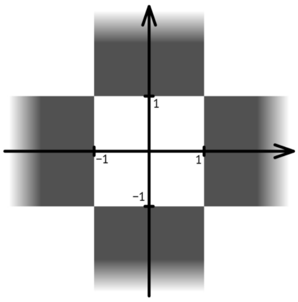
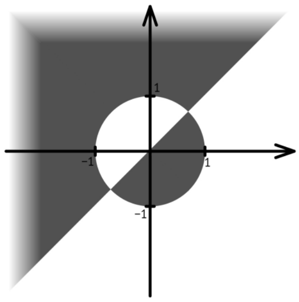
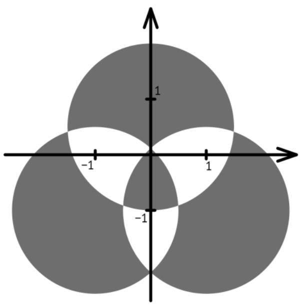
4. Множеством решений какого неравенства является (а) «крестик» на плоскости (б) фигура, полученная из круга и полуплоскости (смотреть рисунок)?

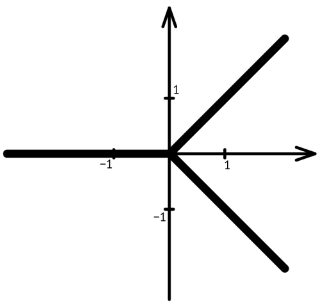


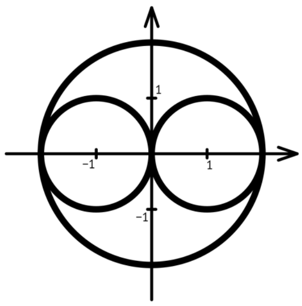


5. Множеством решений какого неравенства является фигура (смотреть рисунок), полученная из трех кругов радиуса 1.5 с центрами в точках $(1,\ -1)$, $(-1,\ -1)$, $(0,\ 0.5)$?



6. Множеством решений какого уравнения является (а) фигура из трех окружностей (б) фигура из трех лучей (смотреть рисунок)?



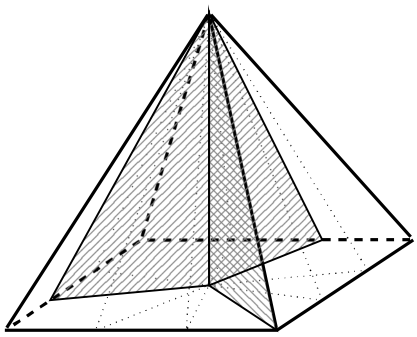


B. Смотреть рисунок справа.

C. Аналогично тому, что было проделано в первом пункте данной задачи, мы умеем резать квадрат на три многоугольника равной площади с равной длиной сторон, лежащих на сторонах квадрата.

Разрежем каждый квадратный «слой» пирамиды на три таких многоугольника одинаковым образом (с точностью до подобия). Тогда в объединении всех слоев получатся три многогранника одинакового объема, несущие на себе одинаковое количество краски («выходящие» на стороны пирамиды одинаковой площадью своей границы).

Смотреть рисунок:



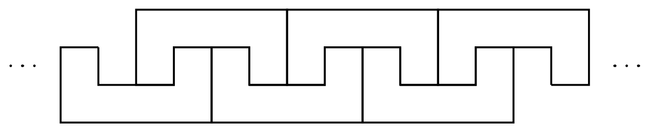
Задача 4. Летающий цирк

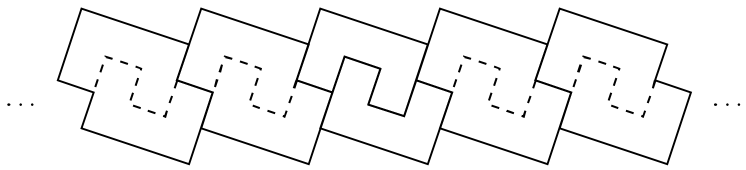
A. Все слова в этой задаче состоят из букв А, М, Р, С, Т. Постараемся соотнести эти буквы с действиями Лэмберта. Для этого составим таблицу: сколько каких букв находится в словах, адресованных Лэмберту.

	А	М	Р	С	Т
МАТРАС	2	1	1	1	1
СТАРТ	1	0	1	1	2
МАРС	1	1	1	1	0

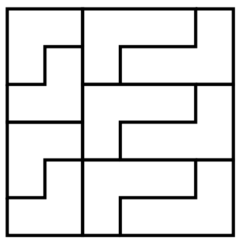
Услышав слово «МАТРАС», Лэмберт среди прочего поет два куплета из песни — значит, буква ‘А’ отвечает за куплеты. По аналогичным причинам (посмотрим, каких букв две в слове «СТАРТ»), ‘Т’ — это ноги в коробке. ‘М’ — это то, чего нет в слове «СТАРТ», но есть в «МАТРАС» — это надевание ведра.

ку вверх», этой лесенкой можно замостить плоскость, прикладывая край следующего её экземпляра к краю предыдущего.





C. Смотреть рисунок:



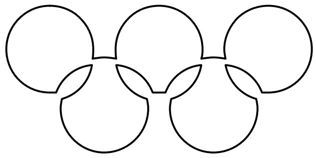
Задача 6. Ужасный гадкий аккуратный подсчет

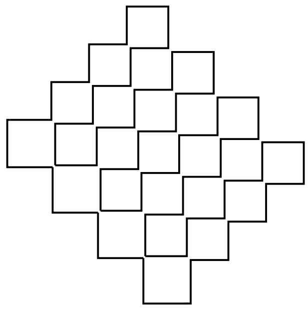
A. Квадратов 1×1 — $4 \cdot 5 = 20$ штук. Квадратов размером 2×2 найдется $3 \cdot 4 = 12$ штук. Квадратов 3×3 и 4×4 — 6 и 2 соответственно. Таким образом, всего квадратов

$$20 + 12 + 6 + 2 = 40.$$

Количество прямоугольников можно посчитать более рациональным способом: заметим, что прямоугольников размером $a \times b$ (где a — высота, b — ширина, то есть, мы различаем прямоугольники 2×3 и 3×2) можно найти ровно $(4 - a + 1) \cdot (5 - b + 1)$ штук. Число a меняется от 1 до 4 — отсюда $4 - a + 1$ меняется в тех же пределах. То же самое с $5 - b + 1$ — оно меняется от 1 до 5.

Отсюда можно заключить, что сумма чисел вида $(4-a+1)\cdot(5-b+1)$ при всевозможных a и b будет равна сумме всех чисел вида $a \cdot b$. Как посчитать сумму всех чисел вида $a \cdot b$? Заметим, что при раскрытии скобок в произведении





B. Обозначим количество узлов у треугольника Серпинского степени n через $T(n)$.

У треугольника степени 1 — три узла, $T(1) = 3$. Треугольник степени $k + 1$ получается из трех треугольников степени k поставновкой их друг на друга — при этом три пары узлов (посередине сторон нового треугольника) склеиваются в три узла. Таким образом,

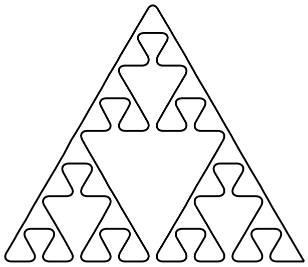
$$\begin{aligned} T(k) &= 3T(k-1) - 3 = \\ &= 3(3T(k-2) - 3) - 3 = \ldots = \\ &= 3^{k-1} \cdot T(1) - 3^{k-1} - 3^{k-2} - \ldots - 3 = \\ &= 3^k - 3^{k-1} - 3^{k-2} - \ldots - 3 = \\ &= 3^k - \frac{3^k - 1}{3 - 1} = \frac{3^k + 1}{2}. \end{aligned}$$

Посчитать количество отрезков в наклонном квадрате и того проще: они образуют $2n$ «лесенок», в каждой из которых по $2n$ отрезков. Поэтому ответом будет число $4n^2$.

C. Научиться рисовать треугольник Серпинского, не отрывая пера от бумаги, можно последовательно: сначала первую степень, потом вторую, потом третью...

Будем делать так: сначала будем, начиная с нижней стороны треугольника, рисовать все его «внутренности», а потом «замкнем» получающуюся картинку двумя верхними сторонами. При этом «внутренности» треугольника степени $n + 1$ — это трижды «внутренности» треугольника степени n.

Таким образом получится изображение треугольника степени 4:



а также любой другой степени, по аналогии.

Задача 4. Не модельная, а модальная!

A. Фраза $\Box\triangledown X$ означает дословно следующее: для каждого дня, начиная с сегодняшнего, в какой-то момент после него случится событие X. То есть, из какого дня вперед ни посмотри — там, в будущем, обязательно хотя бы единожды случится событие X. На самом деле эта фраза эквивалентна следующей: «в бесконечное количество дней после сегодняшнего произойдет событие X».

Очевидно, что $\Box\triangledown$ сегодня суббота — верно: после любого дня когда-то в будущем обязательно наступит суббота.

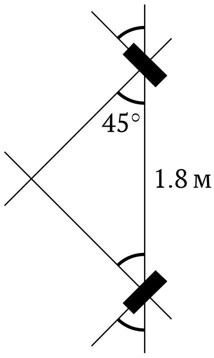
B. Докажем, что из первой фразы следует вторая. Действительно: первая утверждает, что $\triangledown\Box X$ верно для любого дня, начиная с сегодняшнего — в том числе и для сегодняшнего.

Теперь докажем, что из второй фразы следует первая. Вторая фраза означает: начиная с какого-то дня в будущем (назовем его $\boldsymbol{D}$) каждый день будет происходить событие X. Зная это, нам нужно доказать $\Box\triangledown\Box X$: для каждого дня d указать такой день после него, начиная с которого X выполняется каждый день.

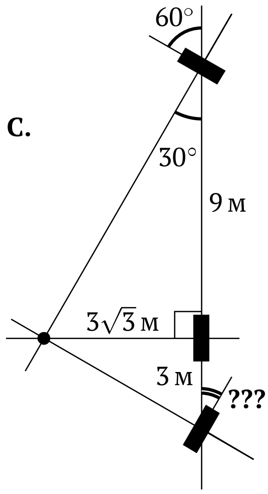
Так вот если d раньше $\boldsymbol{D}$, то $\boldsymbol{D}$ подойдет в качестве искомого дня. Если же $\boldsymbol{D}$ раньше d, то после самого d событие X выполняется каждый день — возьмем d в качестве искомого дня.

C. Легко убедиться, что $\Box X$, $\triangledown X$, $\Box\triangledown X$ и $\triangledown\Box X$ — попарно неэквивалентные фразы. Пусть X_1 — «сегодня не 1 января 2000 года», X_2 — «сегодня у Пети Иванова последний звонок в школе», X_3 — «сегодня день рождения Пети Иванова», X_4 — «Пете Иванову уже исполнилось 18 лет»; достаточно проверить, что все X_i делают верными разные наборы утверждений.

B.



C.



C. Аналогично первому пункту данной задачи, найдем расстояние от не поворачивающегося колеса до точки, вокруг которой ездит автобус. Оно равно $\frac{9}{\sqrt{3}} = 3\sqrt{3}$: опять же, мы, зная один из катетов прямоугольного треугольника с углом 60°, ищем другой.

Теперь заметим, что среднее и заднее колеса, а также точка, вокруг которой ездит автобус, образуют прямоугольный треугольник с катетами 3 и $3\sqrt{3}$ метра. Значит, его углы — 30 и 60 градусов. Отсюда заднее колесо нужно повернуть на 30 градусов.

Задача 6. Как провожают транспортеры...

A. Если наблюдатель движется со скоростью $\frac{1}{3}v$ навстречу транспортеру, собственная скорость которого равна $\frac{1}{6}v$, их скорость сближения равна $\frac{1}{2}v$ — то есть, для наблюдателя этот транспортер выглядит всего лишь в два раза медленннее, чем исходный.

В такой ситуации взрослый питон проехал бы мимо наблюдателя за 28 секунд. Но питон–детеныш короче, и для его проезда понадобится $28 \cdot \frac{3}{4} = 21$ секунда.

B. Чтобы не обманываться длинами кубиков (как это сделало большинство участников олимпиады), мы на время заменим их на передние их точки относительно движения транспортера. Расстояние между этими точками будет равно 15 сантиметров.

При попадании на более быстрый транспортер расстояние между этими точками увеличится вдвое и составит 30 см. Чтобы получить несчастья.

$$(3,0)(1-t)+(3,3)t=(9,1.5)(1-t)+(x,y)t$$

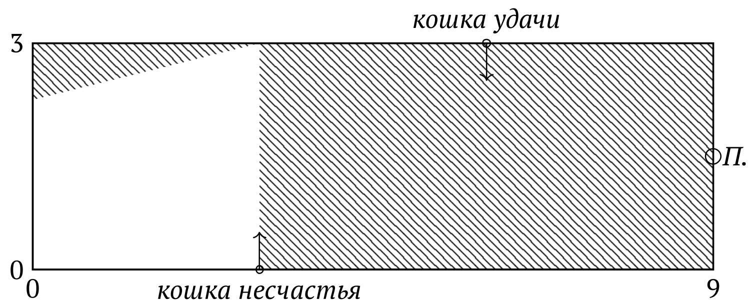
Отсюда можно выразить координаты (x,y) через параметр t (момент встречи):

$$\begin{cases} x(t)=\frac{3(3t-2)}{t} \\ y(t)=\frac{3(3t-1)}{2t} \end{cases}$$

И далее можно выразить y через x:

$$\begin{cases} t=\frac{6}{9-x} \\ y=\frac{x+9}{4} \end{cases}$$

Из изложенного ясно, что П. устроят все финишные точки, которые лежат слева от прямой $y=\frac{x+9}{4}$ внутри прямоугольника $[0,9]\times[0,3]$, а также все точки внутри прямоугольника $(3,9]\times[0,3]$.



По аналогии с кошкой несчастья, желание зарядиться от первой кошки удачей потребует от П., чтобы его финишные точки находились не правее линии $x=6$, но при этом не левее линии, получаемой из уравнения

$$(6,3)(1-t)+(6,0)t=(9,1.5)(1-t)+(x,y)t$$

или, после преобразований

$$\begin{cases} t=\frac{3}{9-x} \\ y=3-\frac{x}{2} \end{cases}$$

Построив пересечение этих двух областей, получим решение:

Как видите, четвертая строка состоит из нулей. Напишите такую же табличку для последовательности каких–нибудь фигурных чисел.

последовательность	a_0		a_1		a_2		a_3		a_4		a_5
разности		b_0		b_1		b_2		b_3		b_4	...
разности разностей			c_0		c_1		c_2		c_3	...	
разн. разностей разностей				0		0		0	...		

Докажите, что если есть произвольная последовательность a_n обладает тем свойством, что $\Delta c_n = 0$, где $\Delta a_n = b_n$ и $\Delta b_n = c_n$, то

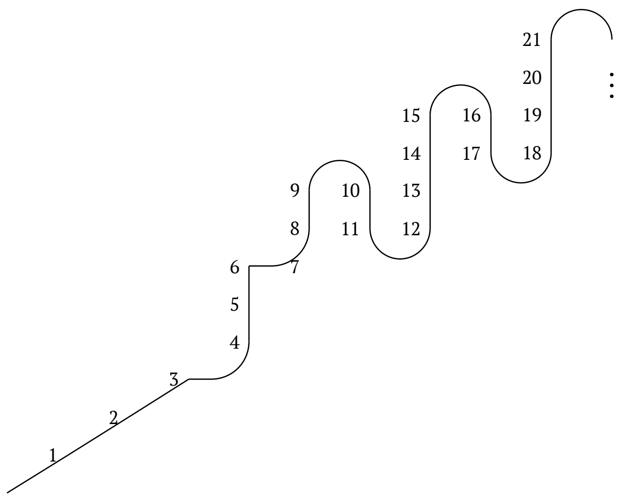
$$a_n = a_0 \binom{n}{0} + b_0 \binom{n}{1} + c_0 \binom{n}{2}.$$

А что можно сказать про последовательности, у которых $c_n = 0$? А $b_n = 0$?

Задача 3. Знакомство с простыми числами

Этот исследовательский проект состоит из нескольких шагов. Если у вас не получается до конца разобраться в каком–то шаге, пропустите его и изучайте следующий.

- Начните писать натуральные числа последовательно вдоль извивающейся линии, как показано на рисунке.



Найдите на полученной спирали закономерность, связанную с простыми числами, и объясните ее.