольшее число изолированных областей можно отгородить ими от бесконечного плоского пастбища?

C. Докажите, что любой четырёхугольник имеет хотя бы одну высоту, выходящую из какой-нибудь вершины, попадающую на одну из его сторон, а не на продолжение.

Задача 4. Неземное стихосложение

A. Известный венерианский поэт несколько лет назад написал знаменитое незамысловатое стихотворение, начальные строчки которого мы приводим:

Два два.
Три два.
Два два два.
Три три.
Три два два.
Пять два.

Продолжите его, напишите последующие три строчки.

B. Венерианскому поэту на День рождения подарили большой круглый торт, и он прямым разрезом поделил его пополам. Придумайте форму блюдца такую, что на одно блюдце этой формы нельзя положить полторта, но на два одинаковых блюдца такой формы можно положить целый торт.

C. В Венерианском литературном обществе состоит 2017 поэтов. Докажите, что среди них найдутся трое, знакомые каждый друг с другом, или трое, не знакомые друг с другом.

Задача 5. Простые, но такие сложные

A. Натуральное число называется простым, если оно нацело делится только на себя и на единицу. Найдите все такие простые числа p, что числа $p+2$ и $p+4$ тоже простые.

B. Натуральное число n является произведением двух простых чисел. Каждое из этих простых чисел увеличили на 1. Произведение полученных чисел оказалось на 100 больше, чем n. Чему равно число n? Найдите все возможные варианты и объясните, почему других нет.

C. В ряд расположены 50 выключателей, все в положении «выключено». Мимо них проходят 50 электриков — k-ый из них переключает каждый k-ый выключатель (включает, если он был выключен, и наоборот). Например, седьмой электрик переключит фонари под номерами 7, 14, 21, 28 и так далее. Какие фонари останутся включенными после прохода электриков?

Задача 6. Шутка

A. Дана 200-этажная башня. Стул с 30 ножками скидывают с её крыши, и одновременно с этим более лёгкий стул совсем без ножек отправляют катиться вниз по лестнице внутри башни. Может ли безногий стул достигнуть земли быстрее, чем летящий?

B. Выписка из дневника автора задач олимпиады «Математика НОН-СТОП»:

> *Так, вчера я придумал всего четыре задачи... Мне снилось, что сегодня я придумаю в полтора раза больше задач, чем в сумме за день, когда сегодня останется вчера, и за день, для которого сегодня должно было наступить завтра... Однако в день, который будет вчера для завтра и был завтра для вчера, я придумал в три раза больше задач, чем за послезавтрашнее вчера... Что за сны-то такие странные в последнее время?..*

Если верить сну, сколько задач должен был придумать автор в день, когда он оставил эту заметку?

C. Автомобиль выехал из Петербурга в Пекин и сломался через 80 километров. На исправление неполадок ушло, правда, всего две минуты. Однако, проехав ещё 40 километров, автомобиль вновь сломался, но вновь был отремонтирован за две минуты. Далее перед каждой следующей поломкой автомобиль проезжал вдвое меньше, чем перед предыдущей, но приводился в рабочее состояние за неизменные две минуты. Доедет ли он в итоге до Пекина?

Задача 7. Многонациональные захватчики

A. Армии девяти государств вторглись на остров, имеющий форму таблицы 5×5. Каждая из армий хочет захватить себе по ячейке на этом острове так, чтобы любая из незахваченных ячеек имела бы общую сторону ровно с одной захваченной. Помогите им это сделать.

B. Армии ста государств вторглись на остров, имеющий форму таблицы 100×100, и захватили себе каждая по одной клетке. Теперь они хотят поделить остров между собой так, чтобы клетки в каждой строке и в каждом столбце все принадлежали разным государствам. Всегда ли можно поделить между государствами оставшиеся после изначального захвата клетки так, чтобы не нарушить поставленное условие?

C. Армия одного государства вторглась на остров, заселённый аборигенами. Известно, что остров имеет форму таблицы $(2k+1)\times(2k+1)$. Может ли эта армия захватить некоторые клетки острова таким образом, чтобы каждая клетка имела ровно две захваченных, соседних с ней по стороне?

Задача 8. Все числа состоят из цифр

A. Существует ли такое двузначное число, что если поменять в нём цифры местами, оно станет в три раза больше?

B. Илья и Алексей разгадывают числовой шифр XYZ из трёх цифр. Им известно, что искомое число делится на 9 и не делится на 10. Кроме того, первые две цифры образуют двузначное число XY, которое является квадратом некоторого натурального числа, а две последние цифры образуют двузначное число YZ, которое меньше 40. Помогите ребятам разгадать шифр.

C. Натуральное число n имеет 61 разряд и состоит из двоек, троек и четверок. При этом двоек на 19 больше, чем четверок. Найти остаток от деления числа n на 9.

Задачи 7 класса

Задача 1. Переводчики с немецкого

A. Переводчику нужно перевести несколько рекламных брошюр и несколько газетных заметок. Он подсчитал, что если увеличить в некоторое целое число раз количество имеющихся у него брошюр, то их станет 116. А если увеличить в такое же число раз количество имеющихся газетных заметок, то их станет 217. Сколько же брошюр и сколько заметок предстоит перевести?

B. Перед коллективом из трёх переводчиков стоит задача перевести 16 журналистских обзоров, 16 художественных текстов и 16 технических. Каждый из них сказал, сколько текстов какой специфики хочет перевести, причём пожелание каждого включало 16 текстов.

Более того, в сумме переводчики хотят перевести ровно 16 журналистских, 16 художественных и 16 технических текстов. Докажите, что их начальник может распределить тексты для перевода так, чтобы удовлетворить пожеланиям каждого из переводчиков.

C. Переводчик работает с текстом на 2-немецком. Текст на 2-немецком характерен тем, что значение может быть заключено не только в словах, но и в сочетаниях из двух подряд идущих слов. При этом всякое отдельное слово и всякое сочетание имеют своё значение. Сколькими способами можно разбить текст из n слов на слова и сочетания?

Задача 2. Гонки улиток

A. Две улитки ползут снизу вверх по столбу высотой 7 метров. Первая за день проползает 5 метров, но за ночь скатывается на 4 метра. Вторая за день преодолевает 3 метра, а за ночь соскальзывает лишь на 1. Какая из улиток быстрее доберётся до верха столба?

B. Дан клетчатый лист 31×31. В центре каждой клетки сидит по улитке. В полночь каждая улитка переползает на одну из четырёх клеток, соседних с её родной. Докажите, что в какой-то из клеток теперь нет ни одной улитки.

C. Высоко-высоко на стене сидит улитка. Прямо под ней, у подножия стены — ещё одна. Верхняя улитка хочет встретиться с нижней, а нижняя — избежать встречи с верхней. Про каждую улитку известна её максимальная скорость. Докажите, что у более быстрой улитки из этих двоих всегда есть возможность осуществить своё собственное желание.

Задача 3. Участники «Математики НОН-СТОП»

A. Парты в одном из кабинетов, где проходит олимпиада, стоят в три колонки по шесть парт в каждой. За 20 минут до олимпиады в кабинете сидело 8 школьников. Докажите, что из кабинета пока что можно утащить две свободные парты, стоящие друг за другом. А если бы школьников было 9?

B. Не оставляет никакого сомнения, что некоторые участники нашей олимпиады (в прошлом году, например, их было более 400) знакомы друг с другом. Докажите, что найдутся два участника, имеющие одинаковое количество знакомых среди других участников олимпиады.

C. Докажите, что среди участников олимпиады «Математика НОН-СТОП» найдутся трое, знакомые каждый друг с другом, или трое, не знакомые друг с другом.

Задача 4. Загадывание чисел

A. Ваня и Даня загадали каждый по натуральному числу. Сложив эти два числа, мальчики выяснили, что их сумма делится на одно из них. Чему равен наибольший общий делитель чисел, загаданных мальчиками?

B. Галя и Валя загадали по числу. Оказалось, что загаданные девочками числа взаимно просты. Могут ли остатки от деления этих чисел на 17 оказаться не взаимно простыми? С другой стороны, верно ли, что если остатки a и b от деления на любое число взаимно просты, то и a взаимно просто с b?

C. Болек загадывает число. Лёлек просит его прибавить к загаданному числу сначала 3, потом 4, потом 5, потом 6, и наконец перемножить полученные четыре результата. У Болека получилось 288. Помогите Лёлеку найти загаданное число!

Задача 5. Многонациональные захватчики

A. Армии девяти государств вторглись на остров, имеющий форму таблицы 5×5. Каждая из армий хочет захватить себе по ячейке на этом острове так, чтобы любая из незахваченных ячеек имела бы общую сторону ровно с одной захваченной. Помогите им это сделать.

B. Армии ста государств вторглись на остров, имеющий форму таблицы 100×100, и захватили себе каждая по одной клетке. Теперь они хотят поделить остров между собой так, чтобы клетки в каждой строке и в каждом столбце все принадлежали разным государствам. Всегда ли можно поделить между государствами оставшиеся после изначального захвата клетки так, чтобы не нарушить поставленное условие?

C. Армия одного государства вторглась на остров, заселённый аборигенами. Известно, что остров имеет форму таблицы $(2k+1)\times(2k+1)$. Может ли эта армия захватить некоторые клетки острова таким образом, чтобы каждая клетка имела ровно две захваченных, соседних с ней по стороне?

Задача 6. Порезать торт на День рождения

A. Девочке Глаше на День рождения подарили большой круглый торт. Может ли её непоседливый брат Гоша сделать в нём три непересекающихся прямых разреза так, чтобы нельзя было провести ещё трёх разрезов, которые вместе с исходными образовывали бы замкнутую несамопересекающуюся шестизвенную ломаную?

B. Девочке Зине на День рождения тоже подарили большой круглый торт, а она прямым разрезом поделила его пополам. Придумайте форму блюдца такую, что на одно блюдце этой формы нельзя положить полторта, но на два одинаковых блюдца такой формы можно положить целый торт.

C. Мальчику Феде на День рождения подарили торт в форме большого куба. Его верх и бока равномерно политы шоколадной глазурью с кокосовой крошкой. Помогите Феде разделить торт так, чтобы ему и четырём его друзьям досталось поровну объёма торта и поровну глазури.

Задача 7. Взвешивания

A. Кухонные весы врут — число, которое они показывают, на какое-то фиксированное количество граммов больше, чем реально лежащая на них масса. При взвешивании картофеля получилось 1000 граммов, при взвешивании домашнего кота — 4400 граммов. При взвешивании кота вместе с картофелем — 5000 граммов. Чему же равна погрешность весов?

B. Даны 729 монет, из них одна фальшивая — немного легче настоящих. Найдите её за 6 взвешиваний на двухчашечных весах без гирь.

C. Весы на рынке умеют показывать суммарную массу лежащих на них предметов. Есть 15 мешков: в 14 настоящие монеты, каждая весом по 20 граммов, и в последнем фальшивые — весом по 25 граммов.

Как за одно взвешивание определить, в каком из мешков лежат фальшивые монеты?

Задача 8. Шутка

A. Дана 200-этажная башня. Стул с 30 ножками скидывают с её крыши, и одновременно с этим более лёгкий стул совсем без ножек отправляют катиться вниз по лестнице внутри башни. Может ли безногий стул достигнуть земли быстрее, чем летящий?

B. Выписка из дневника автора задач олимпиады «Математика НОН-СТОП»:

> *Так, вчера я придумал всего четыре задачи... Мне снилось, что сегодня я придумаю в полтора раза больше задач, чем в сумме за день, когда сегодня останется вчера, и за день, для которого сегодня должно было наступить завтра... Однако в день, который будет вчера для завтра и был завтра для вчера, я придумал в три раза больше задач, чем за послезавтрашнее вчера... Что за сны-то такие странные в последнее время?..*

Если верить сну, сколько задач должен был придумать автор в день, когда он оставил эту заметку?

C. Автомобиль выехал из Петербурга в Пекин и сломался через 80 километров. На исправление неполадок ушло, правда, всего две минуты. Однако, проехав ещё 40 километров, автомобиль вновь сломался, но вновь был отремонтирован за две минуты. Далее перед каждой следующей поломкой автомобиль проезжал вдвое меньше, чем перед предыдущей, но приводился в рабочее состояние за неизменные две минуты. Доедет ли он в итоге до Пекина?

Задача 9. Вовочка и клетчатая тетрадь

A. У Вовочки есть клетчатая тетрадь (клетки — одинаковые, квадратные), линейка без делений и карандаш. Площадь каждой клетки в тетради — 100 мм^2. Как Вовочке имеющимися средствами построить квадрат площадью 1000 мм^2?

B. Вовочка нарисовал в тетради отрезок длиной 50 мм. Как Вовочке имеющимися средствами поделить его на 3 равных части, на 7 равных частей?

C. Площадь каждой клетки в тетради — по-прежнему 100 мм^2. Как при помощи линейки без делений и карандаша построить квадрат площадью 80 мм^2?

Задача 10. Игра

A. 2017 единиц стоит в ряд, между ними поставлены плюсы. Двое по очереди ставят пары скобок в выражении так, что после каждого хода оно остаётся осмысленным, причём пару скобок нельзя ставить дважды на одни и те же места. Расставив 2016 пар скобок, они считают значение получившегося выражения — если оно чётно, выигрывает второй, иначе первый. Кто победит при правильной игре?

B. Даны две кучи камней: в одной 23 камня, вторая пока пустая. Также дан мешок с 2017 камнями. Разрешены два типа ходов. Можно брать 1, 2, 3 или 4 камня и перекладывать их из первой кучи во вторую. Также можно перекладывать 1, 2, 3 или 4 камня (если они там есть) из второй кучи в первую — при этом столько же камней, сколько взято, нужно выкинуть из мешка в окно. Играют двое; проигрывает тот, кто выкидывает последний камень из мешка. Кто победит при правильной игре?

C. Дана куча, в которой n камней. Играют двое; за ход можно убирать из кучи 1, 2, 3, ..., 10, 11, 12 или 14 камней. Выигрывает убравший последний камень. Кто победит при правильной игре? Не забудьте, что ответ должен зависеть от n.

Задачи 8 класса

Задача 1. Неизвестные цифры

A. Имеет ли данный ребус решение — то есть, можно ли сопоставить разным буквам разные цифры так, чтобы равенство стало верным:

$$\text{М}\cdot\text{И}\cdot\text{З}\cdot\text{А}\cdot\text{Н}\cdot\text{Т}\cdot\text{Р}\cdot\text{О}\cdot\text{П} = \text{ХРОМОТА}?$$

B. Решите ребус (то есть, сопоставьте разным буквам разные цифры, а одинаковым — одинаковые так, чтобы равенство стало верным):

$$\text{КРЕМ} + \text{КРЕМ} = \text{ЖЕЛЕ}; \quad \text{известно, что Л} = 9.$$

C. Учитель написал на доске 10 последовательных чисел. Шаловливый Стёпа, уходя после уроков домой, стёр одно — и тут же забыл, какое. Он помнил только, что сумма оставшихся на доске чисел равна 2017. Какое же конкретно число он стёр?

Задача 2. Искусное владение числами

A. Расставьте в таблицу 3×3 числа от 1 до 9 так, чтобы в каждой строке, в каждом столбце и в каждой из двух главных диагоналей сумма чисел равнялась 15.

B. Придумайте число такое, что оно делится на 17, его сумма цифр равна 17 и оканчивается оно тоже на 17.

C. Придумайте (или расскажите, как построить) 95-значное число, в котором нет нулей и которое делится на свою сумму цифр.

Задача 3. Плавучий зоопарк

A. *Друзьям посвящается.* Австралийская сколиозная кобра спит, изогнувшись замкнутой шестизвенной ломаной, пересекающей каждое своё звено ровно один раз. Схематично изобразите спящую кобру.

B. Североамериканский кролик-зануда, сидя на капитанском мостике в ожидании своей подруги, рисует на земле четырёхугольники и шестиугольники. Пересечение шестиугольника и четырёхугольника — понятное дело, какой-то многоугольник. Сколько он может иметь углов?

C. Сколько углов может иметь пересечение n–угольника и m–угольника при произвольных чётных m и n?

Задача 4. Вовочка и клетчатая тетрадь

A. У Вовочки есть клетчатая тетрадь (клетки — одинаковые, квадратные), линейка без делений и карандаш. Площадь каждой клетки в тетради — 100 мм^2. Как Вовочке имеющимися средствами построить квадрат площадью 1000 мм^2?

B. Вовочка нарисовал в тетради отрезок длиной 50 мм. Как Вовочке имеющимися средствами поделить его на 3 равных части, на 7 равных частей?

C. Площадь каждой клетки в тетради — по-прежнему 100 мм^2. Как при помощи линейки без делений и карандаша построить квадрат площадью 80 мм^2?

Задача 5. Загадывание чисел

A. Ваня и Даня загадали каждый по натуральному числу. Сложив эти два числа, мальчики выяснили, что их сумма делится на одно из них. Чему равен наибольший общий делитель чисел, загаданных мальчиками?

B. Галя и Валя загадали по числу. Оказалось, что загаданные девочками числа взаимно просты. Могут ли остатки от деления этих чисел на 17 оказаться не взаимно простыми? С другой стороны, верно ли, что если остатки a и b от деления на любое число взаимно просты, то и a взаимно просто с b?

C. Болек загадывает число. Лёлек просит его прибавить к загаданному числу сначала 3, потом 4, потом 5, потом 6, и наконец перемножить полученные четыре результата. У Болека получилось 288. Помогите Лёлеку найти загаданное число!

Задача 6. Пути автобуса неисповедимы

A. В стране Экляндии несколько городов, некоторые соединены между собой дорогами. Между городами ходят автобусы. Известно, что дорог столько же, сколько городов. 4 марта из каждого города выехало по автобусу, а 5 марта каждый автобус приехал в город, соединённый прямой дорогой с его родным. При каком количестве городов возможно организовать в стране сетку дорог такую, чтобы 5 марта в каждом городе могло оказаться ровно по одному автобусу?

B. В стране Двуляндии названия городов начинаются исключительно на буквы П и К. При этом каждая дорога соединяет город на букву П с городом на К. Наконец, городов на П на 16 больше, чем городов на букву К. 4 марта из каждого города выехало по автобусу, а 5 марта каждый автобус приехал в город, соединённый дорогой с его родным. Докажите, что в каком-то из городов теперь более одного автобуса.

C. На острове Квадрайлэнд четыре города. Перечислите все способы соединить эти города дорогами так, чтобы автобусы из них могли 4 марта отправиться в путь и 5 марта оказаться по одному в городе.

Задача 7. Переводчики с немецкого

A. Переводчику нужно перевести несколько рекламных брошюр и несколько газетных заметок. Он подсчитал, что если увеличить в некоторое целое число раз количество имеющихся у него брошюр, то их станет 116. А если увеличить в такое же число раз количество имеющихся газетных заметок, то их станет 217. Сколько же брошюр и сколько заметок предстоит перевести?

B. Перед коллективом из трёх переводчиков стоит задача перевести 16 журналистских обзоров, 16 художественных текстов и 16 технических. Каждый из них сказал, сколько текстов какой специфики хочет перевести, причём пожелание каждого включало 16 текстов. Более того, в сумме переводчики хотят перевести ровно 16 журналистских, 16 художественных и 16 технических текстов. Докажите, что их начальник может распределить тексты для перевода так, чтобы удовлетворить пожеланиям каждого из переводчиков.

C. Переводчик работает с текстом на 2-немецком. Текст на 2-немецком характерен тем, что значение может быть заключено не только в словах, но и в сочетаниях из двух подряд идущих слов. При этом всякое отдельное слово и всякое сочетание имеют своё значение. Сколькими способами можно разбить текст из n слов на слова и сочетания?

Задача 8. Примечательный учебный день

A. Во дворе школы появилось странное дерево. Сначала оно казалось обыкновенным ростком, но потом, достигнув высоты два метра, ствол разделился на две ветки. Когда дерево доросло до трёх метров, каждая из веток разделилась на три ветки. Соответственно, по достижении деревом высоты m метров каждая ветка делилась на m более мелких веток. Со сколькими ветками дерево достигнет высоты 12 метров?

B. Тем временем в кабинете биологии учитель Анастасия Спиридоновна осознала: перед ней 26 ужасных детей — 13 неугомонных мальчиков и 13 не менее неугомонных девочек. Она завела себе за правило каждую неделю менять рассадку детей в классе так, чтобы за партой всегда сидели один мальчик и одна девочка, но при этом пара, сидящая за партой, не сидела бы вместе ни в одну из предыдущих недель. На протяжении скольких недель она сможет следовать заведённому себе правилу?

C. Каким станет ответ в предыдущем пункте, если за партой могут сидеть также и два мальчика, и две девочки?

Задача 9. О числах маленьких и больших

A. «Произведение двух чисел – это мелко и ничтожно! — утверждал Незнайка. — Вот сумма – это другое дело! Глядите, $1 + 5 > 1 \cdot 5$ и даже $1 + 1000 > 1 \cdot 1000$, вот как!» Докажите, тем не менее, что если числа $a \geq 2$, $b > 2$, то их сумма строго меньше их произведения.

B. Единица, стоящая первой в числе 1’000’000, уверена, что при зачёркивании первой цифры числа от него остаётся сущий пустяк. Помогите ей разобраться, существуют ли натуральные числа, которые при зачёркивании первой цифры уменьшаются ровно в (а) 57 раз (б) 58 раз.

C. Пусть дано составное число $n \geq 4$. Докажите, что n можно представить в виде произведения нескольких (более одного) натуральных чисел, так что их сумма также равна n.

Задача 10. Игра

A. 2017 единиц стоит в ряд, между ними поставлены плюсы. Двое по очереди ставят пары скобок в выражении так, что после каждого хода оно остаётся осмысленным, причём пару скобок нельзя ставить дважды на одни и те же места. Расставив 2016 пар скобок, они считают значение получившегося выражения — если оно чётно, выигрывает второй, иначе первый. Кто победит при правильной игре?

B. Даны две кучи камней: в одной 23 камня, вторая пока пустая. Также дан мешок с 2017 камнями. Разрешены два типа ходов. Можно брать 1, 2, 3 или 4 камня и перекладывать их из первой кучи во вторую. Также можно перекладывать 1, 2, 3 или 4 камня (если они там есть) из второй кучи в первую — при этом столько же камней, сколько взято, нужно выкинуть из мешка в окно. Играют двое; проигрывает тот, кто выкидывает последний камень из мешка. Кто победит при правильной игре?

C. Дана куча, в которой n камней. Играют двое; за ход можно убирать из кучи 1, 2, 3, ..., 10, 11, 12 или 14 камней. Выигрывает убравший последний камень. Кто победит при правильной игре? Не забудьте, что ответ должен зависеть от n.

Задача 11. Возводим в степень

A. Приведите пример трёх подряд идущих натуральных чисел таких, что каждое из них делится на квадрат какого-нибудь простого числа.

B. Укажите наименьшее натуральное число такое, что его половина — квадрат натурального числа, его треть — куб натурального числа, а его пятая часть — пятая степень натурального числа.

C. Докажите, что можно придумать сколь угодно длинную цепочку идущих подряд натуральных чисел, каждое из которых делится на квадрат какого-нибудь простого.

Задача 12. Шутка

A. Дана 200-этажная башня. Стул с 30 ножками скидывают с её крыши, и одновременно с этим более лёгкий стул совсем без ножек отправляют катиться вниз по лестнице внутри башни. Может ли безногий стул достигнуть земли быстрее, чем летящий?

B. Выписка из дневника автора задач олимпиады «Математика НОН-СТОП»:

> *Так, вчера я придумал всего четыре задачи... Мне снилось, что сегодня я придумаю в полтора раза больше задач, чем в сумме за день, когда сегодня останется вчера, и за день, для которого сегодня должно было наступить завтра... Однако в день, который будет вчера для завтра и был завтра для вчера, я придумал в три раза больше задач, чем за послезавтрашнее вчера... Что за сны-то такие странные в последнее время?..*

Если верить сну, сколько задач должен был придумать автор в день, когда он оставил эту заметку?

C. Автомобиль выехал из Петербурга в Пекин и сломался через 80 километров. На исправление неполадок ушло, правда, всего две минуты. Однако, проехав ещё 40 километров, автомобиль вновь сломался, но вновь был отремонтирован за две минуты. Далее перед каждой следующей поломкой автомобиль проезжал вдвое меньше, чем перед предыдущей, но приводился в рабочее состояние за неизменные две минуты. Доедет ли он в итоге до Пекина?

Задачи профильного варианта 7 класса

Задача 1. Без нулей

Двадцать восемь, двадцать девять, двадцать десять...

Рассмотрим обыкновенную десятичную систему счисления и то, как в ней записываются натуральные числа. Мы хотим найти способ избавиться от нулей в записи этих чисел. Давайте вместо нуля введём цифру «десять», которую будем записывать как X и употреблять наравне с другими цифрами. После такой модификации системы счисления число 30, например, станет записываться как 2X, число 100 — как 9X, число 3107 — как 2XX7.

1. Переведите числа 110, 2202, 500’000 из десятичной системы счисления в модифицированную. Переведите числа 1X17, XXXX, 512 из модифицированной системы счисления в десятичную.

2. Объясните, почему всякое число имеет единственную запись в нашей модифицированной системе счисления.

3. Опишите алгоритм перевода чисел из десятичной системы в модифицированную и обратно.

4. Докажите, что запись числа в модифицированной системе счисления всегда не длиннее его записи в десятичной. Приведите пример, когда она строго короче десятичной.

5. Опишите правила сложения и умножения в столбик в модифицированной системе счисления (см. рис. R). Отличаются ли они от правил в обыкновенной десятичной системе?

$$
\begin{array}{cccccc}
 & & 1 & \mathrm{X} & \mathrm{X} & 3 \\
\times & & & 4 & \mathrm{X} & 7 \\
\hline
 & 1 & \overset{7}{4} & \overset{7}{7} & \overset{2}{2} & 1 \\
1 & \overset{\mathrm{X}}{\mathrm{X}} & \overset{\mathrm{X}}{\mathrm{X}} & \overset{2}{2} & \mathrm{X} & \\
\overset{4}{8} & \overset{4}{4} & \overset{1}{1} & 2 & & \\
\hline
\overset{1}{\mathrm{X}} & \overset{1}{6} & \overset{1}{6} & \overset{1}{2} & 2 & 1
\end{array}
$$

рис. R

6. Придумайте способ распространить модифицированную систему счисления и на неположительные числа. В частности, как записать ноль в этой системе счисления?

7. В модифицированной системе счисления попробуйте сформулировать признаки делимости на

— 2, 4, произвольную степень двойки;

— 5, 25, произвольную степень пятёрки;

— 3, 9;

— 11.

8. Что ещё можно сказать про модифицированную систему счисления? Как построить её аналог, используя двоичную систему вместо десятичной? Предложите свои направления исследования и изучите их.

Задача 2. Дорога до метро

Рассмотрим клетчатую сетку, её рёбра и узлы. Путём между двумя узлами будем называть последовательность рёбер, их соединяющую. Длину пути в разных случаях будем определять по-разному, однако стандартный способ — понимать под длиной пути количество рёбер в нём.

Определим *k–окрестность* узла — это множество всех узлов, до которых от данного существует путь длиной не более чем *k*. На рисунке M1 изображены путь длины 3 и 3–окрестность центрального узла.

1. Длину пути можно ввести и по-другому. Давайте определим её как сумму величин смещения пути по горизонтали и по вертикали.

Скажем, путь на рисунке М2 будет тогда иметь длину 5. Как будет выглядеть 4-окрестность фиксированного узла при так определённой длине?

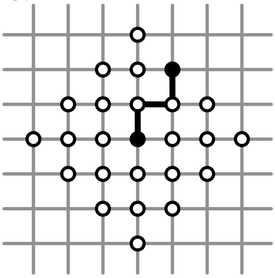


рис. М1

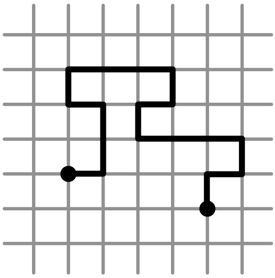


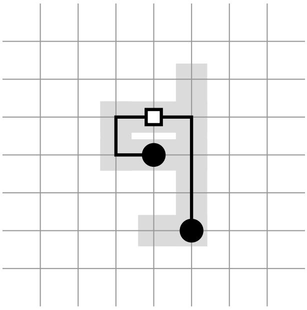
рис. М2

2. А если мы определим длину пути как максимум; как минимум; как модуль разности величин смещения по горизонтали и по вертикали?

3. Рассмотрим два определения длины пути: стандартным способом и как в пункте 1. Понятно, что один путь может иметь разную длину в первом и во втором смысле. Докажите, тем не менее, что любая k–окрестность в смысле первой длины и в смысле второй длины выглядит одинаково.

4. Пусть длина пути определена стандартным образом. Пусть узел B отстоит от узла A на m клеток вправо и на n клеток вниз. Сколько кратчайших путей ведут из A в B?

Давайте теперь выберем из клетчатой сетки несколько узлов и некоторые рёбра между ними. Назовём выбранное нами *городом*. Расположим в каких-то из узлов города *станции метро*. Расстоянием от узла внутри города до данной станции метро будем называть длину (в стандартном смысле) кратчайшего пути между ними, лежащего внутри города. На рисунке ниже изображены пример города, пара станций метро, а также кратчайшие пути от одного из узлов до станций.



5. Для каждого узла в городе найдём ближайшую к нему станцию метро и расстояние до неё. Найдём в городе все узлы, в которых найденное расстояние достигает своего максимума. Теперь для каждого узла посчитаем сумму расстояний от него до всех станций метро и тоже найдём узлы, где эта сумма достигает максимального значения.

   Придумайте город и расстановку в нём станций метро такую, что множества узлов, где максимально кратчайшее расстояние, и узлов, где максимальна сумма расстояний, не пересекаются.

6. Докажите, что какой бы ни была расстановка станций метро в произвольном городе, максимальная сумма расстояний и максимальное среднее расстояние до станций всегда достигаются в одних и тех же узлах.

7. Для каждого узла в городе найдём самую далёкую от него станцию метро и расстояние до неё. Найдём в городе все узлы, в которых найденное расстояние достигает своего максимума.

   Придумайте город и расстановку в нём станций метро такую, что три множества: узлов, где максимально кратчайшее расстояние; узлов, где максимальна сумма расстояний; узлов, где максимально наибольшее расстояние — не пересекаются.

8. Какие ещё особенные узлы можно рассматривать в городе со станциями метро? Предложите свои направления исследования и изучите их.

Задачи профильного варианта 8 класса

Задача 1. Через тернии к звёздам

1. Рассмотрим вершины правильного n–угольника. Расстоянием между двумя вершинами будем называть длину кратчайшего пути между ними по сторонам n–угольника; расстояние между вершинами A и B обозначается $d(A, B)$ — смотреть рисунок S1. Докажите, что для любых трёх вершин A, B, C выполнено неравенство $d(A, B) + d(B, C) \geq d(A, C)$.

2. Для данного n–угольника, сколько различных значений принимает расстояние между его вершинами? Для данной вершины, сколько других вершин n–угольника находятся на фиксированном расстоянии от неё? Сколько вершин n–угольника наиболее удалены от данной?

3. Обратите внимание на то, что расстояние между вершинами не меняется при вращении n–угольника. Попробуйте определить расстояние между вершинами так, чтобы оно менялось при поворотах многоугольника. Правда ли, что любое расстояние, сохраняющееся при вращении, отличается от нашего умножением на какое-то число?

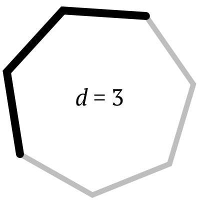


рис. S1

(7, 2)–звезда   Не звезда

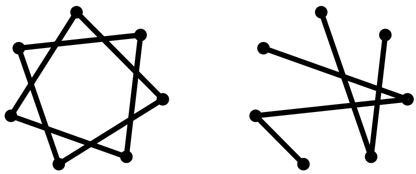


рис. S2

4. Фиксируем правильный n–угольник. Тогда (n, k)–звезда — минимальный набор замкнутых ломаных наименьшей длины такой, что любые две вершины n–угольника, находящиеся на расстоянии k друг от друга, соединены ребром одной из ломаных набора (смотреть рисунок S2). Сколько для данного n существует (n, k)–звёзд, состоящих из одной ломаной?

5. Для данных n и k, из скольки ломаных состоит (n, k)–звезда?

6. Для данных n и ℓ, сколько (n, k)–звёзд состоит ровно из ℓ ломаных?

7. Через $\varphi(n)$ обозначим количество натуральных чисел, меньших n и взаимно простых с n. Используя свои знания о звёздах, докажите формулу

$$\sum_{d \text{ делит } n} \varphi(d) = n.$$

Задача 2. Без нулей

Двадцать восемь, двадцать девять, двадцать десять…

Рассмотрим обыкновенную десятичную систему счисления и то, как в ней записываются натуральные числа. Мы хотим найти способ избавиться от нулей в записи этих чисел. Давайте вместо нуля введём цифру «десять», которую будем записывать как X и употреблять наравне с другими цифрами. После такой модификации системы счисления число 30, например, станет записываться как 2X, число 100 — как 9X, число 3107 — как 2XX7.

1. Переведите числа 110, 2202, 500’000 из десятичной системы счисления в модифицированную. Переведите числа 1X17, XXXX, 512 из модифицированной системы счисления в десятичную.

2. Объясните, почему всякое число имеет единственную запись в нашей модифицированной системе счисления.

3. Опишите алгоритм перевода чисел из десятичной системы в модифицированную и обратно.

4. Докажите, что запись числа в модифицированной системе счисления всегда не длиннее его записи в десятичной. Приведите пример, когда она строго короче десятичной.

5. Опишите правила сложения и умножения в столбик в модифицированной системе счисления (см. рис. R). Отличаются ли они от правил в обыкновенной десятичной системе?

```
   1XX3
×   4X7
-------
  772
 14721
 XX2
1XX2X
441
8412
-------
1111
X66221
```

рис. R

6. Придумайте способ распространить модифицированную систему счисления и на неположительные числа. В частности, как записать ноль в этой системе счисления?

7. В модифицированной системе счисления попробуйте сформулировать признаки делимости на

   — 2, 4, произвольную степень двойки;

   — 5, 25, произвольную степень пятёрки;

— 3, 9;

— 11.

8. Что ещё можно сказать про модифицированную систему счисления? Как построить её аналог, используя двоичную систему вместо десятичной? Предложите свои направления исследования и изучите их.

Задача 3. Дорога до метро

Рассмотрим клетчатую сетку, её рёбра и узлы. Путём между двумя узлами будем называть последовательность рёбер, их соединяющую. Длину пути в разных случаях будем определять по-разному, однако стандартный способ — понимать под длиной пути количество рёбер в нём.

Определим k*–окрестность* узла — это множество всех узлов, до которых от данного существует путь длиной не более чем k. На рисунке М1 изображены путь длины 3 и 3–окрестность центрального узла.

1. Длину пути можно ввести и по-другому. Давайте определим её как сумму величин смещения пути по горизонтали и по вертикали. Скажем, путь на рисунке М2 будет тогда иметь длину 5. Как будет выглядеть 4-окрестность фиксированного узла при так определённой длине?

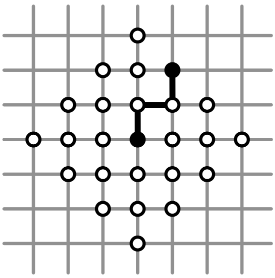


рис. М1

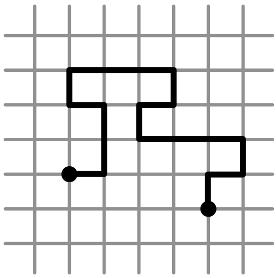


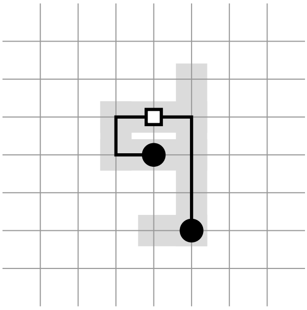
рис. М2

2. А если мы определим длину пути как максимум; как минимум; как модуль разности величин смещения по горизонтали и по вертикали?

3. Рассмотрим два определения длины пути: стандартным способом и как в пункте 1. Понятно, что один путь может иметь разную длину в первом и во втором смысле. Докажите, тем не менее, что любая k–окрестность в смысле первой длины и в смысле второй длины выглядит одинаково.

4. Пусть длина пути определена стандартным образом. Пусть узел B отстоит от узла A на m клеток вправо и на n клеток вниз. Сколько кратчайших путей ведут из A в B?

Давайте теперь выберем из клетчатой сетки несколько узлов и некоторые рёбра между ними. Назовём выбранное нами *городом*. Расположим в каких-то из узлов города *станции метро*. Расстоянием от узла внутри города до данной станции метро будем называть длину (в стандартном смысле) кратчайшего пути между ними, лежащего внутри города. На рисунке ниже изображены пример города, пара станций метро, а также кратчайшие пути от одного из узлов до станций.



5. Для каждого узла в городе найдём ближайшую к нему станцию метро и расстояние до неё. Найдём в городе все узлы, в которых найденное расстояние достигает своего максимума. Теперь для каждого узла посчитаем сумму расстояний от него до всех станций метро и тоже найдём узлы, где эта сумма достигает максимального значения.

Придумайте город и расстановку в нём станций метро такую, что множества узлов, где максимально кратчайшее расстояние, и узлов, где максимальна сумма расстояний, не пересекаются.

6. Докажите, что какой бы ни была расстановка станций метро в произвольном городе, максимальная сумма расстояний и максимальное среднее расстояние до станций всегда достигаются в одних и тех же узлах.

7. Для каждого узла в городе найдём самую далёкую от него станцию метро и расстояние до неё. Найдём в городе все узлы, в которых найденное расстояние достигает своего максимума.

Придумайте город и расстановку в нём станций метро такую, что три множества: узлов, где максимально кратчайшее расстояние; узлов, где максимальна сумма расстояний; узлов, где максимально наибольшее расстояние — не пересекаются.

8. Какие ещё особенные узлы можно рассматривать в городе со станциями метро? Предложите свои направления исследования и изучите их.

Условия задач 2016 года

Задачи 5 класса

Задача 1. Шутка

A. Стул с пятнадцатью ножками упал с лестницы из пяти ступенек и сломал одну ножку. Потом он упал с лестницы из десяти ступенек и сломал три ножки. Сколько ножек он сломает, упав с лестницы из 20 ступенек?

B. За книгу заплатили 200 рублей, и осталось заплатить втрое больше, чем осталось бы заплатить, если бы заплатили половину заплаченного и ещё столько, сколько осталось заплатить. Сколько стоит книга?

C. Известно, что Магеллан израсходовал на день больше, чем рассчитывал, при движении с востока на запад. В свою очередь, герои книги «Вокруг света за 80 дней» экономили время при движении с запада на восток. Но можно ли изменить скорость времени, просто начав бегать вокруг Северного полюса?

Задача 2. Числа и суммы

A. Может ли число быть меньше количества цифр в нём? Может ли число быть меньше собственной суммы цифр?

B. Как по натуральному числу n найти число, не превосходящее его, с наибольшей суммой цифр?

C. Петя сложил все числа от 1 до $m \cdot n$, а Вася сложил все числа от 1 до m, от 1 до n и посчитал произведение этих двух сумм. У кого в итоге получилось большее число?

Задача 3. Деление и остатки

A. В преддверии олимпиады «Математика НОН-СТОП» Настя решила поупражняться в делении чисел. Она придумала некоторое число, и у неё получилось, что это число делится на 564. Ещё она выяснила, что 2016 делится на это число. Права ли Настя?

B. Всё те же подруги теперь тренируются считать остатки от деления числа на число. Первая берёт число a, считает его остаток от деления на число b, а затем считает остаток от деления этого остатка на число c. Вторая утверждает, что процесс можно ускорить, сразу считая остаток от деления a на c, без потери правильности ответа. Права ли она? Если да, докажите это, если нет — приведите контрпример.

C. Даны два числа b и c. Доказать, что для любого a выполнено

$$(a \bmod b) \bmod c = a \bmod c$$

тогда и только тогда, когда b делится на c.

Задача 4. Спички и пионеры

A. Пионер Петя выкладывает цифры из спичек так, как это делается на экране стандартного калькулятора. Какое наибольшее число он может сложить из 15 спичек?

B. Могло ли случиться так, что в петином отряде из 20 пионеров имена у всех начинаются с разных букв?

C. Тем временем пионер Вася хочет научиться выкладывать цифры наименьшим числом спичек. Помогите ему в этом: найдите наименьшее число k такое, что любая цифра может быть выложена из k спичек.

рис. 6 — Экран стандартного калькулятора (шрифт Digiface)

Задача 5. Плохая компания

A. В компании из 10 человек среди любых пятерых — не более трёх девочек. Какое наибольшее число девочек может быть в компании?

B. В стране 140’000’000 людей. Министру здравоохранения донесли, что среди 35 миллионов и одного человека всегда есть хоть один носитель опасного вируса Нойвис-припг. Министр прикинул в голове: это ведь получается, что ничтожно малая доля населения страны является носителем вируса! Прав ли он?

C. Дана компания из N человек. Известно, что из p людей по крайней мере q — девочки, а из s девочек по крайней мере t — блондинки. Какое наименьшее количество блондинок может быть в этой компании?

Задача 6. Эти необычные механизмы

A. Федя собрал систему из шестерёнок, как на рисунке 1. Будут ли шестерёнки вращаться?

B. В японских шахматах сёги есть фигура Золото, которая бьёт шесть клеток вокруг себя (закрашены серым на рисунке 2). Можно ли расставить на поле 9×9 несколько таких фигур, чтобы каждая клетка поля билась ровно одним Золотом?

C. Конструкция самосвала такова, что он может ехать, потеряв до четырёх колёс. Правда, его максимальная скорость, равная 60 км/ч, уменьшается на 6 км/ч с каждым потерянным колесом. Раз в 12 км на шоссе встречаются шиномонтажи, где разговор с работником занимает 10 минут, а установка каждого колеса — по 3 минуты. Сразу же после выезда с / проезда мимо очередного шиномонтажа у самосвала отваливается одно колесо. Сколько колёс выгоднее всего терять водителю между двумя заездами на шиномонтаж, если он хочет в среднем ехать как можно быстрее?

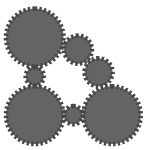


рис. 1

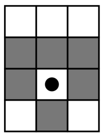


рис. 2

Задачи 6 класса

Задача 1. Падающие стулья

A. Стул с пятнадцатью ножками упал с лестницы из пяти ступенек и сломал одну ножку. Потом он упал с лестницы из десяти ступенек и сломал три ножки. Сколько ножек он сломает, упав с лестницы из 20 ступенек?

B. В кафе стоит n четырёхногих стульев. Ночью в кафе заходит мальчик Вася и начинает вслепую подпиливать стульям ножки. С утра стул упадёт под посетителем, если у него останутся неподпиленными меньше трёх ножек. Сколько ножек нужно подпилить Васе, чтобы с утра как минимум m посетителей кафе гарантированно упали?

C. В кафе n четырёхногих стульев. Стул падает, если у него меньше трёх целых ножек. У мальчиков Васи и Пети есть две пилы, и они изобретают себе игру. Мальчики уже сошлись на том, что первым ходит Петя, а проигрывает тот, после чьего хода упадёт первый стул. Осталось выбрать возможное число перепиливаний за ход для каждого из них. Пусть за каждый ход Петя перепиливает не менее чем a_1 и не более чем b_1 ножек, Вася — от a_2 до b_2 ножек. Числа a_1 и a_2 могут быть равны нулю или единице, а числа b_1 и b_2 — m или $m-1$, $m < n$, но при этом обязательно $b_1 \neq b_2$. Сколько игр удовлетворяет этим условиям, и кто из мальчиков выиграет в каждой из них?

Задача 2. Детский сад

A. В детском саду 10 детей рисуют 10 рисунков за 20 минут. Как долго 50 детей будут рисовать 50 рисунков? Как долго d детей будут рисовать r рисунков?

B. Детсадовцам Вове и Диме выдали по обручу — обруч представляет собой диск радиусом r_1, из которого вырезан круг радиуса r_2, $r_2 < r_1$. Мальчики стали клеить пластилин на выданные им обручи. За минуту Вова наращивал сантиметр пластилина на внешнем краю обруча, а Дима — сантиметр пластилина на внутреннем его краю. У кого из мальчиков площадь обруча росла быстрее?

C. В медпункт детского сада пришло четверо детей. У медсестры есть двухчашечные весы без гирь, и она хочет расположить детей по весу. Сколько взвешиваний ей для этого нужно сделать? Как ей производить взвешивания?

Задача 3. Числа, выписанные на доску

A. Коля в свой День рождения выписал на доску наименьшее число, дважды содержащее все цифры от 0 до 9 и делящееся на 72. Выпишите и вы это число!

B. А Оля записала на доску числа от 1 до 121 и теперь занимается следующим: стирает с доски числа a и b, записывая вместо них разность вида $a - 2b$ либо $b - 2a$. Могло ли в конце на доске остаться единственное число — ноль?

C. На доску выписаны n чисел. Доказать, что одно из них или сумма нескольких рядом стоящих чисел непременно делится на n.

Задача 4. Линии и сетки

A. В стол вбиты 26 гвоздиков так, как показано на рисунке 5. Расстояние между соседними — 1 сантиметр. Помогите Любе пропустить по столу нитку длиной 25 сантиметров от гвоздика A к гвоздику B так, чтобы она касалась каждого гвоздика.

B. На клетчатой бумаге начертили прямоугольник размерами a на b, по линиям сетки. Может ли проведённая на том же листе прямая пройти по $a + b$ клеткам в составе этого прямоугольника?

C. Среди треугольников с данным основанием l и данным периметром P найти треугольник с максимальной площадью.

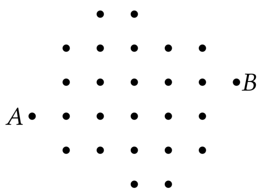


рис. 5

Задача 5. Разделение на подмножества

A. Даны две компании из мальчиков, у каждого из которых есть сколько-то денег. Известно, что у любых пяти мальчиков из одной компании денег в сумме столько же, сколько у любых пяти мальчиков из другой компании. Могут ли суммарные количества денег в первой и во второй компаниях различаться?

B. Петя хочет покрасить единичные отрезки в составе прямой в два цвета так, чтобы среди любых четырёх подряд идущих отрезков было ровно два чёрных, а среди любых одиннадцати подряд идущих — ровно шесть чёрных. Может ли он это сделать?

C. На клетчатой бумаге водятся четыре вида муравьёв, ареал каждого представляет собой связное множество клеток. Ареалы разных видов могут пересекаться. Сколько возможных комбинаций видов муравьёв может жить в клетке? Изобразите ареалы видов муравьёв такие, что каждая комбинация видов реализуется хоть на одной клетке.

Задача 6. Лыжная секция

A. Вначале лыжная секция состояла из одного-единственного участника — тренера, но потом в неё каждый день приходило либо 4, либо 5 новых участников. Могло ли в секции после нескольких дней насчитываться ровно 12 участников?

B. Трое лыжников вышли в лес, чтобы найти хорошее место для новой трассы. Лыжники встали на расстоянии по 100 метров друг от друга. В любой момент времени может двигаться только один лыжник, но при этом лишь по прямой, параллельной отрезку, соединяющему двух оставшихся лыжников. Пару часов покатавшись так по лесу, лыжники замерили расстояние друг между другом — получились цифры в 90, 120 и 150 метров. Докажите, что кто-то из лыжников не выполнял правила в течение поездки.

C. Из разных точек длинной кольцевой трассы одновременно стартовали 564 лыжника. Во время гонки лыжник мог обогнать другого, но не двоих лыжников сразу. Через некоторое время лыжники одновременно финишировали в тех же точках, из которых стартовали. Могло ли произойти нечётное число обгонов? А если один из лыжников заболел и не явился на старт?

Задача 7. В поисках чисел

A. Составляя условия олимпиады «Математика НОН-СТОП», мальчики Боря и Дима придумывают для участников математические ребусы: выражения, где разным буквам соответствуют разные цифры. Будут ли ребусы

$$\text{Р}\cdot\text{О}\cdot\text{М}\cdot\text{А}\cdot\text{Ш}\cdot\text{К}\cdot\text{А} = \text{РОМАШКА}$$

и

$$\text{Я}\cdot\text{О}\cdot\text{Т}\cdot\text{Л}\cdot\text{И}\cdot\text{Ч}\cdot\text{Н}\cdot\text{И}\cdot\text{К} = \text{УРАУРА}$$

иметь решение?

B. Вася разбил числа от 3 до 8 включительно на четыре группы. Может ли его друг Рома наверняка утверждать, что произведение чисел в одной из этих групп больше 12?

C. Для данного числа n предъявите по возможности эффективный алгоритм нахождения наименьшего составного числа N, такого, что $n!$ не делится на N, и докажите, что полученное составное число действительно будет наименьшим.

Задача 8. Числа, цифры и приключения

A. Девочка Маша открыла в песочнице магазин. Чтобы купить в этом магазине несколько спичек, нужно выложить из них цифру так, как на экране калькулятора, и дать Маше количество листочков, равное этой цифре. Как дешевле всего покупать спички у Маши?

B. Фирма «DFS» разрабатывает особые космические бульдозеры. Для работы на астероиде под названием Гурбштекен был разработан специальный бульдозер, гусеницы которого делают ровно 953 оборота за 29 проходов по экватору астероида. Для удобства гусеницы бульдозера были разделены на 29 сменных секций, одну из которых пришлось заменить ещё в полёте. Наконец бульдозер принялся ездить вокруг астероида по экватору. Доказать, что вне зависимости от стартового положения гусениц свежеустановленная секция рано или поздно окажется на линии старта. Как часто это будет повторяться?

C. Вовочка неправильно запомнил доказательство теоремы Евклида. Он думает так: перемножим все простые числа, прибавим к произведению единицу — и полученное число непременно будет простым. Он хочет воспользоваться этим соображением для поиска простых чисел: перемножить несколько первых простых, прибавить единицу, получить новое простое. Докажите, что таким образом Вовочка всё равно рано или поздно получит составное число.

рис. 6 — Экран стандартного калькулятора (шрифт Digiface)

Задачи 7 класса

Задача 1. Деление и остатки

A. Две подруги в преддверии олимпиады «Математика НОН-СТОП» решили поупражняться в нахождении наибольших общих делителей и наименьших общих кратных пар чисел. Они взяли два числа a и b, и одна подруга получила НОД $(a, b) = 564$, а другая НОК $(a, b) = 2016$. Докажите, что кто-то из них ошибся.

B. Всё те же подруги теперь тренируются считать остатки от деления числа на число. Первая берёт число a, считает его остаток от деления на число b, а затем считает остаток от деления этого остатка на число c. Вторая утверждает, что процесс можно ускорить, сразу считая остаток от деления a на c, без потери правильности ответа. Права ли она? Если да, докажите это, если нет — приведите контрпример.

C. Даны два числа b и c. Доказать, что для любого a выполнено $(a \bmod b) \bmod c = a \bmod c$ тогда и только тогда, когда b делится на c.

Задача 2. Пятница

A. По пятницам мама наливает пятерым детям парного коровьего молока. Она делает это в два круга, в первый раз как-то наполняя пять кружек, а во второй раз расходуя горшок до конца так, что уровень молока во всех кружках становится одинаковым. После первого круга в кружках четырёх детей было одинаковое количество молока, а в кружке пятого было на 20% больше этого количества. Сколько миллилитров составляла эта самая двадцатипроцентная разница, если горшок имеет объём 2 литра, а на втором круге мама использовала 70% его объёма?

B. По пятницам в селе Хотчланд устраивались бега быков, но в качестве быков использовались тигры. У каждого тигра на ошейнике написаны два числа: q — во сколько раз этот тигр бегает быстрее человека и t — время в секундах, в течение которого этот тигр бежит с максимальной скоростью, а после этого ложится отдохнуть. Помогите участнику бегов Исинбаю Еленову вывести формулу для расстояния x, на котором ему нужно держаться от данного тигра, чтобы не быть съеденным.

C. У мальчика Дани пять пятниц на неделе, а у Кости — три пятницы на неделе. Сколько существует расстановок пятниц на неделе таких, что ровно два дня будут пятницей и для Дани, и для Кости?

Задача 3. Эксперименты с клавиатурой

A. У братьев А. и Б. на клавиатурах начался *дребезг*: у А. все символы набирались пятикратно, а `Backspace` удалял сразу восемь последних напечатанных символов. У Б. символы набирались семь раз подряд, а `Backspace` удалял последние четыре напечатанных символа. При равной скорости нажатия на клавиши, кто из братьев будет печатать быстрее?

B. Починив дребезг, братья обнаружили другие неполадки: у А. сломалась клавиша `Shift`, а у Б. — `Caps Lock`. До поломки оба печатали с одинаковой скоростью: они нажимали по пять клавиш в секунду. Неисправности повлияли на скорость печати: теперь А. должен нажимать `Caps Lock` перед каждой последовательностью заглавных букв и ещё раз нажимать после неё, а Б. — удерживать `Shift`, чтобы печатать заглавные буквы: при этом его скорость падает до двух букв в секунду, но на нажатие `Shift` время не тратится. Вам нужно придумать строчку, которую А. напечатает минимум в два раза быстрее, чем Б. А есть ли строчка, которую Б. печатает в два раза быстрее, чем А.?

C. Через год у Б. на клавиатуре осталось две рабочих клавиши, да и печатать он стал медленнее: нажимает лишь четыре клавиши в секунду. Паузы в процессе набора информации не несут; две клавиши одновременно нажимать нельзя. Вам нужно придумать способ без уменьшения русского алфавита (признания каких-нибудь букв равными) набирать любую букву не более чем за секунду либо доказать, что такого способа нет. Если его нет, то какое минимальное количество букв достаточно отождествить в одну, чтобы он появился?

Задача 4. Факториалы

Факториалом числа n будем называть произведение всех натуральных чисел от 1 до n.

A. Егор посчитал факториал числа 33 и записал его на бумажку. Его сестра решила пошалить, и стёрла одну из цифр факториала. Получилась запись:

$$33! = 8'683'317'618'811'886'49\square'518'194'401'280'000'000$$

Помогите Егору восстановить стёртую цифру.

B. Посчитан факториал числа, не меньшего 12, и из его записи стёрта ровно одна цифра — причём известно, с какой позиции. Докажите, что её всегда можно однозначно восстановить, не вычисляя факториал заново.

C. Докажите, что при кратном четырём n из произведения

$$1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot \ldots \cdot n!$$

можно вычеркнуть один факториал так, что оставшееся произведение будет квадратом целого числа.

Задача 5. Ох уж эти школьницы!

A. В течение четверти Арина получала оценки по математике. Она выписала их в строку, поставила между какими-то знак умножения и посчитала получившееся произведение. У неё получилось 22887. Каков средний балл Арины за четверть?

B. Ольга придумывает два натуральных числа и вычитает квадрат одного из квадрата другого. В некий момент у неё получилось 3476. Найдите придуманные ей числа.

C. Девочка Лиана записывает пятизначные числа, переставляет их первую цифру в конец и записывает полученные числа в пару к исходным. Проходящая мимо мама сказала: «Лиана, а зачем ты пишешь пары чисел, сравнимых по модулю 41?» Права ли мама в своём вопросе — действительно ли числа в парах всегда сравнимы по этому модулю?

Задача 6. Очень умные муравьи

A. На плоскости живут четыре муравья. Могут ли они нарисовать себе на плоскости четыре связные области так, чтобы любые два муравья могли бы общаться друг с другом — их области имели бы участок общей границы?

B. Человек соорудил муравьям планету, то есть подвесил в воздух коробку размером $1 \times 1 \times 1$ метр. Через некоторое время он заметил, что муравьи организовывают экспедиции к углам коробки, как будто ходят в горы. Рост муравья — 2мм. Подъёму на холм какой высоты для человека нормального роста соответствует восхождение муравья к углу коробки, если рост нормального человека (по мнению составителя задач, несомненно) равен двум метрам?

C. Счётное сообщество муравьёв хочет организовать на плоскости треугольную сетку такую, чтобы к каждой вершине прилегало ровно пять треугольников, жители которых могли бы попить чай в этой вершине. По силам ли муравьям это предприятие?

Задача 7. Несправедливый турнир

Турнир по скоростному распиливанию проходит по усовершенствованной олимпийской системе. Изначально в турнире 2^t участников, $t \geq 2$, все в одной группе, потом группа потихоньку дробится: в каждом раунде в каждой группе участники бьются на пары, в которых состязаются в распиливании, и после раунда образуются группа победителей и группа проигравших, где повторяется аналогичный турнир.

Так продолжается, пока все участники не побьются на группы по одному человеку: тогда места участников в итоговой таблице определяются естественным образом. В частности, победитель турнира — участник, выигравший во всех t раундах, а аутсайдер — проигравший во всех t раундах.

A. Может ли самый слабый участник турнира не оказаться аутсайдером?

B. Может ли состязающийся сильнее как минимум половины участников турнира и ещё одного человека встретиться в финале с аутсайдером?

C. Доказать, что для всякого состязающегося слабее половины участников турнира можно подобрать разбиение на пары в раундах так, чтобы в финале он встретился с аутсайдером.

Задача 8. Дело-то житейское

A. За книгу заплатили 200 рублей, и осталось заплатить втрое больше, чем осталось бы заплатить, если бы заплатили половину заплаченного и ещё столько, сколько осталось заплатить. Сколько стоит книга?

B. В поисках нотного стана для очередной композиции гитарист Полина использует n сайтов. Известно, что на каждом сайте приведены ссылки на некоторые из числа оставшихся $n-1$ сайтов, и всегда по крайней мере одна. Доказать, что на каких-то двух сайтах приведено одинаковое число ссылок.

C. Мальчик Саша очень любит писать олимпиады. В некоторый месяц в году он выписал подряд без пробелов все числа этого месяца, выделив цветом даты трёх предстоящих олимпиад. Выяснилось, что никакие две олимпиады не проходили в подряд идущие дни, и что все незакрашенные промежутки из цифр имеют одинаковую длину. Доказать, что первая цифра в выписанной Сашей строке была закрашена.

Задача 9. День, когда Стёпа всё испортил

A. Лиза обещала подарить Стёпе диск со всеми сериями «Adventure time», если он сможет досчитать на пальцах до 1023 так, что все числа будут показаны разными комбинациями пальцев. Как Стёпе заполучить желанный диск?

B. Стёпа сломал весы Всезнамуса, покрутив рычажок *установки нуля*. Теперь всегда при взвешивании весы прибавляют к своим показаниям некоторый вес, один и тот же всё время. Без взвешиваний, впрочем, весы не дают никаких показаний.

Стёпе надо срочно настроить весы, но, к сожалению, в шкафу у Всезнамуса лежат только бутылка воды и кусок циркония, веса которых Стёпа не знает. Как Стёпе определить, какую поправку следует внести в показания, и починить весы?

C. Придя домой, Стёпа уселся за свою любимую компьютерную игру — Portal. Один портал стоит на большой высоте на вертикальной стене. Стёпа вылетает из него, перед самым приземлением ставит под собой второй портал и попадает в него с тем, чтобы вновь вывалиться из первого портала на стене, причём параллельно земле.

Как быстро будет нижний портал отдаляться от стены? При прохождении через портал скорость Стёпы не изменяется по абсолютному значению, меняется только направление движения.

Задача 10. Хитрый Миша

A. Миша подошёл к заведующему городским тиром с предложением открыть экспериментальный тир. Его зона имела бы форму равнобедренного треугольника со стрельбищем в вершине, а в конце дня награждались бы все, достигшие минимальной за этот день суммы расстояний от пулевой дырки до прямых, продолжающих боковые рёбра зоны. Докажите, что Миша тем самым разорит тир.

B. Маша попросила Мишу вырезать из бумаги шесть развёрток для куба. Вместо этого Миша вырезал шесть крестиков, состоящих из пяти одинаковых тетрадных клеток каждый. Может ли Маша оклеить без наложений хоть какой-нибудь куб крестиками, вырезанными Мишей?

C. Автор учебника по геометрии попросил Мишу набрать текст учебника. А Миша, как и следовало ожидать, допустил опечатку. В задаче, гласящей: «Отмерьте на одной стороне угла в 60 градусов 20 см, а на другой стороне — t см, и посчитайте расстояние между отмеченными точками», Миша намеренно увеличил t на 4 см, но при этом ответ на задачу остался верным. Чему равно t?

Задачи 8 класса

Задача 1. Числа и суммы

A. Может ли число быть меньше количества цифр в нём? Может ли число быть меньше собственной суммы цифр?

B. Как по натуральному числу n найти число, не превосходящее его, с наибольшей суммой цифр?

C. Петя сложил все числа от 1 до $m \cdot n$, а Вася сложил все числа от 1 до m, от 1 до n и посчитал произведение этих двух сумм. У кого в итоге получилось большее число?

Задача 2. Детский сад

A. В детском саду 10 детей рисуют 10 рисунков за 20 минут. Как долго 50 детей будут рисовать 50 рисунков? Как долго d детей будут рисовать r рисунков?

B. Детсадовцам Вове и Диме выдали по обручу — обруч представляет собой диск радиусом r_1, из которого вырезан круг радиуса r_2, $r_2 < r_1$. Мальчики стали клеить пластлин на выданные им обручи. За минуту Вова наращивал сантиметр пластилина на внешнем краю обруча, а Дима — сантиметр пластилина на внутреннем его краю. У кого из мальчиков площадь обруча росла быстрее?

C. В медпункт детского сада пришло четверо детей. У медсестры есть двухчашечные весы без гирь, и она хочет отсортировать детей по массе. Сколько взвешиваний ей для этого нужно сделать? Как ей производить взвешивания?

Задача 3. Факториалы

Факториалом числа n будем называть произведение всех натуральных чисел от 1 до n.

A. Егор посчитал факториал числа 33 и записал его на бумажку. Его сестра решила пошалить, и стёрла одну из цифр факториала. Получилась запись:

$$33! = 8`683`317`618`811`886`49\square`518`194`401`280`000`000$$

Помогите Егору восстановить стёртую цифру.

B. Посчитан факториал числа, не меньшего 12, и из его записи стёрта ровно одна цифра — причём известно, с какой позиции. Докажите, что её всегда можно однозначно восстановить.

C. Докажите, что при чётном n из произведения $1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot \ldots \cdot n!$ можно вычеркнуть один факториал так, что оставшееся произведение будет квадратом целого числа.

Задача 4. В поисках чисел

A. Составляя условия олимпиады «Математика НОН-СТОП», мальчики Боря и Дима придумывают для участников математические ребусы: выражения, где разным буквам соответствуют разные цифры. Будут ли ребусы

$$\text{Р}\cdot\text{О}\cdot\text{М}\cdot\text{А}\cdot\text{Ш}\cdot\text{К}\cdot\text{А} = \text{РОМАШКА}$$

и

$$\text{Я}\cdot\text{О}\cdot\text{Т}\cdot\text{Л}\cdot\text{И}\cdot\text{Ч}\cdot\text{Н}\cdot\text{И}\cdot\text{К} = \text{УРАУРА}$$

иметь решение?

B. Вася разбил числа от 3 до 8 включительно на четыре группы. Может ли его друг Рома наверняка утверждать, что произведение чисел в одной из этих групп больше 12?

C. Для данного числа n предъявите алгоритм нахождения наименьшего составного числа N такого, что $n!$ не делится на N, и докажите, что полученное составное число действительно будет наименьшим.

Задача 5. Проблемы завуча

A. На параллели 60 школьников ростом 161, 162, ..., 219, 220 сантиметров. Завуч хочет распределить их на три класса так, чтобы минимальный средний рост школьников в классе был максимален. Как ей это сделать?

B. Завуч, одновременно являясь преподавателем физики, демонстрирует детям абсолютно гибкий, но нерастяжимый и неповреждаемый металлический лист с вырезанным в нём круглым отверстием радиуса r. Монета какого максимального диаметра пролезет через это отверстие?

C. Теперь у завуча есть лист совершенно не гибкого стекла, также с вырезанным в нём круглым отверстием радиуса r. Какую длину должно иметь ребро очень шершавого куба, чтобы он не пролезал через это отверстие?

Задача 6. Фигуры в шахматах

A. Какое минимальное количество клеток нужно пройти ферзю из точки (a, b) в точку (c, d) на шахматном поле?

B. Фигура Корблюд умеет делать из данной клетки на шахматном поле четыре хода так, как показано на рисунке 3. Доказать, что корблюд может прийти из любой клетки бесконечного шахматного поля в любую другую. А верно ли такое утверждение для Корблюда Диагонального, делающего ходы как на рисунке 4?

C. Будем рассматривать фигуры, которые из данной клетки умеют делать четыре хода: вперёд-налево, вперёд-направо, назад-налево, назад-направо. При этом направо / налево фигура смещается лишь на одну клетку, а вперёд / назад каждый ход — либо на две, либо на три клетки. Сколько фигур, с точностью до симметрий, удовлетворяют этим свойствам, и какие из них могут из любой клетки бесконечного шахматного поля дойти до любой другой?

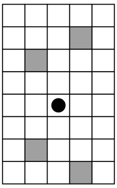


рис. 3

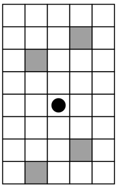


рис. 4

Задача 7. Пятница

A. По пятницам мама наливает пятерым детям парного коровьего молока. Она делает это в два круга, в первый раз как-то наполняя пять кружек, а во второй раз расходуя горшок до конца так, что уровень молока во всех кружках становится одинаковым. После первого круга в кружках четырёх детей было одинаковое количество молока, а в кружке пятого было на 20% больше этого количества. Сколько миллилитров составляла эта самая двадцатипроцентная разница, если горшок имеет объём 2 литра, а на втором круге мама использовала 70% его объёма?

B. По пятницам в селе Хотчланд устраивались бега быков, но в качестве быков использовались тигры. У каждого тигра на ошейнике написаны два числа: q — во сколько раз этот тигр бегает быстрее человека и t — время в секундах, в течение которого этот тигр бежит с максимальной скоростью, а после этого ложится отдохнуть. Помогите участнику бегов Исинбаю Еленову вывести формулу для расстояния x, на котором ему нужно держаться от данного тигра, чтобы не быть съеденным.

C. У мальчика Дани пять пятниц на неделе, а у Кости — три пятницы на неделе. Сколько существует расстановок пятниц на неделе таких, что ровно два дня будут пятницей и для Дани, и для Кости?

Задача 8. Очень умные муравьи

A. На плоскости живут четыре муравья. Могут ли они нарисовать себе на плоскости четыре связные области так, чтобы любые два муравья могли бы общаться друг с другом — их области имели бы участок общей границы?

B. Человек соорудил муравьям планету, то есть подвесил в воздух коробку размером $1 \times 1 \times 1$ метр. Через некоторое время он заметил, что муравьи организовывают экспедиции к углам коробки, как будто ходят в горы. Рост муравья — 2мм. Подъёму на холм какой высоты для человека нормального роста соответствует восхождение муравья к углу коробки, если рост нормального человека равен двум метрам?

C. Счётное сообщество муравьёв хочет организовать на плоскости треугольную сетку такую, чтобы к каждой вершине прилегало ровно пять треугольников, жители которых могли бы попить чай в этой вершине. По силам ли муравьям это предприятие?

Задача 9. Эксперименты с клавиатурой

A. У братьев А. и Б. на клавиатурах начался *дребезг*: у А. все символы набирались пятикратно, а `Backspace` удалял сразу восемь последних напечатанных символов. У Б. символы набирались семь раз подряд, а `Backspace` удалял последние четыре напечатанных символа. При равной скорости нажатия на клавиши, кто из братьев будет печатать быстрее?

B. Починив дребезг, братья обнаружили другие неполадки: у А. сломалась клавиша `Shift`, а у Б. — `Caps Lock`. До поломки оба печатали с одинаковой скоростью: они нажимали по пять клавиш в секунду. Неисправности повлияли на скорость печати: теперь А. должен нажимать `Caps Lock` перед каждой последовательностью заглавных букв и ещё раз нажимать после неё, а Б. — удерживать `Shift`, чтобы печатать заглавные буквы: при этом его скорость падает до двух букв в секунду, но на нажатие `Shift` время не тратится. Вам нужно придумать строчку, которую А. напечатает минимум в два раза быстрее, чем Б. А есть ли строчка, которую Б. печатает в два раза быстрее, чем А.?

C. Через год у Б. на клавиатуре осталось две рабочих клавиши, да и печатать он стал медленнее: нажимает лишь четыре клавиши в секунду. Паузы в процессе набора информации не несут; две клавиши одновременно нажимать нельзя. Вам нужно придумать способ без уменьшения русского алфавита (признания каких-нибудь букв равными) набирать любую букву не более чем за секунду либо доказать, что такого способа нет. Если его нет, то какое минимальное количество букв достаточно отождествить в одну, чтобы он появился?

Задача 10. Первым делом — самолёты

A. Комната освещена маленькой лампой, установленной на стене. Петя пускает бумажные самолётики так, что они пролетают перед лампочкой на её уровне. Вася же берётся определить, был пролетающий самолётик наклонён к лампочке или от лампочки, лишь по длине теней от его крыльев на противоположной стене. Как ему это сделать?

B. Четыре маленьких вертолёта стоят на земле в вершинах квадрата 1×1 метр. На какую высоту нужно взлететь двум из них, чтобы попарные расстояния между вертолётами стали одинаковыми?

C. По прямым, содержащим стороны правильного семиугольника со стороной в два километра, перемещаются камеры. Оператору Blue

Origin было дано задание посадить ракету в этот семиугольник так, чтобы суммарное расстояние от неё до прямых, по которым ездят камеры, было минимальным. Куда оператору сажать ракету?

Задача 11. Несправедливый турнир

Турнир по скоростному распиливанию проходит по усовершенствованной олимпийской системе. Изначально в турнире 2^t участников, $t \geq 2$, все в одной группе, потом группа потихоньку дробится: в каждом раунде в каждой группе участники бьются на пары, в которых состязаются в распиливании, и после раунда образуются группа победителей и группа проигравших, где повторяется аналогичный турнир.

Так продолжается, пока все участники не побьются на группы по одному человеку: тогда места участников в итоговой таблице определяются естественным образом. В частности, победитель турнира — участник, выигравший во всех t раундах, а аутсайдер — проигравший во всех t раундах.

A. Может ли самый слабый участник турнира не оказаться аутсайдером?

B. Может ли состязающийся сильнее как минимум половины участников турнира и ещё одного человека встретиться в финале с аутсайдером?

C. Доказать, что для всякого состязающегося слабее половины участников турнира можно подобрать разбиение на пары в раундах так, чтобы в финале он встретился с аутсайдером.

Задача 12. Попытки осмысления биссектрис

A. У Робинзона Крузо есть стандартный советский чертёжный треугольник с углами в 30, 60 и 90 градусов. Как ему с помощью этого треугольника начертить на песке угол в 15 градусов?

B. Мальчик по имени Текдра решил определять биссектрису трёхгранного угла следующим образом: проведём биссектрису одной из его граней, затем плоскость, проходящую через эту биссектрису и противоположное использованной грани ребро. Теперь проведём биссектрису угла в этой плоскости, образованного ребром и старой биссектрисой. Докажите, что определение Текдры некорректно —

в одном трёхгранном угле можно построить несколько различных биссектрис.

C. В треугольнике *MNK* проведены биссектрисы углов *N* и *K*. Из оставшейся вершины на эти биссектрисы опустили перпендикуляры и провели прямую через их основания. Доказать, что она будет параллельна стороне *NK*.

Задачи профильного варианта 7 класса

Задача 1. *(a, b)*–слоны

«У какого верблюда три горба?»

На шахматном поле (a, b)–слоном будем называть фигуру, делающую ходы следующего рода: она идёт по диагонали на a клеток, поворачивается на 90° в какую-либо из сторон и идёт на b клеток по перпендикулярной диагонали. Пусть слон был изначально поставлен в какую-то клетку на бесконечном во все стороны шахматном поле. Будем называть эту клетку *начальной*.

1. (а) Сколько возможных ходов из начальной клетки может сделать (a, b)–слон, $a \neq b$? (б) Правда ли, что (a, b)–слон имеет те же возможные ходы, что и (b, a)–слон? (в) Можно ли присвоить обычному шахматному слону какие-либо a и b?

2. Введите на чёрных клетках шахматного поля раскраску в два цвета такую, что любой ход $(1, 0)$–слона меняет цвет клетки, на которой он стоит. При каких значениях (a, b) соответствующий слон может ходить только по клеткам одного из этих двух цветов? Как часто меняется цвет клетки, в которую приходит слон, при остальных значениях (a, b)?

3. При каких значениях t возможно $(1, t)$–слоном за несколько ходов дойти до клетки, имеющей с начальной общую вершину? Постройте для таких t алгоритм дохождения, а для остальных докажите невозможность дохождения.

4. Пусть слон некоторым числом ходов может достичь клетки, имеющей с начальной общую вершину. Чему тогда может быть равен НОД (a, b)?

5. Для класса значений (a, b), которые одновременно удовлетворяют условиям, полученным вами в пунктах (2) и (4), проверить, может ли соответствующий (a, b)–слон попасть за несколько ходов в клетку, имеющую с начальной общую вершину. Вам требуется построить алгоритм попадания или доказать его невозможность для как можно бо́льшего числа слонов в классе.

6. *Слон Безу—Тьюринга.* Доказать, что если (a, b)–слон может дойти до клетки, имеющей с начальной общую вершину, на бесконечном шахматном поле, то он может сделать это и на вертикальной / горизонтальной бесконечной ленте ширины $2 \cdot (a + b)$, содержащей начальную и финишную клетки.

7. Теперь будем пытаться дойти до клетки, отстоящей от начальной на 2 по диагонали (соседней с соседней). Показать, что это можно сделать любым $(1, t)$–слоном. Чему может быть равен НОД (a, b), если это можно сделать (a, b)–слоном?

8. Описать всех (a, b)–слонов, с помощью которых можно дойти до клетки, отстоящей от начальной на 2 по диагонали, и при этом (а) с их помощью нельзя добраться до клетки, имеющей с начальной общую вершину (б) они не являются $(2a, 2b)$–слонами, где (a, b)–слон может дойти до клетки, имеющей с начальной общую вершину.

Задача 2. Кошки на координатной плоскости

«A radioactive cat has eighteen half-lives.»

Начинающий экономист Пабло Огурито спешит на защиту своей научной работы по экономической геометрии. Ему нужно пройти к метро по крайне скользкой дорожке. Чтобы не упасть, Пабло идёт по ней исключительно прямо, из некоторой точки на одном торце дорожки к некоторой точке на другом её торце.

Около метро в обилии водятся кошки, все лоснящиеся и чёрные. В свою очередь, Пабло суеверен, но по-немецки. Он считает, что кошка, перебежавшая перед тобой дорогу слева направо (в том числе, если ты с ней встретился), приносит тебе несчастья, а кошка, перебежавшая дорогу справа налево — удачу (опять же, и в случае встречи с ней).

Кошки в количестве n штук сидят в некоторых точках на местности, Пабло стоит в некоторой точке на торце дорожки. Для каждой из кошек и для Пабло выбрана *финишная* точка, в которую направляется соответствующий персонаж в нашей истории. В момент времени $t = 0$ всё сообщество из n кошек и одного Пабло начинает равномерное прямолинейное движение с тем расчётом, чтобы в момент времени $t = 1$ оказаться каждый в своей финишной точке.

Введём дополнительное обозначение: $[(a, b)..(c, d)]$ — прямоугольник со сторонами, параллельными осям координат, и двумя противоположными вершинами в точках (a, b) и (c, d).

Вам предлагается ответить на следующие вопросы:

1. Пусть дорожка представляет из себя прямоугольник $[(-2, -1)..(2, 1)]$. П. находится в точке $(2, 0)$, $n = 1$, единственная кошка сидит в точке $(0, -1)$ и готова направиться в точку $(0, 1)$. Какие точки на противоположном конце дороги могут быть финишными для П., если он не хочет, чтобы кошка успела пересечь его путь до него?

2. Теперь дорожка представляет из себя прямоугольник $[(0, 0)..(9, 3)]$. П. стоит в точке $(9, 1.5)$, $n = 2$: одна кошка направляется из $(6, 3)$ в $(6, 0)$, другая — из $(3, 0)$ в $(3, 3)$. Какие точки могут быть финишными для П., если он хочет, чтобы вторая кошка не успела перебежать ему дорогу? Какие точки могут быть финишными для П., если он также хочет зарядиться удачей от первой кошки?

3. Дорожка — всё ещё $[(0, 0)..(9, 3)]$, П. находится в точке $(9, 1.5)$ и идёт в точку $(0, 1.5)$. Известно что есть две кошки — одна вертикально сверху направляется в точку $(3, 0)$, другая — вертикально снизу в точку $(6, 3)$. Какие точки могут быть стартовыми для этих двух кошек, если П. хочет, чтобы первая кошка успела перебежать ему дорогу, а вторая — нет?

4. Дорожка — снова $[(0, 0)..(9, 3)]$, и П. направляется из точки $(9, 1.5)$ в точку $(0, 1.5)$. Придумать расстановку на местности четырёх кошек такую, что одновременно (а) стартовая точка каждой кошки есть финишная для какой-то другой кошки (б) финишная точка каждой кошки есть стартовая для какой-то другой кошки (в) никакие две кошки не стартуют из одной точки и не финишируют в одну точку (г) ровно две кошки успевают перебежать дорогу П. справа налево, и ни одна — слева направо.

5. Могут ли в условиях предыдущего пункта три кошки перебежать П. дорогу справа налево?

6. Теперь дорога — прямоугольник $[(0, 0)..(12, 12)]$, П. направляется из точки $(12, 9)$ в точку $(0, 3)$. Предъявить такие a и b, что кошка, иду-

щая из точки (x, a) в точку (x, b), обязательно перебежит дорогу П. при любом вещественном x, $0 \le x \le 12$.

7. Выведите формулы для координат $x(t)$ и $y(t)$ кошки, равномерно и прямолинейно направляющейся из точки (a, b) в точку (c, d), в зависимости от времени t, $0 \le t \le 1$.

Задачи профильного варианта 8 класса

Задача 1. *(a, b)*–слоны

«У какого верблюда три горба?»

На шахматном поле (a, b)–слоном будем называть фигуру, делающую ходы следующего рода: она идёт по диагонали на a клеток, поворачивается на 90° в какую-либо из сторон и идёт на b клеток по перпендикулярной диагонали. Пусть слон был изначально поставлен в какую-то клетку на бесконечном во все стороны шахматном поле. Будем называть эту клетку *начальной*.

1. (а) Сколько возможных ходов из начальной клетки может сделать (a, b)–слон, $a \neq b$? (б) Правда ли, что (a, b)–слон имеет те же возможные ходы, что и (b, a)–слон? (в) Можно ли присвоить обычному шахматному слону какие-либо a и b?

2. Введите на чёрных клетках шахматного поля раскраску в два цвета такую, что любой ход $(1, 0)$–слона меняет цвет клетки, на которой он стоит. При каких значениях (a, b) соответствующий слон может ходить только по клеткам одного из этих двух цветов? Как часто меняется цвет клетки, в которую приходит слон, при остальных значениях (a, b)?

3. При каких значениях t возможно $(1, t)$–слоном за несколько ходов дойти до клетки, имеющей с начальной общую вершину? Постройте для таких t алгоритм дохождения, а для остальных докажите невозможность дохождения.

4. Пусть слон некоторым числом ходов может достичь клетки, имеющей с начальной общую вершину. Чему тогда может быть равен НОД (a, b)?

5. Для класса значений (a, b), которые одновременно удовлетворяют условиям, полученным вами в пунктах (2) и (4), проверить, может ли соответствующий (a, b)–слон попасть за несколько ходов в клетку, имеющую с начальной общую вершину. Вам требуется построить алгоритм попадания или доказать его невозможность для как можно бóльшего числа слонов в классе.

6. *Слон Безу—Тьюринга.* Доказать, что если (a, b)–слон может дойти до клетки, имеющей с начальной общую вершину, на бесконечном шахматном поле, то он может сделать это и на вертикальной / горизонтальной бесконечной ленте ширины $2 \cdot (a + b)$, содержащей начальную и финишную клетки.

7. Теперь будем пытаться дойти до клетки, отстоящей от начальной на 2 по диагонали (соседней с соседней). Показать, что это можно сделать любым $(1, t)$–слоном. Чему может быть равен НОД (a, b), если это можно сделать (a, b)–слоном?

8. Описать всех (a, b)–слонов, с помощью которых можно дойти до клетки, отстоящей от начальной на 2 по диагонали, и при этом (а) с их помощью нельзя добраться до клетки, имеющей с начальной общую вершину (б) они не являются $(2a, 2b)$–слонами, где (a, b)–слон может дойти до клетки, имеющей с начальной общую вершину.

Задача 2. Кошки на координатной плоскости

«A radioactive cat has eighteen half-lives.»

Начинающий экономист Пабло Огурито спешит на защиту своей научной работы по экономической геометрии. Ему нужно пройти к метро по крайне скользкой дорожке. Чтобы не упасть, Пабло идёт по ней исключительно прямо, из некоторой точки на одном торце дорожки к некоторой точке на другом её торце.

Около метро в обилии водятся кошки, все лоснящиеся и чёрные. В свою очередь, Пабло суеверен, но по-немецки. Он считает, что кошка, перебежавшая перед тобой дорогу слева направо (в том числе, если ты с ней встретился), приносит тебе несчастья, а кошка, перебежавшая дорогу справа налево — удачу (опять же, и в случае встречи с ней).

Кошки в количестве n штук сидят в некоторых точках на местности, Пабло стоит в некоторой точке на торце дорожки. Для каждой из кошек и для Пабло выбрана *финишная* точка, в которую направляется соответствующий персонаж в нашей истории. В момент времени $t = 0$ всё сообщество из n кошек и одного Пабло начинает равномерное прямолинейное движение с тем расчётом, чтобы в момент времени $t = 1$ оказаться каждый в своей финишной точке.

Введём дополнительное обозначение: $[(a, b)..(c, d)]$ — прямоугольник со сторонами, параллельными осям координат, и двумя противоположными вершинами в точках (a, b) и (c, d).

Вам предлагается ответить на следующие вопросы:

1. Пусть дорожка представляет из себя прямоугольник $[(-2, -1)..(2, 1)]$. П. находится в точке $(2, 0)$, $n = 1$, единственная кошка сидит в точке $(0, -1)$ и готова направиться в точку $(0, 1)$. Какие точки на противоположном конце дороги могут быть финишными для П., если он не хочет, чтобы кошка успела пересечь его путь до него?

2. Теперь дорожка представляет из себя прямоугольник $[(0, 0)..(9, 3)]$. П. стоит в точке $(9, 1.5)$, $n = 2$: одна кошка направляется из $(6, 3)$ в $(6, 0)$, другая — из $(3, 0)$ в $(3, 3)$. Какие точки могут быть финишными для П., если он хочет, чтобы вторая кошка не успела перебежать ему дорогу? Какие точки могут быть финишными для П., если он также хочет зарядиться удачей от первой кошки?

3. Дорожка — всё ещё $[(0, 0)..(9, 3)]$, П. находится в точке $(9, 1.5)$ и идёт в точку $(0, 1.5)$. Известно что есть две кошки — одна вертикально сверху направляется в точку $(3, 0)$, другая — вертикально снизу в точку $(6, 3)$. Какие точки могут быть стартовыми для этих двух кошек, если П. хочет, чтобы первая кошка успела перебежать ему дорогу, а вторая — нет?

4. Дорожка — снова $[(0, 0)..(9, 3)]$, и П. направляется из точки $(9, 1.5)$ в точку $(0, 1.5)$. Придумать расстановку на местности четырёх кошек такую, что одновременно (а) стартовая точка каждой кошки есть финишная для какой-то другой кошки (б) финишная точка каждой кошки есть стартовая для какой-то другой кошки (в) никакие две кошки не стартуют из одной точки и не финишируют в одну точку (г) ровно две кошки успевают перебежать дорогу П. справа налево, и ни одна — слева направо.

5. Могут ли в условиях предыдущего пункта три кошки перебежать П. дорогу справа налево?

6. Теперь дорога — прямоугольник $[(0, 0)..(12, 12)]$, П. направляется из точки $(12, 9)$ в точку $(0, 3)$. Предъявить такие a и b, что кошка, иду-

щая из точки (x, a) в точку (x, b), обязательно перебежит дорогу П. при любом вещественном x, $0 \leq x \leq 12$.

7. Выведите формулы для координат $x(t)$ и $y(t)$ кошки, равномерно и прямолинейно направляющейся из точки (a, b) в точку (c, d), в зависимости от времени t, $0 \leq t \leq 1$.

Задача 3. Рекуррентные функции

«Нужно просто сесть на сороковой трамвай и посчитать.»

Будем понимать функцию как чёрный ящик, который по целым неотрицательным числам выдаёт целое неотрицательное число. Нам понадобятся функции от одного и от двух аргументов — соответственно, на вход они принимают одно или два числа.

1. Рассмотрим функцию f от двух аргументов. Известно, что $f(a, b) = f(b, a)$, значение $f(a, 0)$ определено однозначно для каждого a, и если $a > b$, то $f(a, b) = f(a - b, b)$. Доказать, что в таком случае функция f однозначно определена для всех значений (a, b).

2. Пусть при тех же условиях $f(a, 0) = a$. Чему равно $f(a, b)$?

3. Что произойдёт со значением $f(a, b)$, если $f(a, 0)$ определять иным образом?

4. Поменяем определение функции f. По прежнему $f(a, b) = f(b, a)$ и $f(a, 0)$ заранее известно, но теперь $f(a, b) = T(f(a - b, b))$, где $T(x)$ — некоторая функция от одной переменной. Доказать, что значение $f(a, b)$ снова однозначно определено для всех пар (a, b).

5. Пусть $T(x) = x + k$, где k — некоторое натуральное число; $f(a, 0)$ определено каким-либо образом. Чему в таком случае равно $f(a, b)$?

6. Рассмотрим функцию h от двух аргументов. Про неё известно следующее:

   (а) $h(ac, b) = h(a, b) \cdot h(c, b)$ для любых a, b, c;

   (б) $h(a, bc) = h(a, c) \cdot h(a, b)$ для любых a, b, c;

   (в) $h(a, a)$ заранее определена однозначным образом;

   (г) $h(a, b) = h(a \bmod b, b)$ при $a > b$ и $b > 0$;

   (д) $h(0, t)$, $h(1, t)$, $h(2, t)$, $h(t, 0)$, $h(t, 1)$, $h(t, 2)$ заранее определены однозначным образом;

(e) $h(p_1, p_2) = T(h(p_2, p_1))$, где p_1, p_2 — нечётные простые числа, $p_1 < p_2$, T — некоторая функция от одной переменной.

Доказать, что значение $h(a, b)$ однозначно определено для всех значений (a, b).

Решения задач 2018 года

Задачи 4 класса

Задача 1. Где-то я это уже видел

A. Первое число в дате (оно соответствует дню в месяце) меняется от 1 до 31, а второе (соответствует месяцу) — от 1 до 12. С другой стороны, как мы знаем, часы пронумерованы от 0 до 23, а минуты — от 0 до 59.

Таким образом, днём в месяце и одновременно часом могут быть числа от 1 до 23, а месяцем и одновременно минутой — от 1 до 12. Кроме того, в каждом месяце точно есть хотя бы 23 дня.

Поэтому ответ — $23 \cdot 12 = 276$.

B. Давайте всегда использовать «развёрнутую» дату. Тогда любой месяц (от 1 до 12) может стоять на месте часа, а любой день (от 1 до 31) на месте минуты. Ответ — все дни в году.

C. Есть всего 12 букв русского алфавита, похожих на буквы английского алфавита (ГОСТ Р 50577-93):

$$\underline{\text{А}}, \text{В}, \underline{\text{Е}}, \text{К}, \text{М}, \text{Н}, \underline{\text{О}}, \text{Р}, \text{С}, \text{Т}, \text{Х}, \underline{\text{У}}.$$

Жирным мы отметили гласные — их всего 4; соответственно, согласных 8. Выбрать сочетание «гласная-согласная-согласная» можно $4 \cdot 8 \cdot 8$ способами, а «гласная-гласная-согласная» — $4 \cdot 4 \cdot 8$ способами. Вариантов для числа на номере всегда ровно 1000 — от 000 до 999.

Когда гласная одна, она может стоять на одном из трёх мест, поэтому ответ в таком случае будет равен

$$3 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 1000.$$

Когда гласных две, согласная может стоять на одном из трёх мест. Поэтому ответ —

$$3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 1000.$$

Задача 2. Напрасно называют север крайним

A. Это задача–шутка: принималось большинство ответов, хотя наверняка на 10–градусном морозе туристическая группа отморозит себе половину ног, а на 20–градусном — все.

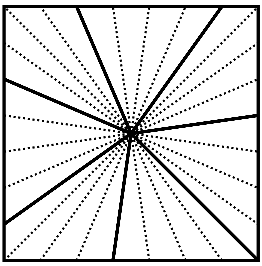
B. Все долготы Земного шара оказываются очень близко друг к другу около полюсов. Так что, возможно, Мюнхгаузен просто обошёл по кругу (скажем, километровому) Северный или Южный полюс.

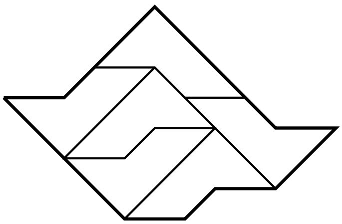
C. Пусть четыре города — B, C, D и E расположены очень близко друг к другу — попарно на расстоянии в один километр. А пятый город — A — очень далеко, в 100 километрах. Пусть больше нет никаких городов. Тогда A должен быть соединён дорогой с какими-то из четырёх оставшихся городов, но ни один из тех городов не должен быть соединён с A.

Задача 3. Разрезания

A. Поделим каждую из сторон квадрата на семь равных отрезков и рассмотрим 28 треугольников, получающихся, если соединить центр квадрата с краями каждого из этих отрезков. Все эти треугольники имеют одинаковую площадь (так как у них одинаковы основание и высота) и равные длины сторон, лежащие на сторонах квадрата (по построению).

Чтобы получить 7 многоугольников, требуемых в условии, объединим по четыре соседних треугольника — смотреть рисунок слева:



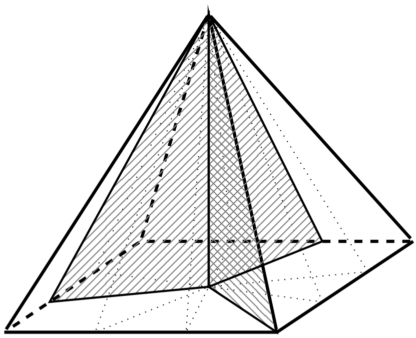


B. Смотреть рисунок справа.

C. Аналогично тому, что было проделано в первом пункте данной задачи, мы умеем резать квадрат на три многоугольника равной площади с равной длиной сторон, лежащих на сторонах квадрата.

Разрежем каждый квадратный «слой» пирамиды на три таких многоугольника одинаковым образом (с точностью до подобия). Тогда в объединении всех слоёв получатся три многогранника одинакового объёма, несущие на себе одинаковое количество краски («выходящие» на стороны пирамиды одинаковой площадью своей границы).

Смотреть рисунок:



Задача 4. Летающий цирк

A. Все слова в этой задаче состоят из букв A, M, P, C, T. Постараемся поставить эти буквы в соответствие с действиями Лэмберта. Для этого составим таблицу: сколько каких букв находится в словах, адресованных Лэмберту.

	А	М	Р	С	Т
МАТРАС	2	1	1	1	1
СТАРТ	1	0	1	1	2
МАРС	1	1	1	1	0

Услышав слово «МАТРАС», Лэмберт среди прочего поёт два куплета из песни — значит, буква ‘А’ отвечает за куплеты. По аналогичным причинам (посмотрим, каких букв две в слове «СТАРТ»), ‘Т’ — это ноги в коробке. ‘М’ — это то, чего нет в слове «СТАРТ», но есть в «МАТРАС» — это надевание ведра.

Для ‘Р’ и ‘С’ остаются снятие перчаток и „Караул!“ — но нам неважно, что из действий какой букве соответствует, потому что ‘Р’ и ‘С’ встречаются во всех рассматриваемых словах по одному разу.

Отсюда ответ: Лэмберт закричит „Караул!“, споёт один куплет, наденет на голову ведро и снимет перчатки.

B. Да, джентльмен сможет купить себе шляпу, так как цена, называемая продавцом, не возрастает (по крайней мере пока финансовые возможности джентльмена остаются ниже её), а количество финансов, имеющееся у джентльмена, на каждом шаге растёт ровно на 1.

Можно также явно проделать процедуру, описанную в задаче, и выяснить, через сколько именно шагов шляпа окажется у джентльмена (получится точно меньше десяти) — но мы не будем делать этого здесь, оставив читателю в качестве упражнения.

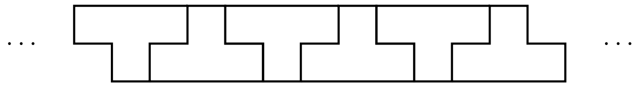
C. Пусть Тревор преувеличивает всё в a раз, а Джереми — преуменьшает в b раз, а кот стоит s рублей. Тогда, из условия задачи,

$$
\begin{aligned}
&s \cdot a = 9600\\
&a \div b = 4\\
&s \cdot a \div b = 2400\\
&s \div b = 150
\end{aligned}
$$

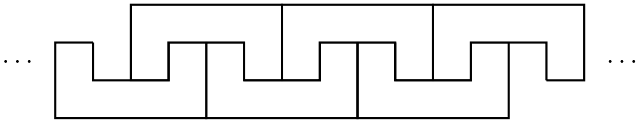
Сравнив первое и третье равенства, получаем, что $b = 4$. Подставив найденное b в четвертое равенство, получим $s = 600$.

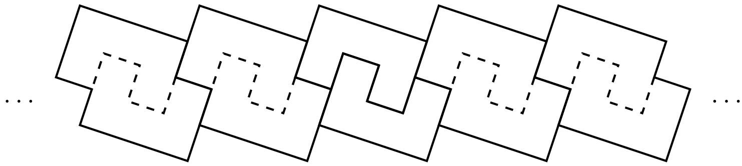
Задача 5. Мощения

A. Из этой фигуры можно собрать горизонтальную полоску ширины 2, которой очевидно можно замостить плоскость (смотреть рисунок).

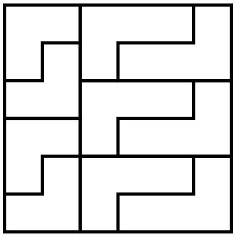


B. Из второй фигуры можно собрать горизонтальную полоску ширины 3, которой очевидно можно замостить плоскость. Из первой же фигуры соберём «лесенку» (смотреть рисунок ниже): так как и верхний, и нижний её край имеет вид «на три клетки вправо–на клетку вверх», этой лесенкой можно замостить плоскость, прикладывая её к себе.





C. Смотреть рисунок:



Задача 6. Ужасный гадкий аккуратный подсчёт

A. Квадратов 1×1 — $4\cdot 5 = 20$ штук. Квадратов размером 2×2 найдётся $3\cdot 4 = 12$ штук. Квадратов 3×3 и 4×4 — 6 и 2 соответственно. Таким образом, всего квадратов

$$20 + 12 + 6 + 2 = 40.$$

Количество прямоугольников можно посчитать более «продвинутым» образом: заметим, что прямоугольников размером $a \times b$ (где a — высота, b — ширина, то есть, мы различаем прямоугольники 2×3 и 3×2) можно найти ровно $(4 - a + 1) \cdot (5 - b + 1)$ штук. Число a меняется от 1 до 4 — отсюда $4 - a + 1$ меняется в тех же пределах. То же самое с $5 - b + 1$ — оно меняется от 1 до 5.

Отсюда можно заключить, что сумма чисел вида $(4-a+1)\cdot(5-b+1)$ при всевозможных a и b будет равна сумме всех чисел вида $a\cdot b$. Как посчитать сумму всех чисел вида $a\cdot b$? Заметим, что при раскрытии скобок в произведении

$$(1+2+3+4+5)\cdot(1+2+3+4)$$

получится сумма из всех слагаемых, которые нам нужны. Отсюда прямоугольников можно найти $15 \cdot 10 = 150$ штук.

B. Всего раскрасок $n!$ — в «первом» секторе может стоять n цветов, в следующем — $n-1$, и так далее. Из одной раскраски вращением круга можно получить ровно n раскрасок (включая её саму) — поэтому ответ равен $\frac{n!}{n} = (n-1)!$.

C. В верхней полосе может стоять один из шести имеющихся цветов. Во второй полосе — любой из шести цветов, кроме уже стоящего в первой. В нижней полосе — любой из цветов, кроме уже стоящего во второй. Таким образом, ответ — $6 \cdot 5 \cdot 5 = 150$.

Задачи 5 класса

Задача 1. Летающий цирк

Смотреть 4 класс, задачу №4.

Задача 2. Рукопожатия

A. Давайте «расклеим» восьмёрку, превратив её в обычный круглый хоровод — тогда существо, стоящее в центре восьмёрки, «продублируется». Если оно было крабом, то получится хоровод из 19 крабов и 17 пауков; в противном случае — 18 крабов и 18 пауков. Если в круговом хороводе крабов больше, чем пауков, то какие-то два краба неизбежно будут держаться за лапы, что запрещено.

Отсюда можно заключить, что в центре стоял паук. Придумать хоровод, соответствующий условию, с пауком в центре не представляет ни малейшего труда.

B. Могло оказаться так, что ровно один человек в компании выиграл машину. Построим соответствующий пример. Возьмём «победителя» — у него есть пять друзей. У каждого из них есть ещё по четыре друга (кроме выигравшего машину), пусть все эти друзья различны. $1 + 5 + 4 \cdot 5$ — у нас получилось 26 человек, от каждого из которых не более чем два рукопожатия до выигравшего машину человека.

Однако, для того чтобы довести пример до конца, нам надо установить дружеские связи между людьми, у которых их пока меньше 5 — а именно, между теми, от кого до победителя лотереи два рукопожатия (их 20 человек). Каждому из них нужно «изобрести» ещё по 4 друга.

Поступим просто: поставим эти 20 человек по кругу в произвольном порядке и назначим друзьями каждого двух его правых соседей и двух его левых соседей. Задача решена.

C. Пусть внутренних рейсов в Авиаландии ровно M, а международных из неё — ровно N. Каждый внутренний рейс имеет в Авиаландии два «конца», а каждый международный — только один. Всего в города Авиаландии прибывает $5 \cdot 6 = 30$ рейсов. Получаем

$$2 \cdot M + N = 30.$$

Отсюда N должно быть чётным числом (так как $2 \cdot N$ — чётное).

Задача 3. Современная мебельная фабрика

A. Закроем один из открытых ящиков, открыв тот, что через два ящика «налево» от него. Затем закроем его, открыв следующий, ещё через два ящика слева. Повторим то же действие ещё раз. На четвёртом шаге мы закроем оба открытых ящика, тем самым решив полученную задачу.

B. При первом сценарии после действий Фёдора в ведре осталось $\frac{6}{10}$ красителя, разведённого там Сергеем, так как 4 литра раствора из 10 были вылиты.

При втором сценарии Фёдор сначала выливал обычный раствор, а затем — раствор с меньшей концентрацией красителя. То есть, количества красителя в ведре до выливания двух литров и после отличались в 0.8 раз. В итоге в ведре осталось $\frac{8}{10} \cdot \frac{8}{10} = 0.64$ от исходного красителя.

Ответ: больше красителя осталось во второй день.

C. Пусть стул потерял t ножек. Составим уравнение:

$$t = \frac{1}{3}\cdot\left(\underbrace{720 - \underbrace{\frac{1}{3}\cdot\underbrace{(720-t)}_{\text{чем у него осталось сейчас}}}_{\text{в три раза меньше ножек}}}_{\text{осталось бы, потеряй он}}\right)$$

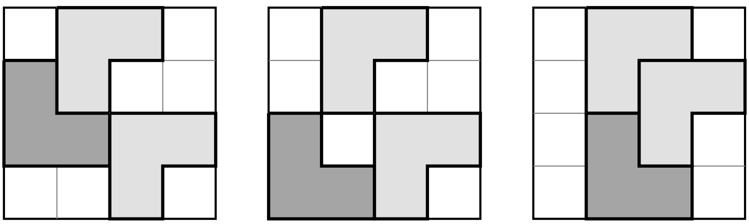
Это линейное уравнение. Его решением является число $t = 180$.

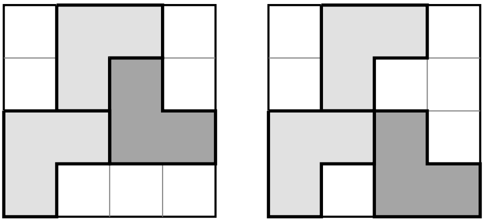
Задача 4. Игры

A. Выигрышная стратегия есть у первого игрока: первым ходом он должен вырезать игровую фигуру из центра прямоугольника, разделив его на две равных непересекающихся фигуры — а затем ему достаточно повторять ходы, сделанные вторым игроком в одной из фигур, симметрично в другой фигуре. Понятно, что если второй смог сделать ход, то первый тоже сможет.

B. Выигрышная стратегия есть у второго игрока: пока он находится сзади, первый может делать только ходы по одному шагу вперёд. Второму надо следовать за ним — и когда тот шагнёт в клетку №301 (второй будет стоять в 299-ой), перепрыгнуть через него и выиграть.

C. Первому надо вырезать свою букву ‘Г’ по центру верхней стороны квадрата. То, что он выигрывает после этого, доказывается перебором возможных ходов второго игрока (смотреть рисунок): после каждого возможного хода первый игрок может походить так, что буква ‘L’ второго игрока не может быть вписана никуда.





Задача 5. Прогрессивное сложение

A. $95500 > 50095$.

B. Заметим, что есть всего шесть вариантов расстановки чисел P, Q, R — поэтому перебор их всех и сравнение результатов уже является не таким плохим вариантом алгоритма. Однако мы попробуем продемонстрировать ещё более рациональную идею.

Если числа P, Q, R имеют одинаковое число разрядов или по крайней мере ни одно из них не является префиксом другого, то всё просто: надо отсортировать числа лексикографически и сложить в порядке «от большего к меньшему».

Если же ни одно из условий выше не выполнено, попытаемся сделать так, чтобы нам пришлось сравнивать числа с одинаковым числом разрядов. Для этого нам нужно как-то «дополнить» более короткие числа. Давайте для каждого числа, которое короче самого длинного из набора P, Q, R, выберем из оставшихся число, начинающееся с самой большой цифры (или наибольшее лексикографически) и припишем в конец исходного числа несколько первых разрядов выбранного.

Так мы получили несколько строк одинаковой длины, которые можно отсортировать лексикографически — и сложить числа в том порядке, в котором высторились получившиеся из них строчки.

Возьмём, например, числа 59, 598, 5979. Они разной длины, и 59 является префиксом всех остальных. По указанному выше правилу из этих чисел получатся строчки

$$59\underline{59},\quad 598\underline{5},\quad 5979.$$

После упорядочения их получим 5985, 5979, 5959. Поэтому максимальный результат, который может получится при сложении данных трёх чисел, —

$$598 \oplus 5979 \oplus 59 = 598597959.$$

C. Нет, так не бывает:

$$P \oplus Q \;=\; P \cdot \underset{n \geq 1}{10^n} + Q \;>\; P + Q.$$

Задача 6. Мощения

Смотреть 4 класс, задачу №5.

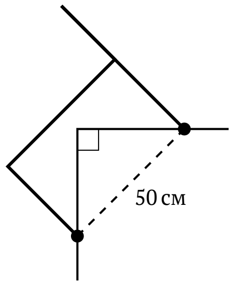
Задачи 6 класса

Задача 1. Клиренсы

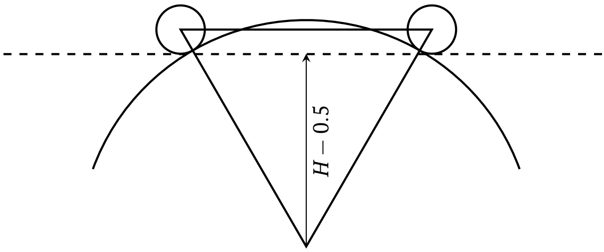
A.

$$740/2 - 175 = 195 \text{ миллиметров.}$$

B. Угол дома «поднимается» над линией, соединяющей основания ножек стула, на расстояние, равное высоте прямоугольного треугольника с гипотенузой 50 сантиметров. Эта величина максимальна, очевидно, когда треугольник равнобедренный — тогда она равна 25 см. Поэтому расстояние от сиденья до земли должно быть не меньше 25 см.



C. Треугольник, образованный центром планеты и центрами колёс автобуса, — равносторонний со стороной 10.5 см: одна из сторон равна колёсной базе, а две других — сумме радиуса планеты (10 метров) и радиуса колеса (0.5 метра).



Дорожный просвет автобуса — расстояние от его пола (который должен касаться верхней точки планеты, но никак не оказываться внутри неё) до прямой, соединяющей нижние точки колёс. В нашем случае — это разность $R-(H-0.5)$, где H — высота равностороннего треугольника, а 0.5 — радиус колеса.

$$H = 10.5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$R-(H-0.5) = 11 - 10.5\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

(это примерно 1.9 метра)

Это и есть ответ на задачу.

Задача 2. Разрезания

Смотреть 4 класс, задачу №3.

Задача 3. Игры

Смотреть 5 класс, задачу №4.

Задача 4. Модельки

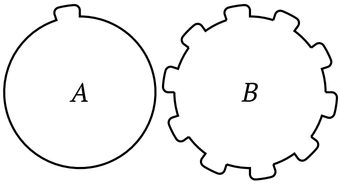
A. Свойства подобных фигур говорят нам, что объём фигур, подобных с коэффициентом k, различается в k^3 раз. Масса тела равна плотности вещества, умноженной на его объём — поэтому она также должна уменьшаться в k^3 раз при уменьшении тела в k раз.

В свою очередь, $1200\,/\,43^3 \approx 0.015$. В реальность модельки несколько тяжелее, но это вполне объяснимо: сделаны они всё-таки грубее, чем оригинальная машина, и металл в них сравнительно более толстый.

B. Мы хотели бы отметить, что длина меридиана, 40 000 километров, это **вся окружность** Земли, а не её половина. То есть Парижский меридиан проходит через две долготы: 2.33° в. д. и 177.67° з. д.

Таким образом, самолёту нужно пролететь 40 000 км, затрачивая на километр 0.54 минуты. $40000 \cdot 0.54 \div 60 = 360$ (часов).

C. С одной стороны, если есть «классическая» плоская система из шестерёнок, то в ней передача вращения симметрична. С другой — можно с применением некоторой креативности придумать «несимметричную» систему. Например, такую, как на рисунке:



При вращении шестерёнки A она каждый оборот будет цепляться своим единственным зубом за шестерёнку B, и та будет вращаться. При вращении же шестерёнки B в текущем положении шестерёнок она не будет касаться A и передавать ей вращение.

Задача 5. Напрасно называют север крайним

Смотреть 4 класс, задачу №2.

Задача 6. Где-то я это уже видел

Смотреть 4 класс, задачу №1.

Задача 7. Ужасный гадкий аккуратный подсчёт

Смотреть 4 класс, задачу №6.

Задача 8. Фургончик

A. Мы знаем, что $(p_1 + 1)(p_2 + 1) = p_1 p_2 + 15$. Если раскрыть скобки, получается $p_1 + p_2 = 14$. Единственные простые числа, подходящие под это условие, — 11 и 3. Это и есть ответ.

B. Для того, чтобы выяснить, какие ноги ещё не были переставлены, нам нужно отыскать все нечётные числа между 2 и 40, не делящиеся на 3. Это 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 25, 29, 31, 35, 37. Проверить, что мы выписали все нужные числа, несложно — достаточно посмотреть на их остатки при делении на 6: числа должны иметь вид $6k-1$ или $6k+1$ (остальные остатки от деления на 6 либо чётные, либо 3). Получилось 12 чисел — это ответ на задачу.

C. Будем измерять расстояние, которое проехал Саша за день, не в километрах, а в метрах. Понятно, что расстояние между A и G равно сумме со знаками $+$ или $-$ расстояний между городами, которые указаны в задаче. Осталось только заметить, что все расстояния в метрах (12000, 18000, 10500, 19500, $\ldots$) делятся на 3, а их предполагаемая сумма — 41000 — почему-то нет. Значит, в атласе дана неверная информация.

Задачи 7 класса

Задача 1. Современная мебельная фабрика

Смотреть 5 класс, задачу №3.

Задача 2. Прогрессивное сложение

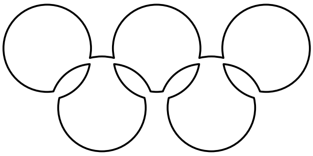
A. Смотреть 5 класс, задачу №5A.

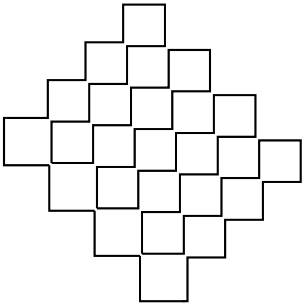
B. Смотреть 5 класс, задачу №5B.

C. Подойдут, например, числа $a = 9$, $b = 5$: $5 \oplus c$ — это как минимум двузначное число, которое не может быть равно пяти.

Задача 3. На салфетке

A. Смотреть рисунок:





B. Обозначим количество узлов у треугольника Серпинского степени n через $T(n)$.

У треугольника степени 1 — три узла, $T(1) = 3$. Треугольник степени $k+1$ получается из трёх треугольников степени k поставновкой их друг на друга — при этом три пары узлов (посередине сторон нового треугольника) склеиваются в три узла. Таким образом,

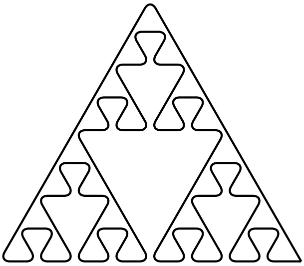
$$\begin{aligned} T(k) &= 3T(k-1) - 3 = \\ &= 3(3T(k-2) - 3) - 3 = \ldots = \\ &= 3^{k-1} \cdot T(1) - 3^{k-1} - 3^{k-2} - \ldots - 3 = \\ &= 3^k - 3^{k-1} - 3^{k-2} - \ldots - 3 = \\ &= 3^k - \frac{3^k - 1}{3 - 1} = \frac{3^k + 1}{2}. \end{aligned}$$

Посчитать количество отрезков в наклонном квадрате и того проще: они образуют $2n$ «лесенок», в каждой из которых по $2n$ отрезков. Поэтому ответом будет число $4n^2$.

C. Научиться рисовать треугольник Серпинского, не отрывая пера от бумаги, можно последовательно: сначала первую степень, потом вторую, потом третью...

Будем делать так: сначала будем, начиная с нижней стороны треугольника, рисовать все его «внутренности», а потом «замкнём» получающуюся картинку двумя верхними сторонами. При этом «внутренности» треугольника степени $n+1$ — это трижды «внутренности» треугольника степени n.

Таким образом получится изображение треугольника степени 4:



а также любой другой степени, по аналогии.

Задача 4. Не модельная, а модальная!

A. Фраза $\square\triangledown X$ означает дословно следующее: для каждого дня, начиная с сегодняшнего, в какой-то момент после него случится событие X. То есть, из какого дня вперёд ни посмотри — там, в будущем, обязательно хотя бы единожды случится событие X. На самом деле эта фраза эквивалентна следующей: «в бесконечное количество дней после сегодняшнего произойдёт событие X».

Очевидно, что $\square\triangledown$ сегодня суббота — верно: после любого дня когда-то в будущем обязательно наступит суббота.

B. Докажем, что из первой фразы следует вторая. Действительно: первая утверждает, что $\triangledown\square X$ верно для любого дня, начиная с сегодняшнего — в том числе и для сегодняшнего.

Теперь докажем, что из второй фразы следует первая. Вторая фраза означает: начиная с какого-то дня в будущем (назовём его $\boldsymbol{D}$) каждый день будет происходить событие X. Зная это, нам нужно доказать $\square\triangledown\square X$: для каждого дня d указать такой день после него, начиная с которого X выполняется каждый день.

Так вот если d раньше $\boldsymbol{D}$, то $\boldsymbol{D}$ подойдёт в качестве искомого дня. Если же $\boldsymbol{D}$ раньше d, то после самого d событие X выполняется каждый день — возьмём d в качестве искомого дня.

C. Легко убедиться, что $\square X$, $\triangledown X$, $\square\triangledown X$ и $\triangledown\square X$ — попарно неэквивалентные фразы. Пусть X_1 — «сегодня не 1 января 2000 года», X_2 — «сегодня у Пети Иванова последний звонок в школе», X_3 — «сегодня День рождения Пети Иванова», X_4 — «Пете Иванову уже исполнилось 18 лет»; достаточно проверить, что все X_i делают верными разные наборы утверждений.

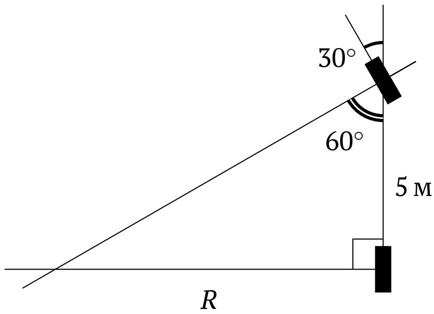
Теперь докажем, что любая фраза с другой приставкой из □ и ▽ эквивалентна одной из приведённых ранее. Понятно, что □□ и ▽▽ в любом месте приставки можно заменить на соответственно □ и ▽ без изменения смысла фразы. Значит, мы можем рассматривать только фразы, в приставке которых идёт не более одного квадратика / треугольничка подряд.

Согласно пункту B, □▽□ можно заменить на ▽□ без изменения смысла фразы. Аналогично, ▽□▽ можно заменить на □▽. Поэтому любую приставку мы можем сократить до содержащей не более двух символов — а все такие мы уже перечислили.

Задача 5. Без пробуксовки

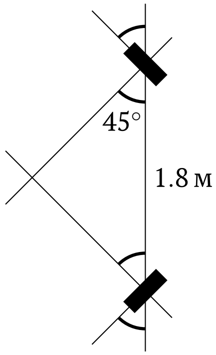
A. Машина ездит по окружности вокруг точки, где пересекаются линии, перпендикулярные переднему и заднему колёсам, проходящие через их центр. Эти линии вместе с отрезком между колёсами машины образуют прямоугольный треугольник (см. рисунок), один из углов которого — 60 градусов, а один из катетов — 5 м.

Тогда $R = 5\sqrt{3}$ (отношения сторон прямоугольного треугольника с углом 60° — известные величины).

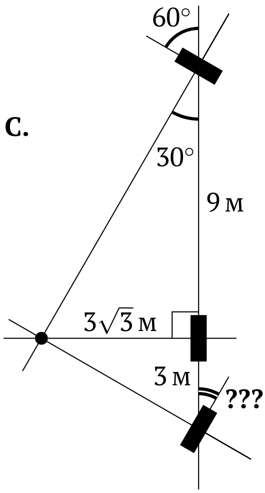


B. Теперь нас интересует высота прямоугольного равнобедренного треугольника с основанием 1.8 м. Она равна 0.9 м. То есть погрузчик ездит вокруг точки, расположенной на 0.9 м левее, чем середина его левого борта.

B.



C.



C. Аналогично первому пункту данной задачи, найдём расстояние от не поворачивающегося колеса до точки, вокруг которой ездит автобус. Оно равно $\frac{9}{\sqrt{3}} = 3\sqrt{3}$: опять же, мы, зная один из катетов прямоугольного треугольника с углом 60°, ищем другой.

Теперь заметим, что среднее и заднее колёса, а также точка, вокруг которой ездит автобус, образуют прямоугольный треугольник с катетами 3 и $3\sqrt{3}$ метра. Значит, его углы — 30 и 60 градусов. Отсюда заднее колесо нужно повернуть на 30 градусов.

Задача 6. Как провожают транспортёры...

A. Если наблюдатель движется со скоростью $\frac{1}{3}v$ навстречу транспортёру, собственная скорость которого равна $\frac{1}{6}v$, их скорость сближения равна $\frac{1}{2}v$ — то есть, для наблюдателя этот транспортёр выглядит всего лишь в два раза медленннее, чем исходный.

В такой ситуации взрослый питон проехал бы мимо наблюдателя за 28 секунд. Но питон–детёныш короче, и для его проезда понадобится $28 \cdot \frac{3}{4} = 21$ секунда.

B. Чтобы не обманываться длинами кубиков (как это сделало большинство участников олимпиады), мы на время заменим их на передние их точки относительно движения транспортёра. Расстояние между этими точками будет равно 15 сантиметров.

При попадании на более быстрый транспортёр расстояние между этими точками увеличится вдвое и составит 30 см. Чтобы получить расстояние между кубиками, из этой величины надо вычесть 5 сантиметров — получится 25 см.

Распространённая ошибка заключалась в том, что участники олимпиады умножали на 2 расстояние между концом первого кубика и началом второго. Это неправомерно, потому что две названные точки играют разную роль, и умножать расстояние между ними на 2 при решении задачи — это как мерить половину прыгунов в длину по дальней точке касания, а половину — по ближней.

C. Очевидно, что оптимальное деление песка между транспортёрами происходит тогда, когда они заканчивают работу одновременно: иначе у опустевшего транспортёра остаётся ресурс, когда он простаивает, а второй транспортёр работает вместо двоих.

Поэтому песок нужно поделить в отношении $2 : 1$, отдав в два раза больше в два раза более быстрому транспортёру. Получится 400 кг первому и 800 кг второму.

Задача 7. Одновременное вычитание

A. Возьмём пять чисел: 0, 0, 0, 0, 6. Очевидно, для них мы не можем добиться того, чего просят в задаче, потому что по факту можем уменьшать только одно число.

B. *Примечание автора:* утверждение этого пункта на самом деле является предметом изучения *теории гомологий* — интереснейшей науки, позволяющей восстанавливать топологические свойства различных объектов по их алгебраическим свойствам. Можно переформулировать эту задачу так:

> *Нулевая группа приведённых гомологий плоскости равна* $\{0\}$.
> *Нулевая группа гомологий плоскости равна* $\mathbb{Z}$.

Вообще говоря, это верно для любой более или менее «хорошей» поверхности. Действительно разнообразными оказываются группы гомологий более высоких размерностей.

Для решения задачи мы рассмотрим точку с весом, наибольшим по модулю. Не умаляя общности предположим, что её вес положителен. Так как сумма весов всех точек равна нулю, найдутся какие-то точки с отрицательным весом, суммарный вес которых «перевесит» нашу по модулю. Соединим выбранную точку с найденными с помощью кривых так, чтобы (а) вес выбранной точки обратился после этого в ноль (б) модули весов найденных точек не увеличились.

Таким образом, (а) модули весов всех точек не увеличились (б) количество точек с нулевым весом увеличилось хотя бы на одну. На каждом шаге, при повторении процедуры, описанной в предыдущем абзаце, эти полуинварианты будут сохраняться — поэтому мы добьёмся ситуации, когда вес всех точек окажется нулевым (сумма весов всех точек сохраняется на каждом шаге).

C. Возьмём дорогу с наименьшим весом и пустим по ней машину, на номере которой написан вес этой дороги. Когда машина въедет в какой-то город, она сможет из него выехать: её номер равен наименьшему среди всех весов дорог, а сумма входящих в город равна сумме исходящих — поэтому из города выходит дорога весом не меньше, чем число на номере машины.

Так машина будет ездить по городам, пока не окажется в городе, в котором она уже побывала. Тогда возьмём все дороги, по которым машина ездила между двумя посещениями этого города, и вычтем из их веса число на номере машины — и заставим машину ездить по кругу через эти города. При этом сумма весов всех дорог строго уменьшится.

Опять возьмём дорогу, вес которой на этот раз наименьший среди всех, и повторим описанную процедуру. Пока наименьший среди всех вес дороги не равен нулю (то есть, пока есть дороги с положительным весом), будем повторять эту процедуру. Очевидно, в итоге оставшиеся веса всех дорог обратятся в ноль.

Задача 8. Сетки на плоскости

A. Заметим, что рёбра на пути можно менять местами без изменения начала, конца и длины пути. Заметим также, что по рёбрам каждого из трёх направлений в сетке кратчайший путь ходит максимум в одну сторону, потому что иначе «подвинем» противоположно направленные проходы друг к другу и сократим их, укоротив путь.

Пусть путь использовал все три сорта рёбер в сетке. Тогда мы переставим его рёбра так, что сначала он будет идти в одну сторону по рёбрам первого сорта, затем по рёбрам второго, затем по рёбрам третьего.

Теперь возьмём треугольник и проставим на его сторонах те направления, в которых мы ходим по рёбрам соответствующей ориентации. Получилось три вектора — заметим, что либо один из них равен сумме двух других, либо их сумма равна нулю.

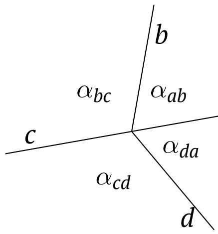
В первом случае можно переставить рёбра в пути так, чтобы проход по двум подряд идущим рёбрам превратить в проход по одному. То есть, путь не был кратчайшим.

Во втором случае можно переставить рёбра так, чтобы, не изменяя начала и конца пути, выкинуть из него три ребра. Тогда он тем более не был кратчайшим.

B. Окуню достаточно перегрызть два узла, соседних с углом сетки. Если же в сетке нет даже двух рядов узлов, то никакая это не сетка.

C. Рассмотрим четырёхугольник со сторонами a, b, c, d и углами α_{ab}, α_{bc}, α_{cd}, α_{da} (две буквы в индексе обозначают прилежащие стороны угла). Приложим к стороне a такой же четырёхугольник так, чтобы в каждой из двух общих вершин двух четырёхугольников оказалось по углу, равному α_{ab} и α_{da}. Сделаем то же на сторонах b, c и d, а затем с каждым из четырёх вновь приложенных четырёхугольников.

Заметим, что тогда по построению в каждой из имеющихся вершин сойдутся все четыре угла четырёхугольника — в частности из-за того, что сумма углов треугольника равна 360°:



Продолжая описанную выше процедуру прикоадывания, мы замостим всю плоскость.

Задача 9. Ужасный гадкий аккуратный подсчёт

A. Смотреть 4 класс, задачу №6B.

B. Смотреть 4 класс, задачу №6C.

C. Эта задача чуть сложнее пункта A: нужно поделить 6! на число вращений куба. Сколько же их?

Возьмём «верхнюю» грань куба. При вращении она может оказаться на месте одной из шести граней (включая себя). Теперь посмотрим на одну из граней, соседних с ней. При вращении та может перейти в одну из четырёх граней, соседних с той, на месте которой оказалась верхняя. Заметим, что положение этих двух граней (для которого есть ровно 24 варианта) однозначно определяет положение всех остальных. Поэтому ответ на задачу — $\frac{6!}{24} = 30$.

Задача 10. Средние арифметические

A. Пример наборов, удовлетворяющих условию задачи —

1, 2, 3, 4, 5; 1, 2, 3, 4, 5; 1, 2, 3, 4, 5;
10001, 10002, 10003, 10004, 10005.

Максимум средних равен 10003, а среднее арифметическое максимумов — 255.

B. После разбиения детей на классы у нас будет четыре «самых низких» ребёнка, по одному на класс. Расставим их по росту. Одним из них точно будет тот, чей рост — 101 сантиметр. Рост второго будет не больше 131, третьего — не больше 161, четвёртого — не больше 191, потому что между этими отметками вмещается ровно по тридцать детей, и если не все они будут в одном классе, то более высокий самый низкий ребёнок окажется среди них.

Таким образом, у нас есть оценка сверху на величину, которую мы пытаемся максимизировать — $\frac{1}{4}(101 + 131 + 161 + 191)$. Попробуем добиться того, чтобы среднее арифметическое четырёх ростов было именно таким. Для этого можно разбить детей на классы «подряд» — первые тридцать в первый класс, вторые тридцать — во второй, . . .

Так и сделаем.

C. Заметим, что какое разбиение детей на классы ни возьми, — сумма средних арифметических ростов детей в классах будет постоянна (и равна 362 см). Значит, минимум наибольший, когда все средние арифметические совпадают. Значит, нужно составлять классы, симметричные относительно 90,5. Например, в первый класс отправить первые десять детей и последние десять, а во второй — вторую и предпоследнюю десятки детей.

Задачи 8 класса

Задача 1. У магазина

A. Понятно, что Фёдор и Кирилл увеличивают все числа в одинаковое число раз. И „144“, названное Фёдором, есть квадрат этого числа (так как он назвал то, во сколько раз увеличивает всё Кирилл, сам увеличив это число). Тогда оба продавца умножают всё на 12.

Соответственно, учебник стоит $43200 \div 144 = 300$ рублей — так как его цена прошла через уста, опять же, обоих продавцов.

B. Делимость на 99 значит делимость на 9 и на 11. Восстановить стёртую цифру можно почти однозначно, посчитав сумму оставшихся цифр и найдя остаток от деления её на 9. Проблема может возникнуть, если сумма оставшихся на номере цифр делится на 9 — тогда непонятно, 0 нам ставить на пустое место или 9.

Признак делимости на 11 говорит нам, что знакопеременная сумма цифр числа должна делиться на 11. Заметим, что при постановке цифр 9 и 0 на одно и то же место не может оказаться так, что оба результата будут делиться на 11. Поэтому получится однозначный ответ.

C. То, как происходит торг между продавцом и покупателем, на самом деле, повторяет работу алгоритма Евклида. Алгоритм Евклида всегда завершается — значит, и торг завершится.

При этом на каждом шаге торга хотя бы одна из названных цен уменьшается хотя бы на 1, поэтому в любой момент времени количество шагов торга оценивается сверху суммой цен, называемых покупателем и продавцом. Поэтому количество шагов всегда будет строго меньше суммы текущих чисел.

Пусть изначально названы цены a и $b = a + t$. Тогда на следующем шаге торга будут названы цены a и t. Тогда количество шагов торга строго меньше, чем

$$a + t \underbrace{+1}_{\substack{\text{один шаг}\\ \text{уже сделан}}} = b + 1 \leq 21.$$

Торг с 20 шагами легко придумать: пусть изначально были названы цены 1 и 20.

Задача 2. Ужасный гадкий аккуратный подсчёт

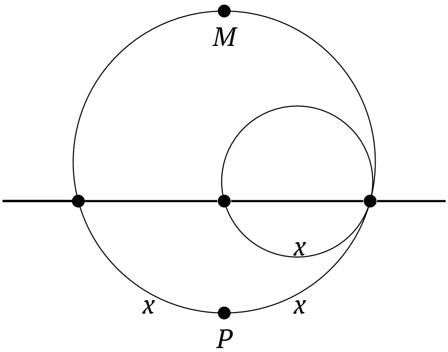
Смотреть 7 класс, задачу №9.

Задача 3. Не модельная, а модальная!

Смотреть 7 класс, задачу №4.

Задача 4. Катим круг

A. «Расправим» большую окружность — заметим, что дуга, составляющая её половину, равна по длине окружности круга, который мы катим. Это значит, что, проехав эту дугу, круг снова коснётся её отмеченной точкой.



B. Длина дуги круга между точкой его касания с окружностью и отмеченной точкой равна длине дуги окружности между точкой её касания с кругом и точкой P. Обозначим эту длину через x. Отложим дугу длиной x налево от точки P (смотреть рисунок). Отрезок, соединяющий точку касания круга с окружностью и конец новой дуги, будет горизонтальным.

При этом дуга длины x на круге получается из дуги длины x на окружности гомотетией с коэффициентом $\frac{1}{2}$ и центром в точке касания круга с окружностью: эти дуги отложены из одной точки на окружностях, радиусы которых отличаются в два раза.

Горизонтальный отрезок переходит при гомотетии в горизонтальный отрезок — поэтому концы дуги на круге также лежат на одной горизонтальной прямой.

C. В силу того же факта, что дуга на квадрате получается из дуги на окружности гомотетией с коэффициентом $\frac{1}{2}$, её конец будет находится ровно посередине между концами большой дуги — то есть ровно над точкой P, потому как большая дуга изначально строилась симметричной.

Задача 5. Средние арифметические

Смотреть 7 класс, задачу №10.

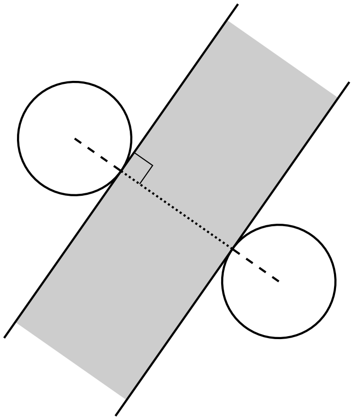
Задача 6. Игры

Смотреть 5 класс, задачу №4.

Задача 7. Об одной задаче классификации

A. Очевидно, что ширина этой полосы не может быть больше, чем расстояние между самыми близкими друг к другу точками кругов. Сделаем ширину полосы равной этому расстоянию.

Для этого соединим центры кругов отрезком и построим касательные к кругам в точках пересечения отрезка с их границей. Они будут параллельны и образуют полосу максимально допустимой ширины (смотреть рисунок).



В.–С. Сработает похожий метод: надо найти ближайшие друг к другу точки квадратов и соединить их отрезком — искомая полоса получится, если провести к данному отрезку перпендикуляры в его концах.

С одной стороны, её ширина будет максимально допустимой, потому что она будет равна расстоянию между ближайшими точками квадратов, а большая ширина запрещена.

С другой стороны, ни одна точка из квадратов не попадёт внутрь этой полосы, потому что квадрат — выпуклый многоугольник. В силу этого он либо лежит по одну сторону от прямой, проходящей через точку его границы, либо лежит по обе стороны, и с каждой из сторон от прямой находится часть стороны, на которой лежала точка, через которую мы проводили прямую.

Но тогда на части этой стороны, лежащей внутри полосы, найдётся точка, которая ближе к другому концу отрезка, лежащем на другом краю полосы, что противоречит построению полосы.

Задача 8. Одновременное вычитание

Смотреть 7 класс, задачу №7.

Задача 9. На салфетке

Смотреть 7 класс, задачу №3.

Задача 10. Необходимости и достаточности

A. Скорость мышки равна $10 \cdot 35 = 350$ см/с, а скорость кошки — $55 \cdot 9 = 495$ см/с. Несомненно, кошка быстрее.

B. Сколько вылетов нужно сделать винтовому самолёту? Каждого Йожина надо осыпать трижды — получается 300 осыпаний. Каждый вылет даёт два осыпания — поэтому нужно 150.

А реактивному? Аналогичным образом получаем $100 \cdot 8 \div 5 = 160$ вылетов. Таким образом, винтовой самолёт на 10 вылетов эффективнее.

C. Обозначим через x_k массу еды, которая была в наличии у велосипедистов *перед* k–ым обедом. Мы знаем, что $x_{31} = 0$, и ищем x_1. Давайте выразим x_k через $x_k + 1$. В соответствии с условием задачи,

$$x_k = \underbrace{0.1 \cdot x_k + 2}_{\text{съедят за } k\text{–ым обедом}} + x_{k+1}.$$

Откуда

$$x_k = \frac{20}{9} + \frac{10}{9} x_{k+1};$$

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{20}{9} + \frac{10}{9} \cdot \frac{20}{9} + \left(\frac{10}{9}\right)^2 \cdot x_3 = \\ &= \frac{20}{9} + \frac{10}{9} \cdot \frac{20}{9} + \ldots + \left(\frac{10}{9}\right)^{29} \cdot \frac{20}{9} + \left(\frac{10}{9}\right)^{30} \cdot x_{31} = \\ &= \frac{20}{9} + \frac{10}{9} \cdot \frac{20}{9} + \ldots + \left(\frac{10}{9}\right)^{28} \cdot \frac{20}{9} + \left(\frac{10}{9}\right)^{29} \cdot \frac{20}{9} = \\ &= \frac{20}{9} \cdot \frac{\left(\frac{10}{9}\right)^{30} - 1}{\frac{10}{9} - 1} \quad \text{— это ответ на задачу.} \end{aligned}$$

Задача 11. Рукопожатия

Смотреть 5 класс, задачу №2.

Задача 12. Прогрессивное сложение

Смотреть 7 класс, задачу №2.

Задачи профильного варианта 7 класса

Задача 1. Римская десятичная система счисления

1.

$$
\begin{aligned}
&333_{\text{Р}} = 333_{\text{Д}}\\
&2050_{\text{Р}} = 2000 + 0 - 50 = 1950_{\text{Д}}\\
&10001_{\text{Р}} = 9999_{\text{Д}}\\
&404004_{\text{Р}} = 400000 - 4000 + 4 = 396004_{\text{Д}}
\end{aligned}
$$

2. Интересная особенность римской десятичной системы счисления заключается в том, что для умножения натурального числа на -1 перед ним достаточно приписать цифру 0: так как она меньше любой значащей цифры, нам придётся вычесть число, получаемое из младших разрядов, из $0 \cdot 10^m = 0$.

$$
\begin{aligned}
&91_{\text{Д}} = 91_{\text{Р}}\\
&150_{\text{Д}} = 1850_{\text{Р}}\\
&-1_{\text{Д}} = 01_{\text{Р}}\\
&13_{\text{Д}} = 27_{\text{Р}}
\end{aligned}
$$

3. Ответ очевиден: подходят все строки, цифры в которых расположены в порядке невозрастания.

Почему так? Если цифры в строке расположены по-другому, то при чтении её слева направо в какой-то момент нам придётся сделать вычитание при расшифровке римской записи против сложения при расшифровке десятичной. И результат получится строго меньше.

4. У каких чисел их римская запись может совпадать со стандартной?

У тех, у которых старшая цифра не меньше младшей. Для остальных чисел нам придётся придумывать более хитрую процедуру преобразования.

Пусть дано число $xy_{\text{Д}}$, $x < y$. Давайте вычтем его из 100:

$$\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ & x & y \\ \hline & (10 - x - 1) & (10 - y) \end{array}$$

Получилось двузначное число, состоящее из цифр $10 - x - 1$ и $10 - y$. Будет ли оно «правильным», то есть, окажется ли его первая цифра не меньше второй?

$$\begin{aligned} 10 - x - 1 &\geq 10 - y \\ -x - 1 &\geq -y \\ x + 1 &\leq y \\ x &< y \end{aligned}$$

То есть, первая цифра полученного числа **всегда** будет не меньше второй, и при переводе из римской записи в стандартную такое число будет давать себя же. Более того, его первая цифра — хотя бы 1, то есть, не меньше единицы. Отсюда

$$\begin{aligned} 1[10 - x - 1][10 - y]_{\text{Р}} = 100 - ([10 - x - 1][10 - y]_{\text{Р}}) = \\ = 100 - ([10 - x - 1][10 - y]_{\text{Д}}) = xy_{\text{Д}}. \end{aligned}$$

Мы получили *алгоритм*, то есть процедуру (не включающую в себя перебор) построения по десятичному числу его римской записи:

a) Сравнить первую цифру и вторую;

b) Если первая оказалась не меньше, то оставить запись как есть; если первая оказалась меньше, то вычесть число из 100 — запись вида 1 $\boxed{\text{двузначная разность}}$ будет ответом.

Стоит отметить, что получаемая нами таким образом римская запись будет одной из многих, соответствующих данному числу.

5. Для умножения числа на 10 к его записи нужно приписать ноль справа, а для умножения на -1 — слева, это уже обсуждалось ранее.

6. $91_{\text{Р}} = 109_{\text{Р}} = 91$.

7. $1999_{\text{Р}} = 199_{\text{Р}} = 19_{\text{Р}} = 1_{\text{Р}}$.

8. Признаки делимости на 2 и на 5 всё так же будут завязаны на последней цифре, потому как при «расшифровке» всех более старших разрядов они прибавляются и вычитаются, только будучи домножены на какую-то степень десятки, а 10 делится на 2 и на 5.

Признак делимости на 3 также будет аналогичен признаку в десятичной системе счисления — только вместо суммы цифр числа надо будет расматривать знакопеременную сумму, плюсы и минусы в которой расставлены в соответствии с тем, как «расшифровывается» число.

9. Неравенство $\frac{Y_{\text{Д}}}{k} < N \leq Y_{\text{Д}}$, будучи, вообще говоря, **неверным** в десятичной системе счисления (смотреть пункт 7, числа вида 199…9 бывают сколь угодно большими), оказывается верным в двоичной. Двоичная римская система счисления интересна ещё и тем, что там каждому числу соответствует не более чем конечное число римских записей.

10. Докажем, что $M = 121$ — именно такое число.

a) Если у него есть римская запись, то у него есть четырёхзначная римская запись. Причина этому в том, что любая запись большей значности обязана была бы начиначться с $19x\ldots$, $x \neq 1$, так как иначе при её расшифровке получится число, больше 121. Но такую запись можно заменить на $1x\ldots$ без изменения её расшифрованного значения.

b) Четырёхзначная римская запись числа 121 должна начинаться на 18. Если первая чифра была бы 2, то при переводе получилось бы число не меньше 1000. Если вторая цифра была бы 7 (или меньше), то получилось бы число не меньше 200. А если бы вторая цифра была равна 9, то следующая за ней цифра не превосходила бы её и тоже «вычиталась» бы, поэтому результат не превосходил бы

$$1000 - 900 + 10 = 110.$$

c) Последняя цифра римской записи числа 121 равна либо 1 (тогда она должна прибавляться), либо 9 (тогда она должна вычитаться). В первом случае $1000 - 800 \pm x \cdot 10 + 1 = 121$; во втором случае $1000 - 800 \pm x \cdot 10 - 9 = 121$.

В обоих случаях на роль x претендуют цифры 7, 8 и 9. Тут уже перебором просто показать, что ни одна из них не подойдёт.

Задача 2. Изображения на плоскости

Первый пункт задачи содержит простые технические утверждения, поэтому мы сразу начнём со второго.

2. Координаты x и y не могут одновременно быть по модулю меньше единицы, чтобы неравенство из условия было выполнено. Фигура, состоящая из точек, обе координаты которых по модулю меньше единицы, — это квадрат со стороной 2 и центром в начале координат, не включающий свою границу. Значит, искомое множество точек — дополнение этого квадрата (включая его границу).

3. Видно, что принадлежность точки множеству на первом рисунке зависит только от её второй координаты. Будем подбирать неравенство в виде $P(y) \leq 0$, где P — многочлен от одной переменной. Мы должны получить $P(y) \leq 0$, когда $-1 \leq y \leq 1$.

Принимая в рассмотрение первый пункт этой же задачи, можно понять, что $(y+1)(y-1)$ — именно такой многочлен. Ответ:

а) $(y+1)(y-1) \leq 0$.

Легко понять, что нижняя наклонная прямая, ограничивающая фигуру на втором рисунке, задаётся уравнением $y - x + 1 = 0$; верхняя же прямая — уравнением $y - x - 1 = 0$. Между этими прямыми находится множество точек, для которых выражения $y - x + 1$ и $y - x - 1$ имеют разный знак: первое уже «успело» стать положительным, а второе ещё нет. Такое множество задаётся неравенством:

б) $(y - x + 1)(y - x - 1) \leq 0$.

4. Неравенство для крестика удобно искать в виде $P(x) \cdot Q(y) \leq 0$, где $P(x) \leq 0$ — неравенство, задающее вертикальную полосу, а $Q(y) \leq 0$ — горизонтальную полосу. Тогда в пересечении полос $P(x) \cdot Q(y)$ будет больше нуля, что исключит это пересечение из получаемой фигуры.

Как задавать полоску от -1 до 1, мы знаем, поэтому сразу получаем ответ:

а) $(x+1)(x-1)\cdot(y+1)(y-1)\leq 0.$

Для решения второго подпункта вспомним, что такое круг: это множество точек, расстояние от которых до выбранной меньше радиуса. Иными словами,

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2-R^2\leq 0.$$

В нашем случае $x_0=y_0=0$, $R=1$. Верхняя полуплоскость, в свою очередь, задаётся уравнением $x-y\leq 0$. Наша фигура тогда — множество точек, где ровно одно из двух выражений, указанных выше, не превосходит нуля. Ответ —

б) $(x-y)(x^2+y^2-1)\leq 0.$

5. Мы уже знаем, каким неравенством задаются круги. Закрашенная фигура на рисунке — множество точек, где выполнено нечётное количество (1 или 3) неравенств, задающих круги. Значит, ответ:

$$\begin{gathered}\left((x-1)^2+(y+1)^2-2.25\right)\cdot\\ \cdot\left((x+1)^2+(y+1)^2-2.25\right)\cdot\\ \cdot\left(x^2+(y-0.5)^2-2.25\right)\leq 0.\end{gathered}$$

6. Окружность задаётся уравнением

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2-R^2=0.$$

Фигура из трёх окружностей — это множество точек, для которых хотя бы одно из выражений, задающих окружность, обращается в ноль. Отсюда ответ:

а)

$$\begin{gathered}(x^2+y^2-4)\cdot\\ \cdot\left((x+1)^2+y^2-1\right)\cdot\\ \cdot\left((x-1)^2+y^2-1\right)=0.\end{gathered}$$

Для фигуры из трёх лучей заметим, что два из них — горизонтальный и направленный вверх — образуют график функции $y=0.5|x|+$

$0.5x$. Соответственно, горизонтальный и направленный вниз образуют график функции $y = -0.5|x| - 0.5x$. Нам достаточно, чтобы для точки (x, y) было выполнено хотя бы одно из этих условий. Отсюда ответ —

б) $(0.5|x| + 0.5x - y)(-0.5|x| - 0.5x - y) = 0$.

7. При решении этого задания мы уже много раз пересекали и объединяли фигуры, поэтому ответ понятен без пояснений:

а) $\max(|P_1(x, y)|, |P_2(x, y)|) = 0$;

б) $P_1(x, y) \cdot P_2(x, y) = 0$.

8. а) $\max(P_1(x, y), P_2(x, y)) < 0$;

б) $\min(P_1(x, y), P_2(x, y)) < 0$;

в) $P_1(x, y) \cdot P_2(x, y) < 0$.

Задача 3. Простеющие числа

Перечислим вообще все простеющие числа. Вот они:

$$2, 3, 4, 6, 8, 12, 18, 24, 30.$$

2. Нечётное простеющее число не может быть больше 4 — так как тогда 4 взаимно просто с ним ($4 = 2 \cdot 2$) и не является при этом простым числом.

3–4. Вообще, простеющее число, не делящееся на простое p, не может быть больше p^2, так как тогда составное p^2 будет взаимно просто с ним. Поэтому простеющие числа, не делящиеся на 3, все не превосходят 9, а не делящиеся на 5 — не превосходят 25.

5–7. Числа N и $N - 1$ всегда взаимно просты, поэтому если N простеющее, $N - 1$ обязано быть простым (и никак не может быть квадратом простого).

В шестом же пункте n будет взаимно просто с $p_1 \cdot p_2$ (так как оно взаимно просто с p_1 и p_2), которое также является составным числом.

8. Докажем, что не бывает простеющих чисел, больших 210. Для этого докажем, что число $N > 210$ больше квадрата наименьшего простого числа, на которое оно не делится. Тогда оно окажется взаимно просто с этим квадратом, который является составным числом.

Пронумеруем простые числа по возрастанию: $2 = p_1$, $3 = p_2$, ... Пусть p_k — наименьшее простое, такое что N не делится на p_k. Тогда $N \geq p_1 \cdot \ldots \cdot p_{k-1}$.

В силу постулата Бертрана $p_{k-1} \geq \frac{p_k}{2}$, а $p_{k-2} \geq \frac{p_{k-1}}{2} \geq \frac{p_k}{4}$. Отсюда $p_{k-2} \cdot p_{k-1} \geq p_k^2/8$.

Если мы хотим, чтобы число N было простеющим, то оно должно быть меньше, чем p_k^2. То есть, $p_1 \cdot \ldots \cdot p_{k-3} \leq 8$. Отсюда уж точно $k - 3 \leq 2$, то есть, $k \leq 5$. В свою очередь, $N \leq 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$.

Что и требовалось доказать.

Задачи профильного варианта 8 класса

Задача 1. Простеющие числа

Смотреть 7 класс, задачу №3.

Задача 2. Расстояние между множествами

1. Несложно убедиться в том, что $\max\min$ равен 1 — вершина квадрата, ближайшая к данной, всегда находится на расстоянии 1 от неё. С другой стороны, $\min\max$ равен $\sqrt{2}$: дальняя вершина от данной находится «по диагонали», на рассоянии $\sqrt{2}$.

2. То, что $\max_{x \in A} F(x) \leq T$, равносильно тому, что для всякого $x_0 \in A$ выполнено $F(x_0) \leq T$. В нашем случае нужно доказать, что

$$\min_{y \in B} \operatorname{dist}(x_0, y) \leq \min_{y \in B} \left(\max_{x \in A} \operatorname{dist}(x, y) \right).$$

   Это неравенство очевидно, поскольку в левой части мы максимизируем расстояние до *какой-то* точки из множества A, а в правой части — до *дальней* точки множества A.

3. Воспользуемся тем, что уже было нами получено в первом пункте: для квадрата со стороной 1 разность указанных величин была равна $\sqrt{2} - 1$. Тогда для квадрата со стороной T, в силу свойств подобных фигур, эта разность будет равна $(\sqrt{2} - 1) \cdot T$ — это число, изменяя T, можно сделать больше наперёд заданного r.

4. Например, подойдут следующие множества: B состоит из двух точек t_1, t_2 на расстоянии 5 друг от друга, а $A = \{t_1\}$.

5. Рассмотрим точку $c \in C$. Так как C лежит в ρ_2–окрестности B, найдётся точка из $b \in B$ такая, что $\operatorname{dist}(b, c) \leq \rho_2$. Далее, так как B лежит в ρ_1–окрестности A, найдётся точка $a \in A$: $\operatorname{dist}(a, b) \leq \rho_1$.

В силу неравенства треугольника, $\operatorname{dist}(a, c) \leq \rho_1 + \rho_2$. Поэтому для (произвольной!) точки c нашёлся круг нужного радиуса с центром в точке из A, в котором она лежит. Что и требовалось.

6. Положим
$$F(x) := \min_{y \in A} \operatorname{dist}(x, y), \qquad x \in A.$$

Оказывается, $F(x)$ всегда равно нулю: dist всегда не меньше нуля, а если взять $y = x$ — получится как раз ноль, и минимум обратится в ноль. Теперь уж
$$\max_{x \in A} F(x) = \max_{x \in A} 0 = 0,$$

что и требовалось.

7. Фиксируем точку $x_0 \in A$. Мы знаем, что $\min_{y \in B} \operatorname{dist}(x_0, y) \leq R$ (так как максимум подобных величин по всем точкам из A не превосходит R). Тогда найдётся $y_0 \in A$ такая, что $\operatorname{dist}(x_0, y_0) \leq R$. Это значит, что x_0 лежит в R–круге с центром в точке y_0, а, значит, в R–окрестности множества B.

Если же A целиком лежит в R–окрестности B, то для каждой точки из $x_0 \in A$ найдётся точка $y_0 \in B$ (центр круга, в который она попала), такая что $\operatorname{dist}(x_0, y_0) \leq R$. Отсюда $\min_{y \in B} \operatorname{dist}(x_0, y) \leq R$, и условие задачи выполнено.

8.

d=0 : Если два множества совпадают, то DIST равен нулю: это доказано в пункте 6. Если множества не равны — $A \neq B$ — то найдётся точка, скажем $a \in A$, которая не лежит в B. Для неё $\min_{y \in B} \operatorname{dist}(a, y) > 0$ — значит, и DIST, получаемый взятием максимума из этой величины и каких-то других величин, будет строго больше нуля.

(a,b)=(b,a) : Симметричность введённого нами расстояния очевидна, потому что при замене в формуле для него A на B и B на A формула остаётся дословно такой же.

d(a,b) + … : Определим

$$D(A,B) := \max_{x\in A} \left(\min_{y\in B} \operatorname{dist}(x,y)\right).$$

$$\text{Тогда} \quad \operatorname{DIST}(A,B) = \max\{D(A,B), D(B,A)\}.$$

Шаг первый: $D(A,C) \le D(A,B) + D(B,C)$.

$$D(A,C) = \max_{x\in A} \left(\min_{z\in C} \operatorname{dist}(x,z)\right).$$

Нам нужно доказать, что этот максимум не превосходит выражения в правой части. Для этого надо доказать, что для любого элемента $a_0 \in A$, взятого произвольным образом, максимизируемая величина не превосходит правой части. Итак,

$$\min_{z\in C} \operatorname{dist}(a_0,z) \le$$

Пусть b_0 — точка из B, ближайшая к a_0.

$$\le \min_{z\in C} \left(\operatorname{dist}(a_0,b_0) + \operatorname{dist}(b_0,z)\right) =$$

$$= \min_{z\in C} \left(\left(\min_{y\in B} \operatorname{dist}(a_0,y)\right) + \operatorname{dist}(b_0,z)\right) =$$

Первое слагаемое не зависит от z.

$$= \min_{y\in B} \operatorname{dist}(a_0,y) + \min_{z\in C} \operatorname{dist}(b_0,z) \le$$

$$\le \max_{x\in A} \left(\min_{y\in B} \operatorname{dist}(x,y)\right) + \max_{y\in B} \left(\min_{z\in C} \operatorname{dist}(y,z)\right) =$$

$$= D(A,B) + D(B,C).$$

Шаг второй: $D(C,A) \le D(C,B) + D(B,A)$. Получается заменой в формулах выше A на C и наоборот. Таким образом,

$$\operatorname{DIST}(A,C) = \max\{D(A,C),\ D(C,A)\} \le$$
$$\le \max\Big\{D(A,B) + D(B,C),\ \ D(C,B) + D(B,A)\Big\}.$$

Предыдущее верно, потому что при переходе от первой строчки ко второй мы не уменьшили каждую из двух величин в скобках.

Наконец, $\max\{p+q, u+v\} \le \max\{p, u\} + \max\{q, v\}$:

$$\begin{aligned} &\max\{p+q, u+v\} = \\ &= \frac{1}{2}\Big(p+q+u+v+|p+q-u-v|\Big) \le \\ &\le \frac{1}{2}\Big(p+u+|p-u|+q+v+|q-v|\Big) = \\ &= \max\{p, u\} + \max\{q, v\}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} &\mathrm{DIST}\,(A, C) \le \\ &\le \max\Big\{D(A, B) + D(B, C),\ \ D(C, B) + D(B, A)\Big\} \le \\ &\le \max\Big\{D(A, B),\ D(B, A)\Big\} + \max\Big\{D(B, C),\ D(C, B)\Big\} = \\ &= \mathrm{DIST}\,(A, B) + \mathrm{DIST}\,(B, C). \end{aligned}$$

Что и требовалось доказать.

9. Если A и B — подмножества одного круга радиуса R, то расстояния между любыми двумя их точками вообще не превосходят $2R$. Как операции $\max$ и $\min$ к ним ни применяй, всегда будет получаться величина, не превосходящая $2R$.

Задача 3. Изображения на плоскости

Смотреть 7 класс, задачу №2.

Решения задач 2017 года

Задачи 4 класса

Задача 1. Обаятельный домовёнок

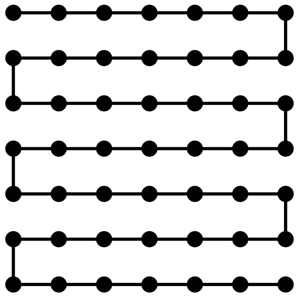
A. $6 - 4 = 2$, отсюда Кузя догоняет издателей со скоростью 2 статьи в день. На то, чтобы нагнать 40 статей, у него уйдёт 20 дней.

B. Площадь квадратика 2×2 в 4 раза больше площади квадратика 1×1, поэтому на него уходит в 4 раза больше чернил. Значит, на том же картридже Кузя сможет напечатать $10000 \div 4 = 2500$ квадратиков 2×2.

C. Среди гвоздиков почти каждого горизонтального ряда как минимум на двух должны быть сделаны повороты: ведь нитка входит и выходит из этого ряда. Однако найдутся два горизонтальных ряда гвоздиков, где нитка начинается или кончается — поэтому количество поворотов нитки может быть оценено сверху числом

$$2 \cdot 5 + 2 = 12.$$

Протянуть нитку, сделав 12 поворотов, просто: можно, например, стартовать из верхней левой клетки и пойти до конца направо, потом, сделав два поворота, спуститься на ряд вниз и пойти налево — и так далее, смотреть рисунок.



Задача 2. Велопоход

A.
$$t = \frac{S}{v} = \frac{400\,\text{м}}{10\,\text{км/ч}} = \frac{0.4\,\text{км}}{10\,\text{км/ч}} = \frac{1}{25}\ \text{ч}.$$

Это, в свою очередь, равно 2.4 минутам.

B. Остановки занимают половину времени Дмитрия Григорьевича, поэтому его средняя скорость будет в два раза меньше его скорости в движении — и равна 17 км/ч. Это, тем не менее, выше средней скорости Полины, которая равна 15 км/ч. Поэтому Д. Г. быстрее

C. Пусть длина подъёма в горку равна x километров. Тогда время, за которое Степан преодолеет подъём и спуск, в часах равно

$$\frac{x}{10} + \frac{x}{40} = \frac{5x}{40} = \frac{x}{8}.$$

Время же, которое потратит Пётр, равно $\frac{2x}{17}$ — и нам нужно сравнить эти два числа. Посмотрим на их отношение:

$$\frac{x \cdot 17}{8 \cdot 2x} = \frac{17}{16} > 1.$$

То есть, Пётр всё-таки будет ехать дольше.

Задача 3. Буквы на белом листе

A.

Б $\longrightarrow$ В	З $\longrightarrow$ В	О $\longrightarrow$ Ю	Ш $\longrightarrow$ Щ
Г $\longrightarrow$ Б	И $\longrightarrow$ Й	Р $\longrightarrow$ В	Ь $\longrightarrow$ Б
Г $\longrightarrow$ П	К $\longrightarrow$ Ж	С $\longrightarrow$ О	Ь $\longrightarrow$ Ы
Г $\longrightarrow$ Т	Л $\longrightarrow$ Д	Ц $\longrightarrow$ Щ	Ь $\longrightarrow$ Ъ
Е $\longrightarrow$ В	У $\longrightarrow$ Х		

Остальные буквы (в их «типографском» начертании) ни во что превратить нельзя. Однако эта задача оставляет большую свободу трактовок, поэтому оценивалась в пользу участника.

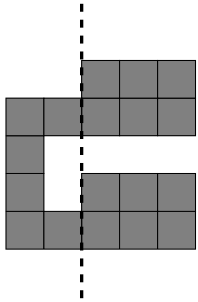
B. Если лист бесконечный, то это буквы ‘В’ и ‘Ф’, имеющие в своём составе два «кольца». Если же мы рассматриваем обычный лист бумаги А4, то на нём можно написать букву ‘Ж’, распространив её до краёв листа — и она поделит его на 6 областей.

C. От двух областей (когда они написаны одна поверх другой) — до 9, когда они пересекаются в двух точках и касаются краёв листа.

Задача 4. Делить и резать, резать и делить

A. Нужно провести две диагонали — четыре треугольника, на которые они поделят прямоугольник, будут иметь равную площадь.

B. Смотреть рисунок:



C. Проведём в круге два диаметра под углом 45°. Каждый из них поделит круг на две равных части, однако вдвоём они делят круг на 4 части, площади которых равны $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{8}$ площади круга.

Задача 5. О, как мы далеки!

A. Не умаляя общности, пусть остановка A находится левее D. Тогда остановка C — либо слева от A, либо справа от D.

Если остановка C слева от A, то она находится на расстоянии 4 от неё. Но тогда нам некуда поставить B, так чтобы $AB = 4$, $BC = 2$. Отсюда C находится справа, и $AC = 6$.

B. Сажая новое дерево, мы бьём промежуток между прежде соседними деревьями на два меньших промежутка. Если мы добились того, что расстояние между соседними деревьями стало равным d, то d является делителем 63, 84 и 14.

НОД $(63, 84, 14) = 7$, поэтому деревья можно посадить каждые 7 метров (и большего расстояния между соседними добиться нельзя). Отсюда ответ —

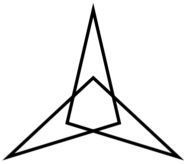
$$(63/7 - 1) + (84/7 - 1) + (14/7 - 1) = 20 \text{ деревьев.}$$

C. Да, точки можно расставить:

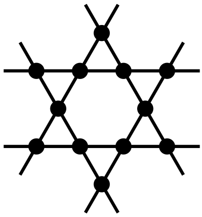
$$A \xleftrightarrow{3} D \xleftrightarrow{3} B \xleftrightarrow{6} E \xleftrightarrow{1} C.$$

Задача 6. Быть врачом — весьма ответственно!

A. Геометричный червь имеет форму замкнутой ломаной — например, он может изгибаться так, как показано на рисунке.



B. Обозначим кости отрезками, а узелки — кружками. Доктор может связать, например, такую конфигурацию, которая удовлетворяет условию:



C. Да, стратегия для докторов может быть следующая: Айболит надевает первую пару перчаток, а на неё сверху вторую; Пеппер оперирует только во второй паре перчаток (её внешняя сторона касалась только пациента, а внутренняя чистая). Наконец, Ватсон делает операцию, надев на себя вывернутую первую пару перчаток (её новая внутренняя сторона — ещё чистая), а сверху на неё — вторую.

Внешняя сторона второй пары перчаток по-прежнему соприкасалась только с пациентом, а то, что у первой и второй пар перчаток находятся в контакте грязные стороны, нас не волнует.

Задачи 5 класса

Задача 1. Поделим – посмотрим

A. Пусть даны два прямоугольных треугольника. Каждая сторона первого из них может пересекать второй треугольник не более чем дважды, в сиду выпуклости прямоугольного треугольника. Значит, два прямоугольных треугольника могут иметь не более шести пересечений (причём шесть пересечений получить можно — достаточно взглянуть на «звезду Давида»).

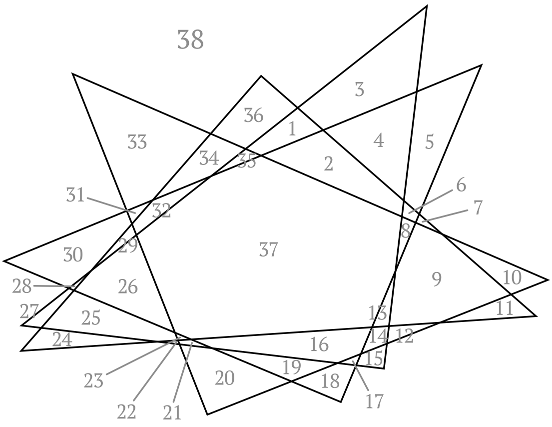
Заметим теперь, что для замкнутой линии количество областей, которые она добавляет к картинке, равно количеству её пересечений с другими, уже имеющимися, линиями.

Первый треугольник делит плоскость на две области. Второй, пересекаясь с ним максимум 6 раз, добавит ещё шесть областей. Третий треугольник может не более чем по шесть раз пересечь первые два, то же верно и про четвёртый треугольник.

Отсюда мы получаем верхнюю оценку на количество областей:

$$2 + 6 + 6 \cdot 2 + 6 \cdot 3 = 38.$$

Мы уже доказали, что больше 38 областей получить нельзя — в свою очередь, получить ровно 38 можно, для этого расположим треугольники «достаточно хаотично»:



В. Прямая может «входить» в семиугольник и «выходить» из него. При этом изначально она находится снаружи и в конце должна оказаться там же. Каждую сторону семиугольника прямая пересекает не более одного раза, а количество пересечений должно быть чётным. Значит, прямая пересекает максимум шесть сторон, «проходя» через семиугольник трижды.

Получается, она делит семиугольник на максимум на четыре части: до первого пересечения, между первым и вторым, между вторым и третьим, после третьего пересечения.

C. Два одинаково ориентированных квадрата пересекаются максимум в двух точках (если не совпадают). Это значит, что k–ый нарисованный квадрат добавляет на картинку не более $2(k-1)$ новых областей. Отсюда ответ на задачу — $2+2+4+\ldots+2\cdot 14 = 2+2\cdot 105 = 312$.

Изобразить 15 попарно пересекающихся квадратов несложно — достаточно взять один и 14 раз немного сдвинуть его по диагонали.

Задача 2. Шутка

A. Ответ «нет» в задаче–шутке смотрелся бы странно, поэтому в этом пункте подразумевается ответ «да»: из башни можно откачать воздух и сделать лестницу почти отвесной — тогда стул без ножек сможет двигаться вертикально вниз так же, как и его 30-ногий собрат, но ему не будет мешать сопротивление воздуха, наличествующее снаружи башни; в общем, он окажется быстрее.

B. Пусть x_A задач было придумано вчера, x_B — сегодня и x_C — завтра. Тогда из условия

$$\begin{cases} x_B = 1.5(x_A + x_C) \\ x_B = 3x_C \\ x_A = 4 \end{cases}$$

Осталось только решить эти уравнения. Из первых двух легко вывести, что $x_A = x_C$, тогда $x_B = 1.5 \cdot 8 = 12$.

C. Автомобиль не сможет доехать до Пекина, так как за любое конечное время после своего старта он проезжает не более чем $80 + 40 + 20 + \ldots = 160$ километров.

Задача 3. О, как мы далеки!

Смотреть 4 класс, задачу №5.

Задача 4. Простые, но такие сложные

A. Хотя бы одно из чисел p, $p+2$, $p+4$ должно делиться на 3 — это можно понять, рассмотрев всевозможные остатки при делении p на 3. Единственное простое число, делящееся на 3, — это 3.

$p+4$ не может быть равно трём, потому что тогда $p = -1$ — не простое. $p+2$ не может быть равно трём, потому что тогда $p = 1$ — не простое. Остаётся единственный ответ —

$$p = 3, \quad p+2 = 5, \quad p+4 = 7.$$

Все эти числа простые.

B. Пусть $n = p_1 \cdot p_2$. Тогда $n + 100 = (p_1 + 1)(p_2 + 1) = n + p_1 + p_2 + 1$. Таким образом, мы ищем простые числа p_1 и p_2, такие что $p_1 + p_2 = 99$. Сумма двух чисел нечётна — значит, одно из них обязательно должно быть чётным. Отсюда единственный ответ — $p_1 = 2$, $p_2 = 97$, так как 2 — единственное простое число.

C. Рассмотрим выключатель под номером k. Какие электрики переключат его? Очевидно, что те, номера которых являются делителями числа k. Изначально все выключатели были выключенными, поэтому включенными в конце останутся те, номера которых имеют нечётное число делителей. Известный факт заключается в том, что этому условию удовлетворяют только квадраты натуральных чисел.

Таким образом, включенными останутся выключатели с номерами–полными квадратами: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49.

Задача 5. Неизвестные цифры

A. Заметим, что в слове «Мизантроп» 9 различных букв; а также буква Х, встречаясь в этом ребусе, является уже десятой. При этом ни одна из уже перечисленных нами букв не может быть равна нулю — в одном случае произведение в правой части получится нулевым, в другом же в числе ХРОМОТА окажется ведущий ноль.

B. Между младшим и предпоследним разрядами в этом примере должен был случиться перенос разряда, так как в противном случае Е+Е=*9, что невозможно из соображений чётности.

Отсюда Е+Е+1 должно оканчиваться на 9. Значит, Е равно 4 или 9.

Если Е равно 9, то М+М=19, что невозможно (М≤9).

Если Е равно 4, то М+М=14, тогда М=7. Тогда посмотрим на букву Р: Р+Р оканчивается на 4.

Тогда либо Р равно либо 2, либо 7. Последний случай невозможен, так как тогда Р совпадает с М. Значит, остаётся ребус вида $2 \cdot К247 = Ж494$.

На значения букв К и Ж не влияют никакие другие части выражения, поэтому можно подбирать их отдельно, руководствуясь лишь тем, что $2 \cdot К = Ж$.

К не может быть равно 1, потому что тогда $Ж = 2$, а цифра 2 уже занята. Равно как К не может быть равно 2 и 4: цифра 4 тоже занята. К не может быть больше или равно 5, потому что тогда случится перенос через разряд. Поэтому остаётся единственный ответ:

$$\begin{array}{cccc} 3 & 2 & 4 & 7 \\ 3 & 2 & 4 & 7 \\ \hline 6 & 4 & 9 & 4 \end{array}$$

C. Пусть на доске были написаны числа $x_0 \ldots x_9$, $x_i = n + i$, n — какое-то натуральное.

Пусть стёрто число x_k. Тогда $2017 = 10n + 1 + \ldots + 9 - k$. 2017 имеет остаток 7 при делении на 10, значит, и левая часть тоже должна иметь остаток 7. $1 + \ldots + 9 = 45$, имеет остаток 5 — значит, k имеет остаток 8, и поэтому равно 8.

Значит, сумма десяти последовательных натуральных чисел равна 2025, $10n = 1980$, $n = 198$. Поэтому с доски стёрто число 206.

Задача 6. И пусть Бетховен услышит

A. Заметим, что клавиша с номером 45 находится ровно напротив клавиши с номером 1. Также заметим, что Лина нажимает симметричные клавиши, всё больше отдаляясь от первой: сначала первую справа, потом первую слева, потом вторую справа, потом вторую слева.

Таким образом каждая клавиша окажется нажатой ровно один раз, и клавиша номер 45 будет последней — то есть, нажатой на 88-ом шаге.

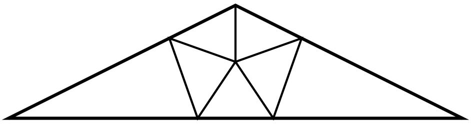
B. Заметим, что номера клавиш, на которых Лина поёт «ЛЯ», — это остатки степеней двойки (начиная с числа 2) при делении на 88. То есть, мы ищем наименьшую степень двойки, имеющую вид $88k+48$. Перебором можно установить, что это 4096. Отсюда на 4095 шаге Лина споёт «ЛЯ», нажимая на 48-ю клавишу.

C. За одну мелодию Лина охватывает $1+1+2+3+\ldots+100 = \frac{100\cdot 101}{2}+1 = 5051$ клавиш. Значит, за всю игру ей будет охвачено $1935 \cdot 5051$ клавиш, и нам нужно найти остаток этого числа при делении на 88, он и даст нам номер последней нажатой клавиши. Остаток числа 1935 равен -1, остаток числа 5051 — 35. Таким образом, последней нажатой клавишей будет $88-35=53$–я.

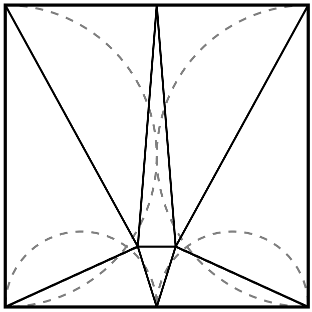
Задачи 6 класса

Задача 1. Разрезания и углы

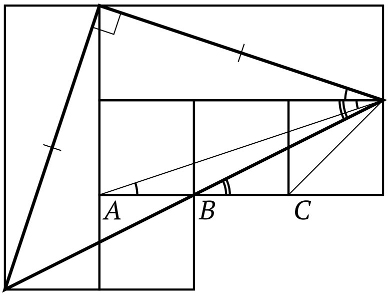
A. Повернём треугольник и разрежем — смотреть рисунок:



B. Будем пользоваться следующим соображением: если вершина треугольника лежит за границами круга, диаметром которого является противолежащая ей сторона, то угол в этой вершине острый.



C. Смотреть рисунок: отмеченные углы равны в силу построения и теоремы о накрест лежащих углах.



Проведём ещё несколько доволнительных построений — получившийся треугольник будет прямоугольным и равнобедренным, то есть угол, равный сумме A и B, по величине равен 45° и, соответственно, углу C.

Задача 2. Пока не пришёл лифтёр

A. Если первый общий этаж для мальчиков — 123-ий, то НОК $(n, m) = 123$ (так как первый общий этаж как раз и имеет номер, соответствующий наименьшему общему кратному). $123 = 3 \cdot 41$, поэтому n и m могут быть равным 1, 123 или 3, 41.

B. Без ограничения общности можно считать, что Витя находится на нулевом этаже, а Петя — на первом. Тогда Витин лифт перемещается только по этажам, номера которых делятся на $k+1$. Если $k = 0$, Петя остаётся на месте, и Витя, конечно, может к нему приехать.

Если же $k > 0$, то Витя не может приехать на первый этаж (1 не делится на $k+1$), поэтому если Петя просто будет оставаться на месте, он не встретится с Витей.

C. Заметим, что номер текущего этажа, на котором находится Витя, равен сумме со слагаемыми вида $\pm m$ и $\pm n$. Любая такая сумма делится на НОД (n, m), а единственный делитель единицы — это она сама. Поэтому НОД $(n, m) = 1$.

Задача 3. На плоскости

A. 35 квадратиков 1×1 должны формировать разность двух квадратов — это значит, что нам надо представить 35 в виде разности квадратов двух целых чисел. Единственный способ это сделать (это можно установить несложным перебором) —

$$35 = 18^2 - 17^2.$$

Поэтому единственный способ расположить квадраты согласно условию — вдоль двух сторон квадрата 18×18 уложить квадратики 1×1, а оставшееся место занять квадратом 17×17. Его площадь будет равна 289.

B. 12 заборов строятся в каком-то порядке, один за другим. Ни один, ни два забора ничего не отгораживают, как их ни поставь. Зато третий забор может, пересекая первый и второй, огородить одну область. И вообще — n–ый забор, пересекая все предыдущие, может отгородить $n - 2$ новых области. Таким образом, ответ на эту задачу — $1 + \ldots + 10 = 55$. Построить пример расстановки заборов, отгораживающей именно это количество областей, несложно.

C. Возьмём самую длинную сторону четырёхугольника $ABCD$ — пусть это сторона AB. Один из углов, прилежащих к ней, должен быть острым (не умаляя общности — угол DAB), иначе сторона CD будет длиннее AB. Рассмотрим сторону DA и вершину D.

Высота DH из точки D на стоону AB упадёт именно что на сторону AB, а не на её продолжение, так как иначе

$$|AD|^2 \underset{\text{Th. Пифагора}}{=} |AH|^2 + |DH|^2 \underset{\substack{AH\text{ — продол-}\\ \text{жение } AB}}{>} |AB|^2 + |DH|^2 > |AB|^2.$$

Откуда AD длиннее AB, что противоречит изначальному выбору стороны AB.

Задача 4. Неземное стихосложение

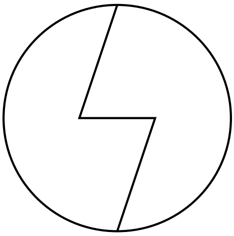
A. Поэт в своём стихотворении занимается расложением последовательных чисел в сумму простых, меньших данного числа (например, число 4 он не использовал, придумывая разложение для шести). Записываются простые числа в порядке убывания. Поэтому следующие три строчки будут иметь вид:

Два два два два.

Три три два два.

Пять три.

B.



C. Будем соединять знакомых поэтов белой ниткой, а незнакомых — чёрной ниткой. Рассмотрим поэта Васю — к нему привязаны 2016 ниток, значит среди них уж точно есть три нитки одного цвета. Пусть это белые нитки. Рассмотрим поэтов, находящихся на других концах этих ниток.

Если какие-то два из этих трёх по’тов знакомы, то образуется белый треугольник из них и поэта Васи. Если же они все попарно незнакомы друг с другом — то нам не хуже, это тоже вариант из условия задачи.

Задача 5. Простые, но такие сложные

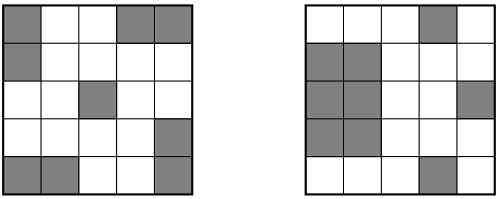
Смотреть 5 класс, задачу №4.

Задача 6. Шутка

Смотреть 5 класс, задачу №2.

Задача 7. Многонациональные захватчики

A. Государства могли захватить следующие клетки:

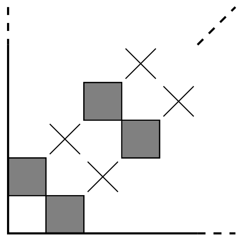


Оказывается, эти два способа, с точностью до поворотов и отражений, исчерпывают все возможные стратегии захвата, удовлетворяющие условию.

B. Пусть 99 государств захватили себе первые 99 клеток верхнего ряда таблицы, а сотое государство — вторую сверху клетку оставшегося столбца таблицы, где ещё не было ни одного государства.

Единственное государство, которое могло бы заселить оставшуюся клетку верхнего ряда, чтобы не нарушить условие задачи, — сотое. Однако и оно не может там обосноваться, потому что тогда в соответствующем столбце за ним будет целых две клетки.

C. При любом k захват клеток, описанный в условии, невозможен.



Будем смотреть на клетки, соседние с главной диагональю. Первые две из них должны быть захвачены, чтобы обеспечить двух захваченных соседей угловой клетки (у которой всего два соседа). Следующие две не могут быть захвачены, так как у второй клетки на диагонали уже есть два захваченных соседа. Так как размеры таблицы нечётны, получаем, что две соседних клетки противоположного угла таблицы должны быть не захвачены — и это будет нарушать условие задачи.

Задача 8. Все числа состоят из цифр

A. Запишем условие из задачи: $\overline{xy} = 3 \cdot \overline{yx}$. Это значит то же, что

$$10x + y = 30y + 3x;$$
$$7x = 29y.$$

И правая, и левая части равенства должны делиться на 29. Это значит, что x делится на 29 — единственная цифра, кратная, 29, это ноль. Разумеется, при $x = 0$ решений у данной задачи нет — значит, нет и вообще.

B. Последовательно будем интерпретировать условие задачи. То, что искомое число не делится на 10, значит, что $Z \neq 0$. То, что число YZ меньше 40, значит, что Y равен 0, 1, 2 или 3. Единственное двузначное число, являющееся квадратом и оканчивающееся на цифры 0–3 — это 81. Таким образом, $X = 8$, $Y = 1$.

Наконец, для цифры Z остаётся два возможных варианта, чтобы число XYZ делилось на 9 — 0 и 9. Так как мы с самого начала поняли, что $Z \neq 0$, получается $Z = 9$.

Ответ: искомое число — 819.

C. Попробуем посчитать сумму цифр числа n — по признаку делимости на 9, её остаток будет таким же, как у самого числа n. 19 разрядов из 61 занимают двойки — если отбросить эти 19 разрядов, двоек и четвёрок будет поровну. Пусть четвёрки в числе занимают t разрядов. Тогда сумма цифр числа n равна

$$19 \cdot 2 + 4 \cdot t + 2 \cdot t + 3 \cdot (61 - 19 - 2t) =$$

$$= 38 + 6t + 3 \cdot 42 - 6t = 38 + 3 \cdot 42 = 164.$$

Остаток при делении 164 на 9 равен 2 — значит, и число n сравнимо с 2 по модулю 9.

Задачи 7 класса

Задача 1. Переводчики с немецкого

A. Разложим на простые множители числа 116 и 217: $116 = 2^2 \cdot 29$, $217 = 7 \cdot 31$. Эти числа взаимно просты, то есть, у них единственный общий множитель — единица. Поэтому переводчику надо перевести 116 брошюр и 217 заметок.

B. Зафиксируем, сколько текстов какой тематики попросил себе каждый из переводчиков:

	Журнал.	Худож.	Техн.
Переводчик 1	r_1	f_1	t_1
Переводчик 2	r_2	f_2	t_2
Переводчик 3	r_3	f_3	t_3

Условие задачи утверждает, что сумма чисел в каждой строке и в каждом столбце равна 16. При таком условии распределить тексты совсем просто: упорядочим по отдельности все художественные, все технические, все журналистские тексты (по дате публикации или даже лексикографически) и выдадим первому переводчику первые r_1 журналистских, f_1 художественных и t_1 технических.

Второму переводчику выдадим соответственно первые r_2, f_2, t_2 текстов из оставшихся. После этого текстов останется ровно столько, сколько указал в своих запросах третий переводчик.

C. Текст длины 1 бьётся одним способом, текст длины 2 — двумя способами. Теперь рассмотрим последнее слово в тексте из n слов — оно может быть либо самостоятельным, либо частью сочетания. В первом случае нам останется побить на слова и сочетания текст длины $n-1$, во втором — текст длины $n-2$.

Таким образом, ответ на задачу для n равен сумме ответов для $n-1$ и $n-2$. Этому условию и полученным нами начальным данным удовлетворяет последовательность чисел Фибоначчи. Поэтому ответ — $\mathcal{F}_n$.

Задача 2. Гонки улиток

A. Улитки доползут до верха одновременно — каждая за три дня.

B. Покрасим клетки листа в белый и чёрный, как на шахматной доске. Чёрных и белых клеток будет разное количество (всё-таки площадь листа нечётна), и при этом улитка переползает с белой клетки на чёрную, а с чёрной — на белую. Поэтому улиткам, стартовавшим в клетках цвета, которого больше, не хватит клеток цвета, которого меньше.

C. Пусть более быстрая улитка — верхняя. Тогда план её действий таков: спуститься вертикально вниз в точку, где сидела другая улитка, а затем догнать её по её же пути.

Пусть более быстрая улитка — нижняя. План её действий — поползти перпендикулярно от стены. Кратчайший путь от начального положения верхней улитки до точки, где находится нижняя улитка, всегда будет длиннее расстояния, пройденного нижней улиткой — поэтому более медленная верхняя не сможет её догнать.

Задача 3. Участники «Математики НОН-СТОП»

A. Побьём парты на пары стоящих друг за другом, по три пары в ряду. Получится девять пар, а школьников пока всего восемь. Значит, одна пара парт полностью свободна, и её можно утащить.

Если же школьников 9, то посадим по школьнику за 1, 3 и 5 парты каждого ряда — и ничего нельзя будет унести.

B. Пусть участников всего N. Если среди участников есть один, не знакомый ни с кем, то не может быть участника, знакомого со всеми. Если же есть участник, который со всеми знаком, то каждый знаком хоть с кем-то.

Таким образом, либо все участники знакомы не более чем с $(N-2)$ людьми каждый, либо все знакомы не менее чем с одним, но не более чем с $N-1$ людьми каждый. В любом случае на N участников получается $(N-1)$ вариантов, поэтому найдутся двое с одинаковым числом знакомых.

C. Возьмём шесть участников, нам хватит. Будем соединять красной линией знакомых, а синей линией — незнакомых. Все участники окажутся попарно соединены.

Из каждого участника выходит по пять линий, значит как минимум три из них имеют один цвет. Пусть из данного участника выходит три красных линии — посмотрим на людей, в которых они приходят. Если между ними есть хоть одна красная линия, получается красный треугольник с участником, выбранным нами изначально. Если же между ними все линии синие, то это даёт нам синий треугольник, то есть они попарно незнакомы. Что и требовалось.

Задача 4. Загадывание чисел

A. Пусть оказалось, что $a+b$ делится на b, где a и b — числа, загаданные мальчиками. Тогда

$$a + b = k \cdot b,$$

и, соответственно

$$a = (k-1) \cdot b.$$

Таким образом, a делится на b — и наибольший общий делитель этих двух чисел равен b.

B. Ответ на первый вопрос — да, конечно: 3 и 20 — взаимно простые числа, а их остатки от деления на 17 совпадают и, разумеется, не взаимно просты.

Чтобы показать, что числа a и b из второго вопроса пункта обязаны быть взаимно простыми, рассмотрим число

$$\max(a, b) + 1.$$

Остатки при делении чисел a и b на него равны им самим и по условию взаимно просты — значит, a и b взаимно просты.

C. Наша задача — решить уравненение

$$(x + 3)(x + 4)(x + 5)(x + 6) = 288.$$

Рассмотрим произведения пары крайних множителей и пары средних множителей:

$$(x^2 + 9x + 18)(x^2 + 9x + 20) = 288.$$

Иными, словами,

$$Y(Y + 2) = 288.$$

Разложим число 288 на множители: $288 = 2^5 \cdot 3^2$. Заметим, что есть ровно два способа представить 288 в виде произведения двух чисел, различающихся на 2: $16 \cdot 18$ и $(-18) \cdot (-16)$.

Что же делать Лёлеку? В каждом из этих двух случаев, чтобы найти x, нужно решить квадратное уравнение. Это можно сделать, например, представив -18 в виде произведения двух чисел, различающихся на 3 — одно из них и будет $x + 3$.

Мы надеемся, что ни то, ни другое не представляет для Лёлека никакого труда.

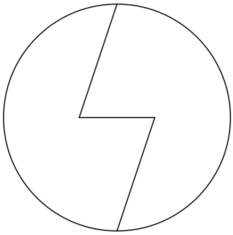
Задача 5. Многонациональные захватчики

Смотреть 6 класс, задачу №7.

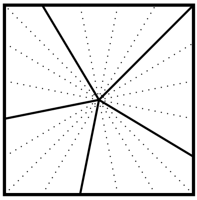
Задача 6. Порезать торт на День рождения

A. Проведём три параллельных разреза через торт. Если они вместе с какими тремя разрезами образуют замкнутую ломаную, то есть звено, идущее от одного крайнего разреза к другому — то есть, пересекающее средний разрез. Таким образом, построить несамопересекающуюся ломаную нельзя.

B.



C. Задача сводится к задаче разрезания квадрата на пять фигур одинаковой площади и с одинаковой длиной пересечения с внешними сторонами квадрата. Для этого разделим каждую сторону квадрата на пять равных по длине отрезков и соединим концы этих отрезков с центром квадрата. Получим 20 треугольников одинаковой площади с одинаковой длиной основания. Искомые фигуры получим, объединяя соседние треугольники по четыре штуки.



Разрезание куба строится из разрезания квадрата просто: достаточно разрезать куб вертикально по всей его толщине в соответствии с рисунком выше.

Задача 7. Взвешивания

A. Пусть картофель весит P граммов, а кот — K граммов. Пусть погрешность составляет M граммов.

Тогда $P + M = 1000$, $K + M = 4400$, $P + K + M = 5000$. Отсюда $P = 600$ (вычтем из третьего равенства второе), $K = 4000$ (вычтем из третьего первое), $M = 400$.

B. Поделим 729 монет на три равных кучки. Положим две из них на весы — если одна из них окажется легче другой, то в ней находится фальшивая монета. Если они равны по весу, то фальшивая монета находится в оставшейся трети.

Таким образом, за один ход мы умеем уменьшать количество «подозреваемых» монет втрое. $729 = 3^6$, поэтому через шесть ходов останется одна монета, которая может быть фальшивой — она и окажется фальшивой.

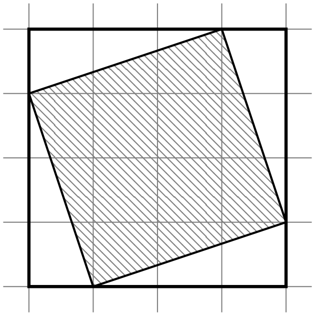
C. Выложим на весы одну монету из первого мешка, две монеты из второго мешка, ... 15 монет из 15-го мешка. Если бы все монеты были настоящими, их суммарная масса была бы равна $20 \cdot (1 + \ldots + 15)$ граммов. По факту мы получим бóльшую массу — она будет отличаться от приведённой нами ранее на $5 \cdot$ (№ мешка с фальшивыми монетами) граммов. Так мы и выясним, где фальшивки.

Задача 8. Шутка

Смотреть 5 класс, задачу №2.

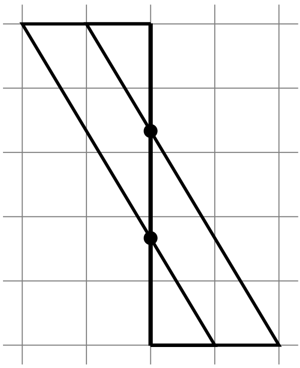
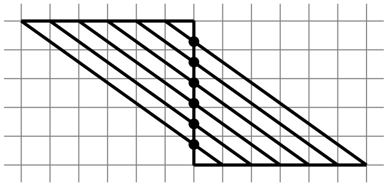
Задача 9. Вовочка и клетчатая тетрадь

A. Заметим, что $10^2 + 30^2 = 1000$. То есть, прямоугольный треугольник с катетами 10 мм, 30 мм (который легко нарисовать по клеткам) имеет гипотенузу $\sqrt{1000}$ мм^2.



Расположив четыре таких треугольника, как показано на рисунке, получим квадрат со стороной $\sqrt{1000}$ мм^2, площадь которого равна 1000 мм^2.

B. Воспользуемся тем фактом, что расстояние между сторонами параллелограмма постоянно, и получим требуемое деление — смотреть рисунок.

C. Аналогично пункту B данной задачи мы умеем делить на произвольное количество частей любой отрезок, начало и конец которого — узлы сетки. Также $80 \cdot 25 = 2000$ — поэтому, если мы научимся строить квадрат площадью 2000 мм^2, мы сможем поделить каждую из его сторон на пять частей и получить 25 квадратов нужной нам площади в 80 мм^2.

Наконец, $2000 = 20^2 + 40^2$; далее аналогично пункту A.

Задача 10. Игра

A. Это игра–шутка: значение суммы не зависит от расстановки в ней скобок — сумма в любом случае будет равна 2017, то есть нечётна. Отсюда победит первый игрок.

B. У первого игрока есть выигрышная стратегия. Первым ходом он должен переложить 3 камня из первой кучки во вторую. Затем он должен реагировать на ходы второго игрока следующим образом:

Если второй перекладывает x камней из первой кучки во вторую, то первый должен переложить $5 - x$ камней также из первой кучки во вторую.

Если же второй перекладывает камни из второй кучки в первую, то первый должен вернуть эти камни обратно во вторую кучку.

Заметим, что после хода первого игрока количество камней во второй кучке всегда имеет остаток 3 от деления на 5, а после хода второго игрока количество камней во второй кучке никогда не имеет такого остатка. Это значит, что второй игрок не может переложить все камни во вторую кучку, вынудив первого сделать ход, при котором ему придётся выкидывать камни из мешка.

То есть, (а) первый всегда может сделать ход, соответствующей придуманной нами стратегии, (б) выкидыванием камней из мешка занимается исключительно второй игрок. Он и проиграет.

C. Начнём со случая $n = 13$. Если первый игрок взял k камней, то второй может взять $13 - k$ и победить. Если n не превосходит 14 и не равно 13, то все камни может взять за один ход первый игрок.

Для $n \geq 15$ рассмотрим два случая:

n делится на 13. Заметим, что после любого хода первого игрока оставшееся количество камней не будет делиться на 13. Зато второй в случае любого хода первого сможет сделать так, что после его хода количество камней, оставшихся в кучке, будет вновь делиться на 13. Для этого на взятие k камней, $1 \leq k \leq 12$, нужно ответить взятием $13-k$ камней, а на взятие 14 камней — 12 камнями. Ноль делится на 13 — кучка может остаться пустой только после хода второго игрока.

n не делится на 13. Тогда выигрышная стратегия есть у первого игрока. Своим первым ходом он берёт от 1 до 12 камней так, чтобы осталось количество, кратное 13 — а затем играет так, как играл бы второй игрок в предыдущем пункте.

Ответ: если n делится на 13, выигрывает второй игрок; иначе выигрывает первый.

Задачи 8 класса

Задача 1. Неизвестные цифры

Смотреть 5 класс, задачу №5.

Задача 2. Искусное владение числами

A. Предъявим расстановку:

8	3	4
1	5	9
6	7	2

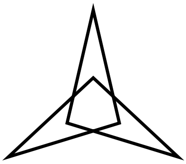
B. 15317.

C. Давайте искать число, делящееся на 144: это число *несильно, но достаточно* больше 95, и делимость на него очень просто проверить: $144 = 16 \cdot 9$: делимость на 16 зависит от последних четырёх цифр, а делимость на 9 — от суммы цифр в целом, которую мы как раз делаем равной 144.

Положим последние четыре цифры равными 3232 — нам останется распределить 134 на 91 разряд. Для этого воспользуемся 43 двойками и 48 единицами.

Задача 3. Плавучий зоопарк

A. Итак, мы знаем, что кобра спит, укусив себя за хвост и изогнувшись замкнутой ломаной. Например, её положение может выглядеть так:



B. Конечно же, минимальное количество углов у пересечения — 3. Если мы найдём максимальное количество и приведём пример, когда оно достигается, то все промежуточные количества углов будет несложно получить.

Покажем, что каждая сторона шестиугольника даёт не более четырёх углов будущему пересечению. Если концы этой стороны оба находятся снаружи четырёхугольника, то эта сторона пересекает не более чем все 4 стороны четырёхугольника — отсюда берутся 4 угла.

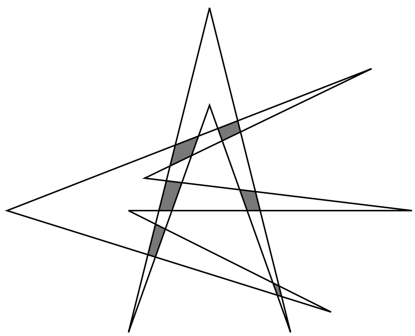
Если один из концов стороны находится снаружи четырёхугольника, то он сам является углом пересечения наших фигур — но, с другой стороны, в этом случае имеется сторона четырёхугольника, которую рассматриваемая нами сторона шестиугольника не пересечёт. В самом деле, продлим сторону шестиугольника от лежащего внутри конца до пересечения с границей четырёхугольника — это укажет нам на сторону, которая не пересекает рассматриваемую нами.

Наконец, когда оба конца стороны шестиугольника лежат внутри четырёхугольника, имеется не более двух пересечений этой стороны с границей четырёхугольника, но зато оба конца являются углами пересечения.

Таким образом, верхняя оценка на количество углов —

$$24 = 6 \cdot 4.$$

Приведём пример пересечения, сформированного из 6 четырёхугольников:



C. Данная задача является обобщением пункта B. Из совершенно аналогичных соображений получаем ответ — от 3 до $m \cdot n$ углов.

Задача 4. Вовочка и клетчатая тетрадь

Смотреть 7 класс, задачу №9.

Задача 5. Загадывание чисел

Смотреть 7 класс, задачу №4.

Задача 6. Пути автобуса неисповедимы

A. Описанная в условии задачи ситуация возможна при любом количестве городов — достаточно соединить все города дорогами по кругу, «хороводом», и 4 марта отправить автобус из каждого города в следующий.

B. Автобусов, выехавших из городов на П (и, соответственно, приехавших в города на К) больше, чем собственно городов на К. В силу принципа Дирихле, в каком-то городе на К будет больше одного автобуса.

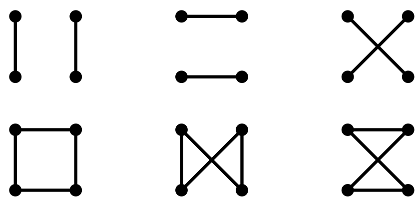
C. Рассмотрим какой-то из городов, назовём его A. Из него 4 марта выехал автобус — обозначим город его прибытия через B. Автобус из B, в свою очередь, мог поехать либо в A, либо куда-то ещё.

Если он поехал обратно в A, то у двух других городов нет иного выхода, кроме как тоже «обменяться» своими автобусами. Поэтому дороги могут быть расположены, например, так, чтобы допускать разбиение городов на две пары, города в которых соединены дорогой.

Если же автобус из B поехал дальше, в город C, то автобус из C не мог отправиться ни в A (тогда автобусу в четвёртом городе придётся сидеть на месте, что запрещено), ни куда-либо ещё (и в B, и в C уже есть прибывшие автобусы).

Таким образом, другой способ расположения дорог — такой, при котором есть цикл из четырёх дорог, проходящий через все города.

Перечислим способы разбить города на две пары и способы провести циклы через четыре города:



Получилось шесть способов — такие соединения дорогами нам подходят. Также подойдёт любая ситуация, которая «надстроена» над перечисленными нами: то есть, взяты все дороги и добавлены какие-то ещё.

Задача 7. Переводчики с немецкого

Смотреть 7 класс, задачу №1.

Задача 8. Примечательный учебный день

A. К высоте m метров дерево подходит, имея $(m-1)!$ ветвей. Соответственно, ответ на задачу — 11! веток.

B. Очевидно, что больше 13 рассадок не бывает: мальчик каждый день обязан сидеть с новой девочкой. 13 же рассадок реализовать просто: нужно взять какую-то рассадку, и каждый день сдвигать девочек относительно мальчиков «по кругу».

C. Давайте решим задачу в общем случае: есть класс из $4k+2$ человек — придумать $4k+1$ способов рассадить их за парты так, чтобы одна пара не появлялась в двух разных рассадках (больше нельзя по очевидной причине — каждый человек может сидеть не более чем с $4k+1$ другими).

Будем изображать i–ую рассадку, ставя число i в клетки таблицы $(4k+2)\times(4k+2)$, из которой выкинута центральная диагональ. Наша задача тогда — расставить числа от 1 до $4k+1$ в клетки таблицы, так чтобы (а) каждое число было написано ровно $2k$ раз (б) встречалось в каждом столбце и каждой строке ровно по одному разу (в) его вхождения в таблицу были бы симметричны относительно центральной диагонали. Построим расстановку.

В первую строку таблицы впишем числа от 1 до $4k+1$ справа налево, а в первый столбец — снизу вверх. Заполняя i-ую строку, $1 < i < 4k-1$, поступим так: зарезервируем самую правую клетку строки, не будем её трогать; в остальные клетки впишем числа от 1 до $4k+1$, сдвинув их на одну клетку влево относительно предыдущей строки. После этого в самую правую клетку запишем число, которое должно было стоять на центральной диагонали. Последнюю строку получим отражением относительно центральной диагонали уже сформированного последнего столбца.

Приведём пример такой таблицы для $k=2$ (в задаче было $k=6$):

	9	8	7	6	5	4	3	2	1
9		7	6	5	4	3	2	1	8
8	7		5	4	3	2	1	9	6
7	6	5		3	2	1	9	8	4
6	5	4	3		1	9	8	7	2
5	4	3	2	1		8	7	6	9
4	3	2	1	9	8		6	5	7
3	2	1	9	8	7	6		4	5
2	1	9	8	7	6	5	4		3
1	8	6	4	2	9	7	5	3	

Несложно убедиться в том, что она обладает нужными нам свойствами.

Задача 9. О числах маленьких и больших

A. Без ограничения общности будем считать, что $b \geq a \geq 2$. Тогда

$$a + b \overset{(1)}{\leq} 2 \cdot \max(a, b) \overset{(2)}{\leq} \min(a, b) \cdot \max(a, b) = a \cdot b.$$

Теперь, если оба числа a, b строго больше двух, то неравенство (2) становится строгим, а если только одно — то неравенство (1) становится строгим. Что и требовалось.

B. (а): Пусть a — первая цифра числа X.

Чтобы найти число X, которое при удалении первой цифры станет в 57 раз меньше, нужно придумать такую цифру a, что

$$a \cdot 10^n = 56 \cdot (X - a \cdot 10^n).$$

Для этого, в частности, число $a00\ldots0$ должно делиться на 56. Число 70000 отлично подойдёт. Получаем ответ:

$$1250 \cdot 57 = 71250.$$

(б): Чтобы найти ответ в этом пункте, нужно подобрать такую цифру a, что $a00\ldots0$ делится на 57. Пусть такая есть: $57 \mid a \cdot 10^k$. 10 взаимно просто с 57, поэтому тогда $57 \mid a \cdot 10^{k-1}$. Продолжая уменьшать степень десятки, пользуясь этим соображением, получим $57 \mid a$. Но ненулевая цифра не может делится на 57 — получаем противоречие.

C. Отдельно рассмотрим случай $n = 4$: $4 = 2 \cdot 2 = 2 + 2$. Если же составное n строго больше четырёх, что его можно представить в виде $a \cdot b$, $a \geq 2$, $b > 2$.

Из пункта А мы знаем, что тогда $a + b < a \cdot b = n$. Тогда можно взять $n - a - b$ единиц, и получить

$$a + b + 1 + \ldots + 1 = a \cdot b \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1 = n.$$

Задача 10. Игра

Смотреть 7 класс, задачу №10.

Задача 11. Возводим в степень

A. Подойдёт, например, 423 (делится на 9), 424 (делится на 4), 425 (делится на 25).

B. Будем искать это число в виде $2^m 3^n 5^k$: по условию, эти множители должны в него входить, а лишнего нам не надо. Ясно следующее:

m делится на 3 и на 5, но нечётно;
n делится на 2 и на 5, но имеет остаток 1 по модулю 3;
k делится на 2 и на 3, но имеет остаток 1 по модулю 5.

Найдём наименьшие подходящие m, n и k — это 15, 10 и 6. Ответ: $2^{15} \cdot 3^{10} \cdot 5^6$.

C. Пусть нам надо придумать цепочку длины n. Возьмём n произвольных простых чисел $p_1 \ldots p_n$ — их квадраты являются попарно взаимно простыми.

В силу Китайской теоремы об остатках найдётся достаточно большое число N, сравнимое с i по модулю p_i^2, $1 \leq i \leq n$. Искомой цепочкой будет $N - n \ldots N - 1$.

Задача 12. Шутка

Смотреть 5 класс, задачу №2.

Задачи профильного варианта 7 класса

Задача 1. Без нулей

1. Предъявим перевод:

$$\begin{array}{lll} 110 \longrightarrow \text{XX} & \quad & 1\text{X}17 \longrightarrow 2017 \\ 2202 \longrightarrow 21\text{X}2 & & \text{XXXX} \longrightarrow 11110 \\ 500000 \longrightarrow 49999\text{X} & & 512 \longrightarrow 512 \end{array}$$

2. Значение числа $\overline{c_n c_{n-1} \ldots c_0}$ восстанавливается по его записи в модифицированной системе счисления так же, как по десятичной записи: $\sum c_k 10^k$, где X интерпретируется как 10.

Пусть $N = \overline{c_n c_{n-1} \ldots c_0} = \overline{s_n s_{n-1} \ldots s_0}$. Давайте формально вычтем эти два выражения друг из друга. Получим

$$0 = \sum_{k=0}^{n} (c_k - s_k) \cdot 10^k, \qquad -9 \leq c_k - s_k \leq 9.$$

Пусть старший разряд, в котором различаются записи числа N, имеет номер M. Покажем, что какими бы ни были более младшие разряды, различия в них не «перебьют» разницы, появившейся в M–ом разряде.

$$\begin{aligned} &10^M (c_M - s_M) = - \sum_{0 \leq k < M} (c_k - s_k) \cdot 10^k \\ &10^M \leq |c_M - s_M| \cdot 10^M \leq \sum_{0 \leq k < M} |c_k - s_k| \cdot 10^k \leq \\ &\leq 9 \cdot (1 + 10 + \ldots + 10^{M-1}) = 10^M - 1. \end{aligned}$$

Получили противоречие.

3. Перевести из модифицированной в десятичную совсем просто: надо все разряды, в которых стоят X, заменить на нули — и сложить получившееся число в столбик с числом, которое состоит в основном из нулей, а единицы стоят в разрядах, предшествующих тем, где в исходном числе стояли X:

$$9\mathrm{XX}7 = \begin{array}{r} 9\ 0\ 0\ 7 \\ 1\ 1\ 0\ 0 \\ \hline 1\ 0\ 1\ 0\ 7 \end{array}$$

Для перевода из десятичной в модифицированную будем пользоваться тем соображением, что

$$\boxed{k}000\ldots00 = \boxed{k-1}999\ldots9\mathrm{X}.$$

Будем «читать» число справа налево и заменять блоки нулей, согласно установленному нами правилу:

$$10100560075|$$

$$101005600|75$$

$$1010055|9X75$$

При этом слева от нас могут появляться новые нули, но справа нулей точно не остаётся:

$$10100|559X75$$

$$100|9X559X75$$

Наконец, если первая цифра в числе — ноль, то от неё просто избавимся, уменьшив количество разрядов:

$$|9X9X559X75$$

4. Запись X, несомненно, короче, чем 10 — но почему запись в модифицированной системе счисления не бывает длиннее?

С одной стороны, допустимые вклады каждого разряда в число стали не меньше, так что надобности в большем количестве разрядов просто неоткуда взяться. С другой стороны, у нас есть процедура построения записи и доказательство её единственности — заметим, что мы нигде не изменяем количество разрядов в числе, разве что в самом конце, избавляясь от ведущего нуля.

5. Идея за сложением и умножением в столбик, несомненно, будет стоять всё та же; различия будут заключаться в некоторых технических деталях:

цифра $+ \mathrm{X} =$ *цифра* и перенос единицы в следующий разряд;

перенос $+ \mathrm{X} =$ *перенос* и перенос единицы в следующий разряд;

$5 + 5 = \mathrm{X}$, без переноса в следующий разряд;

$\mathrm{X} + \mathrm{X} = \mathrm{X}$ и перенос единицы в следующий разряд;

перенос$+\mathrm{X}+\mathrm{X} =$ *перенос* и перенос двойки в следующий разряд;

цифра $\cdot \mathrm{X} = \mathrm{X}$ и перенос (*цифра* $- 1$) в следующий разряд.

6. Можно, например, домножать на -1 только старший разряд, записывая, например, знакомое нам $-15949 = -20000+4501 = -2\,44X1$. Тогда ноль будет записываться как $-1\,X$.

7. Признак делимости на степени двойки будет таким же, как в десятичной системе счисления: всё потому, что число, в котором отбросили последние k разрядов, будет делиться на 10^k, а, значит, и на 2^k.

Признак делимости на степени пятёрки аналогичен предыдущему.

Признак делимости на 3 и 9 — число сравнимо по модулю 3 (9) со своей суммой цифр — по-прежнему работает:

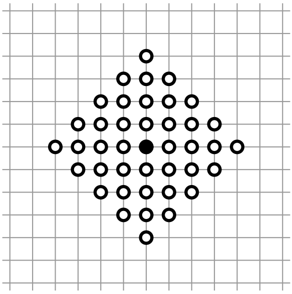
$$\overline{c_n c_{n-1} \ldots c_0} = \sum c_k 10^k \equiv \sum c_k \pmod 3.$$

Признак делимости на 11 — число сравнимо по модулю 11 со своей знакочередующейся суммой цифр — также остаётся тем же:

$$\overline{c_n c_{n-1} \ldots c_0} = \sum c_k 10^k \equiv \sum c_k (-1)^k \pmod{11}.$$

Задача 2. Дорога до метро

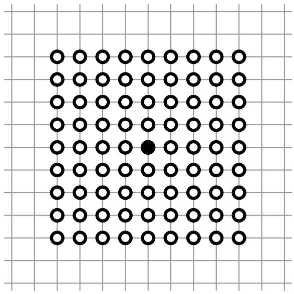
1. Нас интересуют точки, сумма смещений которых по горизонтали и по вертикали относительно выбранного узла не превосходит 4. Множество этих точек выглядит так:



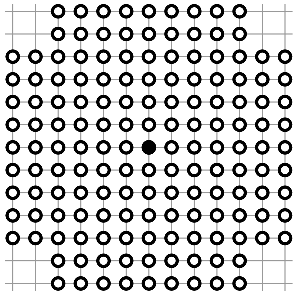
2. Если определять длину пути как максимум из смещений, то в 4–окрестности будут лежать точки, каждая координата которых отличается от соответствующей координаты выбранной не более чем на 4.

Если же определять её как минимум, то в окрестность попадут точки, хотя бы одна из координат которых отличается от координаты исходной не более чем на 4 — получится крест, лучи которого продолжаются бесконечно далеко по горизонтали и вертикали.

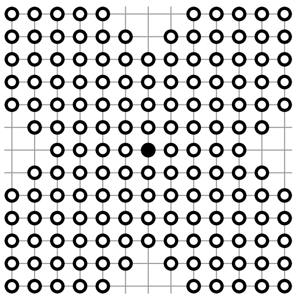
Максимум:



Минимум:



Наконец, если длина пути определена как модуль разности смещений, то в 4–окрестность попадут точки, лежащие на расстоянии не более четырёх от двух диагоналей, проходящих через выбранный узел:



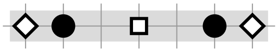
3. Заметим, что длина кратчайшего пути между двумя точками в классическом смысле равна сумме его смещений по горизонтали и вертикали, так как кратчайший путь использует только одно из двух вертикальных и одно из двух горизонтальных направлений.

Значит, путь «классической» длины, не превосходящей n, связывает два узла из сетки тогда и только тогда, когда между этими узлами существует путь длины «в смысле первого пункта», не превосходящей n. Что и требовалось.

4. Всякий кратчайший путь из A в B будет использовать ровно $m + n$ рёбер, из которых ровно n будут проходиться в направлении сверху вниз, а остальные m — слева направо. Значит, для построения кратчайшего пути нам нужно выбрать те n рёбер из имеющихся $m+n$, которые мы будем проходить сверху вниз. Это можно сделать

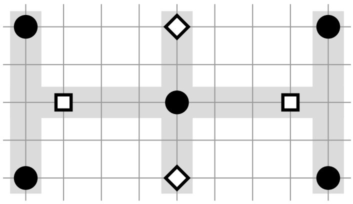
$$C_{m+n}^{n} = C_{m+n}^{m} \text{ способами.}$$

5. Пусть город состоит из шести узлов, изображённых ниже; станции метро отмечены чёрными кружками. Тогда максимальное кратчайшее расстояние (равное 2) достигается в узле, отмеченном квадратом (для остальных узлов есть станция метро, находящаяся не более чем в одном шаге от них). А максимальная сумма расстояний (равная 6) достигается в узлах, отмеченных ромбиками: в остальных узлах эта сумма равна 4 или 5.



6. Среднее расстояние до станций получается из суммы всех расстояний делением на количество станций — значит, максимума они достигают одновременно.

7.



Рассмотрим город, изображённый на рисунке. Кратчайшее расстояние достигает своего максимума, равного 3, в узлах, отмеченных квадратами. Максимальное наибольшее расстояние, равное 12, достигается в четырёх узлах по краям города, где расположены станции.

Наконец, максимальная сумма расстояний, равная 34, достигается в узлах, отмеченных ромбиками: для того, чтобы дойти от них до станций метро, нужно всякий раз проходить по «отросткам», в конце которых расположены ромбики, что добавляет дополнительные 10 к сумме расстояний до станций.

Задачи профильного варианта 8 класса

Задача 1. Через тернии к звёздам

1. Кратчайший путь между A и C проходит либо через B, либо не затрагивая её. В первом случае $d(A,B) + d(B,C) = d(A,C)$, во втором случае $d(A,B)+d(B,C) \leq d(A,C)$, потому что кратчайший путь между A и C, проходящий через B, не может быть короче пути, кратчайшего вообще.

2. Наибольшее возможное расстояние между вершинами n–угольника равно $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, все значения расстояния от 0 до этого числа достигаются. На расстоянии от данной вершины, строго меньшем, чем $\frac{n}{2}$, всегда находятся ровно две других.

Если n чётное, то есть одна вершина, находящаяся от данной на расстоянии $\frac{n}{2}$, она же наиболее удалённая. Если n нечётное, то наиболее удалены от данной две вершины, находящиеся на расстоянии $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ от неё — справа и слева.

3. Пусть все стороны многоугольника, кроме одной, имеют «вес» 1, а оставшаяся — «вес» 2. Расстояние между вершинами будем считать как сумму весов сторон, по которым проходит кратчайший путь между ними. Для такого расстояния даже выполнено неравенство треугольника, а также оно зависит от выбора «тяжёлой» стороны — то есть, будет меняться при вращении многоугольника.

Определим

$$\delta(A,B) = \begin{cases} 0, & A = B; \\ 1, & A \neq B \end{cases}$$

Для этого расстояния также выполнено неравенство треугольника, и оно, очевидно, не получается из взятого в условии задачи умножением на число, потому что расстояния между любыми двумя не равными вершинами одинаково.

4. Докажем, что (n,k)–звезда состоит из одной ломаной $\Longleftrightarrow$ числа n и k взаимно просты. Для удобства пронумеруем вершины n-угольника числами от 0 до $n-1$ по часовой стрелке. Заметим, что расстояние между вершинами под номерами a и b равно k тогда и только тогда, когда

$$a + k \equiv b \pmod{n} \quad \text{или} \quad b + k \equiv a \pmod{n}.$$

$\boxed{\Longrightarrow}$ Пусть одна ломаная соединяет все вершины правильного n–угольника. В этой ломаной обязательно есть ребро, соединяющее вершины под номерами 0 и k. Ребро, следующее за этим, соединяет вершины под номерами k и $2k \bmod n$. Следующее за ним идёт в вершину номер $3k \bmod n$, и так далее.

Что представляет из себя, например, число $3k \bmod n$? Это, на самом деле, разность $3k - n - \ldots - n$.

Допустим противное — пусть НОД чисел n и k не равен единице. Тогда все числа вида $i \cdot k \bmod n$ будут делиться на этот НОД. Это значит, что последовательность рёбер, которую мы начали, выходя из нулевой вершины, не посетит вершину № 1. Противоречие.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Пусть НОД $(n, k) = 1$, но ломаная, проходящая через нулевую вершину, не покрывает всех вершин многоугольника. Тогда среди чисел $0 \cdot k$, $1 \cdot k$, $\ldots$, $(n-1) \cdot k$ (это номера вершин, через которые проходит ломаная) в силу принципа Дирихле есть два сравнимых по модулю n (соответствующих одной вершине многоугольника).

$$\begin{aligned}
&a_1 \cdot k - a_2 \cdot k \text{ делится на } n, \quad |a_1 - a_2| < n;\\
&(a_1 - a_2) \cdot k \text{ делится на } n;\\
&\text{(}k\text{ взаимно просто с }n\text{)}\\
&a_1 - a_2 \text{ делится на } n \;\Rightarrow\; a_1 - a_2 = 0.
\end{aligned}$$

Получили противоречие: числа $a_1 k$ и $a_2 k$ не могли оказаться различными.

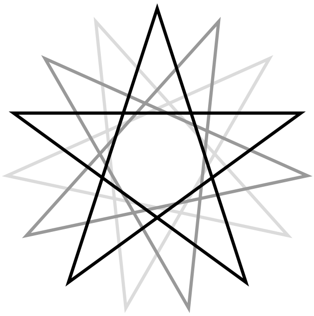
Доказав это утверждение, мы можем запросто ответить на вопрос задачи: звёзд, состоящих из одной ломаной, ровно столько, сколько чисел $1 \leq k < n$, взаимно простых с n — то есть, $\varphi(n)$.

5.

$$\text{НОД}\left(\frac{n}{\text{НОД}\,(n,k)}, \frac{k}{\text{НОД}\,(n,k)}\right) = 1;$$

Поэтому звезда с такими параметрами будет состоять из одной ломаной. В свою очередь, (n, k)–звезда получится, если между двумя соседними вершинами этой звезды вставить ещё НОД $(n, k) - 1$ вершин и скопировать звезду из одной ломаной, повернув её на $360/k$

градусов — смотреть рисунок:



$(15, 6)$–звезда

Таким образом, (n, k)–звезда состоит из НОД (n, k) ломаных. Следствием этого пункта является то, что количество ломаных в звезде всегда делит n.

6. В этом пункте требуется найти количество k, $1 \leq k < n$, таких что НОД $(n, k) = \ell$. Оно, очевидно, равно $\varphi(\frac{n}{\ell})$: все такие k находятся среди чисел, кратных ℓ, и НОД $(\frac{n}{\ell}, \frac{k}{\ell}) = 1$.

7. Количество различных звёзд равно n: есть $(n, 1)$-, $(n, 2)$-, ..., (n, n)–звёзды (последнюю можно мыслить как множество несоединённых вершин, в ней будет n ломаных). Все звёзды бьются на группы по количеству ломаных, которое в них содержится — в группе с ℓ ломаными находится $\varphi(\frac{n}{\ell})$ звёзд.

   При этом, если перечислять все числа вида $\frac{n}{\ell}$, в этом списке появятся все возможные делители n. То есть,

$$n = \sum_{\ell \text{ делит } n} \varphi\left(\frac{n}{\ell}\right) = \sum_{d \text{ делит } n} d.$$

   Что и требовалось доказать.

Задача 2. Без нулей

Смотреть 7 класс, задачу №1.

Задача 3. Дорога до метро

Смотреть 7 класс, задачу №2.

Решения задач 2016 года

Задачи 5 класса

Задача 1. Шутка

A. Поскольку это шутка, засчитывался любой минимально обоснованный ответ. Например, можно предположить, что на третий раз не сломается ни одной ножки, так как в ходе предыдущих двух падений все шаткие ножки уже сломались.

Если же решать задачу всерьёз, то легко увидеть, что указанных исходных данных недостаточно для ответа на вопрос.

B. Обозначим стоимость книги за b. Тогда осталось заплатить $b - 200$ рублей. Половина заплаченного — 100 рублей; половина заплаченного плюс то, что осталось заплатить —

$$b - 200 + 100 = b - 100.$$

Осталось бы заплатить, если заплачена половина заплаченного и ещё столько, сколько осталось заплатить —

$$b - (b - 100) = 100.$$

И мы знаем, что $b - 200 = 3 \cdot 100$. Отсюда стоимость книги — 500 рублей.

C. Путешественник отправился вокруг света на восток, его дорога заняла 80 дней ($80 \cdot 24$ часов, чтобы быть точным). Каждый день путешественник ночует на $\frac{1}{80}$ длины экватора восточнее, то есть Солнце в зените оказывается на $\frac{1}{80}$ часть суток раньше, чем в месте предыдущей ночёвки.

Таким образом, время между ночёвками составляет у путешественника только 23.7 часа (да, возможно он не будет высыпаться, но это уже другая история).

В момент возврата в точку отправления окажется, что за 80 дней для путешественника солнце было в зените $80 \cdot 24 \div 23.7 \approx 81$ раз, и календари у путешественника и у ждущих его людей разойдутся. Для избежания таких расхождений при движении с запада на восток при пересечении линии перемены дат принято перелистывать календарь на один день назад.

Представим теперь, что путешественник обходит землю не рядом с экватором, а вокруг полюса по кругу маленького радиуса. В процессе обхода путешественник будет быстро сменять часовые пояса: если он, к примеру, начнёт движение в полночь 31 декабря от линии перемены дат, то через несколько сот метров он придёт в место, где местное время уже 5 часов утра, потом, ещё чуть дальше, будет 18 часов вечера… Путешественник за какой-нибудь час «проживёт» день 31 декабря, подойдёт к линии перемены дат в 23:59 по местному времени последнего перед линией часового пояса, подождёт чуток, чтобы на часах появилось 0:00, поздравит всех с Новым годом, а затем, сделав ещё два шага вперёд через линию, вернётся в ночь 31 декабря.

Во всех этих случаях не совершается какого-то необычного путешествия во времени — совершается путешествие по часовым поясам. А добавление или исчезновение дня возникает за счёт изменения продолжительности суток. Космонавты на МКС, совершающей оборот вокруг Земли каждые два часа, во избежание путаницы не обращают внимание на местное время и живут по гринвичскому времени (по времени нулевого меридиана).

Задача 2. Числа и суммы

A. Число 0 меньше количества цифр в нём. Число 0.1 меньше собственной суммы цифр. Несложно, тем не менее, убедиться, что натуральных чисел с такими свойствами не найдётся.

B. Если в числе во всех разрядах, кроме старшего — девятки, то ответом будет само это число (любое меньшее число неизбежно будет иметь меньшие цифры хоть в одном разряде, и не будет иметь бо́льших цифр).

В противном случае, нужно вычесть 1 из цифры в старшем разряде (а если там и так 1 — отбросить его), а числа во всех остальных разрядах заменить на 9. В самом деле, чтобы ещё увеличить сумму цифр такого числа, надо увеличивать (или добавлять) старший разряд, а, сделав это, мы получим число, большее исходного.

C. Будем пользоваться способом Гаусса, который заключается в том, что сумма чисел от 1 до k равна

$$\frac{k \cdot (k+1)}{2}.$$

Можно сосчитать, что у Пети получилось

$$\frac{mn \cdot (mn-1)}{2}.$$

А Васи получилось

$$\frac{m \cdot (m-1)}{2} + \frac{n \cdot (n-1)}{2}.$$

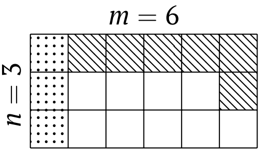
Заметим, что если $m, n > 1$, то $mn \geq m + n$. В самом деле, в таких ограничениях

$$(m-1)(n-1) \geq 1$$

А, значит,

$$mn = (m-1)(n-1) + m + n - 1 \geq 1 + m + n - 1 = m + n.$$

Несмотря на сложные манипуляции с цифрами, идея данного доказательства — геометрическая, ведь в прямоугольнике $m \times n$, если m и n как минимум 2, мы всегда можем отметить n клеток вдоль одной стороны, $m-1$ клетку вдоль другой стороны, и ещё одну клетку где-то в середине.



Рассмотрим следующую цепочку неравенств:

$$(mn)^2 - mn \geq (m+n)^2 - mn = m^2 + mn + n^2 >$$
$$> m^2 + n^2 > (m^2 - m) + (n^2 - n).$$

Нетрудно убедиться, что левая формула в цепочке — это удвоенная сумма Пети, а правая — удвоенная сумма Васи.

Рассмотрим теперь оставшиеся случаи, когда $m = 1$ или $n = 1$. Поскольку в этом случае $mn = \max(m, n)$, число у Васи окажется больше.

Ответ: если $m > 1$ и $n > 1$, то бо́льшее число у Пети, если же $m = 1$ или $n = 1$, то бо́льшее число у Васи.

Задача 3. Деление и остатки

A. Если d делится на 564, то существует такой k, что $k \cdot 564 = d$. Попробуем подобрать: $2 \cdot 564 = 1128$, $3 \cdot 564 = 1692$, $4 \cdot 564 = 2256$. Ни на одно из получившихся чисел 2016 не делится, и дальше перебирать бессмысленно: числа не делятся на числа, бо́льшие себя. Вывод: Настя ошиблась.

B. Вторая подруга ошибается. Например, пусть $a = 7, b = 6, c = 5$. Тогда остаток от деления a на b равен 1, а остаток от деления 1 на снова равен 1. С другой стороны, остаток от деления a на c равен 2.

C. Введём обозначения. Выпишем определение для деления с остатком a на b:

$$a = k \cdot b + p, \quad 0 \le p < b.$$

То же для деления p на c:

$$p = s \cdot c + q, \quad 0 \le q < c.$$

Произведём подстановку: $a = k \cdot b + s \cdot c + q$.

Если b делится на c, то существует такое t, что $b = t \cdot c$, то есть

$$a = (k \cdot t + s) \cdot c + q, \quad \text{и по-прежнему } 0 \le q < c.$$

Прямое утверждение доказано.

Обратное утверждение: равенство верно для любого a только тогда, когда b делится на c. Переформулируем: если b не делится на c, то равенство выполнено не для любого a. Давайте найдём такой a по данным b и c. Возьмём $a = b$, тогда левая часть $(a \bmod b) \bmod c = 0$, а правая —

$$a \bmod c = b \bmod c \neq 0.$$

Отдельно заметим, что даже если b не делится на c, то при некоторых a (например, $a = 0$) равенство из условия всё равно будет выполнено.

Задача 4. Спички и пионеры

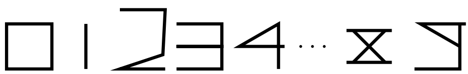
A. Ясно, что величина числа в десятичной записи в первую очередь зависит от количества его разрядов. Поэтому построим самое длинное число из самых «дешёвых» цифр: 1111111. У нас остаётся одна спичка: удлиннить число мы уже не можем, остаётся только увеличивать цифры. Самая большая цифра из трёх спичек — 7, поэтому ответ на задачу — 7111111.

B. Да, вполне возможно, это были Аустри, Бримир, Вестри, Гандальв, Двалин, Ёрд, Ингви, Кили, Лит, Мотсогнир, Нии, Ори, Регин, Судри, Торин, Фили, Хефти, Эйкинскьяльди, Яри и Пётр.

C. Несколько неформальная задача, требовалось любое достаточно разумное рассуждение, например такое.

Самая сложная цифра — 8. Любая другая цифра может быть выложена упрощением её структуры (изъятием и частичным перекладыванием спичек). Чтобы выложить восьмёрку, нужно получить две замкнутые области. Самая простая фигура из прямых с замкнутой областью внутри — треугольник. Поэтому меньше трёх спичек никак не получится.

Однако, из трёх спичек можно составить только один треугольник, поэтому на самом деле требуется минимум 4. Имея 4 спички, выложить все остальные цифры становится просто:



Задача 5. Плохая компания

A. Не более трёх девочек. Докажем от противного: пусть их есть не меньше четырёх — тогда давайте возьмём этих четырёх и добавим к ним ещё кого-нибудь; получится, что среди этих пятерых человек есть как минимум четыре девочки, что противоречит условию.

B. В стране не более 35 миллионов здоровых. Пусть их больше — хотя бы 35 миллионов и один человек. Тогда возьмём именно эту часть населения, и условие будет нарушено: в ней не будет ни одного носителя. Пожалуй, министр ошибается.

C. Если среди p человек есть q девочек, то в компании не более $p-q$ мальчиков. Если их больше, то мы можем заменить девочек в данной выборке на мальчиков, в выборку не вошедших, и нарушить условие. Значит, в компании не менее $N-(p-q)$ девочек.

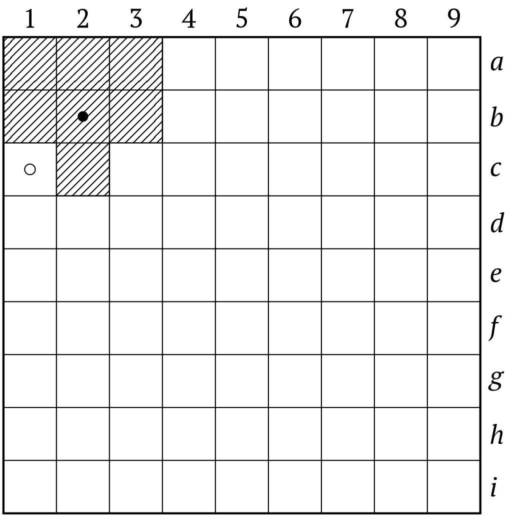
Аналогично рассуждая, можем прийти к выводу, что у нас всего не более $s-t$ не-блондинок, то есть не менее $N-(p-q)-(s-t)$ блондинок.

Задача 6. Эти необычные механизмы

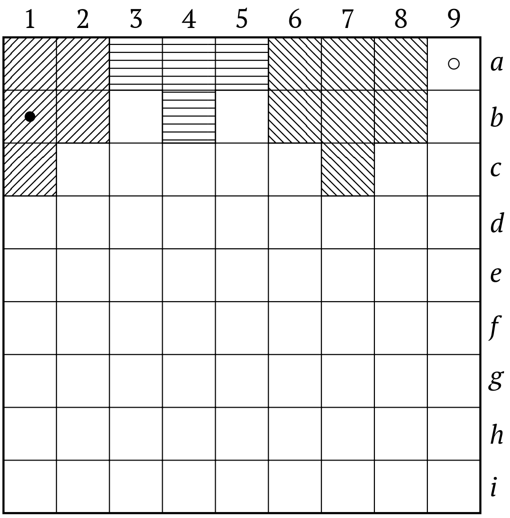
A. Легко заметить, что шестерёнки, находящиеся в зацеплении, всегда вращаются в разных направлениях. В данной задаче имеется пять шестерёнок в цикле — если бы их было 4, можно было бы организовать их вращение так, чтобы соседние вращались в разные стороны. Но так как их нечётное количество, то найдутся две соседних шестерёнки, которые должны будут вращаться в одну сторону.

B. Это невозможно. Рассмотрим левый верхний угол доски (поле $a1$) и подумаем, какое Золото может его бить. Всего возможно четыре позиции: две в первой вертикали, и две во второй.

Если Золото стоит на второй вертикали, на поле $b2$ (или $a2$), тогда поле $c1$ ($b1$, соответственно) окажется не под боем: легко увидеть, что Золото, бьющее это поле, обязательно заденет и поле $c2$ ($b2$, соответственно).



Если же Золото стоит на первой вертикали, на поле $b1$ (или $a1$), то фигуры не «уложатся» вдоль доски: поскольку Золото имеет ширину 3, то оно должно далее стоять на $b4$ ($a4$) — чтобы бить поле $a3$, затем на $b7$ ($a7$) — чтобы бить поле $a6$, и поле $a9$ окажется не под боем.



C. Давайте вычислим: время на проезд n участков без остановки — это время на проезд первого участка со скоростью 54 км/ч, второго — со скоростью 48 км/ч, третьего — со скоростью 42 км/ч, и т.д. плюс время на ремонт колёс. Или, формулой (время выражено в минутах):

$$T(n) = \left(\frac{12}{54} + \frac{12}{48} + \cdots + \frac{12}{60 - 6 \cdot n}\right) \cdot 60 + 10 + 3 \cdot n$$

Средняя скорость (в километрах в минуту), соответственно, будет равна расстоянию, поделённому на время, т.е. $\frac{12 \cdot n}{T(n)}$.

Теперь с конкретными цифрами:

Участки	Время на проезд	Средняя скорость
1	$\frac{12}{54} \cdot 60 + 13 = 26\frac{1}{3}$	$\frac{36}{79} \approx 0.456$
2	$\left(\frac{12}{54} + \frac{12}{48}\right) \cdot 60 + 16 = 44\frac{1}{3}$	$\frac{72}{133} \approx 0.541$
3	$\left(\frac{12}{54} + \frac{12}{48} + \frac{12}{42}\right) \cdot 60 + 19 = 64\frac{10}{21}$	$\frac{378}{677} \approx 0.558$
4	$\left(\frac{12}{54} + \frac{12}{48} + \frac{12}{42} + \frac{12}{36}\right) \cdot 60 + 22 = 87\frac{10}{21}$	$\frac{1008}{1837} \approx 0.549$

Итого, наиболее выгодная тактика — проезжать три участка, после чего заменять все потерянные колёса.

Задачи 6 класса

Задача 1. Падающие стулья

A. Смотреть 5 класс, задачу №1A.

B. Потребуется $n + m \cdot 3 - 2$ подпила минимум.

Предположим, что данного количества может не хватить, то есть существует схема подпила, при которой опасным будет только $m-1$ стул. Стул безопасен, если у него не более 1 подпила, то есть остальные $n - m + 1$ стульев имеют $n - m + 1$ подпилов в сумме максимум. Остаётся $n + m \cdot 3 - 2 - n + m - 1 = m \cdot 4 - 3$ подпилов на $m - 1$ стул, то есть какой-то стул будет иметь 5 подпилов, что невозможно.

Однако, если неудачно подпилить $n + m \cdot 3 - 3$ ножек (у всех стульев по одной и у выбранного $m - 1$ ещё три оставшихся), то такого количества подпилов может уже не хватить.

C. Игра заканчивается тогда, когда у одного из стульев оказываются перепиленными хотя бы две ножки. Иными словами, все «интересные» ходы происходят, когда у каждого из стульев перепилено не более одной ножки, и поэтому количество «интересных» ходов не превосходит n.

Все игры делятся на три группы:

1. Игры, где $a_1 = a_2 = 0$.

Любая такая игра будет бесконечной, потому что у каждого из игроков есть возможность «пропустить ход», не перепилив ни одной ножки. Осталось посчитать количество таких игр. Число m может меняться в промежутке от 1 до $n-1$, поэтому есть $n-1$ вариант его выбрать. После этого можно дать либо Пете, либо Васе возможность перепиливать ровно m ножек (против $m-1$ у его противника). Всего игр получилось

$$2 \cdot (n-1).$$

2. Игры, где ровно одно из чисел a_1, a_2 равно нулю.

В любой такой игре побеждает игрок, у которого есть возможность «пропустить ход», ничего не перепиливая — это может быть либо Петя, либо Вася, в зависимости от установленных ими правил.

Посчитаем количество таких игр. При $m = 1$ возможны две игры: Петя ничего не перепиливает, Вася перепиливает ровно одну ножку, либо наоборот. Для каждого m от 2 до $n-1$ возможно 4 игры:

П.: от 0 до m В.: от 1 до $m-1$	П.: от 0 до $m-1$ В.: от 1 до m
П.: от 1 до m В.: от 0 до $m-1$	П.: от 1 до $m-1$ В.: от 0 до m

Всего игр получилось

$$4 \cdot (n-2) + 2.$$

2. Игры, где $a_1 = a_2 = 1$.

Этот случай интересен тем, что он наименее тривиальный (на каждом ходу всегда что-то происходит) и при этом присутствует явная асимметрия в возможностях игроков: одному из них доступна одна лишняя возможность — перепилить m ножек.

Докажем, что именно этот игрок всегда будет выходить победителем.

1) Петя перепиливает от 1 до m ножек, Вася — от 1 до $m-1$ ножек.

Если n не делится на m, побеждает Петя: первым ходом он перепиливает по одной ножке у $n \bmod m$ стульев, затем, если Вася перепиливает k ножек, отвечает ему перепиливанием $m-k$

ножек. Таким образом, все n стульев исчерпаются после хода Пети.

Если n не делится на $m+1$, побеждает, опять же, Петя, с точно такой же стратегией (отвечать Васе перепиливанием $m+1-k$ ножек).

Если n делится и на $m+1$, и на m, то первым ходом Петя должен перепилить одну ножку у одного стула. Тогда после хода Васи останется от $n-2$ до $n-m$ стульев с неподпиленными ножками — это число, очевидно, положительно и не делится на $m+1$, поэтому, начиная с этого момента, Петя может действовать согласно стратегии, описанной в предыдущем абзаце.

2) Петя перепиливает от 1 до $m-1$ ножек, Вася — от 1 до m ножек.

Если n делится на m или на $m+1$, выигрышная стратегия для Васи очевидна: оставлять после каждой пары ходов «Петя, Вася» число, по-прежнему кратное соответственно m или $m+1$.

Если n не делится ни на m, ни на $m+1$, то после хода Пети Вася может сделать число стульев, оставшихся без неподпиленных ножек, кратным одному из этих чисел (ему доступны все возможные величины остатков натуральных чисел по модулям m и $m+1$) — а после этого продолжать согласно стратегии, описанной в предыдущем абзаце.

Посчитаем количество игр такого вида: для каждого m в пределах от 2 до $n-1$ существует две игры (различающиеся тем, кто из игроков «одарен» ходом в m ножек). Отсюда ответ —

$$2 \cdot (n-2).$$

Если сложить ответы, полученные нами в разных случаях, получится $8n-12$ игр.

Задача 2. Детский сад

А. 10 детей рисуют 10 рисунков за 20 минут — то есть каждый из детей рисует один рисунок в течении 20 минут. 50 детей будут, соответственно, рисовать 50 рисунков за те же 20 минут. d детей будут рисовать r рисунков за $20 \cdot \lceil r \div d \rceil$ минут: распределим рисунки более или менее поровну между детьми — и далее мы знаем, что один ребёнок рисует один рисунок за 20 минут.

B. Площадь растёт быстрее у Вовы: например, потому, что бóльшую длину имеет внешняя часть обруча, а ширина полосы прилепляемого пластилина та же; значит, расход материала с внешней части будет выше.

Тот же результат можно поулчить с помощью формул для площади круговой полосы, сравнив

$$S_1 = \pi\left((r_1+1)^2 - r_1^2\right) \text{ и } S_2 = \pi\left(r_2^2 - (r_2-1)^2\right).$$

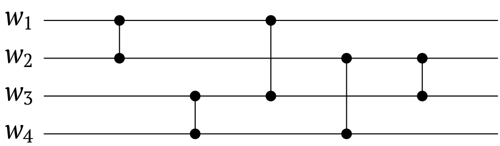
C. Всего возможно $4! = 24$ варианта расположения детей по весу (мы должны переставить детей в правильном порядке, и возможны все перестановки 4 элементов), поэтому будет требоваться не менее пяти взвешиваний (4 взвешивания дадут только $2^4 = 16$ вариантов ответа, что недостаточно для выбора перестановки).

Покажем, что пяти взвешиваний достаточно.

Без уменьшения общности можем говорить не о детях, а о значениях их веса. Пусть задан список весов (w_1, w_2, w_3, w_4). Будем стремиться к тому, чтобы значения в нём были записаны по возрастанию веса, чтобы если выполнено $i < j$, то выполнено $w_i < w_j$

Рассмотрим операцию *сравнения и обмена* (p, q): сравним w_p и w_q, и если они стоят в списке в неправильном порядке (то есть $p < q$, но $w_p > w_q$) — поменяем местами. Тогда требуемая перестановка будет получена, если будут выполнены следующие операции сравнения и обмена: $(1,2)$, $(3,4)$, $(1,3)$, $(2,4)$, $(2,3)$.

Для наглядности изобразим эти сравнения и обмены в виде *сортировочной сети*: каждая горизонтальная линия соответствует элементу списка, вертикальные соединения — операции сравнения и обмена.



Продемонстрируем работу данных сравнений на примере: пусть у детей был вес в килограммах $(20, 25, 15, 10)$. Тогда:

1. сравнение и обмен $(1,2)$ не изменит список весов;
2. сравнив $(3,4)$, мы получим $(20, 25, 10, 15)$;

3. сравнение $(1, 3)$ даст $(10, 25, 20, 15)$;
4. сравнение $(2, 4)$ даст $(10, 15, 20, 25)$;
5. сравнение $(2, 3)$ оставит список без изменений.

Почему это работает? После первых двух сравнений $w_1 < w_2$ и $w_3 < w_4$. Затем мы на третьем шагу выбираем общий минимум (сравнивая минимумы пар), на четвёртом — общий максимум. И на пятом шагу правильно расставляем два оставшихся средних элемента.

Задача 3. Числа, выписанные на доску

А. Число делится на 72 тогда и только тогда, когда делится на 8 и на 9. Поскольку $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$, любое число, составленное из этих цифр, делится на 9. Чтобы число делилось на 8, требуется, чтобы последние его три цифры как число делились на 8.

Чтобы число было минимальным, в его начале должны быть минимально возможные цифры. К сожалению, мы не можем ставить в первый разряд 0 (запись чисел с ведущими нулями не очень грамотная, а Коля — мальчик очень аккуратный), поэтому в первый разряд поставим следующую возможную цифру — 1. Остальные же цифры отсортируем по возрастанию. Мы получим

$$1001223344556677889 9$$

Это число нечётное, поэтому не делится на 8. Надо найти ближайшее к нему большее его, которое бы делилось.

По признаку делимости число $\overline{abc}$ делится на 8, если $4a + 2b + c$ делится на 8. Нетрудно видеть, что двух цифр 8 и нечётных 7 и 9 недостаточно для делимости: поскольку неизбежно $c = 8$, то и $4a + 2b \vdots 8$, значит, $2a + b \vdots 4$, то есть $b \vdots 2$ и $(a + b \div 2) \vdots 2$. Поэтому, если $b = c = 8$, то $a \vdots 2$. Поэтому нам надо добавить ещё одну чётную цифру к рассмотрению, 6.

Какие числа, делящиеся на 8, можно собрать из одной шестёрки и цифр 8,8,9,9? Рассуждая аналогично предыдущему абзацу, построим таблицу:

Позиция 6	Последние 3 цифры	Всё число
$a = 6$	688	10012233445567799688
$b = 6$	968	10012233445567789968
$c = 6$	896	10012233445567789896

Из перечисленных вариантов выберем минимальный, это и будет ответ на задачу:

$$10012233445567789896$$

B. Вместо чисел a и b, сумма которых равна $a+b$, на доске может оказаться одно из чисел $a-2b$ или $b-2a$. Заметим, что в первом случае сумма чисел на доске уменьшится на $3b$, а во втором случае — на $3a$. Это значит, что остаток от деления на 3 всей суммы чисел на доске остаётся неизменным.

Можно заключить, что если на доске получился ноль, то изначальная сумма чисел делилась на 3. Однако

$$1+2+3+\ldots+121 = \frac{121 \cdot 122}{2} \quad -$$

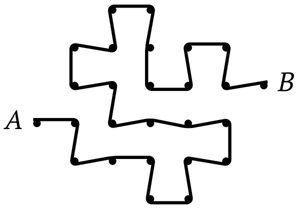
на три не делится. Поэтому ноль не мог получиться.

C. Пусть заданы числа $a_1, \ldots, a_n$. Рассмотрим остатки от деления суммы начальных отрезков этих чисел на n: $a_1 \bmod n$, $(a_1 + a_2) \bmod n$, $(a_1 + a_2 + a_3) \bmod n$ и т.д. Всего есть n таких отрезков, поэтому, возможно, все остатки будут различны. Если это так, тогда среди них обязательно будет остаток 0.

В противном случае обязательно какой-то из остатков повторится два раза: $(a_1 + \cdots + a_k) \bmod n = (a_1 + \cdots + a_l) \bmod n$, $k < l$. Тогда неизбежно $(a_{k+1} + \cdots + a_l) \bmod n = 0$.

Задача 4. Линии и сетки

A. Нитку можно натянуть, например, так:

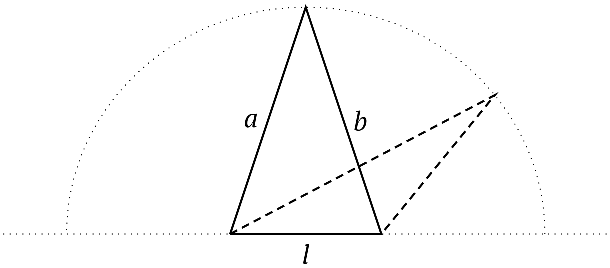


B. Легко заметить, что любая прямая, проведённая через прямоугольник, пересечёт не более $a-1$ вертикальных внутренних линий сетки и не более $b-1$ горизонтальных линий.

Представим, что мы идём вдоль прямой слева направо. Сперва мы попадаем в какую-то из клеток прямоугольника через его внешнюю границу, и каждое следующее горизонтальное или вертикальное пересечение даёт нам одну новую клетку на нашем пути — мы переходим в неё либо через правую сторону, либо через верхнюю/нижнюю. Если мы не пересекали углы клеток, то всего получится $1 + (a-1) + (b-1)$ клеток на нашем пути: одна начальная, $a-1$ клеток при пересечении правой стороны и $b-1$ при пересечении верхней/нижней стороны. Если же мы пересекаем угол, количество клеток на пути будет ещё меньше — мы одновременно проходим и через горизонтальную и через вертикальную линию, без промежуточной клетки.

Таким образом, ответ — нет. Впрочем, если же мы ослабим условие и будем считать, что линия проходит по клетке если она даже только задевает границу клетки — то да, достаточно хотя бы раз задеть пересечение линий сетки (мы тогда сможем заявить, что побывали во всех четырёх клетках, соседних с пересечением).

C. Площадь треугольника — это полупроизведение основания на высоту. Основание фиксировано, а вот высота зависит от двух других сторон a и b. Начнём от ситуации, когда $a = b = \frac{P-l}{2}$ — то есть треугольник равнобедренный. Если мы будем увеличивать, например, a, то b неизбежно придётся уменьшить, чтобы сохранить периметр. Соответственно, треугольник накренится и сожмётся по высоте, площадь его уменьшится. Значит, наибольшая площадь будет в случае равнобедренного треугольника.



Теперь выразим это же более формально. Посчитаем площадь треугольника по формуле Герона. Для этого введём обозначение для полупериметра треугольника $p = \frac{P}{2}$. Для подсчёта нам требуется знать длину всех сторон, поэтому введём длину второй стороны a как параметр (третью сторону мы получим как $P - l - a$):

$$S(a) = \sqrt{p \cdot (p - l) \cdot (p - a) \cdot (l + a - p)}$$

Формула монотонно зависит от всех сомножителей подкоренного произведения, а при изменении a меняются только $p - a$ и $l + a - p$, поэтому вместо поиска точки максимума всей функции мы можем искать точку максимума только у $(p - a) \cdot (l + a - p)$, обозначим это выражение за $g(a)$.

Раскроем скобки: $g(a) = -a^2 + (2p - l)a + lp - p^2$. Это квадратичная парабола, рога параболы направлены вниз, и потому максимум её, как известно, достигается в точке

$$a = -\frac{(2p - l)}{2 \cdot (-1)} = p - \frac{l}{2}$$

Осталось посчитать ответ (шаги по преобразованию формулы опустим):

$$S = \sqrt{\frac{P \cdot (P - 2l) \cdot l^2}{16}}$$

Задача 5. Разделение на подмножества

A. Могут, если в компаниях разное количество мальчиков: допустим, в первой компании десять мальчиков с 1 рублём, а во второй — пять мальчиков с 1 рублём.

B. Будем обозначать чёрный отрезок цифрой 1, а белый — 0, и пусть a_n — цвет отрезка прямой, содержащей точку n.

Покажем от противного, что Петя не сможет покрасить отрезки желаемым образом. Пусть ему это удалось. Заметим тогда, что при любом n выполнено

$$a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} = 2,$$
$$a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + a_{n+4} = 2.$$

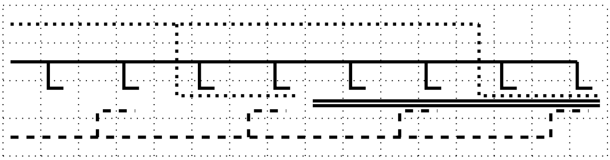
Значит, $a_n = a_{n+4}$.

Возьмём такое n, что $a_{n-1} = 0$ и $a_n = 1$ (такое n существует, поскольку иначе начиная с некоторого места все отрезки покрашены одинаково, что невозможно). По этим данным однозначно вытекает, что $a_{n+3} = 0$. А вот a_{n+1} может быть разным. Рассмотрим два случая:

1. $a_{n+1} = 1$. Тогда $a_{n+2} = 0$ и $a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+11} = 1 + 0 + 0 + 1 + 1 + 0 + 0 + 1 + 1 + 0 + 0 = 5$, противоречие.
2. $a_{n+1} = 0$. Тогда $a_{n+2} = 1$ и $a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+11} = 0 + 1 + 0 + 1 + 0 + 1 + 0 + 1 + 0 + 1 + 0 = 5$, снова противоречие.

C. Рассмотрим некоторую клетку, и рассмотрим вопрос «водятся ли в клетке муравьи типа T». Всего возможно четыре вопроса и ответы на вопрос не зависят друг от друга: мы можем ответить «да, да, нет, нет», можем «нет, нет, да, нет», и вообще, любая комбинация возможна. Итого, получается $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ вариантов.

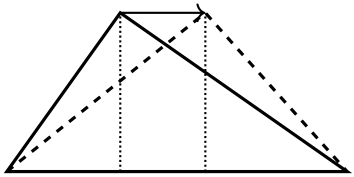
Пример расселения муравьёв, в котором реализуются все комбинации, приведён ниже. Каждый тип линии соответствует какому-то типу муравьёв; если линия проходит через клетку, то данная клетка принадлежит ареалу.



Задача 6. Лыжная секция

A. Зададим себе уточняющий вопрос: в какой день в секции станет ровно 12 участников? На второй день рано: мы можем получить максимально $1 + 5 + 5 = 11$ участников, если каждый день приходит по пятеро. На третий уже поздно: минимально получится $1 + 4 + 4 + 4 = 13$ участников. Поэтому ровно 12 участников в секции не могло быть ни в какой день.

B. Рассмотрим треугольник, образованный отрезками, соединяющими текущее положение лыжников.



При соблюдении правил перемещения его площадь всегда постоянна: если принять отрезок, соединяющий двух стоящих лыжников, за основание треугольника, то перемещения третьего лыжника не меняют его высоту. Посчитаем площадь итогового треугольника (нетрудно видеть, что он прямоугольный):

$$\frac{90 \cdot 120}{2}$$

Однако, площадь исходного треугольника явно меньше:

$$\frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 100\right) \cdot 100}{2} < \frac{(0.9 \cdot 100) \cdot 100}{2} < \frac{90 \cdot 120}{2}$$

Значит, правила перемещения в какой-то момент были нарушены.

C. Возможны два сценария, в результате которых лыжник возвращается на своё место: «локальный» (если лыжник №1 обогнал лыжника №2, а потом лыжник №2 обогнал лыжника №1) и «глобальный» (лыжник №1 обогнал всех и вернулся на своё место, имея круг в запасе).

При «локальном» сценарии количество обгонов всегда чётное (всех, кого вы обогнали, вы должны пропустить вперёд). При «глобальном» сценарии, когда лыжник обгоняет своих остальных 563 товарищей, возможно нечётное количество обгонов. Если же в гонке участвует 563 лыжника, то оба сценария предполагают чётное количество обгонов.

Более формально данный результат можно доказать, переведя его на язык перестановок. Будем записывать положение лыжников как n-элементную перестановку начального положения. При этом, поскольку гонка кольцевая и положение лыжников можно начать отсчитывать с любого места, мы отождествляем между собой циклические сдвиги перестановок:

$$\text{если } \sigma(x) = ((\tau(x) + k) \bmod n) + 1, \text{ то } \sigma \equiv \tau$$

Если $n = 564$, то циклический сдвиг позволяет сделать из чётной перестановки нечётную. Однако, если $n = 563$, то сдвиг всегда сохраняет чётность. А раз к тому же исходная и целевая перестановки — чётные, то и количество транспозиций неизбежно будет чётным.

Задача 7. В поисках чисел

A. Первый ребус. Справа число РОМАШКА — в нём 7 знаков, оно не меньше 1000000. Слева, в произведении, 6 различных цифр, одна цифра повторяется два раза, значит, максимальное значение этого выражения $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 544320$. Данный ребус не имеет решений.

Второй ребус. Заметим, что УРАУРА $= 1001 \cdot$ УРА, однако $1001 = 11 \cdot 91$. Число 11 простое, но в левой части равенства все числа — одноразрядные, поэтому левая часть на 11 не делится. Значит, и этот ребус не имеет решений.

B. Поскольку групп всего 4, а чисел — 6, то либо найдётся группа с тремя числами, либо две группы будут содержать по два числа. В первом случае заметим, что произведение трёх минимальных чисел из диапазона от 3 до 8 равно 60. Во втором случае выберем ту группу, в которой нет числа 3: произведение её элементов как минимум $4 \cdot 5 = 20$.

C. Рассмотрим минимальное простое число, бо́льшее n, пусть это p. Понятно, что $n!$ не делится на p и тем более не делится на $2p$. Пусть существует составное число t, такое, что $n! \,\vdots\, t$.

Согласно постулату Бертрана, между n и $2n$ есть хотя бы одно простое число, поэтому $2p < 4n$. Отсюда, $t < 4n$.

Поскольку p — минимальное простое, большее n, то t может быть целиком представлено в виде произведения сомножителей $n!$:

$$t = 2^{a_2} \cdot \ldots n^{a_n}$$

Заметим, что наиболее выгодный вариант — иметь в качестве t степень некоторого простого числа: $t = q^{a_q}$. Ведь если $n!$ не делится на t, то значит, что один из простых сомножителей t имеет слишком высокую степень. Давайте оставим только его, это только сделает t меньше, а делимости не добавит.

В этот момент мы можем остановиться и предложить следующий алгоритм поиска числа: рассмотрим простые числа от 1 до n, и найдём минимальную степень s_q для каждого, такую, что k^{s_q} не делит $n!$. Также найдём минимальное простое число p, такое, что $p > n$. После чего найдём среди $2p$ и полученных чисел q^{s_q} минимальное — это и будет ответ.

Задача 8. Числа, цифры и приключения

A. Стоимость спички в листочках при использовании в процессе оплаты некоторой цифры — это значение данной цифры, поделённое на количество спичек в ней. Давайте посчитаем эти значения:

$$\frac{0}{6}, \frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{4}, \frac{5}{5}, \frac{6}{6}, \frac{7}{3}, \frac{8}{7}, \frac{9}{6}$$

Очевидно, самая выгодная цифра — 0 (можно получить спички бесплатно), однако, если отбросить данный вариант как жульнический, то стоит остановиться на цифре 2, которой соответствует самое маленькое ненулевое число из ряда выше.

B. $953 = 32 \cdot 29 + 25$. То есть, за один проход по экватору гусеница сделает 32 оборота и ещё сдвинется на 25 секций в ходе 33 оборота. Исходя из этого, номер секции на линии старта после k оборотов можно выразить как $(k \cdot 25) \bmod 29$. Поскольку 29 и 25 взаимно просты, то за 29 оборотов каждая из секций по разу побывает на линии старта.

То же касается и свежеустановленной секции: она также будет оказываться на линии старта раз в 29 оборотов.

C. Этот способ получения простых не работает уже с 6 простым числом: $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 + 1 = 30031 = 59 \cdot 509$.

Задачи 7 класса

Задача 1. Деление и остатки

Смотреть 5 класс, задачу №3.

Задача 2. Пятница

A. Перепишем условие формально: Если x — количество молока в миллилитрах в обычной кружке, то за первый раз мама разлила $4 \cdot x + 1.2 \cdot x$ миллилитров — и это 30% от двух литров. Давайте тогда составим уравнение:

$$4 \cdot x + 1.2 \cdot x = 0.3 \cdot 2000$$

Легко видеть, что $x = \frac{600}{5.2} = 115.38\ldots$, и искомая 20% разница составила чуть больше 23 миллилитров.

B. Представим, что Исинбай бежит с обычной человеческой скоростью v, за ним бежит тигр в q раз быстрее, со скоростью qv. За t секунд Исинбай пробежит расстояние vt, тигр — qvt, поэтому Исинбай никогда не должен подходить к тигру ближе, чем на $(q-1)vt$ метров, иначе тигр его успеет догнать за один приём, не отдыхая. Обычный человек бегает короткую дистанцию со скоростью примерно 30 км/ч, или 8.(3) м/с, что даёт оценку $x = 8.(3) \cdot (q-1)t$ метров для безопасного расстояния.

Отрицательный x означает, что тигр бегает медленнее человека, и потому к нему можно безопасно подходить практически вплотную.

C. Для задания каждой расстановки мы должны выбрать пять пятниц для Дани и три для Кости.

У Дани всего есть $C_7^5 = 21$ вариант иметь пять пятниц на неделе. В каждом из вариантов для Кости нужно выбрать из пяти Даниных пятниц две ($C_5^2 = 10$), и из двух не-пятниц одну ($C_2^1 = 2$). Итого, всего есть $21 \cdot 10 \cdot 2 = 420$ расстановок пятниц.

Задача 3. Эксперименты с клавиатурой

A. Для набора одиночного символа А. должен нажать несколько раз клавишу с символом, и, после этого, несколько раз `Backspace`. В итоге на экране должен остаться один символ: $1 = x \cdot 5 - y \cdot 8$. Из данного уравнения видно, что $y = \frac{x \cdot 5 - 1}{8}$.

Поскольку y монотонно возрастает с ростом x, нам достаточно найти такой минимальный положительный целый x, что y будет целым и неотрицательным. Если $x = 1$, то $y = 0.5$, не подходит (мы не можем нажать клавишу наполовину). $x = 2$ даёт $y = 1.125$, $x = 3$ даёт

$y = 1.75$, $x = 4$ даёт $y = 2.375$, и $x = 5$ даёт $y = 3$. То есть, для набора одного символа А. нужно 8 нажатий на клавиатуре: пять раз нажать символ и три раза — `Backspace`.

Аналогично, для Б. $y = \frac{x \cdot 7 - 1}{4}$, и минимальный подходящий x равен 3, при этом Б. для набора символа требуется 7 нажатий на клавиатуре.

Поэтому обычно Б. будет печатать несколько быстрее, чем А., хотя в особых случаях (скажем, в случае текста, в котором каждая буква повторяется по пппппяяяяятттттььььь раз подряд) преимущество будет у А.

B. `АБВГДЕЖЗ` — эту строчку А. печатает за 2 секунды (8 букв и два раза `Caps Lock`), Б. же печатает её за 4 секунды.

Обратный вариант невозможен: если А. будет даже дважды нажимать `Caps Lock` для ввода каждой заглавной буквы, его скорость ввода будет две буквы за 1.2 секунды (6 нажатий на 2 буквы). Б., в свою очередь, печатает две буквы за 1 секунду. То есть разность в скорости печати — 1.2 раза в худшем случае, что значительно меньше требуемых 2 раз.

C. В данных условиях всё, что мы можем — нажать четыре клавиши в каком-то порядке за секунду, после этих нажатий на экране появится буква. Всего возможно $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ комбинаций, что даёт возможность выбрать одну из 16 букв за одну секунду. Однако, в русском 33 буквы, значит, какие-то из букв мы ввести не сможем. Если же какие-то 17 букв мы не будем различать (объединим в одну) — скажем, обозначим все буквы, начиная с `О`, как `Щ`, то мы как раз получим 16-буквенный алфавит: `АБВГДЕЁЖЗИЙКЛМНЩ`. Текст, кщнещнщ, после такого изменения алщавища бщдещ выглядеть нещбщщнщ.

Задача 4. Факториалы

A. 33!, очевидно, делится на 9. Значит, сумма всех цифр числа должна делиться на 9. Если мы просуммируем все цифры числа, получим $139 + \square$. При этом, должны быть выполнены два условия:

$$(139 + \square) \bmod 9 = 0 \text{ и } \square \leq 9$$

Перебрав все 10 вариантов для $\square$, можем убедиться, что единственный подходящий из них — 8.

B. Воспользуемся двумя признаками делимости: на 9 и на 11 (на оба эти числа делится $n!$, если $n \geq 12$). В большинстве случаев признака делимости на 9 хватит и мы можем восстановить стёртую цифру аналогично пункту А данной задачи. Однако, если сумма известных цифр числа делится на 9, то то возможны два варианта для стёртой цифры: 0 и 9.

В этом случае воспользуемся признаком делимости на 11: просуммируем значения, стоящие на чётных местах, и значения, стоящие на нечётных местах. Если разница между суммами и так делится на 11, была стёрта цифра 0 (его добавление на место не поменяет делимости). В противном случае была стёрта цифра 9.

C. Перегруппируем исходное выражение:

$$1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot \ldots \cdot n! = (1! \cdot 1! \cdot 2) \cdot (3! \cdot 3! \cdot 4) \cdot \ldots \cdot ((n-1)! \cdot (n-1)! \cdot n)$$

И ещё раз:

$$\underbrace{1!^2 \cdot 3!^2 \cdot \ldots \cdot (n-1)!^2}_{\text{квадрат целого}} \cdot \underbrace{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n}_{s}$$

Рассмотрим внимательнее подвыражение s:

$$s = 2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (n-2) \cdot n = 2^{\frac{n}{2}} \cdot \left(\frac{n}{2}\right)!$$

Поскольку n кратно четырём (существует t, что $n = 4 \cdot t$), то $2^{\frac{n}{2}} = (2^t)^2$.

Значит, нужно вычеркнуть факториал $\frac{n}{2}$, это единственный сомножитель, не являющийся полным квадратом.

Задача 5. Ох уж эти школьницы!

А. Разложим 22887 на сомножители (попробуем понять, где Арина поставила знаки умножения). Число делится на 9 (т.к. сумма цифр 27), и частное равно 2543 — числу, выглядящему, как четыре оценки, записанные подряд.

Более тщательная проверка покажет, что это действительно простое число (нам надо проверять его делимость на простые числа, не превосходящие 53, состоящие только из цифр 1,2,3,4 и 5, таких немного), то есть у Арины получилась формула $2543 \cdot 3 \cdot 3$ (с точностью до перестановки сомножителей).

Теперь осталось посчитать средний балл: $3\frac{1}{3}$.

B. Пусть Ольга придумала числа p и q, и пусть для определённости $p > q$. Введём новую переменную $t = p - q$. Тогда $p^2 - q^2 = (q+t)^2 - q^2 = t^2 + 2qt = t(t + 2q)$.

Из условия мы знаем, что $p^2 - q^2 = 3476$, разложим на множители: $3476 = 2 \cdot 2 \cdot 11 \cdot 79$. Нужно теперь эти множители распределить между t и $t + 2q$.

Заметим, что t не может быть максимальным сомножителем. Кроме того, поскольку t обязательно должен быть чётным (иначе всё произведение нечётно), то и выражение $t + 2q$ тоже должно быть чётным. Эти требования дают нам единственное решение: $t = 22$ и $t + 2q = 2 \cdot 79$, отсюда $q = 68$ и $p = 90$.

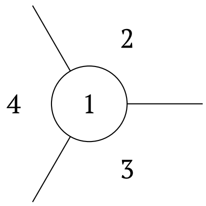
C. Вычислим разность двух чисел пары:

$$\overline{abcde} - \overline{bcdea} = 10000 \cdot a + \overline{bcde} - 10 \cdot \overline{bcde} - a = 9999 \cdot a - 9 \cdot \overline{bcde}$$

Поскольку $9999 \bmod 41 = 36$, то мы легко подберём числа, при которых правило нарушается. Например, возьмём $a = b = 1, c = d = e = 0$. Тогда $11000 \bmod 41 = 12$ и $10001 \bmod 41 = 38$.

Задача 6. Очень умные муравьи

A. Муравьи могли бы разделить плоскость так:

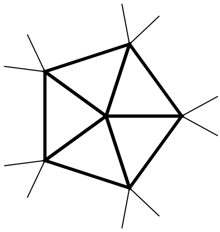


B. Ответ на задачу зависит от того, какую точку мы считаем началом восхождения. Давайте считать, что муравьи совершают восхождение из внутреннего объёма коробки, из самого её центра. Тогда расстояние от центра до середины стенки равно 0.5 метра, расстояние от середины стенки до угла коробки по теореме Пифагора равно $\sqrt{0.5^2 + 0.5^2}$, и расстояние от центра коробки до угла по той же теореме

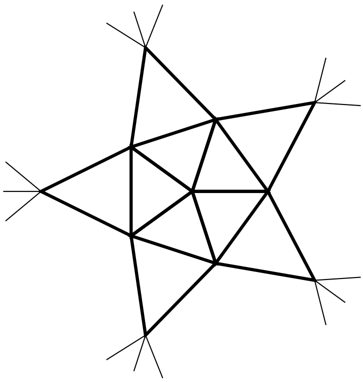
$$\sqrt{(0.5^2 + 0.5^2) + 0.5^2} \approx 0.866$$

Поскольку муравьи в 1000 раз короче людей, нам нужно увеличить все размеры в 1000 раз — и мы получим высоту холма чуть больше 866 метров.

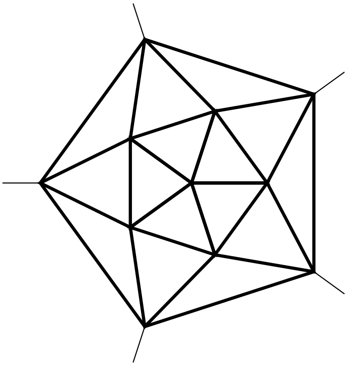
C. Рассмотрим какую-нибудь вершину сетки. Из неё выходит пять отрезков, причём эти отрезки — стороны пяти треугольников, касающихся данной вершины.



Отрезки, выходящие из вершин, соединённых стороной треугольника, обязаны соединяться — иначе к треугольнику будет прилегать не другой треугольник, а более сложная фигура.



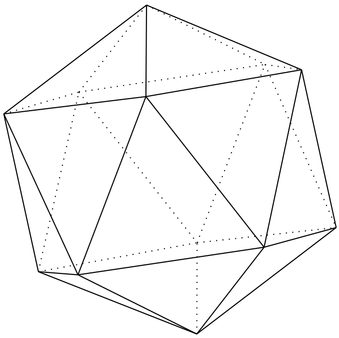
В свою очередь, отрезки, выходящие из вершин, соединённых общей двузвенной ломаной, должны совпадать — иначе в сетке появятся многоугольники с числом вершин, большим трёх.



И снова, все отрезки, выходящие из вершин, соединённых стороной, должны соединяться. Заметим, что точка соединения — общая для 1 и 2 отрезка, 2 и 3 отрезка, и т.п., поэтому она общая для всех отрезков. Из неё будет выходить 5 отрезков, значит, мы не можем больше добавить ни одной вершины к нашей сетке.

Всё шаги по построению сетки были вынужденными, и у нас получилась конечная сетка. А поскольку муравьёв счётное количество, им нужно счётное количество треугольников. Поэтому ответ на вопрос задачи отрицательный.

Дополнительно заметим, что структура из треугольников, которая получилась — это структура икосаэдра, одного из пяти правильных многогранников.



Задача 7. Несправедливый турнир

А. Нет, поскольку самый слабый участник всегда проигрывает свою встречу. Значит, он всегда будет оказываться в худшей группе, с кем бы ни играл. В итоге, он окажется внизу таблицы.

B. Введём определение: если N. состязается сильнее некоторого другого участника, то мы назовём того участника «слабым», если слабее — назовём его «сильным». Исходно имеется не более $2^{t-1}-2$ сильных участников.

Чтобы оказаться в финале с аутсайдером, N. должен проиграть все встречи, кроме последней. Значит, в первой встрече участник N. должен встречаться с сильным. Вместе с N. в группе проигравших окажется не более $\frac{2^{t-1}-2}{2}-1=2^{t-2}-2$ сильных участников: сильный может проиграть только сильному, всего $\frac{2^{t-1}-2}{2}$ пар, но одну из пар сильных мы обязаны разорвать, чтобы N. проиграл.

Повторив рассуждение можно вывести общую формулу: после раунда k в группе проигравших всего может остаться не более $2^{t-k-1}-2$ сильных. Значит, после раунда $t-2$ сильных не останется, и N. избежит встречи с аутсайдером, выиграв в раунде $t-1$.

C. Введём определения аналогично предыдущему пункту: если N. состязается сильнее некоторого другого участника, то мы назовём того участника «слабым», если слабее — назовём его «сильным». Исходно есть не менее 2^{t-1} сильных.

Пусть в первом туре N. соревнуется с сильным, и все остальные сильные соревнуются в паре с другими сильными. Тогда после раунда в группе проигравших останется не менее $2^{t-2}-1$ сильных. Во втором раунде мы снова составим пару N. с сильным, добавим не меньше $\frac{2^{t-2}-2}{2}=2^{t-3}-1$ пар сильных, и после второго раунда в группе проигравших останется N и не меньше $2^{t-3}-1$ сильных. Повторив это построение пар k раз, мы получим, что после k раунда в группе проигравших останется N. и не меньше $2^{t-k-1}-1$ сильных.

Итак, N. после $t-1$ раунда окажется в проигравшей все раунды группе. А вторым участником этой группы будет самый слабый участник соревнования: ведь все остальные участники, кроме этих двоих, смогли выиграть хоть у кого-то.

Для точности заметим, что условие неявно предполагает, что аутсайдер и N. — это разные участники. Если же такого требования нет, то мы сможем утверждать только об участии N. в состязании за последнее и предпоследнее места.

Задача 8. Дело-то житейское

A. См. задачу **1B** из варианта 5 класса.

B. По принципу Дирихле нельзя рассадить n кроликов в $n-1$ клетку так, чтобы в каждой клетке оказалось ровно по кролику. Мы будем раскладывать по $n-1$ ящикам n сайтов, и в ящик номер k мы будем класть сайт, у которого k ссылок на другие сайты. Принцип Дирихле докажет требуемое.

C. Заметим, что максимально в строке имеется 4 промежутка между закрашенными цифрами (промежуток — число — промежуток — число — промежуток — число — промежуток). С другой стороны, минимально в строке $9+19\cdot 2 = 47$ символов и максимально может быть закрашено $3\cdot 2 = 6$ цифр. То есть, минимальная длина промежутка $41 \div 4 > 10$ символов, значит, одноразрядное число может быть закрашено только если это число 1.

Пусть же число 1 не закрашено. Тогда заметим, что длина промежутка до первой закрашенной цифры — нечётна ($9+x\cdot 2$), но длина промежутка между первым и вторым закрашенным числом — чётна.

Значит, закраска возможна только если число 1 закрашено. Для завершённости приведём корректный пример такой закраски:

$$\underline{1}23456789101112\underline{13}14151617181920\underline{21}22232425262728\underline{29}$$

Задача 9. День, когда Стёпа всё испортил

A. Стёпа, например, мог бы попробовать посчитать в двоичной системе: согнутый палец означает 0, распрямлённый означает 1. Всего десять пальцев, поэтому самое большое число, которое можно показать так, равно $2^{10}-1=1023$.

Хотя, конечно, данный совет — это только самое начало дела. Показ некоторых комбинаций (скажем, числа 0101001010_2 — распрямлены безымянный и указательный пальцы на обеих руках) может потребовать тренировки.

B. Весы Всезнамуса после вмешательства Стёпы показывают всегда на w_0 больше, надо определить w_0. Взвесив бутылку воды получим $r_1 = w_1+w_0$, взвесив кусок циркония получим $r_2 = w_2+w_0$, взвесив оба предмета получим $r_{12} = w_1+w_2+w_0$. Давайте теперь вычтем из двух первых результатов третий и получим желаемое: $r_1+r_2-r_{12} = w_1+w_0+w_2+w_0-w_1-w_2-w_0 = w_0$.

C. Стёпа, падая с высоты h, падает равноускоренно. За время падения t Стёпа пролетит $at^2 / 2$ метров, где a — ускорение свободного падения в мире игры Portal, причём $at^2 / 2 = h$. Отсюда $t = \sqrt{2h / a}$ и вертикальная скорость у земли $v_{\downarrow} = \sqrt{2ah}$.

После прохождения через портал Стёпа летит горизонтально с данной скоростью, но вертикальная скорость снова равна 0, поэтому Стёпа снова наберёт $v_{\downarrow}$ вертикальной скорости, и итоговая скорость будет равна

$$\sqrt{v_{\downarrow}^2 + v_{\downarrow}^2}.$$

И вообще, после n прыжков итоговая скорость будет $\sqrt{n \cdot v_{\downarrow}^2}$.

Соответственно, нижний портал в ходе $n + 1$ прыжка окажется на расстоянии

$$h \cdot \sqrt{n \cdot v_{\downarrow}^2}$$

от стены, то есть будет удаляться всё с меньшим и меньшим шагом, пропорционально $\sqrt{n}$.

Задача 10. Хитрый Миша

A. Посетители тира ведут огонь из вершины X равнобедренного треугольника XAB по его основанию AB. Заметим, что отрезок XP, соединяющий вершину с точкой попадания пули на основании треугольника P, делит треугольник на два других, XAP и XBP. Площадь же этих треугольников равна полупроизведению оснований на расстояния от пулевой дырки до соответствующих прямых h_A и h_B:

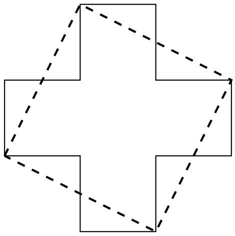
$$S(XAP) = \frac{|XA| \cdot h_A}{2} \qquad S(XBP) = \frac{|XB| \cdot h_B}{2}$$

Однако, поскольку $|XA| = |XB|$, имеем

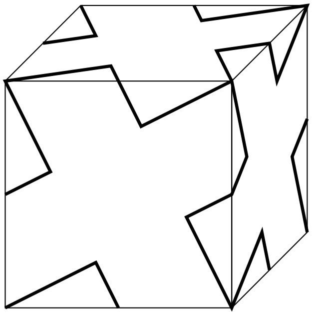
$$S(XAB) = S(XAP) + S(XBP) = \frac{|XA| \cdot h_A + |XB| \cdot h_B}{2} = |XA| \cdot (h_A + h_B)$$

Площадь треугольника XAB и длина боковых сторон не зависит от выбора P, значит, и $h_A + h_B$ тоже не зависит от выбора P. Поэтому, если следовать предложению Миши, награждать придётся всех посетителей тира.

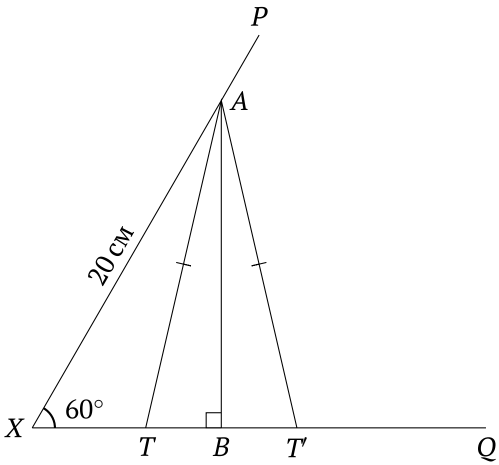
B. Будем заклеивать куб со стороной $\sqrt{5}$ крестиками, сопоставляя одному из шести крестиков одну из шести граней кубика. Будем приклеивать крестик к квадратной грани «под наклоном»:



Тогда, загибая уголки у крестиков, получим заклеивание кубика:



C. Построим чертёж. Искомое расстояние $t = |XT|$. Так как $|AT| = |AT'|$, то треугольник TAT' — равнобедренный. Если посередине между T и T' отметить ещё одну точку, B, то треугольник XAB будет прямоугольным (т.к. высота и медиана к основанию в равнобедренном треугольнике совпадают). Значит, $\angle XAB = 30°$, отсюда $|XB| = \frac{|XA|}{2} = 10$ см. Значит, $t = 8$ см.



Задачи 8 класса

Задача 1. Числа и суммы

Смотреть 5 класс, задачу №2.

Задача 2. Детский сад

Смотреть 6 класс, задачу №2.

Задача 3. Факториалы

Смотреть 7 класс, задачу №4.

Задача 4. В поисках чисел

Смотреть 6 класс, задачу №7.

Задача 5. Проблемы завуча

А. Средний рост в параллели: $\frac{161+162+\ldots+220}{60} = \frac{361\cdot 30}{60} = 190.5$, обозначим его за A.

Обозначим сумму ростов школьников в классе i как H_i. Покажем, что максимальный минимальный средний рост школьников достигается, когда $H_1 = H_2 = H_3$: в этом случае, очевидно, $\frac{H_i}{20} = A$. Покажем это в два приёма: во-первых, продемонстрируем, что максимальный минимальный средний рост не превышает A, а потом покажем, что A достижим.

Пусть есть два класса, в которых средний рост различается, и пусть $H_1 < H_2 \leq H_3$. Тогда минимальный средний рост ниже A:

$$A = \frac{H_1 + H_2 + H_3}{60} > \frac{3H_1}{60} = \frac{H_1}{20}$$

Теперь покажем достижимость A: построим пример такого разбиения на классы, что $H_1 = H_2 = H_3$.

Класс	Состав класса: рост учеников
1	$181, 182 \ldots 200$
2	$171, 172 \ldots 179, 201, 202 \ldots 210$
3	$161, 162 \ldots 169, 211, 212 \ldots 220$

B. Монета пролезет, если найдутся такая проекция монеты и такая деформация листа с отверстием, что монета может быть размещена целиком внутри деформированного отверстия. Так как монета круглая, то любая проекция содержит отрезок длины $2r$. С другой стороны, проекция ребра ничего кроме этого отрезка и не содержит. Отсюда вывод: монета пролезет тогда и только тогда, когда в отверстие помещается отрезок длины $2r$.

Давайте найдём наиболее выгодную деформацию. Поскольку лист очень гибкий, мы можем изменить форму отверстия, сохранив периметр. Давайте отверстие вытягивать, в пределе получив прямую узкую щель длины πR; это самая длинная фигура с требуемым периметром, однако, она нас по-прежнему устраивает.

Чтобы монета пролезла, нужно, чтобы длина щели равнялась диаметру монеты. Отсюда, $R = \frac{2r}{\pi}$.

C. Если мы имеем возможность вращать куб, то нам нужно найти его проекцию с самым маленьким радиусом описанной окружности. Такая проекция получится, сли поставить куб на одну из его вершин, так чтобы противоположная вершина находилась строго над ней.

Обозначим вершину, на которую мы ставим куб, через v_0, а противоположную ей вершину — за v_1. Тогда окружность, описанная вокруг проекции куба, будет проходить через проекции сразу всех 6 его оставшихся вершин. Заметим, что вершина v_0 и три вершины, смежные с ней, образуют симметричную треугольную пирамиду, основание которой — треугольник со стороной $\sqrt{2}$.

В свою очередь, радиус описанной окружности такого треугольника равен

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

Задача 6. Фигуры в шахматах

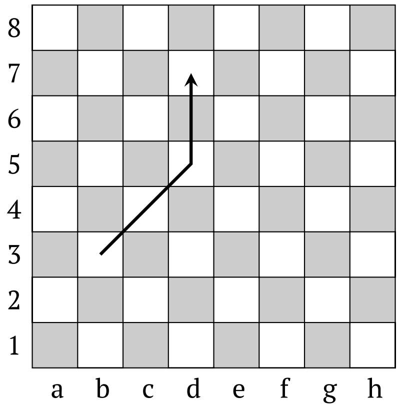
A. Для определённости будем учитывать в общем количестве пройденных клеток начальные и конечные клетки.

Ферзь путешествует с поля (a, b) на поле (c, d). Рассмотрим разницу начальных и конечных координат. Пусть для определённости разница в номере колонки не меньше, чем в номере строки ($|a - c| \geq$

$|b-d|$). Поскольку ферзь не прыгает через клетки, он должен пройти не меньше $|a-c|+1$ клетки (иначе окажется, что через какую-то вертикаль из находящихся между a и c он перепрыгнет, не побывав на ней).

Однако, если ферзь пройдёт по диагонали $|b-d|+1$ клеток, и оставшиеся $|a-c|-|b-d|$ клеток пройдёт по горизонтали, то посетит в точности $|a-c|+1$ клетку. Поэтому ответ на задачу — максимум разниц координат плюс один: $\max(|a-c|,|b-d|)+1$.

Ниже на картинке показан пример движения ферзя с поля **b3** на поле **d7**. Ферзь посетит на своём маршруте $\max(|2-4|,|3-7|)+1=5$ клеток.



B. Корблюд имеет четыре возможных хода, которые в процессе перемещения можно повторять сколько угодно раз. Давайте укажем для каждого хода Корблюда его *сдвиг* — координаты поля, в котором Корблюд окажется после хода, если изначально он стоит на поле $(0,0)$:

Текстовое описание хода	Сдвиг
вправо и вверх	$(1,3)$
вправо и вниз	$(1,-3)$
влево и вниз	$(-1,-2)$
влево и вверх	$(-1,2)$

Несложно понять, что порядок ходов значения не имеет, и для итогового перемещения важно только количество ходов каждого типа.

Давайте введём обозначения для количества ходов Корблюда каждого типа ($n_{\nearrow}$, $n_{\searrow}$, $n_{\swarrow}$ и $n_{\nwarrow}$) и составим уравнение: Корблюд может сдвинуться на (p, q) клеток, если уравнение $n_{\nearrow}(1,3) + n_{\searrow}(1,-3) + n_{\swarrow}(-1,-2) + n_{\nwarrow}(-1,2) = (p,q)$ имеет решение.

Подберём коэффициенты, позволяющие получить все возможные единичные сдвиги $(0,1)$, $(0,-1)$, $(1,0)$ и $(-1,0)$, это легко сделать простым перебором ходов:

Сдвиг	$n_{\nearrow}$	$n_{\searrow}$	$n_{\swarrow}$	$n_{\nwarrow}$
$(1,0)$	3	1	3	0
$(-1,0)$	1	3	0	3
$(0,1)$	1	0	1	0
$(0,-1)$	0	1	0	1

Каким бы ни было перемещение, его можно всегда представить как комбинацию единичных сдвигов, которые, в свою очередь, можно представить как комбинацию ходов Корблюда. Значит, Корблюд может достигнуть любой клетки доски из любой.

Для решения второй части задачи выпишем сдвиги для ходов Корблюда Диагонального и попробуем, например, получить единичный сдвиг вверх, найдя решения уравнения:

$$n_{\nearrow}(1,3) + n_{\searrow}(1,-2) + n_{\swarrow}(-1,-3) + n_{\nwarrow}(-1,2) = (0,1)$$

Преобразуем уравнение для координат в систему уравнений:

$$\begin{cases} (n_{\nearrow} - n_{\swarrow}) + (n_{\searrow} - n_{\nwarrow}) = 0 \\ 3 \cdot (n_{\nearrow} - n_{\swarrow}) - 2 \cdot (n_{\searrow} - n_{\nwarrow}) = 1 \end{cases}$$

Заменим $n_{\nearrow} - n_{\swarrow}$ на x и $n_{\searrow} - n_{\nwarrow}$ на y:

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ 3x - 2y = 1 \end{cases}$$

То есть $x = -y$, отсюда $5x = 1$, а это уравнение не имеет решений в целых числах (мы должны сделать на 0.2 хода больше вправо и вверх, чем влево и вниз). Значит, и исходное уравнение не имеет решений, а потому и Корблюд Диагональный не сможет обойти всю доску.

Заметим, что если рассмотреть перемещение вверх на кратное 5 число клеток, то уравнение станет разрешимым ($5x = 5$, $x = 1$,

$y = -1$). Это возможно, например, при $n_{\nearrow} = n_{\nwarrow} = 1$ и $n_{\swarrow} = n_{\searrow} = 0$: идём вправо и вверх, после чего влево и вверх. Но это будет решением уже какой-то другой задачи.

C. Пусть нам дана фигура, имеющая четыре возможных хода. Выпишем эти ходы в порядке обхода по часовой стрелке, начиная с верхнего правого угла: $(1, a), (1, -b), (-1, -c), (-1, d)$, где a,b,c и d могут быть равны 2 или 3. Например, для Корблюда из пункта **B** это будет $(1, 3), (1, -3), (-1, -2), (-1, 2)$. Выпишем вертикальные сдвиги фигуры в строку (назовём эту строку *сигнатурой* фигуры): *abcd*. Скажем, Корблюд имеет сигнатуру 3322, а Диагональный корблюд — 3232. Всего таких строк 16, поэтому без учёта симметрии имеется 16 возможных фигур.

Однако, с учётом симметрии некоторые фигуры мы должны отождествить: а именно, все зеркально симметричные по горизонтали и вертикали. То есть, фигура *abcd*, отражённая по горизонтали — это *badc*, отражённая по вертикали — это *dcba*, отражённая и по горизонтали и по вертикали (центральная симметрия) — *cdab*.

С учётом этого подсчитаем количество фигур, сгруппировав их по количеству троек в сигнатурах и указав симметричные варианты для фигуры, если такие фигуры ранее не встречались:

		симметрия		
тройки	фигура	гориз.	верт.	центр.
0	2222			
1	3222	2322	2223	2232
2	3322		2233	
	3232	2323		
	2332	3223		
3	3332	3323	2333	3233
4	3333			

Как нетрудно заметить, всего получилось 7 различных фигур, все остальные можно получить из них с помощью симметрий.

Фигуры 3322 и 3232 рассмотрены в пункте **B**, фигура 3322 позволяет обойти всё поле, а фигура 3232 — нет.

Фигура 2332. По своей идее она подобна фигуре 3322. Фигура 2332 «развёрнута» на 90° градусов относительно фигуры 3322, поэтому для неё легко получить единичные сдвиги вправо и влево, а сдвиги вверх и вниз получатся сложными:

Сдвиг	$n_\nearrow$	$n_\searrow$	$n_\nwarrow$	$n_\swarrow$
$(1,0)$	1	0	0	1
$(-1,0)$	0	1	1	0
$(0,1)$	3	1	0	3
$(0,-1)$	0	1	1	0

Фигуры 2222 и 3333. В случае фигуры 2222 перемещение по вертикали всегда кратно 2, значит, клетки с нечётными вертикальными координатами будут нам недоступны. Аналогично, в случае фигуры 3333 недоступны клетки с координатами (x, y), где y не кратен 3.

Фигура 3222. Единичные сдвиги $(0,1)$ и $(-1,0)$ получить легко, а вот сдвиги $(0,-1)$ и $(1,0)$ заставляют задуматься. Вместо того, чтобы подбирать эти решения, давайте воспользуемся «тяжёлой артиллерией» — построим и решим соответствующие диофантовы уравнения.

Составим уравнение: $n_\nearrow(1,3)+n_\searrow(1,-2)+n_\swarrow(-1,-2)+n_\nwarrow(-1,2) = (0,-1)$

Преобразуем:

$$\begin{cases} (n_\nearrow + (n_\searrow - n_\nwarrow - n_\swarrow) = 0 \\ 3 \cdot n_\nearrow - 2 \cdot (n_\searrow - n_\nwarrow + n_\swarrow) = -1 \end{cases}$$

Обозначим $n_\nearrow$ за x и $n_\searrow - n_\nwarrow + n_\swarrow$ за y. Рассмотрим уравнение $3x - 2y = -1$, выразим y из него: $y = \frac{1+3x}{2}$. Но нас устраивают не все такие y, а только целые. Значит, $1 + 3x$ должно делиться на 2, то есть $3x \bmod 2 = 1$.

Легко видно, что $x = 1$ удовлетворяет этому условию. Пусть ещё какой-то t удовлетворяет условию $3t \bmod 2 = 1$. Тогда $3(x - t) \bmod 2 = 3x \bmod 2 - 3t \bmod 2 = 0$, а поскольку 2 и 3 взаимнопросты, то $(x-t) \vdots 2$. То есть, все значения, удовлетворяющие условию, строятся по правилу $x = 2k + 1$. Отсюда $y = \frac{4+6k}{2} = 3k + 2$.

Второе уравнение системы разрешено, подставим значения в первое уравнение: $(2k + 1) + (3k + 2) - 2 \cdot n_\swarrow = 0$. Решений у него много, давайте, например, возьмём $k = 1$ и $n_\swarrow = 4$, и это приведёт к

$n_{\nearrow} = x = 3$, а из $n_{\searrow} - n_{\nwarrow} + 4 = y = 5$ можем взять $n_{\searrow} = 1$ и $n_{\nwarrow} = 0$.

И последнее уравнение:

$$n_{\nearrow}(1,3) + n_{\searrow}(1,-2) + n_{\swarrow}(-1,-2) + n_{\nwarrow}(-1,2) = (1,0).$$

Здесь $3x - 2y = 0$, отчего $x = 2k$, $y = 3k$ и $2k + 3k - 2 \cdot n_{\swarrow} = 1$ и если выбрать $k = 1$, то $n_{\swarrow} = 2$. Тогда $n_{\nearrow} = x = 2$, и из замены $n_{\searrow} - n_{\nwarrow} + 2 = y = 3$ выберем $n_{\searrow} = 1$ и $n_{\nwarrow} = 0$.

Сдвиг	$n_{\nearrow}$	$n_{\searrow}$	$n_{\swarrow}$	$n_{\nwarrow}$
$(1,0)$	2	1	2	0
$(0,-1)$	3	1	4	0
$(0,1)$	1	0	1	0
$(-1,0)$	2	0	0	3

Фигура 3332. Попробуем здесь ещё один метод: сведём эту фигуру к фигуре 2332. Заметим, что $(1,3) + (1,-3) + (-1,2) = (1,2)$, то есть последовательность из трёх ходов (вправо и вверх, вправо и вниз, влево и вверх) заменяет отсутствующий у нас ход $(1,2)$. Остальные же ходы у 2332 и 3332 совпадают. Значит, любое перемещение 2332 доступно и для 3332.

Итого: четыре фигуры (3322, 2332, 3222 и 3332) могут обойти всё поле, а три оставшиеся (2222, 3333, 3232) не могут.

Отдельно заметим, что решение диофантовых уравнений — важная область алгебры, и, хотя для некоторых типов таких уравнений есть разработанные методы решения, в общем случае задача неразрешима. Вопрос о поиске общего метода решения был поставлен Гильбертом в 1900 году («10 проблема Гильберта»), и в 1970 году Юрий Матиясевич показал, что такого метода нет.

Задача 7. Пятница

Смотреть 7 класс, задачу №2.

Задача 8. Очень умные муравьи

Смотреть 7 класс, задачу №6.

Задача 9. Эксперименты с клавиатурой

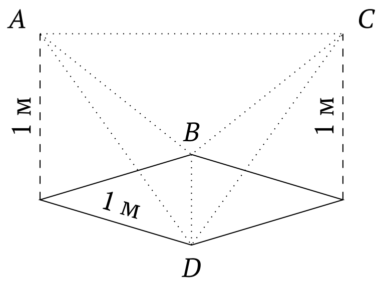
Смотреть 7 класс, задачу №3.

Задача 10. Первым делом — самолёты

A. Поскольку на стене установлен точечный источник света (лампа), лучи от него расходятся в стороны под некоторым углом. Поэтому тень от ближе расположенного к лампе объекта будет больше, чем от дальше расположенного (рассмотрим предельный случай: небольшую близко расположенную лампу можно закрыть ладонью целиком; от далеко расположенной ладонью можно разве что заслонить глаза).

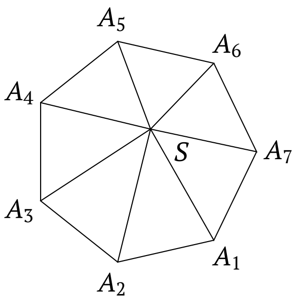
Если самолётик немного наклонить, то тень от более близкой к лампе части крыла будет больше, чем от более далёкой. Поэтому если тень от нижней часть самолётика больше, то самолётик наклонён к лампе, а если тень от верхней части больше — самолётик наклонён от лампы.

B. Пока вертолёты стоят на земле, расстояние между противоположными вертолётами равно $\sqrt{2}$. Нам надо добиться, чтобы расстояние и между соседними составило $\sqrt{2}$.



Поднимем в воздух вертолёты A и C на высоту 1 метр. Теперь все вертолёты имеют попарные расстояния $\sqrt{2}$.

C. Пусть S — точка посадки ракеты. Тогда площадь семиугольника равна сумме площадей треугольников, образованных точкой S и соседними вершинами семиугольника A_i и A_{i+1}.



Площадь треугольника SA_iA_{i+1} равна $\frac{h_i \cdot 2\,\text{км}}{2} = \mathsf{h_i}$ км^2, где h_i — расстояние от S до прямой, продолжающей сторону семиугольника A_iA_{i+1}.

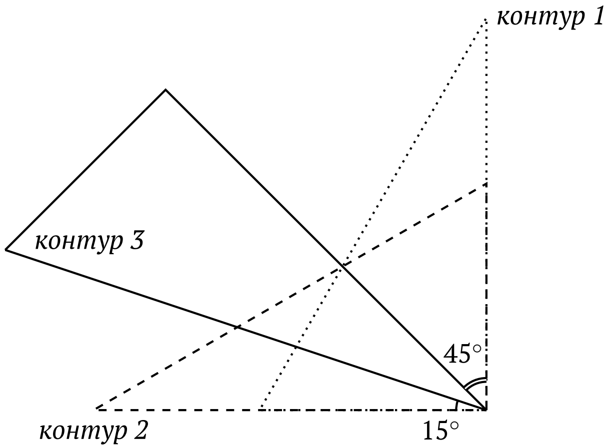
Отсюда можем сделать вывод, что сумма расстояний до прямых $h_1 + h_2 + \ldots + h_7$ численно равна площади семиугольника и потому постоянна.

Задача 11. Несправедливый турнир

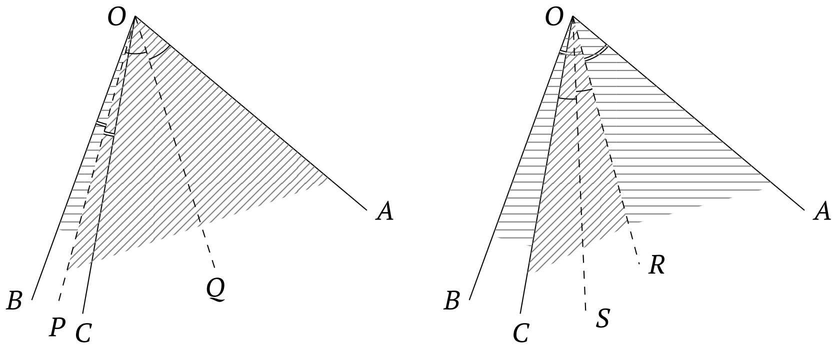
Смотреть 7 класс, задачу №7.

Задача 12. Попытки осмысления биссектрис

А. Обведём треугольник (*контур 1*), потом перевернём его и снова обведём (*контур 2*). Луч, исходящий из прямого угла, проходящий через пересечение контуров 1 и 2 — биссектриса прямого угла, делящая его на два угла по 45°. Если приложить к этой биссектрисе треугольник (*контур 3*), то мы получим искомый 15° угол.

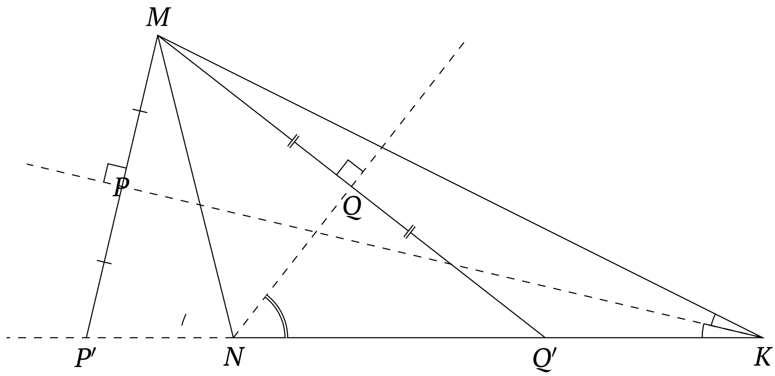


B. Данное определение биссектрисы зависит от выбора начальной грани. Рассмотрим пример, где различие очевидно. Дан трёхгранный угол, образованный гранями AOB, AOC и BOC, причём угол BOC значительно меньше углов AOC и BOA. Если мы разобьём сперва плоский угол BOC биссектрисой OP, а потом построим биссектрису OQ, разбив угол AOQ, то она будет лежать почти в середине угла (левый рисунок). Противоположный порядок разбиения угла даст нам биссектрису OS, сильно смещённую к грани BOC (правый рисунок).



Чуть более формальное пояснение. Возьмём трёхгранный угол и будем уменьшать угол BOC до нуля. При очень маленьких значениях этого угла окажется, что биссектриса QO почти совпадает с биссектрисой угла AOB. Однако, угол SOC — только половина угла ROC, то есть примерно четверть угла AOB.

C. Продолжим перпендикуляр к биссектрисе KP до продолжения основания треугольника и обозначим точку пересечения как P'. Заметим, что $|MP| = |PP'|$ так как треугольники MPK и $P'PK$ равны (они имеют два равных угла и общую сторону). Аналогично, $|MQ| = |QQ'|$. Следовательно, так как прямые $|PQ|$ и $|P'Q'|$ отсекают от угла QMP равные отрезки, то по обратной теореме Фалеса эти прямые параллельны.



Задачи профильного варианта 7 класса

Задача 1. *(a, b)*–слоны

1. (а) Выпишем изменения координат, которые происходят при ходе. Слон в первой части хода двигается на a клеток в одном из четырёх направлений: $(-a, a)$, $(a, -a)$, $(-a, -a)$, (a, a). Во втором движении он поворачивает на $90°$ и двигается ещё на b клеток в одном из двух направлений: $(-a-b, a-b)$, $(-a+b, a+b)$, $\ldots$ и т.п.

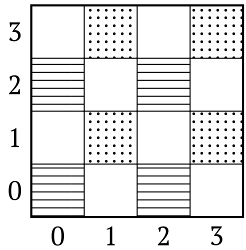
   Так как $a \neq b$, то каждая из сумм $a+b$, $a-b$, $-a-b$ и $-a+b$ будет отличаться от других. Итого, все 8 вариантов хода различны.

   (б) Да, (a, b)-слон тождественен (b, a)-слону. Рассмотрим всё множество точек, в которые мы можем прийти: это все комбинации плюсов и минусов вида $(\pm a \pm b, \pm a \pm b)$, за исключением вариантов вида $(\pm(a+b), \pm(a+b))$ и $(\pm(a-b), \pm(a-b))$ — иными словами, кроме тех вариантов, где во втором движении слон идёт в направлении первого движения или в обратном направлении. Легко заметить, что от обмена a и b это множество не поменяется.

   (в) Обычный слон в некоторых положениях бьёт 13 клеток, поэтому в точном смысле он не может являться никаким (a, b)-слоном, у которого только 8 клеток под боем. Однако, если рассмотреть $(1, 0)$-слона, то множество полей, которые он способен в принципе достичь, совпадает с множеством для обычного слона.

2. Чёрные клетки — клетки, у которых сумма координат чётна. Тогда давайте назовём *линейными* чёрными клетками те клетки, обе координаты которых чётны. Остальные чёрные клетки назовём *точечными*.

Если взять $(1,0)$-слона, то если x и y — чётны, то $x \pm 1$ и $y \pm 1$ нечётны, и наоборот.



Для того, чтобы (a,b)-слон ходил только по линейным (точечным) чёрным клеткам, начав из такой клетки, нужно, чтобы он сохранял чётность каждой из координат. То есть, $(a+b) \vdots 2$ и $(a-b) \vdots 2$. Заметим, что оба условия выполняются или не выполняются одновременно, то есть в качестве требуемого свойства мы можем выбрать, например, $(a+b) \vdots 2$.

Если же $(a+b)$ не кратно 2, то такой слон будет менять чётность координат (и тип чёрных клеток) при каждом ходе.

3. Если чёрных у полей общая вершина, то, значит, это чёрные клетки разного типа. Рассмотрим два случая:

Если же $(t+1) \vdots 2$, то (по предыдущему пункту) такой $(1,t)$-слон не может побывать в чёрных клетках разного типа.

Теперь, пусть $t \vdots 2$. Тогда из следующей суммы легко понять ходы слона, которые позволяют дойти от точки (x,y) до $(x+1, y+1)$. Другие соседние клетки — $(x \pm 1, y \pm 1)$ — можно получить аналогично, в силу симметрии слона и поля.

$$(x,y) + (1+t, 1-t) + \frac{t}{2} \cdot ((-1+t, 1+t) + (-1-t, 1-t)) =$$

$$= (x + (1+t) - t, y + (1-t) + t) = (x+1, y+1)$$

4. Пусть слон достигает клетки $(\pm 1, \pm 1)$ из клетки $(0, 0)$. Без уменьшения общности давайте считать, что слон достигает клетки $(1, 1)$, поскольку мы всегда можем отразить поле и ходы по горизонтали и вертикали.

Поскольку любой ход слона осуществляет переход от координат (x, y) в координаты $(x \pm a \pm b, y \pm a \pm b)$, то любая координата, которая может быть получена в ходе перемещений слона будет иметь вид $(x + p \cdot \text{НОД}\,(a, b), y + q \cdot \text{НОД}\,(a, b))$. Очевидно, что если достижимо поле $(1, 1)$, то $\text{НОД}\,(a, b) = 1$.

5. В пунктах 2 и 4 накладывались необходимые условия, в этом же пункте мы покажем, что этих условий достаточно для достижимости клеток, имеющих с данной общую вершину. А именно, покажем, что мы всегда можем достигнуть клетки $(1, 1)$ из $(0, 0)$, если выполнены два условия: (а) $\text{НОД}\,(a, b) = 1$ и (б) $(a + b)$ не делится на 2.

Для начала покажем, что существует такой нечётный s, что из поля $(0, 0)$ достижимо поле $(1, s)$. То есть, существуют коэффициенты $t_1, \ldots, t_4$, что

$$t_1(a+b, a-b)+t_2(a-b, a+b)+t_3(a+b, -a+b)+t_4(a-b, -a-b) = (1, s)$$

(если коэффициент t_i отрицателен, то мы берём противоположный ход и делаем его $-t_i$ раз).

В данном уравнении нас не интересуют правые части, только левые, поэтому мы можем свести его к такому:

$$t_1(a + b) + t_2(a - b) + t_3(a + b) + t_4(a - b) = 1$$

Заметим, что по теореме Безу найдутся такие p и q, что $pa + qb = 1$. Это соотношение приводит нас к системе:

$$\begin{cases} p = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 \\ q = t_1 - t_2 + t_3 - t_4 \end{cases}$$

Без уменьшения общности можем положить $t_3 = t_4 = 0$, и взять $t_1 = \frac{p+q}{2}$ и $t_2 = \frac{p-q}{2}$. Заметим, что мы можем подобрать такие p и q, что оба будут нечётными, что сделает t_1 и t_2 целыми.

В самом деле, заметим, что p или q нечётно (иначе сумма $pa + qb$

чётна и потому не может равняться 1). Пусть, тем не менее, какое-то число из них чётно — например, q. Раз так, то p и a нечётны (иначе сумма $pa + qb$ чётна). Поскольку же по условию $a + b$ нечётно, то b чётно. И тогда числа $p' = p + b$ и $q' = q - a$ оба нечётные, но $p'a + q'b = 1$.

Теперь заметим, что вторая координата перемещения, s, также нечётна. Подставив выражения вместо t_1 и t_2, выразим s:

$$s = \frac{p+q}{2}(a-b) + \frac{p-q}{2}(a+b) = ap - bq$$

и заметим, что, раз $ap + bq$ нечётно, то и $ap - bq$ нечётно.

Итак, мы можем, сделав $\frac{p+q}{2}$ ходов $(a+b, a-b)$ и $\frac{p-q}{2}$ ходов $(a-b, a+b)$, достигнуть поля $(1, s)$ из поля $(0, 0)$. Кроме того, путём надлежащей замены ходов на симметричные, достижимы также все симметричные поля: $(\pm 1, \pm s)$ и $(\pm s, \pm 1)$. Давайте назовём соответствующие последовательности ходов *мета-ходами*.

Поэтому мы можем воспользоваться идеей из пункта 3 и достигнуть поля $(1, 1)$, выполнив мета-ход $(1, s)$ и потом $\lfloor \frac{s}{2} \rfloor$ мета-ходов $(s, -1)$ и $(-s, -1)$ при положительном s (соответственно, $\lceil \frac{-s}{2} \rceil$ мета-ходов $(s, 1)$ и $(-s, 1)$ при отрицательном s).

6. Пусть существует последовательность ходов, переводящая слона с поля (x_1, y_1) на поле (x_2, y_2). И пусть дана лента шириной $2 \cdot (a + b)$, содержащая эти два поля. Без уменьшения общности можем предположить, что эта лента — вертикальная.

Поскольку ходы можно выполнять в любом порядке (в силу коммутативности сложения), давайте это делать так:

Рассмотрим текущий ход. Если ход не выводит фигуру за рамки ленты — выполним его и выбросим из последовательности. Если он приводит к выходу за рамки ленты — перенесём его в конец последовательности и сделаем следующий ход текущим.

Очевидно, что в любой момент найдётся хотя бы один ход, который не приводит к выходу за рамки ленты. В самом деле, все горизонтальные перемещения — это сдвиги на $a + b$ и $a - b$ влево и вправо. Если среди ходов, оставшихся в последовательности, есть как перемещающие влево, так и вправо — то выберем тот, который перемещает фигуру вглубь ленты: даже из центра ленты для хода доступна половина её ширины, то есть $a + b$ полей, что достаточно для любого хода. Если же оставшиеся ходы направлены в одну сторону, то они направлены в сторону колонки x_2 и не переходят через неё, а данная колонка также находится внутри ленты.

7. Дойти из поля $(0,0)$ до поля $(2,2)$ можно, сперва сделав ход $(1+t, 1-t)$, а потом $(1-t, 1+t)$.

Если НОД $(a,b) > 2$, то дойти из поля $(0,0)$ до $(2,2)$ не получится, поскольку координаты любого поля, достижимого из $(0,0)$, будут иметь вид (t_1a+t_2b, t_3a+t_4b), то есть, делиться на НОД (a,b). $(1,1)$-слон и $(2,0)$-слон достигают поля $(2,2)$, при этом НОД $(1,1) = 1$ и НОД $(2,2) = 2$.

8. Если (a,b)-слон не позволяет дойти из поля $(0,0)$ до поля $(1,1)$, то имеет место хотя бы одно из свойств: $(a+b)\,\vdots\,2$ и НОД $(a,b) > 1$.

Если НОД $(a,b) = 2$, то мы можем вместо (a,b)-слона рассматривать $(\frac{a}{2}, \frac{b}{2})$-слона, что вступает в противоречие с требованием (б) условия данного пункта. Если НОД $(a,b) > 2$, то по предыдущему пункту он не достигает поля $(2,2)$. Поэтому, неизбежно, НОД $(a,b) = 1$.

Остаётся случай НОД $(a,b) = 1$ и $(a+b)\,\vdots\,2$. Данный слон не достигает поля $(1,1)$ и не является $(2x,2y)$-слоном для каких-то целых x и y.

По аналогии с предыдущими пунктами заметим, что существуют p и q, что $ap+bq = 1$. Также заметим, что $ap-bq$ нечётно. Обозначим $ap-bq$ за s. Составим мета-ход

$$(p+q)(a+b, a-b)+(p-q)(a-b, a+b) = (2ap+2bq, 2ap-2bq) = (2, 2s)$$

и симметричные ему $(\pm 2, \pm 2s)$ и $(\pm 2s, \pm 2)$. Заметим, что, поскольку s нечётно, то $2s$ не кратно 4. Обозначим за z знак числа s — это 1, если $s > 0$ и -1, если $s < 0$.

По аналогии с предыдущими пунктами, мы можем построить последовательность из одного мета-хода $(2, 2s)$ и k мета-ходов $(2s, -2\cdot z)$ и $(-2s, -2\cdot z)$, которая приведёт к полю $(2, 2s-4k\cdot z)$. Ясно, что можно подобрать такой k, что

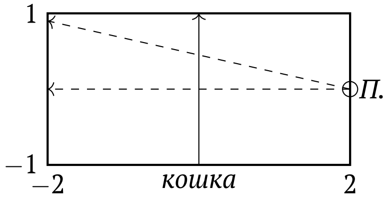
$$2s-4k\cdot z = 2(2r+1)-4k\cdot z = 2$$

и что последовательность при таком выборе k приведёт слона на поле $(2,2)$.

Поэтому, слон достигает поля $(2,2)$, не достигая поля $(1,1)$ и не являясь $(2x,2y)$-слоном, если и только если НОД $(a,b) = 1$ и $(a+b)\,\vdots\,2$.

Задача 2. Кошки на координатной плоскости

1. Нарисуем происходящее:



Построим математическую модель движения кошки и П. — параметризуем их движение временем (параметром t), изменяющимся от 0 до 1. Для этого вспомним формулу, позволяющую вычислить положение точки на отрезке $[x_0, x_1]$ в момент времени t при равномерном прямолинейном движении (данная формула выводится в пункте 7 данной задачи):

$$x_t = x_1 \cdot t + x_0 \cdot (1 - t)$$

Итак, в момент времени 0 оба участника находятся в начальных точках. В момент времени t кошка находится в точке $(0, 2t - 1)$, а П. — в точке

$$(-2, y) \cdot t + (2, 0) \cdot (1 - t) = (2 - 4t, yt)$$

Легко заметить, что П. пересечёт путь кошки в момент $t = \frac{1}{2}$. Поскольку кошка движется в сторону увеличения координаты Y, имеем:

$$y \cdot \frac{1}{2} = \frac{y}{2} > 2 \cdot \frac{1}{2} - 1 = 0$$

То есть, П. должен стремиться к финишным точкам вида $(-2, y)$, где $y > 0$.

2. Заметим, что если финишная точка П. лежит правее прямой $x = 3$, то тогда П. не пересечёт след кошки несчастья и выполнит условие задачи.

Теперь посмотрим, какие возможны финишные точки за прямой $x = 3$. Чем дальше (левее) точка, тем быстрее до прямой $x = 3$ дойдёт П., значит, тем меньше шансы, что П. не пересечёт след кошки.

Пусть П. идёт в точку (x, y). Составим уравнение встречи П. и кошки несчастья.

$$(3,0)(1-t)+(3,3)t=(9,1.5)(1-t)+(x,y)t$$

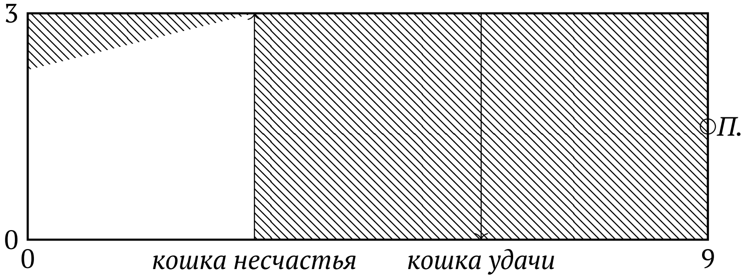
Отсюда можно выразить координаты (x,y) через параметр t (момент встречи):

$$\begin{cases} x(t)=\frac{3(3t-2)}{t} \\ y(t)=\frac{3(3t-1)}{2t} \end{cases}$$

И далее можно выразить y через x:

$$\begin{cases} t=\frac{6}{9-x} \\ y=\frac{x+9}{4} \end{cases}$$

Из изложенного ясно, что П. устроят все финишные точки, которые лежат слева от прямой $y=\frac{x+9}{4}$ внутри прямоугольника $[0,9]\times[0,3]$, а также все точки внутри прямоугольника $(3,9]\times[0,3]$.



3. Выведем формулу для координаты кошки в зависимости от времени. Известно, что равномерное прямолинейное движение описывается уравнением

$$p(t)=v\cdot t+p_0$$

В двумерном случае формула получается такой:

$$(x(t),y(t))=(v_x\cdot t+x_0,v_y\cdot t+y_0)$$

Также мы знаем, что в момент времени $t=1$ кошка окажется в точке (x_1,y_1).

Значит, $x(1)=x_1=v_x\cdot 1+x_0$, то есть $v_x=x_1-x_0$. То есть,

$$x(t)=(x_1-x_0)\cdot t+x_0=x_1\cdot t+x_0\cdot(1-t)$$

. Аналогично проведя вычисления с координатой Y, получим:

$$(x(t), y(t)) = (x_1 \cdot t + x_0 \cdot (1 - t), y_1 \cdot t + y_0 \cdot (1 - t))$$

Задачи профильного варианта 8 класса

Задача 1. *(a, b)*–слоны

Смотреть 7 класс, задачу №1.

Задача 2. Кошки на координатной плоскости

Смотреть 7 класс, задачу №2.

Задача 3. Рекуррентные функции

1. Рассмотрим $f(a, b)$. Если $a \geq b$, тогда либо $b = 0$ (и результат функции определён однозначно), либо $f(a, b) = f(a - b, a)$, при $b > 0$. Далее мы можем продолжить процесс вычисления, и поскольку: (а) сумма $a + b$ при каждой итерации уменьшается хотя бы на 1 и (б) a и b всегда неотрицательны, то неизбежно один из аргументов станет равным 0 и процесс завершится.

   Если же $a < b$, то $f(a, b) = f(b, a)$ и вычисление сводится к предыдущему случаю.

   Таким образом, функция задана для любых пар (a, b), причём процесс вычисления единственен.

2. Если $f(a, 0) = a$, то $f(a, b) = \text{НОД}\,(a, b)$. В самом деле, $\text{НОД}\,(a, b) = \text{НОД}\,(a - b, b)$, то есть на каждом шаге вычисление НОД сохраняется. На последнем же шаге $\text{НОД}\,(a, 0) = a$, но это же значение и является результатом вычисления.

   Заметим, что данное вычисление — не что иное, как алгоритм Евклида.

3. В общем случае, если $f(a, 0) = g(a)$, то $f(a, b) = g(\text{НОД}\,(a, b))$, поскольку данное изменение повлияет только на последний шаг вычисления.

4. Данное определение функции не отличается по структуре вычисления от первого пукта — различается только результат. Поэтому функция по-прежнему будет определена во всех точках.

5. Пусть $T(x) = x + k$ и пусть $g(a) = f(a, 0) = f(0, a)$. Тогда перепишем условие:

$$f(a,b) = \begin{cases} g(a), & b = 0 \\ k + f(a-b, b), & a \geq b > 0 \\ f(b,a), & a > b \end{cases}$$

или иначе: $f(a,b) = g(\text{НОД}\,(a,b)) + ks$, где s — количество вычитаний, требуемых, чтобы получить НОД (a,b) (т.е. количество шагов алгоритма Евклида).

6. Пусть задана функция h. Мы должны показать, что $h(a,b)$ может быть вычислена только с помощью применения указанных свойств (а) …(е).

Процесс вычисления можно построить следующим образом, разобрав случаи:

Если $a \leq 2$ или $b \leq 2$, воспользуемся пунктом (д).

Если $a > 2$ и $b > 2$, и хотя бы одно из чисел — составное, то мы можем разложить его в произведение простых, и далее по свойствам (а) и (б) мы можем представить $h(a,b)$ как произведение сомножителей вида $h(p,q)$, где p и q — простые.

Таким образом, остаётся случай простых нечётных a и b. Если $a = b$, то мы вычисляем результат по свойству (в). Если $a > b$, то по свойству (г) мы сводим вычисление $h(a,b)$ к вычислению $h(a \bmod b, b)$. Аналогично, $h(a,b) = T(h(b \bmod a, a))$ по свойствам (е) и (г), если $a < b$.

Мы предложили способ вычислить значение для любых неотрицательных натуральных чисел, теперь поясним, почему этот способ всегда завершится получением ответа — то есть, почему мы воспользуемся правилами (а), (б) и (г) конечное количество раз.

В самом деле, в части случаев мы прямо пришли к ответу, использовав свойства (в) и (д), а в части — использовали пункты (а), (б) и (г), сведя задачу к вычислению функции h от других аргументов. Но при каждом из сведений аргументы у функции h уменьшаются — один или оба:

- в случае (д), $a \bmod b < a$;
- в случаях (а) и (б), если $a = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n$ и $n \geq 2$, то $p_i < a$.

Значит, за конечное количество шагов мы придём к базовым случаям (в) и (д) и окончим вычисление.

Данное рассуждение несложно формализовать, если провести его с помощью индукции, например, по $\min(a, b)$.

Решения задач 2015 года

Задачи 5 класса

Задача 1.

A. Вовочка согнул из куска проволоки квадрат со стороной 9 сантиметров. Затем он разогнул проволоку и согнул из неё равносторонний треугольник. Какова длина стороны этого треугольника?

Решение: $9 \times 4 \div 3 = 12$ см.

B. Мальчик Дима в течение 2 часов надувает шары. Каждые три минуты он надувает 8 шаров, а каждый десятый шар у него лопается. Сколько шаров будет у Димы?

Решение: В двух часах 120 минут, отсюда Дима надует $\frac{120}{3} \cdot 8 = 320$ шариков. В результате того, что некоторые шарики лопаются, останется $320 - 320 \div 10 = 320 - 32 = 288$ шариков.

C. Мальчики Миша, Никита и Олег делят конфеты. Сначала Миша взял себе 20% всех конфет и ещё 12 конфет. Затем Никита взял 25% оставшихся конфет и ещё 15 конфет. Наконец, Олег взял 30% оставшихся конфет и ещё 21 конфету. И конфеты закончились. Кто из мальчиков взял больше конфет?

Решение: То, сколько конфет взял каждый из мальчиков, легко установить «обратным ходом».

После первой части хода Олега оставалась 21 конфета, и это составляло 70% от количества конфет, которое было до хода Олега. Значит, до хода Олега на столе лежало $\frac{21}{0.7} = 30$ конфет — и все их взял Олег.

После первой части хода Никиты оставалось $30 + 15 = 45$ конфет, которые составляли 75% от всех имеющихся конфет. Таким образом, перед ходом Никиты на столе было $\frac{45}{0.75} = 60$ конфет, 30 из которых взял Олег, а, соответственно, 30 — Никита.

Наконец, после первой части хода Миши на столе оставалось 72 конфеты, которые составляли 80% от конфет, имевшихся в наличии до начала дележа. Значит, в начале было $\frac{72}{0.8} = 90$ конфет, по 30 из которых взяли Олег и Никита — соответственно, Мише также досталось 30 конфет.

Таким образом, мальчики взяли поровну конфет.

Задача 2.

B. Три числа A, B и C связаны соотношениями:

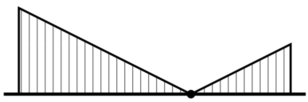
$$A + B = 12.3; \qquad B + C = 18.9; \qquad A + C = 6.1.$$

Не находя эти числа, укажите самое большое среди них. Результат обоснуйте.

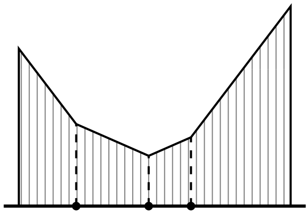
Решение: $B > C$, так как $A + B$ больше, чем $A + C$. Также $B > A$, так как $B + C > A + C$. Отсюда B — самое большое из чисел.

C. Тренер расставил спортсменов на прямой дорожке. По сигналу тренера спортсмены бегут к одному из них, на которого указывает тренер, а затем возвращаются на свои места. Какой из спортсменов пробежит наибольшее расстояние после нескольких таких стартов?

Решение: Отметим на прямой спортсмена, на которого в какой-то момент указал тренер, и изобразим зависимость расстояния, которое должны пробежать другие спортсмены, от их положения на прямой.



Например, после выбора тренером трёх спортсменов зависимость расстояния, которое пробегут другие спортсмены за три старта, от их положения на прямой, будет выглядеть так:



В любом случае, после нескольких стартов зависимость преодолённого расстояния от положения на дорожке будет выглядеть как сумма нескольких функций, изображённых на первом рисунке в этом пункте. Всякая такая функция имеет два локальных максимума на краях дорожки — то есть достаточно близко к каждому из краёв дорожки **все** функции, появляющиеся в процессе стартов, будут возрастать при движении к этому краю.

Поэтому наибольшее расстояние будет пройдено одним из крайних спортсменов — чтобы понять, каким именно, в каждом случае нужно смотреть на них индивидуально.

Задача 4.

A. На ёлке 2015 шаров. На один синий шар приходится 4 красных. На сколько процентов синих шаров на ёлке меньше, чем красных?

Решение: По определению,

Величина A на k процентов меньше величины B, если

$$A = \frac{100-k}{100} \cdot B.$$

Красных шаров на ёлке в 4 раза больше, чем синих — иными словами, синих шаров в 4 раза или на 75% меньше, чем красных.

B. Добрыня Никитич раз мечом направо махнёт — 3 врага упадёт, раз мечом налево махнёт — 2 врага упадёт. Рубится богатырь — раз налево, два раза направо. За сколько взмахов богатырь разобьёт вражье войско, состоящее из 564 человек? А если рубится богатырь — раз направо, два раза налево?

Решение: За один «период» при первом способе борьбы Добрыня убивает 8 врагов, а при втором способе — 7.

$564 : 8 = 70$ (остаток 4). В таком случае Добрыне понадобится $70 \cdot 3 + 2$ взмаха: после 70 «периодов» останутся 4 врага, которых можно будет убить за два дополнительных взмаха.

$564 : 7 = 80$ (остаток 4). Добрыне понадобится $80 \cdot 3 + 2$ взмаха — после 80 «периодов», опять же, останется 4 врага, которых можно убить за два взмаха.

C. Вовочке на дом задали разделить некоторое число на 2, 3 и 6. Папа, проверяя домашнее задание, услышал от Вовочки следующее:

«Я забыл, какое число задали, поэтому делил другое число, которое сам придумал, — и два раза разделилось без остатка, а один раз получился остаток». Папа уверен, что Вовочка допустил ошибку. Как он об этом догадался?

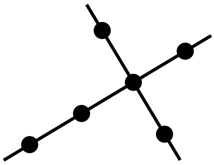
Решение: Если у Вовочки получилось разделить придуманное им число нацело на 6, то он точно неправ: если число нацело делится на 6, то оно делится на 2 и на 3, и остатка получиться не могло.

Если же Вовочке удались деления на 2 и на 3, то придуманное им число автоматически делится на 6. То есть, если у Вовочки получились два деления, то и третье тоже должно было получиться.

Задача 5.

A. Боря утверждает, что он может нарисовать 6 точек на двух прямых, три на одной и 4 на другой. Может ли такое быть?

Решение: Да, конечно может:



B. Сколькими способами можно разрезать шнурок от ботинка длиной 36 см на кусочки длиной 3 см и 5 см?

Решение: Выпишем сначала все способы представить *число* 36 в виде суммы нескольких чисел 3 и 5. Их не так много:

$$36 = 3 \cdot 12$$

$$36 = 3 \cdot 7 + 5 \cdot 3$$

$$36 = 3 \cdot 2 + 5 \cdot 6$$

Способ разрезать шнурок на 12 одинаковых кусков ровно один. Теперь рассмотрим второе представление: нам предстоит разрезать шнурок на 10 кусков, 3 из которых имеют длину 5. В каждом разрезании куски упорядочены от левого конца шнурка к правому, поэтому каждое разрезание определяется тем, под какими номерами из имеющихся десяти идут куски длины 5.

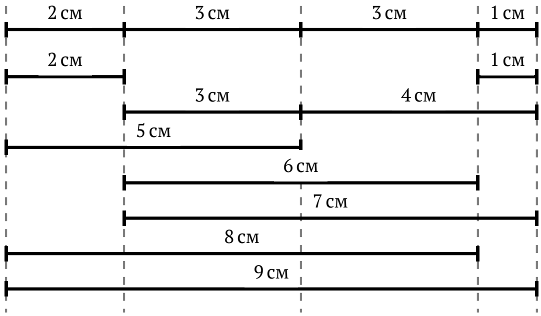
Выбрать три номера из десяти можно C_{10}^{3} способами — таково определение биномиального коэффициента. Значит, это и есть количество способов разрезать шнурок на 7 кусков длиной 3 см и 3 куска длиной 5 см.

Со случаем, когда 6 кусков имеют длину 5, поступим аналогично. Получаем ответ:

$$1 + C_{10}^{3} + C_{10}^{6}.$$

C. У мальчика Лёвы есть волшебная линейка длиной 9 сантиметров. Может ли он нанести на эту линейку три промежуточных деления так, чтобы любой отрезок длиной от 1 до 9 сантиметров можно было измерить с точностью до сантиметра?

Решение: Поставим дополнительные деления на расстоянии 2, 5 и 8 сантиметров от левого края линейки. Любой отрезок натуральной длины может быть получен как отрезок между этими делениями и краями линейки — покажем, как это сделать:



Задача 6.

A. Пять хамелеонов съедают всех мух с пяти кустов за пять минут. На сколько надо увеличить число хамелеонов, чтобы они съели всех мух с 50 кустов за 50 минут?

Решение: Количество хамелеонов не нужно увеличивать, потому что в их изначальном составе за 10 «подходов» по 5 минут хамелеоны объедят все 50 кустов.

B. В школе 350 учеников и 175 парт. Ровно половина девочек сидит за одной партой с мальчиками. Можно ли пересадить учеников так, чтобы ровно половина мальчиков сидела за одной партой с девочками?

Решение: Если ровно половина девочек сидит с мальчиками, то другая половина девочек занимает некоторое количество парт полностью. То есть, половина всех девочек — это чётное число, а отсюда количество девочек делится на 4.

Если бы мы хотели, чтобы ровно половина мальчиков сидела за партой с девочками, то по аналогичным причинам количество мальчиков должно было бы делиться на 4. Однако одновременно делиться на 4 количества девочек и мальчиков не могут, так как тогда оказалось бы, что 350 делится на 4, а это неверно.

C. В классе учится не менее 12 девочек и не более 16 мальчиков. У каждого из них в классе одинаковое число друзей, среди которых обязательно есть девочка и мальчик. Известно также, что у каждой девочки друзей среди мальчиков больше, чем среди девочек, а у каждого мальчика друзей среди девочек не больше, чем среди мальчиков. Какое наименьшее число друзей может быть у школьников в этом классе?

Решение: Обозначим наименьшее число друзей у школьников через D и докажем, что $D = 6$. Мы знаем, что в классе Д девочек и М мальчиков, при этом

$$12 \leq \text{Д}; \qquad \text{М} \leq 16.$$

1) $D > 2$. Действительно, если бы у школьников было по 2 друга, то девочки не могли бы иметь друзей–девочек, что противоречит условию.
2) $D > 3$. Если у каждого школьника было бы по 3 друга, то каждая девочка могла бы иметь не менее двух друзей–мальчиков, а каждый мальчик — не более одной подруги–девочки. Обозначив за $\mathcal{F}$ количество дружеских связей «мальчик–девочка», получим
$$2 \cdot 12 \leq 2 \cdot \text{Д} \leq \mathcal{F} \leq \text{М} \leq 16 \text{ — противоречие.}$$
3) $D > 4$. Если у каждого школьника по 4 друга, то каждая девочка имеет не менее трёх друзей–мальчиков, а каждый мальчик — не более двух друзей–девочек. Получаем, что
$$3 \cdot 12 \leq 3 \cdot \text{Д} \leq \mathcal{F} \leq 2 \cdot \text{М} \leq 2 \cdot 16 \text{ — противоречие.}$$
4) $D > 5$ — аналогично предыдущему пункту.
5) $D = 6$. Приведём пример дружеских связей между 16 мальчиками и 12 девочками, удовлетворяющих условию. Разделим

мальчиков на 4 группы по 4 человека, а девочек — на 4 группы по 3 человека; разобьём эти группы на пары. Пусть в каждой группе все девочки знакомы друг с другом, все мальчики знакомы друг с другом, а также каждая девочка знает всех мальчиков из группы, парной её группе.

Тогда каждый мальчик знаком с 3 девочками и 3 мальчиками, а каждая девочка — с 2 девочками и 4 мальчиками. Эта ситуация подходит под условие задачи.

Задачи 6 класса

Задача 1.

A. Мальчик Боря согнул из проволоки два квадрата. Когда мальчик Вова положил эти квадраты друг к другу, то получился прямоугольник с бо́льшей стороной 8 дм. Может ли Боря определить, сколько проволоки он израсходовал на квадраты?

Решение: Да, конечно: из того, что бо́льшая сторона прямоугольника равна 8 дм, легко следует, что его меньшая сторона — 4 дм. Тогда квадраты, сложенные Борей, имели сторону 4 дм, и потрачено им было $16 + 16 = 32$ дм проволоки.

B. Коротышки из Цветочного города решили украсить цветами клумбу в форме прямоугольника. Полезная длина клумбы — 240 см, а полезная ширина — 120 см. Цветы было решено сажать в узлах квадратной сетки на расстоянии 20 см друг от друга. Незнайка подсчитал, что нужно

$$(240 : 20) \times (120 : 20) = 12 \times 6 = 72$$

кустика рассады. К сожалению, их не хватило. Сколько же необходимо было привезти кустиков рассады?

Решение: Незнайкины расчёты сработали бы, если бы кустики были посажены в центры квадратов 20×20, на которые можно побить клумбу. Однако коротышки сажали цветы не в центры, а в вершины таких квадратов. Вершин очевидно больше, чем центров: у каждого квадрата есть, например, нижняя левая вершина, и у различных квадратов они различны — однако после выбора всех нижних левых вершин останутся ещё какие-то — например, самая верхняя правая.

Как же посчитать все вершины квадратной сетки? Вершины делятся на строчки, и строчек этих $(120 : 20) + 1$ — внизу от каждого ряда квадратов, а также самая верхняя. Вершин в каждой строчке $(240 : 20) + 1$ — слева от каждого квадрата, а также самая правая.

Получаем ответ на задачу:

$$((120 : 20) + 1) \times ((240 : 20) + 1) = 7 \times 13 = 91.$$

C. У мальчика Димы есть инновационные ножницы и кусок нанолески длиной 192 см. Может ли Дима отрезать от этого куска кусок длиной 90 см? (Нанолеска такова, что её куски можно сгибать пополам, а также прикладывать друг к другу.)

Решение: $192/2^5 = 6$ — сложив леску пять раз пополам, мы получим 32 слоя длиной 6 см. Взяв 15 таких слоёв подряд, мы получим кусок длиной 90 см, его остаётся только отрезать ножницами.

Задача 4.

A. У доктора Ватсона в пальто 4 кармана. В каждый карман он кладёт не менее одного патрона и не больше четырёх патронов. Может ли Шерлок Холмс узнать, сколько патронов в карманах у доктора Ватсона, если ему известно, что в карманах у него разное число патронов?

Решение: Различных натуральных чиселот 1 до 4 — ровно 4 штуки, столько же, сколько карманов у Ватсона. Поэтому единственный вариант разложить патроны так, как указано в условии, — в первый карман один патрон, ..., в четвёртый карман четыре патрона.

На этом основании Холмс может наверняка утверждать, что у Ватсона

$$1 + 2 + 3 + 4 = 10 \text{ патронов.}$$

B. На прощальной вечеринке танцуют девушка Катя и 7 юношей — Боря, Женя, Илья, Гоша, Андрей, Данил и Максим. У каждого из них есть воздушные шарики. Какое наименьшее число шариков может быть у этих весельчаков, если среди них нет двух с одинаковым числом воздушных шариков?

Решение: Попробуем минимизировать количество шариков у танцующих. У танцора с наименьшим количеством шариков всё-таки хотя бы один воздушный шарик. У «второго снизу» по количеству шариков их хотя бы два — и, наконец, у самого богатого на шарики их как минимум 8. Отсюда получаем оценку снизу на общее количество шариков —

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 8 = 36.$$

С. Однажды Винни Пух, Пятачок и ослик Иа-Иа пошли ловить рыбу. Улов оказался не очень большим. Винни Пух поймал половину общего улова без $\frac{2}{5}$ того, что поймали Пятачок и Иа-Иа. Пятачок поймал треть общего улова и $\frac{1}{5}$ того, что поймали Винни Пух и Иа-Иа. Улов ослика Иа-Иа отличался от улова Пятачка на 1 кг. Сколько весил весь улов?

Решение: Обозначим улов Винни Пуха через В, улов Пятачка через П и улов Иа-Иа через И. Тогда на основании данных задачи можно составить систему уравнений:

$$\begin{cases} В = \frac{1}{2} \cdot (В + П + И) - \frac{2}{5} \cdot (П + И)\,; \\ П = \frac{1}{3} \cdot (В + П + И) + \frac{1}{5} \cdot (В + И)\,; \\ И = П \pm 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} -В + 0.2П + 0.2И = 0; \\ 0.8В - П + 0.8И = 0; \\ И = П \pm 1. \end{cases}$$

Прибавим ко второй строке первую, умноженную на 0.8:

$$\begin{cases} -В + 0.2П + 0.2И = 0; \\ -0.84П + 0.96И = 0; \\ И = П \pm 1. \end{cases}$$

Из второй строки получившейся системы видно, что $0.84П = 0.96И$, то есть $И < П$, и, значит, $И = П - 1$. Теперь всё просто:

$$0.84 \cdot \text{П} = 0.96 \cdot (\text{П} - 1)$$
$$0.12 \cdot \text{П} = 0.96$$

- $\text{П} = 8$
- $\text{И} = 7$
- $\text{В} = 0.2 \cdot 8 + 0.2 \cdot 7 = 3$

Таким образом, весь улов весил $8 + 7 + 3 = 18$ килограммов.

Задача 5.

A. «Сейчас 6 часов вечера,» — сказал мальчик Вовочка. Интересно, какую часть составляет оставшаяся часть суток от прошедшей и какая часть суток осталась?

Решение: Осталось 6 часов, а прошло 18. Поэтому осталась четвёртая часть суток, и она составляет третью часть от трёх четвертей, которые уже прошли.

C. Можно ли в выражении

$$\frac{A+B}{C} + \frac{D}{E+F}$$

заменить буквы числами 1, 2, 3, 4, 5, 6 так, чтобы различным буквам соответствовали различные числа, и значение получившегося выражения было бы равно 1?

Решение: Приведём дроби в выражении к общему знаменателю:

$$\frac{(A+B)(E+F)+CD}{C(E+F)}.$$

То, что значение этой дроби равно 1, значит, что её числитель равен её знаменателю:

$$(A+B)\underline{(E+F)} + CD = C\underline{(E+F)}$$
$$(A+B-C)(E+F) + CD = 0$$
$$(C-A-B)(E+F) = CD$$

Чтобы равенство было выполнено, число C должно быть больше, чем сумма A и B, и, значит, чем каждое из них. Вооружившись этим соображением, несложно найти ответ: $A = 1$, $B = 2$, $C = 6$, $D = 4$, $E = 3$, $F = 5$.

$$\frac{1+2}{6} + \frac{4}{3+5} = 1.$$

Задача 6.

A. Одним пакетиком чая можно заварить 2 или 3 чашки чая. Маша и Оля разделили пачку чая пополам. Маша заварила 51 чашку чая, а Оля — 73 чашки. Можно ли догадаться, сколько пакетиков чая было в пачке?

Решение: $73 - 51 = 22$ — на столько больше раз Оля использовала пакетик на три чашки, чем Маша. Это значит, что Оля по крайней мере столько раз заваривала пакетиком только две чашки чая.

$22 \cdot 2 = 44$. Значит, Оле осталось заварить 7 чашек, это можно сделать только тремя пакетиками — $7 = 3 + 2 + 2$. Значит, у Оли было 25 пакетиков, а в пачке — 50.

B. Незнайка составил числовой ребус

$$\text{ЭНЭ} + \text{БЭНЭ} = \text{РАБА},$$

в котором разным буквам соответствуют разные цифры. Знайка, посмотрев на ребус, сказал, что цифра, зашифрованная буквой Р, не может быть чётной. Прав ли Знайка?

Решение: Знайка неправ, цифра Р вполне может быть чётной: например, равенство

$$636 + 7636 = 8272$$

является решением ребуса из условия.

C. В коробочке лежат болтики, шайбочки винтики и гаечки — всего 107 штук. Известно, что болтиков в 3 раза больше, чем шайбочек, а шайбочек в 2 раза больше, чем винтиков. Кроме того, винтиков больше, чем гаечек. Сколько гаечек в коробке?

Решение: Заметим, что болтиков, по условию, в 6 раз больше, чем винтиков. То есть, если обозначить количество винтиков за В, а гаечек — за Г, мы получим, что

$$(6 + 2 + 1) \cdot \text{В} + \text{Г} = 107, \qquad \text{В} > \text{Г}.$$

Единственный ответ в таком случае — В $=$ 11, Г $=$ 8: в противном случае число гаечек будет больше, чем множитель у девятки.

Ответ: 8 гаечек.

Задачи 7 класса

Задача 1.

A. Заяц убегает от Волка, который находится от него на расстоянии 100 м. Один прыжок Зайца равен 2 м, а Волка — 3 м. Пока Волк делает 4 прыжка, Заяц делает 5 прыжков. За сколько своих прыжков Волк догонит Зайца?

Решение: $4 \cdot 3 = 12$, $5 \cdot 2 = 10$ — отсюда за четыре волчьих прыжка расстояние между Зайцем и Волком сокращается на 2 м. Значит, Волку потребуется

$$4 \cdot \frac{100}{2} = 200 \text{ прыжков.}$$

B. Вовочке известно, что 24 числа таковы, что среди их попарных произведений ровно 100 отрицательных. Может ли Вовочка определить, сколько среди этих чисел положительны, сколько отрицательных и сколько нулей?

Решение: Количество отрицательных попарных произведений в наборе равно $P \cdot N$, где P — количество положительных чисел в наборе, N — количество отрицательных чисел в наборе.

Для того, чтобы установить P и N, нам нужно представить 100 в виде произведения двух чисел, сумма которых не превосходит 24. Способ сделать это ровно один — $P = 10$, $N = 10$.

Ответ: 10 положительных чисел, 10 отрицательных и 4 нуля.

C. Какое наименьшее число различных цифр нужно выбрать, чтобы любое число от 1 до 100 включительно можно было представить в виде суммы выбранных цифр, в которой каждую из них разрешается использовать не более четырёх раз?

Решение: Докажем, что четырьмя цифрами обойтись нельзя. Среди выбранных цифр, очевидно, должна быть единица. Единицей можно «набрать» числа от 1 до 4 — поэтому второе число, которое мы берём, не должно превосходить 5.

Добавив к нашему «черновику» набора самые большие цифры, 8 и 9, мы заметим, что

$$4 \cdot (1 + 5 + 8 + 9) = 92 < 100,$$

поэтому набор из четырёх цифр нам не подойдет.

А вот набора из пяти цифр — 1, 5, 6, 8, 9 — вполне хватит.

Задача 3.

A. Какой длины получится полоса, если 1 кубический километр разрезать на кубические метры и выложить их в длину?

Решение: $1\,\text{км}^3 = 1\,000\,000\,000\,\text{м}^3$ — поэтому получившаяся полоса будет иметь длину

$$1\,000\,000\,000\,\text{м} = 1\,000\,000\,\text{км}.$$

B. Возьмём отрезок $[0, 1]$. Отрежем от него четверть слева, потом четверть от оставшейся части справа, потом четверть от оставшейся части слева и т. д. Какая точка отрезка точно не будет отрезана?

Решение: На первом шаге мы отрезали слева кусок длиной $\frac{1}{4}$. На втором шаге, справа, — кусок длиной $\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4}$. На третьем шаге, снова слева, — кусок длины $\frac{1}{4} \cdot (\frac{3}{4})^2$. Таким образом, на $2k - 1$–м шаге мы будем отрезать с левой стороны оставшегося отрезка кусок длиной

$$\frac{1}{4} \cdot \left(\left(\frac{3}{4}\right)^2\right)^{k-1}.$$

Так можно посчитать длину всего, что будет отрезано слева:

$$\frac{1}{4} \cdot \left(1 + \frac{9}{16} + \left(\frac{9}{16}\right)^2 + \left(\frac{9}{16}\right)^3 + \ldots\right).$$

Чтобы узнать, чему равна эта сумма, вспомним, как считается сумма геометрической прогрессии:

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

При $q < 1$ число q^{n+1} стремится к нулю при больших n, поэтому сумма всего ряда $1 + q + q^2 + \ldots$ будет равна

$$\frac{1}{1 - q}.$$

Применив это соображение к сумме, которую мы считаем, получим

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1 - \frac{9}{16}} = \frac{4}{7}.$$

На $2k$–м шаге мы отрезаем с правой стороны кусок длиной

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(\left(\frac{3}{4}\right)^2\right)^{k-1}.$$

Поэтому всего с правой стороны будет отрезано

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{7} = \frac{3}{7}.$$

Таким образом, нетронутой будет оставаться единственная точка — $\frac{4}{7}$.

С. На плоскости расположено несколько отрезков. Мальчик Вова отмечает несколько точек пересечения этих отрезков (не обязательно все), считает для каждой отмеченной точки число отрезков, содержащих эту точку, и находит сумму этих чисел. Мальчик Дима считает для каждого из отрезков число отмеченных Вовой точек, лежащих на нём, и находит сумму своих чисел. У кого из мальчиков сумма больше?

Решение: Рассмотрим все пары вида (*отрезок*, *отмеченная точка на этом отрезке*). Вова посчитал в точности все такие пары, так как для каждой отмеченной точки им были учтены все отрезки, которым принадлежит эта точка. Дима тоже посчитал в точности все такие пары, потому что для каждого отрезка учёл все точки, образующие подобные пары с этим отрезком.

Поэтому числа у мальчиков получились одинаковые.

Задача 5.

A. Красная Шапочка имела 2 заряженных револьвера. Убегая от Волка, она дважды в него попала, трижды промазала, и один раз случилась осечка. У Красной Шапочки осталось 7 патронов. Сколькими патронами заряжается револьвер?

Решение: Посчитаем, сколько патронов было у Красной шапочки изначально:

$$7 \text{ осталось} + 2 \text{ в цель} + 3 \text{ мимо} = 12.$$

При осечке патрон не вылетает из пистолета, поэтому технически остаётся у хозяина. Так как у Красной Шапочки два револьвера, то в каждом из них — по 6 патронов.

B. В каждую клетку таблицы 4×4 вписано число 0 или 1 так, что в клетках любого квадрата 2×2 стоит ровно 3 одинаковых числа. Какие значения может принимать сумма чисел в такой таблице?

Решение: Таблица 4×4 естественным образом делится на 4 непересекающихся квадрата 2×2. Сумма чисел внутри каждого из них нечётна (так как там либо три единицы и ноль, либо три нуля и единица). Значит, сумма чисел, поставленных в таблицу вообще, должна быть чётной.

Также заметим, что сумма чисел в таблице не меньше 4 и не превосходит 12 (опять же, посмотрим на суммы чисел в четырёх квадратах 2×2). Значит, остались только варианты 4, 6, 8, 10, 12. Приведём примеры, когда достигается каждый из них:

4:

1	0	1	0
0	0	0	0
1	0	1	0
0	0	0	0

6:

1	0	1	1
0	0	0	1
0	1	0	0
0	0	0	1

8:

0	1	1	1
0	0	1	0
1	0	0	0
1	1	0	1

10:

1	0	1	1
0	0	0	1
1	0	1	1
1	1	1	0

12:

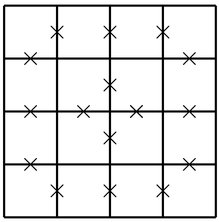
1	0	1	0
1	1	1	1
1	0	1	0
1	1	1	1

C. Квадрат 4×4 состоит из 16 клеток. Какое наименьшее число сторон клеток в этой таблице надо отметить, чтобы у каждой клетки было не менее двух отмеченных сторон?

Решение: Отмеченная сторона принадлежит максимум двум клеткам. У каждой клетки должно быть минимум по 2 отмеченных стороны — поэтому отметок нам нужно сделать не менее чем

$$16 \cdot 2 \; : \; 2 = 16.$$

Приведём пример того, как можно сделать 16 отметок:



Задачи 8 класса

Задача 1.

A. Найдите значение выражения $13 - x$, если значение разности $x - 13$ противоположно числу -13.

Решение: Число $13 - x$ является противоположным к числу $x - 13$, и в условиях задачи равно -13.

B. В выражении

$$\frac{x+y}{z} + t$$

буквы заменили числами 1, 2, 3 и 4 (разные буквы на разные числа). Какое наименьшее значение может принимать это выражение?

Решение: Увеличение чисел x, y и t при прочих равных увеличивает значение выражения из задачи, а увеличение числа z — уменьшает. Поэтому, чтобы как можно сильнее уменьшить значение выражения из задачи, нужно подставить самое большое число вместо z. Поэтому $z = 4$.

Получается выражение $\frac{1}{4}(x + y) + t$. Самое маленькое число выгодно оставить как есть, а числа побольше — «усмирить» коэффициентом $\frac{1}{4}$. Поэтому ответ на задачу —

$$\frac{2+3}{4} + 1 = \frac{9}{4}.$$

C. Решите уравнение

$$x = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1+x}}}$$

Решение:

$$\cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1+x}}} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1+x}{2+x}} = \frac{2+x}{3+2x};$$

$$x = \frac{2+x}{3+2x}.$$

Осталось решить квадратное уравнение:

$$\begin{aligned}
&2x^2 + 3x = x + 2\\
&2x^2 + 2x - 2 = 0\\
&x^2 + x - 1 = 0\\
&\quad\mathcal{D} = 5\\
&x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.
\end{aligned}$$

Нужно также проверить, что каждое из двух значений x не обращает в ноль ни один знаменатель при вычислении цепной дроби — в нашем случае, когда в знаменателе всегда будет $\sqrt{5}$ с ненулевым коэффициентом, это очевидно.

Задача 2.

A. Какое из следующих утерждений неверно?

1) 4101 и 2115 — не взаимно простые числа;
2) 97 — простое число;
3) НОД $(21, 1001) = 1$;
4) НОК $(15, 14) = 210$.

Решение: Неверно третье утверждение: НОД $(21, 1001)$ на самом деле равен 7. Проверку остальных утверждений мы оставляем читателю.

B. Сколько девяток встретится в последовательности 1, 2, 3, …, 2014, 2015?

Решение: Среди чисел 2001–2015 ровно одна девятка, поэтому мы исключим их из рассмотрения на протяжении дальнейшего решения.

Среди чисел от 1 до 10 встречается ровно одна девятка. Значит, среди чисел от 1 до 100 в младшем разряде встретится 10 девяток. Ещё 10 девяток на каждую сотню придут из второго разряда чисел 90–99.

Поэтому среди чисел от 1 до 1000 встретится $10 \cdot (10 + 10) = 200$ девяток, пришедших из двух младших разрядов. Ещё 100 девяток встретится в третьем разряде чисел 900–999. Итого, на каждую тысячу приходится 300 цифр 9 в трёх младших разрядах.

В задаче мы имеем дело числами от 1 до 2000 — в них встретится 600 цифр 9, и ещё одна — после 2000. Ответ: 601 цифра 9.

C. Последовательность составляется по следующему правилу:

$$53,\ 503,\ 5003,\ 50003,\ 500003,\ \ldots$$

Докажите, что в ней есть по крайней мере одно составное число.

Решение: Мы докажем, что в данной последовательности найдётся **бесконечно много** чисел, делящихся на 7. Для начала заметим, что k–ое число в нашей последовательности имеет вид

$$5 \cdot 10^k + 3.$$

Также обратим внимание на то, что при возведении числа 10 в натуральные степени остатки результата при делении на 7 «зацикливаются»:

$$1,\ 3,\ 2,\ 6,\ 4,\ 5,\ 1,\ 3,\ \ldots$$

В частности, для бесконечно многих k число 10^k имеет остаток 5 при делении на 7. В таком случае $5 \cdot 10^k + 3$ делится на 7, что и требовалось.

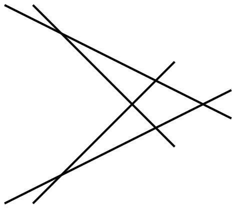
Задача 3.

A. Четыре прямые попарно пересекаются. Какое наибольшее число точек пересечения может получиться?

Решение: Точек пересечения не может быть больше, чем собственно пересечений. В свою очередь, пересечений

$$\frac{4 \cdot 3}{2} = 6.$$

Получить 6 точек пересечения совсем просто:



Задача 5.

A. У какого трёхзначного числа больше всего делителей?

Решение: Делители числа — это произведения различных комбинаций его простых множителей. При равном количестве простых множителей больше делителей будет у числа, у которого простые множители более разнообразны.

Рассмотрим наименьшие простые числа:

$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210;$$
$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 2310.$$

Добавим простых множителей числу 210. $210 \cdot 2 \cdot 3$ — уже четырёхзначное число, поэтому ответом в нашей задаче будет

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 840.$$

У этого числа 32 делителя. То, что у других трёхзначных чисел не бывает больше делителей, можно установить, например, перебором.

B. Из цифр 2, 5, 8 составили семизначное число (возможно, некоторые из этих цифр и не участвовали в записи). Может ли оно делиться нацело на 15?

Решение: Докажем, что результат проделанной в условии процедуры не мог делиться даже на 3. Действительно, всякое число сравнимо по модулю 3 со своей суммой цифр, а каждая из цифр 2, 5, 8 сравнима с двойкой.

Поэтому составленное из них число будет сравнимо по модулю 3 с числом $2 \cdot 7 = 14$, которое на 3 не делится.

C. Пусть a — нечётное число, большее 3. Какой цифрой (чётной или нечётной) является предпоследняя цифра числа a^2?

Решение: Число a можно представить в виде $10 \cdot Y + x$, где x — последняя цифра числа a, и потому нечётная. В свою очередь,

$$(10 \cdot Y + x)^2 = 100 \cdot Y^2 + 20 \cdot Yx + x^2.$$

В этой сумме первое слагаемое не оказывает никакого влияния на предпоследнюю цифру a^2, а второе слагаемое не влияет на чётность предпоследней цифры числа a^2.

Остаётся перебрать квадраты нечётных цифр — 01, 09, 25, 49, 81 — и выяснить, что их предпоследняя цифра чётна. Поэтому искомая предпоследняя цифра в данной задаче будет чётной.

Задача 7.

A. Как изменится частное, если делитель увеличить на $\frac{1}{5}$ его величины?

Решение: $\frac{x}{y+\frac{1}{5}y} = \frac{5}{6} \cdot \frac{x}{y}$.

B. В выражении $2 : 3 : 5 : 7 : 11 : 13$, расставляя по-разному скобки, можно получить разные дроби. Можно ли таким образом получить дробь

$$\frac{2 \cdot 5 \cdot 7}{3 \cdot 11 \cdot 13}?$$

Решение: Отметим, что все числа, данные в задаче, являются простыми, поэтому в некотором месте получающейся дроби будет находиться данный множитель, только если это было «предусмотрено» тем, как оказались расставлены знаки деления. Иными словами, произведение или частное двух чисел из задачи не могут делиться на другое число из задачи.

Теперь осталось заметить, что числа 5 и 7, стоящие рядом в исходном выражении, после приведения выражения к виду единой дроби всегда будут оказываться в разных её частях, вне зависимости от того, как между ними и вокруг них расставлены пары скобок. То есть они не могут одновременно попасть в числитель.

Поэтому дробь, данную в условии, получить нельзя.

Решения задач 2014 года

Задачи 5 класса

Задача 3.

C. Сумасшедший клоун написал на доске два не последовательных натуральных числа и стал ежесекундно прибавлять к ним по единице. Какие числа могли быть написаны, если известно, что через некоторое время из них получились числа, имеющие общий делитель, больший 1?

Решение: Это могли быть какие угодно числа, потому как если разность между написанными числами была равна a — то есть, они были равны N и $N+a$ соответственно — то найдётся число, делящееся на a и большее N: $M = m \cdot a > N$.

Прибавим тогда к каждому из чисел по $M-N$ единиц, получим числа

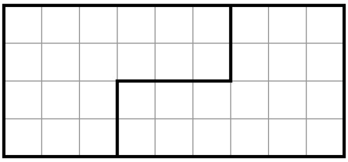
$$M = m \cdot a \;\text{ и }\; (N+a) + (M-N) = (m+1) \cdot a,$$

у которых имеется общий делитель a, по условию больший единицы.

Задача 5.

B. На какое наименьшее число частей можно разрезать прямоугольник 4×9, чтобы из них можно было сложить квадрат 6×6?

Решение: Разреза на две части будет достаточно:



Составить из этих двух частей квадрат более чем просто: нужно подвинуть правую часть вниз и влево — и тем самым расположить её под левой.

Задача 6.

B. В трехзначном числе цифру сотен увеличили на 3, цифру десятков — на 2 и цифру единиц — на 1. В результате получилось новое трехзначное число, в 4 раза большее исходного. Найти исходное число.

Решение: Единственный разряд, не подверженный переносам из более младших разрядов — самый младший. Раз младшая цифра при умножении на 4 увеличилась на 1, то она была нечётной (потому что иначе она возросла бы на чётное число). Единственная подходящая под эти условия цифра — 7 ($7 \cdot 4 = 28$, а цифры 1, 3, 5 и 9 такими свойствами не обладают, в чём легко убедиться).

Таким образом, последняя цифра в числе равна 7, и при умножении на 4 образовался перенос 2 в средний разряд. Так как при умножении на 4 цифра среднего разряда увеличилась на 2, мы можем вычесть из получившейся цифры перенос, тем самым получив, что средняя цифра числа остаётся неизменной при умножении на 4. Значит, она чётна — и подходит под это условие только 0.

Отсюда число заканчивается на 07, и при умножении на 4 переноса из среднего разряда в старший не возникает. Поэтому старшая цифра при умножении на 4 увеличивается на 3 и не даёт никакого переноса в следующие разряды. Под это условие подходит только единица.

Получаем ответ — 107.

Задачи 6 класса

Задача 1.

A. Боря в лесу каждые 10 метров находил гриб. Сколько метров он прошел от первого найденного гриба до последнего, если он собрал 30 грибов?

Решение: Давайте считать так — до каждого найденного Борей гриба, кроме самого первого, ему надо было пройти 10 метров. Найденных грибов, кроме самого первого, всего 29 штук. Значит, пройдено было $29 \cdot 10 = 290$ метров.

B. Существует ли такое двузначное число, что если переставить в нем цифры, то оно станет в 3 раза больше?

Решение: Напомним читателю признаки делимости на 3 и на 9: число делится на 3 тогда и только тогда, когда его сумма цифр делится на 3. Аналогично, число делится на 9 только вместе со своей суммой цифр.

Значит, если число, требуемое в условии, есть, то сумма его цифр делится на 3, так как из его цифр может быть составлено число, полученное умножением на 3. Значит, само число делится на 3.

После перестановки его цифр, так как число увеличилось в три раза, результат стал делящимся на 9. Значит, сумма составляющих его цифр делилась на 9 — и исходное число делилось на 9.

Есть всего 10 двузначных чисел, делящихся на 9 — одно из них равно 99 (очевидно не подходит под условие задачи), а цифры остальных имеют разную чётность (ведь их сумма равна 9), поэтому при их перестановке число поменяет чётность.

При умножении же на 3 чётность числа не меняется, поэтому чисел, подходящих под условие задачи, нет.

C. Найдите наименьшее число, сумма цифр которого делится на 3, на 5 и на 7, если в записи этого числа могут быть использованы только цифры 3, 5 и 7 (не обязательно каждая).

Решение: Если сумма цифр числа делится на 3, 5 и 7, то она обязана делиться на их наименьшее общее кратное, равное 105. Мы построим число с суммой цифр, равной 105, так, что будет понятно: чисел с большей суммой цифр (210, 315, ...), меньших его, не бывает.

Минимальное количество разрядов в подходящем нам числе может быть равно $105 / 7 = 15$, так как 7 — наибольшая цифра, которую мы можем использовать. Тогда рассмотрим число, состоящее из 15 семёрок:

$$777\,777\,777\,777\,777.$$

Оно имеет наименьшее возможное количество разрядов; также в числе из 15 разрядов не могут быть использованы тройки и пятёрки, так как тогда сумма цифр обязана будет быть меньше 105. Значит, оно наименьшее — и является ответом на данную задачу.

Задача 2.

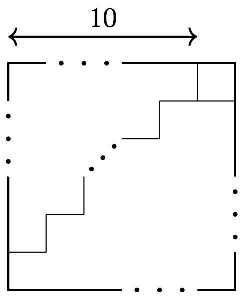
В. На доске 4×4 произвольно расставлены 6 фишек. Верно ли, что всегда существуют такие две строки и такие два столбца, что все фишки обязательно в них находятся?

Решение: Если поставить 4 из имеющихся 6 фишек в клетки главной диагонали таблицы, то, очевиндно, двух строк и столбцов не найдётся.

Задача 3.

В. У мальчика Бори имеется прямоугольник 10×12 и квадратик 1×1. Может ли Боря разрезать этот прямоугольник на 2 части, не являющиеся прямоугольниками, а затем из этих двух частей и данного квадратика сложить квадрат 11×11?

Решение: Разрежем квадрат 11×11 на три части, одна из которых — квадрат со стороной 1, а из двух других можно сложить прямоугольник 10×12:



Задача 4.

С. 20 блюдечек расставлены по кругу, на каждом лежит по конфете. Родители разрешили мальчику Вовочке брать конфеты с блюдечек при условии, что он будет послушно придерживаться следующего правила: он может взять конфету с любого (по его выбору) блюдца, но при этом, если хотя бы одно из соседних блюдец пусто, Вова должен вернуть взятую им конфету, положив ее на одно из этих пустых блюдечек. Если же в обоих соседних блюдцах есть конфеты, то взятую конфету Вовочка забирает себе. Какое наибольшее число конфет может забрать Вовочка?

Решение: Больше 18 конфет Вовочка забрать не может — если среди конфет останутся две, то ни у одной из них не будет двух занятых соседних блюдец. Придумаем стратегию, как Вовочке взять ровно 18 конфет.

Возьмём «каждую вторую» конфету из 20, лежащих в круг. Остальные конфеты можно «сдвинуть» так, чтобы они стали лежать подряд, забирая их с блюдец и помещая на одно из пустующих соседних.

Теперь мы имеем 10 подряд лежащих конфет. Заберём себе вторую из них, возьмём с блюдца первую и переложим её на место второй. Осталось 9 подряд лежащих конфет. Повторяя описанную процедуру, можно получить 3 подряд лежацих конфеты — возьмём среднюю из них, и останется ровно две.

Задачи 7 класса

Задача 1.

A. Винни-Пух и его друзья поселились в одном доме. Винни-Пух поселился на первом этаже, Ослик Иа-Иа на втором, а Сова — на девятом. До квартиры Винни-Пуха ступенек нет. Однажды у Совы заболели крылья, и ей пришлось подниматься домой пешком. Во сколько раз больший путь нужно проделать Сове по сравнению с Осликом, когда он также идет к себе домой?

Решение: Ослику нужно с первого этажа подняться на один этаж, чтобы попасть к себе домой, а Сове — на восемь. Поэтому ей нужно проделывать в восемь раз больший путь.

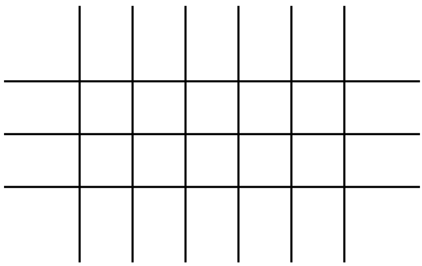
B. На столе стоят несколько (больше одной) тарелок. На каждой тарелке лежат конфеты, причем на разных тарелках — разные количества конфет, и ни одна тарелка не пустует. Если бы на каждую тарелку добавили бы некоторое, одно и то же для всех тарелок, число конфет, то общее число конфет на столе удвоилось бы. А если бы удвоили число конфет на каждой тарелке, то общее число конфет увеличилось бы на 21 конфету. Сколько тарелок стоит на столе?

Решение: Удваивая количество конфет, мы увеличиваем это количество на 21. Значит, всего конфет 21. Удвоения количества конфет (то есть, опять же, увеличения на 21) можно также добиться, если добавить на каждую тарелку одинаковое количество конфет. Значит, количество тарелок — 3, 7 или 21.

Разложить 21 конфету по 21 тарелке так, чтобы ни одна не пустовала, можно единственным способом: на каждую тарелку по конфете. Но тогда на всех тарелках будет одинаковое количество конфет — это не то, что требуется в условии. Чтобы разложить конфеты на 7 тарелок, их должно быть хотя бы $1 + \ldots + 7 = 28$. Поэтому единственный оставшийся ответ — 3 тарелки: например, на них могло лежать 5, 7 и 9 конфет соответственно.

C. Кот Матроскин считает, что он может нарисовать на плоскости 9 прямых так, что число пар пересекающихся прямых было равно числу пар параллельных прямых. Прав ли кот Матроскин? Изменится ли ответ, если число прямых будет 10?

Решение: Из 9 прямых можно сформировать $9 \cdot 8 / 2 = 36$ пар. Значит, Матроскин хочет добиться, чтобы было 18 пар параллельных прямых и 18 пересекающихся. Этого легко добиться, расположив прямые следующим образом:



Если же прямых было бы 10, то они составляли бы $10 \cdot 9 : 2 = 45$ пар — а нечётное количество пар прямых не может разделиться поровну.

Задача 2.

A. Какое наименьшее число жильцов нужно вселить в 30-ти квартирный дом, чтобы в любых наугад выбранных трех квартирах проживало не менее 7 человек?

Решение: Заметим, что количество жильцов может не превосходить 2 не более чем в двух квартирах, так как иначе возьмём три таких «маленьких» квартиры, в них не наберётся 7 жильцов.

Рассмотрим две самых малонаселённых квартиры. В них может жить 2, 2, или 2, 1, или 1, 1, или больше жильцов. В первом случае в оставшихся квартирах как минимум по 3 жильца, во втором случае в каждой из оставшихся квартир минимум по 4 жильца, и в третьем случае в каждой из оставшихся квартир минимум по 5 жильцов.

Посчитав минимальное число жильцов в каждом из случаев выше, получаем, что нижня оценка на количество жильцов в доме —

$$28 \cdot 7 + 4 = 88 \quad \text{жильцов.}$$

88 жильцов действительно можно поселить: в две квартиры по 2 человека, в остальные по 3.

В. Вова и Дима независимо друг от друга задумали по числу. Затем каждый из мальчиков умножил задуманное число на 11 и зачеркнул в произведении цифру десятков, после чего каждый из них умножил результат на 7 и опять зачеркнул в полученном произведении цифру десятков. В результате у каждого получилось число 23. Можно ли утверждать, что мальчики задумали одно и то же число?

Решение: Нет, утверждать однозначность нельзя: рассмотрим два различных числа, 19 и 29, и проделаем с ними операции из условия.

$$19 \to 209 \to 29 \to 203 \to 23;$$
$$29 \to 319 \to 39 \to 273 \to 23.$$

Получился один и тот же результат — значит, мальчики вполне могли задумать различные числа.

Задача 5.

В. Можно ли вписать в клетки квадрата 3×3 числа от 1 до 9 (каждое из чисел — ровно 1 раз, и в каждую клетку — ровно одно число) так, чтобы суммы чисел во всех строчках и столбцах были (а) нечетные? (б) четные?

Решение: Сделать все суммы нечётными просто —

2	1	4
3	5	7
6	9	8

Сделать все суммы чётными невозможно: рассмотрим три строки — сумма всех чисел в таблице равна сумме сумм в строках. Если все суммы в строках были бы чётны, то и сумма всех чисел в таблице обязана была бы оказаться чётной. А она равна $1 + \ldots + 9 = 45$.

Задача 6.

С. Мальчики Вова и Дима по очереди составляют $2m$–значное число, используя только цифры 6, 7, 8 и 9. Первую цифру числа пишет Вова, вторую — Дима, третью — Вова и т.д. При каких m Дима может добиться того, что полученное число будет делиться на 9?

Решение: При m, делящемся на 3, у Димы выигрышная стратегия, разумеется, есть: после каждого кода Вовы ему нужно писать цифру, дающую в сумме с написанной Вовой число 15. Тогда после $2m$ ходов сумма цифр, написанных ребятами, будет делиться на 45 — а значит полученное число окажется делящимся на 9.

Осталось привести «выигрышную стратегию» для Вовы в остальных случаях — то есть, такой план действий, который лишит Диму возможности добиться желаемого.

1. Пусть m даёт остаток 1 по модулю 3.

   Первым своим ходом Вова может написать цифру 7.

   Далее перед каждым ходом Вовы следует ход Димы. Вова должен «дополнять» написанную Димой цифру до 15.

   Тогда перед последним ходом Димы сумма написанных цифр будет иметь остаток 7 при делении на 9. Прибавление любого из чисел 6–9 к семи не сделает сумму цифр (а значит и записанное число) делящейся на 9.

2. Если же m даёт остаток 2 по модулю 3, то рассмотрим отдельно первый ход Вовы и последние три хода: Дима–Вова–Дима.

   Первым ходом Вова должен написать цифру 8, потом, вплоть до последних трёх ходов, — «дополнять» цифру, написанную Димой на предыдущем ходе, до 15. Наконец, на предпоследнем ходе игры Вова должен написать цифру 9.

Тогда сумма цифр, которую получат мальчики в конце игры, будет равна

$$8 + 15 \cdot 3k + 9 + x_1 + x_2.$$

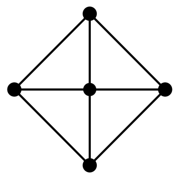
Здесь x_1 и x_2 — цифры, которые напишет Дима в результате двух своих последних ходов, пока нами не обсуждавшихся. Эта сумма даёт остаток 8 при делении на 9, и несложно убедиться перебором, что какие две цифры из данных нам к восьми ни прибавляй, сумма, кратная 9, получиться не может.

Задача 7.

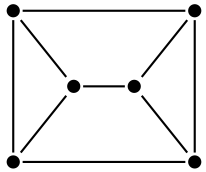
В. При каких $n > 3$ на плоскости можно расположить n точек и соединить их отрезками, так, чтобы из каждой точки выходило по 3 отрезка, и никакие из отрезков не пересекались по внутренним точкам?

Решение: При нечётных n этого сделать нельзя: у отрезков, которые хочется провести, тогда будет $3n$ «концов» — а их должно быть чётное число, потому что у каждого отрезка два конца.

При $n = 4$ точки можно расположить так:



При $n = 6$ — следующим образом:



Наконец, любое чётное число, большее 3, можно представить в виде суммы четвёрок и шестёрок, поэтому, взяв несколько копий картинок, нарисованных выше, мы добьёмся нужного нам числа вершин.

Задача 8.

A. Борина комната обладает одним поразительным свойством. Если «поставить ее на любой бок», то площадь комнаты не уменьшится. Высота потолка в комнате Бори равна 3 м. Какова наибольшая площадь такой комнаты?

Решение: Пусть длина комнаты равна x метров, а ширина — y метров. Тогда из условия задачи

$$3 \cdot x \geq x \cdot y, \qquad 3 \cdot y \geq x \cdot y.$$

Отсюда x и y не превосходят трёх, и максимальная площадь комнаты с такими сторонами равна 9 квадратным метрам.

Задача 10.

B. На острове Буяне живут представители 100 национальностей. Национальным меньшинством считается любая национальность A, для которой найдутся не менее 50 национальностей, каждая из которых имеет численность вчетверо или больше превосходящую численность национальности A. Какое наибольшее (в процентном отношении) количество жителей страны могут считать себя представителями национальных меньшинств?

Решение: Наша цель — сделать как можно больше как можно бóльших национальностей национальными меньшинствами, а как можно меньше как можно меньших национальностей — не национальными меньшинствами.

Заметим, что 50 самых больших по численности национальностей меньшинствами являться не могут, поэтому логично хотеть, чтобы они все были одинакового, минимально возможного размера.

Остальные же 50 национальностей можно сделать национальными меньшинствами, сделав их численность одинаковой и максимально доступной — то есть, равной $1/4$ от численности «больших» национальностей.

Таким образом, меньшинства могут составлять максимум 25% от населения государства.

C. Про четырехзначное натуральное число X известно, что

1) первые две цифры равны между собой;

2) последние две цифры равны между собой;
3) число является квадратом натурального числа.

Найдите число X.

Решение: То, что первые две цифры и вторые две цифры числа равны между собой, означает, что это число делится на 11. Раз оно квадрат натурального числа, то автоматически обязано делиться на квадрат 11 — 121. Также заметим, что $121 \cdot 8 < 1000$, а $121 \cdot 83 > 10000$. Таким образом, искомое число представляется в виде $121 \cdot n$, где n — квадрат натурального числа и лежит в пределах от 9 до 82.

Теперь, перебрав имеющиеся варианты, получим, что искомое число — $121 \cdot 64 = 7744$.

Задачи 8 класса

Задача 1.

А. Космический корабль потерпел аварию в 80 км от базы. На корабле есть 8 аккумуляторов, каждый из которых может обеспечить жизнь космонавта в течение суток. Космонавт может нести с собой только 3 аккумулятора и может проходить 20 км в сутки. Может ли космонавт добраться до базы?

Решение: Да, космонавт может добраться до базы за 6 дней.

В первый день он может взять 3 аккумулятора и пройти 20 км. Вечером первого дня в 20 километрах от сломанного корабля будут один использованный аккумулятор, два свежих аккумулятора и космонавт, а на корабле — 5 свежих аккумуляторов.

Во второй день он возьмёт один свежий аккумулятор и вернётся на корабль, а в третий — возьмёт с корабля три аккумулятора и пройдёт 20 км к базе, используя один из них. Таким образом, к вечеру третьего дня ситуация будет следующей:

20 км от корабля	На корабле
3 свежих аккумулятора 2 использованных аккум. Космонавт	2 свежих аккумулятора 1 использованный аккум.

Теперь у космонавта есть 3 свежих аккумулятора, и ему осталось 3 дня пути до базы. Это уже легко преодолимо.

B. Мальчик Боря утверждает, что он может в клетки квадрата 5×5 расставить числа 0 или 1 так, что в каждом квадрате 2×2 будет стоять ровно три одинаковых числа. Прав ли Борис? Какое наибольшее значение может принимать сумма чисел в этом квадрате?

Решение: Рассмотрим 4 угловых квадрата 2×2 и заметим, что в каждом из них должно быть хотя бы по одному нулю. Значит, максимальная сумма чисел в квадрате ограничена сверху числом $25 - 4 = 21$. Приведём пример расстановки 21 единицы и 24 нулей в квадрате, удовлетворяющей условию:

1	1	1	1	1
1	0	1	0	1
1	1	1	1	1
1	0	1	0	1
1	1	1	1	1

C. Число 18 обладает следующим интересным свойством: его квадрат — число 324 — имеет ту же самую сумму цифр, что и само число 18. Понятно, что если начать приписывать в конец числа нули, то указанное свойство сохранится. Тем самым, чисел с указанным свойством бесконечно много. А будет ли таких чисел бесконечно много, если запретить им оканчиваться нулями?

Решение: Любое число, состоящее только из девяток, обладает исследуемым нами свойством: несложно показать, что

$$\underbrace{99\ldots9}_{n}{}^2 = \underbrace{9\ldots9}_{n-1}8\underbrace{0\ldots0}_{n-1}1.$$

Сумма цифр у числа в правой части такая же, как у числа в левой.

Задача 3.

A. Вот стихотворение:

Мышка ночью пошла гулять.
Кошка ночью видит — мышка!
Мышку кошка пошла поймать.

А вот перевод (построчный) этого стишка на язык племени Ам-Ям:

Ам ту му ям,
Ту ля бу ам,
Гу ля ту ям.

Составьте фрагмент русско–ам-ямского словаря по этому переводу.

Решение: Единственное слово, которое встречается в третьей строке, но не встречается в первых двух, — «поймать». Поэтому оно соответствует слову «гу» языка племени. По аналогичным причинам «уникальное» слово второй строки — «видит» — соответствует слову «бу» племени.

Единственное слово, которое встречается во всех строках, — «ту», значит, «мышка». В двух последних строках встречается «ля», которое соответствует кошке.

Остальные слова распределить просто: «ам» — «ночью», «ям» — «пошла», «му» — «гулять».

С. Пограничники отметили, что число вещей, перевозимых эмигрантом Витей в Арабские эмираты, совпадает с числом N_1 — количеством натуральных чисел, меньших миллиона, в десятичной записи которых единиц больше, чем нулей, а число вещей, отправленных им в Швейцарию, совпадает с числом N_2 — количеством натуральных чисел, меньших миллиона, в десятичной записи которых нулей больше, чем единиц. В какую страну Витя отправил вещей больше?

Решение: Десятичная запись натурального числа не может начинаться с нуля. Рассмотрим те натуральные числа, запись которых, кроме того, не начинается с единицы.

Покажем, что среди таких чисел поровну тех, в чьей записи больше единиц, и тех, в чьей записи больше нулей: возьмём число, в записи которого больше единиц, заменим все единицы на нули и все нули на единицы. Мы получим число, в записи которого больше нулей (так как ни один ноль не окажется ведущим). При этом разным числам сопоставляются разные числа, и любое число, в десятичной записи которого нулей больше, чем единиц, может быть получено таким образом.

Теперь рассмотрим числа, запись которых начинается с единицы. Если взять такое число, в записи которого больше нулей, и заменить

$0 \to 1$ и $1 \to 0$, мы несомненно получим число, в записи которого больше единиц, чем нулей. Однако, не все числа, в записи которых больше единиц, могут быть получены таким образом: например, число 110 может быть получено только из 101, в записи которого по-прежнему больше единиц.

Значит, в целом количество чисел, в которых больше единиц, больше — отсюда больше вещей уехало в Арабские эмираты.

Решения задач 2013 года

Задачи 8 класса

Задача 1.

A. Мальчик Дима утверждает, что он может выписать 3 простых числа таких, что разность любых двух из них (из большего вычитают меньшее) — тоже простое число. Прав ли Дима? Может ли он выписать четыре таких простых числа?

Решение: Заметим, что среди выписанных простых чисел не может быть больше одного чётного, потому что единственное чётное простое число — 2.

Аналогично, не может быть больше двух нечётных: если их хотя бы 3, то разность между наибольшим и наименьшим — чётное число не меньше 4, то есть, является составной.

Таким образом, мы получили верхнюю оценку — $1 + 2 = 3$ — на количество простых чисел, которые выписал Дима. Поэтому четырёх чисел он выписать не мог.

Выписать три числа просто — 2, 5, 7.

B. Найдите все натуральные четырёхзначные числа, у которых сумма первых трёх цифр равна 2, сумма последних трёх цифр равна 5, а сумма первой и последней цифр делится на 7.

Решение: Сумма первой и последней цифр может быть равна 0, 7 или 14.

Ноль — точно не вариант: тогда у числа имеются ведущие нули. Также сумма первой и последней цифр должна быть не больше $2 + 5$ (из условия) $= 7$.

При этом первая цифра не превосходит 2, последняя — 5. Отсюда единственный доступный вариант для числа — 2005.

C. Найдите все натуральные числа, которые можно представить в виде произведения и суммы, пользуясь одинаковыми наборами чисел. Например,

$$10 = 5 + 2 + 1 + 1 + 1 = 5 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1.$$

Решение: Все составные числа.

Если число p — простое, то единственный способ представить его в виде произведения — $p \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1$. Сумма чисел этого набора строго больше p.

Если число $n = q_1 \cdot q_2$, $q_1, q_2 \geq 2$ составное, то $q_1 \cdot q_2 \geq q_1 + q_2$. Тогда можно добавить несколько единиц так, чтобы $q_1 \cdot q_2 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1$ было равно $q_1 + q_2 + 1 + \ldots + 1$: единицы не меняют произведения, но увеличивают сумму.

Задача 2.

C. У министра финансов в кармане лежат несколько монет. Если он наугад вытащит из кармана 3 монеты, то среди них обязательно найдётся монета 1 рубль. Если же он наугад вытащит 4 монеты, то среди них обязательно найдётся монета 2 рубля. Министр вытащил наугад из кармана 5 монет. Назовите эти монеты.

Решение: Эта задача интересна тем, что она не указывает явно, какие вообще монеты могут быть у министра в кармане — например, она не запрещает монеты достоинством 5000001 рубль, и это надо иметь в виду при решении.

Заметим, однако, что среди вытащенных монет должно быть хотя бы две двухрублёвых, потому что иначе (если таких монет не больше одной) возьмём все остальные монеты, их хотя бы 4, и среди них нет двухрублёвых, что противоречит условию задачи.

По аналогичным причинам среди вытащенных монет хотя бы три однорублёвых. Получается, мы уже наверняка знаем достоинства $2 + 3 = 5$ — то есть, неожиданно, всех — монет.

Задача 3.

A. Чемпион тараканьих бегов Таракан Янычар объявил, что может бежать со скоростью 50 м/мин. Он как всегда всё перепутал: он считает, что в метре 60 сантиметров, а в минуте 100 секунд. С какой скоростью может бежать Янычар?

Решение: Будем надеяться на то, что сантиметры и секунды Таракан понимает правильно. Тогда он вводит на свою скорость две поправки: (а) скорость в м/мин увеличивается, потому что минута у Таракана более «тянутая», и за эту минуту он может успеть больше (б) скорость, опять же, увеличивается за счёт того, что метры для Таракана более короткие, и он может чаще, чем это надо, прибавлять метр к расстоянию, которое пробежал.

Обе эти поправки увеличивают скорость таракана в 100/60 раз, поэтому ответ на задачу —

$$50 \quad : \quad \left(\frac{100}{60}\right)^2 = \frac{50 \cdot 9}{25} = 18\ (\text{м/мин}).$$

Задача 5.

В. Сколько минут осталось до 12 часов дня, если их число в 4 раза меньше количества минут, прошедших с 9 часов утра до события, состоявшегося 50 минут тому назад?

Решение: Пусть до 12 часов дня осталось x минут. Тогда с 9 часов утра до недавнего события прошло $\frac{x}{4}$ минут. С другой стороны, этот же отрезок времени равен

$$(12 \cdot 60 - x - 50) - 9 \cdot 60 \text{ минут},$$

потому как слагаемое в скобках — это время от начала суток до текущего момента, и из этого времени нужно вычесть 9 часов, которые не считаются. Таким образом,

$$x = 4 \cdot (12 \cdot 60 - x - 50 - 9 \cdot 60)$$

$$x = 520 - 4x$$

$$x = 104.$$

Задача 8.

А. Я иду от дома до школы 30 минут, а мой брат 40 минут. Через сколько минут я догоню брата, если он вышел на 5 минут раньше меня?

Решение: Будем измерять скорость в метрах в минуту. Если S метров — расстояние от дома до школы, то моя скорость — $\frac{S}{30}$, а скорость брата — $\frac{S}{40}$. Таким образом, мы решаем уравнение

$$\frac{S}{30} \cdot t = \frac{S}{40} \cdot (t + 5)\,.$$

Заметим, что S не играет никакой роли в уравнении, мгновенно сокращаясь.

$$\frac{t}{30} = \frac{t+5}{40}.$$

Это уравнение уже просто решить:

$$t = 15.$$

Ответ — 15 минут. Его можно получить и по-другому: если весь путь до школы брат идёт на 10 минут дольше, чем я, то половину пути — как раз на 5 минут дольше. А половина пути занимает у меня 15 минут.

B. Двое семиклассников пробежали 100 метров. Когда Андрей финишировал, Боре оставалось ещё 10 метров. Следующий забег они решили провести так, что Андрей стартовал на 10 метров позади линии старта, с которой стартовал Боря. Во второй раз они бежали с той же скоростью, что и в первый. Кто пришёл к финишу раньше?

Решение: За время, за которое Андрей смог финишировать стометровку, Боря пробежал только 90 метров — значит, скорость Андрея составляет $\frac{10}{9}$ скорости Бори. Во второй раз Андрею предложено пробежать 110 метров, то есть в $\frac{11}{10}$ раз больше, чем Боре. Отсюда его время относительно времени Бори будет составлять

$$\frac{11}{10} \; : \; \frac{10}{9} = \frac{99}{100} < 1.$$

Значит, Андрей опять финиширует быстрее.

Решения задач 2012 года

Задачи 5 класса

Задача 4.

A. Старуха Шапокляк очень любит животных. Все ее животные, кроме двух, — собаки, все, кроме двух, — кошки, и все, кроме двух, — попугаи, остальные — крыски. Сколько каких животных у старухи Шапокляк?

Решение: Пусть у Шапокляк s собак, c кошек, p попугаев и k крысок. Тогда

$$\begin{cases} s+c+p+k-2=s \\ s+c+p+k-2=c \\ s+c+p+k-2=p \end{cases}$$

Вычитая эти равенства друг из друга, можно получить, что $s=c=p$. Более того, эти три числа обязаны не превосходить 1, потому что иначе суммы в левой части равенств будут больше двух.

Первый случай: $s=c=p=0$. Тогда у Шапокляк две крыски, а других животных нет. Второй случай: $s=c=p=1$. Тогда у шапокляяк одна собака, одна кошка и один попугай, а крыс нет.

Оба ответа являются верными — более того, для получения полного балла за задачу оба должны быть приведены.

B. Четверо пятиклассников Андрей, Борис, Вася и Гена решили определить свой вес. Однако все четверо мальчиков на весы не помещались, поэтому они стали взвешиваться по трое или по двое. Оказалось, что Андрей, Боря и Вася вместе весят 90 кг, Боря, Вася и Гена — 92 кг, а Андрей и Гена — 58 кг. Сколько весят все мальчики вместе?

Решение: Давайте сложим четыре результата, которые получились у мальчиков в условии задачи. Заметим, что тогда получится дважды вес всех мальчиков вместе, и он равен 240 кг. Значит, мальчики вместе весят 120 кг.

Задача 5.

B. С 1 января цена билета в кинотеатр возросла по сравнению с декабрем на 20%, а выручка от продажи билетов возросла на 14%. Как изменилась посещаемость кинотеатра? Увеличилась или уменьшилась?

Решение: Если бы посещаемость кинотеатра не изменилась, то выручка бы увеличилась так же, как и цена билета — на 20 процентов. Однако общая выручка уменьшилась — значит, посетителей стало приходить меньше. Можно даже посчитать, насколько меньше: $\frac{1.14}{1.20} = 0.95$ — то есть, в кинотеатр теперь ходит 95% от прежнего количества посетителей.

C. В мешке у Деда Мороза лежат 10 красно-синих (т.е. одна половина красная, а другая — синяя), 7 сине-зеленых, 5 зелено-красных шаров. Какое наименьшее число шаров должен вынуть из мешка Дед Мороз, чтобы нашелся такой цвет, который будет присутствовать в окраске не менее чем в пяти из вынутых шаров?

Решение: Что означает, что нашёлся цвет, присутствующий в окраске пяти шаров? Это означает, что нашлись два сорта шаров (например, красно-зелёные и сине-зелёные), шаров из которых *в сумме* хотя бы пять.

Дед Мороз мог вынуть 6 шаров так, чтобы цвета, присутствующего на 5 шарах, не нашлось: например, ему могло попасться по 2 шара каждого сорта.

Покажем, что 7 шаров ему хватит. Разложим 7 всеми возможными способами в сумму трёх слагаемых, упорядоченных по убыванию:

$$7 = 7 + 0 + 0 \qquad 7 = 4 + 3 + 0$$
$$7 = 6 + 1 + 0 \qquad 7 = 4 + 2 + 1$$
$$7 = 5 + 2 + 0 \qquad 7 = 3 + 3 + 1$$
$$7 = 5 + 1 + 1 \qquad 7 = 3 + 2 + 2$$

В каждом из случаев найдутся два слагаемых, сумма которых не меньше 5 — что нам и требовалось.

Ответ — 7 шаров.

Задача 6.

A. Дед рассказывал своим внучатам: «В комнате стояло 5 стульев. На них сидели 4 матери, 4 дочки, 3 бабушки, 2 прабабушки и 1 прапрабабушка. При этом каждая из них сидела на отдельном стуле.» «Это невозможно», — возразили внучата. «Я сам видел», — ответил дед. Правду ли сказал дед внучатам?

Решение: Описанное дедом вполне могло случиться. Представим себе пять женщин: $^{(1)}$совсем девочка, $^{(2)}$её мама, $^{(3)}$её бабушка, $^{(4)}$её прабабушка, $^{(5)}$её прапрабабушка.

Дочерьми здесь являются четверо: (1)–(4), и матерями тоже четверо: (2)–(5). Трое, (3)–(5), — бабушки; двое, (4)–(5), — прабабушки; одна прапрабабушка.

C. Буратино не хотел ходить в школу, и черепаха Тортилла решила его проучить. Она не просто отдала ему Золотой ключик, а задала ему непростую задачу. Она вынесла три коробочки: красную, синюю и зеленую. На красной коробочке было написано «Здесь лежит Золотой ключик», на синей — «Зеленая коробочка пуста», а на зеленой — «Здесь сидит гадюка». Тортилла прочитала надписи Буратино и сказала: «Действительно, в одной коробочке лежит Золотой ключик, в другой — сидит гадюка, а третья коробочка пуста, но все эти надписи неверные». Где лежит Золотой ключик?

Решение: Надпись на синей коробочке неверна — значит, зелёная коробочка непуста. И надпись на зелёной коробочке неверна — значит, в ней не гадюка. Отсюда в зелёной коробке лежит Золотой ключик.

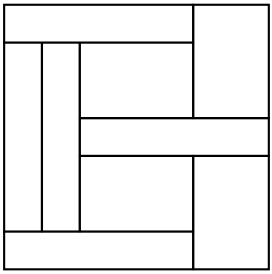
Задачи 6 класса

Задача 2.

B. Гастрабайтер Гаджи хочет замостить квадратную комнату 7×7 метров панелями 1×5 и 2×3 метров. Сколько панелей ему понадобится? Приведите пример такого замощения. Может ли он обойтись другим количеством панелей?

Решение: Разберёмся сначала с количеством панелей. Пусть есть замощение с A панелями 1×5 и B панелями 2×3. Тогда число $49 - 5A$ должно делиться на 6 — в частности быть чётным. Среди всех чётных чисел, получающихся как $49 - 5A$ (4, 14, 24, 34, 44) на 6 делится только 24. Таким образом, замощение может состоять исключительно из 5 панелей 1×5 и 4 панелей 2×3.

Зная это, придумать замощение несложно:



C. У Карлсона было 20 банок варенья. Он расставил их на трех полках так, что на каждой полке стояло одинаковое количество литров варенья. На первую полку Карлсон поставил одну большую и четыре средних банки варенья, на вторую — две большие и шесть литровых банок, на третью — одну большую, три средних и три литровых банки. Сколько литров варенья было у Карлсона?

Решение: Сравним первую и третью полки Карлсона. На первой четыре средних банки, а на третьей — три средних и ещё три литра. Значит, в одной средней банке три литра варенья. Соответственно, в трёх средних банках — девять литров.

Теперь сравним вторую и третью полки. На третьей — одна большая банка и ещё 12 литров варенья. На второй — две больших и ещё 6 литров. Значит одна большая банка содержит в себе 6 литров варенья.

Таким образом, на второй полке $2 \cdot 6 + 6 = 18$ литров варенья — и столько же на на первой, и столько же на третьей. Значит, у Карлсона 54 литра варенья.

Задача 3.

C. Мальчик Вовочка записал в строчку один за другим 10 первых простых чисел в возрастающем порядке (единица не считается простым числом). Мальчик Дима сначала вычеркнул половину цифр в полученном числе так, что получилось наибольшее число, а затем снова из этого же числа вычеркнул половину цифр так, что получилось наименьшее число. На сколько наибольшее число больше наименьшего?

Решение: Выпишем строку, полученную Вовочкой:

$$2357111317192329.$$

В ней 16 цифр, значит вычеркнуть надо 8. Первая цифра числа, которе мы получим, лежит среди первых 9 цифр строки — чтобы получить наибольшее число, мы должны максимизировать её. Подойдёт 7. Продолжая тем же образом, получим, что наибольшее число, которое мог получить Дима, —

$$77192329,$$

а наименьшее —

$$11111229.$$

Их разность равна 66081100.

Задача 7.

B. Винни-Пух и Пятачок одновременно отправились в гости к друг другу. Но поскольку Винни-Пух всю дорогу сочинял очередную «шумелку», а Пятачок считал пролетавших галок, они не заметили друг друга при встрече. После встречи Пятачок подошел к дому Винни-Пуха через четыре минуты, а Винни-Пух подошел к дому Пятачка через одну минуту. Сколько минут был в пути каждый из них?

Решение: Пусть $v_В$ — скорость Винни-Пуха, $v_П$ — скорость Пятачка, а t — время от их выхода из дома до встречи. Тогда из условия задачи ясно, что расстояние между домами Винни-Пуха и Пятачка выражается как

$$S = (t+1)v_В = (t+4)v_П = t(v_В + v_П).$$

Рассмотрим вторую и четвёртую части этого равенства:

$$\begin{aligned}
&tv_{\text{В}} + 1 \cdot v_{\text{В}} = tv_{\text{В}} + tv_{\text{П}}\\
&1 \cdot v_{\text{В}} = tv_{\text{П}}\\
&\frac{v_{\text{В}}}{v_{\text{П}}} = \frac{t}{1}
\end{aligned}$$

Теперь, зная это, разберёмся со второй и третьей частями:

$$\begin{aligned}
&(t+1)tv_{\text{П}} = (t+4)v_{\text{П}}, \quad t > 0\\
&t(t+1) = t+4\\
&t^2 = 4 \implies t = 2.
\end{aligned}$$

Таким образом, Винни-Пух был в пути 3 минуты, а Пятачок — 6 минут.

Задача 8.

A. Может ли какая-нибудь степень двойки содержать в своей записи поровну нулей, единиц, двоек, ..., девяток?

Решение: Пусть каждая из цифр встречается в этой степени двойки по k раз. Тогда сумма цифр степени двойки равна $k(0+\ldots+9) = k\cdot 45$. То есть, по признаку делимости на 3, степень двойки делится на 3. Такого не может быть — получили противоречие.

B. Однажды перед сном мальчик Вовочка просчитал вслух от одного до тысячи. Сколько слов произнес Вовочка? Каждое слово считается столько раз, сколько оно произнесено.

Решение: Пусть D — количество слов, которое нужно произнести, чтобы посчитать от 1 до 99. Тогда всего Вовочка произнёс $10D + 900 + 1$ слов: в каждой стоне нужно посчитать от 1 до 99, плюс 900 трёхзначных чисел дают по одному слову для обозначения сотен, плюс слово «тысяча».

Осталось найти D. 27 чисел требуют одно слово для произнесения: 1, 2, 3, ..., 19, 20, 30, 40, ..., 80, 90. Все остальные — а их $99 - 27 = 72$ — по два слова. Отсюда

$$D = 72 \cdot 2 + 27 = 171;$$
$$10D + 901 = 2611.$$

Задачи 7 класса

Задача 1.

A. Существуют ли два таких натуральных числа, наибольший общий делитель которых равен 110, а наименьшее общее кратное равно 2000?

Решение: Таких чисел, конечно же, не существует, ведь наименьшее общее кратное всегда делится на наибольший общий делитель — а 2000 не делится на 110.

B. Вовочка умножил два подряд стоящих натуральных числа и получил число, состоящее из цифр 1, 3, 4, 5, 7, 8 и 9. Покажите, что Вовочка ошибся.

Решение: $1+3+4+5+6+7+8+9 = 45-2 = 43$ — имеет остаток 1 при делении на 3. Значит, в соответствии с признаком делимости на 3, число, составленное из этих цифр, также будет иметь остаток 1. Произведение же двух последовательных натуральных чисел может иметь либо остаток 0 ($0 \cdot 1 = 2 \cdot 0 = 0$), либо остаток 2 ($1 \cdot 2 = 2$). Поэтому Вовочка неправ.

C. Существуют ли 2012 ненулевых числа, никакие два из которых не равны между собой, таких, что их сумма равна их произведению?

Решение: Укажем, как построить набор из таких чисел: он будет иметь вид

$$1, 2, 3, 4, \ldots, 2011, x;$$

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 2011 + x = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2011 \cdot x.$$

Чтобы выполнить условие задачи, нужно взять x, равный

$$\frac{1 + 2 + 3 + \ldots + 2011}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2011 - 1}.$$

Это число строго меньше единицы (очевидно), поэтому не будет совпадать ни с одним из взятых до него.

Задача 2.

A. Прямоугольник разрезами, параллельными его сторонам, разбит на 4 маленьких прямоугольника. Площади трех из них известны. Это 3, 4, 5. Найдите площадь четвертого.

Решение: Ответ в этой задаче зависит от того, какой из прямоугольников, площадь которого известна, находится «между» двумя другими:

4	3
$5 \cdot \frac{4}{3} = \frac{20}{3}$	5

3	4
$5 \cdot \frac{3}{4} = \frac{15}{4}$	5

3	5
$4 \cdot \frac{3}{5} = \frac{12}{5}$	4

B. Мальчики Вова и Дима купили по одной новогодней открытке и каждый разрезал свою открытку на два прямоугольника равной площади. Один из прямоугольников мальчики выбросили, а другой оставили себе. Оказалось, что периметр Вовиного прямоугольника равен 14 см, периметр Диминого — 19 см. Найдите периметр и стороны прямоугольной открытки у каждого из мальчиков.

Решение: Пусть исходная открытка имела размер $a \times b$ сантиметров и, соответственно, периметр $2a + 2b$. Единственный способ получить разные прямоугольники — Вове разрезать открытку по вертикали, а Диме — по горизонтали.

Тогда Вовина открытка будет иметь размер $\frac{a}{2} \times b$ и периметр $a+2b$, а Димина — размер $a \times \frac{b}{2}$ и периметр $2a+b$. Из условия нам известны значения периметров открыток:

$$a + 2b = 14;$$
$$2a + b = 19.$$

Тогда разность $a - b$ равна пяти,

$$a = 8, \quad b = 3.$$

В частности, периметр исходной открытки равен 22 см.

Задача 3.

A. Не используя технические средства, сравните дроби

$$\frac{2012}{2013} \quad \text{и} \quad \frac{2012000000002012}{2013000000002013}.$$

Решение: Эти дроби равны между собой: вторая получается из первой домножением числителя и знаменателя на 1000000000001.

Задача 4.

A. Какую четверку цифр надо приписать справа к числу 2012, чтобы полученное восьмизначное число делилось на 2013?

Решение: Очевидно, что числа 20130000 и 2013 делятся на 2013. Вычитая их друг из друга, получим все возможные ответы:

$$20130000 - 2013 = 20127987$$
$$20130000 - 2 \cdot 2013 = 20125974$$
$$20130000 - 3 \cdot 2013 = 20123961$$
$$20130000 - 4 \cdot 2013 = 20121948$$

C. Произведение шести последовательных натуральных чисел может быть равно произведению трех последовательных натуральных чисел. Например,

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 8 \cdot 9 \cdot 10 = 720.$$

Есть ли еще такие числа?

Решение: В задаче требуется найти числа x, y такие, что

$$x(x+1)\dots(x+5) = y(y+1)(y+2).$$

Частично раскроем скобки в этом выражении —

$$(x^2+5x)(x^2+5x+4)(x^2+5x+6) = y(y+1)(y+2).$$

Отсюда

$$x^2 + 5x < y < x^2 + 5x + 4.$$

Действительно: если бы неравенство выше не выполнено, то либо все три множителя в правой части меньше трёх множителей в левой, либо, наоборот, каждый из множителей правой части больше соответствующего множителя левой.

Для переменной y остаётся три варианта:

$$x^2 + 5x + 1, \quad x^2 + 5x + 2, \quad x^2 + 5x + 3.$$

Подставив каждый из этих вариантов в правую часть, можно убедиться, что решений для $x > 1$ у уравнения не будет.

Задача 5.

C. Вдоль прямолинейной аллеи городского парка растет 5 деревьев. Известны 8 из 10 попарных расстояний между ними: 1 м, 1 м, 2 м, 2 м, 3 м, 3 м, 3 м, 4 м. Найдите два остальных расстояния.

Решение: Очевидно, что все попарные расстояния между деревьями целые — в том числе остальные два: в противном случае нецелых расстояний было бы больше, чем два. Значит, мы можем считать, что все деревья расположены в целых точках вещественной оси.

Некоторые из самых маленьких расстояний среди перечисленных являются расстояниями между соседними деревьями — два однометровых расстояния точно такие. Может быть так, что метровые промежутки между деревьями являются соседними ($a \xleftrightarrow{1\,\text{м}} b \xleftrightarrow{1\,\text{м}} c$), а может, что и нет.

В первом случае одно из двухметровых расстояний получается как сумма однометровых. У оставшегося двухметрового расстояния не остаётся других вариантов, кроме как быть длиной промежутка между соседними деревьями.

Если это два дерева, отличные от a, b, c, то получается следующая ситуация:

$$a \xleftrightarrow{1\,\text{м}} b \xleftrightarrow{1\,\text{м}} c \qquad d \xleftrightarrow{2\,\text{м}} e.$$

Тогда $cd = 3\,\text{м}$, и другие трёхметровые расстояния нам попросту никуда не вписать.

Если одно из этих двух деревьев — a или c, то получаем однозначный вариант:

$$d \xleftrightarrow{2\,\text{м}} a \xleftrightarrow{1\,\text{м}} b \xleftrightarrow{1\,\text{м}} c \xleftrightarrow{3\,\text{м}} e,$$

Который, очевидно, не удовлетворяет условию задачи.

Во втором случае двухметровые расстояния также являются расстояниями между соседними деревьями. Это даёт нам однозначный с точностью до симметрии ответ: деревья стоят в точках 0, 1, 3, 4, 6, и оставшиеся два расстояния — 5 и 6.

Задачи 8 класса

Задача 3.

В. Натуральные числа m, n удовлетворяют равенству

$$(m-n)^2 = \frac{4mn}{m+n-1}.$$

Докажите, что $m+n$ – квадрат натурального числа.

Решение: По условию задачи,

$$(m-n)^2(m+n-1) - 4mn = 0.$$

Продолжим цепочку равенств:

$$\begin{aligned}
&(m-n)^2(m+n-1) - 4mn = \\
&= m^3 + n^3 - m^2n - mn^2 - m^2 - 2mn - n^2 = \\
&= (m+n)(m^2 - mn + n^2) - mn(m+n) - (m+n)^2 = \\
&= (m+n)(m-n)^2 - (m+n)^2.
\end{aligned}$$

Отсюда можно понять, что число $m+n$ является отношением двух квадратов а, значит, и само квадрат.

C. Вещественные числа x, y удовлетворяют соотношениям

$$x^2 + xy + y^2 = 4 \quad \text{и} \quad x^4 + x^2y^2 + y^4 = 8.$$

Найти значение выражения $x^6 + x^3y^3 + y^6$.

Решение:

$$\begin{cases} (x+y)^2 - xy = 4 \\ (x+y)^4 - 4xy(x+y)^2 + 2(xy)^2 = 8 \end{cases}$$

Мы ищем $(x+y)^6 - 6xy(x+y)^4 + 9(xy)^2(x+y)^2 - (xy)^3$.

$$\begin{cases} T_1 - T_2 = 4 \qquad (T_1 = T_2 + 4) \\ T_1^2 - 4T_1T_2 + 2T_2^2 = 8 \end{cases}$$

$$(T_2 + 4)^2 - 4(T_2 + 4)T_2 + 2T_2^2 = 8$$

$$-T_2^2 - 8T_2 + 8 = 0$$

$$T_2 = -4 \pm 2\sqrt{6} \qquad (T_1 = \pm 2\sqrt{6})$$

Теперь мы знаем сумму и произведение x и y. Можно как подставить значения T_1 и T_2 в полученное нами выражение, равное исходному, так и явно найти x, y и посчитать нужное выражение для них.

Задача 4.

A. Какое из чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 надо выбросить, чтобы сумма квадратов из трёх оставшихся чисел оказалась равной сумме квадратов других трёх оставшихся чисел?

Решение: Сейчас у нас есть семь «подозреваемых» чисел, которые можно выкинуть. Давайте сократим их количество. Заметим, что если две суммы чисел равны, то они равны и по модулю 2, и по модулю 3. Выпишем остатки от деления квадратов чисел 1–7 на 2 и на 3 и посмотрим, какой из них нужно выкинуть, чтобы можно было поделить оставшееся на две части.

x	1	**2**	3	**4**	5	6	7
$x^2 \bmod 2$	1	**0**	1	**0**	1	0	1
$x^2 \bmod 3$	1	**1**	0	**1**	1	0	1

Легко понять, что надо сверху выкинуть ноль (чтобы сумма оставшихся чисел была чётна), а снизу единицу (в противном случае у нас останется пять единиц и один ноль — эти числа никак не распределить на две группы, суммы которых сравнимы по модулю 3).

То есть, подходит либо 2^2, либо 4^2.

Сумма $1^2 + \ldots + 7^2$ равна 140. $\frac{140-4}{2} = 68$, $68 - 49 = 19$ — двумя из трёх квадратов, которые мы поместим вместе с 49, нельзя собрать 19 (потому что 19 вообще не получается как сумма двух квадратов), поэтому вариант с выкидыванием двойки не подходит.

Наконец, $\frac{140-16}{2} = 62$, $49 + 9 + 4 = 62 = 36 + 25 + 1$. Это и есть ответ.

C. Найдите все пары (x, y) неотрицательных целых чисел, удовлетворяющих равенству

$$x - y = x^2 + xy + y^2.$$

Решение: Заметим, что при $x \geq 2$ правая часть строго больше x, а левая — не больше его. Значит, $x = 0$ или $x = 1$. Если $x = 0$, то $-y = y^2$, $y = 0$. Если $x = 1$, то $1 - y = y^2 + y + 1$, $y(y + 2) = 0$, $y = 0$.

Ответ: $(0, 0)$, $(1, 0)$.

Задача 7.

A. У бизнесмена Березова было предприятий в 3 раза меньше, чем у бизнесмена Романова. Если бы Березов отсудил еще столько же предприятий у Романова, сколько имел, то у них обоих число предприятий стало бы одинаково. Сколько предприятий было у бизнесмена Романова?

Решение: Любое число предприятий, кратное трём.

Действительно, если у Романова сейчас $3x$ предприятий, то у Березова x. И если Березов отсудит x предприятий у Романова, то у обоих станет поровну — по $2x$. И этот результат не зависит от конкретного x, то есть, рассуждения можно проделать при любом его значении.

Решения задач 2011 года

Задачи 5 класса

Задача 1.

С. У Димы есть прибор с четырьмя кнопками — двумя красными и двумя синими. Нажатие одной из красных кнопок приводит к тому, что число на табло прибора умножается на 2, а другой — умножается на 5. Нажатие же одной из синих кнопок приводит к тому, что к числу на табло прибора прибавляется 2, а другой — прибавляется 5. Вначале на табло прибора было записано число 2. Может ли мальчик Дима, нажимая эти кнопки, получить из него число 2011, если, недолго думая, Дима нажал синюю кнопку? А красную кнопку?

Решение: Да, может. Во всех случаях, когда Дима не нажимал вторую красную кнопку (то есть, не умножал число на 5), сперва можно получить 9, а затем прибавлять по 7 $(2+5)$ нужное количество раз. Так как $2011-9=2002=286\cdot 7$, то через 286 прибавлений семёрки мы действительно получим 2011.

Если же Дима нажатием первой красной кнопки получил 10, то тогда можно заметить, что $1995 = 2011 - 16 = 399 \cdot 5$, то есть надо сперва получить 16, прибавив к 10 на экране три раза по 2, а затем получить 2011, прибавив 5 нужное количество раз.

Задача 2.

С. Гена и Вова вышли в разное время из деревни Светлый Путь в деревню Полная Жуть, каждый с некоторой постоянной скоростью. Когда Гена прошёл треть всего пути, Вова прошёл четверть всего пути. Когда же Вове оставалось пройти четверть пути, Гене ещё оставалось пройти треть всего пути. Кто из ребят шёл быстрее и во сколько раз? Кто из них раньше вышел из деревни Светлый Путь, и кто из них раньше придёт в деревню Полная Жуть?

Решение: Для удобства обозначим момент времени, когда Гена прошел треть всего пути за T_0, а когда две трети — за T_1. Поскольку Вова за $T_1 - T_0$ прошел $(1 - \frac{1}{4}) - (\frac{1}{4}) = \frac{1}{2}$ всего пути, а Гена — $\frac{1}{3}$, Вова шел быстрее. Поскольку в момент времени T_0 Вова прошёл меньше Гены (четверть пути вместо трети), он вышел позже. Однако, в момент T_1 он уже обогнал Гену, потому в Полной Жути он окажется раньше. То же соображение позволяет заключить, что скорость Вовы в $\frac{3}{2}$ раза больше скорости Гены.

Задача 4.

С. Лидер партии «В здоровом теле — здоровый дух» взял с собой в командировку кусок мыла. Вечером седьмого дня командировки он отметил, что размеры куска сократились в два раза. Хватит ли ему мыла на оставшиеся два дня? Предполагается, что партиец каждый день использует одинаковое количество мыла.

Решение: Если размеры куска мыла уменьшились в два раза, то объем уменьшился в $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ раз. Таким образом, к вечеру седьмого дня мыло уменьшилось в восемь раз, и, следовательно, от всего мыла было использовано $\frac{7}{8}$. Значит, в день использовалась $\frac{1}{8}$ часть мыла. Таким образом, мыла осталось всего на один день. Ответ: нет, не хватит.

Задачи 6 класса

Задача 3.

С. Про натуральные числа a и b ($a > b$) известно, что число $2001a^2 - 40b - b^2$ делится на 14. Какое наименьшее значение может принимать выражение $a^2 - b^2$?

Решение: Преобразуем выражение:

$$2001a^2 - 40ab - b^2 = 14 \cdot (143a^2 - 3ab) - (a - b)^2.$$

Отсюда видно, что исходное выражение кратно 14 тогда и только тогда, когда $(a - b)^2$ делится на 14. Но 14 не содержит полных квадратов в разложении на множители, поэтому это верно если и только если $a - b$ делится на 14. Так как a, b — натуральные и $a > b$, то $a = 15$ и $b = 1$ — наименьшие a и b, при которых это выполняется.

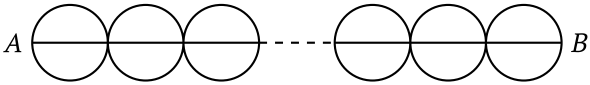
Ответ: 224.

Задачи 7 класса

Задача 1.

В. Отрезок AB разбит на n равных отрезков, на каждом из которых как на диаметре построена окружность. Какие значения может принимать сумма длин всех этих окружностей, если $|AB| = 2011$ см?

Решение:



Как известно, длина окружности диаметра d равна πd. Поэтому, если отрезок разбит на n отрезков и длина каждого диаметра равна $\frac{|AB|}{n}$ см, то сумма длин этих окружностей будет

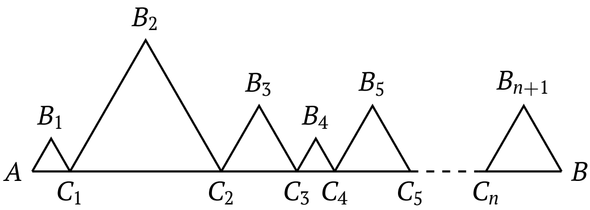
$$n \cdot (\pi d) = n \cdot \left(\pi \frac{|AB|}{n}\right) = \pi |AB| = 2011\pi$$

Для полноты решения заметим, что сумма длин окружностей останется равной 2011π и в том случае, если отрезок AB будет разбит на отрезки различной длины.

Задача 6.

В. На отрезке AB длиной 38 см между A и B отмечены точки C_1, C_2, C_3, $\ldots$, C_n и построены равносторонние треугольники с основаниями AC_1, C_1C_2, C_2C_3, $\ldots$, C_nB. Зависит ли сумма длин сторон треугольников, лежащих вне отрезка AB, от количества отмеченных точек и их размещения на AB?

Решение: Для треугольника с основанием C_kC_{k+1} обозначим B_{k+1} его третью вершину. Для треугольников с основаниями AC_1 и C_nB третьи вершины обозначим B_1 и B_{n+1} соответственно.



Во введенных обозначениях на сумму всех указанных сторон выполняются следующие соотношения:

$$(AB_1 + B_1C_1) + (C_1B_2 + B_2C_2) + \ldots + (C_nB_{n+1} + B_{n+1}B) =$$
$$= 2(AC_1 + C_1C_2 + C_2C_3 + \ldots + C_{n-1}C_n + C_nB) =$$
$$= 2AB,$$

откуда видно, что указанная сумма не зависит от выбранных точек $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

C. Каждая грань кубика разделена на 4 квадрата, и каждый квадратик окрашен в один из трёх цветов: синий, жёлтый или красный так, что квадратики, имеющие общую сторону, окрашены в разные цвета. Сколько при этом может быть красных, жёлтых и синих квадратиков?

Решение: Рассмотрим какую-нибудь вершину данного кубика. К ней прилегает три квадратика, причем все они попарно касаются друг друга по стороне. Поэтому рассматриваемые квадратики представляют все три цвета. Значит, при каждой вершине нашего кубика есть ровно один квадратик данного цвета. Поскольку вершин всего 8, каждый цвет представлен 8 раз.

Задачи 8 класса

Задача 2.

B. Будем мыслить плоскость как лист бумаги. На нём начертили две перпендикулярные прямые, согнули лист по одной прямой, затем по другой и прокололи в двух местах. После этого лист разогнули и через каждые две получившиеся проколами точки провели прямую. Сколько прямых при этом могло получиться?

Решение: Возможны три варианта:

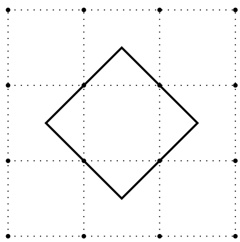
1. Никакие три точки не лежат на одной прямой. Тогда прямых ровно столько, сколькими способами можно выбрать пару точек из восьми различных. Это число легко подсчитать — для каждой из восьми точек существует семь вариантов дополнить ее до пары; каждую пару мы посчитаем таким образом два раза, поэтому результат
$$\frac{8 \cdot 7}{2} = 28.$$

2. Три точки, лежащие по одну сторону относительно одной из проведенных осей перегиба (обозначим ее l), лежат на одной прямой. Тогда и четвертая лежит на этой же прямой, а также четыре точки, лежащие по другую сторону от l, опять же лежат на одной прямой — это очевидные соображения симметрии. Если проводить подсчет как в первом случае, мы посчитаем 10 лишних прямых, поэтому ответ будет 18.

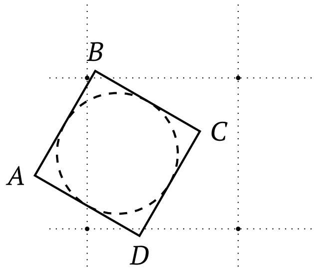
3. Три точки лежат на одной прямой, причем прямая эта проходит через пересечение осей перегиба. Аналогично случаю **2** мы получаем, что четвертая точка должна лежать на этой же прямой, а остальные четыре — на другой прямой. Из тех же соображений ответ 18.

C. На координатной плоскости отмечены точки с целыми координатами. Какую наибольшую площадь может иметь квадрат, не содержащий ни одной отмеченной точки?

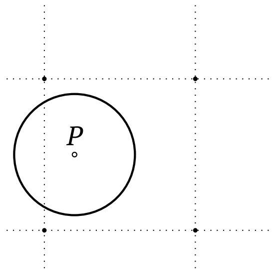
Решение: Квадрат с вершинами в точках $(-0.5, 0.5)$, $(0.5, 1.5)$, $(1.5, 0.5)$ и $(0.5, -0.5)$ будет иметь площадь, равную 2.



Покажем, что эта площадь максимальна. В самом деле, рассмотрим некоторый квадрат $ABCD$ со стороной d, удовлетворяющий условию. Впишем в этот квадрат круг — его радиус будет $\frac{d}{2}$, и он тоже не содержит отмеченных точек.



Рассмотрим данный круг сам по себе, и рассмотрим центр этого круга, P. Эта точка находится в некотором единичном квадрате, образованном соседними отмеченными точками.



Ясно, что расстояние от любой точки единичного квадрата до ближайшей отмеченной точки не превышает $\frac{\sqrt{2}}{2}$. А поскольку радиус круга $\frac{d}{2}$ не превышает расстояние от P до ближайшей отмеченной точки (круг не содержит отмеченных точек), то и

$$\frac{d}{2} \leq \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Поэтому и площадь квадрата $ABCD$, равная d^2, не превышает 2.

Задача 3.

С. Пара целых чисел x и y в пределах первого десятка называется симпатичной, если $x > y^2 + 1$, и называется приятной, если $y < x^2 + 1$. Существуют ли приятные, но несимпатичные пары? А симпатичные, но неприятные?

Решение: Для пары целых положительных чисел, очевидно, из неравенства $x > y^2 + 1$ следует неравенство $x > y$, и уж тем более $y < x^2+1$, поэтому любая симпатичная пара является приятной. Однако приятная пара отнюдь не обязана быть симпатичной — примером несимпатичной приятной пары будет $x = 1$, $y = 1$.

Задача 4.

B. Рассматриваются наборы из 5 чисел, каждое из которых равно 1 или -1. Разрешается в каждом наборе изменять знак одновременно у трёх чисел. Можно ли с помощью этой операции от любого заданного набора перейти к любому другому из этих наборов?

Решение: Да, возможно. Чтобы показать это, достаточно доказать, что от любого набора можно перейти к набору $(1, 1, 1, 1, 1)$. Выполнив же соответствующие операции смены знака в обратном порядке, мы можем перейти от набора $(1, 1, 1, 1, 1)$ к любому другому набору.

Рассмотрим для начала набор, в котором ровно два отрицательных числа; поскольку порядок не имеет значения, без умаления общности он выглядит так: $(-1, -1, 1, 1, 1)$. Сделаем следующие преобразования:

$$(\underline{-1}, -1, \underline{1, 1}, 1) \to (1, \underline{-1, -1, -1}, 1) \to (1, 1, 1, 1, 1)$$

Итак, в случае двух отрицательных чисел мы знаем, что делать. Случай трёх отрицательных очевиден. Все остальные случаи сводятся к случаю двух или трех отрицательных:

$$\begin{array}{rcl} (\underline{-1, 1, 1}, 1, 1) & \to & (1, -1, -1, 1, 1) \\ (-1, -1, \underline{-1, -1, 1}) & \to & (-1, -1, 1, 1, -1) \\ (-1, -1, \underline{-1, -1, -1}) & \to & (-1, -1, 1, 1, 1) \end{array}$$

Задача 6.

C. Многозначное число называется старшим, если при перестановке любой группы цифр, стоящих в его начале, в конец, оно уменьшается. Найдите несколько старших пятизначных чисел. Сколько имеется старших пятизначных чисел, в записи которых встречаются лишь цифры 1, 2 и 3?

Решение: Заметим, что любое число, старшая цифра которого больше всех остальных, является старшим — например, 21111, 54321.

Теперь подсчитаем количество пятизначных старших чисел из цифр 1, 2 и 3.

Всего возможно $3^5 = 243$ различных пятизначных числа из таких цифр. Не являются старшими числа, которые при сдвиге совпадают сами с собой. Поскольку длина числа является простой, то, если число совпадает с собой при каком-то не кратном длине сдвиге, то оно должно совпадать с собой и при единичном сдвиге. А таких чисел только три (11111, 22222 и 33333).

У остальных 240 чисел все 5 сдвигов различны, и эти числа разбиваются на 48 групп по 5 чисел. Максимумы этих групп и являются всеми возможными старшими числами. Ответ: 48 чисел.

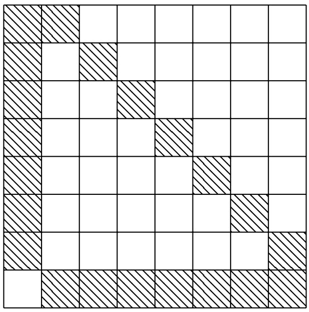
Задача 8.

C. Квадрат состоит из $(n+1)\times(n+1)$ белых клеток. Вовочка закрашивает некоторые клетки квадрата в чёрный цвет, а Дима вычёркивает какие-либо $n-1$ столбцов и $n-1$ строк этого квадрата. Докажите, что Вовочка может закрасить $3n$ клеток так, что при любом димином вычёркивании в квадрате оставалась бы по крайней мере одна белая клеточка.

Решение: Приведем вариант раскраски, из которой Дима не сможет вычеркнуть все белые клетки.

Первые n клеток Вовочка должен отметить в первой колонке квадрата со строки 1 по n, вторые n клеток — в $n+1$ строке со второй колонки до $n+1$, и остающиеся n клеток — на диагонали $(2,1)\ldots(n+1,n)$, всего закрашено $3n$ клеток.

Пример раскраски для $n = 8$ приведён ниже:



Поясним, почему при любом диминoм вычёркивании останется хотя бы одна белая клетка. Заметим, что в данной раскраске любые две колонки имеют одновременно закрашенные клетки ровно в одной строке: со второй колонки по $n+1$ — в нижней строке, колонка 1 имеет закрашенную одновременно с колонкой t клетку в строке $t-1$. Значит, какие мы две колонки и строки не выберем, даже если одна из строк в пересечении с колонками и даст две одновременно закрашенные клетки, вторая строка всё равно даст в пересечении хотя бы одну белую клетку.

Задачи 9 класса

Задача 1.

A. Даны 82 числа, каждое из которых равно 1 или -1. Можно ли их разбить на две группы так, чтобы суммы чисел, входящих в каждую группу, были равны?

Решение: Обозначим за S_k сумму первых k чисел, и положим $S_0 = 0$. S_k отличается от S_{k+1} в точности на 1 (на каждом шаге мы прибавляем или вычитаем 1), поэтому все целые числа между 0 и S_{82} достигаются на каком-то шаге.

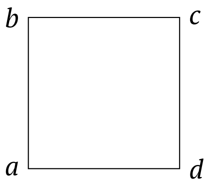
Обозначим за n число минус единиц среди 82 чисел. Тогда $S_{82} = 82-2n$ и $\frac{S_{82}}{2} = 41-n$. При этом, поскольку $41-n$ целое, и поскольку справедливо $|82-2n| = 2\cdot|41-n|$, то число $41-n$ находится между 0 и S_{82}, то есть достижимо на каком-то шаге k: $S_k = 41-n$.

Возьмём первые k чисел в первую группу, и оставшиеся $82-k$ чисел во вторую; это и будет примером разбиения, требуемым в условии. И, как было показано, данное разбиение может быть построено при любых заданных числах.

Задача 2.

C. В вершинах квадрата поставлены натуральные числа, большие 1, причём пары чисел, стоящие на концах сторон, не взаимно просты, а на концах диагоналей — взаимно просты. Найти такие четыре числа, удовлетворяющие этому условию, чтобы наибольшее из них было наименьшим из возможных.

Решение: Пусть a, b, c, d — числа, записанные в вершинах квадрата в порядке обхода вершин по часовой стрелке.



Заметим, что так как a не взаимно просто с b и d, то можно разложить эти числа в следующие произведения: $a = pqx$, $b = py$, $d = qt$, причём $p > 1, q > 1$ и НОД $(py, qt) = 1$.

Применив эти рассуждения к каждой вершине квадрата, получаем, что каждое из чисел является составным, причём эти числа имеют как минимум четыре различных простых сомножителя, так как НОД $(py, qt) = 1$.

Поэтому нам нужно взять первые четыре простых числа (2, 3, 5 и 7) — любые другие бо́льшие простые числа только увеличат значения в вершинах — и с помощью небольшого перебора выбрать из их шести попарных произведений четыре:

$$a = 5 \cdot 2, \quad b = 5 \cdot 3, \quad c = 3 \cdot 7, \quad d = 2 \cdot 7$$

Задача 3.

C. Найдите наименьшее число x, для которого выполняются равенства: $x = a + b + c = d + e + f$, где a, b, c, d, e и f — попарно различные натуральные числа.

Решение: Заметим, что $a + b + c + d + e + f = 2x$. Но сумма первых шести натуральных чисел равна 21, нечётному числу. Уменьшить сумму мы не можем, значит, её надо увеличить хотя бы до ближайшего чётного — до 22; то есть $x \geq 11$. Теперь заметим, что $x \leq 11$, поскольку $1 + 3 + 7 = 2 + 4 + 5 = 11$.

Ответ: $x = 11$.

Задача 6.

B. Переписывая из задачника по геометрии условие одной задачи, Дима по невнимательности, свойственной некоторым школьникам, завысил вдвое величины двух углов треугольника и уменьшил вдвое величину третьего. Тем не менее, он смог построить треугольник с новыми углами. Найдите самый большой из углов треугольника, описанного в правильном условии задачи.

Решение: Пусть α, β и γ — величины углов в правильном условии задачи, тогда, если Дима удвоил первые два угла и уменьшил в два раза третий, то

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 180^\circ, \\ 2\alpha + 2\beta + \frac{\gamma}{2} = 180^\circ, \end{cases}$$

то есть

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 180^\circ, \\ 4\alpha + 4\beta + \gamma = 360^\circ, \end{cases}$$

откуда $3(\alpha + \beta) = 180^\circ$, значит, $\alpha + \beta = 60^\circ$ и $\gamma = 120^\circ$. Таким образом, треугольник в условии задачи — тупоугольный, с наибольшим углом 120°.

Задачи Петербургских турниров юных математиков

Задачи 2018 года

Задача 1. Узоры на скатерти Улама

Расположим натуральные числа в виде спирали, как показано на рисунке ниже. Полученная картинка называется скатертью Улама.

37	36	35	34	33	32	31
38	17	16	15	14	13	30
39	18	5	4	3	12	29
40	19	6	1	2	11	28
41	20	7	8	9	10	27
42	21	22	23	24	25	26
43	44	45	46	47	48	…

В этой задаче требуется изучить закономерности и узоры, связанные с расположением разных числовых последовательности на скатерти. Интерес представляют не только гипотезы, полученные, например, на компьютере, но и явные соотношения.

1. Выясните, как на скатерти Улама описываются числовые последовательности на вертикальных, горизонтальных и диагональных прямых.

2. Исследуйте на скатерти расположения

a) квадратных чисел $\mathcal{F}_n^{(4)}$,

b) треугольных чисел $\mathcal{F}_n^{(3)}$ (найдите количество ветвей на получающейся картинке),

c) фигурных чисел разных порядков $\mathcal{F}_n^{(m)}$,

d) многомерных фигурных чисел.

3. Исследуйте на скатерти Улама расположения арифметических и геометрических прогрессий. Попробуйте также описать расположения известных числовых последовательностей, возникающих в комбинаторике: чисел Фибоначчи, чисел Каталана и т.п.

4. Рассмотрите другие нумерации целых точек всей плоскости или каких-то фигур на этой плоскости. Например, занумеруем сектор следующим образом:

$$\begin{array}{cccccc}
1 & & & & & \\
2 & 3 & & & & \\
4 & 5 & 6 & & & \\
7 & 8 & 9 & 10 & & \\
11 & 12 & 13 & 14 & 15 & \\
16 & 17 & 18 & 19 & 20 & 21
\end{array}$$

Ответьте на сформулированные выше вопросы для новых нумераций.

Задача 2. Префиксные отображения

Пусть $X_1, X_2, X_3, \ldots$ — последовательность множеств. Обозначим через P множество всех последовательностей $a = (a_1, a_2, \ldots,)$, где $a_i \in X_i$. Последовательность $a^{(i)}$ элементов P (то есть последовательность последовательностей) назовём сходящейся к элементу $a \in P$, если для каждого фиксированного n последовательность $a_n^{(i)}$ стабилизируется и $a_n^{(i)} = a_n$ для достаточно больших i. Подмножество $C \subseteq P$ называется замкнутым, если любая сходящаяся последовательность элементов из C сходится к элементу из C. Отображение $F : P \to P$ называется замкнутым, если оно переводит замкнутые подмножества в замкнутые подмножества.

Рассмотрим набор отображений

$$f_i : X_1 \times \ldots \times X_i \longrightarrow X_i,$$

каждое из которых будем называть префиксными компонентами. По префиксным компонентам зададим префиксное отображение — функцию $F : P \to P$, действующую по формуле

$$F(x_1, x_2, x_3, \dots) = (f_1(x_1), f_2(x_1, x_2), f_3(x_1, x_2, x_3), \dots).$$

1. Приведите пример функции, не являющейся префиксным отображением. Докажите, что если все X_i конечны, то любое префиксное отображение замкнуто.

2. Пусть $X_i = \mathbb{R}^{n_i}$. Докажите, что если компоненты префиксного отображения являются линейными отображениями, то такое префиксное отображение замкнуто.

3. Пусть компоненты f_i не зависят от первых $i-1$ переменной для любого i, то есть существуют функции $g_i : X_i \to X_i$ такие, что

$$f_i(a_1, \dots, a_i) = g_i(a_i).$$

Докажите, что такое префиксное отображение замкнуто.

4. Покажите, что если все X_i бесконечны, то существует незамкнутое префиксное отображение. А если некоторые из X_i конечны?

5. Пусть $X_i = \mathbb{R}^2$. Существуют ли незамкнутые префиксные отображения, компоненты которых заданы многочленами?

6. Пусть $X_i = \mathbb{R}^{n_i}$. Предложите свои условия, при которых префиксное отображение будет замкнутым.

Задача 3. Обобщенные гиперболические и тригонометрические системы

Пусть $n \geq 2$. Набор бесконечно–дифференцируемых функций $\mathbf{H}_n = (H_1, \dots, H_n)$ из $\mathbf{R}$ в $\mathbf{R}$ назовём *гиперболической системой* порядка n, если $H_i' = H_{i+1}$ для $1 \leq i < n$, $H_n' = H_1$ и $H_i(0) = \delta_{i,n}$. Аналогично, набор бесконечно–дифференцируемых функций $\mathbf{T}_n = (T_1, \dots, T_n)$ из $\mathbf{R}$ в $\mathbf{R}$ называется *тригонометрической системой* порядка n, если $T_i' = T_{i+1}$ для $1 \leq i < n$, $T_n' = -T_1$ и $T_i(0) = \delta_{i,n}$.

1. Докажите, что пары $(\mathrm{sh}(t), \mathrm{ch}(t))$ и $(\sin(t), \cos(t))$ задают, соответственно, единственные возможные гиперболические и тригонометрические системы порядка 2. В явном виде опишите гиперболические и тригонометрические системы порядка n.

2. Докажите, что для гиперболических и тригонометрических систем порядка 2 выполнены формулы Эйлера: $H_2(t) + H_1(t) = e^t$ и $T_2(t) + iT_1(t) = e^{it}$. Обобщите их на произвольные системы $\mathbf{H}_n, \mathbf{T}_n$.

3. При всех $1 \leq i \leq n$ выразите $H_i(s+t)$ через $H_j(s), H_k(t)$ и $T_i(s+t)$ через $T_j(s), T_k(t)$. Кроме того, исследуйте функции из наборов $\mathbf{H}_n$ и $\mathbf{T}_n$ на четность и нечетность.

Пусть $\lambda \in \mathbf{R}_+$. Изучите предыдущие пункты для модифицированных систем $\mathbf{H}_n^\lambda$ и $\mathbf{T}_n^\lambda$, в определении которых фигурируют равенства $H_n'(t) = \lambda H_1(t)$ и $T_n'(t) = -\lambda T_1(t)$, соответственно.

4. Докажите, что для гиперболических и тригонометрических систем порядка 2 выполнены соотношения $H_2^2(t) - H_1^2(t) = 1$ и $T_2^2(t) + T_1^2(t) = 1$. Иными словами, образы при отображениях $L_2 : t \mapsto (H_1(t), H_2(t))$ и $M_2 : t \mapsto (T_1(t), T_2(t))$ из $\mathbf{R}$ в $\mathbf{R}^2$ могут быть заданы алгебраическими уравнениями. Выясните, можно ли задать образы при отображениях

$$L_n : t \longmapsto (H_1(t), \dots, H_n(t))$$
$$M_n : t \longmapsto (T_1(t), \dots, T_n(t))$$

из $\mathbf{R}$ в $\mathbf{R}^n$ алгебраическими уравнениями. В частности, найдите однородные многочлены p_n, q_n степени n такие, что для $f_n := p_n - 1$ и $g_n := q_n - 1$ выполнено

$$f_n(H_1(t), \dots, H_n(t)) = 0,$$
$$g_n(T_1(t), \dots, T_n(t)) = 0$$

при любом t. Например, $f_2(x, y) = y^2 - x^2 - 1$ и $g_2(x, y) = y^2 + x^2 - 1$. Верно ли, что многочлены $f_n, g_n \in \mathbf{Q}[x_1, \dots, x_n]$ неприводимы?

5. Опишите все перестановки $\sigma \in S_n$, для которых $p_n(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = p_n(x_1, \dots, x_n)$ при всех $x_1, \dots, x_n$. Аналогичный вопрос для q_n.

6. Опишите все точки образов L_n и M_n в $\mathbf{R}^n$ с целыми координатами. Опишите все точки с рациональными координатами.

Придумайте, как по двум целым / рациональным точкам из образов L_n, M_n получить новую целую / рациональную точку на L_n и M_n соответственно. Изучите получающееся «сложение точек».

Задача 4. Многоугольники

1. Пусть F_1 и F_2 - два выпуклых многоугольника, множества вершин которых совпадают. Покажите, что F_1 равен F_2.
2. Пусть F_1 и F_2 не обязательно выпуклы, но удовлетворяют условию про вершины. Выясните, что можно сказать про их расположение.
3. Пусть F_1 и F_2 выпуклы, а середины сторон F_1 лежат в F_2. Как связаны площади F_1 и F_2?
4. Пусть F_1 и F_2 выпуклы, а середины сторон F_1 лежат в F_2 и середины сторон F_2 лежат в F_1. Верно ли, что такие многоугольники равны?
5. Зафиксируем $0 \leq \alpha \leq 1$. Точка на стороне многоугольника называется его α–серединой, если она делит эту сторону в отношении $\alpha : (1-\alpha)$. Известно, что для каждой стороны F_1 какая-то α–середина лежит в F_2. Что можно сказать про площади F_1 и F_2?
6. Исследуйте предыдущие вопросы в случае, когда один из многоугольников не обязательно выпуклый.

Задача 5. Конечные вычисления

Основная идея этой задачи — исследование дискретных аналогов дифференцирования и интегрирования. Интерес представляют явные сравнения непрерывных и дискретных конструкций между собой.

Обозначим через **Seq** множество всех вещественных числовых последовательностей. Сами последовательности будем обозначать символами $x_n \in \mathbf{Seq}$, а их соответствующие элементы (значения) под номером k через $x_n[k]$ (начиная с 0). Таким образом, $x_n = y_n \iff x_n[k] = y_n[k], \forall k \geq 0$.

Определим функции $\Delta, \int$ из **Seq** в **Seq** по правилам

$$(\Delta x_n)[k] := x_n[k+1] - x_n[k]$$
$$\left(\int x_n dn\right)[k] := \sum_{i=0}^{k-1} x_n[i].$$

Они называются разностным оператором и оператором суммирования, а последовательности $\Delta x_n, \int x_n dn$ — производной и интегралом x_n соответственно. Если $\Delta F_n = x_n$, то F_n называется первообразной x_n. Если A — некоторый оператор (т.е. функция из **Seq** в **Seq**), то A^n — это новый оператор, являющийся композицией A с собой n раз.

1. Опишите связи между производной, интегралом, первообразной и сдвигом x_n, где под сдвигом понимается $(\mathbf{E}x_n)[k] = x_n[k+1]$. Кроме того, найдите явную формулу для $\Delta^m x_n$.

Константы $c \in \mathbf{R}$ задают постоянные и показательные последовательности $\mathrm{c}, \mathrm{c}^n \in \mathbf{Seq}$ по формулам $\mathrm{c}[k] := c$ и $\mathrm{c}^n[k] := c^k$. Кроме того, определим для $m = 0, 1, 2, \dots$ последовательности n^m и $n^{\underline{m}}$ степеней и падающих степеней по формулам $n^m[k] := k^m$ и $n^{\underline{m}}[k] := k(k-1)(k-2)\cdot\ldots\cdot(k-(m-1))$. Набор всех последовательностей из **Seq**, которые могут быть выражены как линейные комбинации последовательностей $1, n, n^2, \dots, n^{m-1}$, обозначим через $\boldsymbol{P}_m$. Аналогично, через $\boldsymbol{FP}_m$ обозначим последовательности, являющиеся линейными комбинациями падающих степеней 1, n, $n^{\underline{2}}$, ..., $n^{\underline{m-1}}$. Последовательности из $\boldsymbol{P}_m$ или $\boldsymbol{FP}_m$ будем называть полиномиальными.

2. Выясните, как связаны между собой $\boldsymbol{P}_m$ и $\boldsymbol{FP}_m$ и предложите какие–нибудь интересные эквивалентные описания последовательностей из этих множеств. Точнее, сравните $\boldsymbol{P}_i$ и Δ^j. А как связаны между собой $\int x_n dn$ и $\boldsymbol{P}_i$?

3. Найдите дискретные аналоги формул Ньютона–Лейбница и интегрирования по частям. Затем найдите в явном виде $\int n\, dn$, $\int n^2 dn$, $\int \boldsymbol{F}_n^{(3)} dn$, $\int \lambda^n dn$, $\int n\lambda^{n-1} dn$, $\int n^2 2^{n-1} dn$, $\int \boldsymbol{F}_n^{(m)} dn$. Существует ли комбинаторное / геометрическое решение? Предложите свои собственные числовые последовательности и опишите их производные и интегралы. Например, рассмотрите известные числовые последовательности такие, как числа Фибоначчи.

4. Рассмотрим последовательность $S_n^{(m)}$, которая определяется формулой $S_n^{(m)} := \int n^m dn$. Покажите, что $S_n^{(m)}$ является полиномиальной последовательностью и в явном виде выразите её через последовательности степеней или падающих степеней.

5. Для каждой последовательности $x_n \in \mathbf{Seq}$ определим её последовательность Тейлора $\langle x_n \rangle$ по правилу $\langle x_n \rangle[k] := (\Delta^k x_n)[0]$. Найдите последовательности Тейлора ваших любимых последовательностей. Например, последовательностей падающих степеней. Кроме того, докажите, что функция $x_n \mapsto \langle x_n \rangle$ обратима и в явном виде найдите её обратную.

Обозначим через $\boldsymbol{P}_\infty$ множество всех формальных бесконечных комбинаций вида

$$x_n = \alpha_0 + \alpha_1 n^{\underline{1}} + \alpha_2 n^{\underline{2}} + \ldots,$$

где $\alpha_k \in \mathbf{R}$. Каждая такая комбинация, в действительности, определяет числовую последовательность $x_n \in \mathbf{Seq}$, потому что при каждом k сумма $x_n[k]$ будет конечна.

Например, $\boldsymbol{P}_m \subset \boldsymbol{P}_\infty$ при всех $m \geq 1$. Докажите, что каждая последовательность в $\mathbf{Seq}$ может быть представлена в таком виде и явно найдите соответствующие коэффициенты α_k.

6. Придумайте свои обобщения полученных результатов. Например, изучите периодические или рекуррентные последовательности, их производные, интегралы и связанные с ними тождества — рассмотрите функцию $\Delta_T(x_n)[k] := x_n[k+T] - x_n[k]$, придумайте аналог биномиальной теоремы для падающих степеней, изучите «дифференциальные уравнения» вида $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \Delta^i(x_n) = 0$, исследуйте частные производные последовательностей от двух индексов $x_{n,m}$ и кратные интегралы $\int\int x_{n,m} dn\, dm$ или привлеките иные методы дискретной математики для изучения разных классов последовательностей.

Задача 6. Геометрия и алгебра слов

Рассмотрим некоторое конечное множество $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$, которое будем называть алфавитом. Для каждого элемента $a \in A$ введём дополнительно символ a^{-1}. Множество всх таких символов обозначим за A^{-1}. Теперь определим расширенный алфавит $\mathbb{Q} = A \cup A^{-1}$. Тем самым можно рассмотреть набор

$$\mathbb{Q}^* = \{\varepsilon, a_1, a_2, \ldots, a_1^{-1}, a_2^{-1}, \ldots, a_1a_1, a_1a_2, \ldots, a_1a_1^{-1}, a_1a_2^{-1}, \ldots\}$$

всех слов, которые можно получить из букв алфавита $\mathbb{Q}$, где ε — пустое слово длины ноль. На этом наборе определена операция приписывания слов, которую можно рассматривать как функцию $\mathbb{Q}^* \times \mathbb{Q}^* \to \mathbb{Q}^*$. Например, $abaa \cdot ba = abaaba$. Коротко будем записывать $a^n = a \cdot \ldots \cdot a$ (n раз).

Зафиксируем некоторый набор изометрий $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ (все x_i — элементы $\mathrm{Isom}(\mathbf{R}^n)$) пространства $\mathbf{R}^n$. Мы можем компонировать данные изометрии между собой: $xy := x \circ y$. Для каждой изометрии $x \in X$ поопределению есть обратное отображение x^{-1}, которое тоже будет изометрией. Теперь определена функция $f_X : \mathbb{Q}^* \longrightarrow \mathrm{Isom}(\mathbf{R}^n)$, которая действует следующим образом: буквам a_i сопоставляются изометрии x_i, буквам a_i^{-1} сопоставляются изометрии x_i^{-1}, пустому слову ε сопоставляется тождественное отображение id, а образ длинного слова вычисляется по рекуррентному правилу $f_X(w_1w_2) = f_X(w_1) \cdot f_X(w_2)$.

На геометрическом уровне некоторые получающиеся слова будут совпадать. Например, если x, y — это переносы на векторы $(1, 0)$ и $(0, 1)$ в $\mathbf{R}^2$, то изометрии xy и yx равны. Кроме того, если z, w — это отражение относительно начала координат и поворот против часовой стрелки на $\pi/2$ относительно нуля, то $zx \neq xz$, $z^2 = w^4 = \mathrm{id}$ и $y^{-1}wx = \mathrm{id}$. Таким образом, некоторые слова в получающемся языке должны интерпретироваться как совпадающие. Будем говорить, что два слова $u, v \in \mathbb{Q}^*$ являются X–эквивалентными, если $f_X(u) = f_X(v)$. Через W_X обозначается фактормножество множества $\mathbb{Q}^*$ по получающемуся отношению эквивалентности (такое множество однозначно задаётся каким–нибудь полным набором из попарно неэквивалентных слов, то есть таким набором, что любое слово $v \in \mathbb{Q}^*$ эквивалентно слову из него, но никакие два разных слова из в наборе друг другу не эквивалентны).

0. Докажите, что X–эквивалентность является отношением эквивалентности на $\mathbb{Q}^*$.

Через $R \subseteq \mathbb{Q}^*$ будем обозначать какой-то фиксированный набор слов, а слова из R будем называть *пустыми* (на геометрическом уровне пустые слова будут отвечать тождественным изометриям). Будем говорить, что два слова $w, u \in \mathbb{Q}^*$ являются R–эквивалентными и писать $u \equiv v$, если u можно получить из w с помощью многократного применения следующей операции: между любыми двумя буквами слова w (или с краю) можно вставить (приписать) любое слово из $\overline{R} := R \cup \{\varepsilon\} \cup \{aa^{-1} \mid a \in A\} \cup \{a^{-1}a \mid a \in A\}$, а также из слова w можно вычеркнуть отрезок (часть), равный одному из слов в $\overline{R}$. Считается, что если вычеркнуть из слова само слово, то останется слово длины ноль, т.е. ε. Через $\langle \mathbb{Q} \mid R \rangle$ обозначается фактормножество $\mathbb{Q}^*$ по такому отношению эквивалентности.

0. Докажите, что R–эквивалентность является отношением эквивалентности на $\mathbb{Q}^*$ и проверьте, что если $u, v, w, w' \in \mathbb{Q}^*$ и $w \equiv w'$, то $uwv \equiv uw'v$.

В этой задаче предлагается изучить алгебраические аспекты изометрий, в основном возникающих как движения (чаще, отражения) из

$$Fix(\Phi) := \{\varphi \in \mathrm{Isom}(\mathbf{R}^n) \mid \varphi(\Phi) = \Phi\},$$

сохраняющие данную геометрическую фигуру Φ в $\mathbf{R}^n$.

1. Пусть $A = \{a, b\}$ и $R = \{a^2, b^2, abab\}$. Тогда, например, $bab \equiv aabab \equiv a \equiv abb \equiv \varepsilon a \varepsilon b \varepsilon b \varepsilon$.

a) Докажите, что любое слово из $\mathbb{Q}^*$, в действительности, R–эквивалентно одному из слов из $\{\varepsilon, a, b, ab\}$.

b) Найдите пару $(X = \{x, y\}, f_X)$ из двух изометрий $x, y \neq \mathrm{id}$ и функции $f_X : \mathbb{Q}^* \to \mathrm{Isom}(\mathbf{R}^n)$, для которой отношения R– и X–эквивалентности совпадают. Можно ли выбрать $x, y \in Fix(\Phi)$ для подходящей фигуры Φ и в какой наименьшей размерности?

c) Докажите, что слова ε, a, b, ab все попарно R–неэквивалентны.

2. Пусть $X = \{x, y\}$, где x, y — это нетривиальный перенос на вектор $(1, 0)$ и нетривиальная скользящая симметрия в перпендикулярном направлении соответственно.

a) Докажите, что $xyx = y$, то есть $xyxy^{-1} = \mathrm{id}$.

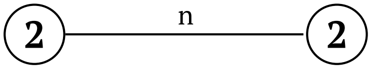
b) Пусть $A = \{a, b\}$ и $R = \{abab^{-1}\} \subseteq \mathfrak{A}^*$. Определена функция f_X, переводящая a, b в x, y и продолжающаяся на все слова алфавита $\mathfrak{A}$ по установленным в условии правилам. Докажите, что отношения R– и X–эквивалентности совпадают.

3. Рассмотрим квадратную табличку из $m \times m$ натуральных чисел $d_{i,j} \geq 2$, среди которых может встретиться символ ∞. Построим по ней граф $\Gamma = (V, E)$, в котором $V = \{r_1, r_2, \ldots, r_m\}$, а вершины r_i, r_j соединены ребром в том и только в том случае, когда $d_{i,j} \geq 3$ (включая ∞). В вершинах графа Γ изображаются числа $d_{i,i}$, а число $d_{i,j}$ рисуется на ребре (r_i, r_j) в том и только в том случае, когда $d_{i,j} \geq 4$ (включая ∞). Этими условиями исходная таблица восстанавливается по графу однозначно. Пусть $A = V$, а $R \subseteq \mathfrak{A}^*$ всех слов вида $(r_i r_j)^{d_{i,j}}$, где $i \neq j$, и всех слов вида $r_i^{d_{i,i}}$. Если $d_{i,j} = \infty$, то соответствующее слово не входит в R. Будем обозначать $G_\Gamma := \langle \mathfrak{A} \mid R \rangle$. Решения дальнейших вопросов интересны даже при малых m.

a) Опишите G_Γ для графа с одной вершиной с $d_{1,1} = n$, где $n \geq 2$. Найдите такую изометрию a, для которой $a^k \neq \mathrm{id}$ при $1 \leq k < n$ но $a^n = \mathrm{id}$. В частности, найдите пару (X, f_X), для которой отношения R– и X–эквивалентности совпадают.

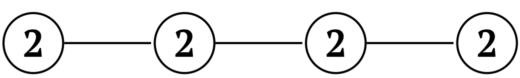
b) Опишите G_Γ для графа с n изолированными вершинами, где $d_{i,i} = 2$, и найдите пару (X, f_X), для которой отношения R– и X–эквивалентности совпадают. А что, вообще, происходит с алфавитом при взятии дюзъюнктного объединения графов?

c) Опишите G_Γ для графа ниже ($n \geq 2$ или $n = \infty$) и найдите пару (X, f_X), для которой отношения R– и X–эквивалентности совпадают.



d) Решите аналогичную задачу для графа

e) Более общо, решите аналогичную задачу для графа из n вершин, являющегося простой ломаной.



4. По графу Γ построим квадратичную форму на $\mathbf{R}^m$

$$Q_\Gamma(x_1,\ldots,x_m)=\sum_{i=1}^{m}x_i^2-\sum_{(i,j)\in E}x_ix_j.$$

Найдите соответствующие квадратичные формы для графов предыдущих пунктов и исследуйте их на положительную определённость. Докажите, что если квадратичная форма Q_Γ является положительно определённой, то граф Γ

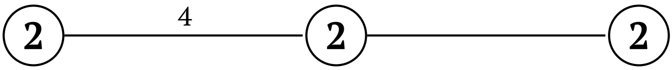
a) не содержит циклов

b) не содержит вершин степени 4 и больше

c) содержит не более одной вершины степени 3

Что ещё можно сказать про граф Γ, если соответствуюшая форма положительно определена?

5. Рассмотрите граф ниже и найдите пару (X, f_X), для которой отношения $R-$ и $X-$эквивалентности совпадают.



Исследуйте ситуацию, при которой такой граф состоит из n вершин и продолжается вправо ребрами с $d_{i,i+1}=3$, $i\geq 2$.

Задача 7. Факториалы Бхаргавы

В 2000 году лауреат Филдсовской премии Манжул Бхаргава нашёл обобщение целочисленного факториала, в котором для каждого подмножества $S\subseteq\mathbf{Z}$ определяется $n!_S$, причём, $n!_{\mathbf{Z}}=n!$. Оказалось, что его конструкция естественным образом обобщает наиболее интересные свойства обычного факториала. Ссылка на статью: *goo.gl/zF3p5N* (The Factorial Function and Generalizations, Manjul Bhargava). В этой задаче предлагается продолжить исследование Бхаргавы в конкретном направлении. Одной из основ этого продолжения служит следующее утверждение.

1. Докажите, что любое положительное рациональное число может быть представлено в виде частного произведений факториалов (не обязательно различных) простых чисел. Например,

$$\frac{10}{9}=\frac{2!\cdot 5!}{3!\cdot 3!\cdot 3!}.$$

Напомним конструкцию Бхаргавы. Зафиксируем подмножество $S \subseteq \mathbf{Z}$ и простое число $p \in \mathbf{P}$. Построим последовательность $a_0, a_1, \ldots \in S$ следующим образом: выберем произвольное $a_0 \in S$; выберем элемент $a_1 \in S$ так, чтобы разность $a_1 - a_0$ делилась на наименьшую возможную степень числа p; выберем элемент $a_2 \in S$ так, чтобы разность $(a_2 - a_0)(a_2 - a_1)$ делилась на наименьшую возможную степень числа p, и так далее. На шаге k выберем $a_k \in S$ так, чтобы разность $(a_k - a_0) \cdot \ldots \cdot (a_k - a_{k-1})$ делилась на наименьшую возможную степень числа p. Вместе с построенной последовательностью a_n мы получаем также монотонно возрастающую последовательность соответствующих степеней p

$$\nu_k(S, p) := p^{\operatorname{ord}_p\left(\Pi_{i=0}^{k-1}(a_k - a_i)\right)},$$

где $\nu_0(S, p) = 1$. Теперь обобщённый факториал на S для $k \geq 0$ определяется по формуле

$$k!_S := \prod_{p \in \mathbf{P}} \nu_k(S, p).$$

2. Проверьте, что последовательность $\nu_k(S, p)$ не зависит от выбора a_k. Кроме того, докажите, что для каждого $S \subseteq \mathbf{Z}$ в произведении выше лишь конечное число множителей не равно единице.

3. Пусть $S = a\mathbf{Z} + b := \{an + b \mid n \in \mathbf{Z}\}$ или $S = \{q^k \mid k \in \mathbf{Z}_{\geq 0}\}$.

a) Какие значения может принимать отношение факториалов

$$n!_S / m!_S$$

в зависимости от a, b, q?

b) Ответьте на предыдущий вопрос, если числа $n = p, m = q$ предполагаются простыми.

c) Опишите возможные значения, которые может принимать биномиальный коэффициент Бхаргавы

$$\binom{n}{k}_S := \frac{n!_S}{k!_S (n-k)!_S}.$$

d) Ответьте на предыдущий вопрос, если числа $n = p$ предполагаются простыми.

4. Ответьте на вопросы предыдущего пункта для произвольного S.

5. Исследуйте вопросы п. 3 (а,б) и 4, описав возможные отношения произведений факториалов Бхаргавы.

Задача 8. О приближении кривых

Кривой на плоскости называется инъективное непрерывное отображение $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$. Нас будут интересовать кривые из класса $\mathbf{C}^\infty$ — те, для которых каждая из компонент отображения $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ непрерывно дифференцируется бесконечное число раз.

Пусть $\zeta, \gamma\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$. Кривую ζ будем называть ε*–близкой* к кривой γ, если

$$\zeta(a) = \gamma(a),\ \ \zeta(b) = \gamma(b),\ \ \forall\, t \in [a,b]\ \exists\, s \in [a,b]\colon\ \mathrm{dist}\,(\zeta(t), \gamma(s)) < \varepsilon.$$

Кривую ζ будем называть ε*–приближением* γ, если

$$\zeta(a) = \gamma(a),\ \ \zeta(b) = \gamma(b),\ \ \forall\, t \in [a,b]\ \mathrm{dist}\,(\zeta(t), \gamma(t)) < \varepsilon.$$

Пусть $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ — регулярная кривая. Её ε–длиной называется число

$$L_\varepsilon(\gamma) = \inf\ \{L(\zeta) \mid \zeta \text{ — } \varepsilon\text{–приближение } \gamma\}\,.$$

1. Докажите, что у регулярных кривых любой длины бывают сколь угодно длинные регулярные приближения. Иными словами, для любого числа $\mathcal{D} > 0$ и для любой регулярной кривой γ существует регулярная кривая $\zeta\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ с длиной $L(\zeta) > \mathcal{D}$, являющаяся её ε–приближением.

2. Докажите, что для любой регулярной кривой γ существует константа ε_0 такая, что при $\varepsilon < \varepsilon_0$ инфимум из определения ε–длины совпадает с инфимумами длин (а) кривых, ε–близких к γ; (б) ломаных, ε–близких к γ. Укажите, как найти ε_0.

3. Пусть γ — регулярная кривая, про которую известно, что её кривизна ограничена сверху числом $\frac{1}{r}$. При $\varepsilon < \frac{r}{2}$ дайте как можно более точную нижнюю оценку на $L_\varepsilon(\gamma)$ (и проверьте, достигается ли она).

4. Для регулярной кривой γ докажите, что $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} L_\varepsilon(\gamma) = L(\gamma)$. Докажите то же самое для произвольной непрерывной кривой конечной длины.

Перейдём от кривых к ломаным на плоскости. Пусть $\mathcal{C}_n$ — множество несамопересекающихся ломаных с вершинами в точках множества $\frac{1}{n}\mathbb{Z} \times \frac{1}{n}\mathbb{Z}$ и рёбрами длины $\frac{1}{n}$. Несложно перенести определение ε–близости на случай ломаных — расстояние dist между двумя точками на плоскости нам теперь будет удобнее определить как

$$\mathrm{dist}\Big((x, y),\ (z, t)\Big) = \max\{|x - z|,\ |t - y|\} \text{ (проверьте, что это метрика).}$$

Дана регулярная кривая $\gamma\colon [0, 1] \to \mathbb{R}^2$, причем $\gamma(0), \gamma(1) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Ее n–пикселизацией (обозначим через γ_n) будем называть кратчайшую ломаную из $\mathcal{C}_n$, которая $1/n$–близка к γ. Обозначим $\mathcal{P}_n(\gamma) = L(\gamma_n)$.

5. Для данной ломаной $\lambda \in \mathcal{C}_1$ и чисел $n, \varepsilon \in \mathbb{N}$ как можно более точно оцените длину самой короткой и самой длинной ломаных из $\mathcal{C}_n$, ε–близких к λ (и проверьте, достигаются ли ваши оценки).

6. Для произвольной регулярной кривой γ оцените $\mathcal{P}_n(\gamma)$ и найдите $\lim\limits_{n\to\infty} \mathcal{P}_n(\gamma)$.

7. Предложите и исследуйте свои обобщения данной задачи: например, можно рассмотреть другие метрики и другие сетки допустимых вершин на плоскости.

Задача 9. Экстремальные тетраэдры

Задачи на плоскости.

1. Среди всех треугольников, вписанных в единичную окружность, найдите треугольник с

   a) максимальным периметром,

   b) максимальной площадью,

   c) максимальным радиусом вписанной окружности.

2. Шириной треугольника в направлении α, где $\alpha \in [0, \pi]$, называется величина $w(\alpha)$, равная длине проекции треугольника на прямую, образующую с осью абсцисс угол α. Средней шириной треугольника называется величина
$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} w(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha.$$

a) Придумайте, как по периметру треугольника найти его среднюю ширину.

b) Среди всех треугольников, вписанных в единичную окружность, найдите треугольник с максимальной средней шириной.

Задачи в $\mathbf{R}^3$.

3. a) Среди всех тетраэдров, вписанных в единичную сферу, найдите тетраэдр с максимальным объемом.

b) Докажите следующее обобщенное тождество параллелограмма: если $X_1, \ldots, X_n$ — векторы в $\mathbb{R}^3$, где n — натуральное число, то

$$\sum_{1 \le i < j \le n} \|X_i - X_j\|^2 + \|\sum_{i=1}^{n} X_i\|^2 = n \sum_{i=1}^{n} \|X_i\|^2.$$

c) Среди всех тетраэдров, вписанных в единичную сферу, найдите тетраэдр с максимальной суммой длин ребер.

d) Пусть дан тетраэдр в $\mathbb{R}^3$. Известно, что любое его ребро ортогонально плоскости, проходящей через середину этого ребра и оставшиеся две вершины тетраэдра. Докажете, что тетраэдр правильный.

e) Среди всех тетраэдров, вписанных в единичную сферу, найдите тетраэдр с максимальной площадью поверхности (суммой площадей граней).

f) Среди всех тетраэдров, вписанных в единичную сферу, найдите тетраэдр с максимальным радиусом вписанной сферы.

4. Пусть тетраэр $ABCD$ вписан в единичную сферу с центром O. Суммой углов обзора тетраэдра называется величина

$$\sphericalangle AOB + \sphericalangle AOC + \sphericalangle AOD + \sphericalangle BOC + \sphericalangle BOD + \sphericalangle COD.$$

Среди всех тетраэдров, вписанных в единичную сферу, найдите тетраэдр с максимальной суммой углов обзора.

5. a) Используя сферические координаты в трёхмерном пространстве, обобщите понятие средней ширины треугольника на случай $\mathbb{R}^3$ (для тетраэдра).

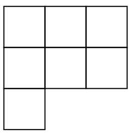
b) Среди всех тетраэдров, вписанных в единичную окружность, попробуйте найти тетраэдр с максимальной средней шириной.

6. Многомерным обобщением треугольника и тетраэдра в $\mathbb{R}^n$ является симплекс — многогранник, у которого $n+1$ вершина. Попытайтесь пункты 3) – 5) обобщить на многомерный случай.

Задача 10. Динамические системы

Зафиксируем натуральное число n и рассмотрим множество $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ возможных остатков при делении на n. В этой задаче предлагается изучить некоторые разбиения $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ на подмножества (классы эквивалентности) и исследовать динамику этих разбиений при малых изменениях задающих их параметров. Изменения при этом будут контролироваться некоторой функцией $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$. Каждое разбиение $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ задаёт представление числа n в виде суммы неотрицательных слагаемых, а следовательно, задаёт диаграмму Юнга соответствующего порядка. Интерес вызывает как количество строчек в этой диаграмме, так и их длина.

Рассмотрим наименьшее отношение эквивалентности на $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, при котором каждый остаток $[x]$ эквивалентен остатку $[f(x)]$. В зависимости от f и n найдите число всех классов, на которые полученное отношение делит $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Например, при $n = 7$ функция $f(x) = 4x + 1$ задаёт разбиение $\mathbf{Z}/7\mathbf{Z} = \{[0], [1], [5]\} \cup \{[2]\} \cup \{[3], [6], [4]\}$ и диаграмму



Интерес в представляют как гипотезы и наблюдения, связанные с динамикой ответов, так и строгие доказательства. Какая трансформация f вносит большее изменение: умножение на два $f(x) \mapsto 2f(x)$ или прибавление единицы $f(x) \mapsto f(x) + 1$? Предлагается проводить исследование в следующем порядке:

1. Изучите случаи $f_a(x) = ax$, где а — фиксированное целое число, и $f(x) = x^2$.

2. Изучите случай $f_{a,b}(x) = ax + b$, начиная с совсем малых целых b. Опробуйте оба подхода: фиксируйте a, b и меняйте n или фиксируйте n и меняйте a, b, а затем изучите форму получающихся диаграмм.

a) Траекторией x называется последовательность

$$x,\ f_{a,b}(x),\ f_{a,b}(f_{a,b}(x)),\ \ldots$$

В предположении $(a, n) > 1$, опишите остатки $[x]$, трактории которых образуют цикл.

b) Постарайтесь описать траекторию остатка $[0]$.

c) Постарайтесь найти те характеристики получающихся диаграмм Юнга, которые поддаются вычислению в зависимости от n, a, b.

d) Фиксируйте a, b и опишите чезаровские средние (по n) мощностей получающихся классов эквивалентности. Затем попробуйте брать средние по другой переменной (a или b).

3. Изучите случаи $f_m(x) = x^m$ и $f(x) = x^2 + 1$.

4. Выясните, для каких полиномиальных функций f искомые числа классов эквивалентности и их размеров поддаются явному вычислению, и проведите соответствующее исследование. Например, выясните, какие замены функции $f \mapsto g$ приводят к незначительным изменениям ответов.

Задача 11. ПОЗ–коды

Сотрите мне память (Н.В. Гоголь. Вий)
Стереть нельзя исправить (крылатое выражение)

Возможно, вам знакома перфокарта — картонка, в которой можно пробивать отверстия. С помощью перфокарты удобно хранить информацию в машиночитаемом виде: есть отверстие — 1, нет — 0. У перфокарты есть важное свойство: любой 0 легко меняется на 1, но обратная замена крайне затруднена. Память с таким свойством называют *памятью с однократной записью (ПОЗ)*, или по-английски *Write-Once Memory (WOM)*. Один бит такой памяти называется *витом*.

Ограничение казалось бы не позволяет такую память перезаписывать несколько раз, но в 1982 году Р.Ривест и А.Шамир в статье «How to Reuse a “Write-Once” Memory» предложили кодировку, позволяющую ценой некоторого увеличения объёма носителя предоставить возможность перезаписи информации.

Например, с помощью трёх витов оказывается возможно записать некоторое двухбитовое число, а потом однократно заменить его на другое:

число	*кодировка для первой записи*	*кодировка для второй записи*
00	000	111
01	100	011
10	010	101
11	001	110

Допустим, можно сперва записать 10, используя код 010, а потом записать число 01 на его место, заменив третий вит на 1 и получив код 011.

Недавно эта область исследований получила второе дыхание в связи с распространением флэш-памяти (обладающей очень похожими свойствами). Ниже мы предлагаем вам задачи, связанные с данной областью:

1. Представим себе проездной билет, стоимость которого (целое число от 0 до $n-1$) запоминается с помощью k витов — скажем, компостируется при покупке. Предложите кодировку, позволяющую исключить увеличивающее стоимость изменение витов (докомпостирование билета) после покупки. Приведите по возможности точные верхние и нижние оценки на число k для вашей кодировки. Также предложите теоретические верхние и нижние оценки на количество витов в кодировках с такими свойствами.

2. В условиях п.1 предложите кодировку, исключающую любое изменение стоимости после покупки. Иными словами, кодировку, в которой любые дополнительные изменения витов делают код любого числа некорректным (не соответствующим никакому числу). Также приведите оценки для предложенной кодировки и теоретические оценки.

3. Представим себе проездной билет, в котором используется ПОЗ для хранения числа поездок. После каждой поездки число уменьшается на 1, пока не достигнет нуля. Предложите кодировку, позволяющую хранить эту информацию по возможности максимально эффективно по памяти. Дайте как теоретические, так и достигаемые вашей кодировкой верхние и нижние оценки необходимого количества витов. Убедитесь, что предложенный вами код не позволяет увеличить количество поездок в процессе перезаписи значений.

4. Пусть в ПОЗ хранится не число поездок, а оплаченная стоимость в рублях, при этом при поездке со счёта снимается либо 40, либо 45 рублей (в зависимости, например, от вида транспорта). Возможно ли с учётом этого ограничения сделать кодировку более эффективной по памяти и улучшить оценки из п.3?

5. Обобщите результат из п.4 на случай произвольного набора стоимостей поездки.

6. Рассмотрим ситуацию, когда мы записываем события на длинную ленту. Скажем, речь может идти о показаниях скорости — увеличилась ли она на 1 от предыдущего наблюдения, уменьшилась ли на 1 или осталась прежней. Сравнительно легко иметь дело с ситуациями, когда каждое следующее событие имеет ровно 2^k значений — тогда мы про каждое событие будем дописывать к ленте ровно k витов и сразу переходить к следующему. Однако, можете ли вы предложить более эффективную по памяти кодировку в той ситуации, когда количество вариантов, например, равно 3? Естественно, вы можете, помимо добавления новых витов, исправлять какие-то из предыдущих.

7. Рассмотрите п.6 для произвольного количества вариантов значений, добавляемых на каждом шаге.

8. Предложите какие-нибудь свои аналогичные задачи и кодировки, подходящие для их решения. Этот пункт также подходит для изложения кодировок, придуманных вами в процессе решения задачи, но не подошедших под условия.

Задачи 2017 года

Задача 1. Уйдём на Север

Снежная Королева возвращается обратно на Север и собирает чемоданы. За то время, что она провела вне дома, она накопила множество льдинок самой разной формы и хочет их все взять с собой. Помогите Снежной Королеве быстрее собрать вещи.

1. У Снежной Королевы есть стеллаж с плоскими квадратными чемоданами и множество льдинок треугольной формы, которыми она

дорожит. Какова наименьшая сторона плоского квадратного чемодана, в которую поместятся одновременно две плоские льдинки в форме равнобедренных прямоугольных треугольников с длинами катетов a и b, соответственно? А две льдинки в форме равносторонних треугольников? В плоские чемоданы льдинки укладываются только в один слой.

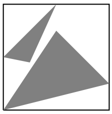


Рис. 1: Две треугольные льдинки в не самом подходящем плоском квадратном чемодане

2. Настала очередь прозрачных картин изо льда. В какой плоский чемодан квадратной формы поместятся две ледяные квадратные картины со сторонами a и b, соответственно?

3. Стеллаж с квадратными чемоданами опустел. Но в ящике комода обнаружились чемоданы самых разных форм. Первыми на глаза попалась стопка с несчётным числом плоских прямоугольных чемоданов. Как выглядят прямоугольные чемоданы с наименьшей площадm., в которые можно поместить льдинки уже рассмотренных форм?

4. Для ускорения сборов удобнее класть более двух льдинок в чемодан. В какой прямоугольный чемодан лучше всего убрать 3 одинаковые равносторонние льдинки? А 4? Что будет в случае льдинок — прямоугольных треугольников?

5. Кубические чемоданы отлично подходят для упаковки объёмных льдинок-тетраэдров. Решите задачу для различных пар таких льдинок.

6. Рассмотрите льдинки и чемоданы других форм. Например, круглые льдинки-тарелки и треугольные чемоданы.

Задача 2. Вас снимают

Пусть $I \subseteq \mathbb{R}$ является объединением непересекающихся отрезков на прямой. Обозначим за $L(I)$ длину множества I, то есть сумму длин соответствующих отрезков. Подмножество плоскости A будем называть фигурой, если оно ограничено, замкнуто и его пересечение с любой прямой есть объединение конечного числа отрезков. В частности, любой многоугольник является фигурой. Зафиксируем некоторую декартову систему координат на плоскости. Для фигуры A определим её x-снимок, как функцию $f_x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, которая по точке t на прямой OX вычисляет длину пересечения A с прямой, проходящей через t и перпендикулярной OX

$$f_x(t) = L(A \cap \{(t, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \text{ любое}\}).$$

Аналогично определим y-снимок фигуры A как

$$f_y(t) = L(A \cap \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 \mid x \text{ любое}\}).$$

1. Какая фигура обладает следующими x- и y-снимками:

$$f_x(t) = f_y(t) = \begin{cases} 0, & t \le 0 \\ \frac{7t}{12}, & 0 \le t \le 3 \\ \frac{21}{12}, & 3 \le t \le 4 \\ -\frac{7t}{12} + \frac{49}{12}, & 4 \le t \le 8 \\ 0, & 8 \le t \end{cases} \quad ?$$

2. Найдите способ восстановить фигуру A, а также варианты её расположения по x- и y-снимкам, если известно, что
а) A — некоторый прямоугольник;
б) A — некоторый треугольник;
в) A — некоторый четырёхугольник.
Можно ли обойтись только одним снимком?

3. Приведите пример двух неравных фигур на плоскости, имеющих одинаковые x- и y-снимки.

4. Пусть A некоторая фигура. Можно ли восстановить и, если можно, то как, по x- и y-снимкам следующую информацию:
а) A имеет площадь S;
б) A является невыпуклой фигурой;
в) A является многоугольником с n вершинами;
г) A содержит фиксированную точку (x_0, y_0)?
Можно ли добиться ответов на эти вопросы, если заранее известна

дополнительная информация про A? Например, если известно, что A выпуклая и центрально-симметричная фигура?

5. Повернём исходную систему координат относительно начала отсчёта на угол α против часовой стрелки. x-снимок в новой системе координат назовём α-снимком. Так например, 0-снимок это x-снимок, $\frac{\pi}{2}$-снимок это y-снимок. Исследуйте предыдущие пункты, если вместо x- и y- снимков даны α- и β-снимки, для некоторых неравных углов α и β? Можно ли узнать дополнительную информацию (например, восстановить любую фигуру), если даны три разных снимка?

Задача 3. Целые структуры

1. Пусть даны два целых числа a и b. Множеством, подчинённым a и b назовём S, подмножество в $\mathbb{Z}$, удовлетворяющее свойствам:
   а) $a, b \in S$;
   б) Для любого $x \in S$ число $-x$ лежит в S;
   в) Для всех x и y из S число $ax + by$ также лежит в S.
   Пусть $a = 2$, а $b = 3$. Покажите, что любое подчинённое 2 и 3 множество S обязательно содержит 1.

2. Опишите наименьшее множество S, подчинённое a и b, если $a = b = 1$. Что будет, если $a = 2$, $b = 3$?

3. Рассмотрите аналогичную задачу для $a = 4$, $b = 5$.

4. При каком условии на a и b в любом a, b-подчинённом множестве S найдётся число, имеющее остаток k по модулю n для всех $0 \le k < n$.

5. Пусть a и b взаимно просты. Покажите, что любое подчинённое a и b множество содержит 1.

6. Натуральной плотностью множества $A \subseteq \mathbb{Z}$ назовём предел отношения
$$\lim_{n \to \inf ty} \frac{|\{x \in A \mid -n \le x \le n\}|}{2n},$$
   если этот предел существует. Верно ли, что для не взаимно простых a и b размер наименьшего подчинённого a и b множества имеет натуральную плотность 0?

Задача 4. Задача №4 Буйство красок

Известный художник Петров имеет следующую манеру письма: квадратный холст $n \times n$ он разбивает на квадратики 1×1, после чего каждый квадратик закрашивает в один из k цветов, имеющихся в наличии. Так как на картине не указан верх и низ, то искусствоведы и сам Петров считают две картины, отличающиеся поворотом на 90°, одинаковыми.

1. В детстве Петров писал на холсте 2×2. Известно, что за это время он написал более 100, но менее 200 различных картин, при этом с холстов 2×2 на большие он перешёл после того, как написал картины размера 2×2 всеми доступными ему способами. Сколько красок было у Петрова в детстве? Сколько в точности картин 2×2 он написал?

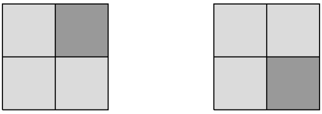


Рис. 2: Две неразличимые детские картины Петрова 2×2 на двух цветах

2. Обретя популярность, Петров переключился на масштабные проекты с холстами $n \times n$, $n \geq 3$ и числом красок k. Найдите асимптотику или формулу для числа различных картин, которые мог написать Петров на полотнах 3×3, 4×4, при $k \to \inf ty$. Оцените число возможных картин Петрова при других n или дайте точную формулу.

3. Для систематизации картин Петрова искусствоведы предложили несколько классификаций, основанных на том, что две картины Петрова не стоит различать, если они отличаются цепочкой определённых преобразований. Найдите конкретные значения, оцените при больших n и k или дайте точную формулу числа работ Петрова по классификациям, основанным на преобразованиях:
а) Поворот на 90° и отражения относительно осей симметрии квадрата;
б) Преобразования из пункта а) и преобразование, сдвигающее все строчки квадрата, кроме первой, на 1 вниз, а нижнюю строчку ставящее наверх.
в) Преобразования из пункта а) и преобразования, меняющие цвета

на картине: цвет i на цвет j, цвет j на цвет i, и не меняющее остальные цвета. Назовём такие преобразования элементарными перекрашиваниями.
г) Преобразования из пункта а) и преобразования, позволяющие в одном из столбцов сдвинуть все квадратики на 1 по циклу.

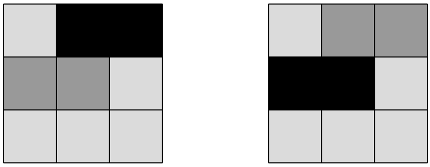


Рис. 3: Картины, отличающиеся заменой двух цветов

4. Художник Иванов решил превзойти Петрова и стал разбивать равносторонний треугольник со стороной n на треугольники со стороной 1 и раскрашивать их в k цветов. Исследуйте аналогичный предыдущим пунктам вопрос. В частности, рассмотрите классификации, разрешающие преобразования:
а) Поворот на 120°;
б) Поворот на 120° и отражения относительно осей симметрии треугольника;
в) Преобразования из пункта б) и элементарные перекрашивания;
г) Преобразования из пункта а) и преобразование, сдвигающее по циклу цвета в одном горизонтальном ряду большого треугольника.

5. Рассмотрите другие, в том числе трёхмерные, разбиения и их раскраски. Придумайте другие классификации.

Задача 5. Дискретная непрерывность

Будем говорить, что два целых числа a и b соседние, если $|a - b| \leq 1$. Пусть I — некоторое подмножество внутри целых чисел. Отображение $f : I \to \mathbb{Z}$ назовём дискретно непрерывным, если для любых двух соседних чисел $a, b \in I$ их образы $f(a)$ и $f(b)$ тоже соседние.

1. Пусть $a < b$ — два целых числа. Целочисленным отрезком $[a, b]$ будем называть подмножество целых чисел $[a, b] = \{x \in \mathbb{Z} \mid a \leq x \leq b\}$.

Пусть дано дискретно-непрерывное отображение $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$. Покажите, что для любого целого числа $x \in [f(a), f(b)]$ существует c, такое, что $a \le c \le b$ и $f(c) = x$.

2. Пусть $n \in \mathbb{N}$ — некоторое натуральное число. Рассмотрим функцию $\rho_1(x, y)\colon \mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^n \to \mathbb{R}$, заданную по правилу

$$\rho_1(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|, \text{ где } x = (x_1, \ldots, x_n), \text{ а } y = (y_1, \ldots, y_n).$$

Будем говорить, что точки $x, y \in \mathbb{Z}^n$ соседние, если $\rho_1(a, b) \le 1$. Пусть A — подмножество в $\mathbb{Z}^n$, а $k \in \mathbb{N}$. Отображение $f\colon A \to \mathbb{Z}^k$ назовём дискретно-непрерывным, если для любых соседних $x, y \in A$ их образы $f(x)$ и $f(y)$ соседние в $\mathbb{Z}^k$. Для каждого натурального числа m определим множества

$$D^n_m = \{x \in \mathbb{Z}^n \mid |x_i| \le m\} \text{ и } S^{n-1}_m = \{x \in D^n_m \mid \exists i \le n \ |x_i| = r\}.$$

Пусть дискретно-непрерывное отображение $f\colon S^1_m \to \mathbb{Z}^2$, а $x \in \mathbb{Z}^2$ не лежит в $f(S^1_m)$. Для любого луча l, исходящего из точки x и не содержащего точек $f(S^1_m)$, можно определить число $i_{l,f}$ его пересечений с ломаной, построенной по f. Сделаем это следующим образом:

$$i_{l,f} = \frac{1}{2} \cdot \big|\{(a, b) \mid a,\ b \in S^1_m,\ \rho_1(a, b) = 1$$
$$\text{и } l \text{ пересекает отрезок, соединяющий } f(a) \text{ и } f(b)\}\big|.$$

Число $\frac{1}{2}$ появляется из-за того, что одно и тоже пересечение соответствует и паре (a, b), и паре (b, a). Покажите, что чётность $i_{l,f}$ не зависит от выбора l и, следовательно, является характеристикой точки x.

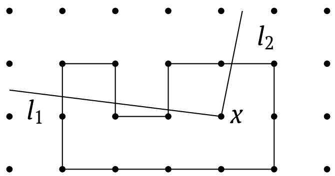


Рис. 4: Ломаная и два луча, исходящие из одной точки, с $i_{l_1,f} = 3$ и $i_{l_2,f} = 1$

3. Точку $x \in \mathbb{Z}^2$, не лежащую в $f(S^1_m)$, назовём внутренней по отношению к f, если $i_{l,f}$ нечётно, и внешней, если $i_{l,f}$ чётно. Пусть дано дискретно-непрерывное отображение $g\colon D^2_m \to \mathbb{Z}^2$. Положим $f = g|_{S^1_m}$ — сужение отображения g. Покажите, что для любой f-внутренней точки x существует $y \in D^2_k$, что $g(y) = x$.

4. Определим метрические пространства $\mathbb{Z}^{n,p}$, где $p = \infty$, или $p \geq 1$ — вещественное число, следующим образом:

$$\mathbb{Z}^{n,\infty} = \left(\mathbb{Z}^n, \max\{|x_i - y_i| : \ i \in \overline{1,n}\}\right);$$
$$\text{а при } p \text{ — вещественном } \mathbb{Z}^{n,p} = (\mathbb{Z}^n, \rho_p),$$

где $\rho_p(x,y) = (\sum_{1\leq i\leq n} |x_i - y_i|^p)^{1/p}$. Заметим, что если $n = 1$, то все метрики ρ_p совпадают, поэтому при $n = 1$ индекс p можно опустить. Естественным образом, расстояние ограничивается и на подмножества указанных метрических пространств.

а) Покажите, что 1-липшицевы отображения из $\mathbb{Z}^{n,1} \to \mathbb{Z}^{k,1}$ являются дискретно-непрерывными и наоборот.

б) Опишите все пары чисел L_1 и L_2, такие что отображение $f\colon \mathbb{Z}^{2,p} \to \mathbb{Z}^{2,p}$ липшицево с константой L_1 тогда и только тогда, когда оно L_2-липшицево.

в) Исследуйте взаимосвязь между условиями липшицевости для отображений $f\colon \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2$ в метриках ρ_p и ρ_q с различными константами L.

5. Пусть L — натуральное число. Покажите, что для любого L-липшицевого отображения $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ и любого целочисленного отрезка $[a,b]$
$$\frac{|f([a,b])|}{|\operatorname{conv}(f([a,b]))|} \geq \frac{1}{L},$$
где $|f([a,b])|$ — это количество точек в образе $[a,b]$, а $\operatorname{conv}(f([a,b]))$ — наименьший отрезок, содержащий $f([a,b])$.

6. Зададим расстояние на D^n_m с помощью метрики ρ_1. Сформулируйте и докажите аналог пункта 6 задачи для L-липшицевых отображений из $D^2_m \to \mathbb{Z}^{2,q}$.

7. Обобщите все указанные теоремы на случай размерности больше 2. Опишите все L-липшицевы биекции из $\mathbb{Z}^{n,p} \to \mathbb{Z}^{n,q}$ для маленьких

L.

Задача 6. Гипергеометрическая прогрессия

1. Рассмотрим следующее рекуррентное соотношение:

$$p(n)a_n = q(n)a_{n-1}, \text{ для } n > n_0 \text{ и } a_{n_0} = \lambda,$$

где λ — некоторое вещественное число, а $p(n)$ и $q(n)$ — некоторые многочлены с вещественными коэффициентами. Выведите явную формулу для его решения.

2. Последовательность из предыдущего пункта назовём гипергеометрической прогрессией. Будем говорить, что многочлены p и q определяют эту прогрессию. Являются или нет частными случаями гипергеометрической прогрессии: а) геометрическая прогрессия; б) арифметическая прогрессия; в) $a_n = n!$; г) $a_n = C_n^k$ для фиксированного k; д) $a_n = \frac{(-1)^n+1}{2}$? Если да, то какие многочлены их задают?

3. Рассмотрим рекуррентное соотношение

$$p(n)a_n = q(n)a_{n-1} + r(n)a_{n-2},$$

где $p(n)$, $q(n)$, $r(n)$ — некоторые многочлены. При каких p, q и r у такого рекуррентного соотношения нет решений в виде гипергеометрической прогрессии?

4. Исследуйте предыдущий вопрос для соотношения

$$p_0(n)a_n = p_1(n)a_{n-1} + p_2(n)a_{n-2} + \cdots + p_k(n-k)a_{n-k},$$

где k фиксировано, $p_i(n)$ — некоторые многочлены.

5. Пусть даны две гипергеометрические прогрессии a_n и b_n. При каких условиях на многочлены, задающие a_n и b_n, существуют числа $r_1(n)$ и $r_2(n)$, что $r_1(n)a_n + r_2(n)b_n = 0$ для всех n?

6. Исследуйте предыдущий вопрос для большего числа гипергеометрических прогрессий.

7. Пусть a_n и b_n — две последовательности. Определим последователь-

ность $a * b_n$ равенством

$$a * b_n = \sum_{0 \le i \le n} a_i b_{n-i}.$$

Предположим, что a_n и b_n — гипергеометрические прогрессии. Всегда ли последовательность $a * b_n$ есть конечная сумма гипергеометрических прогрессий? Если нет, то какие условия надо наложить на a_n и b_n, чтобы это было верно? Начните со случая геометрических прогрессий.

8. Исследуйте существование решений в виде гипергеометрических функций для рекуррентного соотношения

$$p(0,n)a_n = p(1,n)a_{n-1} + \cdots + p(k,n-k)a_{n-k} + \cdots + p(n_0, n-n_0)a_{n_0},$$

где $p(n,k)$ — гипергеометрическая функция по n и по k.

Задача 7. Зависимые матрицы

1. Пусть B, C и D матрицы 2×2 с коэффициентами из $\mathbb{R}$. Линейным уравнением в матрицах относительно матрицы X назовём уравнение вида:

$$CXD = B.$$

Матрица $A \in M_2(\mathbb{R})$ называется его решением, если

$$C \cdot A \cdot D = B,$$

где $\cdot$ обозначает произведение матриц. Обозначение произведения для краткости будем опускать. Решите уравнение:

$$\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) X \left(\begin{smallmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 5 & 1 \\ 5 & 2 \end{smallmatrix}\right).$$

2. Покажите, что уравнение $CXD = B$ разрешимо тогда и только тогда, когда разрешимы уравнения $CX = B$ и $XD = B$. При каких условиях на C и D уравнение $CXD = B$ разрешимо при любых B?

3. Естественным образом, можно определить обобщённые линейные уравнения:

$$C_1XD_1 + C_2XD_2 + \cdots + C_nXD_n = B.$$

Исследуйте разрешимость таких уравнение для любых B и решите обобщённое линейное уравнение:

$$\left(\begin{smallmatrix}1&1\\1&2\end{smallmatrix}\right) X \left(\begin{smallmatrix}2&1\\1&0\end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix}1&-1\\0&1\end{smallmatrix}\right) X \left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}5&1\\5&2\end{smallmatrix}\right).$$

4. Последовательность матриц вида $A_n = C^n A_0$ назовём геометрической прогрессией. Опишите все решения линейного рекуррентного соотношения $A_{n+1} = CA_nD$, являющиеся геометрическими прогрессиями. Можно ли любое решение такого рекуррентного соотношения представить в виде суммы геометрических прогрессий? В частности, ответьте на указанные вопросы для соотношения

$$A_{n+1} = \left(\begin{smallmatrix}1&2\\0&1\end{smallmatrix}\right) A_n \left(\begin{smallmatrix}3&1\\1&0\end{smallmatrix}\right).$$

5. Исследуйте аналогичный вопрос для рекуррентных соотношений вида $A_{n+1} = CA_n + A_nD$.

6. Рассмотрите рекуррентное соотношение $A_{n+1} = C_1A_nD_1 + C_2A_nD_2$. Исследуйте существование у этого рекуррентного соотношения решения в виде геометрической прогрессии. В частности, опишите все решения, являющиеся геометрическими прогрессиями для соотношения

$$A_{n+1} = \left(\begin{smallmatrix}1&1\\1&2\end{smallmatrix}\right) A_n \left(\begin{smallmatrix}2&1\\1&0\end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix}1&-1\\0&1\end{smallmatrix}\right) A_n \left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right).$$

7. Исследуйте выразимость в геометрических прогрессиях решений линейных рекуррентных соотношений вида

$$A_{n+1} = C_1A_nD_1 + C_2A_{n-1}D_2,$$

а также линейных рекуррентных соотношений большего порядка.

Задача 8. Можно ли разрезать?

1. Пусть φ — некоторый угол. Покажите, что

$$\cos n\varphi = p(\cos\varphi),$$

где $p(x)$ — это многочлен степени n с целыми коэффициентами.

2. Покажите, что угол между гипотенузой и катетом в прямоугольном

треугольнике со сторонами 3, 4, 5 не равен:
а) $\frac{k\pi}{5}$, где k — целое; б) $\frac{k\pi}{l}$, где k и l — целые неотрицательные числа.

3. Можно ли так изобразить равносторонний треугольник на координатной плоскости, чтобы координаты вершин являлись рациональными числами?

4. Опишите все треугольники с рациональными координатами вершин и углами вида $\frac{k\pi}{l}$, где k и l — целые неотрицательные числа. Такие углы в дальнейшем будем называть рациональными.

5. Разрезанием многоугольника P назовём такой набор многоугольников P_i, где $1 \leq i \leq n$ внутри P, что $P = \bigcup_{1 \leq i \leq n} P_i$ и при $i \neq j$ многоугольники P_i и P_j могут пересекаться лишь по точкам на границе. Пусть дан прямоугольник $ABCD$ со сторонами a и b. Опишите все a и b, при которых его можно разрезать на три треугольника с рациональными углами. Приведите примеры разрезаемых и неразрезаемых прямоугольников.

6. Найдите критерий, при котором многоугольник может быть разрезан каким-либо образом на треугольники с рациональными углами.

7. Два многоугольника P и Q с рациональными углами, назовём рационально равносоставленными, если существует разрезание $\{P_i\}_{i \in \overline{1,n}}$ для P и разрезание $\{Q_i\}_{i \in \overline{1,n}}$ для Q, такие что фигуры P_i и Q_i равны и имеют рациональные углы для всех i. Например,

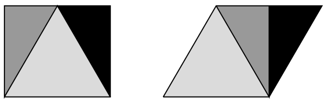


Рис. 5: Разрезание на попарно равные треугольники с рациональными углами.

Найдите необходимые и достаточные условия рациональной равносоставленности двух фигур. Приведите примеры рационально равносоставленных и не рационально равносоставленных многоугольников.

Задача 9. Порядки

Пусть M_1 и M_2 — два упорядоченных множества. Отображение $f\colon M_1 \to M_2$ называется монотонным, если для любых x и y из M_1, таких, что $x \leq y$, выполнено, что $f(x) \leq f(y)$ относительно порядка на M_2. Монотонное отображение $f\colon M_1 \to M_2$ называется изоморфизмом, если f биективно и обратное отображение $f^{-1}\colon M_2 \to M_1$ также монотонно.

1. Пусть $f\colon M \to N$ — изоморфизм двух упорядоченных множеств. Покажите, что для любого $x \in M$ множество $M_{\leq x} = \{y \in M \,|\, y \leq x\}$ изоморфно $N_{\leq f(x)} = \{y \in N \,|\, y \leq f(x)\}$.

2. Опишите все изоморфизмы из $\mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$, где $\mathcal{P}(X)$ — множество всех подмножеств множества X, упорядоченных по отношению включения $\subseteq$.

3. Пусть M_1 и M_2 — два упорядоченных множества. Тогда введём на $M_1 \times M_2$ порядок следующим образом:

   $(x_1, y_1) \leq_{nat} (x_2, y_2)$ тогда и только тогда, когда $x_1 \leq x_2$ и $y_1 \leq y_2$.

   Обозначим получившееся упорядоченное множество как $M_1 \times_{nat} M_2$. Будем называть такой порядок естественным. Введём на $M_1 \times M_2$ другой порядок:

   $$\begin{aligned} (x_1, y_1) \leq_{lex} (x_2, y_2) &\iff \\ &\iff x_1 < x_2 \\ &\text{или } \ x_1 = x_2 \text{ и } y_1 \leq y_2 \end{aligned}$$

   Обозначим это упорядоченное множество как $M_1 \times_{lex} M_2$.

   Покажите, что следующие упорядоченные множества не изоморфны между собой: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N} \times_{nat} \mathbb{N}$, $\mathbb{N} \times_{lex} \mathbb{N}$, $\mathbb{Z} \times_{nat} \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} \times_{lex} \mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$.

4. Изоморфны или нет следующие множества: $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q} \times_{lex} \mathbb{R}$, $\mathbb{Z} \times_{lex} \mathbb{R}$, $\mathbb{Q} \times_{lex} \mathbb{R}$, $\mathbb{R} \times_{lex} \mathbb{R} \times_{lex} \mathbb{R}$?

5. Какие из следующих множеств изоморфны: $(\mathbb{Z} \times_{lex} \mathbb{Z}) \times_{nat} \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} \times_{lex} (\mathbb{Z} \times_{nat} \mathbb{Z})$, $(\mathbb{Z} \times_{lex} \mathbb{N}) \times_{nat} \mathbb{Z}$?

6. Рассмотрите предыдущий вопрос, когда сомножителей больше чем три, “скобки” можно расставлять произвольным образом и на про-

изведениях можно ввести операцию одним из двух описанных выше способов.

7. Опишите все изоморфизмы между найденными парами изоморфных упорядоченных множеств.

Задача 10. Лучше меньше, да лучше

Пусть a_n — некоторая последовательность вещественных чисел, такая, что ряд $\sum_{n=1}^{inf\,ty} |a_n|$ сходится. Определим $S(\{a_n\})$ как множество всех подсумм ряда $\sum_{n=1}^{inf\,ty} a_n$, а именно:

$$S(\{a_n\}) = \big\{x \in \mathbb{R} \mid \exists \Gamma \subseteq \mathbb{N},\ \text{что } x = \sum_{k\in\Gamma} a_k\big\}.$$

1. Пусть $a_n = \frac{1}{2^n}$. Найдите $S(\{a_n\})$.

2. Будем говорить, что множество $A \subseteq \mathbb{R}$ имеет меру 0, если $\forall \varepsilon > 0$ существует не более чем счётный набор интервалов (x_k, y_k), таких что
$$A \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{N}} (x_k, y_k) \text{ и } \sum_{k\in\mathbb{N}} |y_k - x_k| < \varepsilon.$$
Рассмотрим последовательность $a_n = \left(\frac{2}{5}\right)^n$. Покажите, что $S(\{a_n\})$ имеет меру 0.

3. Покажите, что $S(\{\frac{1}{n^2}\})$ содержит внутри себя некоторый отрезок ненулевой длины.

4. Мерой замкнутого множества A на прямой назовём
$$\mu(A) = \inf\big\{t \in \mathbb{R} \mid \text{существует набор интервалов } (x_k, y_k),$$
$$\text{что } A \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{N}} (x_k, y_k) \text{ и } \sum_{k\in\mathbb{N}} |y_k - x_k| = t\big\}.$$
Приведите пример последовательности a_n, что $S(\{a_n\})$ не содержит отрезка, но является множеством ненулевой меры. Что можно сказать про меру $S(\{a_n\})$, где a_n — геометрическая прогрессия?

5. Рассмотрим множество $\mathbb{C}$ всех комплексных чисел. Будем говорить, что последовательность комплексных чисел x_n сходится к некоторому числу x, если последовательности из вещественных и мнимых

частей $\Re x_n$ и $\Im x_n$ сходятся к $\Re x$ и $\Im x$, соответственно. Таким образом, возникает возможность по последовательности комплексных чисел a_n определить

$$S(\{a_n\}) = \Big\{x \in \mathbb{C} \,|\, \exists \Gamma \subseteq \mathbb{N}, \text{ что } x = \sum_{k\in\Gamma} a_k\Big\},$$

где под суммой ряда подразумевается предел последовательности

$$x_n = \sum_{\substack{k\in\Gamma\\ k\leq n}} a_k.$$

Опишите $S(\{\left(\frac{1}{2i}\right)^n\})$. Найдите последовательность a_n, что $S(\{a_n\})$ — круг радиуса 1 на плоскости.

6. Дайте определение меры замкнутого множества на плоскости и постройте пример последовательности a_n, что $S(\{a_n\})$ является множеством ненулевой меры и не содержит ни одного круга.

7. Рассмотрите последовательности в $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$, отличные от геометрической прогрессии. Предложите способ узнать $\mu(S(\{a_n\}))$. Насколько произвольным может быть множество вида $S(\{a_n\})$?

Задачи 2016 года

Задача 1. Геометрическая вероятность

Пункты этой задачи связаны с расположениями различных случайно взятых геометрических фигур. Что в каждом конкретном случае следует подразумевать под случайной фигурой того или иного вида, находится во власти решающего задачу, хотя, безусловно, требует обоснований. Одно можно сказать наверняка: вероятность — это число от 0 до 1.

1. Пусть на плоскости задана квадратная решётка со стороной 1. Возьмём число $\varepsilon > 0$ и вокруг точек решётки построим круги радиуса ε. Какова вероятность для случайной точки не попасть в объединение этих кругов?

2. На плоскость, расчерченную параллельными прямыми на расстоянии h друг от друга падает случайный отрезок длины меньшей или равной a. Какова вероятность того, что этот отрезок пересечёт ка-

кую-то прямую? А каково математическое ожидание числа точек пересечения?

3. Та же задача, но теперь вместо отрезка на плоскость попадает крестик — пара отрезков одинаковой фиксированной длины a, пересекающихся в своих центрах и перпендикулярных друг-другу. А что будет, если угол между отрезками не равен $\pi/2$?

4. Пусть дан некий круг радиуса r. Какова вероятность того, что конец отрезка длины a лежит за пределами круга, если это случайный отрезок, чья середина лежит в круге?

5. Пусть плоскость замощена одинаковыми параллелограммами. На плоскость кидают случайный параллелограмм, среди тех

   а) у которых площадь меньше или равна S.

   б) у которых длина сторон меньше a.

   в) у которых длины диагоналей меньше a.

   Какова вероятность того, что вершина какого-то параллелограмма из замощения лежит в случайном параллелограмме?

6. А если рассмотреть случайный эллипс с такими условиями?

7. Рассмотрим случайный четырёхугольник с длинами сторон a, b, c, d. Какова вероятность, что он будет содержать точку из решётки? Какова вероятность, что он будет пересекаться с набором параллельных линий, расстояние между которыми равно h?

8. А что такое случайный n-угольник на плоскости с какими-то ограничениями? Какова вероятность для него содержать какую-то точку из решётки или пересекаться с семейством параллельных прямых?

Задача 2. Гипернатуральные числа

1. Рассмотрим натуральные числа $n \neq 1$, m_1 и m_2. Покажите, что $n^{m_1} - 1 \vdots n^{m_2} - 1$ тогда и только тогда, когда $m_1 \vdots m_2$.

2. Покажите, что для всех взаимнопростых чисел m и n существуют такие натуральные k и l, что $m^l - 1 \vdots n$ и $n^k - 1 \vdots m$.

3. Гипернатуральным числом назовём отображение из множества $\mathbb{P}$ простых чисел в множество $\mathbb{N} \cup \{0, \infty\}$. Естественным образом каждому натуральному числу можно сопоставить такое отображение, а именно, если $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_n^{\alpha_n}$, где p_i - различные простые, то соответствующее отображение задано формулой

$$n(q) = \begin{cases} \alpha_i, & q = p_i \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Также можно определить произведение, наименьшее общее кратное и наибольший общий делитель по следующим формулам:

$$x_1 \cdot x_2(q) = x_1(q) + x_2(q),$$

$$\text{НОК}\,(x_1, x_2)(q) = \max\,(x_1(q), x_2(q)),$$

$$\text{НОД}\,(x_1, x_2)(q) = \min(x_1(q), x_2(q)).$$

Будем говорить, что $x \vdots y$, если $\forall q \in \mathbb{P}\ x(q) \geq y(q)$. Рассмотрим некоторое множество A гипернатуральных чисел. Определим наименьшее общее кратное всех элементов из A по формуле $\text{НОК}\,(A)(q) = \sup\limits_{x \in A}\{x(q)\}$. Теперь для гипернатурального числа x и натурального n определим

$$n^x - 1 = \text{НОК}\,\left(\{n^m - 1 \,|\, m \in \mathbb{N},\, x \vdots m\}\right).$$

Решите следующие задачи:

а) Вычислите $3^x - 1$, $5^x - 1$ и, в целом, $p^x - 1$, где p-простое, а $x = (\infty, \infty, \dots)$.

б) Верно ли, что $n^x - 1 = n^y - 1$ тогда и только тогда, когда $x = y$, где x и y гипернатуральные, $n \in \mathbb{N}$.

в) Покажите, что уравнение $3^x - 1 = 5^y - 1$ неразрешимо в гипернатуральных числах. Аналогично покажите, что уравнение $3^x - 1 = 11^y - 1$ не имеет гипернатуральных решений.

4. Пусть $l^\infty = \text{НОК}\,(\{l^n \,|\, n \in \mathbb{N}\})$. Попробуйте найти $p^{l^\infty} - 1$ для некоторых простых p и l.

5. Попробуйте разобрать случай уравнения $p^x - 1 = l^y - 1$ для бесконечных серий простых чисел или дайте ответ для произвольных простых.

6. Бывают ли решения у уравнения $n^x - 1 = m^y - 1$, когда n и m взаимнопростые натуральные числа? А когда не взаимнопростые?

7. Попробуйте решить другие уравнения в гипернатуральных числах, например, $n^x - a = n^y - b$.

Задача 3. Шоколадки

Мальчик Коля пришёл в магазин выбирать шоколадку в поход. Так как вкусам своих товарищей он не видел возможности угодить, то Коля решил из всех шоколадок выбрать ту, которую проще всего поделить поровну. А именно, пусть шоколадка представляет собой прямоугольник $a \times b$, $a, b \in \mathbb{N}$, состоящий из $a \cdot b$ долек. Колю интересуют те формы шоколадок, где число долек делится поровну между участниками похода. Но вот беда, Коля точно не знает, сколько людей идёт в поход.

1. Считая, что в походе с одинаковой вероятностью могут оказаться от 2 до 10 человек, найдите все такие формы шоколадок из не более чем 100 долек, количество долек в которых с наибольшей вероятностью будет делиться на количество участников похода. Сколько различных конфигураций подойдёт? А если не более 50-ти долек?

2. При заданных ограничениях на размер шоколадки и на количество участников похода, те шоколадки, которые с наибольшей вероятностью делятся поровну, будем называть оптимальными. Решение с наименьшим числом долек будем назвать минимальной оптимальной шоколадкой.

   а) Покажите, что при фиксированном максимальном числе участников похода и росте ограничения на число шоколадок размер минимальной оптимальной шоколадки стабилизируется. Как описать размер (количество долек) минимальной шоколадки в зависимости от ограничения на число человек? Оцените, с какого места ограничение на размер не имеет значения.

   б) Покажите, что при фиксированной верхней оценке на размер шоколадки и росте возможного числа людей, количество долек в минимальной шоколадке стабилизируется. Опишите и оцените размер минимальной шоколадки после стабилизации.

   в) Сколько различных конфигураций для минимальных шоколадок из пунктов а) и б)?

3. Опишите алгоритм построения оптимальной шоколадки при имеющихся ограничениях. Какова сложность Вашего алгоритма?

4. Допустим теперь, что в магазине бывают не все шоколадки, а только вида $a \times b$, где $b \geq a \geq \varepsilon b$, для некоторого фиксированного $\varepsilon \leq 1$. Изменится ли количество долек в минимальной оптимальной шоколадке с таким условием? Оцените количество оптимальных шоколадок, удовлетворяющих этому условию.

5. Рассмотрим ситуацию, когда каждый из d людей, которым Коля предложил идти в поход, пойдут в него — i-ый с вероятностью $p_i \leq 1$. Будучи несколько ленивым, Коля хочет найти не самое оптимальное, а ε-оптимальное решение, то есть такую шоколадку, которая делится нацело между участниками с вероятностью в $\varepsilon \leq 1$ раз меньше, чем для оптимальной шоколадки. Предложите свои варианты решения этой задачи, если:

а) Для всякого $1 \leq i \leq d$ $p_i = p < 1$.

б) ε достаточно маленькое ($\varepsilon = \frac{1}{100}$).

Задача 4. Матрицы и периоды

1. Рассмотрим целочисленную матрицу 2×2

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Возьмём некоторый целочисленный вектор $\binom{x}{y}$, натуральное число n и построим последовательность

$$x_k = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mod n.$$

Здесь и далее под записью $\mod n$ подразумевается взятие остатка от деления на n. Покажите, что эта последовательность будет чисто периодической, то есть существует такое $m \in \mathbb{N}$ со свойством $x_{k+m} = x_k$ для любого $k \in \mathbb{N}$. Каков период этой последовательности в зависимости от x, y и n?

2. Рассмотрим целочисленную матрицу, некоторый начальный вектор и натуральное число n. Рассмотрим последовательность, аналогичную предыдущему пункту

$$x_k = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mod n.$$

а) Покажите, что эта последовательность не обязательно чисто периодическая.

б) Тем не менее, период у этой последовательности есть, то есть найдётся такое m, что для всех достаточно больших $k > N$ выполнено $x_{k+m} = x_k$.

в) Оцените период этой последовательности в зависимости от n. Достигается ли Ваша оценка для какой-либо матрицы?

г) Как описать те матрицы, последовательности для которых всегда будут чисто периодичны для любых x, y и n?

3. Рассмотрим матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

а) Чему равны периоды последовательностей для начального вектора $\binom{1}{0}$, если число n — некоторое простое число?

б) Покажите, что если $n|l$, то тогда $\pi(n)|\pi(l)$, где $|$ означает то, что первое число делит второе, а $\pi(n)$, сокращение для $\pi(A, x, n)$, период последовательности, построенной по матрице A, начальному вектору x и некоторому n.

в) Попробуйте связать периоды по модулю n, m и nm.

4. Как изменится период, если для указанных выше матриц в качестве начального вектора взять не вектор $\binom{1}{0}$, а другой?

5. Рассмотрите аналогичную задачу для матриц произвольного размера.

Задача 5. Отмеченные точки

На плоскости отметим несколько точек $P_1, \ldots, P_n$. Будем пошагового добавлять новые точки по следующему правилу: если точки P и P', Q и Q' уже отмечены, а отрезки PP' и QQ' пересекаются по единственной точке N, то эта точка будет отмечена на следующем шаге, если не была отмечена ранее.

1. **а)** Покажите, что если изначально точек было не более 4, то после первого шага нельзя будет отметить ни одной новой точки.

б) Найдите все такие конфигурации изначальных точек, что после некоторого числа шагов точек добавить уже нельзя.

2. Покажите, что есть такая комбинация из более чем пяти точек, к которой после любого шага всё равно можно добавить точки.

3. Рассмотрим множество $M_i = M_{i,P_1,\ldots,P_n}$ — множество всех точек, которые были отмечены на шаге i, если мы стартовали с $P_1,\ldots,P_n$. Определим $M_\infty = \bigcup\limits_{i=0}^{\infty} M_i$ — множество всех точек добавленных на каком-либо шаге.

4. Дайте описание для $cl(M_\infty)$ — замыкания множества M_∞, где под замыканием множества A подразумевается множество всех точек x плоскости, что для всякого $\varepsilon > 0$ существует точка $y \in A$ такая, что $\mathrm{dist}(x,y) < \varepsilon$, где $\mathrm{dist}(x,y)$ обозначает обычное расстояние. Покажите, что получившаяся фигура обязательно является выпуклым многоугольником в объединении с конечным числом точек.

5. Рассмотрим выпуклый многоугольник P с вершинами $P_1,\ \ldots,\ P_n$. Построим по этим вершинам множество $Q = cl(M_\infty)$. Каким может быть отношение площади Q к площади P?

6. Каково отношение площадей в случае правильного n-угольника для $n \geq 5$?

7. Рассмотрим выпуклый прямоугольник $ABCD$. Рассмотрим какую-то точку E внутри. При каком выборе E достигается максимум площади $cl\left(M_{\infty,A,B,C,D,E}\right)$? Для параллелограмма? Для произвольного выпуклого четырёхугольника? Каково будет отношение площади получившегося множества к площади изначальной фигуры?

8. Исследуйте другие вопросы, связанные с площадями для многоугольников с большим числом сторон. Рассмотрите ситуацию в трёх измерениях — как нужно модифицировать определение?

9. Что будет, если исходных точек суть бесконечно много? Например, если исходное множество точек — это объединение некоторого количества кривых?

Задача 6. Раздутия и стягивания

1. Рассмотрение этой задачи мы начнём с описания некоторого множества преобразований отрезка $[0,1]$ в себя. Число вида $\frac{k}{2^n}$, где $k,n\in\mathbb{Z}$ будем называть двоично-рациональным. Разбиением отрезка называется набор конечного числа точек в нём, а отрезки, соединяющие соседние точки между собой или крайние с концами отрезка — элементами разбиения. Будем называть отрезок $[a,b]$ диадическим, если $a=\frac{k}{2^n}$, а $b=\frac{k+1}{2^n}$, где $k,n\in\mathbb{N}$. Непрерывное отображение $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ называется кусочно-линейным, если существует разбиение отрезка $[a,b]$, так что $f(x)=qx+r$ для некоторых $q,r\in\mathbb{R}$ на каждом элементе разбиения. Кусочно-линейную непрерывную биекцию f из отрезка $[a,b]$ в отрезок $[c,d]$ такую, что найдётся разбиение $[a,b]$, что его элементы I_k — диадические отрезки, а $f|_{I_k}(x)=2^nx+r$ для некоторых $n\in\mathbb{Z}$, $r\in\mathbb{R}$, будем называть pl_2-преобразованием отрезка $[a,b]$ в отрезок $[c,d]$. Рассмотрим множество F, состоящее из всех pl_2-преобразований отрезка $[0,1]$ в себя. Например, такая функция лежит в F:

$$f(x)=\begin{cases}2x, & 0\le x<\frac{1}{4}\\ x+\frac{1}{4}, & \frac{1}{4}\le x<\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}x+\frac{1}{2}, & \frac{1}{2}\le x\le 1\end{cases}.$$

а) Покажите, что если $f\in F$, то $f(0)=0,\ f(1)=1$.

б) Покажите, что отображение из F переводит некоторое разбиение отрезка $[0,1]$ на диадические отрезки в новое разбиение $[0,1]$ на диадические.

в) Покажите, что если $f,g\in F$, то $f\circ g\in F$.

г) Покажите, что если $f\in F$, то $f^{-1}\in F$.

д) Покажите, что если $f\in F,\ f\ne \mathrm{Id}_{[0,1]}$, тогда $f^{(n)}\ne\mathrm{Id}_{[0,1]}$. Иными словами, F образует группу относительно композиции, в которой нет элементов конечного порядка.

е) Покажите, что для любых двух разбиений отрезка $[0,1]$ на одинаковое число диадических интервалов существует единственная $f\in F$, переводящая каждый элемент первого разбиения линейно в элемент второго.

ё) Покажите, что у любого такого преобразования $f\in F$ число неподвижных точек, не лежащих ни на каком неподвижном отрезке, конечно. Чем можно ограничить число этих неподвижных точек? А у $f^{(n)}$? Здесь $f^{(n)}$ обозначает композицию f с собой n раз.

ж) А сколько может быть различных неподвижных точек у преобразования, которое построено с помощью операции композиции из двух функций f, g в зависимости от числа их неподвижных точек?

з) Обобщите все указанные свойства на pl_2-преобразования между произвольными отрезками.

2. Циклическим pl_2-преобразованием $f\colon [a, b] \to [c, d]$ отрезков с двоично-рациональными концами называется отображение $f\colon [a, b] \to [c, d]$, разрывное не более чем в одной точке x_1, такое что $f(a) = f(b)$, $f(x_1) = d$, функция $f|_{[a,x_1]}$ — pl_2-преобразование на образ, а $g = f|_{(x_1,b]}$ — доопределяется до pl_2-преобразования на образ посредством того, что $g(x_1) = c$. В частности, если точки разрыва нет, то это просто pl_2-преобразование.

а) Покажите, что такое отображение задаёт непрерывную биекцию из окружности длины $b - a$ в окружность длины $d - c$.

б) Определите композицию циклических pl_2-преобразований, так, чтобы оно было согласовано с композицией обычных pl_2-преобразований.

в) Покажите, что множество T всех циклических pl_2-преобразований $[0, 1]$ в себя образует группу.

г) Опишите элементы конечного порядка в этой группе.

3. Покажите, что для любого отрезка $[a, b]$, $a = k/2^n$, $b = l/2^m$ существует pl_2-преобразование $f\colon [a, b] \to [0, 1]$, $k, l, n, m \in \mathbb{Z}$.

4. Весом на отрезке $[0, n]$, $n \in \mathbb{N}$ назовём функцию $W\colon V \to \mathbb{Z}$, где $V = \{0, 1, \ldots, n\}$. Пусть даны отрезки $[0, n]$, $[0, n + 1]$ и веса W, W_1 на них. Будем говорить, что эти два отрезка с весом связаны преобразованием раздутия в отрезке $[i, i + 1]$, $i < n, i \in \mathbb{N}$, если для

pl_2-преобразования $f\colon [0,n] \to [0,n+1]$, заданного по формуле

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0,i] \\ 2x - i, & x \in [i, i+1] \\ x + 1, & x \in [i+1, n] \end{cases}$$

и переводящего целые точки в целые, верно

$$W_1(k) = \begin{cases} W(f^{-1}(k)), & k \neq i, i+1, i+2 \\ W(f^{-1}(k)) - 1, & k \in \{i, i+2\} \\ -1, & k = i+1 \end{cases}.$$

Обратное преобразование f^{-1} назовём стягиванием точки $x = i+1$ на взвешенном отрезке $[0, n+1]$. Вес W на отрезке $[0,n]$ называется циклическим, если $W(0) = W(n)$. Если $i \neq 0, n-1$, то циклическое раздутие отрезка $[0,n]$ с циклическим весом W в отрезке $[i, i+1]$ - это просто раздутие в соответствующем отрезке (проверьте, что новый вес в этом случае тоже циклический). В случае $i = 0$, надо лишь уменьшить $W_1(n+1) = W(n) - 1 = W(0) - 1 = W_1(0)$, так, чтобы новый вес стал циклическим. В случае $i = n-1$ определим циклическое pl_2-преобразование

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & x \in [0, n-1] \\ 2x - n + 2, & x \in [n-1, n-\frac{1}{2}] \\ 2x - 2n + 1, & x \in (n - \frac{1}{2}, n] \end{cases}.$$

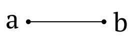
Веса вводятся так же, через формулы для прообразов и соотношение $W_1(n+1) = W_1(0) = -1$. Стягивание — обратное преобразование.

Теперь, если есть набор отрезков с весами $\Gamma_0, \ldots, \Gamma_n$ и преобразований $f_i\colon \Gamma_{i-1} \to \Gamma_i$, каждое из которых либо раздутие, либо стягивание, то композиция $f_n \circ \ldots \circ f_1$ называется преобразованием $\Gamma_0 \to \Gamma_n$. Аналогично определим циклическое преобразование отрезков с циклическими весами. Отрезок с циклическим весом будем рисовать как замкнутую ломанную, где около вершин подписаны веса. Отрезок с весом, который нельзя стянуть, называется минимальным.

а) Какие pl_2-преобразования f получаются допустимыми для отрезка [0,1] и всех возможных весов на нём?

б) Покажите, что любой отрезок с весом преобразуется в минимальный. Аналогично для циклических весов и циклических преобразований. Единственным ли образом определён соответствующий минимальный отрезок с весом? Попробуйте найти какой-нибудь канонический минимальный отрезок с весом, в который преобразуется данный. Какая у него длина?

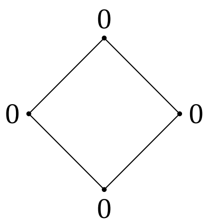
в) Покажите, что у взвешенного разбиения отрезка [0,1] с точками разбиения на концах



где $a, b \in \mathbb{Z}$ веса, нет нетривиальных преобразований в себя.

г) Покажите, что у любого взвешенного отрезка нет нетривиальных преобразований в себя. Но могут быть такие, которые меняют веса на концах.

д) Опишите группу циклических преобразований.



е) Попробуйте описать группу циклических преобразований любого отрезка с нулевыми весами.

5. Считая, что мы определили допустимые преобразования цепей и циклов как графов, дайте определения допустимых преобразований произвольных графов.

Задача 7. Учимся считать

Пусть F - произвольное поле, через

$$\binom{n}{k}$$

будем обозначать число сочетаний из n элементов по k.

1. Посчитайте, чему равно

$$-\binom{b+1}{0}\binom{b+c}{b-1}\binom{c+1}{c-1}+\binom{b+1}{1}\binom{b+c}{b}\binom{c+1}{c}-$$
$$-\binom{b+1}{2}\binom{b+c}{b+1}\binom{c+1}{c+1}.$$

Ответ будет заметно короче этого выражения!

2. Представьте следующие числа в виде произведения и частного каких-то факториалов:

$$\binom{4}{0}^3-\binom{4}{1}^3+\binom{4}{2}^3-\binom{4}{3}^3+\binom{4}{4}^3$$

и

$$\binom{6}{0}^3-\binom{6}{1}^3+\binom{6}{2}^3-\binom{6}{3}^3+\binom{6}{4}^3-\binom{6}{5}^3+\binom{6}{6}^3.$$

3. Попытайтесь как-то обобщить без строгого доказательства полученные результаты.

4. Посчитайте, чему равен коэффициент многочлена $[x^2y^2z^2](x-y)^2(y-z)^2(z-x)^2$, где $[\,]$ означает взятие коэффициента при соответствующем мономе. А $[x^2y^2z^2](x-y)(x-y-1)(y-z)(y-z-1)(z-x)(z-x-1)$? В каких целочисленных точках куба $(0\le x\le 3)\times(0\le y\le 3)\times(0\le z\le 3)$ эти многочлены принимают ненулевые значения? Что можно сказать про значения этих многочленов в целых точках данного куба и про указанный коэффициент?

5. Докажите интерполяционную формулу Лагранжа: если C - произвольное подмножество F размера $d+1$, а f - многочлен степени не выше d, то

$$f=\sum_{a\in C} f(a)\prod_{c\in C, c\neq a}\frac{x-c}{a-c}.$$

6. Пусть $f\in F[x_1,x_2]$ - многочлен от двух переменных суммарной степени $deg(f)\le d_1+d_2$, а C_1, C_2 - произвольные подмножества F размера $|C_i|\ge d_i+1$. Тогда

$$\sum_{c_1\in C_1}\sum_{c_2\in C_2}\frac{f(c_1,c_2)}{\phi_1'(c_1)\phi_2'(c_2)}=[x_1^{d_1}x_2^{d_2}]f(x_1,x_2),$$

где $\phi_i(z) = \prod_{c \in C_i} (z - c)$.

7. Постарайтесь усилить и доказать теорему из пункта 6. Можете ли Вы придумать способ выразить коэффициент многочлена при произвольном мономе через его значение в заданных точках (как, например, в предыдущем пункте)?

8. Постарайтесь посчитать, чему равен коэффициент многочлена

$$[x^a y^a z^a](x-y)^a(y-z)^a(z-x)^a$$

двумя разными способами и получить отсюда загадочное тождество.

9. Постарайтесь придумать тождество, обобщающее тождества всех пунктов этой задачи, и доказать его.

Задача 8. Разрезания куба

1. Рассмотрим куб $3 \times 3 \times 3$. Мы хотим разрезать его на кубики $1 \times 1 \times 1$. За один раз можно сделать разрез в одной плоскости, при этом перед следующим разрезом можно переставлять в пространстве уже отрезанные части. За какое минимальное число разрезов можно справиться?

2. Рассмотрите теперь куб $n \times n \times n$. За сколько разрезаний можно справиться? Объясните, почему за меньшее число нельзя?

3. А сколькими разными способами можно произвести такое разрезание (способы различны, если на каком-то шаге от кубика отрезаны разные множества)? А если называть разрезания разными, когда на каком-то шаге в них отличаются наборы отрезанных фигур?

4. Рассмотрим равносторонний треугольник на плоскости с длиной стороны n. Мы хотим разрезать его на равносторонние треугольники с длинной стороны 1. За сколько разрезаний это возможно? Сколькими способами?

5. Рассмотрите аналогичную задачу для d-мерного куба и d-мерного симплекса.

6. Проверьте, что трёхмерный куб $n \times n \times n$ можно разрезать на $4n^3$ прямоугольных тетраэдров и n^3 правильных тетраэдров. Каково наименьшее число разрезаний?

7. Рассмотрите другие возможные разрезания.

Задача 9. Маляры

Графом $G = (V, E)$ называется множество V и симметричное отношение инцидентности $E \subset V \times V$. Множество V называется множеством вершин, а E — множеством ребер. Если $E \cap \{(v, v) | v \in V\} = \varnothing$, то говорят, что в графе нет петель. Мы будем рассматривать только такие графы.

Правильной раскраской графа G в n цветов называется отображение $col : V \to [n] = \{1, 2, \ldots, n\}$ такое, что никаким двум инцидентным вершинам не сопоставляется один и тот же цвет, то есть $(v, v') \in E \Rightarrow col(v) \neq col(v')$. Хроматическим числом графа G называется наименьшее n, для которого существует правильная раскраска в n цветов. Хроматическое число обозначается $\chi(G)$.

Пусть (M, d) — метрическое пространство. Положим, $V = M$ и

$$E = \{(m, m') \in M \times M \mid d(m, m') = 1\}.$$

Тогда по определению $\chi(M) = \chi(G)$, где $G = (V, E)$.

Во всех последующих пунктах через $\mathbb{R}$ обозначается множество вещественных чисел, через $\mathbb{R}^n$ обозначается метрическое пространство, точки которого являются упорядоченными наборами из n чисел, а расстояние определяется по формуле

$$d((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)) = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (x_j - y_j)^2}.$$

Все подмножества $\mathbb{R}^n$ считаются метрическими пространствами с индуцированной из $\mathbb{R}^n$ метрикой.

1. Докажите, что $\chi(\mathbb{R}^2) \geq 4$, то есть плоскость нельзя раскрасить в 3 цвета. Предъявите раскраску плоскости в 7 цветов: $\chi(\mathbb{R}^2) \leq 7$.

2. Докажите, что $\chi(\mathbb{R}^n) \geq n + 2$.

3. Зафиксируем положительное число $\varepsilon < \sqrt{3/7}$. Покажите, что $5 \leq \chi(\mathbb{R}^2 \times [0, \varepsilon]) \leq 7$.

4. Зафиксируем положительное число $\varepsilon < 10^{-3}$. Покажите, что $\chi(\mathbb{R}^2 \times [0, \varepsilon]^2) \geq 6$

5. Зафиксируем простое число p. Через $\mathbb{F}_p$ будем обозначать поле из p элементов. Пусть n — натуральное число, рассмотрим граф $G_n^p = (V_n^{(p)}, E_n^{(p)})$, где $V_n^{(p)} = (\mathbb{F}_p)^n$, а $E_n^{(p)} = \{(v, w) \in V_n^{(p)} \times V_n^{(p)} \mid v \cdot w = 1\}$, где

$$(v_1, \ldots, v_n) \cdot (w_1, \ldots, w_n) = \sum_{j=1}^{n} v_j w_j.$$

Оцените $\chi(G_n^2)$, $\chi(G_n^3)$ при больших n.

6. Оцените $\chi(G_n^p)$ при больших n для произвольного p.

Задача 10. Как подгонять и не оплошать

В некотором конкурсе участвуют n команд из k участников. Команды уже отыграли, и осталось лишь определить победителя. При равенстве очков одно место может распределиться среди нескольких команд (как на математической олимпиаде).

Каждый участник команды заработал некоторую оценку из интервала $[0, 1]$. Таким образом, результаты команд, исходя из которых надо их упорядочить, записаны невозрастающими последовательностями из k неотрицательных чисел. И для того, чтобы подвести итог, необходимо придумать функцию $f\colon [0, 1]^k \to \mathbb{R}$, которая будет вычислять окончательный результат каждой команды.

А теперь — главный нюанс. Выбор этой функции целиком во власти жюри. Предположим, что член жюри, который отвечает за выбор функции, пытается предложить капитанам команд подобрать f таким образом, чтобы команда этого капитана не оказалась, ммм..., в последних рядах.

Но не всё так просто. С одной стороны понятно, что стоит пообещать первое место наибольшему числу команд, однако, если ответственный обнадёжит тем, что потом не сможет сделать, то обиженная команда обязательно разболтает о его предложении.

Вдобавок, Комитетом По Защите Прав Олимпиадников установлены следующие правила: функция f должна иметь вид

$$f(x_1, \ldots, x_k) = \left(\sum_{j=1}^{k} w_j x_j^l\right)^{1/l}$$

для некоторого вещественного числа $l \geq 1$ и весов $w_1 \geq w_2 \geq \cdots \geq w_k > 0$.

1. Пусть $k = 3,\ n = 4$ и результаты оказались следующими:

$$(0.3, 0.1, 0.1),\ (0.2, 0.2, 0.1),\ (0.15, 0.14, 0.14),\ (0.13, 0.1, 0.1).$$

   Стоит ли обещать помощь последней команде?

2. Будем говорить, что $(x_1, \dots, x_k)$ мажорирует $(y_1, \dots, y_k)$, если $\sum\limits_{i=1}^{j} x_i > \sum\limits_{i=1}^{j} y_i$ для любого j. Предположим, что ни для каких двух команд не верно, что результаты одной мажорируют результаты другой.

   Какое максимальное число команд гарантировано можно вывести на первое место?

3. Пусть $A \subset [0, 1]^k$ — некоторое открытое подмножество. Вероятностью того, что результаты данной команды попали в множество A, будем считать $|A|$, где $|A|$ — объем множества A. Результаты команд считаются независимыми в совокупности.

   Пусть k, n и некоторое натуральное число j фиксированы. С какой вероятностью можно подобрать $l, w_1, \dots, w_k$ для того, чтобы вывести на первое место ровно j команд?

Задача 11. Как бы поделить

1. Многочлен $f(x) \in F[x]$ с коэффициентами из поля F называется неприводимым, если все его делители в $F[x]$ имеют вид c, $cf(x)$, $c \in F \setminus \{0\}$. Покажите, что следующие многочлены неприводимы, как многочлены с рациональными коэффициентами:

   а) $x^2 + 2bx + 1$, где $b \in \mathbb{Z}$, $|b| > 1$.

   б) $x^4 + 1$.

2. Разложите на неприводимые множители $x^{18} - 1$ над рациональными числами. Найдите нетривиальное разложение на натуральные множители числа $2^{18} - 1$.

3. Хорошо известно, что многочлен $\Phi_n(x) = \prod_{(k,n)=1, k<n} (x - e^{2\pi ik/n})$ является многочленом с целыми коэффициентами и что

$$x^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(x).$$

   Покажите, что многочлен $\Phi_n(x)$ неприводим над $\mathbb{Q}$.

4. Для каких n многочлен Φ_n, взятый по модулю простого p (что корректно, так как он с целыми коэффициентами), приводим в поле из p элементов? Например, при $p = 11$?

5. Покажите, что над полем из p элементов многочлен $x^p - x + 1$ неприводим. Покажите, что он является делителем $x^{p^p-1} - 1$. Делителем какого $\Phi_d(x)$ является $x^p - x + 1$?

6. Рассмотрим некоторый целочисленный многочлен $g(y) \in \mathbb{Z}[y]$. Например, $g(y) = ay^n$. Для каких $g(y)$ и d многочлен $\Phi_d(g(y))$ не является неприводимым над $\mathbb{Q}$?

7. Что можно сказать, если вместо $\Phi_d(x)$ взять какой-то другой неприводимый многочлен? Можно ли взять $g(y)$ маленькой степени (меньше степени исходного многочлена)? Бесконечно ли число таких $g(y)$?

Задача 12. Выпуклые функции

Напомним, что функция $F\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ называется выпуклой, если

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^d,\ t \in [0,1] \quad tF(x) + (1-t)F(y) \geq F(tx + (1-t)y).$$

1. Хорошо известно, что выпуклая функция из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$ непрерывна. Покажите, что это выполнено и в случае большей размерности.

2. Теперь рассмотрим ситуацию похитрее. Пусть $d = 2$ и $f(x_1, x_2)$ выпукла по каждой координате в отдельности, то есть при фиксированном x_1 она выпукла, как функция от x_2 и наоборот. Покажите, что f непрерывна.

3. Покажите то же самое для $d > 2$.

4. Пусть F выпукла и положительно однородна порядка 1, т.е. $F(\lambda x) = |\lambda| F(x)\ \forall x \in \mathbb{R}^d$. Покажите, что такая функция неотрицательна.

5. Пусть функция $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ является выпуклой по каждой переменной и положительно однородна порядка 1. Докажите, что функция F неотрицательна.

6. Функция F называется липшицевой, если существует такая $L > 0$, что
$$|f(x) - f(y)| < L|x - y|\ \forall x, y \in \mathbb{R}^d.$$

Функция $F\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ называется субгармоничной, если для всякой точки x_0 и шарика Q с центром в точке x_0 $F(x_0) \le \frac{1}{\mathrm{Vol}(Q)} \int\limits_Q F(x)dx$, где $\mathrm{Vol}(Q)$ обозначает объём шара Q.

Пусть функция $F : \mathbb{R}^{2d} \to \mathbb{R}$ липшицева, положительно однородна порядка 1, и для каждого $j \in [1, d]$ субгармонична по переменным (x_j, x_{j+d}). Докажите, что функция F неотрицательна, если:

а) d равно единице.

б) d — произвольное натуральное число.

7. Постройте контрпример для случая нечётной размерности. Например, в $\mathbb{R}^3$.

Задачи 2015 года

Задача 1. Определители

Напомним, что на множестве квадратных матриц размера n есть функция Δ, сопоставляющая матрице некоторое число, которое называется определителем этой матрицы. Эта функция однозначно задаётся следующими условиями: если матрица A представлена в виде $(u_1, \ldots, u_n)$, где u_i столбцы чисел, то тогда

1. Если случилось так, что столбец $u_i = v + \lambda v'$, где v и v' столбцы, а λ — некоторое число, то

$$\Delta(A) = \Delta(u_1, \ldots, u_{i-1}, v, u_{i+1}, \ldots, u_n) + \lambda\Delta(u_1, \ldots, u_{i-1}, v', u_{i+1}, \ldots, u_n).$$

2. Для любых $1 \le i < j \le n$ выполнено

$$\Delta(A) = -\Delta(u_1, \ldots, u_{i-1}, u_j, u_{i+1}, \ldots, u_{j-1}, u_i, u_{j+1}, \ldots, u_n).$$

3. $\Delta(E) = 1$, где E матрица, такая что $E_{ij} = 0$, для $i \ne j$ и $E_{ii} = 1$.

Так, например, определитель для матрицы $A = \left(\begin{smallmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{smallmatrix}\right)$ размера 2 может быть вычислен по формуле

$$\Delta(A) = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}.$$

Матрица A называется симметричной, если $A_{ij} = A_{ji}$ для всех возможных i и j.

Главным минором порядка k, или просто k-ым главным минором матрицы A, называется число, равное определителю матрицы C размера k, где $C_{i,j} = A_{i,j}$ $(1 \leq i, j \leq k)$. Будем обозначать это число $\Delta_k(A)$. Последовательностью главных миноров матрицы A называется строка

$$(\Delta_1(A), \ldots, \Delta_n(A)).$$

1. Покажите, что если A симметричная матрица размера 2, составленная из вещественных чисел и её первый главный минор равен 0, то её определитель отрицателен.

2. Докажите, что для комплексных симметричных матриц 2×2 в качестве последовательности главных миноров реализуется любая строка комплексных чисел.

3. Исследуйте эти же вопросы для матриц 3×3.

4. Для любого натурального n найдите все упорядоченные наборы $(B_1, \ldots, B_n) \in F^n$, для каждого из которых найдется симметричная матрица А размера n с элементами из F, у которой последовательность главных миноров совпадает с $(B_1, \ldots, B_n)$, а F — одно из следующих множеств

- **а)** $\mathbb{R}$,
- **б)** $\mathbb{C}$,
- **в)** $\mathbb{Q}$,
- **г)** любое другое поле.

5. Исследуйте вопрос пункта 4 для целочисленных матриц, матриц с коэффициентами в целых гауссовых числах и т.д.

6. Предложите свои обобщения этой задачи и решите их.

Задача 2. Короткие дороги

В некоторой стране идёт активное строительство дорог. Основная задача состоит в том, чтобы соединить между собой все города наименьшей по общей длине системой дорог. В данном случае будем считать, что города - это точки на плоскости, а система дорог — это набор отрезков, не пересекающихся между собой нигде, за исключением, возможно, своих концов. Назовём точку точкой разветвления дорог, если в этой точке встречаются три или более дороги. Стоит отметить, что концом отрезка не обязательно является город.

1. Определите, как выглядит оптимальная система дорог, если в стране всего три города, находящихся на равном расстоянии; на разных расстояниях друг от друга. Найдите длину этой сети дорог.

2. Покажите, что для любой конфигурации городов оптимальная сеть дорог образует дерево с вершинами в городах и точках разветвления дорог.

3. Выясните, какие возможны конфигурации дорог в точках разветвления.

4. Оцените число рёбер в этом графе.

5. Найдите оптимальную конфигурацию для страны, чьи города расположены в вершинах прямоугольника; в вершинах других многоугольников.

6. Оцените длину оптимальной системы дорог для произвольного рисунка из городов; для городов, находящихся в вершинах выпуклого многоугольника. Оптимальна ли Ваша оценка?

7. Верно ли, что Ваши необходимые условия реализации графа в качестве оптимальной системы дорог являются достаточными.

8. Обобщите и решите задачу, когда точки лежат на сфере, а дороги проходят по дугам больших окружностей. Рассмотрите случай других метрических пространств.

Задача 3. Различные расстояния

Рассмотрим M некоторое множество точек в k-мерном пространстве. Пусть $D(M) = \left|\left\{r = dist\left(x_i, x_j\right) \middle| x_i, x_j \in M;\ x_i \neq x_j\right\}\right|$ - количество различных расстояний между точками множества M. Определим теперь

$$D_k(n) = \min_{\substack{|M|=n \\ M \subset \mathbb{R}^k}} D(M).$$

К примеру, $D_2(3) = 1$.

1. Найдите $D_2(4), D_2(5), D_2(6)$.
2. Оцените последовательность $D_2(n)$ сверху и снизу.
3. Решите пункты 1 и 2 в трёхмерном пространстве.
4. Найдите $D_n(n+2), D_n(n+3), D_n(n+4)$.
5. Верно ли, что существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} D_n(n+c)$ для любого натурального c. Если да, то чему он равен?
6. Рассмотрите предыдущий вопрос для последовательности $D_n(cn^k)$ при фиксированных c и k.
7. Верно ли, что $D_k(n)$ и $D_k(n+1)$ обязаны отличаются не более чем на 1?
8. Предложите верхнюю и нижнюю оценки для $D_k(n)$ при фиксированных k.
9. Обобщите задачу на другие пространства. Попробуйте оценить количество различных конфигураций, при которых достигается минимум (с точностью до движений и подобия).

Задача 4. Циркуляции

Пусть G - неориентированный граф со множеством рёбер E и множеством вершин V. При этом будем допускать в графе G кратные рёбра и петли. Введём множество $\overline{E} = \{(e, x, y) | e \in E;\ x, y \in V;\ x$ и y — концы ребра $e\}$, каждый элемент которого задаёт ребро с выбранной ориентацией. Целочисленной циркуляцией на графе G назовём функцию $f\colon \overline{E} \to \mathbb{Z}$, удовлетворяющую двум условиям

а) $f(e, x, y) = -f(e, y, x)$.

б) Для любой вершины x $\sum\limits_{\substack{e:\ \exists y \\ (e,x,y)\in\overline{E}}} f(e, x, y) = 0$ (Закон Кирхгофа).

k-циркуляцией для $k \geq 2$ называется циркуляция f, такая что $0 < |f(x)| < k, x \in \overline{E}$.

1. Покажите, что если из связного графа G можно убрать одно ребро e, так что граф $G - e$ окажется несвязным(такое ребро будем называть мостом), то на этом графе не существует ни одной k-циркуляции ни для какого k.

2. Покажите, что 2-циркуляция на графе без мостов существует тогда и только тогда, когда степень любой вершины чётна.

3. Назовём потоковым числом графа G наименьшее такое k, что на G есть k-циркуляция. Если такого k нет, будем говорить, что потоковое число равно ∞. Будем обозначать это число как $\eta(G)$. Верно ли, что если в графе нет мостов, то $\eta(G) < \infty$?

4. Найдите $\eta(K_{2n+1})$, для различных n, где K_{2n+1} - полный граф на $2n+1$ вершине.

5. Найдите $\eta(K_4)$. Посчитайте, сколько различных k-циркуляций на K_4.

6. Найдите $\eta(K_{2n})$.

7. Пусть P - граф Петерсена. Покажите, что на этом графе нет 4-циркуляции. Верно ли, что любой граф, на котором нет 4-циркуляции содержит подразбиение графа P.

8. Пусть H - абелева группа, например группа остатков $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. H-циркуляцией называется отображение $f\colon \overline{E} \to H$, удовлетворяющее условиям а) и б). Исследуйте количество H-циркуляций на различных графах. Напишите оценку количества H-циркуляций для конечной группы H.

Задача 5. Календарь

Рассмотрим окружность радиуса $n \in \mathbb{N}$ с центром в начале некоторой фиксированной системы координат. Число n назвается календарным, если на этой окружности есть в точности 12 точек с целочисленными координатами.

1. Приведите пример календарных чисел.

2. Бесконечно ли множество календарных чисел?

3. Чему равна плотность множества календарных чисел, то есть предел
$$\lim_{x\to\infty} \frac{|\{0 < n \le x \,|\, n - \text{ календарное }\}|}{x}.$$

4. Рассмотрите вместо окружностей эллипсы, заданные уравнением $x^2 + qy^2 = n$, где q - натуральное число без квадратов. При каких q есть такое n, что у этого уравнения есть ровно 12 решений.

5. Рассмотрите «циферблатные» числа, где каждой минуте соответствовала бы точка на окружности с целыми координатами.

6. Какое количество целых решений может быть у уравнения $x^2+qy^2 = n$?

Задача 6. Обобщение теоремы Штейнера-Лемуса

1. Пусть задано вещественное положительное число n. На сторонах AB, BC треугольника ABC отметим точки C_n и A_n соответственно так, что

$$\frac{|\widehat{BAA_n}|}{|\widehat{CAA_n}|} = \frac{|\widehat{BCC_n}|}{|\widehat{ACC_n}|} = n.$$

Известная теорема Штейнера-Лемуса утверждает, что совпадение длин бисектрисс $|AA_1| = |CC_1|$ влечет равенство длин сторон $|AB| = |BC|$. Проверьте истинность утверждения: «Отрезки AA_n и CC_n имеют равные длины тогда и только тогда, когда стороны AB и BC имеют равные длины» в каждом из следующих случаев:

а) $n = 2$

б) n — произвольное натуральное число.

в) n — произвольное положительное рациональное число.

г) n — произвольное положительное вещественное число.

2. Сформулируйте и исследуйте аналогичную задачу, если точки A_n и C_n выбираются на прямых AB, BC соответственно так, что лучи AA_n, C_n делят внешние углы при вершинах A и C треугольника ABC в равных отношениях.

3. Предложите свои обобщения или направления исследования в этой задаче и изучите их.

Задача 7. Иррациональные корни рациональных уравнений

1. Известно, что уравнение $x^4+ax^3+29x^2+bx+4 = 0$ с рациональными коэффициентами имеет корнем число $2+\sqrt{3}$. Найдите остальные корни этого уравнения.

2. Обоснуйте следующее утверждение про рациональные корни уравнения вида $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^i$ с целыми коэффициентами (если они, конечно, существуют): если x_0 — рациональный корень такого уравнения, то он обязательно равен $x_0 = \frac{p}{q}$, где p — делитель свободного члена (т.е. a_0), а q — делитель a_n. На основании этого соображения постройте алгоритм нахождения таких корней. Распространите этот алгоритм на уравнения такого же типа с рациональными коэффициентами.

3. Попробуйте предложить алгоритм определения (с обоснованием) корней вида $a + b \cdot \sqrt{2}, a + b \cdot \sqrt{3}, \ldots$ где $a, b \in \mathbb{Q}$, для таких уравнений (по крайней мере, постройте алгоритмы определения таких корней).

4. Может, вы сможете определять корни более сложного вида $a + b \cdot \sqrt{2} + c \cdot \sqrt{3}$ или $a + b \cdot \sqrt[3]{2}$?

5. Предложите алгоритм определения корней исходя из их общего вида, такого как $a + b \cdot \sqrt{m}$, $a + b \cdot \sqrt{m} + c \cdot \sqrt{k}$ и т.п., где $m, k, \ldots$ — заранее неизвестные натуральные числа.

6. Попробуйте оценить сложность предлагаемых алгоритмов.

7. Рассмотрите корни уравнений еще более сложного вида (с корнями различных степеней или с «композицией» корней и т.п.).

8. Предложите свои обобщения или направления исследования в этой задаче и изучите их (например, попробуйте рассмотреть подобные задачи для систем уравнений с двумя и более переменными, а также уравнения с коэффициентами из множества

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \left\{ x + y \cdot \sqrt{2} | x, y \in \mathbb{Q} \right\}.$$

Задача 8. Функция Эйлера

Пусть n - натуральное число, большее единицы. Обозначим за $\phi(n)$ количество таких целых $0 < x < n$, что x взаимно просто с n.

$$\phi(n) = | \{0 < x < n | (x, n) = 1\} |$$

1. Покажите, что для любого $n \geq 3$ есть такое натуральное число $k(n)$, что

$$\underbrace{\phi(\phi(\cdots\phi(n)))}_{k(n)\text{ раз}} = \phi^{\circ k(n)}(n) = 2.$$

2. Оцените число $k(n)$ сверху и снизу, где

а) n — число вида $\{3^s 2^t\}_{s,t\in\mathbb{N}}$.

б) n есть произведение всех различных простых меньших заданного числа.

в) n — произвольное натуральное число.

3. Рассмотрим уравнение $\phi(n) = m$ относительно n. Оцените число его решений

а) сверху.

б) снизу.

4. Обобщите предыдущий пункт на случай уравнений $\phi(\phi(\cdots\phi(n))) = m$. При каких m они разрешимы? Какова плотность множества значений функции $\phi^{\circ k}$, где плотность понимается в смысле задачи 5.

5. Число n назовём совершенным, если $n = \sum\limits_{i=1}^{k(n)+1} \phi^{\circ i}(n)$. Докажите, что числа вида 3^k являются совершенными.

6. Постройте другие примеры совершенных чисел. Существуют ли совершенные числа, не делящиеся на 3? Какие числа не являются совершенными?

Задача 9. Игры с карточками

1. Есть три автомата: первый по карточке с числами (a, b), $a, b \in \mathbb{Z}$ выдаёт карточку с числами $(a - b, b)$; второй — карточку $(a + b, b)$; третий — карточку (b, a). Все автоматы возвращают заложенные в них изначально карточки.

а) Пусть у вас в начале на руках имеется карточка $(19, 86)$. Можно ли получить карточку а) $(31, 13)$; б) $(12, 21)$?

б) Попробуйте найти все карточки (x, y), которые можно получить из карточки $(19, 86)$. Докажите, что других карточек получить нельзя.

в) Пусть у вас имеется карточка с числами (a, b). Попробуйте найти все карточки (x, y), которые можно получить.

2. Есть три автомата: первый по карточке (a, b), $a, b \in \mathbb{N}$ выдаёт карточку с числами $(a+1, b+1)$; второй — карточку $(a/2, b/2)$ (он работает только тогда, когда a и b чётные); третий — по двум карточкам с числами (a, b) и (b, c) печатает карточку с числами (a, c). Все автоматы возвращают заложенные в них карточки.

   а) Можно ли с помощью этих операций из карточки $(5, 19)$ получить карточку а) $(1, 50)$; б) $(1, 100)$?

   б) Найдите все натуральные n, такие, что можно из карточки с числами $(5, 19)$ получить карточку $(1, n)$. Докажите, что при остальных натуральных n это сделать не получится.

   в) Определите множество всех карточек (m, n), $m, n \in \mathbb{N}$, которые можно получить из карточки $(5, 19)$.

3. Пусть первоначально имеется карточка с числами (a, b), $a, b \in \mathbb{N}$, $a < b$, и автоматы такие же, как в пункте 2.

   а) Для различных пар a, b определите, при каких n можно из заданной карточки (a, b) получить карточку с числами $(1, n)$? Докажите, что при остальных натуральных n это сделать не получится.

   б) Для различных пар a, b определите множество всех карточек (m, n), $m, n \in \mathbb{N}$, которые можно получить из карточки (a, b).

   в) Пусть первоначально имеется набор из k карточек с числами $(a_1, b_1), \ldots, (a_k, b_k)$. При каких натуральных m и n можно получить карточку с числами (m, n) (конечно, в зависимости от исходного набора карточек)?

4. Придумайте свои обобщения или направления исследования этой задачи и изучите их. Например, рассмотрите систему автоматов, способных выполнять над карточками какие-нибудь другие операции.

Задача 10. Числовые квадраты

Возьмем 9 девятиклеточных квадратов.

1. Можно ли разместить в клетках этих квадратов натуральные числа от 1 до 9 так, чтобы затем было возможно соединить все 9 квадратов в один квадратный коврик 9×9 таким образом, что одновременно выполняются условия:

а) Сумма чисел по каждой диагонали в любом девятиклеточном квадрате равнялась 15.

б) Сумма чисел в каждом из четырёх квадратов 2×2, входящих в состав девятиклеточного квадрата, а также сумма чисел, расположенных в клетках, прилегающих к сторонам центрального квадратика, равнялась 16 в первом девятиклеточном квадрате коврика, 17 - во втором, 18 - в третьем и далее последовательно 19, 20, 21, 22, 23, 24.

в) В каждом столбце и в каждой строке полного квадрата 9×9 содержались бы все числа от 1 до 9 в произвольной последовательности.

2. Можно ли расположить числа так, чтобы сумма чисел по углам каждого из центральных 3×3, 5×5, 7×7, 9×9 квадратов окажется равной 20?

3. Можно ли расположить числа так, чтобы суммы, вдоль прямых, которые симметричны относительно одной из диагоналей квадрата 9×9, оказались одинаковыми, причём суммы эти уменьшались бы регулярно на 5 единиц по мере удаления прямых от другой диагонали большого квадрата?

4. Можно ли расположить числа так, чтобы кроме предыдущих условий оказалось, что суммы квадратов чисел вдоль прямых, симметричных относительно той же диагонали полного квадрата, оказались одинаковы?

5. Найдите как можно больше дополнительных числовых свойств у образовавшегося полного квадрата и докажите их.

6. Предложите наиболее экономный алгоритм составления требуемого числового квадрата 9×9 и обоснуйте его корректность. Сформулируйте аналогичные задачи для квадратов произвольного размера.

Задача 11. Почти арифметические прогрессии

Попробуйте построить теорию «почти арифметических прогрессий». В качестве исходных направлений исследования могут быть следующие.

Пусть a_1, d_1, d_2, n — фиксированные натуральные числа. Конечную последовательность чисел $a_1, a_2, , a_n$, будем называть почти арифметической прогрессией, если для любого k, $2 \leq k \leq n$, $a_k = a_{k-1} + d_1$ или

$a_k = a_{k-1} + d_2$. Множество всех таких почти арифметических прогрессий длины n обозначим через $P_n(a_1, d_1, d_2)$.

1. Укажите последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n$ из $P_n(a_1, d_1, d_2)$, у которой наименьшее количество членов равняется полусумме своих соседей.

2. Укажите последовательность из $P_n(a_1, d_1, d_2)$, у которой среди чисел $a_1 + a_n, a_2 + a_{n-1}, \ldots$ наименьшее количество равных между собой.

3. Сколько различных последовательностей содержит множество

$$P_n(a_1, d_1, d_2)?$$

4. Сколько различных сумм может быть у последовательностей, лежащих в множестве $P_n(a_1, d_1, d_2)$?

5. Какое наибольшее количество последовательностей из $P_n(a_1, d_1, d_2)$ имеет одинаковую сумму всех своих членов?

6. Пусть $P_{3n+1}(a_1, 1, 2, 3)$ — множество всех последовательностей $a_1, \ldots, a_{3n+1}$ таких, что при любом k, $2 \leq k \leq 3n + 1$ имеет место одно из равенств $a_k = a_{k-1} + 1$, $a_k = a_{k-1} + 2$, $a_k = a_{k-1} + 3$. У какого наибольшего количества последовательностей из $P_{3n+1}(a_1, 1, 2, 3)$ одинаковая сумма всех членов?

7. Сколько различных последовательностей содержит множество

$$P_{3n+1}(a_1, 1, 2, 3)?$$

8. Предложите свои направления исследования или обобщения этой задачи и изучите их.

Задача 12. Периодические дифференциальные уравнения

1. Дана функция $f(x, y) \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f \in C(\mathbb{R}^2), f'_y \in C(\mathbb{R}^2)$ и $f(x + T, y) = f(x, y)$ для любых $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Далее, существуют такие числа a, b, что $f(x, a) \cdot f(x, b) < 0$ для любого вещественного x.

а) Докажите, что дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$ имеет T-периодическое решение.

б) Докажите, что если $f'_y > 0$, то это периодическое решение единственно.

2. Дано уравнение $y' = -y^{2k+1} + f(x)$, $f(x+T) = f(x)$, f - непрерывна на вещественной прямой.

а) Докажите, что существует T-периодическое решение.

б) Докажите, что это решение единственно.

3. Найдите все периодические решения уравнения $y' = (y-a)(y-b)$, где a, b - вещественные числа.
Средним за период для периодической функции $f(x)$ называется величина $\frac{1}{T}\int\limits_0^T f(x)\,dx$. Ниже везде предполагается, что функции $f, f_1, f_2 \in C(\mathbb{R})$ и T-периодические.

4. Дано уравнение $y' = (y-a)(y-f(x))$.

а) Найдите необходимое и достаточное условие на среднее за период функции f, при котором это уравнение имеет T-периодическое решение (отличное от константы).

б) Сколько вообще периодических решений может быть у этого уравнения?

5. Исследуйте те же вопросы для уравнения $y' = (y-a)^2(y-f(x))$

6. Проведите исследование уравнения $y' = (y-a)^m(y-f(x))^n$ на предмет существования периодических решений в зависимости от натуральных параметров n, m и величины $\frac{1}{T}\int\limits_0^T f(x)dx$.

Исследовательские проекты для школьников

В этом разделе представлены интересные задачи, которые могут быть использованы в качестве основы для проекта при участии в научных конкурсах для школьников (например, в Балтийском научно-инженерном конкурсе, проводимом Фондом «Время науки»).

Задача 1. Треугольник Паскаля

Этот исследовательский проект состоит из нескольких шагов. Если у вас не получается до конца разобраться в каком-то шаге, пропустите его и изучайте следующий.

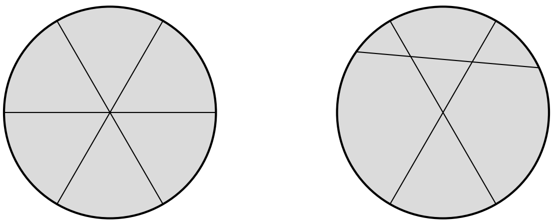
- Найдите сумму чисел в каждой строке треугольника Паскаля.
- Найдите сумму первого, третьего, пятого, ... (и так далее) элемента в какой-нибудь строке треугольника Паскаля. Найдите закономерность.
- Найдите сумму второго, четвёртого, шестого, ... (и так далее) элемента в строке треугольника Паскаля. Найдите закономерность.
- Найдите сумму квадратов чисел в каждой строке треугольника Паскаля.
- Выясните, где в треугольнике Паскаля спрятались треугольные числа $T_n = 1 + 2 + \ldots + n$.
- А где спрятались пирамидальные числа $P_n = T_1 + T_2 + \ldots + T_n$? А где квадратные числа $S_n = n^2$?
- Выясните, как связаны числа $1, 11, 11^2, 11^3, 11^4, \ldots$ с треугольником Паскаля.
- Что будет если взять самый левый элемент в строке треугольника Паскаля, вычесть из него следующий (по горизонтали), прибавить

следующий за ним, затем вычесть следующий, . . . (и т.д.) до тех пор, пока не кончатся числа в строке? Какое число получится? Найдите закономерность.

- Ответьте на предыдущий вопрос, если брать не сами элементы треугольника Паскаля, а их квадраты.
- Выясните, делятся ли все элементы (кроме крайних двух единиц) в строке на номер этой строки (нумерация строк начинается с нуля)? А когда делятся?
- Выберите число 1 у края треугольника Паскаля и идите по диагонали вниз. Начните складывать все встречающиеся числа и в какой-нибудь момент остановитесь. Какое число получилось в сумме? А что получится в общем случае?
- Что получится, если заштриховать все четные числа в треугольнике? Какой будет узор?
- А если зашриховать все числа, делящиеся на 3?
- Где спрятались числа Фибоначчи в треугольнике Паскаля?
- Чему равна сумма чисел в каком-нибудь параллелограмме треугольника Паскаля? Найдите закономерность.
- Откройте свои собственные закономерности в треугольнике и назовите их в свою честь

Задача 2. Задача о разрезании пиццы

Три разреза через центр круглой пиццы дают шесть кусочков. Если же сделать третий разрез не через центр, то мы получим семь кусочков разной формы и размера. Немного поэкспериментировав, вы убедитесь в том, что наибольшее число кусков, которое вы можете получить с помощью трёх разрезов — это семь. Но сколько кусочков вы можете получить с помощью большего числа разрезаний?



- Какое наибольшее число кусочков пиццы вы можете получить с помощью четырёх разрезов?

- Опишите принцип максимизации для разрезания пиццы. А именно, ответьте на вопрос: как должен проходить новый разрез, чтобы получилось как можно больше кусочков?

- Пицца Якоба Штейнера имеет бесконечный радиус, а потому о ней можно мыслить просто как о плоскости. Как связан ответ на общую задачу о пицце с ответом на задачу о разрезании пиццы Якоба Штейнера?

- Через P_n (от слова *pieces* — кусочки) обозначим максимальное число кусков, на которое можно разрезать пиццу с помощью n разрезов. Например, $P_1 = 2$ и $P_2 = 4$. Выразите P_n через P_{n-1} и найдите P_{137}.

- Стандартный кусочек пиццы очень похож на треугольник. А как связана задача о разрезании пиццы с треугольными числами?

- Предположим, что мы получили P_n кусочков пиццы за n разрезаний. Обозначим через C_n (от слова crust — корка) число тех кусочков пиццы, граница которых не содержит корочки пиццы. Найдите явную формулу для C_n.

- Сложим первые три числа на каждой строчке треугольника Паскаля. Какое число получается?

- Решите аналогичную *задачу о разрезании прямой*. Как вы думаете, а как будет связан ответ на новую задачу с треугольником Паскаля?

- Решите аналогичную *задачу о разрезании арбуза*. Как вы думаете, а как будет связан ответ на новую задачу с треугольником Паскаля? Уже догадались, какой ответы мы получим, если будем разрезать n–мерный шар?

- Выпишем элементы последовательности P_n в строчку, а под ней запишем её *производную последовательность* ΔP_n (вычитаем из элемента его предыдущий)

последовательность	1		2		4		7		11		16		22
разности		1		2		3		4		5		6	...
разности разностей			1		1		1		1		1	...	
разн. разностей разностей				0		0		0		0	...		

Как видите, четвёртая строка состоит из нулей. Напишите такую же табличку для последовательности каких–нибудь фигурных чисел.

последовательность	a_0		a_1		a_2		a_3		a_4		a_5
разности		b_0		b_1		b_2		b_3		b_4	$\dots$
разности разностей			c_0		c_1		c_2		c_3	$\dots$	
разн. разностей разностей				0		0		0	$\dots$		

Докажите, что если есть произвольная последовательность a_n обладает тем свойством, что $\Delta c_n = 0$, где $\Delta a_n = b_n$ и $\Delta b_n = c_n$, то

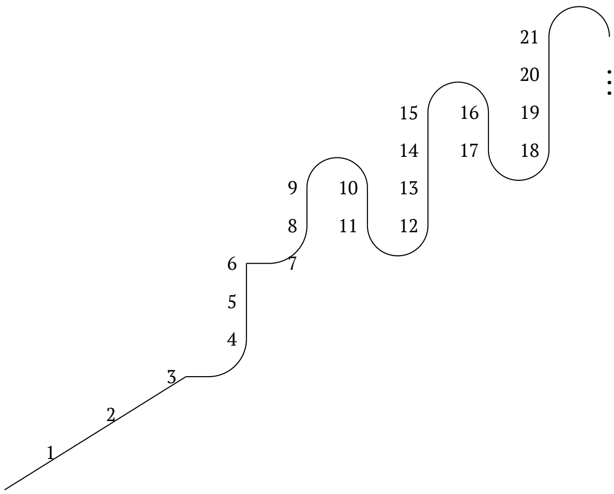
$$a_n = a_0\binom{n}{0} + b_0\binom{n}{1} + c_0\binom{n}{2}.$$

А что можно сказать про последовательности, у которых $c_n = 0$? А $b_n = 0$?

Задача 3. Знакомство с простыми числами

Этот исследовательский проект состоит из нескольких шагов. Если у вас не получается до конца разобраться в каком–то шаге, пропустите его и изучайте следующий.

- Начните писать натуральные числа последовательно вдоль извивающейся линии, как показано на рисунке.



Найдите на полученной спирали закономерность, связанную с простыми числами, и объясните её.

- Сколько делителей имеют числа $1, 2, 4, 8, 16, 32, \ldots$? А когда число вида $2^n - 1$ является простым? Составьте таблицу чисел такого вида и найдите закономерность.

- Выясните, для каких чисел n число $(n-1)! + 1$ делится на n. Найдите закономерность.

- Выясните, для каких чисел n число $n^2 - 1$ делится на 24. Найдите закономерность.

- Выясните, для каких чисел n число n^2+1 является простым. Найдите закономерность.

- Выясните, для каких чисел n число $2^n - 2$ делится на n. Найдите закономерность.

- Посмотрим на числа вида $n^2 - n$. Получаем $0, 2, 6, 12, 20, \ldots$. Все эти числа делятся на два. Посмотрим на числа вида $n^3 - n$. Получаем $0, 6, 24, 60, 120, 210, 336, \ldots$. Все эти числа делятся на три! А что дальше? Будут ли числа вида $n^4 - n$ делиться на четыре? А числа вида $n^5 - n$ на пять? Найдите закономерность.

Задача 4. Закопеременные представления

- Представьте число 1 в виде произведения нескольких чисел, сумма которых равна нулю.

- Решите ту же самую задачу для чисел $2, 4, 6$.

- Решите эту задачу для числа 3. Сможете ли вы найти разложение, в котором все числа являются именно целыми, а не рациональными?

- Исследуйте вопрос представимости для произвольных натуральных чисел.

Задача 5. Как же я люблю разрезать!

- Возможно ли разрезать на равнобедренные треугольники: а) квадрат; б) прямоугольник? Если да, то покажите как.

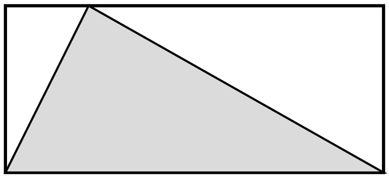
- Ответьте на тот же вопрос, если нужно разрезать а) параллелограмм; б) равнобокую трапецию. Если можно, то покажите как.

- Попытайтесь разрезать фигуры на наименьшее возможное число равнобедренных треугольников.

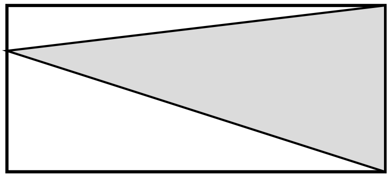
- Попробуйте изменить форму фигур из списка выше. Как тогда изменится Ваше разбиение на треугольники? Рассмотрите экстремальные ситуации.

Задача 6. Геометрическая миниатюра

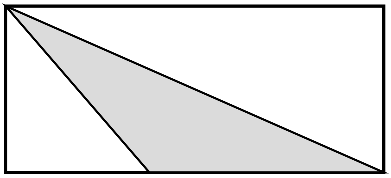
- Как вы думаете, какую часть (по площади) составляет треугольник внутри прямоугольника на картинке ниже?



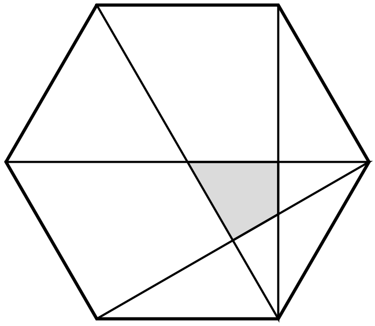
- А какую часть составляет такой треугольник?



- А такой?



- Как вы думаете, какую часть (по площади) составляет выделенная область от всего правильного шестиугольника?

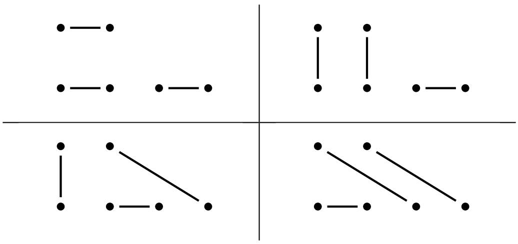


Задача 7. Конфигурации точек

В 2014 г. на Санкт-Петербургской олимпиаде школьников по математике была предложена следующая задача:

> На двух параллельных прямых отмечено по 40 точек. Их разбивают на 40 пар так, чтобы отрезки, соединяющие точки в одной паре, не пересекались друг с другом. (В частности, конец одного из отрезков не может лежать на другом отрезке). Докажите, что число способов это сделать не превосходит числа 3^{39}.

Последовательность, возникающая в этой задаче, обладает богатыми комбинаторными реализациями, и их разнообразие просто изумляет. Опишем общую ситуацию: пусть даны две параллельные прямые, на одной отмечено k точек, на другой n точек.



Отмеченные точки разбивают на пары так, чтобы отрезки, соединяющие точки в одной паре, не пересекались друг с другом. В частности, конец одного из отрезков не может лежать на другом отрезке.

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & [0,0] & & \\
 & [2,0] & [1,1] & [0,2] & \\
[4,0] & [3,1] & [2,2] & [1,3] & [0,4] \\
 & & \dots & &
\end{array}
$$

Полученную картинку будем называть *конфигурацией* (точек и отрезков на двух прямых) или *разбиением* (точек на пары). Количество разбиений обозначим через $[k, n]$. Например, $[2, 4] = 4$, как показывает рисунок выше.

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & 1 & 1 & & & \\
 & & 1 & 2 & & 2 & 1 & & \\
 & 1 & 3 & & & & 3 & 1 & \\
1 & 4 & & & & & & 4 & 1
\end{array}
$$

Кроме того, если $n + k$ нечётно, то $[k, n] = 0$, а также $[k, n] = 0$, если $n, k < 0$. Если n или k равно нулю, то $[k, n] = 1$ просто по определению.

- Заполните треугольник выше и найдите в нём закономерности, аналогичные закономерностям в треугольнике Паскаля.
- Выясните, какую последовательность образуют суммы элементов в строках треугольника.
- Правда ли, что в каждой строчке числа $[k, n]$ обязательно возрастают при движении от краёв к центру?
- Выясните, как выразить $[n, n]$ через суммы квадратов чисел на диагоналях в треугольнике Паскаля.

Задача 8. Треугольные числа

- Можно ли представить число 201745 в виде суммы двух треугольных чисел?
- Какие натуральные числа можно представить в виде суммы не более двух треугольных чисел? Найдите закономерность.
- Какие натуральные числа можно представить в виде суммы не более трёх треугольных чисел? Найдите закономерность.
- (Золотая теорема). Какие числа можно представить в виде суммы не более n n–угольных чисел?

Задача 9. Шарики в коробках

Перед вами бесконечный набор коробок, на каждой из которых написано простое число.

$$2 \quad 3 \quad 5 \quad 7 \quad 11 \quad 13 \quad 17 \quad 19 \quad 23 \quad 29 \quad 31 \quad 37 \quad 41 \quad \ldots$$

Вам дали несколько белых шариков и вы решили положить их все в какие-то коробки (в одну коробку можно положить сразу много шириков).

После этого пришёл эксперт, многозначно посмотрел на вашу расстановку шариков по ящикам и выдал вам число следующим образом: он возвёл число 2 в степень α_2, равную количеству шариков в коробке с надписью 2, потом возвёл число 3 в степень α_3, равную количеству шариков в коробке с надписью 3, потом возвёл число 5 в степень α_5, равную количеству шариков в коробке с надписью 5, и так далее. Затем он умножил все эти числа между собой. Получись число $n = 2^{\alpha_2} \cdot 3^{\alpha_3} \cdot 5^{\alpha_5} \cdot \ldots$.

- В коробке 2 лежит 3 шарика, а в коробках 3 и 11 лежат по одному шарику. Какое число назовёт эксперт?
- Сколько шариков вам понадобится и куда их нужно положить, чтобы эксперт назвал вам число 6? А число 12? А число 21?
- В каком случае эксперт назовёт вам простое число? А составное?
- Вы расположили шарики в коробках и эксперт назвал число n. Что нужно сделать, чтобы он назвал число np, где p — простое число?
- Известно, что число n, которое назвал эксперт, делится на простое число p. Что нужно сделать, чтобы эксперт назвал число n/p?
- Вы положили несколько белых шариков в коробки и эксперт назвал Вам число n, а потом то же самое происходит с расстановкой чёрных шариков вашего друга — он получает число m. Что нужно сделать, чтобы эксперт назвал число nm? А что нужно сделать, чтобы эксперт назвал НОД (n, m)? А НОК (n, m)? А что можно сказать про расположения белых и чёрных шариков, если числа n, m взаимно просты?
- Оказалось, что все m шариков положили в одну коробку. Сколько делителей у числа, которое назвал эксперт?

- Оказалось, что m шариков положили в одну коробку, а k — в другую. Сколько делителей у числа, которое назвал эксперт?

- Как определить количество простых делителей числа, которое назовёт эксперт?

- Правда ли, что можно заставить эксперта назвать любое натуральное число, если правильно подобрать шарики?

Задача 10. Двойственность

Как известно, линейная функция задаётся уравнением $y = kx+b$, а графиком линейной функции является прямая. Каждая такая прямая определяется парой чисел (k, b). Построим новую координатную плоскость (k, b), *точки* на которой обозначают прямые на исходной координатной плоскости (x, y).

- Нарисуйте на плоскости (x, y) какие-нибудь четыре прямые и отметьте их в виде четырёх точек на плоскости (k, b).

- Обратно: выберите три точки на плоскости (k, b) и нарисуйте соответствующие три прямые на плоскости (x, y). Что будет, если выбирать точки на (k, b) лежащими на одной вертикальной прямой? А горизонтальной?

- Рассмотрим на плоскости (k, b) прямую $b = k$. Каждая точка этой прямой задаёт на плоскости (x, y) какую-то прямую, а вся прямая $b = k$ задаёт на плоскости (x, y) набор прямых. Каким свойством обладает этот набор прямых?

- На координатной плоскости (k, b) проведено три прямые, проходящие через одну точку. Каждая такая прямая изображает некоторый набор прямых на плоскости (x, y). Как эти три набора прямых связаны между собой?

- Аналогичный вопрос для трёх параллельных прямых на (k, b).

- Рассмотрим набор всех прямых плоскости (x, y), которые проходят через точку $(0, 0)$. Как этот набор изображается на плоскости (k, b)? Тот же самый вопрос при замене точки $(0, 0)$ на (m, n).

- Рассмотрим на плоскости (k, b) прямую $b = uk+v$. Какой набор прямых на плоскости (x, y) изображает эта прямая?

- Прямые $b = uk + v$ на плоскости (k, b) задают точки на новой плоскости (u, v). Как новая плоскость связана с плоскостью (x, y)?

Задача 11. Задача Иосифа Флавия

В книге «Иудейская война» Иосифа Флавия есть история о том, как он в составе отряда из 41 иудейского воина был загнан римлянами в пещеру. Предпочитая самоубийство плену, воины решили выстроиться в круг и последовательно убивать каждого третьего из живых, до тех пор пока не останется ни одного человека. Однако Иосиф наряду с одним из своих единомышленников счел подобный конец бессмысленным — он быстро вычислил спасительные места в порочном круге, на которые поставил себя и своего товарища. И лишь поэтому мы знаем его историю.

В нашем варианте мы начнём с того, что выстроим в круг n человек, пронумерованных числами от 1 до n, и будем исключать каждого *второго* из оставшихся до тех пор, пока не уцелеет только один человек. Например, если $n = 10$, то порядок исключения будет такой: 2, 4, 6, 8, 10, 3, 7, 1, 9, так что остаётся номер 5. Убедитесь в этом!

- Обозначим через $J(n)$ номер последнего уцелевшего человека. Мы только что выяснили, что $J(10) = 5$. Можно было предположить, что $J(n) = n/2$ при чётном n. Верно ли это? Начните с $n = 2, 3, 4, \ldots$.

- Выпишите табличку, в которой для малых n указаны порядки исключения чисел. Правда ли, что $J(n)$ всегда нечётно? Почему?

- Пусть n чётно. Выясните, что происходит в тот момент, когда из круга исключается последнее чётное число. Как связаны числа

$$J(n), \quad J(n/2)?$$

- Найдите аналогичную закономерность для нечётного n.

- Пусть $n = 2^m$. Найдите $J(n)$.

- Выпишите таблицу значений $J(n)$ для n от 1 до 16 и найдите для $J(n)$ явную формулу.