Задача 1. Треугольник Паскаля

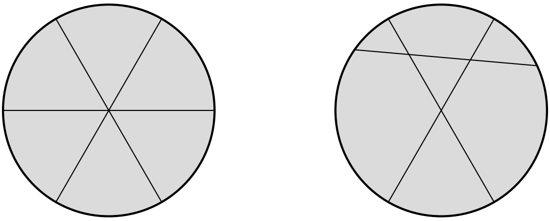
Этот исследовательский проект состоит из нескольких шагов. Если у вас не получается до конца разобраться в каком-то шаге, пропустите его и изучайте следующий.

- Найдите сумму чисел в каждой строке треугольника Паскаля.
- Найдите сумму первого, третьего, пятого, ... (и так далее) элемента в какой-нибудь строке треугольника Паскаля. Найдите закономерность.
- Найдите сумму второго, четвёртого, шестого, ... (и так далее) элемента в строке треугольника Паскаля. Найдите закономерность.
- Найдите сумму квадратов чисел в каждой строке треугольника Паскаля.
- Выясните, где в треугольнике Паскаля спрятались треугольные числа $T_n = 1 + 2 + \ldots + n$.
- А где спрятались пирамидальные числа $P_n = T_1 + T_2 + \ldots + T_n$? А где квадратные числа $S_n = n^2$?
- Выясните, как связаны числа $1, 11, 11^2, 11^3, 11^4, \ldots$ с треугольником Паскаля.
- Что будет если взять самый левый элемент в строке треугольника Паскаля, вычесть из него следующий (по горизонтали), прибавить следующий за ним, затем вычесть следующий, ... (и т.д.) до тех пор, пока не кончатся числа в строке? Какое число получится? Найдите закономерность.
- Ответьте на предыдущий вопрос, если брать не сами элементы треугольника Паскаля, а их квадраты.
- Выясните, делятся ли все элементы (кроме крайних двух единиц) в строке на номер этой строки (нумерация строк начинается с нуля)? А когда делятся?
- Выберите число 1 у края треугольника Паскаля и идите по диагонали вниз. Начните складывать все встречающиеся числа и в какой-нибудь момент остановитесь. Какое число получилось в сумме? А что получится в общем случае?

- Что получится, если заштриховать все четные числа в треугольнике? Какой будет узор?
- А если зашриховать все числа, делящиеся на 3?
- Где спрятались числа Фибоначчи в треугольнике Паскаля?
- Чему равна сумма чисел в каком-нибудь параллелограмме треугольника Паскаля? Найдите закономерность.
- Откройте свои собственные закономерности в треугольнике и назовите их в свою честь

Задача 2. Задача о разрезании пиццы

Три разреза через центр круглой пиццы дают шесть кусочков. Если же сделать третий разрез не через центр, то мы получим семь кусочков разной формы и размера. Немного поэкспериментировав, вы убедитесь в том, что наибольшее число кусков, которое вы можете получить с помощью трёх разрезов — это семь. Но сколько кусочков вы можете получить с помощью большего числа разрезаний?



- Какое наибольшее число кусочков пиццы вы можете получить с помощью четырёх разрезов?
- Опишите принцип максимизации для разрезания пиццы. А именно, ответьте на вопрос: как должен проходить новый разрез, чтобы получилось как можно больше кусочков?
- Пицца Якоба Штейнера имеет бесконечный радиус, а потому о ней можно мыслить просто как о плоскости. Как связан ответ на общую задачу о пицце с ответом на задачу о разрезании пиццы Якоба Штейнера?
- Через P_n (от слова *pieces* — кусочки) обозначим максимальное число кусков, на которое можно разрезать пиццу с помощью n разрезов. Например, $P_1 = 2$ и $P_2 = 4$. Выразите P_n через P_{n-1} и найдите P_{137}.

- Стандартный кусочек пиццы очень похож на треугольник. А как связана задача о разрезании пиццы с треугольными числами?

- Предположим, что мы получили P_n кусочков пиццы за n разрезаний. Обозначим через C_n (от слова crust — корка) число тех кусочков пиццы, граница которых не содержит корочки пиццы. Найдите явную формулу для C_n.

- Сложим первые три числа на каждой строчке треугольника Паскаля. Какое число получается?

- Решите аналогичную *задачу о разрезании прямой*. Как вы думаете, а как будет связан ответ на новую задачу с треугольником Паскаля?

- Решите аналогичную *задачу о разрезании арбуза*. Как вы думаете, а как будет связан ответ на новую задачу с треугольником Паскаля? Уже догадались, какой ответы мы получим, если будем разрезать n–мерный шар?

- Выпишем элементы последовательности P_n в строчку, а под ней запишем её *производную последовательность* ΔP_n (вычитаем из элемента его предыдущий)

последовательность	1		2		4		7		11		16		22
разности		1		2		3		4		5		6	. . .
разности разностей			1		1		1		1		1	. . .	
разн. разностей разностей				0		0		0		0	. . .		

Как видите, четвёртая строка состоит из нулей. Напишите такую же табличку для последовательности каких–нибудь фигурных чисел.

последовательность	a_0		a_1		a_2		a_3		a_4		a_5
разности		b_0		b_1		b_2		b_3		b_4	. . .
разности разностей			c_0		c_1		c_2		c_3	. . .	
разн. разностей разностей				0		0		0	. . .		

Докажите, что если есть произвольная последовательность a_n обладает тем свойством, что $\Delta c_n = 0$, где $\Delta a_n = b_n$ и $\Delta b_n = c_n$, то

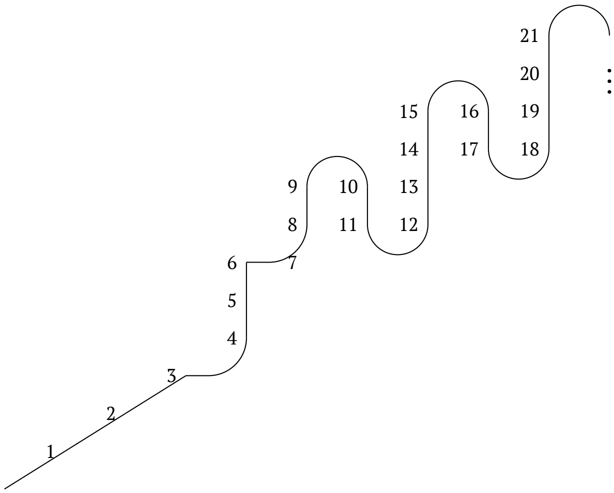
$$a_n = a_0\binom{n}{0} + b_0\binom{n}{1} + c_0\binom{n}{2}.$$

А что можно сказать про последовательности, у которых $c_n = 0$? А $b_n = 0$?

Задача 3. Знакомство с простыми числами

Этот исследовательский проект состоит из нескольких шагов. Если у вас не получается до конца разобраться в каком–то шаге, пропустите его и изучайте следующий.

- Начните писать натуральные числа последовательно вдоль извивающейся линии, как показано на рисунке.



  Найдите на полученной спирали закономерность, связанную с простыми числами, и объясните её.

- Сколько делителей имеют числа $1, 2, 4, 8, 16, 32, \ldots$? А когда число вида $2^n - 1$ является простым? Составьте таблицу чисел такого вида и найдите закономерность.

- Выясните, для каких чисел n число $(n-1)! + 1$ делится на n. Найдите закономерность.

- Выясните, для каких чисел n число $n^2 - 1$ делится на 24. Найдите закономерность.

- Выясните, для каких чисел n число $n^2 + 1$ является простым. Найдите закономерность.

- Выясните, для каких чисел n число $2^n - 2$ делится на n. Найдите закономерность.

- Посмотрим на числа вида $n^2 - n$. Получаем $0, 2, 6, 12, 20, \ldots$. Все эти числа делятся на два. Посмотрим на числа вида $n^3 - n$. Получаем

$0, 6, 24, 60, 120, 210, 336, \ldots$. Все эти числа делятся на три! А что дальше? Будут ли числа вида $n^4 - n$ делиться на четыре? А числа вида $n^5 - n$ на пять? Найдите закономерность.

Задача 4. Закопеременные представления

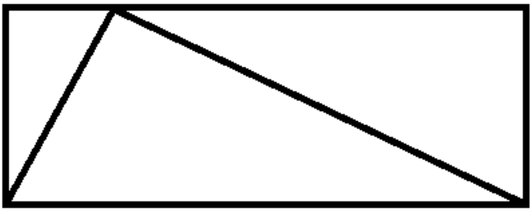
- Представьте число 1 в виде произведения нескольких чисел, сумма которых равна нулю.
- Решите ту же самую задачу для чисел $2, 4, 6$.
- Решите эту задачу для числа 3. Сможете ли вы найти разложение, в котором все числа являются именно целыми, а не рациональными?
- Исследуйте вопрос представимости для произвольных натуральных чисел.

Задача 5. Как же я люблю разрезать!

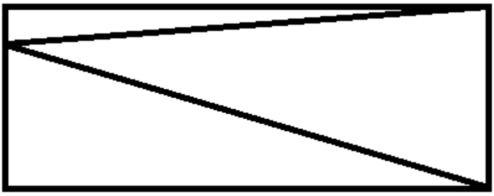
- Возможно ли разрезать на равнобедренные треугольники: а) квадрат; б) прямоугольник? Если да, то покажите как.
- Ответьте на тот же вопрос, если нужно разрезать а) параллелограмм; б) равнобокую трапецию. Если можно, то покажите как.
- Попытайтесь разрезать фигуры на наименьшее возможное число равнобедренных треугольников.
- Попробуйте изменить форму фигур из списка выше. Как тогда изменится Ваше разбиение на треугольники? Рассмотрите экстремальные ситуации.

Задача 6. Геометрическая миниатюра

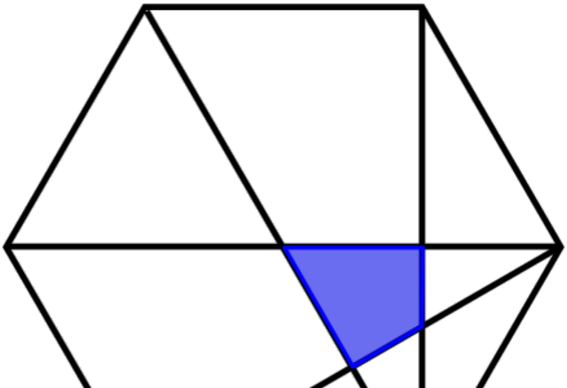
- Как вы думаете, какую часть (по площади) составляет треугольник внутри прямоугольника на картинке ниже?



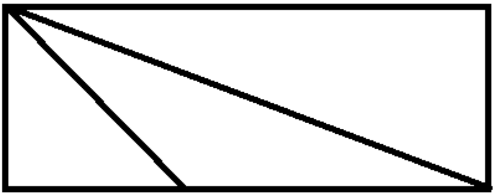
- А какую часть составляет такой треугольник?



- Как вы думаете, какую часть (по площади) составляет выделенная область от всего правильного шестиугольника?



- Выясните, какую часть (по площади) составляет такой треугольник в прямоугольнике



Задача 7. Треугольные числа

- Можно ли представить число 201745 в виде суммы двух треугольных чисел?
- Какие натуральные числа можно представить в виде суммы не более двух треугольных чисел? Найдите закономерность.
- Какие натуральные числа можно представить в виде суммы не более трёх треугольных чисел? Найдите закономерность.
- (Золотая теорема). Какие числа можно представить в виде суммы не более n n–угольных чисел?

Задача 8. Шарики в коробках

Перед вами бесконечный набор коробок, на каждой из которых написано простое число.

2 3 5 7 11 13 17 19 23 29 31 37 41 43 47 53 59 ...

Вам дали несколько белых шариков и вы решили положить их все в какие–то коробки (в одну коробку можно положить сразу много шириков). После этого пришёл эксперт, многозначно посмотрел на вашу расстановку шариков по ящикам и выдал вам число следующим образом: он возвёл число 2 в степень α_2, равную количеству шариков в коробке с надписью 2, потом возвёл число 3 в степень α_3, равную количеству шариков в коробке с надписью 3, потом возвёл число 5 в степень α_5, равную количеству шариков в коробке с надписью 5, и так далее. Затем он умножил все эти числа между собой. Получись число $n = 2^{\alpha_2} \cdot 3^{\alpha_3} \cdot 5^{\alpha_5} \cdot \ldots$.

- В коробке 2 лежит 3 шарика, а в коробках 3 и 11 лежат по одному шарику. Какое число назовёт эксперт?

- Сколько шариков вам понадобится и куда их нужно положить, чтобы эксперт назвал вам число 6? А число 12? А число 21?
- В каком случае эксперт назовёт вам простое число? А составное?
- Вы расположили шарики в коробках и эксперт назвал число n. Что нужно сделать, чтобы он назвал число np, где p — простое число?
- Известно, что число n, которое назвал эксперт, делится на простое число p. Что нужно сделать, чтобы эксперт назвал число n/p?
- Вы положили несколько белых шариков в коробки и эксперт назвал Вам число n, а потом то же самое происходит с расстановкой чёрных шариков вашего друга — он получает число m. Что нужно сделать, чтобы эксперт назвал число nm? А что нужно сделать, чтобы эксперт назвал НОД(n, m)? А НОК(n, m)? А что можно сказать про расположения белых и чёрных шариков, если числа n, m взаимно просты?
- Оказалось, что все m шариков положили в одну коробку. Сколько делителей у числа, которое назвал эксперт?
- Оказалось, что m шариков положили в одну коробку, а k — в другую. Сколько делителей у числа, которое назвал эксперт?
- Как определить количество простых делителей числа, которое назовёт эксперт?
- Правда ли, что можно заставить эксперта назвать любое натуральное число, если правильно подобрать шарики?

Задача 9. Конфигурации точек

В 2014 г. на Санкт-Петербургской олимпиаде школьников по математике была предложена следующая задача:

> На двух параллельных прямых отмечено по 40 точек. Их разбивают на 40 пар так, чтобы отрезки, соединяющие точки в одной паре, не пересекались друг с другом. (В частности, конец одного из отрезков не может лежать на другом отрезке). Докажите, что число способов это сделать не превосходит числа 3^{39}.

Последовательность, возникающая в этой задаче, обладает богатыми комбинаторными реализациями, их разнообразие просто изумляет. Опишем общую ситуацию: пусть даны две параллельные прямые, на одной отмечено k точек, на другой n точек.

Отмеченные точки разбивают на пары так, чтобы отрезки, соединяющие точки в одной паре, не пересекались друг с другом. В частности, конец одного из отрезков не может лежать на другом отрезке.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & [0,0] & & \\
 & [2,0] & [1,1] & [0,2] & \\
[4,0] & [3,1] & [2,2] & [1,3] & [0,4] \\
 & & \ldots & &
\end{array}$$

Полученную картинку будем называть *конфигурацией* (точек и отрезков на двух прямых) или *разбиением* (точек на пары). Количество разбиений обозначим через $[k,n]$. Например, $[2,4] = 4$, как показывает рисунок выше.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & 1 & 1 & & & \\
 & & 1 & 2 & & 2 & 1 & & \\
 & 1 & 3 & & & & 3 & 1 & \\
1 & 4 & & & & & & 4 & 1
\end{array}$$

Кроме того, если $n+k$ нечётно, то $[k,n] = 0$, а также $[k,n] = 0$, если $n,k < 0$. Если n или k равно нулю, то $[k,n] = 1$ просто по-определению.

- Заполните треугольник выше и найдите в нём закономерности, аналогичные закономерностям в треугольнике Паскаля.

- Выясните, какую последовательность образуют суммы элементов в строках треугольника.

- Правда ли, что в каждой строчке числа $[k,n]$ обязательно возрастают при движении от краёв к центру?

- Выясните, как выразить $[n,n]$ через суммы квадратов чисел на диагоналях в треугольнике Паскаля.

Задача 10. Двойственность

Как известно, линейная функция задаётся уравнением $y = kx + b$, а графиком линейной функции является прямая. Каждая такая прямая определяется парой чисел (k, b). Построим новую координатную плоскость (k, b), *точки* на которой обозначают прямые на исходной координатной плоскости (x, y).

- Нарисуйте на плоскости (x, y) какие–нибудь четыре прямые и отметьте их в виде четырёх точек на плоскости (k, b).
- Обратно: выберите три точки на плоскости (k, b) и нарисуйте соответствующие три прямые на плоскости (x, y). Что будет, если выбирать точки на (k, b) лежащими на одной вертикальной прямой? А горизонтальной?
- Рассмотрим на плоскости (k, b) прямую $b = k$. Каждая точка этой прямой задаёт на плоскости (x, y) какую–то прямую, а вся прямая $b = k$ задаёт на плоскости (x, y) набор прямых. Каким свойством обладает этот набор прямых?
- На координатной плоскости (k, b) проведено три прямые, проходящие через одну точку. Каждая такая прямая изображает некоторый набор прямых на плоскости (x, y). Как эти три набора прямых связаны между собой?
- Аналогичный вопрос для трёх параллельных прямых на (k, b).
- Рассмотрим набор всех прямых плоскости (x, y), которые проходят через точку $(0, 0)$. Как этот набор изображается на плоскости (k, b)? Тот же самый вопрос при замене точки $(0, 0)$ на (m, n).
- Рассмотрим на плоскости (k, b) прямую $b = uk + v$. Какой набор прямых на плоскости (x, y) изображает эта прямая?
- Прямые $b = uk + v$ на плоскости (k, b) задают точки на новой плоскости (u, v). Как новая плоскость связана с плоскостью (x, y)?

Задача 11. Задача Иосифа Флавия

В книге «Иудейская война» Иосифа Флавия есть история о том, как он в составе отряда из 41 иудейского воина был загнан римлянами в пещеру. Предпочитая самоубийство плену, воины решили выстроиться в круг и последовательно убивать каждого третьего из живых, до тех пор пока не останется ни одного человека. Однако Иосиф наряду с одним из своих единомышленников счел подобный конец бессмысленным — он быстро вычислил спасительные места в порочном круге, на которые поставил себя и своего товарища. И лишь поэтому мы знаем его историю.

В нашем варианте мы начнём с того, что выстроим в круг n человек, пронумерованных числами от 1 до n, и будем исключать каждого *второго* из оставшихся до тех пор, пока не уцелеет только один человек. Например, если $n = 10$, то порядок исключения будет такой: 2, 4, 6, 8, 10, 3, 7, 1, 9, так что остаётся номер 5. Убедитесь в этом!

- Обозначим через $J(n)$ номер последнего уцелевшего человека. Мы только что выяснили, что $J(10) = 5$. Можно было предположить, что $J(n) = n/2$ при чётном n. Верно ли это? Начните с $n = 2, 3, 4, \ldots$.
- Выпишите табличку, в которой для малых n указаны порядки исключения чисел. Правда ли, что $J(n)$ всегда нечётно? Почему?
- Пусть n чётно. Выясните, что происходит в тот момент, когда из круга исключается последнее чётное число. Как связаны $J(n)$ и $J(n/2)$?
- Найдите аналогичную закономерность для нечётного n.
- Пусть $n = 2^m$. Найдите $J(n)$.
- Выпишите таблицу значений $J(n)$ для n от 1 до 16 и найдите для $J(n)$ явную формулу.