Вопросы по курсу «Математика»

8 класс, второе полугодие, 2017–2018 учебный год

Часть I. Отношения порядка

[1.1] Отношения порядка. Линейный, полный порядок. Всякий полный порядок является линейным. Примеры линейных и нелинейных порядков.

[1.2] Наибольший и наименьший элементы; единственность при условии существования.

[1.3] Минимальные, максимальные элементы. Может ли их быть несколько? Если есть наименьший — он единственный минимальный.

[1.4] Верхние, нижние грани. Супремум и инфимум. Единственность sup и inf. Если есть наименьший — он инфимум. Ограниченные множества.

[1.5] Промежутки на прямой: определения, наибольшие и наименьшие элементы (если есть), sup и inf. Промежутки образуют полукольцо.

[1.6] Примеры множеств, где *(а)* есть единственный максимальный элемент, но нет наибольшего *(б)* нет ни sup, ни inf.

Часть II. Соответствия и функции

[2.1] Соответствие; образ, прообраз, обратное соответствие, композиция соответствий.

[2.2] Отображение, функция. Инъективность, сюръективность, биективность. Тождественное отображение, его биективность; $\mathbb{I}\mathrm{d} = \mathbb{I}\mathrm{d}^{-1}$, $\mathbb{I}\mathrm{d} \circ \mathbb{I}\mathrm{d} = \mathbb{I}\mathrm{d}$, $f \circ \mathbb{I}\mathrm{d} = f$.

[2.3] Композиция инъективных отображений инъективна, сюръективных — сюръективна, биективных — биективна.

[2.4] Определение обратимого отображения. Единственность обратного отображения. Обратимость равносильна биективности.

[2.5] Обратное к композиции отображений: $(f_1 \circ f_2)^{-1} = \dots$

[2.6] Два отображения взаимно обратны $\Longleftrightarrow$ их композиции — $\mathbb{I}\mathrm{d}$.

Часть III. Алгебраические операции

[3.1] Алгебраическая операция. Ассоциативность, коммутативность, сократимость, обратимость — определения, примеры и антипримеры.

[3.2] Нейтральный элемент. Правый и левый нейтральные. Есть правый и левый нейтральный $\Longrightarrow$ они совпадают, являются нейтральным.

[3.3] Композиция функций ассоциативна. Нейтральный элемент единственен.

[3.4] Аннулятор. Аннулятор единственен.

[3.5] Сложение матриц 2×2. Ассоциативность умножения матриц 2×2, нейтральный элемент для умножения матриц. Некоммутативность умножения матриц 2×2.

[3.6] Правый обратный, левый обратный, обратный. Если ассоциативность, и есть правый и левый обратные — они совпадают.

[3.7] Обобщённая ассоциативность. Её равносильность обыкновенной. Определение полугруппы.

[3.8] Степень, свойства степени.

[3.9] Идемпотент. В конечной полугруппе есть идемпотент.

Часть IV. Теория групп — 1

[4.1] Три определения группы, пример — множество биективных функций ($\mathrm{Bij}(X)$). Равносильность трёх определений группы.

[4.2] $(a^n)^{-1} = (a^{-1})^n$ — доказательство по индукции.

[4.3] В группе ровно один идемпотент — нейтральный элемент. В группе нет аннуляторов.

[4.4] Операция в группе сократима.

[4.5] Определение группы преобразований множества X.

[4.6] Циклическая группа — определение и примеры. Для циклической группы эквивалентны условия:

— она конечна;

— $a^n = 1$ для какого-то n;

— не все степени элемента a различны.

[4.7] Таблица Кэли конечной группы: свойство строк и столбцов.

[4.8] Определитель матрицы 2×2; определители перемножаются при перемножении матриц. Определитель единичной матрицы.

[4.9] Условие существования обратной матрицы в $M_2(\mathbb{Z})$ и $M_2(\mathbb{R})$, явное построение.

[4.10] Определение подгруппы. Определение замкнутого множества. Примеры. Доказательство того, что $H \subseteq G$ — подгруппа $\iff H$ — замкнутое множество.

[4.11] Гомоморфизм, примеры; ядро, образ гомоморфизма. Ядро, образ являются подгруппами.

[4.12] Гомоморфизм инъективен $\iff$ ядро состоит из нейтрального элемента.

[4.13] Отношение эквивалентности $\sim_H$.

[4.14] Левый смежный класс — определение. $g_1 \sim_H g_2 \iff$ их смежные классы совпадают.

[4.15] Левый смежный класс — класс эквивалентности отношения $\sim_H$. Следствия: смежные классы не пересекаются либо совпадают.

[4.16] Теорема Лагранжа — доказательство.

Часть V. Группы движений

[5.1] Все изометрии — $\mathrm{Iso}\,(\mathbb{R}^2)$. Группа $\mathrm{Iso}\,(\mathbb{R}^2)$ является группой преобразований для $\mathbb{R}^2$.

[5.2] Некоммутативность группы $\mathrm{Iso}\,(\mathbb{R}^2)$.

[5.3] Все переносы на вектор — $V(\mathbb{R}^2)$. Перенос на вектор является изометрией.

[5.4] Диэдральная группа $D_n \subset \mathrm{Iso}\,(\mathbb{R}^2)$: определение, количество элементов, элементы s и r. Группа D_n порождается элементами s и r; эти элементы не коммутируют.

[5.5] Соотношения в группе D_n: $s^2 = \mathbb{I}\mathrm{d}$, $r^n = \mathbb{I}\mathrm{d}$, $r \circ s \circ r \circ s = \mathbb{I}\mathrm{d}$.

[5.6] Циклическая и диэдральная группы как вращения пирамиды и диэдра.

[5.7] Группа O_2. Некоммутативность, $D_n \subseteq \mathrm{O}_2$.

[5.8] Группа SO_2. Коммутативность, $C_n \subseteq \mathrm{SO}_2$.

[5.9] Группа SO_3. Некоммутативность, $D_n \subseteq \mathrm{SO}_3$.

[5.10] Описание всех конечных подгрупп SO_2.

[5.11] Описание всех конечных подгрупп $\mathrm{Iso}\,(\mathbb{R}^2)$ — формулировка.

Часть VI. Теория групп — 2

[6.1] Описание всех подгрупп группы $(\mathbb{Z}, +)$.

[6.2] Пересечение подгрупп — подгруппа. Объединение подгрупп — не всегда подгруппа.

[6.3] Два определения нормальной подгруппы, доказательство их эквивалентности. Пересечение нормальных подгрупп — нормальная.

[6.4] Обратное отображение к изоморфизму является изоморфизмом.

[6.5] Определитель обратимых матриц как гомоморфизм.

[6.6] Гомоморфизм $\mathbb{R} \longrightarrow \mathrm{SO}_2$, SO_2 как фактор группа.

[6.7] Ядро гомоморфизма является нормальной подгруппой.

[6.8] Фактор-группа, гомоморфизм проекции — определения, примеры.

[6.9] Теорема Нётер: $\operatorname{dom} f \,/\, \ker f \cong \operatorname{im} f$.

[6.10] Любая нормальная подгруппа — ядро какого-то гомоморфизма.

[6.11] Гомоморфизм из $\mathbb{Z}$ в произвольную группу.

[6.12] Всякая циклическая (в смысле нашего определения) группа изоморфна некоторому фактору $\mathbb{Z}$.

[6.13] Индекс подгруппы. Мощность факторгруппы как индекс.

[6.14] Количество правых и левых смежных классов совпадает.

[6.15] Подгруппа индекса 2 всегда нормальна.

[6.16] Сопряжённый элемент. Сопряжение — автоморфизм.

[6.17] Сопряжённая подгруппа. Сопряжённые подгруппы изоморфны. SO_2^0 и $\mathrm{SO}_2^{(x,y)}$.

Часть VII. Группы перестановок

[7.1] Группа перестановок: определение, разные записи, композиция.

[7.2] Гомоморфизм $S_n \hookrightarrow S_{n+1}$. Его образ — не нормальная подгруппа.

[7.3] Разложение перестановки в непересекающиеся циклы, а циклов — в транспозиции.

[7.4] Цикленный тип. Перестановки сопряжены $\Longleftrightarrow$ имеют один цикленный тип. Количество перестановок данного цикленного типа.

[7.5] Если есть биекция $X \longrightarrow Y$, то $\mathrm{Bij}(X)$ и $\mathrm{Bij}(Y)$ изоморфны как группы.

[7.6] Инверсии, знак — определения. Знак транспозиции — -1.

[7.7] Определение знака перестановки через произведение знаков каких-то чисел.

[7.8] Знак композиции — произведение знаков.

[7.9] Знак — гомоморфизм из S_n в $\{-1, 1\}$.

[7.10] Все разложения перестановки на транспозиции имеют одну чётность длины.

[7.11] Знак цикла в зависимости от его длины.

[7.12] Знаки обратной перестановки, знаки сопряжённых перестановок.

[7.13] $A_n = \ker \operatorname{sign}$ — знакопеременная группа. Она нормальная подгруппа в S_n. Количество её элементов.

[7.14] Теорема Кэли, доказательство.