

Задача 1. Треугольник Паскаля

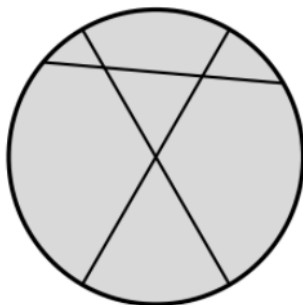
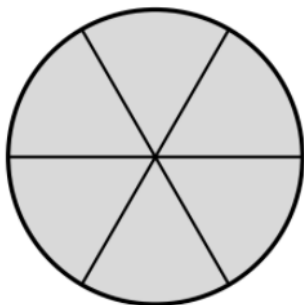
Этот исследовательский проект состоит из нескольких шагов. Если у вас не получается до конца разобраться в каком-то шаге, пропустите его и изучайте следующий.

- Найдите сумму чисел в каждой строке треугольника Паскаля.
- Найдите сумму первого, третьего, пятого, ... (и так далее) элемента в какой-нибудь строке треугольника Паскаля. Найдите закономерность.
- Найдите сумму второго, четвёртого, шестого, ... (и так далее) элемента в строке треугольника Паскаля. Найдите закономерность.
- Найдите сумму квадратов чисел в каждой строке треугольника Паскаля.
- Выясните, где в треугольнике Паскаля спрятались треугольные числа $T_n = 1 + 2 + \dots + n$.
- А где спрятались пирамидальные числа $P_n = T_1 + T_2 + \dots + T_n$? А где квадратные числа $S_n = n^2$?
- Выясните, как связаны числа $1, 11, 11^2, 11^3, 11^4, \dots$ с треугольником Паскаля.
- Что будет если взять самый левый элемент в строке треугольника Паскаля, вычесть из него следующий (по-горизонтали), прибавить следующий за ним, затем вычесть следующий, ... (и т.д.) до тех пор, пока не кончатся числа в строке? Какое число получится? Найдите закономерность.
- Ответьте на предыдущий вопрос, если брать не сами элементы треугольника Паскаля, а их квадраты.
- Выясните, делятся ли все элементы (кроме крайних двух единиц) в строке на номер этой строки (нумерация строк начинается с нуля)? А когда делятся?
- Выберите число 1 у края треугольника Паскаля и идите по диагонали вниз. Начните складывать все встречающиеся числа и в какой-нибудь момент остановитесь. Какое число получилось в сумме? А что получится в общем случае?

- Что получится, если заштриховать все четные числа в треугольнике? Какой будет узор?
- А если заштриховать все числа, делящиеся на 3?
- Где спрятались числа Фибоначчи в треугольнике Паскаля?
- Чему равна сумма чисел в каком-нибудь параллелограмме треугольника Паскаля? Найдите закономерность.
- Откройте свои собственные закономерности в треугольнике и назовите их в свою честь

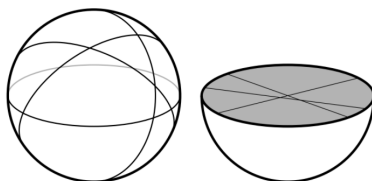
Задача 2. Задача о разрезании пиццы

Три разреза через центр круглой пиццы дают шесть кусочков. Если же сделать третий разрез не через центр, то мы получим семь кусочков разной формы и размера. Немного поэкспериментировав, вы убедитесь в том, что наибольшее число кусков, которое вы можете получить с помощью трёх разрезов — это семь. Но сколько кусочков вы можете получить с помощью большего числа разрезов?



- Какое наибольшее число кусочков пиццы вы можете получить с помощью четырёх разрезов?
- Опишите принцип максимизации для разрезания пиццы. А именно, ответьте на вопрос: как должен проходить новый разрез, чтобы получилось как можно больше кусочков?
- Пицца Якоба Штейнера имеет бесконечный радиус, а потому о ней можно мыслить просто как о плоскости. Как связан ответ на общую задачу о пицце с ответом на задачу о разрезании пиццы Якоба Штейнера?

- Через P_n (от слова *pieces* — кусочки) обозначим максимальное число кусков, на которое можно разрезать пиццу с помощью n разрезов. Например, $P_1 = 2$ и $P_2 = 4$. Выразите P_n через P_{n-1} и найдите P_{137} .
- Стандартный кусочек пиццы очень похож на треугольник. А как связана задача о разрезании пиццы с треугольными числами?
- Предположим, что мы получили P_n кусочков пиццы за n разрезов. Обозначим через C_n (от слова *crust* — корка) число тех кусочков пиццы, граница которых не содержит корочки пиццы. Найдите явную формулу для C_n .
- Сложим первые три числа на каждой строчке треугольника Паскаля. Какое число получается?
- Решите аналогичную задачу о разрезании прямой. Как вы думаете, а как будет связан ответ на новую задачу с треугольником Паскаля?
- Решите аналогичную задачу о разрезании арбуза. Как вы думаете, а как будет связан ответ на новую задачу с треугольником Паскаля? Уже догадались, какой ответ мы получим, если будем разрезать n -мерный шар?



- Выпишем элементы последовательности P_n в строчку, а под ней запишем её производную последовательность ΔP_n (вычитаем из элемента его предыдущий)

| | | | | | | | | |
|--|---|---|---|---|----|----|----|---|
| последовательность | 1 | 2 | 4 | 7 | 11 | 16 | 22 | · |
| последовательность разностей | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | · |
| последовательность разностей разностей | | | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | · |
| последовательность разностей разностей разностей | | | | 0 | 0 | 0 | 0 | · |

Как видите, четвёртая строка состоит из нулей. Напишите такую же таблицу для последовательности каких-нибудь фигурных чисел.

| | | | | | | | |
|--|-------|-------|-------|-------|-------|-------|---|
| последовательность | a_0 | a_1 | a_3 | a_4 | a_5 | a_6 | · |
| последовательность разностей | | b_0 | b_1 | b_2 | b_3 | b_4 | · |
| последовательность разностей разностей | | | c_0 | c_1 | c_2 | c_3 | · |
| последовательность разностей разностей разностей | | | | 0 | 0 | 0 | · |

Докажите, что если есть произвольная последовательность a_n обладает тем свойством, что $\Delta c_n = 0$, где $\Delta a_n = b_n$ и $\Delta b_n = c_n$, то¹

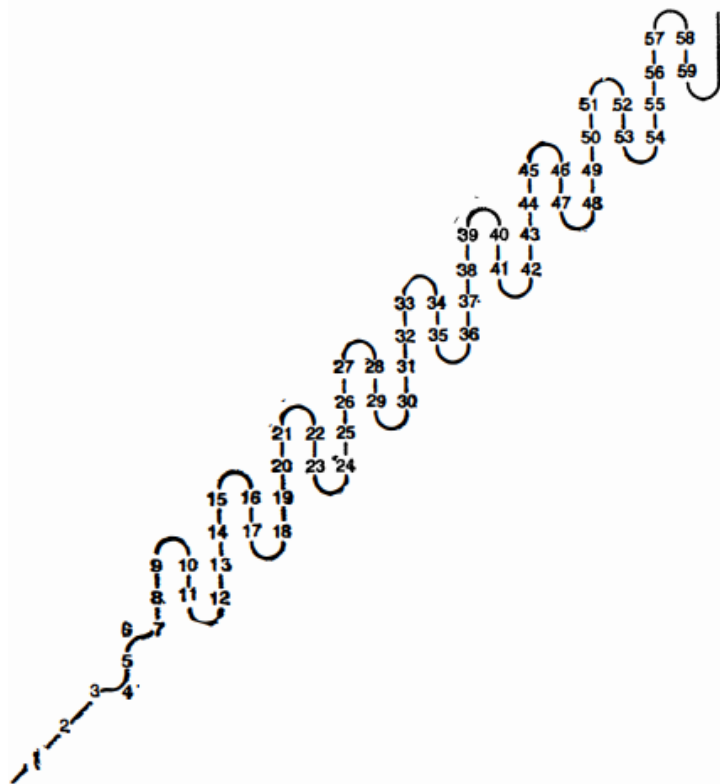
$$a_n = a_0 \binom{n}{0} + b_0 \binom{n}{1} + c_0 \binom{n}{2}.$$

А что можно сказать про последовательности, у которых $c_n = 0$? А $b_n = 0$?

Задача 3. Знакомство с простыми числами

Этот исследовательский проект состоит из нескольких шагов. Если у вас не получается до конца разобраться в каком-то шаге, пропустите его и изучайте следующий.

- Начните писать натуральные числа последовательно вдоль извивающейся линии, как показано на рисунке.



¹Через $\binom{n}{k}$ всегда обозначается биномиальный коэффициент — элемент в n -ой строчке треугольника Паскаля на позиции k .

Найдите на полученной спирали закономерность, связанную с простыми числами, и объясните её.

- Сколько делителей имеют числа $1, 2, 4, 8, 16, 32, \dots$? А когда число вида $2^n - 1$ является простым? Составьте таблицу чисел такого вида и найдите закономерность.
- Выясните, для каких чисел n число $(n - 1)! + 1$ делится на n . Найдите закономерность.
- Выясните, для каких чисел n число $n^2 - 1$ делится на 24. Найдите закономерность.
- Выясните, для каких чисел n число $n^2 + 1$ является простым. Найдите закономерность.
- Выясните, для каких чисел n число $2^n - 2$ делится на n . Найдите закономерность.
- Посмотрим на числа вида $n^2 - n$. Получаем $0, 2, 6, 12, 20, \dots$. Все эти числа делятся на два. Посмотрим на числа вида $n^3 - n$. Получаем $0, 6, 24, 60, 120, 210, 336, \dots$. Все эти числа делятся на три! А что дальше? Будут ли числа вида $n^4 - n$ делиться на четыре? А числа вида $n^5 - n$ на пять? Найдите закономерность.

Задача 4. Закопеременные представления

- Представьте число 1 в виде произведения нескольких чисел, сумма которых равна нулю.
- Решите ту же самую задачу для чисел 2, 4, 6.
- Решите эту задачу для числа 3. Сможете ли вы найти разложение, в котором все числа являются именно целыми, а не рациональными?
- Исследуйте вопрос представимости для произвольных натуральных чисел.

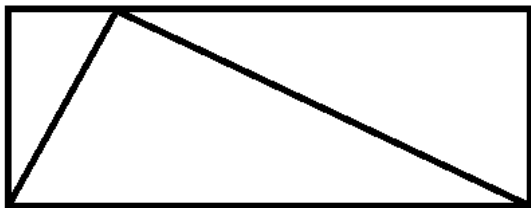
Задача 5. Как же я люблю разрезать!

- Возможно ли разрезать на равнобедренные треугольники: а) квадрат; б) прямоугольник? Если — да, то покажите как.

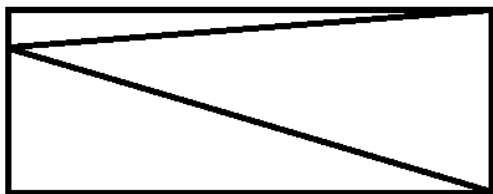
- Ответьте на тот же вопрос, если нужно разрезать а) параллелограмм; б) равнобокую трапецию. Если можно, то покажите как.
- Попробуйте разрезать фигуры на наименьшее возможное число равнобедренных треугольников.
- Попробуйте изменить формул фигур из списка выше. Как тогда изменится Ваше разбиение на треугольники? Рассмотрите экстремальные ситуации.

Задача 6. Геометрическая миниатюра

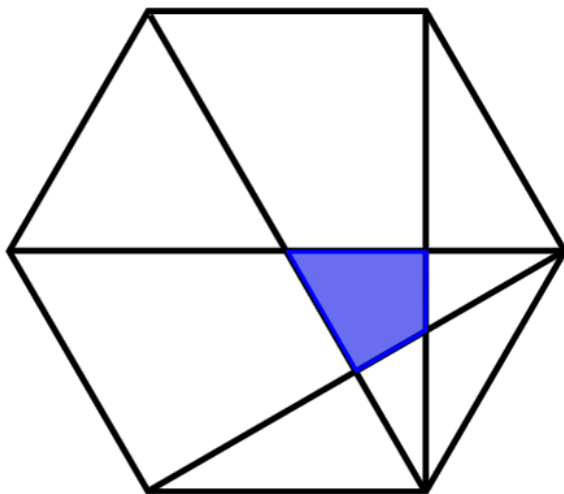
- Как вы думаете, какую часть (по площади) составляет треугольник внутри прямоугольника на картинке ниже?



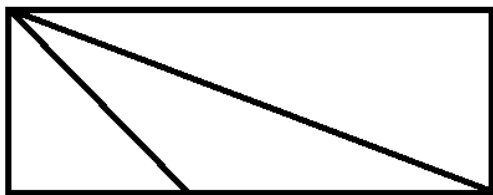
- А какую часть составляет такой треугольник?



- Как вы думаете, какую часть (по площади) составляет выделенная область от всего правильного шестиугольника?



- Выясните, какую часть (по площади) составляет такой треугольник в прямоугольнике



Задача 7. Треугольные числа

- Можно ли представить число 201745 в виде суммы двух треугольных чисел?
- Какие натуральные числа можно представить в виде суммы не более двух треугольных чисел? Найдите закономерность.
- Какие натуральные числа можно представить в виде суммы не более трёх треугольных чисел? Найдите закономерность.
- (Золотая теорема). Какие числа можно представить в виде суммы не более n n -угольных чисел?

Задача 8. Шарики в коробках

Перед вами бесконечный набор коробок, на каждой из которых написано простое число.

2 3 5 7 11 13 17 19 23 29 31 37 41 43 47 53 59 ...

Вам дали несколько белых шариков и вы решили положить их все в какие-то коробки (в одну коробку можно положить сразу много шариков). После этого пришёл эксперт, многозначно посмотрел на вашу расстановку шариков по ящикам и выдал вам число следующим образом: он возвёл число 2 в степень α_2 , равную количеству шариков в коробке с надписью 2, потом возвёл число 3 в степень α_3 , равную количеству шариков в коробке с надписью 3, потом возвёл число 5 в степень α_5 , равную количеству шариков в коробке с надписью 5, и так далее. Затем он умножил все эти числа между собой. Получилось число $n = 2^{\alpha_2} \cdot 3^{\alpha_3} \cdot 5^{\alpha_5} \cdot \dots$

- В коробке 2 лежит 3 шарика, а в коробках 3 и 11 лежат по одному шарiku. Какое число назовёт эксперт?
- Сколько шариков вам понадобится и куда их нужно положить, чтобы эксперт назвал вам число 6? А число 12? А число 21?
- В каком случае эксперт назовёт вам простое число? А составное?
- Вы расположили шарики в коробках и эксперт назвал число n . Что нужно сделать, чтобы он назвал число np , где p — простое число?
- Известно, что число n , которое назвал эксперт, делится на простое число p . Что нужно сделать, чтобы эксперт назвал число n/p ?
- Вы положили несколько белых шариков в коробки и эксперт назвал Вам число n , а потом то же самое происходит с расстановкой чёрных шариков вашего друга — он получает число m . Что нужно сделать, чтобы эксперт назвал число nm ? А что нужно сделать, чтобы эксперт назвал $\text{НОД}(n, m)$? А $\text{НОК}(n, m)$? А что можно сказать про расположения белых и чёрных шариков, если числа n, m взаимно просты?
- Оказалось, что все m шариков положили в одну коробку. Сколько делителей у числа, которое назвал эксперт?
- Оказалось, что m шариков положили в одну коробку, а k — в другую. Сколько делителей у числа, которое назвал эксперт?

- Как определить количество простых делителей числа, которое назовёт эксперт?
- Правда ли, что можно заставить эксперта назвать любое натуральное число, если правильно подобрать шарики?

Задача 9. Конфигурации точек

В 2014 г. на Санкт-Петербургской олимпиаде школьников по математике была предложена следующая задача:

На двух параллельных прямых отмечено по 40 точек. Их разбивают на 40 пар так, чтобы отрезки, соединяющие точки в одной паре, не пересекались друг с другом. (В частности, конец одного из отрезков не может лежать на другом отрезке). Докажите, что число способов это сделать не превосходит числа 3^{39} .

Последовательность, возникающая в этой задаче, обладает богатыми комбинаторными реализациями, их разнообразие просто изумляет. Опишем общую ситуацию: пусть даны две параллельные прямые, на одной отмечено k точек, на другой n точек.



Отмеченные точки разбивают на пары так, чтобы отрезки, соединяющие точки в одной паре, не пересекались друг с другом. В частности, конец одного из отрезков не может лежать на другом отрезке.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & [0, 0] & & \\
 & & & & [2, 0] & [1, 1] & [0, 2] \\
 & & [4, 0] & [3, 1] & [2, 2] & [1, 3] & [0, 4] \\
 & & & & \dots & &
 \end{array}$$

Полученную картинку будем называть *конфигурацией* (точек и отрезков на двух прямых) или *разбиением* (точек на пары). Количество разбиений обозначим через $[k, n]$. Например, $[2, 4] = 4$, как показывает рисунок выше.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | 1 | | | |
| | | | 1 | 1 | 1 | |
| | | 1 | 2 | | 2 | 1 |
| | 1 | 3 | | | 3 | 1 |
| 1 | 4 | | | | 4 | 1 |

Кроме того, если $n+k$ нечётно, то $[k, n] = 0$, а также $[k, n] = 0$, если $n, k < 0$. Если n или k равно нулю, то $[k, n] = 1$ просто по-определению.

- Заполните треугольник выше и найдите в нём закономерности, аналогичные закономерностям в треугольнике Паскаля.
- Выясните, какую последовательность образуют суммы элементов в строках треугольника.
- Правда ли, что в каждой строчке числа $[k, n]$ обязательно возрастают при движении от краёв к центру?
- Выясните, как выразить $[n, n]$ через суммы квадратов чисел на диагоналях в треугольнике Паскаля.

Задача 10. Двойственность

Как известно, линейная функция задаётся уравнением $y = kx + b$, а графиком линейной функции является прямая. Каждая такая прямая определяется парой чисел (k, b) . Построим новую координатную плоскость (k, b) , точки на которой обозначают прямые на исходной координатной плоскости (x, y) .

- Нарисуйте на плоскости (x, y) какие-нибудь четыре прямые и отметьте их в виде четырёх точек на плоскости (k, b) .
- Обратно: выберите три точки на плоскости (k, b) и нарисуйте соответствующие три прямые на плоскости (x, y) . Что будет, если выбирать точки на (k, b) лежащими на одной вертикальной прямой? А горизонтальной?
- Рассмотрим на плоскости (k, b) прямую $b = k$. Каждая точка этой прямой задаёт на плоскости (x, y) какую-то прямую, а вся прямая $b = k$ задаёт на плоскости (x, y) набор прямых. Каким свойством обладает этот набор прямых?

- На координатной плоскости (k, b) проведено три прямые, проходящие через одну точку. Каждая такая прямая изображает некоторый набор прямых на плоскости (x, y) . Как эти три набора прямых связаны между собой?
- Аналогичный вопрос для трёх параллельных прямых на (k, b) .
- Рассмотрим набор всех прямых плоскости (x, y) , которые проходят через точку $(0, 0)$. Как этот набор изображается на плоскости (k, b) ? Тот же самый вопрос при замене точки $(0, 0)$ на (m, n) .
- Рассмотрим на плоскости (k, b) прямую $b = uk + v$. Какой набор прямых на плоскости (x, y) изображает эта прямая?
- Прямые $b = uk + v$ на плоскости (k, b) задают точки на новой плоскости (u, v) . Как новая плоскость связана с плоскостью (x, y) ?

Задача 11. Задача Иосифа Флавия

В книге «Иудейская война» Иосифа Флавия есть история о том, как он в составе отряда из 41 иудейского воина был загнан римлянами в пещеру. Предпочитая самоубийство плену, воины решили выстроиться в круг и последовательно убивать каждого третьего из живых, до тех пор пока не останется ни одного человека. Однако Иосиф наряду с одним из своих единомышленников счел подобный конец бессмысленным — он быстро вычислил спасительные места в порочном круге, на которые поставил себя и своего товарища. И лишь поэтому мы знаем его историю.

В нашем варианте мы начнём с того, что выстроим в круг n человек, пронумерованных числами от 1 до n , и будем исключать каждого *второго* из оставшихся до тех пор, пока не уцелеет только один человек. Например, если $n = 10$, то порядок исключения будет такой: 2, 4, 6, 8, 10, 3, 7, 1, 9, так что остаётся номер 5. Убедитесь в этом!

- Обозначим через $J(n)$ номер последнего уцелевшего человека. Мы только что выяснили, что $J(10) = 5$. Можно было предположить, что $J(n) = n/2$ при чётном n . Верно ли это? Начните с $n = 2, 3, 4, \dots$
- Выпишите табличку, в которой для малых n указаны порядки исключения чисел. Правда ли, что $J(n)$ всегда нечётно? Почему?
- Пусть n чётно. Выясните, что происходит в тот момент, когда из круга исключается последнее чётное число. Как связаны $J(n)$ и $J(n/2)$?

- Найдите аналогичную закономерность для нечётного n .
- Пусть $n = 2^m$. Найдите $J(n)$.
- Выпишите таблицу значений $J(n)$ для n от 1 до 16 и найдите для $J(n)$ явную формулу.