

Задачи 6 класса

Задача 1.

- А. Мальчик Боря согнул из проволоки два квадрата. Когда мальчик Вова положил эти квадраты друг к другу, то получился прямоугольник с большей стороной 8 дм. Может ли Боря определить, сколько проволоки он израсходовал на квадраты?

Решение: Да, конечно: из того, что большая сторона прямоугольника равна 8 дм, легко следует, что его меньшая сторона — 4 дм. Тогда квадраты, сложенные Борей, имели сторону 4 дм, и потрачено им было $16 + 16 = 32$ дм проволоки.

- В. Коротышки из Цветочного города решили украсить цветами клумбу в форме прямоугольника. Полезная длина клумбы — 240 см, а полезная ширина — 120 см. Цветы было решено сажать в узлах квадратной сетки на расстоянии 20 см друг от друга. Незнайка подсчитал, что нужно

$$(240 : 20) \times (120 : 20) = 12 \times 6 = 72$$

кустика рассады. К сожалению, их не хватило. Сколько же необходимо было привезти кустиков рассады?

Решение: Незнайкины расчёты сработали бы, если бы кустики были посажены в центры квадратов 20×20 , на которые можно побить клумбу. Однако коротышки сажали цветы не в центры, а в вершины таких квадратов. Вершин очевидно больше, чем центров: у каждого квадрата есть, например, нижняя левая вершина, и у различных квадратов они различны — однако после выбора всех нижних левых вершин останутся ещё какие-то — например, самая верхняя правая.

Как же посчитать все вершины квадратной сетки? Вершины делятся на строчки, и строчек этих $(120 : 20) + 1$ — внизу от каждого ряда квадратов, а также самая верхняя. Вершин в каждой строчке $(240 : 20) + 1$ — слева от каждого квадрата, а также самая правая.

Получаем ответ на задачу:

$$((120 : 20) + 1) \times ((240 : 20) + 1) = 7 \times 13 = 91.$$

- С. У мальчика Димы есть инновационные ножницы и кусок нанолески длиной 192 см. Может ли Дима отрезать от этого куска кусок длиной

90 см? (Нанолеска такова, что её куски можно сгибать пополам, а также прикладывать друг к другу.)

Решение: $192/2^5 = 6$ — сложив леску пять раз пополам, мы получим 32 слоя длиной 6 см. Взяв 15 таких слоёв подряд, мы получим кусок длиной 90 см, его остаётся только отрезать ножницами.

Задача 4.

А. У доктора Ватсона в пальто 4 кармана. В каждый карман он кладёт не менее одного патрона и не больше четырёх патронов. Может ли Шерлок Холмс узнать, сколько патронов в карманах у доктора Ватсона, если ему известно, что в карманах у него разное число патронов?

Решение: Различных натуральных чисел от 1 до 4 — ровно 4 штуки, столько же, сколько карманов у Ватсона. Поэтому единственный вариант разложить патроны так, как указано в условии, — в первый карман один патрон, ..., в четвёртый карман четыре патрона.

На этом основании Холмс может наверняка утверждать, что у Ватсона

$$1 + 2 + 3 + 4 = 10 \text{ патронов.}$$

В. На прощальной вечеринке танцуют девушка Катя и 7 юношей — Боря, Женя, Илья, Гоша, Андрей, Данил и Максим. У каждого из них есть воздушные шарик. Какое наименьшее число шариков может быть у этих весельчаков, если среди них нет двух с одинаковым числом воздушных шариков?

Решение: Попробуем минимизировать количество шариков у танцующих. У танцора с наименьшим количеством шариков всё-таки хотя бы один воздушный шарик. У «второго снизу» по количеству шариков их хотя бы два — и, наконец, у самого богатого на шарик их как минимум 8. Отсюда получаем оценку снизу на общее количество шариков —

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 8 = 36.$$

С. Однажды Винни Пух, Пятачок и ослик Иа-Иа пошли ловить рыбу. Улов оказался не очень большим. Винни Пух поймал половину общего улова без $\frac{2}{5}$ того, что поймали Пятачок и Иа-Иа. Пятачок поймал треть общего улова и $\frac{1}{5}$ того, что поймали Винни Пух и Иа-Иа.

Улов ослика Иа-Иа отличался от улова Пятачка на 1 кг. Сколько весил весь улов?

Решение: Обозначим улов Винни Пуха через В, улов Пятачка через П и улов Иа-Иа через И. Тогда на основании данных задачи можно составить систему уравнений:

$$\begin{cases} B = \frac{1}{2} \cdot (B + П + И) - \frac{2}{5} \cdot (П + И); \\ П = \frac{1}{3} \cdot (B + П + И) + \frac{1}{5} \cdot (B + И); \\ И = П \pm 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} -B + 0.2П + 0.2И = 0; \\ 0.8B - П + 0.8И = 0; \\ И = П \pm 1. \end{cases}$$

Прибавим ко второй строке первую, умноженную на 0.8:

$$\begin{cases} -B + 0.2П + 0.2И = 0; \\ -0.84П + 0.96И = 0; \\ И = П \pm 1. \end{cases}$$

Из второй строки получившейся системы видно, что $0.84П = 0.96И$, то есть $И < П$, и, значит, $И = П - 1$. Теперь всё просто:

$$0.84 \cdot П = 0.96 \cdot (П - 1)$$

$$0.12 \cdot П = 0.96$$

- $П = 8$
- $И = 7$
- $B = 0.2 \cdot 8 + 0.2 \cdot 7 = 3$

Таким образом, весь улов весил $8 + 7 + 3 = 18$ килограммов.

Задача 5.

А. «Сейчас 6 часов вечера,» — сказал мальчик Вовочка. Интересно, какую часть составляет оставшаяся часть суток от прошедшей и какая часть суток осталась?

Решение: Осталось 6 часов, а прошло 18. Поэтому осталась четвёртая часть суток, и она составляет третью часть от трёх четвертей, которые уже прошли.

С. Можно ли в выражении

$$\frac{A+B}{C} + \frac{D}{E+F}$$

заменить буквы числами 1, 2, 3, 4, 5, 6 так, чтобы различным буквам соответствовали различные числа, и значение получившегося выражения было бы равно 1?

Решение: Приведём дроби в выражении к общему знаменателю:

$$\frac{(A+B)(E+F) + CD}{C(E+F)}.$$

То, что значение этой дроби равно 1, значит, что её числитель равен её знаменателю:

$$(A+B)(E+F) + CD = C(E+F)$$

$$(A+B-C)(E+F) + CD = 0$$

$$(C-A-B)(E+F) = CD$$

Чтобы равенство было выполнено, число C должно быть больше, чем сумма A и B , и, значит, каждое из них. Вооружившись этим соображением, несложно найти ответ: $A = 1, B = 2, C = 6, D = 4, E = 3, F = 5$.

$$\frac{1+2}{6} + \frac{4}{3+5} = 1.$$

Задача 6.

А. Одним пакетиком чая можно заварить 2 или 3 чашки чая. Маша и Оля разделили пачку чая пополам. Маша заварила 51 чашку чая, а Оля — 73 чашки. Можно ли догадаться, сколько пакетиков чая было в пачке?

Решение: $73 - 51 = 22$ — на столько больше раз Оля использовала пакетик на три чашки, чем Маша. Это значит, что Оля по крайней мере столько раз заваривала пакетиком только две чашки чая.

$22 \cdot 2 = 44$. Значит, Оле осталось заварить 7 чашек, это можно сделать только тремя пакетиками — $7 = 3 + 2 + 2$. Значит, у Оли было 25 пакетиков, а в пачке — 50.

В. Незнайка составил числовой ребус

$$\text{ЭНЭ} + \text{БЭНЭ} = \text{РАБА},$$

в котором разным буквам соответствуют разные цифры. Знайка, посмотрев на ребус, сказал, что цифра, зашифрованная буквой Р, не может быть чётной. Прав ли Знайка?

Решение: Знайка неправ, цифра Р вполне может быть чётной: например, равенство

$$636 + 7636 = 8272$$

является решением ребуса из условия.

С. В коробочке лежат болтики, шайбочки винтики и гаечки — всего 107 штук. Известно, что болтиков в 3 раза больше, чем шайбочек, а шайбочек в 2 раза больше, чем винтиков. Кроме того, винтиков больше, чем гаечек. Сколько гаечек в коробке?

Решение: Заметим, что болтиков, по условию, в 6 раз больше, чем винтиков. То есть, если обозначить количество винтиков за В, а гаечек — за Г, мы получим, что

$$(6 + 2 + 1) \cdot В + Г = 107, \quad В > Г.$$

Единственный ответ в таком случае — $В = 11$, $Г = 8$: в противном случае число гаечек будет больше, чем множитель у девятки.

Ответ: 8 гаечек.