При поддержке Фонда Президентских грантов

Математика НОН-СТОП

Сборник задач

Б.А. Золотов Д.Г. Штукенберг

И.А. Чистяков А.В. Семенов И.С. Алексеев

Фонд «Время Науки»

Санкт-Петербург
2019

Предисловие

***И.А. Чистяков** — Президент фонда «Время науки», директор ЧОУ ОиДО «Лаборатория непрерывного математического образования», вице-президент Европейского турнира юных математиков, автор задач Олимпиады «Математика НОН-СТОП» в 2010–2015 годах*

Дорогие юные математики, коллеги, друзья! Вы держите в руках не просто сборник олимпиадных задач, а скорее книгу, в которой рассказывается о системе математического образования, созданной фондом поддержки молодых ученых «Время науки».

Проекты фонда взаимосвязаны и не могут рассматриваться отдельно друг от друга. Одной из главных задач фонда является привлечение талантливой молодежи к занятиям наукой, в частности математикой. При содействии фонда работает целая структура дополнительного образования, а также система научных семинаров, турнир юных математиков, олимпиада «Математика НОН-СТОП», Летняя профильная математическая школа, Балтийский научно-инженерный конкурс. Опыт создания этой системы оказался настолько успешным, что многие из мероприятий фонда проводятся теперь в различных российских регионах. Так, например, Балтийский научно-инженерный конкурс имеет на сегодняшний день 17 региональных представительств.

Однако по порядку. Основой содержательной математической деятельности является семинар. В 1992 году группа молодых (тогда) петербургских математиков, среди которых были к. ф.-м. н. С.М. Шиморин, к. ф.-м. н. Д.Г. Бенуа, И.А. Чистяков и вскоре присоединившиеся к ним к. ф.-м. н. Т.Н. Шилкин, д. ф.-м. н. С.И. Кублановский, А.О. Виро, к. ф.-м. н. А.А. Флоринский, Е.А. Абакумов стали вести научные семинары для старшеклассников и руководить научными проектами. Так возникла «Лаборатория непрерывного математического образования» (ЛНМО) — в те годы молодежный научный коллектив, ставящий перед собой задачу привлечения к занятиям наукой тех школьников, которые обладали незаурядными математическими способностями, но тем не менее по некоторым причинам в большей своей части не имели значительных олимпиадных достижений.

Время, в которое начинала свою деятельность ЛНМО, было непростым, даже скорее трудным для большинства молодых математиков. Многие из них уехали из страны, другие сменили сферу деятельности. Количество способных к математике студентов стало снижаться, несмотря на все усилия декана математико-механического факультета СПбГУ профессора Г.А. Леонова — человека, благодаря которому факультет пережил самые тяжелые годы. Математическое сообщество старело, и привлечение к математике школьников стало одной из основных задач.

В 1994 году ЛНМО стала сотрудничать с Математико-механическим факультетом СПбГУ. Это сразу дало свои плоды. Так, в 1992 году в ЛНМО работало всего 3 математических семинара. С.М. Шиморин и И.А. Чистяков руководили семинарами по математическому анализу, Д.Г. Бенуа — по алгебре. В 1995 году в Лаборатории было открыто уже 10 научных семинаров. Среди руководителей семинаров этого периода — профессор М.М. Лесохин, профессор Н.А. Широков, профессор В.М. Нежинский, к. ф.-м. н. В.Л. Кобельский, к. ф.-м. н. В.Ю. Добрынин.

Впоследствии ЛНМО стала частным образовательным учреждением, где работа в системе научных семинаров и спецкурсов является вершиной в процессе получения школьником среднего образования.

Семинары 90-х годов воспитали первую плеяду учеников, которые впоследствии стали научными руководителями школьников и студентов, закончили математико-механический факультет СПбГУ, аспирантуру и защитили кандидатские диссертации. Выпускниками ЛНМО защищены 42 кандидатских диссертации, из каждого выпуска ЛНМО до половины выпускников становятся аспирантами, до 7-8 — кандидатами наук.

Сейчас благодаря гранту Фонда Президентских грантов в ЛНМО работает 27 математических семинаров, а всего по разным специальностям — 61. Среди руководителей — д. ф.-м. н. С.И. Кублановский, к. ф.-м. н. А.В. Смоленский, к. ф.-м. н. Р.А. Гученко, к. ф.-м. н. Ю.А. Ильин, к. ф.-м. н. С.О. Иванов, аспиранты А.В. Семенов, В.А. Соснило, А.А. Зайковский и многие другие.

В то же время ощущался дефицит научного общения участников семинаров с другими школьниками, тоже делающими свои первые шаги в науке. Поэтому получили развитие научные конференции школьников, в числе которых отметим Сахаровские чтения, проводимые лицеем ФТШ в Петербурге (Я.Д. Бирман, к. х. н. Н.М. Химин, Д.В. Фредерикс, к. ф.-м. н.

М.Г. Иванов, Е.А. Нинбург), и конференцию, посвященную памяти академика С.Н. Бернштейна. Большую поддержку в это время оказали профессор М.П. Юшков и профессор В.С. Виденский. Будучи совсем небольшой, конференция памяти Бернштейна привлекала к себе тех юных исследователей, которые уже в 9–11 классе могли потратить на научную работу значительное время. Высокий уровень профессионального научного жюри стал отличительной карточкой этой конференции.

В Москве в области математики лидирующее положение занимали конференция при МЭИ (Московском энергетическом институте), благодаря усилиям А.А. Егорова, к. ф.-м. н. А.П. Савина, Ж.М. Раббота, к. ф.-м. н. В.Н. Дубровского и к. п. н. Л.Б. Огурэ; конференция «Династия–Авангард», математическое направление которой возглавляет к. ф.-м. н. Д.В. Андреев; конференция «Юниор» (профессора А.Д. Модяев, Н.М. Леонова, А.В. Михалев и Н.А. Кудряшев).

Одновременно возникли международные конференции, из числа которых отметим конференцию молодых ученых (ICYS), первым победителем которой стал Владимир Камоцкий, занимавшийся в семинаре по гомологической алгебре (руководитель Д.Г. Бенуа, ныне известный математик). Абсолютный рекорд этого научного форума принадлежит выпускнику научных семинаров Дмитрию Парилову: он в 9, 10 и 11 классах был награжден золотой медалью, став абсолютным победителем. Дмитрий Владимирович Парилов защитил кандидатскую диссертацию и успешно работает в России.

В 1998 году Россия впервые приняла участие в международном конкурсе научных и инженерных достижений учащихся — ISEF, собирающем более полутора тысяч школьников из более чем 60 стран мира. 30 учеников ЛНМО награждены премиями научного жюри, еще 10 — премиями Карла Менгера, присуждаемыми Американским математическим обществом.

Пять научных работ отмечены высшими премиями научного жюри, именами петербургских школьников — Сергея Иванова, Евгения Лохару, Евгения Амосова, Артема Викторова и Гаджи Османова — названы малые планеты Солнечной системы. С.О. Иванов и Е.Э. Лохару защитили кандидатские диссертации и активно работают в области математики. Сергей Олегович Иванов в 2014 году назван лучшим молодым математиком Санкт-Петербурга, 14 выпускников лаборатории награждены премиями имени В.А. Рохлина.

Камерная научная конференция, посвященная памяти академика

С.Н. Бернштейна, не могла уже справиться с нарастающим числом работ и была преобразована в конференцию им. академика П.Л. Чебышева, родоначальника Петербургской математической школы, а в 2004 году — в Балтийский научно-инженерный конкурс. На первом Балтийском научно-инженерном конкурсе было представлено 60 проектов; в 2019 году на юбилейном XV конкурсе в отборочных этапах приняли участие 2059 юных исследователей, а в финале представлены более 400 проектов из более чем 60 регионов России и Белоруссии.

Председателем научного жюри Балтийского конкурса является профессор Н.А. Широков, секцию математики возглавляет профессор Н.М. Нежинский; подсекции — к. ф.-м. н. А.В. Смоленский, а также к. п. н. В.В. Крылов. Второй год работает жюри ПОМИ РАН, которое возглавляет профессор А.И. Назаров.

Развитие научной и проектной деятельности высветило ряд проблем, без решения которых далее невозможно развивать научные семинары. Для выполнения серьезных математических исследований школьник должен знать важнейшие разделы математики. Так возникла идея проведения летних профильных математических школ, в которых аспиранты и молодые кандидаты наук погружали старшеклассников в разделы математики, которые были совершенно необходимы для решения математических задач. Часто на семинарах летней школы ставились и задачи для исследования, и школьники успевали получить значительные результаты в их решении.

Пытливый подростковый ум нуждается в постоянной подпитке, решении модельных задач, которые построены по следующему принципу. Каждая задача начинается введением в теорию, в котором ученику разъясняются основные определения. При этом первые пункты задачи более или менее известны. По мере продвижения по задаче пункты усложняются, решения последних пунктов не известны автору задачи и часто являются темой самостоятельного научного исследования.

В качестве реализации этой идеи появилось несколько турниров юных математиков, проводящихся в разных городах по схожим правилам. Участниками таких турниров были в основном старшеклассники. Один из таких турниров — Санкт-Петербургский турнир юных математиков — проводится как раз при поддержке Фонда «Время Науки».

Форма проведения турнира была заимствована из Белорусских турниров юных математиков (к. ф.-м. н. Б.В. Задворный), хотя петербургский турнир отличается более жесткими правилами проведения и трудностью задач. В последнее время петербургские турниры юных математиков проводятся и для 5–7 классов (средняя и младшая лига). Факт существования этих турниров, по нашему убеждению, способствуют привлечению к занятиям наукой талантливых детей, которые впоследствии станут учениками научных семинаров ЛНМО. Руководитель проекта — И.С. Алексеев. Жюри турниров возглавляют к. ф.-м. н. Ю.А. Ильин и профессор В.М. Нежинский.

Усилиями европейских математиков по аналогичным правилам организован международный турнир, участниками которого становятся победители национальных турниров. Президентом конкурса является профессор Давид Змейков.

Олимпиада «Математика НОН-СТОП» выполняет ту же функцию, что и младшая и средняя лиги Турнира юных математиков, — привлекать школьников 4–8 классов к решению исследовательских задач. Нам казалось неразумным сразу приступить к решению этой трудной задачи, необходимо было воспитать молодых математиков — составителей исследовательских задач и найти в Петербурге школы, понимающие важность этого проекта. С этими задачами олимпиада прекрасно справилась.

В первые годы олимпиады отбор задач был традиционен, они подбирались из числа задач петербургских, московских, белорусских олимпиад, однако усложнялись правила ее выполнения. Каждая задача олимпиады состояла из трех пунктов, решение первого из которых оценивалось в 3 балла, решение второго — в 6 баллов, а третьего в 9 баллов. В зачет по каждой задаче входил тот пункт, за который участник получил наибольшее число баллов.

Тем самым школьнику необходимо не только решать задачи, но и продумывать стратегию работы на олимпиаде. Многие школьники, которые брались за решение только сложных пунктов, зачастую делали в них ошибки и получали невысокий балл на олимпиаде. Такая же участь ждала тех, кто решал простые пункты, их суммарный балл также был невысок.

Большое значение мы придавали тому факту, что школьники, которые не справились с решениями задач во время олимпиады, дома и в школе могли продолжить их решение. А наиболее глубокие школьники получали приглашение заниматься в научных семинарах и учиться в профильных математических классах, организуемых на основе государственно-частного партнерства ЛНМО и ГБОУ СОШ №564.

Тем самым была решена задача по привлечению школьников к занятиям математикой, а также сформировался коллектив студентов–математиков, способных предлагать исследовательские задачи. И с 2016 года олимпиада «Математика НОН-СТОП» приобрела задуманную форму. Каждая задача *базовых вариантов*, как и прежде, состоит из трех пунктов, последний из которых наиболее сложен, размышления по этому пункту могут привести школьника к решению научной проблемы. Для школьников 7–8 классов появился *профильный вариант*, для реализации возможности поиска одаренных детей, которые не занимаются в математических кружках, даже если, возможно, учатся в математических школах.

Это дало результат. Многие дети из общеобразовательных школ получили возможность занятий в профильных научных семинарах. Олимпиада поддерживается кафедрой математического образования и информатики АППО (к. п. н. Е.Ю. Лукичева) и входит в перечень региональных конкурсов интеллектуальной направленности Правительства СПб. В олимпиаде участвуют более тысячи школьников Санкт-Петербурга и Ленинградской области.

Руководитель проекта — Б.А. Золотов, победитель олимпиады «Математика НОН-СТОП» 2011 года. Председатель жюри — Д.Г. Штукенберг.

Книга адресована не только школьникам, интересующимся математикой, но и учителям и организаторам математического образования. Руководители научно-исследовательских работ школьников смогут почерпнуть из сборника темы для исследования.

Оглавление

От авторов

Олимпиада «Математика НОН-СТОП» проводится с 2010 года, за это время значительно выросло как число её участников, так и интерес, проявляемый к ней в том числе со стороны образовательных организаций Санкт-Петербурга и известных фондов, которые теперь оказывают поддержку олимпиаде.

В 2010–2015 годах составителем условий задачи был И.А. Чистяков, а олимпиада включала в себя варианты для 5–8 классов из 6–12 задач, поделённых на пункты A, B и C. С 2016 года условия задач для олимпиады составляют Б.А. Золотов и Д.Г. Штукенберг (Дмитрий Григорьевич — сотрудник ЛНМО, Борис Алексеевич — выпускник и сотрудник ЛНМО).

Одновременно с этим в олимпиаде появился профильный вариант для 7–8 классов: задачи профильного варианта представляют из себя целую исследовательскую проблему, раскрывающуюся перед школьником пункт за пунктом. Последним нововведением олимпиады стал вариант для четвёртого класса, присутствующий с 2017 года.

Первая часть этой книги — условия олимпиад, прошедших в 2016–18 годах. Задачи можно давать детям на занятиях в математических кружках; они позволяют примерно ориентироваться на то, какими будут задания на олимпиаде «Математика НОН-СТОП» в ближайшем будущем. Авторы задач — Б.А. Золотов, Д.Г. Штукенберг, И.С. Алексеев.

Следом за условиями задач 2016–18 гг. во второй части этой книги, представлены их решения, предложенные самими авторами задач (рассмотрены в том числе задачи профильных вариантов). Если при разборе задачи возникают трудности или стало интересно ознакомиться с необычными методами решения, стоит смотреть как раз вторую часть книги. Автор разбора 2017–18 — Б.А. Золотов, 2016 — Д.Г. Штукенберг.

В третьей части книги представлены избранные, наиболее оригинальные задачи 2011–15 годов, сразу с решениями. Обычно таких задач оставалось по 3–4 на вариант. Авторы разборов 2012–15 — Б.А. Золотов, А.В. Семенов, 2011 — Л.А. Бакунец, И.Г. Прокофьева, Д.Г. Штукенберг.

Четвёртая часть этой книги — условия задач петербургских турниров юных математиков (СПбТЮМ). СПбТЮМ проводится с 2015 года и отличается интересными, сложными заданиями — некоторые из них впоследствии перерастают в научные работы, представляемые на различных конференциях школьников. В этой книге мы собрали все задачи, бывшие на турнирах с самого основания СПбТЮМ.

Авторы задач СПбТЮМ — К.М. Чепуркин, И.С. Алексеев.

Наконец в пятой части книги мы привели несколько тем для школьной научной работы. Данные темы, с одной стороны, интересны для науки, а с другой стороны, как нам представляется, посильны детям. Подобные темы могут быть любопытны для школьников, желающих выступить на научных конференциях, проводимых, например, под эгидой фонда «Время науки».

Желаем приятного и познавательного чтения!

Условия задач 2017 года

Задачи 4 класса

Задача 1. Обаятельный домовёнок

A. Про домовёнка Кузю издано 40 статей. Кузя решил заняться их чтением с целью узнать о себе что-нибудь новое. Каждый день Кузя читает по 6 статей, но при этом издаётся 4 новых. Как скоро Кузя догонит издателей?

B. Кузя напечатал 10 000 квадратиков со стороной 1 см, после этого у него в картридже закончились чернила. Сколько квадратиков со стороной 2 см он сможет напечатать, если у него есть полный картридж, аналогичный имевшемуся?

C. Дана таблица 7×7. В центры её клеток Кузя вбил гвоздики. Проведите линию через все гвоздики так, чтобы сделать при этом как можно меньшее количество поворотов (линию при этом можно вести только горизонтально и вертикально).

Задача 2. Велопоход

A. Девочка въезжает в горку длиной 400 метров со скоростью 10 километров в час. Как долго она будет это делать?

B. Начинающая Полина едет на велосипеде без остановок со скоростью 15 км/ч, а опытный Дмитрий Григорьевич — со скоростью 34 км/ч, но остановки на отдых отнимают у него столько же времени, сколько он находится в движении. Кто же в итоге быстрее?

C. Подъём в горку и спуск с неё имеют одинаковую длину. Степан на гоночном велосипеде въезжает в горку со скоростью 10 км/ч, а спускается со скоростью 40 км/ч. А Пётр на тракторе едет с постоянной скоростью 17 км/ч. Кто из них быстрее преодолеет подъём и спуск?

Задача 3. Буквы на белом листе

A. Какие буквы русского алфавита можно перерисовать в другие, добавляя линии?

B. Какая буква русского алфавита, если написать её на листе бумаги, поделит его на наибольшее число областей?

C. Вдохновившись предыдущими пунктами этой задачи, мальчик Гера Симонов написал на листе бумаги две буквы О. На сколько областей они могли поделить лист?

Задача 4. Делить и резать, резать и делить

A. Как двумя линиями разделить прямоугольник на четыре части одинаковой площади, имея только карандаш и линейку без разметки?

B. Изобразите фигуру, которую можно одним прямым разрезом поделить на три части одинаковой площади.

C. Каждый из двух разрезов делит фигуру на две части одинаковой площади. Обязательно ли вместе они делят фигуру на четыре части одинаковой площади?

Задача 5. О, как мы далеки!

A. На прямой дороге расположены четыре остановки: A, B, C, D (не обязательно в таком порядке). Известно, что расстояние между остановками A и D равно 1 км, между B и C — 2 км, между B и D — 3 км, между A и B — 4 км, а между C и D — 5 км. Чему равно расстояние между остановками A и C?

B. Вдоль прямой аллеи растут четыре дерева. Расстояния между соседними равны 63, 14 и 84 метра соответственно. Сколько деревьев надо ещё посадить, чтобы расстояние между любыми двумя соседними деревьями было одинаковым?

C. Можно ли на прямой отметить точки A, B, C, D и E так, чтобы расстояния между ними оказались равны: $AB = 6$, $BC = 7$, $CD = 10$, $DE = 9$, $AE = 12$? Если можно, то покажите как, если нет — объясните, почему.

Задача 6. Быть врачом — весьма ответственно!

A. Доктор оперирует Геометричного дождевого червя. Особенность червя в том, что, отдыхая, он выворачивается линией из шести отрезков, которая пересекает каждый свой отрезок ровно один раз. При этом он ещё и кусает себя за хвост. Как выглядит отдыхающий Геометричный червь?

B. Другой доктор учится закреплять сломанные кости. На экзамене ему выдали шесть абсолютно прямых костей одинаковой длины. Он должен завязать на этих костях 12 узлов хирургической нитью, причём на каждой кости должно быть по 4 узелка. Каждый узел связывает не более двух костей. Помогите врачу справиться с этим заданием.

C. Ещё три доктора — Айболит, Пеппер и Ватсон — по очереди оперируют заразного больного, при этом у них всего две пары перчаток. Перчатки можно надевать наизнанку и друг на друга. По медицинским правилам руки разных хирургов не должны касаться одной поверхности перчаток. Оперировать одной рукой нельзя. Могут ли хирурги обойтись данными им перчатками?

Задачи 5 класса

Задача 1. Поделим – посмотрим

A. На какое наибольшее число областей делят плоскость 4 прямоугольных треугольника?

B. На какое наибольшее число областей может разбить прямая семиугольник? Докажите, что на большее число никакой семиугольник разбить нельзя.

C. На какое наибольшее число областей делят плоскость 15 одинаковых по размеру квадратов, все стороны которых горизонтальны либо вертикальны?

Задача 2. Шутка

A. Дана 200-этажная башня. Стул с 30 ножками скидывают с её крыши, и одновременно с этим более лёгкий стул совсем без ножек отправляют катиться вниз по лестнице внутри башни. Может ли безногий стул достигнуть земли быстрее, чем летящий?

B. Выписка из дневника автора задач олимпиады «Математика НОН-СТОП»:

> *Так, вчера я придумал всего четыре задачи... Мне снилось, что сегодня я придумаю в полтора раза больше задач, чем в сумме за день, когда сегодня останется вчера, и за день, для которого сегодня должно было наступить завтра... Однако в день, который будет вчера для завтра и был завтра для вчера, я придумал в три раза больше задач, чем за послезавтрашнее вчера... Что за сны-то такие странные в последнее время?..*

Если верить сну, сколько задач должен был придумать автор в день, когда он оставил эту заметку?

C. Автомобиль выехал из Петербурга в Пекин и сломался через 80 километров. На исправление неполадок ушло, правда, всего две минуты. Однако, проехав ещё 40 километров, автомобиль вновь сломался, но вновь был отремонтирован за две минуты. Далее перед каждой следующей поломкой автомобиль проезжал вдвое меньше, чем перед предыдущей, но приводился в рабочее состояние за неизменные две минуты. Доедет ли он в итоге до Пекина?

Задача 3. О, как мы далеки!

A. На прямой дороге расположены четыре остановки: A, B, C, D (не обязательно в таком порядке). Известно, что расстояние между остановками A и D равно 1 км, между B и C — 2 км, между B и D — 3 км, между A и B — 4 км, а между C и D — 5 км. Чему равно расстояние между остановками A и C?

B. Вдоль прямой аллеи растут четыре дерева. Расстояния между соседними равны 63, 14 и 84 метра соответственно. Сколько деревьев надо ещё посадить, чтобы расстояние между любыми двумя соседними деревьями было одинаковым?

C. Можно ли на прямой отметить точки A, B, C, D и E так, чтобы расстояния между ними оказались равны: $AB = 6$, $BC = 7$, $CD = 10$, $DE = 9$, $AE = 12$? Если можно, то покажите как, если нет — объясните, почему.

Задача 4. Простые, но такие сложные

A. Натуральное число называется простым, если оно нацело делится только на себя и на единицу. Найдите все такие простые числа p, что числа $p+2$ и $p+4$ тоже простые.

B. Натуральное число n является произведением двух простых чисел. Каждое из этих простых чисел увеличили на 1. Произведение полученных чисел оказалось на 100 больше, чем n. Чему равно число n? Найдите все возможные варианты и объясните, почему других нет.

C. В ряд расположены 50 выключателей, все в положении «выключено». Мимо них проходят 50 электриков — k-ый из них переключает каждый k-ый выключатель (включает, если он был выключен, и наоборот). Например, седьмой электрик переключит фонари под номерами 7, 14, 21, 28 и так далее. Какие фонари останутся включенными после прохода электриков?

Задача 5. Неизвестные цифры

A. Имеет ли данный ребус решение — то есть, можно ли сопоставить разным буквам разные цифры так, чтобы равенство стало верным:

$$\text{М}\cdot\text{И}\cdot\text{З}\cdot\text{А}\cdot\text{Н}\cdot\text{Т}\cdot\text{Р}\cdot\text{О}\cdot\text{П} = \text{ХРОМОТА}\,?$$

B. Решите ребус (то есть, сопоставьте разным буквам разные цифры, а одинаковым — одинаковые так, чтобы равенство стало верным):

$$\text{КРЕМ} + \text{КРЕМ} = \text{ЖЕЛЕ}; \quad \text{известно, что Л} = 9.$$

C. Учитель написал на доске 10 последовательных чисел. Шаловливый Стёпа, уходя после уроков домой, стёр одно — и тут же забыл, какое. Он помнил только, что сумма оставшихся на доске чисел равна 2017. Какое же конкретно число он стёр?

Задача 6. И пусть Бетховен услышит

Девочка Лина играет на круговом фортепиано аналог «Лунной сонаты» собственного сочинения. На таком фортепиано клавиши расположены в виде кольца, а исполнитель должен предварительно залезть внутрь этой конструкции. Таким образом, если идти слева направо, после всех 88 клавиш ноты начинаются с начала.

A. Первую часть сонаты Лина начинает с клавиши под номером один. Сначала она прыгает на один шаг вправо. Затем на две клавиши влево. Потом на три клавиши вправо, четыре клавиши влево, и так далее. На каком шаге Лина первый раз нажмёт на клавишу под номером 45?

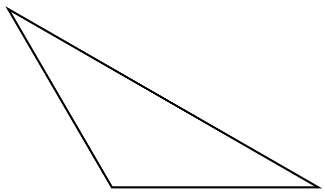
B. Вторую часть сонаты Лина подпевает: ЛЯ, ЛЮ-ЛЯ, ЛЮ-ЛЮ-ЛЮ-ЛЯ, ЛЮ-ЛЮ-ЛЮ-ЛЮ-ЛЮ-ЛЮ-ЛЮ-ЛЮ-ЛЯ,... (перед каждой букой Л добавляется ЛЮ). На каждое ЛЮ или ЛЯ она, начиная с первой клавиши, идёт слева направо и нажимает по одной клавише на фортепиано. Когда первый раз «ЛЯ» Лины будет пропето одновременно с нажатием клавиши под номером 48?

C. Третью часть сонаты Лина играет, нажимая сначала на первую клавишу, потом прыгает на одну клавишу вправо, потом ещё на две клавиши, ещё на три, ..., ещё на 100. После этого она повторяет такую мелодию ещё 1935 раз. На какую по счёту клавишу она нажмёт последней?

Задачи 6 класса

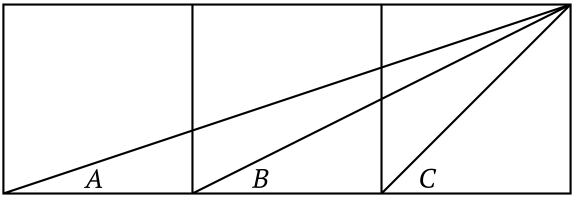
Задача 1. Разрезания и углы

A. Разрежьте тупоугольный треугольник ниже на семь остроугольных треугольников. Прямоугольный треугольник не считается остроугольным.



B. Дан квадрат со стороной 1 см. Покажите, как разрезать его на остроугольные треугольники.

C. Докажите, что сумма величин углов A и B на рисунке равна величине угла C.



Задача 2. Пока не пришёл лифтёр

Витя и Петя живут в бесконечном вверх и вниз доме и очень любят кататься на лифте. Как-то раз неведомые хулиганы сломали кнопки во всех лифтах так, что те могли двигаться только на n этажей вверх или вниз и на m этажей вверх или вниз.

A. Мальчики не растерялись — сели каждый в свой лифт и одновременно выехали с нулевого этажа, причём Витя с каждый раз едет на n этажей вверх, а Петя — на m этажей вверх. Оказалось, что первый раз они побывали на одном и том же этаже под номером 123. Чему могли быть равны n, m?

B. Петя находится этажом выше Вити. Петин лифт умеет ездить на k этажей вверх или вниз, Витин — на $k+1$ этаж вверх или вниз. Мальчики начинают ездить на лифтах, как им заблагорассудится. Может ли Петя управлять своим лифтом так, чтобы никогда не встретиться с Витей на одном этаже? Обязательно ли для этого Пете знать этаж, на котором в данный момент находится Витя?

C. Теперь Витя решил с помощью двух кнопок — на n этажей вверх или на m вниз — добраться на лифте с нулевого этажа до первого. И у него получилось. Докажите, что НОД $(n, m) = 1$.

Задача 3. На плоскости

A. Квадрат разрезан на 36 квадратиков. Из них 35 имеют площади, равные 1, а один имеет площадь большую 1. Какую?

B. Дано 12 прочных секций забора одинаковой длины. Какое наибольшее число изолированных областей можно отгородить ими от бесконечного плоского пастбища?

C. Докажите, что любой четырёхугольник имеет хотя бы одну высоту, выходящую из какой-нибудь вершины, попадающую на одну из его сторон, а не на продолжение.

Задача 4. Неземное стихосложение

A. Известный венерианский поэт несколько лет назад написал знаменитое незамысловатое стихотворение, начальные строчки которого мы приводим:

Два два.
Три два.
Два два два.
Три три.
Три два два.
Пять два.

Продолжите его, напишите последующие три строчки.

B. Венерианскому поэту на День рождения подарили большой круглый торт, и он прямым разрезом поделил его пополам. Придумайте форму блюдца такую, что на одно блюдце этой формы нельзя положить полторта, но на два одинаковых блюдца такой формы можно положить целый торт.

C. В Венерианском литературном обществе состоит 2017 поэтов. Докажите, что среди них найдутся трое, знакомые каждый друг с другом, или трое, не знакомые друг с другом.

Задача 5. Простые, но такие сложные

A. Натуральное число называется простым, если оно нацело делится только на себя и на единицу. Найдите все такие простые числа p, что числа $p+2$ и $p+4$ тоже простые.

B. Натуральное число n является произведением двух простых чисел. Каждое из этих простых чисел увеличили на 1. Произведение полученных чисел оказалось на 100 больше, чем n. Чему равно число n? Найдите все возможные варианты и объясните, почему других нет.

C. В ряд расположены 50 выключателей, все в положении «выключено». Мимо них проходят 50 электриков — k-ый из них переключает каждый k-ый выключатель (включает, если он был выключен, и наоборот). Например, седьмой электрик переключит фонари под номерами 7, 14, 21, 28 и так далее. Какие фонари останутся включенными после прохода электриков?

Задача 6. Шутка

A. Дана 200-этажная башня. Стул с 30 ножками скидывают с её крыши, и одновременно с этим более лёгкий стул совсем без ножек отправляют катиться вниз по лестнице внутри башни. Может ли безногий стул достигнуть земли быстрее, чем летящий?

B. Выписка из дневника автора задач олимпиады «Математика НОН-СТОП»:

> *Так, вчера я придумал всего четыре задачи... Мне снилось, что сегодня я придумаю в полтора раза больше задач, чем в сумме за день, когда сегодня останется вчера, и за день, для которого сегодня должно было наступить завтра... Однако в день, который будет вчера для завтра и был завтра для вчера, я придумал в три раза больше задач, чем за послезавтрашнее вчера... Что за сны-то такие странные в последнее время?..*

Если верить сну, сколько задач должен был придумать автор в день, когда он оставил эту заметку?

C. Автомобиль выехал из Петербурга в Пекин и сломался через 80 километров. На исправление неполадок ушло, правда, всего две минуты. Однако, проехав ещё 40 километров, автомобиль вновь сломался, но вновь был отремонтирован за две минуты. Далее перед каждой следующей поломкой автомобиль проезжал вдвое меньше, чем перед предыдущей, но приводился в рабочее состояние за неизменные две минуты. Доедет ли он в итоге до Пекина?

Задача 7. Многонациональные захватчики

A. Армии девяти государств вторглись на остров, имеющий форму таблицы 5×5. Каждая из армий хочет захватить себе по ячейке на этом острове так, чтобы любая из незахваченных ячеек имела бы общую сторону ровно с одной захваченной. Помогите им это сделать.

B. Армии ста государств вторглись на остров, имеющий форму таблицы 100×100, и захватили себе каждая по одной клетке. Теперь они хотят поделить остров между собой так, чтобы клетки в каждой строке и в каждом столбце все принадлежали разным государствам. Всегда ли можно поделить между государствами оставшиеся после изначального захвата клетки так, чтобы не нарушить поставленное условие?

C. Армия одного государства вторглась на остров, заселённый аборигенами. Известно, что остров имеет форму таблицы $(2k+1)\times(2k+1)$. Может ли эта армия захватить некоторые клетки острова таким образом, чтобы каждая клетка имела ровно две захваченных, соседних с ней по стороне?

Задача 8. Все числа состоят из цифр

A. Существует ли такое двузначное число, что если поменять в нём цифры местами, оно станет в три раза больше?

B. Илья и Алексей разгадывают числовой шифр XYZ из трёх цифр. Им известно, что искомое число делится на 9 и не делится на 10. Кроме того, первые две цифры образуют двузначное число XY, которое является квадратом некоторого натурального числа, а две последние цифры образуют двузначное число YZ, которое меньше 40. Помогите ребятам разгадать шифр.

C. Натуральное число n имеет 61 разряд и состоит из двоек, троек и четверок. При этом двоек на 19 больше, чем четверок. Найти остаток от деления числа n на 9.

Задачи 7 класса

Задача 1. Переводчики с немецкого

A. Переводчику нужно перевести несколько рекламных брошюр и несколько газетных заметок. Он подсчитал, что если увеличить в некоторое целое число раз количество имеющихся у него брошюр, то их станет 116. А если увеличить в такое же число раз количество имеющихся газетных заметок, то их станет 217. Сколько же брошюр и сколько заметок предстоит перевести?

B. Перед коллективом из трёх переводчиков стоит задача перевести 16 журналистских обзоров, 16 художественных текстов и 16 технических. Каждый из них сказал, сколько текстов какой специфики хочет перевести, причём пожелание каждого включало 16 текстов.

Более того, в сумме переводчики хотят перевести ровно 16 журналистских, 16 художественных и 16 технических текстов. Докажите, что их начальник может распределить тексты для перевода так, чтобы удовлетворить пожеланиям каждого из переводчиков.

C. Переводчик работает с текстом на 2-немецком. Текст на 2-немецком характерен тем, что значение может быть заключено не только в словах, но и в сочетаниях из двух подряд идущих слов. При этом всякое отдельное слово и всякое сочетание имеют своё значение. Сколькими способами можно разбить текст из n слов на слова и сочетания?

Задача 2. Гонки улиток

A. Две улитки ползут снизу вверх по столбу высотой 7 метров. Первая за день проползает 5 метров, но за ночь скатывается на 4 метра. Вторая за день преодолевает 3 метра, а за ночь соскальзывает лишь на 1. Какая из улиток быстрее доберётся до верха столба?

B. Дан клетчатый лист 31×31. В центре каждой клетки сидит по улитке. В полночь каждая улитка переползает на одну из четырёх клеток, соседних с её родной. Докажите, что в какой-то из клеток теперь нет ни одной улитки.

C. Высоко-высоко на стене сидит улитка. Прямо под ней, у подножия стены — ещё одна. Верхняя улитка хочет встретиться с нижней, а нижняя — избежать встречи с верхней. Про каждую улитку известна её максимальная скорость. Докажите, что у более быстрой улитки из этих двоих всегда есть возможность осуществить своё собственное желание.

Задача 3. Участники «Математики НОН-СТОП»

A. Парты в одном из кабинетов, где проходит олимпиада, стоят в три колонки по шесть парт в каждой. За 20 минут до олимпиады в кабинете сидело 8 школьников. Докажите, что из кабинета пока что можно утащить две свободные парты, стоящие друг за другом. А если бы школьников было 9?

B. Не оставляет никакого сомнения, что некоторые участники нашей олимпиады (в прошлом году, например, их было более 400) знакомы друг с другом. Докажите, что найдутся два участника, имеющие одинаковое количество знакомых среди других участников олимпиады.

C. Докажите, что среди участников олимпиады «Математика НОН-СТОП» найдутся трое, знакомые каждый друг с другом, или трое, не знакомые друг с другом.

Задача 4. Загадывание чисел

A. Ваня и Даня загадали по числу. Сложив эти два числа, мальчики выяснили, что их сумма делится на одно из них. Чему равен наибольший общий делитель чисел, загаданных мальчиками?

B. Галя и Валя загадали по числу. Оказалось, что загаданные девочками числа взаимно просты. Могут ли остатки от деления этих чисел на 17 оказаться не взаимно простыми? С другой стороны, верно ли, что если остатки a и b от деления на любое число взаимно просты, то и a взаимно просто с b?

C. Болек загадывает число. Лёлек просит его прибавить к загаданному числу сначала 3, потом 4, потом 5, потом 6, и наконец перемножить полученные четыре результата. У Болека получилось 288. Помогите Лёлеку найти загаданное число!

Задача 5. Многонациональные захватчики

A. Армии девяти государств вторглись на остров, имеющий форму таблицы 5×5. Каждая из армий хочет захватить себе по ячейке на этом острове так, чтобы любая из незахваченных ячеек имела бы общую сторону ровно с одной захваченной. Помогите им это сделать.

B. Армии ста государств вторглись на остров, имеющий форму таблицы 100×100, и захватили себе каждая по одной клетке. Теперь они хотят поделить остров между собой так, чтобы клетки в каждой строке и в каждом столбце все принадлежали разным государствам. Всегда ли можно поделить между государствами оставшиеся после изначального захвата клетки так, чтобы не нарушить поставленное условие?

C. Армия одного государства вторглась на остров, заселённый аборигенами. Известно, что остров имеет форму таблицы $(2k+1)\times(2k+1)$.

Может ли эта армия захватить некоторые клетки острова таким образом, чтобы каждая клетка имела ровно две захваченных, соседних с ней по стороне?

Задача 6. Порезать торт на День рождения

A. Девочке Глаше на День рождения подарили большой круглый торт. Может ли её непоседливый брат Гоша сделать в нём три непересекающихся прямых разреза так, чтобы нельзя было провести ещё трёх разрезов, которые вместе с исходными образовывали бы замкнутую несамопересекающуюся шестизвенную ломаную?

B. Девочке Зине на День рождения тоже подарили большой круглый торт, а она прямым разрезом поделила его пополам. Придумайте форму блюдца такую, что на одно блюдце этой формы нельзя положить полторта, но на два одинаковых блюдца такой формы можно положить целый торт.

C. Мальчику Феде на День рождения подарили торт в форме большого куба. Его верх и бока равномерно политы шоколадной глазурью с кокосовой крошкой. Помогите Феде разделить торт так, чтобы ему и четырём его друзьям досталось поровну объёма торта и поровну глазури.

Задача 7. Взвешивания

A. Кухонные весы врут — число, которое они показывают, на какое-то фиксированное количество граммов больше, чем реально лежащая на них масса. При взвешивании картофеля получилось 1000 граммов, при взвешивании домашнего кота — 4400 граммов. При взвешивании кота вместе с картофелем — 5000 граммов. Чему же равна погрешность весов?

B. Даны 729 монет, из них одна фальшивая — немного легче настоящих. Найдите её за 6 взвешиваний на двухчашечных весах без гирь.

C. Весы на рынке умеют показывать суммарную массу лежащих на них предметов. Есть 15 мешков: в 14 настоящие монеты, каждая весом по 20 граммов, и в последнем фальшивые — весом по 25 граммов. Как за одно взвешивание определить, в каком из мешков лежат фальшивые монеты?

Задача 8. Шутка

A. Дана 200-этажная башня. Стул с 30 ножками скидывают с её крыши, и одновременно с этим более лёгкий стул совсем без ножек отправляют катиться вниз по лестнице внутри башни. Может ли безногий стул достигнуть земли быстрее, чем летящий?

B. Выписка из дневника автора задач олимпиады «Математика НОН-СТОП»:

> *Так, вчера я придумал всего четыре задачи... Мне снилось, что сегодня я придумаю в полтора раза больше задач, чем в сумме за день, когда сегодня останется вчера, и за день, для которого сегодня должно было наступить завтра... Однако в день, который будет вчера для завтра и был завтра для вчера, я придумал в три раза больше задач, чем за послезавтрашнее вчера... Что за сны-то такие странные в последнее время?..*

Если верить сну, сколько задач должен был придумать автор в день, когда он оставил эту заметку?

C. Автомобиль выехал из Петербурга в Пекин и сломался через 80 километров. На исправление неполадок ушло, правда, всего две минуты. Однако, проехав ещё 40 километров, автомобиль вновь сломался, но вновь был отремонтирован за две минуты. Далее перед каждой следующей поломкой автомобиль проезжал вдвое меньше, чем перед предыдущей, но приводился в рабочее состояние за неизменные две минуты. Доедет ли он в итоге до Пекина?

Задача 9. Вовочка и клетчатая тетрадь

A. У Вовочки есть клетчатая тетрадь (клетки — одинаковые, квадратные), линейка без делений и карандаш. Площадь каждой клетки в тетради — 100 мм^2. Как Вовочке имеющимися средствами построить квадрат площадью 1000 мм^2?

B. Вовочка нарисовал в тетради отрезок длиной 50 мм. Как Вовочке имеющимися средствами поделить его на 3 равных части, на 7 равных частей?

C. Площадь каждой клетки в тетради — по-прежнему 100 мм^2. Как при помощи линейки без делений и карандаша построить квадрат площадью 80 мм^2?

Задача 10. Игра

A. 2017 единиц стоит в ряд, между ними поставлены плюсы. Двое по очереди ставят пары скобок в выражении так, что после каждого хода оно остаётся осмысленным, причём пару скобок нельзя ставить дважды на одни и те же места. Расставив 2016 пар скобок, они считают значение получившегося выражения — если оно чётно, выигрывает второй, иначе первый. Кто победит при правильной игре?

B. Даны две кучи камней: в одной 23 камня, вторая пока пустая. Также дан мешок с 2017 камнями. Разрешены два типа ходов. Можно брать 1, 2, 3 или 4 камня и перекладывать их из первой кучи во вторую. Также можно перекладывать 1, 2, 3 или 4 камня (если они там есть) из второй кучи в первую — при этом столько же камней, сколько взято, нужно выкинуть из мешка в окно. Играют двое; проигрывает тот, кто выкидывает последний камень из мешка. Кто победит при правильной игре?

C. Дана куча, в которой n камней. Играют двое; за ход можно убирать из кучи 1, 2, 3, ..., 8, 10, 12 или 14 камней. Выигрывает убравший последний камень. Кто победит при правильной игре? Не забудьте, что ответ должен зависеть от n.

Задачи 8 класса

Задача 1. Неизвестные цифры

A. Имеет ли данный ребус решение — то есть, можно ли сопоставить разным буквам разные цифры так, чтобы равенство стало верным:

$$\text{М}\cdot\text{И}\cdot\text{З}\cdot\text{А}\cdot\text{Н}\cdot\text{Т}\cdot\text{Р}\cdot\text{О}\cdot\text{П} = \text{ХРОМОТА}\,?$$

B. Решите ребус (то есть, сопоставьте разным буквам разные цифры, а одинаковым — одинаковые так, чтобы равенство стало верным):

$$\text{КРЕМ} + \text{КРЕМ} = \text{ЖЕЛЕ}; \quad \text{известно, что Л} = 9.$$

C. Учитель написал на доске 10 последовательных чисел. Шаловливый Стёпа, уходя после уроков домой, стёр одно — и тут же забыл, какое. Он помнил только, что сумма оставшихся на доске чисел равна 2017. Какое же конкретно число он стёр?

Задача 2. Искусное владение числами

A. Расставьте в таблицу 3×3 числа от 1 до 9 так, чтобы в каждой строке, в каждом столбце и в каждой из двух главных диагоналей сумма чисел равнялась 15.

B. Придумайте число такое, что оно делится на 17, его сумма цифр равна 17 и оканчивается оно тоже на 17.

C. Придумайте (или расскажите, как построить) 95-значное число, в котором нет нулей и которое делится на свою сумму цифр.

Задача 3. Плавучий зоопарк

A. *Друзьям посвящается.* Австралийская сколиозная кобра спит, изогнувшись замкнутой шестизвенной ломаной, пересекающей каждое своё звено ровно один раз. Схематично изобразите спящую кобру.

B. Североамериканский кролик-зануда, сидя на капитанском мостике в ожидании своей подруги, рисует на земле четырёхугольники и шестиугольники. Пересечение шестиугольника и четырёхугольника — понятное дело, какой-то многоугольник. Сколько он может иметь углов?

C. Сколько углов может иметь пересечение n–угольника и m–угольника при произвольных m и n?

Задача 4. Вовочка и клетчатая тетрадь

A. У Вовочки есть клетчатая тетрадь (клетки — одинаковые, квадратные), линейка без делений и карандаш. Площадь каждой клетки в тетради — $100\,мм^2$. Как Вовочке имеющимися средствами построить квадрат площадью $1000\,мм^2$?

B. Вовочка нарисовал в тетради отрезок длиной 50 мм. Как Вовочке имеющимися средствами поделить его на 3 равных части, на 7 равных частей?

C. Площадь каждой клетки в тетради — по-прежнему $100\,мм^2$. Как при помощи линейки без делений и карандаша построить квадрат площадью $80\,мм^2$?

Задача 5. Загадывание чисел

A. Ваня и Даня загадали по числу. Сложив эти два числа, мальчики выяснили, что их сумма делится на одно из них. Чему равен наибольший общий делитель чисел, загаданных мальчиками?

B. Галя и Валя загадали по числу. Оказалось, что загаданные девочками числа взаимно просты. Могут ли остатки от деления этих чисел на 17 оказаться не взаимно простыми? С другой стороны, верно ли, что если остатки a и b от деления на любое число взаимно просты, то и a взаимно просто с b?

C. Болек загадывает число. Лёлек просит его прибавить к загаданному числу сначала 3, потом 4, потом 5, потом 6, и наконец перемножить полученные четыре результата. У Болека получилось 288. Помогите Лёлеку найти загаданное число!

Задача 6. Пути автобуса неисповедимы

A. В стране Экляндии несколько городов, некоторые соединены между собой дорогами. Между городами ходят автобусы. Известно, что дорог столько же, сколько городов. 4 марта из каждого города выехало по автобусу, а 5 марта каждый автобус приехал в город, соединённый прямой дорогой с его родным. При каком количестве городов возможно, что 5 марта в каждом городе окажется ровно по одному автобусу?

B. В стране Двуляндии названия городов начинаются исключительно на буквы П и К. При этом каждая дорога соединяет город на букву П с городом на К. Наконец, городов на П на 16 больше, чем городов на букву К. 4 марта из каждого города выехало по автобусу, а 5 марта каждый автобус приехал в город, соединённый дорогой с его родным. Докажите, что в каком-то из городов теперь более одного автобуса.

C. На острове Квадрайлэнд четыре города. Перечислите все способы соединить эти города дорогами так, чтобы автобусы из них могли разъехаться и 5 марта оказаться по одному в городе.

Задача 7. Переводчики с немецкого

A. Переводчику нужно перевести несколько рекламных брошюр и несколько газетных заметок. Он подсчитал, что если увеличить в некоторое целое число раз количество имеющихся у него брошюр, то их станет 116. А если увеличить в такое же число раз количество имеющихся газетных заметок, то их станет 217. Сколько же брошюр и сколько заметок предстоит перевести?

B. Перед коллективом из трёх переводчиков стоит задача перевести 16 журналистских обзоров, 16 художественных текстов и 16 технических. Каждый из них сказал, сколько текстов какой специфики хочет перевести, причём пожелание каждого включало 16 текстов. Более того, в сумме переводчики хотят перевести ровно 16 журналистских, 16 художественных и 16 технических текстов. Докажите, что их начальник может распределить тексты для перевода так, чтобы удовлетворить пожеланиям каждого из переводчиков.

C. Переводчик работает с текстом на 2-немецком. Текст на 2-немецком характерен тем, что значение может быть заключено не только в словах, но и в сочетаниях из двух подряд идущих слов. При этом всякое отдельное слово и всякое сочетание имеют своё значение. Сколькими способами можно разбить текст из n слов на слова и сочетания?

Задача 8. Примечательный учебный день

A. Во дворе школы появилось странное дерево. Сначала оно казалось обыкновенным ростком, но потом, достигнув высоты два метра, ствол разделился на две ветки. Когда дерево доросло до трёх метров, каждая из веток разделилась на три ветки. Соответственно, по достижении деревом высоты m метров каждая ветка делилась на m более мелких веток. Со сколькими ветками дерево достигнет высоты 12 метров?

B. Тем временем в кабинете биологии учитель Анастасия Спиридоновна осознала: перед ней 26 ужасных детей — 13 неугомонных мальчиков и 13 не менее неугомонных девочек. Она завела себе за правило каждую неделю менять рассадку детей в классе так, чтобы за партой всегда сидели один мальчик и одна девочка, но при этом пара, сидящая за партой, не сидела бы вместе ни в одну из предыдущих недель. На протяжении скольких недель она сможет следовать заведённому себе правилу?

C. Каким станет ответ в предыдущем пункте, если за партой могут сидеть также и два мальчика, и две девочки?

Задача 9. О числах маленьких и больших

A. «Произведение двух чисел – это мелко и ничтожно! — утверждал Незнайка. — Вот сумма – это другое дело! Глядите, $1 + 5 > 1 \cdot 5$ и даже $1 + 1000 > 1 \cdot 1000$, вот как!» Докажите, тем не менее, что если числа $a \geq 2$, $b > 2$, то их сумма строго меньше их произведения.

B. Единица, стоящая первой в числе 1’000’000 уверена, что при зачёркивании первой цифры числа от него остаётся сущий пустяк. Помогите ей разобраться, существуют ли натуральные числа, которые при зачёркивании первой цифры уменьшаются ровно в (а) 57 раз (б) 58 раз.

C. Пусть дано составное число $n \geq 4$. Докажите, что n можно представить в виде произведения нескольких (более одного) натуральных чисел, так что их сумма также равна n.

Задача 10. Игра

A. 2017 единиц стоит в ряд, между ними поставлены плюсы. Двое по очереди ставят пары скобок в выражении так, что после каждого хода оно остаётся осмысленным, причём пару скобок нельзя ставить дважды на одни и те же места. Расставив 2016 пар скобок, они считают значение получившегося выражения — если оно чётно, выигрывает второй, иначе первый. Кто победит при правильной игре?

B. Даны две кучи камней: в одной 23 камня, вторая пока пустая. Также дан мешок с 2017 камнями. Разрешены два типа ходов. Можно брать 1, 2, 3 или 4 камня и перекладывать их из первой кучи во вторую. Также можно перекладывать 1, 2, 3 или 4 камня (если они там есть) из второй кучи в первую — при этом столько же камней, сколько взято, нужно выкинуть из мешка в окно. Играют двое; проигрывает тот, кто выкидывает последний камень из мешка. Кто победит при правильной игре?

C. Дана куча, в которой n камней. Играют двое; за ход можно убирать из кучи 1, 2, 3, ..., 8, 10, 12 или 14 камней. Выигрывает убравший последний камень. Кто победит при правильной игре? Не забудьте, что ответ должен зависеть от n.

Задача 11. Возводим в степень

A. Приведите пример трёх подряд идущих натуральных чисел таких, что каждое из них делится на квадрат какого-нибудь простого числа.

B. Укажите наименьшее натуральное число такое, что его половина — квадрат натурального числа, его треть — куб натурального числа, а его пятая часть — пятая степень натурального числа.

C. Докажите, что можно придумать сколь угодно длинную цепочку идущих подряд натуральных чисел, каждое из которых делится на квадрат какого-нибудь простого.

Задача 12. Шутка

A. Дана 200-этажная башня. Стул с 30 ножками скидывают с её крыши, и одновременно с этим более лёгкий стул совсем без ножек отправляют катиться вниз по лестнице внутри башни. Может ли безногий стул достигнуть земли быстрее, чем летящий?

B. Выписка из дневника автора задач олимпиады «Математика НОН-СТОП»:

> *Так, вчера я придумал всего четыре задачи... Мне снилось, что сегодня я придумаю в полтора раза больше задач, чем в сумме за день, когда сегодня останется вчера, и за день, для которого сегодня должно было наступить завтра... Однако в день, который будет вчера для завтра и был завтра для вчера, я придумал в три раза больше задач, чем за послезавтрашнее вчера... Что за сны-то такие странные в последнее время?..*

Если верить сну, сколько задач должен был придумать автор в день, когда он оставил эту заметку?

C. Автомобиль выехал из Петербурга в Пекин и сломался через 80 километров. На исправление неполадок ушло, правда, всего две минуты. Однако, проехав ещё 40 километров, автомобиль вновь сломался, но вновь был отремонтирован за две минуты. Далее перед каждой следующей поломкой автомобиль проезжал вдвое меньше, чем перед предыдущей, но приводился в рабочее состояние за неизменные две минуты. Доедет ли он в итоге до Пекина?

Задачи профильного варианта 7 класса

Задача 1. Без нулей

Двадцать восемь, двадцать девять, двадцать десять...

Рассмотрим обыкновенную десятичную систему счисления и то, как в ней записываются натуральные числа. Мы хотим найти способ избавиться от нулей в записи этих чисел. Давайте вместо нуля введём цифру «десять», которую будем записывать как X и употреблять наравне с другими цифрами. После такой модификации системы счисления число 30, например, станет записываться как 2X, число 100 — как 9X, число 3107 — как 2XX7.

1. Переведите числа 110, 2202, 500’000 из десятичной системы счисления в модифицированную. Переведите числа 1X17, XXXX, 512 из модифицированной системы счисления в десятичную.

2. Объясните, почему всякое число имеет единственную запись в нашей модифицированной системе счисления.

3. Опишите алгоритм перевода чисел из десятичной системы в модифицированную и обратно.

4. Докажите, что запись числа в модифицированной системе счисления всегда не длиннее его записи в десятичной. Приведите пример, когда она строго короче десятичной.

5. Опишите правила сложения и умножения в столбик в модифицированной системе счисления (см. рис. R). Отличаются ли они от правил в обыкновенной десятичной системе?

$$
\begin{array}{r}
\times\begin{array}{cccccc} & & 1 & X & X & 3 \\ & & & 4 & X & 7 \end{array} \\
\hline
\begin{array}{cccccc} & 1 & \overset{7}{4} & \overset{7}{7} & \overset{2}{2} & 1 \\ 1 & \overset{X}{X} & \overset{X}{X} & \overset{2}{2} & X & \\ \overset{4}{8} & \overset{4}{4} & \overset{1}{1} & 2 & & \end{array} \\
\hline
\begin{array}{cccccc} \overset{1}{X} & \overset{1}{6} & \overset{1}{6} & \overset{1}{2} & 2 & 1 \end{array}
\end{array}
$$

рис. R

6. Придумайте способ распространить модифицированную систему счисления и на неположительные числа. В частности, как записать ноль в этой системе счисления?

7. В модифицированной системе счисления попробуйте сформулировать признаки делимости на

   — 2, 4, произвольную степень двойки;

   — 5, 25, произвольную степень пятёрки;

   — 3, 9;

   — 11.

8. Что ещё можно сказать про модифицированную систему счисления? Как построить её аналог, используя двоичную систему вместо десятичной? Предложите свои направления исследования и изучите их.

Задача 2. Дорога до метро

Рассмотрим клетчатую сетку, её рёбра и узлы. Путём между двумя узлами будем называть последовательность рёбер, их соединяющую. Длину пути в разных случаях будем определять по-разному, однако стандартный способ — понимать под длиной пути количество рёбер в нём.

Определим *k–окрестность* узла — это множество всех узлов, до которых от данного существует путь длиной не более чем *k*. На рисунке М1 изображены путь длины 3 и 3–окрестность центрального узла.

1. Длину пути можно ввести и по-другому. Давайте определим её как сумму величин смещения пути по горизонтали и по вертикали. Скажем, путь на рисунке М2 будет тогда иметь длину 5. Как будет выглядеть 4-окрестность фиксированного узла при так определённой длине?

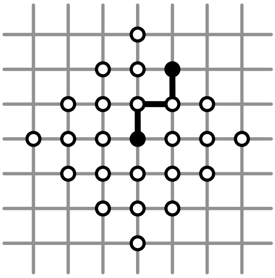


рис. М1

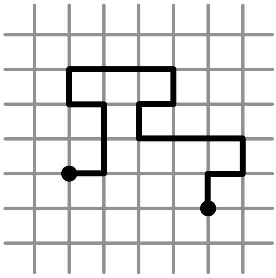


рис. М2

2. А если мы определим длину пути как максимум; как минимум; как модуль разности величин смещения по горизонтали и по вертикали?

3. Рассмотрим два определения длины пути: стандартным способом и как в пункте 1. Понятно, что один путь может иметь разную длину в первом и во втором смысле. Докажите, тем не менее, что любая k–окрестность в смысле первой длины и в смысле второй длины выглядит одинаково.

4. Пусть длина пути определена стандартным образом. Пусть узел B отстоит от узла A на m клеток вправо и на n клеток вниз. Сколько кратчайших путей ведут из A в B?

Давайте теперь выберем из клетчатой сетки несколько узлов и некоторые рёбра между ними. Назовём выбранное нами *городом*. Расположим в каких-то из узлов города *станции метро*. Расстоянием от узла внутри города до данной станции метро будем называть длину (в стандартном смысле) кратчайшего пути между ними, лежащего внутри города. На рисунке М3 изображены пример города, пара станций метро, а также кратчайшие пути от одного из узлов до станций.

5. Для каждого узла в городе найдём ближайшую к нему станцию метро и расстояние до неё. Найдём в городе все узлы, в которых найденное расстояние достигает своего максимума. Теперь для каждого узла посчитаем сумму расстояний от него до всех станций метро и тоже найдём узлы, где эта сумма достигает максимального значения.

   Придумайте город и расстановку в нём станций метро такую, что множества узлов, где максимально кратчайшее расстояние, и узлов, где максимальна сумма расстояний, не пересекаются.

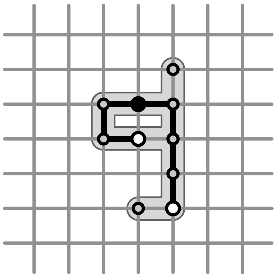


рис. М3

6. Докажите, что какой бы ни была расстановка станций метро в произвольном городе, максимальная сумма расстояний и максимальное среднее расстояние до станций всегда достигаются в одних и тех же узлах.

7. Для каждого узла в городе найдём самую далёкую от него станцию метро и расстояние до неё. Найдём в городе все узлы, в которых найденное расстояние достигает своего максимума.

   Придумайте город и расстановку в нём станций метро такую, что три множества: узлов, где максимально кратчайшее расстояние; узлов, где максимальна сумма расстояний; узлов, где максимально наибольшее расстояние — не пересекаются.

8. Какие ещё особенные узлы можно рассматривать в городе со станциями метро? Предложите свои направления исследования и изучите их.

Задачи профильного варианта 8 класса

Задача 1. Через тернии к звёздам

1. Рассмотрим вершины правильного n–угольника. Расстоянием между двумя вершинами будем называть длину кратчайшего пути между ними по сторонам n–угольника; расстояние между вершинами A и B обозначается $d\left(A, B\right)$ — смотреть рисунок S1. Докажите, что для любых трёх вершин A, B, C выполнено неравенство $d\left(A, B\right) + d\left(B, C\right) \geq d\left(A, C\right)$.

2. Для данного n–угольника, сколько различных значений принимает расстояние между его вершинами? Для данной вершины, сколько других вершин n–угольника находятся на фиксированном расстоянии от неё? Сколько вершин n–угольника наиболее удалены от данной?

3. Обратите внимание на то, что расстояние между вершинами не меняется при вращении n–угольника. Попробуйте определить расстояние между вершинами так, чтобы оно менялось при поворотах многоугольника. Правда ли, что любое расстояние, сохраняющееся при вращении, отличается от нашего умножением на какое-то число?

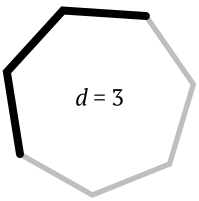


рис. S1

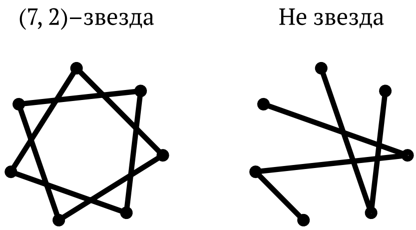


рис. S2

4. Фиксируем правильный n–угольник. Тогда (n, k)–звезда — минимальный набор замкнутых ломаных наименьшей длины такой, что любые две вершины n–угольника, находящиеся на расстоянии k друг от друга, соединены ребром одной из ломаных набора (смотреть рисунок S2). Сколько для данного n существует (n, k)–звёзд, состоящих из одной ломаной?

5. Для данных n и k, из скольки ломаных состоит (n, k)–звезда?

6. Для данных n и ℓ, сколько (n, k)–звёзд состоит ровно из ℓ ломаных?

7. Через $\varphi(n)$ обозначим количество натуральных чисел, меньших n и взаимно простых с n. Используя свои знания о звёздах, докажите формулу

$$\sum_{d \text{ делит } n} \varphi(d) = n.$$

Задача 2. Без нулей

Двадцать восемь, двадцать девять, двадцать десять...

Рассмотрим обыкновенную десятичную систему счисления и то, как в ней записываются натуральные числа. Мы хотим найти способ избавиться от нулей в записи этих чисел. Давайте вместо нуля введём цифру «десять», которую будем записывать как X и употреблять наравне с другими цифрами. После такой модификации системы счисления число 30, например, станет записываться как 2X, число 100 — как 9X, число 3107 — как 2XX7.

1. Переведите числа 110, 2202, 500’000 из десятичной системы счисления в модифицированную. Переведите числа 1X17, XXXX, 512 из модифицированной системы счисления в десятичную.

2. Объясните, почему всякое число имеет единственную запись в нашей модифицированной системе счисления.

3. Опишите алгоритм перевода чисел из десятичной системы в модифицированную и обратно.

4. Докажите, что запись числа в модифицированной системе счисления всегда не длиннее его записи в десятичной. Приведите пример, когда она строго короче десятичной.

5. Опишите правила сложения и умножения в столбик в модифицированной системе счисления (см. рис. R). Отличаются ли они от правил в обыкновенной десятичной системе?

```
    1XX3
 ×
     4X7
 ------
   772
  14721
  XX2
 1XX2X
 441
 8412
 ------
 1111
 X66221
```

рис. R

6. Придумайте способ распространить модифицированную систему счисления и на неположительные числа. В частности, как записать ноль в этой системе счисления?

7. В модифицированной системе счисления попробуйте сформулировать признаки делимости на

— 2, 4, произвольную степень двойки;

— 5, 25, произвольную степень пятёрки;

— 3, 9;

— 11.

8. Что ещё можно сказать про модифицированную систему счисления? Как построить её аналог, используя двоичную систему вместо десятичной? Предложите свои направления исследования и изучите их.

Задача 3. Дорога до метро

Рассмотрим клетчатую сетку, её рёбра и узлы. Путём между двумя узлами будем называть последовательность рёбер, их соединяющую. Длину пути в разных случаях будем определять по-разному, однако стандартный способ — понимать под длиной пути количество рёбер в нём.

Определим *k–окрестность* узла — это множество всех узлов, до которых от данного существует путь длиной не более чем *k*. На рисунке М1 изображены путь длины 3 и 3–окрестность центрального узла.

1. Длину пути можно ввести и по-другому. Давайте определим её как сумму величин смещения пути по горизонтали и по вертикали. Скажем, путь на рисунке М2 будет тогда иметь длину 5. Как будет выглядеть 4-окрестность фиксированного узла при так определённой длине?

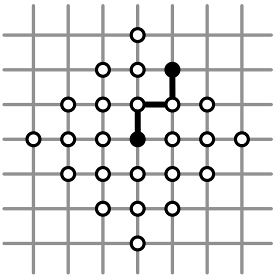


рис. М1

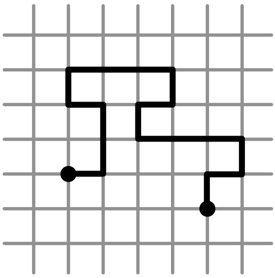


рис. М2

2. А если мы определим длину пути как максимум; как минимум; как модуль разности величин смещения по горизонтали и по вертикали?

3. Рассмотрим два определения длины пути: стандартным способом и как в пункте 1. Понятно, что один путь может иметь разную длину в первом и во втором смысле. Докажите, тем не менее, что любая *k*–окрестность в смысле первой длины и в смысле второй длины выглядит одинаково.

4. Пусть длина пути определена стандартным образом. Пусть узел B отстоит от узла A на m клеток вправо и на n клеток вниз. Сколько кратчайших путей ведут из A в B?

Давайте теперь выберем из клетчатой сетки несколько узлов и некоторые рёбра между ними. Назовём выбранное нами *городом*. Расположим в каких-то из узлов города *станции метро*. Расстоянием от узла внутри города до данной станции метро будем называть длину (в стандартном смысле) кратчайшего пути между ними, лежащего внутри города. На рисунке М3 изображены пример города, пара станций метро, а также кратчайшие пути от одного из узлов до станций.

5. Для каждого узла в городе найдём ближайшую к нему станцию метро и расстояние до неё. Найдём в городе все узлы, в которых найденное расстояние достигает своего максимума. Теперь для каждого узла посчитаем сумму расстояний от него до всех станций метро и тоже найдём узлы, где эта сумма достигает максимального значения.

Придумайте город и расстановку в нём станций метро такую, что множества узлов, где максимально кратчайшее расстояние, и узлов, где максимальна сумма расстояний, не пересекаются.

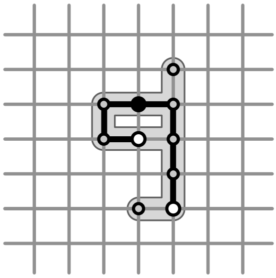


рис. М3

6. Докажите, что какой бы ни была расстановка станций метро в произвольном городе, максимальная сумма расстояний и максимальное среднее расстояние до станций всегда достигаются в одних и тех же узлах.

7. Для каждого узла в городе найдём самую далёкую от него станцию метро и расстояние до неё. Найдём в городе все узлы, в которых найденное расстояние достигает своего максимума.

Придумайте город и расстановку в нём станций метро такую, что три множества: узлов, где максимально кратчайшее расстояние; узлов, где максимальна сумма расстояний; узлов, где максимально наибольшее расстояние — не пересекаются.

8. Какие ещё особенные узлы можно рассматривать в городе со станциями метро? Предложите свои направления исследования и изучите их.