Задачи 7 класса

Задача 1.

A. Заяц убегает от Волка, который находится от него на расстоянии 100 м. Один прыжок Зайца равен 2 м, а Волка — 3 м. Пока Волк делает 4 прыжка, Заяц делает 5 прыжков. За сколько своих прыжков Волк догонит Зайца?

Решение: $4 \cdot 3 = 12$, $5 \cdot 2 = 10$ — отсюда за четыре волчьих прыжка расстояние между Зайцем и Волком сокращается на 2 м. Значит, Волку потребуется

$$4 \cdot \frac{100}{2} = 200 \text{ прыжков.}$$

B. Вовочке известно, что 24 числа таковы, что среди их попаврных произведений ровно 100 отрицательных. Может ли Вовочка определить, сколько среди этих чисел положительны, сколько отрицательных и сколько нулей?

Решение: Количество отрицательных попарных произведений равно $P \cdot N$, где P — количество положительных чисел в наборе, N — количество отрицательных чисел в наборе.

Для того, чтобы установить P и N, нам нужно представить 100 в виде произведения двух чисел, сумма которых не превосходит 24. Способ сделать это ровно один — $P = 10$, $N = 10$.

Ответ: 10 положительных чисел, 10 отрицательных и 4 нуля.

C. Какое наименьшее число различных цифр нужно выбрать, чтобы любое число от 1 до 100 включительно можно было представить в виде суммы выбранных цифр, в которой каждую из них разрешается использовать не более четырёх раз?

Решение: Докажем, что четырьмя цифрами обойтись нельзя. Среди выбранных цифр, очевидно, должна быть единица. Единицей можно «набрать» числа от 1 до 4 — поэтому второе число, которое мы берём, не должно превосходить 5.

Добавив к нашему «черновику» набора самые большие цифры, 8 и 9, мы заметим, что

$$4 \cdot (1 + 5 + 8 + 9) = 92 < 100,$$

поэтому набор из четырёх цифр нам не подойдет.

А вот набора из пяти цифр — 1, 5, 6, 8, 9 — вполне хватит.

Задача 3.

A. Какой длины получится полоса, если 1 кубический километр разрезать на кубические метры и выложить их в длину?

Решение: $1\,\text{км}^3 = 1\,000\,000\,000\,\text{м}^3$ — поэтому полоса получится длиной

$$1\,000\,000\,000\,\text{м} = 1\,000\,000\,\text{км}.$$

B. Возьмём отрезок $[0,1]$. Отрежем от него четверть слева, потом четверть от оставшейся части справа, потом четверть от оставшейся части слева и т. д. Какая точка отрезка точно не будет отрезана?

Решение: На первом шаге мы отрезали слева кусок длиной $\frac{1}{4}$. На втором шаге, справа, — кусок длиной $\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}$. На третьем шаге, снова слева, — кусок длины $\frac{1}{4}\cdot(\frac{3}{4})^2$. Таким образом, на $2k-1$–м шаге мы будем отрезать с левой стороны оставшегося отрезка кусок длиной

$$\frac{1}{4}\cdot\left(\left(\frac{3}{4}\right)^2\right)^{k-1}.$$

Так можно посчитать длину всего, что будет отрезано слева:

$$\frac{1}{4}\cdot\left(1+\frac{9}{16}+\left(\frac{9}{16}\right)^2+\left(\frac{9}{16}\right)^3+\ldots\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-\frac{9}{16}}=\frac{4}{7}.$$

На $2k$–м шаге мы отрезаем с правой стороны кусок длиной

$$\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\left(\left(\frac{3}{4}\right)^2\right)^{k-1}.$$

Поэтому всего с правой стороны будет отрезано

$$\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{7}=\frac{3}{7}.$$

Таким образом, нетронутой будет оставаться единственная точка — $\frac{4}{7}$.