Оглавление

Задания 2017 года

Задачи 0 класса.

Задача 1. Примечательный учебный день

A. К высоте m метров дерево подходит, имея $(m-1)!$ ветвей. Соответственно, ответ на задачу — $11!$ веток.

B. Очевидно, что больше 13 рассадок не бывает: мальчик обязан сидеть с одной из девочек. 13 же рассадок реализовать просто: нужно взять какую-то рассадку, и каждый день сдвигать девочек относительно мальчиков «по кругу».

C. Давайте решим задачу в общем случае: есть класс из $4k+2$ человек — придумать $4k+1$ способов рассадить их за парты так, чтобы одна пара не появлялась в двух разных рассадках (больше нельзя по очевидной причине — каждый человек может сидеть не более чем с $4k+1$ другими).

Будем изображать i–ую рассадку, ставя число i в клетки таблицы $(4k+2)\times(4k+2)$, из которой выкинута центральная диагональ. Наша задача тогда — расставить числа от 1 до $4k+1$ в клетки таблицы, так чтобы (а) каждое число было написано ровно $2k$ раз (б) встречалось в каждом столбце и каждой строке ровно по одному разу (в) его вхождения в таблицу были бы симметричны относительно центральной диагонали. Построим расстановку.

В первую строку таблицы впишем числа от 1 до $4k+1$ справа налево, а в первый столбец — снизу вверх. Заполняя i-ую строку, $1<i<4k-1$, поступим так: зарезервируем самую правую клетку строки, не будем её трогать; в остальные клетки впишем числа от 1 до $4k+1$, сдвинув их на одну клетку влево относительно предыдущей строки. После этого в самую правую клетку запишем число, которое должно было стоять на центральной диагонали. Последнюю строку получим отражением относительно центральной диагонали уже сформированного последнего столбца.

Приведём пример такой таблицы для $k=2$ (в задаче было $k=6$):

	9	8	7	6	5	4	3	2	1
9		7	6	5	4	3	2	1	8
8	7		5	4	3	2	1	9	6
7	6	5		3	2	1	9	8	4
6	5	4	3		1	9	8	7	2
5	4	3	2	1		8	7	6	9
4	3	2	1	9	8		6	5	7
3	2	1	9	8	7	6		4	5
2	1	9	8	7	6	5	4		3
1	8	6	4	2	9	7	5	3	

Несложно убедиться в том, что она обладает нужными нам свойствами.

Задача 2. Пока не пришёл лифтёр

A. Если первый общий этаж для мальчиков — 123-ий, то НОК$(n,m)=123$ (так как первый общий этаж как раз и имеет номер, соответствующий наименьшему общему кратному). $123=3\cdot 41$, поэтому n и m могут быть равным 1, 123 или 3, 41.

B. Без ограничения общности можно считать, что Витя находится на нулевом этаже, а Петя — на первом. Тогда Витин лифт перемещается только по этажам, номера которых делятся на $k+1$. Если $k = 0$, Петя остаётся на месте, и Витя, конечно, может к нему приехать.

Если же $k > 0$, то Витя не может приехать на первый этаж (1 не делится на $k+1$), поэтому если Петя просто будет оставаться на месте, он не встретится с Витей.

C. Заметим, что номер текущего этажа, на котором находится Витя, равен сумме со слагаемыми вида $\pm m$ и $\pm n$. Любая такая сумма делится на НОД (n, m), а единственный делитель единицы — это она сама. Поэтому НОД $(n, m) = 1$.

Задача 3. Игра

A. Это игра–шутка: значение суммы не зависит от расстановки в ней скобок — сумма в любом случае будет равна 2017, то есть нечётна. Отсюда победит первый игрок.

B. У первого игрока есть выигрышная стратегия. Первым ходом он должен переложить 3 камня из первой кучки во вторую. Затем он должен реагировать на ходы второго игрока следующим образом:

Если второй перекладывает x камней из первой кучки во вторую, то первый должен переложить $5 - x$ камней также из первой кучки во вторую.

Если же второй перекладывает камни из второй кучки в первую, то первый должен вернуть эти камни обратно во вторую кучку.

Заметим, что после хода первого игрока количество камней во второй кучке всегда имеет остаток 3 от деления на 5, а после хода второго игрока количество камней во второй кучке никогда не имеет такого остатка. Это значит, что второй игрок не может переложить все камни во вторую кучку, вынудив первого сделать ход, при котором ему придётся выкидывать камни из мешка.

То есть, (а) первый всегда может сделать ход, соответствующей придуманной нами стратегии, (б) выкидыванием камней из мешка занимается исключительно второй игрок. Он и проиграет.

C. Начнём со случая $n = 13$. Если первый игрок взял k камней, то второй может взять $13 - k$ и победить. Если n не превосходит 14 и не равно 13, то все камни может взять за один ход первый игрок.

Для $n \geq 15$ рассмотрим два случая:

n делится на 13. Заметим, что после любого хода первого игрока оставшееся количество камней не будет делиться на 13. Зато второй в случае любого хода первого сможет сделать так, что после его хода количество камней, оставшихся в кучке, будет вновь делиться на 13. Для этого на взятие k камней, $1 \leq k \leq 12$, нужно ответить взятием $13 - k$ камней, на взятие 14 камней — 12 камнями, а на взятие 15 камней — 11 камнями. Ноль делится на 13 — кучка может остаться пустой только после хода второго игрока.

n не делится на 13. Тогда выигрышная стратегия есть у первого игрока. Своим первым ходом он берёт от 1 до 12 камней так, чтобы осталось количество, кратное 13 — а затем играет так, как играл бы второй игрок в предыдущем пункте.

Ответ: если n делится на 13, выигрывает второй игрок; иначе выигрывает первый.

Задача 4. Переводчики с немецкого

A. Разложим на простые множители числа 116 и 217: $116 = 2^2 \cdot 29$, $217 = 7 \cdot 31$. Эти числа взаимно просты, то есть, у них единственный общий множитель — единица. Поэтому переводчику надо перевести 116 брошюр и 217 заметок.

B. Заметим, что если текстов каждой тематики было бы по одному и каждому переводчику надо было бы перевести ровно один текст, то у начальника не возникло бы проблем. Тогда давайте сведём задачу распределения $3n$ текстов, по n на тему, к задаче распределения $3(n-1)$ текстов, по $n-1$ на тему.

Среди трёх переводчиков найдётся тот, кто указал наименьшее число различных тематик текстов в своём списке желаний. Выделим ему один текст одной из его желаемых тематик. Среди оставшихся двух переводчиков есть тот, у кого тематик поменьше. Он точно хочет себе хотя бы один текст тематики, отличной от той, которую мы уже дали первому переводчику. Выделим ему текст этой тематики.

Остался третий переводчик. Если он хотел себе текст третьей тематики, которая ещё никому не выдана, всё хорошо. Если вдруг он «заказывал» только два различных вида текстов, и это те самые виды, которые уже «отданы» первому и второму переводчикам, то у кого-то из них (предположим, у второго) в списке желаний есть третья тематика. Дадим ему эту самую третью тему, а третьему переводчику — то, что раньше было у второго.

Таким образом мы успешно раздали три текста — раздавая по три текста разных тематик, дойдём до ситуации, когда текстов осталось по одному.

C. Текст длины 1 бьётся одним способом, текст длины 2 — двумя способами. Теперь рассмотрим последнее слово в тексте из n слов — оно может быть либо самостоятельным, либо частью сочетания. В первом случае нам останется побить на слова и сочетания текст длины $n-1$, во втором — текст длины $n-2$.

Таким образом, ответ на задачу для n равен сумме ответов для $n-1$ и $n-2$. Этому условию и полученным нами начальным данным удовлетворяет последовательность чисел Фибоначчи. Поэтому ответ — $\mathcal{F}_n$.

Задача 5. Все числа состоят из цифр

A. Запишем условие из задачи: $\overline{xy} = 3 \cdot \overline{yx}$. Это значит то же, что

$$10x + y = 30y + 3x;$$
$$7x = 29y.$$

И правая, и левая части равенства должны делить на 29. Это значит, что x делится на 29 — единственная цифра, кратная, 29, это ноль. Разумеется, при $x = 0$ решений у данной задачи нет — значит, нет и вообще.

B. Последовательно будем интерпретировать условие задачи. То, что искомое число не делится на 10, значит, что $Z \neq 0$. То, что число YZ меньше 40, значит, что Y равен 0, 1, 2 или 3. Единственное двузначное число, являющееся квадратом и оканчивающееся на цифры 0–3 — это 81. Таким образом, $X = 8$, $Y = 1$.

Наконец, для цифры Z остаётся два возможных варианта, чтобы число XYZ делилось на 9 — 0 и 9. Так как мы с самого начала поняли, что $Z \neq 0$, получается $Z = 9$.

Ответ: искомое число — 819.

C. Попробуем посчитать сумму цифр числа n — по признаку делимости на 9, её остаток будет таким же, как у самого числа n. 19 разрядов из 61 занимают двойки —

если отбросить эти 19 разрядов, двоек и четвёрок будет поровну. Пусть четвёрки в числе занимают t разрядов. Тогда сумма цифр числа n равна

$$19 \cdot 2 + 4 \cdot t + 2 \cdot t + 3 \cdot (61 - 19 - 2t) =$$

$$= 38 + 6t + 3 \cdot 42 - 6t = 38 + 42 = 80.$$

Остаток при делении 80 на 9 равен 8 — значит, и число n сравнимо с 8 по модулю 9.

Задача 6. Участники «Математики НОН-СТОП»

A. Парты в одном из кабинетов, где проходит олимпиада, стоят в три колонки по шесть парт в каждой. За 20 минут до олимпиады в кабинете сидело 8 школьников. Докажите, что из кабинета пока что можно утащить две свободные парты, стоящие друг за другом. А если бы школьников было 9?

Побьём парты на пары стоящих друг за другом, по три пары в ряду. Получится девять пар, а школьников пока всего восемь. Значит, одна пара парт полностью свободна, и её можно утащить.

Если же школьников 9, то посадим по школьнику за 1, 3 и 5 парты каждого ряда — и ничего нельзя будет унести.

B. Пусть участников всего N. Если среди участников есть один, не знакомый ни с кем, то не может быть участника, знакомого со всеми. Если же есть участник, который со всеми знаком, то каждый знаком хоть с кем-то.

Таким образом, либо все участники знакомы с 0—$(N-2)$ людьми каждый, либо все они знакомы с 1—$N-1$ людьми каждый. В любом случае на N участников получается $(N-1)$ вариантов, поэтому найдутся двое с одинаковым числом знакомых.

C. Возьмём шесть участников, нам хватит. Будем соединять красной линией знакомых, а синей линией — незнакомых. Все участники окажутся попарно соединены.

Из каждого участника выходит по пять линий, значит как минимум три из них имеют один цвет. Пусть из данного участника выходит три красных линии — посмотрим на людей, в которых они приходят. Если между ними есть хоть одна красная линия, получается красный треугольник с участником, выбранным нами изначально. Если же между ними все линии синие, то это даёт нам синий треугольник, то есть они попарно незнакомы. Что и требовалось.

Задача 7. Простые, но такие сложные

A. Хотя бы одно из чисел p, $p+2$, $p+4$ должно делиться на 3 — это можно понять, рассмотрев всевозможные остатки при делении p на 3. Единственное простое число, делящееся на 3, — это, собственно, 3.

$p+4$ не может быть равно трём, потому что тогда $p = -1$ — не простое. $p+2$ не может быть равно трём, потому что тогда $p = 1$ — не простое. Остаётся единственные ответ — $p = 3$, $p + 2 = 5$, $p + 4 = 7$. Все эти числа простые.

B. Пусть $n = p_1 \cdot p_2$. Тогда $n + 100 = (p_1 + 1)(p_2 + 1) = n + p_1 + p_2 + 1$. Таким образом, мы ищем простые числа p_1 и p_2, такие что $p_1 + p_2 = 99$. Сумма двух чисел нечётна — значит, одно из них обязательно должно быть чётным. Отсюда единственный ответ — $p_1 = 2$, $p_2 = 97$.

C. Рассмотрим выключатель под номером k. Какие электрики переключат его? Очевидно, что те, номера которых являются делителями числа k. Изначально все выключатели выключенными, поэтому включенными в конце останутся те, номера которых имеют нечётное чило делителей. Известный факт заключается в том, что этому условию удовлетворяют только квадраты натуральных чисел.

Таким образом, включенными останутся выключатели с номерами–полными квадратами.

Задача 8. О числах маленьких и больших

A. Без ограничения общности будем считать, что $b \geq a \geq 2$. Тогда

$$a+b \overset{(1)}{\leq} 2\cdot\max(a,b) \overset{(2)}{\leq} \min(a,b)\cdot\max(a,b) = a\cdot b.$$

Теперь, если оба числа a, b строго больше двух, то неравенство (2) становится строгим, а если только одно — то неравенство (1) становится строгим. Что и требовалось.

B. (a): Пусть a — первая цифра числа X.

Чтобы найти число X, которое при удалении первой цифры станет в 57 раз меньше, нужно придумать такую цифру a, что $a \cdot 10^{\cdots} = 56\cdot(X - a\cdot 10^{\cdots})$. Для этого, в частности, число $a00\ldots0$ должно делиться на 56. Число 70000 отлично подойдёт. Получаем ответ:

$$1250\cdot 57 = 71250.$$

(б): Чтобы найти ответ в этом пункте, нужно подобрать такую цифру a, что $a00\ldots0$ делится на 57. Пусть такая есть: $57 \mid a\cdot 10^k$. 10 взаимно просто с 57, поэтому тогда $57 \mid a\cdot 10^{k-1}$. Продолжая уменьшать степень десятки, пользуясь этим соображением, получим $57 \mid a$. Но ненулевая цифра не может делится на 57 — получаем противоречие.

C. Отдельно рассмотрим случай $n=4$: $4 = 2\cdot 2 = 2+2$. Если же составное n строго больше четырёх, что его можно представить в виде $a\cdot b$, $a \geq 2$, $b > 2$.

Из пункта А мы знаем, что тогда $a+b < a\cdot b = n$. Тогда можно взять $n-a-b$ единиц, и получить

$$a+b+1+\ldots+1 = a\cdot b\cdot 1\cdot\ldots\cdot 1 = n.$$

Задача 9. Гонки улиток

A. Улитки доползут до верха одновременно — каждая за три дня.

B. Покрасим клетки листа в белый и чёрный, как на шахматной доске. Чёрных и белых клеток будет разное количество (всё-таки площадь листа нечётна), и при этом улитка переползает с белой клетки на чёрную, а с чёрной — на белую. Поэтому улиткам, стартовавшим в клетках цвета, которого больше, не хватит клеток цвета, которого меньше.

C. Пусть более быстрая улитка — верхняя. Тогда план её действий таков: спуститься вертикально вниз в точку, где сидела другая улитка, а затем догнать её по её же пути.

Пусть более быстрая улитка — нижняя. План её действий — поползти перпендикулярно от стены. Кратчайший путь от начального положения верхней улитки до точки, где находится нижняя улитка, всегда будет длиннее расстояния, пройденного нижней улиткой — поэтому более медленная верхняя не сможет её догнать.

Задача 10. Загадывание чисел

A. Пусть оказалось, что $a + b$ делится на b, где a и b — числа, загаданные мальчиками. Тогда

$$a + b = k \cdot b,$$

и, соответственно

$$a = (k - 1) \cdot b.$$

Таким образом, a делится на b — и наибольший общий делитель этих двух чисел равен b.

B. Ответ на первый вопрос — да, конечно: 3 и 20 — взаимно простые числа, а их остатки от деления на 17 совпадают и, разумеется, не взаимно просты.

Чтобы показать, что числа a и b из второго вопроса пункта обязаны быть взаимно простыми, рассмотрим число

$$\max(a, b) + 1.$$

Остатки при делении чисел a и b на него равны им самим и по условию взаимно просты — значит, a и b взаимно просты.

C. Наша задача — решить уравненение

$$(x + 3)(x + 4)(x + 5)(x + 6) = 288.$$

Рассмотрим произведения пары крайних множителей и пары средних множителей:

$$(x^2 + 9x + 18)(x^2 + 9x + 20) = 288.$$

Иными, словами,

$$Y(Y + 2) = 288.$$

Разложим число 288 на множители: $288 = 2^5 \cdot 3^2$. Получается, есть ровно два способа представить 288 в виде произведения двух чисел, различающихся на 2: $16 \cdot 18$ и $(-18) \cdot (-16)$.

В каждом из этих двух случаев, чтобы найти x, нужно либо решить квадратное уравнение, либо, например, представить -18 в виде произведения двух чисел, различающихся на 3 — одно из них и будет $x + 3$. Ни то, ни другое не представляет труда.

Задача 11. Возводим в степень

A. Подойдёт, например, 423 (делится на 9), 424 (делится на 4), 425 (делится на 25).

B. Укажите наименьшее натуральное число такое, что его половина — квадрат натурального числа, его треть — куб натурального числа, а его пятая часть — пятая степень натурального числа.

Будем искать это число в виде $2^m 3^n 5^k$: по условию, эти множители должны в него входить, а лишнего нам не надо. Ясно следующее:

m делится на 3 и на 5, но нечётно;
n делится на 2 и на 5, но имеет остаток 1 по модулю 3;
k делится на 2 и на 3, но имеет остаток 1 по модулю 5.

Найдём наименьшие подходящие m, n и k — это 15, 10 и 6. Ответ: $2^{15} \cdot 3^{10} \cdot 5^6$.

C. Пусть нам надо придумать цепочку длины n. Возьмём n произвольных простых чисел $p_1 \ldots p_n$ — их квадраты являются попарно взаимно простыми.

В силу Китайской теоремы об остатках найдётся достаточно большое число N, сравнимое с i по модулю p_i^2, $1 \leq i \leq n$. Искомой цепочкой будет $N - n \ldots N - 1$.

Задача 12. Средства передвижения

A. Очевидно, что грузовик проедет на данном наборе шин наибольшее расстояние, если все шины износятся одновременно: в противном случае на какх-то шинах останется неиспользованный ресурс, который мог бы превратиться в преодолённое расстояние.

Будем рассматривать *износ* шины — число, линейно растущее с пройденным расстоянием, и обращающееся в единицу, когда шина достигает своего предела.

Один километр для передней шины увеличивает её износ на $\frac{1}{15000}$, для задней шины — на $\frac{1}{25000}$. Пусть до замены грузовик проехал S_1 километров, а после — S_2. Тогда условие о том, что две пары шин износились одновременно, превратится в

$$\begin{cases} \frac{1}{25000}S_1 + \frac{1}{15000}S_2 = 1; \\ \frac{1}{15000}S_1 + \frac{1}{25000}S_2 = 1. \end{cases}$$

Эти равенства можно преобразовать в

$$\begin{cases} 3S_1 + 5S_2 = 75000; \\ 5S_1 + 3S_2 = 75000. \end{cases}$$

Получаем $S_1 = S_2 = 9375$, и грузовик сможет проехать 18750 километров.

B. Если Андрей побежит вперёд, ему придётся преодолеть на треть длины моста большее расстояние, чем если он побежит назад. Соответственно, бежать ему придётся больше на время, требуемое для преодоления трети моста. Из условия задачи, за это время троллейбус должен преодолеть весь мост со скоростью 45 км/ч. Значит, скорость бега Андрея — 15 км/ч.

C. Паша выписал в ряд номера шести трамваев, проехавших мимо него. Известно, что каждый номер, начиная с третьего, равен сумме двух предыдущих, а сумма всех выписанных номеров равна 8032. Установите номер пятого трамвая.

Пусть номер первого трамвая — A, а второго — B. Тогда можно выписать номера остальных трамваев:

$$A + B,\ A + 2B,\ 2A + 3B,\ 3A + 5B.$$

Сложив эти номера, получаем $8A + 12B = 8032$. Нам нужно найти номер пятого трамвая, равный $2A + 3B$ — но это ровно четверть от суммы всех номеров!

Отсюда ответ — $\frac{8032}{4} = 2008$.

Задача 13. Взвешивания

A. Пусть картофель весит P граммов, а кот — K граммов. Пусть погрешность составляет M граммов.

Тогда $P + M = 1000$, $K + M = 4400$, $P + K + M = 5000$. Отсюда $P = 600$ (вычтем из третьего равенства второе), $K = 4000$ (вычтем из третьего первое), $M = 400$.

B. Поделим 729 монет на три равных кучки. Положим две из них на весы — если одна из них окажется легче другой, то в ней находится фальшивая монета. Если они равны по весу, то фальшивая монета находится в оставшейся трети.

Таким образом, за один ход мы умеем уменьшать количество «подозреваемых» монет втрое. $729 = 3^6$, поэтому через шесть ходов останется одна монета, которая может быть фальшивой — она и окажется фальшивой.

C. Выложим на весы одну монету из первого мешка, две монеты из второго мешка, ... 15 монет из 15-го мешка. Если бы все монеты были настоящими, их суммарная масса была бы равна $20 \cdot (1 + \ldots + 15)$ граммов. По факту мы получим бо́льшую массу — она будет отличаться от приведённой нами ранее на $5 \cdot$ (№ мешка с фальшивыми монетами) граммов. Так мы и выясним, где фальшивки.

Задания 2018 года

Задачи 0 класса.

Задача 1. Ужасный гадкий аккуратный подсчёт

A. Квадратов 1×1 — $4 \cdot 5 = 20$ штук. Квадратов размером 2×2 — $3 \cdot 4 = 12$ штук. Квадратов 3×3 и 4×4 — 6 и 2 соответственно. Таким образом, всего квадратов

$$20 + 12 + 6 + 2 = 40.$$

Количество прямоугольников можно посчитать более «продвинутым» образом: заметим, что прямоугольников размером $a \times b$ можно найти ровно $(4-a+1)\cdot(5-b+1)$ штук. Число a меняется от 0 до 4 — отсюда $4 - a + 1$ меняется в тех же пределах. То же самое с $5 - b + 1$ — оно меняется от 0 до 5.

Отсюда можно заключить, что сумма чисел вида $(4 - a + 1) \cdot (5 - b + 1)$ при всевозможных a и b будет равна сумме всех чисел вида $a \cdot b$. Как посчитать сумму всех чисел вида $a \cdot b$? Заметим, что при раскрытии скобок в произведении

$$(1 + 2 + 3 + 4 + 5) \cdot (1 + 2 + 3 + 4)$$

получится сумма из всех слагаемых, которые нам нужны. Отсюда прямоугольников можно найти $15 \cdot 10 = 150$ штук.

B. Всего раскрасок $n!$ — в «первом» секторе может стоять n цветов, в следующем — $n - 1$, и так далее. Из одной раскраски вращением круга можно получить ровно n раскрасок (включая её саму) — поэтому ответ равен $\frac{n!}{n} = (n-1)!$.

C. В верхней полосе может стоять один из шести имеющихся цветов. Во второй полосе — любой из шести цветов, кроме уже стоящего в первой. В нижней полосе — любой из цветов, кроме уже стоящего во второй. Таким образом, ответ — $6 \cdot 5 \cdot 5 = 150$.

Задача 2. Ужасный гадкий аккуратный подсчёт

A. Всего раскрасок $n!$ — в «первом» секторе может стоять n цветов, в следующем — $n - 1$, и так далее. Из одной раскраски вращением круга можно получить ровно n раскрасок (включая её саму) — поэтому ответ равен $\frac{n!}{n} = (n-1)!$.

B. В верхней полосе может стоять один из шести имеющихся цветов. Во второй полосе — любой из шести цветов, кроме уже стоящего в первой. В нижней полосе — любой из цветов, кроме уже стоящего во второй. Таким образом, ответ — $6 \cdot 5 \cdot 5 = 150$.

C. Эта задача чуть сложнее пункта A: нужно поделить $6!$ на число вращений куба. Сколько же их?

Возьмём «верхнюю» грань куба. При вращении она может оказаться на месте одной из шести граней (включая себя). Теперь посмотрим на одну из граней, соседних с ней. При вращении та может перейти в одну из четырёх граней, соседних с той, на месте которой оказалась верхняя. Заметим, что положение этих двух граней (для которого есть ровно 24 варианта) однозначно определяет положение всех остальных. Поэтому ответ на задачу — $\frac{6!}{24} = 30$.

Задача 3. Не модельная, а модальная!

Пусть есть событие X, которое может происходить или не происходить в зависимости от того, какой сегодня день. Например, событие $X =$ «сегодня суббота» случается раз в семь дней, а событие «сегодня я смотрел на часы» — каждый день.

A. Фраза $\square\triangledown X$ означает дословно следующее: для каждого дня, начиная с сегодняшнего, в какой-то момент после него случится событие X. То есть, из какого дня вперёд ни посмотри — там, в будущем, обязательно хотя бы единожды случится событие X. На самом деле эта фраза эквивалентна следующей: «в бесконечное количество дней после сегодняшнего произойдёт событие X».

Очевидно, что $\square\triangledown$ сегодня суббота — верно: после любого дня когда-то в будущем обязательно наступит суббота.

B. Докажем, что из первой фразы следует вторая. Действительно: первая утверждает, что $\triangledown\square X$ верно для любого дня, начиная с сегодняшнего — в том числе и для сегодняшнего.

Теперь докажем, что из второй фразы следует первая. Вторая фраза означает: начиная с какого-то дня в будущем (назовём его $\boldsymbol{D}$) каждый день будет происходить событие X. Зная это, нам нужно доказать $\square\triangledown\square X$: для каждого дня d указать такой день после него, начиная с которого X выполняется каждый день.

Так вот если d раньше $\boldsymbol{D}$, то $\boldsymbol{D}$ подойдёт в качестве искомого дня. Если же $\boldsymbol{D}$ раньше d, то после самого d событие X выполняется каждый день — возьмём d в качестве искомого дня.

C. Легко убедиться, что $\square X$, $\triangledown X$, $\square\triangledown X$ и $\triangledown\square X$ — попарно неэквивалентные фразы. Пусть X_1 — «сегодня не 1 января 2000 года», X_2 — «сегодня у Пети Иванова последний звонок в школе», X_3 — «сегодня День рождения Пети Иванова», X_4 — «Пете Иванову уже исполнилось 18 лет»; достаточно проверить, что все X_i делают верными разные наборы утверждений.

Теперь докажем, что любая фраза с более длинной приставкой из $\square$ и $\triangledown$ эквивалентна одной из приведённых ранее. Понятно, что $\square\square$ и $\triangledown\triangledown$ в любом месте приставки можно заменить на соответственно $\square$ и $\triangledown$ без изменения смысла фразы. Значит, мы можем рассматривать только фразы, в приставке которых идёт не более одного квадратика / треугольничка подряд.

Согласно пункту B, $\square\triangledown\square$ можно заменить на $\triangledown\square$ без изменения смысла фразы. Аналогично, $\triangledown\square\triangledown$ можно заменить на $\square\triangledown$. Поэтому любую приставку мы можем сократить до содержащей не более двух символов — а все такие мы уже перечислили.

Задача 4. Фургончик

A. Мы знаем, что $(p_1+1)(p_2+1) = p_1p_2+15$. Если раскрыть скобки, получается $p_1+p_2 = 14$. Единственные простые числа, подходящие под это условие, — 11 и 3. Это и есть ответ.

B. Для того, чтобы выяснить, какие ноги ещё не были переставлены, нам нужно отыскать все нечётные числа между 2 и 40, не делящиеся на 3. Это 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 25, 29, 31, 35, 37. Проверить, что мы выписали все нужные числа, несложно — достаточно посмотреть на их остатки при делении на 6: числа должны иметь вид $6k-1$ или $6k+1$ (остальные остатки от деления на 6 либо чётные, либо 3). Получилось 12 чисел — это ответ на задачу.

C. Будем измерять расстояние, которое проехал Саша за день, не в километрах, а в метрах. Понятно, что расстояние между A и G равно сумме со знаками + или − расстояний между городами, которые указаны в задаче. Осталось только заметить, что все расстояния в метрах (12000, 18000, 10500, 19500, ...) делятся на 3, а их предполагаемая сумма — 41000 — почему-то нет. Значит, в атласе дана неверная информация.

Задача 5. Необходимости и достаточности

A. Скорость мышки равна $10 \cdot 35 = 350$ см/с, а скорость кошки — $55 \cdot 9 = 495$ см/с. Несомненно, кошка быстрее.

B. Сколько вылетов нужно сделать винтовому самолёту? Каждого Йожина надо осыпать трижды — получается 300 осыпаний. Каждый вылет даёт два осыпания — поэтому нужно 150.

А реактивному? Аналогичным образом получаем $100 \cdot 8 \div 5 = 160$ вылетов. Таким образом, винтовой самолёт на 10 вылетов эффективнее.

C. Обозначим через x_k массу еды, которая была в наличии у велосипедистов *перед k*–ым обедом. Мы знаем, что $x_{31} = 0$, и ищем x_1. Давайте выразим x_k через $x_k + 1$. В соответствии с условием задачи,

$$x_k \quad = \quad \underbrace{0.1 \cdot x_k + 2}_{\text{съедят за } k\text{–ым обедом}} \quad + \quad x_{k+1}.$$

Откуда

$$x_k = \frac{20}{9} + \frac{10}{9} x_{k+1};$$

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{20}{9} + \frac{10}{9} \cdot \frac{20}{9} + \left(\frac{10}{9}\right)^2 \cdot x_3 = \\ &= \frac{20}{9} + \frac{10}{9} \cdot \frac{20}{9} + \ldots + \left(\frac{10}{9}\right)^{28} \cdot \frac{20}{9} = \\ &= \frac{20}{9} \cdot \frac{\left(\frac{10}{9}\right)^{29} - 1}{\frac{10}{9} - 1} \text{ — это ответ на задачу.} \end{aligned}$$

Задача 6. Где-то я это уже видел

A. Первое число в дате (оно соответствует дню в месяце) меняется от 1 до 31, а второе (соответствует месяцу) — от 1 до 12. С другой сторооны, как мы знаем, часы пронумерованы от 0 до 23, а минуты — от 0 до 59.

Таким образом, днём в месяце и одновременно часом могут быть числа от 1 до 23, а месяцем и одновременно минутой — от 1 до 12. Кроме того, в каждом месяце точно есть хотя бы 23 дня.

Поэтому ответ — $23 \cdot 12 = 276$.

B. Давайте всегда использовать «развёрнутую» дату. Тогда любой месяц (от 1 до 12) может стоять на месте часа, а любой день (от 1 до 31) на месте минуты. Ответ — все дни в году.

C. Есть всего 12 букв русского алфавита, похожих на буквы английского алфавита (ГОСТ Р 50577-93):

А, В, **Е**, К, М, Н, **О**, Р, С, Т, Х, **У**.

Жирным мы отметили гласные — их всего 4; соответственно, согласных 8. Выбрать сочетание «гласная-согласная-согласная» можно $4 \cdot 8 \cdot 8$ способами, а «гласная-гласная-согласная» — $4 \cdot 4 \cdot 8$ способами. Вариантов для числа на номере всегда ровно 1000 — от 000 до 999.

Когда гласная одна, она может стоять на одном из трёх мест, поэтому ответ в таком случае будет равен

$$3 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 1000.$$

Когда гласных две, согласная может стоять на одном из трёх мест. Поэтому ответ —

$$3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 1000.$$

Задача 7. Рукопожатия

A. Давайте «расклеим» восьмёрку, превратив её в обычный круглый хоровод — тогда существо, стоящее в центре восьмёрки, «продублируется». Если оно было крабом, то получится хоровод из 19 крабов и 17 пауков; в противном случае — 18 крабов и 18 пауков. Если в круговом хороводе крабов больше, чем пауков, то какие-то два краба неизбежно будут держаться за лапы, что запрещено.

Отсюда можно заключить, что в центре стоял паук. Придумать хоровод, соответствующий условию, с пауком в центре не представляет ни малейшего труда.

B. Могло оказаться так, что ровно один человек в компании выиграл машину. Построим соответствующий пример. Возьмём «победителя» — у него есть пять друзей. У каждого из них есть ещё по четыре друга (кроме выигравшего машину), пусть все эти друзья различны. $1 + 5 + 4 \cdot 5$ — у нас получилось 26 человек, от каждого из которых не более чем два рукопожатия до выигравшего машину человека.

Однако, для того чтобы довести пример до конца, нам надо установить дружеские связи между людьми, у которых их пока меньше 5 — а именно, между теми, от кого до победителя лотереи два рукопожатия (их 20 человек). Каждому из них нужно «изобрести» ещё по 4 друга.

Поступим просто: поставим эти 20 человек по кругу в произвольном порядке и назначим друзьями каждого двух его правых соседей и двух его левых соседей. Задача решена.

C. Пусть внутренних рейсов в Авиаландии ровно M, а международных из неё — ровно N. Каждый внутренний рейс имеет в Авиаландии два «конца», а каждый международный — только один. Всего в города Авиаландии прибывает $5 \cdot 6 = 30$ рейсов. Получаем

$2 \cdot M + N = 30.$

Отсюда N должно быть чётным числом (так как $2 \cdot N$ — чётное).

Задача 8. Напрасно называют север крайним

A. Это задача–шутка: принималось большинство ответов, хотя, например понятно, что туристическая группа на 10–градусном морозе отморозит себе половину ног, а на 20–градусном — все.

B. Все долготы Земного шара оказываются очень близко друг к другу около полюсов. Так что, возможно, Мюнхгаузен просто обошёл по кругу (скажем, километровому) Северный или Южный полюс.

C. Пусть четыре города — B, C, D и E расположены очень близко друг к другу — попарно на расстоянии в один километр. А пятый город — A — очень далеко, в 100 километрах. Пусть больше нет никаких городов. Тогда A должен быть соединён дорогой с какими-то из четырёх оставшихся городов, но ни один из тех городов не должен быть соединён с A.

Задача 9. Прогрессивное сложение

A. $95500 > 50095$.

B. Если ни одно из трёх чисел P, Q, R не является префиксом другого, то всё просто: надо отсортировать числа лексикографически и сложить в порядке «от большего к меньшему». Если одно из чисел — префикс другого (например, P — префикс Q), то всё не так однозначно: надо сравнить их общую первую цифру и первую цирфу Q, следующую за вхождением P в Q. Если второе больше, то надо ставить Q перед P, иначе — P перед Q.

Если P — префикс Q, которое, в свю очередь, является префиксом R, или P и Q — различные префиксы R, действовать следует аналогично.

C. Нет, так не бывает:

$$P \oplus Q \;=\; P \cdot \underset{n \geq 1}{10^n} + Q \;>\; P + Q.$$

Задача 10. У магазина

A. Понятно, что Фёдор и Кирилл увеличивают все числа в одинаковое число раз. И „144“, названное Фёдором, есть квадрат этого числа (так как он назвал то, во сколько раз увеличивает всё Кирилл, сам увеличив это число). Тогда оба продавца умножают всё на 12.

Соответственно, учебник стоит $43200 \div 144 = 300$ рублей — так как его цена прошла через уста, опять же, обоих продавцов.

B. Делимость на 99 значит делимость на 9 и на 11. Восстановить стёртую цифру можно почти однозначно, посчитав сумму оставшихся цифр и найдя остаток от деления её на 9. Проблема может возникнуть, если сумма оставшихся на номере цифр делится на 9 — тогда непонятно, 0 нам ставить на пустое место или 9.

Признак делимости на 11 говорит нам, что знакопеременная сумма цифр числа должна делиться на 11. Заметим, что при постановке цифр 9 и 0 на одно и то же место не может оказаться так, что оба результата будут делиться на 11. Поэтому получится однозначный ответ.

C. То, как происходит торг между продавцом и покупателем, на самом деле, повторяет работу алгоритма Евклида. Алгоритм Евклида всегда завершается — значит и торг завершится.

При этом на каждом шаге торга хотя бы одна из названных цен уменьшается хотя бы на 1, поэтому в любой момент времени количество шагов торга оценивается сверху суммой цен, называемых покупателем и продавцом. Поэтому количество шагов всегда будет строго меньше суммы текущих чисел.

Пусть изначально названы цены a и $b = a + t$. Тогда на следующем шаге торга будут названы цены a и t. Тогда количество шагов торга строго меньше, чем

$$a + t \underbrace{+1}_{\substack{\text{один шаг}\\\text{уже сделан}}} = b + 1 \leq 21.$$

Торг с 20 шагами легко придумать: пусть изначально были названы цены 1 и 20.

Задания 2012 года

Задачи 5 класса.

Задача 4.

A. Старуха Шапокляк очень любит животных. Все ее животные, кроме двух, — собаки, все, кроме двух, — кошки, и все, кроме двух, — попугаи, остальные — крыски. Сколько каких животных у старухи Шапокляк?

Решение: Пусть у Шапокляк s собак, c кошек, p попугаев и k крысок. Тогда

$$\begin{cases} c+p+k=2 \\ s+p+k=2 \\ s+c+k=2 \end{cases}$$

Вычитая эти равенства друг из друга, можно получить, что $s=c=p$. Более того, эти три числа обязаны не превосходить 1, потому что иначе суммы в левой части равенств будут больше двух.

Первый случай: $s=c=p=0$. Тогда у Шапокляк две крыски, а других животных нет. Второй случай: $s=c=p=1$. Тогда у шапокляяк одна собака, одна кошка и один попугай, а крыс нет.

Оба ответа являются верными — более того, для получения полного балла за задачу оба должны быть приведены.

B. Четверо пятиклассников Андрей, Борис, Вася и Гена решили определить свой вес. Однако все четверо мальчиков на весы не помещались, поэтому они стали взвешиваться по трое или по двое. Оказалось, что Андрей, Боря и Вася вместе весят 90 кг, Боря, Вася и Гена — 92 кг, а Андрей и Гена — 58 кг. Сколько весят все мальчики вместе?

Решение: Давайте сложим четыре результата, которые получились у мальчиков в условии задачи. Заметим, что тогда получится дважды вес всех мальчиков вместе, и он равен 240 кг. Значит, мальчики вместе весят 120 кг.

Задача 5.

B. С 1 января цена билета в кинотеатр возросла по сравнению с декабрем на 20%, а выручка от продажи билетов возросла на 14%. Как изменилась посещаемость кинотеатра? Увеличилась или уменьшилась?

Решение: Если бы посещаемость кинотеатра не изменилась, то выручка бы увеличилась так же, как и цена билета — на 20 процентов. Однако общая выручка уменьшилась — значит, посетителей стало приходить меньше. Можно даже посчитать, насколько меньше: $\frac{1.14}{1.20}=0.95$ — то есть, в кинотеатр теперь ходит 95% от прежнего количества посетителей.

C. В мешке у Деда Мороза лежат 10 красно-синих (т.е. одна половина красная, а другая — синяя), 7 сине-зеленых, 5 зелено-красных шаров. Какое наименьшее число шаров должен вынуть из мешка Дед Мороз, чтобы нашелся такой цвет, который будет присутствовать в окраске не менее чем в пяти из вынутых шаров?

Решение: Что означает, что нашёлся цвет, присутствующий в окраске пяти шаров? Это означает, что нашлись два сорта шаров (например, красно-зелёные и сине-зелёные), шаров из которых *в сумме* хотя бы пять.

Пусть Дед Мороз вынул пять шаров. Среди них должны присутствовать все три имеющихся типа, иначе есть два, которые в сумме дадут вынутые пять. Значит, шары распределены по типам как 2-2-1 или 3-1-1. Во втором случае какой шар ни возьми следующим — первый и второй или первый и третий типы в сумме дадут 5.

В первом случае можно взять ещё один шар третьего типа, а следующий, седьмой, уже даст нам пять шаров в сумме у двух типов.

Ответ — 7 шаров.

Задача 6.

A. Дед рассказывал своим внучатам: «В комнате стояло 5 стульев. На них сидели 4 матери, 4 дочки, 3 бабушки, 2 прабабушки и 1 прапрабабушка. При этом каждая из них сидела на отдельном стуле.» «Это невозможно», — возразили внучата. «Я сам видел», — ответил дед. Правду ли сказал дед внучатам?

Решение: Как ни странно, дед не соврал. Представим себе пять женщин: $^{(1)}$совсем девочка, $^{(2)}$её мама, $^{(3)}$её бабушка, $^{(4)}$её прабабушка, $^{(5)}$её прапрабабушка.

Дочерьми здесь являются четверо: (1)–(4), и матерями тоже четверо: (2)–(5). Трое, (3)–(5), — бабушки; двое, (4)–(5), — прабабушки; одна прапрабабушка.

C. Буратино не хотел ходить в школу, и черепаха Тортилла решила его проучить. Она не просто отдала ему Золотой ключик, а задала ему непростую задачу. Она вынесла три коробочки: красную, синюю и зеленую. На красной коробочке было написано «Здесь лежит Золотой ключик», на синей — «Зеленая коробочка пуста», а на зеленой — «Здесь сидит гадюка». Тортилла прочитала надписи Буратино и сказала: «Действительно, в одной коробочке лежит Золотой ключик, в другой — сидит гадюка, а третья коробочка пуста, но все эти надписи неверные». Где лежит Золотой ключик?

Решение: Надпись на синей коробочке неверна — значит, зелёная коробочка непуста. И надпись на зелёной коробочке неверна — значит, в ней не гадюка. Отсюда в зелёной коробке лежит Золотой ключик.

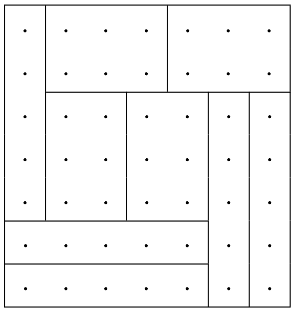
Задачи 6 класса.

Задача 2.

B. Гастрабайтер Гаджи хочет замостить квадратную комнату 7×7 метров панелями 1×5 и 2×3 метров. Сколько панелей ему понадобится? Приведите пример такого замощения. Может ли он обойтись другим количеством панелей?

Решение: Разберёмся сначала с количеством панелей. Пусть есть замощение с A панелями 1×5 и B панелями 2×3. Тогда число $49 - 5A$ должно делиться на 6 — в частности быть чётным. Среди всех чётных чисел, получающихся как $49 - 5A$ (4, 14, 24, 34, 44) на 6 делится только 24. Таким образом, замощение может состоять исключительно из 5 панелей 1×5 и 4 панелей 2×3.

Зная это, придумать замощение несложно:



С. У Карлсона было 20 банок варенья. Он расставил их на трех полках так, что на каждой полке стояло одинаковое количество литров варенья. На первую полку Карлсон поставил одну большую и четыре средних банки варенья, на вторую — две большие и шесть литровых банок, на третью — одну большую, три средних и три литровых банки. Сколько литров варенья было у Карлсона?

Решение: Сравним первую и третью полки Карлсона. На первой четыре средних банки, а на третьей — три средних и ещё три литра. Значит, в одной средней банке три литра варенья. Соответственно, в трёх средних банках — девять литров.

Теперь сравним вторую и третью полки. На третьей — одна большая банка и ещё 12 литров варенья. На второй — две больших и ещё 6 литров. Значит одна большая банка содержит в себе 6 литров варенья.

Таким образом, на второй полке $2 \cdot 6 + 6 = 18$ литров варенья — и столько же на на первой, и столько же на третьей. Значит, у Карлсона 54 литра варенья.

Задача 3.

С. Мальчик Вовочка записал в строчку один за другим 10 первых простых чисел в возрастающем порядке (единица не считается простым числом). Мальчик Дима сначала вычеркнул половину цифр в полученном числе так, что получилось наибольшее число, а затем снова из этого же числа вычеркнул половину цифр так, что получилось наименьшее число. На сколько наибольшее число больше наименьшего?

Решение: Выпишем строку, полученную Вовочкой:

$$2357111317192329.$$

В ней 16 цифр, значит вычеркнуть надо 8. Первая цифра числа, которе мы получим, лежит среди первых 9 цифр строки — чтобы получить наибольшее число, мы должны максимизировать её. Подойдёт 7. Продолжая тем же образом, получим, что наибольшее число, которое мог получить Дима, —

$$77192329,$$

а наименьшее —

$$11111232.$$

Их разность равна 66081097.

Задача 7.

В. Винни-Пух и Пятачок одновременно отправились в гости к друг другу. Но поскольку Винни-Пух всю дорогу сочинял очередную «шумелку», а Пятачок считал пролетавших галок, они не заметили друг друга при встрече. После встречи Пятачок подошел к дому Винни-Пуха через четыре минуты, а Винни-Пух подошел к дому Пятачка через одну минуту. Сколько минут был в пути каждый из них?

Решение: Пусть $v_{\text{В}}$ — скорость Винни-Пуха, $v_{\text{П}}$ — скорость Пятачка, а t — время от их выхода из дома до встречи. Тогда из условия задачи ясно, что расстояние между домами Винни-Пуха и Пятачка выражается как

$$S = (t+1)v_{\text{В}} = (t+4)v_{\text{П}} = t(v_{\text{В}} + v_{\text{П}}).$$

Рассмотрим вторую и четвёртую части этого равенства:

$$\begin{aligned}
&tv_{\text{В}} + 1 \cdot v_{\text{В}} = tv_{\text{В}} + tv_{\text{П}} \\
&1 \cdot v_{\text{В}} = tv_{\text{П}} \\
&\frac{v_{\text{В}}}{v_{\text{П}}} = \frac{t}{1}
\end{aligned}$$

Теперь, зная это, разберёмся со второй и третьей частями:

$$\begin{aligned}
&(t+1)tv_{\text{П}} = (t+4)v_{\text{П}}, \quad t > 0 \\
&t(t+1) = t+4 \\
&t^2 = 4 \implies t = 2.
\end{aligned}$$

Таким образом, Винни-Пух был в пути 3 минуты, а Пятачок — 6 минут.

Задача 8.

А. Может ли какая-нибудь степень двойки содержать в своей записи поровну нулей, единиц, двоек, ..., девяток?

Решение: Пусть каждая из цифр встречается в этой степени двойки по k раз. Тогда сумма цифр степени двойки равна $k(0 + \ldots + 9) = k \cdot 45$. То есть, по признаку делимости на 3, степень двойки делится на 3. Такого не может быть — получили противоречие.

В. Однажды перед сном мальчик Вовочка просчитал вслух от одного до тысячи. Сколько слов произнес Вовочка? Каждое слово считается столько раз, сколько оно произнесено.

Решение: Пусть D — количество слов, которое нужно произнести, чтобы посчитать от 1 до 99. Тогда всего Вовочка произнёс $10D + 900 + 1$ слов: в каждой стоне нужно посчитать от 1 до 99, плюс 900 трёхзначных чисел дают по одному слову для обозначения сотен, плюс слово «тысяча».

Осталось найти D. 27 чисел требуют одно слово для произнесения: 1, 2, 3, ..., 19, 20, 30, 40, ..., 80, 90. Все остальные — а их $99 - 27 = 72$ — по два слова. Отсюда

$$\begin{aligned}
&D = 72 \cdot 2 + 27 = 171; \\
&10D + 901 = 2611.
\end{aligned}$$

Задачи 7 класса.

Задача 1.

A. Существуют ли два таких натуральных числа, наибольший общий делитель которых равен 110, а наименьшее общее кратное равно 2000?

Решение: Таких чисел, конечно же, не существует, ведь наименьшее общее кратное всегда делится на наибольший общий делитель — а 2000 не делится на 110.

B. Вовочка умножил два подряд стоящих натуральных числа и получил число, состоящее из цифр 1, 3, 4, 5, 7, 8 и 9. Покажите, что Вовочка ошибся.

Решение: $1+3+4+5+6+7+8+9 = 45-2 = 43$ — имеет остаток 1 при делении на 3. Значит, в соответствии с признаком делимости на 3, число, составленное из этих цифр, также будет иметь остаток 1. Произведение же двух последовательных натуральных чисел может иметь либо остаток 0 ($0 \cdot 1 = 2 \cdot 0 = 0$), либо остаток 2 ($1 \cdot 2 = 2$). Поэтому Вовочка неправ.

C. Существуют ли 2012 ненулевых числа, никакие два из которых не равны между собой, таких, что их сумма равна их произведению?

Решение: Укажем, как построить набор из таких чисел: он будет иметь вид

$$1, 2, 3, 4, \ldots, 2011, x;$$

$$1+2+3+\ldots+2011+x = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2011 \cdot x.$$

Чтобы выполнить условие задачи, нужно взять x, равный

$$\frac{1+2+3+\ldots+2011}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2011 - 1}.$$

Это число строго меньше единицы (очевидно), поэтому не будет совпадать ни с одним из взятых до него.

Задача 2.

A. Прямоугольник разрезами, параллельными его сторонам, разбит на 4 маленьких прямоугольника. Площади трех из них известны. Это 3, 4, 5. Найдите площадь четвертого.

Решение: Ответ в этой задаче зависит от того, какой из прямоугольников, площадь которого известна, находится «между» двумя другими:

4	3
$5 \cdot \frac{4}{3} = \frac{20}{3}$	5

3	4
$5 \cdot \frac{3}{4} = \frac{15}{4}$	5

3	5
$4 \cdot \frac{3}{5} = \frac{12}{5}$	4

B. Мальчики Вова и Дима купили по одной новогодней открытке и каждый разрезал свою открытку на два прямоугольника равной площади. Один из прямоугольников мальчики выбросили, а другой оставили себе. Оказалось, что периметр Вовиного прямоугольника равен 14 см, периметр Диминого — 19 см. Найдите периметр и стороны прямоугольной открытки у каждого из мальчиков.

Задача 3.

A. Не используя технические средства, сравните дроби

$$\frac{2012}{2013} \quad \text{и} \quad \frac{2012000000002012}{2013000000002013}.$$

Решение: Эти дроби равны между собой: вторая получается из первой домножением числителя и знаменателя на 1000000000001.

Задача 4.

A. Какую четверку цифр надо приписать справа к числу 2012, чтобы полученное восьмизначное число делилось на 2013?

Решение: Очевидно, что числа 20130000 и 2013 делятся на 2013. Вычитая их друг из друга, получим все возможные ответы:

$$\begin{aligned}
&20130002013 = 20127987\\
&2013000 - 2 \cdot 2013 = 20125974\\
&2013000 - 3 \cdot 2013 = 20123961\\
&2013000 - 4 \cdot 2013 = 20121948
\end{aligned}$$

C. Произведение шести последовательных натуральных чисел может быть равно произведению трех последовательных натуральных чисел. Например,

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 8 \cdot 9 \cdot 10 = 720.$$

Есть ли еще такие числа?

Решение: В задаче требуется найти числа x, y такие, что

$$x(x+1)\ldots(x+5) = y(y+1)(y+2).$$

Частично раскроем скобки в этом выражении —

$$(x^2+5x)(x^2+5x+4)(x^2+5x+6) = y(y+1)(y+2).$$

Отсюда

$$x^2+5x < y < x^2+5x+4.$$

Для переменной y остаётся три варианта — $x^2+5x+1, x^2+5x+2, x^2+5x+3$. Подставив каждый из этих вариантов в правую часть, можно убедиться, что решений для $x > 1$ у уравнения не будет.

Задача 5.

C. Вдоль прямолинейной аллеи городского парка растет 5 деревьев. Известны 8 из 10 попарных расстояний между ними: 1 м, 1 м, 2 м, 2 м, 3 м, 3 м, 3 м, 4 м. Найдите два остальных расстояния.

Решение: Очевидно, что все попарные расстояния между деревьями целые — в том числе остальные два: в противном случае не-целых расстояний было бы больше, чем два. Значит, мы можем считать, что все деревья расположены в целых точках вещественной оси.

Некоторые из самых маленьких расстояний среди перечисленных являются расстояниями между соседними деревьями — два однометровых расстояния точно такие. Может быть так, что метровые промежутки между деревьями являются соседними ($a \xleftrightarrow{1\,\text{м}} b \xleftrightarrow{1\,\text{м}} c$), а может, что и нет.

В первом случае одно из двухметровых расстояний получается как сумма однометровых. У оставшегося двухметрового расстояния не остаётся других вариантов, кроме как быть длиной промежутка между соседними деревьями.

Если это два дерева, отличные от a, b, c, то получается следующая ситуация:

$$a \xleftrightarrow{1\,\text{м}} b \xleftrightarrow{1\,\text{м}} c \qquad d \xleftrightarrow{2\,\text{м}} e.$$

Тогда $cd = 3$ м, и другие трёхметровые расстояния нам попросту никуда не вписать.

Если одно из этих двух деревьев — a или c, то получаем однозначный вариант:

$$d \xleftrightarrow{2\,\text{м}} a \xleftrightarrow{1\,\text{м}} b \xleftrightarrow{1\,\text{м}} c \xleftrightarrow{3\,\text{м}} e,$$

Который, очевидно, не удовлетворяет условию задачи.

Во втором случае двухметровые расстояния также являются расстояниями между соседними деревьями. Это даёт нам однозначный с точностью до симметрии ответ: деревья стоят в точках 0, 1, 3, 4, 6, и оставшиеся два расстояния — 5 и 6.

Задачи 8 класса.

Задача 3.

B. Натуральные числа m, n удовлетворяют равенству

$$(m-n)^2 = \frac{4mn}{m+n-1}.$$

Докажите, что $m+n$ – квадрат натурального числа.

Решение: По условию задачи,

$$(m-n)^2(m+n-1) - 4mn = 0.$$

Продолжим цепочку равенств:

$$\begin{aligned}&(m-n)^2(m+n-1)-4mn=\\&=m^3+n^3-m^2n-mn^2-m^2-2mn-n^2=\\&=(m+n)(m^2-mn+n^2)-mn(m+n)-(m+n)^2=\\&=(m+n)(m-n)^2-(m+n)^2.\end{aligned}$$

Отсюда можно понять, что число $m+n$ является отношением двух квадратов а, значит, и само квадрат.

C. Вещественные числа x, y удовлетворяют соотношениям

$$x^2+xy+y^2=4 \quad \text{и} \quad x^4+x^2y^2+y^4=8.$$

Найти значение выражения $x^6+x^3y^3+y^6$.

Решение:

$$\begin{cases}(x+y)^2-xy=4\\(x+y)^4-4xy(x+y)^2+2(xy)^2=8\\ \textit{Найти } (x+y)^6-6xy(x+y)^4+9(xy)^2(x+y)^2-(xy)^3\end{cases}$$

$$\begin{cases}T_1-T_2=4 \qquad (T_1=T_2+4)\\T_1^2-4T_1T_2+2T_2^2=8\end{cases}$$

$$\begin{aligned}&(T_2+4)^2-4(T_2+4)T_2+2T_2^2=8\\&-T_2^2-8T_2+8=0\\&T_2=-4\pm2\sqrt{6} \qquad (T_1=\pm2\sqrt{6})\end{aligned}$$

Теперь мы знаем сумму и произведение x и y. Можно как подставить значения T_1 и T_2 в выражение в первой системе, равное исходному, так и явно найти x, y и посчитать нужное выражение для них.

Задача 4.

A. Какое из чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 надо выбросить, чтобы сумма квадратов из трёх оставшихся чисел оказалась равной сумме квадратов других трёх оставшихся чисел?

Решение: Сейчас у нас есть семь «подозреваемых» чисел, которые можно выкинуть. Давайте сократим их количество. Заметим, что если две суммы чисел равны, то они равны и по модулю 2, и по модулю 3. Выпишем остатки от деления квадратов чисел 1–7 на 2 и на 3 и посмотрим, какой из них нужно выкинуть, чтобы можно было поделить оставшееся на две части.

x	1	**2**	3	**4**	5	6	7
$x^2 \bmod 2$	1	**0**	1	**0**	1	0	1
$x^2 \bmod 3$	1	**1**	0	**1**	1	0	1

Легко понять, что надо сверху выкинуть ноль (чтобы сумма оставшихся чисел была чётна), а снизу единицу. То есть, либо 2^2, либо 4^2.

Сумма $1^2 + \ldots + 7^2$ равна 140. $\frac{140-4}{2} = 68$, $68 - 49 = 19$ — двумя из трёх квадратов, которые мы поместим вместе с 49, нельзя собрать 19 (потому что 19 вообще не получается как сумма двух квадратов), поэтому вариант с выкидыванием двойки не подходит.

Наконец, $\frac{140-16}{2} = 62$, $49 + 9 + 4 = 62 = 36 + 25 + 1$. Это и есть ответ.

C. Найдите все пары (x, y) неотрицательных целых чисел, удовлетворяющих равенству

$$x - y = x^2 + xy + y^2.$$

Решение: Заметим, что при $x \geq 2$ правая часть строго больше x, а левая — не больше его. Значит, $x = 0$ или $x = 1$. Если $x = 0$, то $-y = y^2$, $y = 0$. Если $x = 1$, то $1 - y = y^2 + y + 1$, $y(y + 2) = 0$, $y = 0$.

Ответ: $(0, 0)$, $(1, 0)$.

Задача 7.

A. У бизнесмена Березова было предприятий в 3 раза меньше, чем у бизнесмена Романова. Если бы Березов отсудил еще столько же предприятий у Романова, сколько имел, то у них обоих число предприятий стало бы одинаково. Сколько предприятий было у бизнесмена Романова?

Решение: Любое число предприятий, кратное трём.

Действительно, если у Романова сейчас $3x$ предприятий, то у Березова x. И если Березов отсудит x предприятий у Романова, то у обоих станет поровну — по $2x$. И этот результат не зависит от конкретного x, то есть, рассуждения можно проделать при любом его значении.