Задача 1. Через тернии к звёздам

1. Кратчайший путь между A и C проходит либо через B, либо не затрагивая её. В первом случае $d\,(A, B) + d\,(B, C) = d\,(A, C)$, во втором случае $d\,(A, B) + (B, C) \leq d\,(A, C)$, потому что кратчайший путь между A и C, проходящий через B, не может быть короче пути, кратчайшего вообще.

2. Наибольшее возможное расстояние между вершинами n–угольника равно $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, все значения расстояния от 0 до этого числа достигаются. На расстоянии от данной вершины, строго меньшем, чем $\frac{n}{2}$, всегда находятся ровно две других.

Если n чётное, то есть одна вершина, находящаяся от данной на расстоянии $\frac{n}{2}$, она же наиболее удалённая. Если n нечётное, то наиболее удалены от данной две вершины, находящиеся на расстоянии $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ от неё — справа и слева.

3. Пусть все стороны многоугольника, кроме одной, имеют «вес» 1, а оставшаяся — «вес» 2. Расстояние между вершинами будем считать как сумму весов сторон, по которым проходит кратчайший путь между ними. Для такого расстояния даже выполнено неравенство треугольника, а также оно зависит от выбора «тяжёлой» стороны — то есть, будет меняться при вращении многоугольника.

Определим

$$\delta\,(A, B) = \begin{cases} 0, & A = B; \\ 1, & A \neq B \end{cases}$$

Для этого расстояния также выполнено неравенство треугольника, и оно, очевидно, не получается из взятого в условии задачи умножением на число, потому что расстояния между любыми двумя не равными вершинами одинаково.

4. Докажем, что (n, k)–звезда состоит из одной ломаной $\Longleftrightarrow$ числа n и k взаимно просты. Для удобства пронумеруем вершины n-угольника числами от 0 до $n - 1$ по часовой стрелке. Заметим, что расстояние между вершинами равно k тогда и только тогда, когда разность их номеров равна k, $-k$ или $n - k$ — то есть, её модуль имеет остаток k при делении на n.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Пусть одна ломаная соединяет все вершины правильного n–угольника. Значит, у неё есть ребро, выходящее из нулевой вершины и идущее в сторону «по часовой стрелке». Оно приходит в вершину №k. Следующее — в вершину №$2k \bmod n$. Следующее за ним — в вершину №$3k \bmod n$, и так далее.

Что представляет из себя, например, число $3k \bmod n$? Это, на самом деле, разность $3k - n - \ldots - n$. Если НОД чисел n и k не равен единице, то все числа вида $i \cdot k \bmod n$ будут делиться на этот НОД. Это значит, что последовательность рёбер, которую мы начали, выходя из нулевой вершины, не посетит вершину №1.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Пусть НОД $(n, k) = 1$, но ломаная, проходящая через нулевую вершину, не покрывает всех вершин многоугольника. Тогда среди чисел $0 \cdot k$, $1 \cdot k$, $\ldots$, $(n-1) \cdot k$ (это номера вершин, через которые проходит ломаная) в силу принципа Дирихле есть два сравнимых по модулю n (соответствующих одной вершине многоугольника).

$$
\begin{aligned}
&a_1 \cdot k - a_2 \cdot k \text{ делится на } n;\\
&(a_1 - a_2) \cdot k \text{ делится на } n, \quad |a_1 - a_2| < n;\\
&\text{(}k\text{ взаимно просто с }n\text{)}\\
&a_1 - a_2 \text{ делится на } n \;\; \Rightarrow \;\; a_1 - a_2 = 0.
\end{aligned}
$$

Получили противоречие: числа $a_1 k$ и $a_2 k$ не могли оказаться различными.

1. Сколько для данного n существует (n, k)–звёзд, состоящих из одной ломаной?

2. Для данных n и k, из скольки ломаных состоит (n, k)–звезда?

3. Для данных n и ℓ, сколько (n, k)–звёзд состоит ровно из ℓ ломаных?

4. Через $\varphi(n)$ обозначим количество натуральных чисел, меньших n и взаимно простых с n. Используя свои знания о звёздах, докажите формулу

$$\sum_{d \text{ делит } n} \varphi(d) = n.$$