Лекции по геометрии и топологии, I семестр бакалавриата "Математика и теоретическая информатика" (2015-2019) СПбГУ.

(лектор Сергей Владимирович Иванов)

27 января 2016 г.

Оглавление

Глава 1

Общая топология

1.1 Литература

1. Борисович, Близняков "Введение в топологию"

2. Келли "Общая топология"

3. Энгелькинг "Общая топология"

1.2 Метрические пространства

Def. Метрическое пространство - это множество X с заданной функцией $d : X \times X \to \mathbb{R}$ (обычно называемая расстоянием или метрикой), удовлетворяющая следующим аксиомам:

1. $\forall x, y \in X \ d(x, y) \geq 0$, причём $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (неотрицательность)
2. $\forall x, y \in X \ d(x, y) = d(y, x)$ (симметричность)
3. $\forall x, y, z \in X \ d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$ (неравенство треугольника)

На лекциях, а так же во многих книжках могут встречаться следующие обозначения для $d(x, y)$: $d_X(x, y)$, $\rho(x, y)$, $|xy|$

St. "Неравенство многоугольника":
$\forall x_1, x_2, \ldots, x_n \in X \ d(x_1, x_2) + \ldots + d(x_{n-1}, x_n) \geq d(x_1, x_n)$
Proof: несложное упрожнение на индукцию.
Ex.

1. X - любое множество,
$$d(x, y) = \begin{cases} 1, x \neq y \\ 0, x = y \end{cases}$$
2. $X = \mathbb{R}$, $d(x, y) = |x - y|$
3. $\mathbb{R}^2$, $d((x, y), (x_1, y_1)) = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}$
4. Евклидова метрика:
   $\mathbb{R}^n$, $d((x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n)) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}$
   Пожалуй, только для последнего примера неочевидно, что указанное пространство - метрическое. Несколько позднее это станет для нас очевидным, поскольку будет следствием некоторого более общего факта, пока в это можно просто поверить.
5. X - метрическое пространство, $Y \subseteq X$, тогда:
   $(Y, d_X|_{Y \times Y})$ - так же метрическое пространство(сужение метрики)

6. Прямое произведение метрических пространств:

   $]X, Y$ - метрические пространства. Введём на $X \times Y$ следующую метрику:

   $d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{d_X(x_1, y_1)^2 + d_Y(x_2, y_2)^2}$

   Th. $X \times Y$ с таким образом заданной метрикой образует метрическое пространство

   Proof:

   1 и 2 аксиомы для этой метрики очевидны. Проверим выполнение третьей аксиомы:

   $d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) + d((x_2, y_2), (x_3, y_3)) \geq d((x_1, y_1), (x_3, y_3)) \Leftrightarrow$

   $\Leftrightarrow \sqrt{d(x_1, x_2)^2 + d(y_1, y_2)^2} + \sqrt{d(x_2, x_3)^2 + d(y_2, y_3)^2} \geq \sqrt{d(x_1, x_3)^2 + d(y_1 y_3)^2}$

   Оценим правую часть по неравенству треугольника:

   $\sqrt{d(x_1, x_3)^2 + d(y_1 y_3)^2} \leq \sqrt{(d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3))^2 + (d(y_1, y_2) + d(y_2, y_3))^2}$

   Сделаем замену:

   $d(x_1, x_2) = a$, $d(x_2, x_3) = b$, $d(y_1, y_2) = c$, $d(y_2, y_3) = d$

   Теперь осталось доказать:

   $\sqrt{(a + b)^2 + (c + d)^2} \leq \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2}$

   А это в свою является неравенством треугольника на плоскости для точек $(0, 0)$, (a, b), $(a + c, b + d)$, которое доказываеться в школьном курсе планиметрии.

   Таким образом теорема доказана.

7. Кратное произведение метрических пространств:

   $]X_1, X_2, \ldots, X_n$ - метрические пространства($n \in \mathbb{N}$, $n > 2$)

   Тогда $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n = (X_1 \times (X_2 \times (\ldots \times X_n)) \ldots)$

   Называется произведением метрических пространств X_1, $X_2, \ldots$, X_n

   По индукции легко показываеть, что метрика на нём задана следующим образом:

   $d((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}$

   Таким образом мы в частности доказали, что в 4 примере действительно описано метрическое пространство

Приведём ещё 2 примера метрик в $\mathbb{R}^n$

8. $d_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = |x_1| + \ldots + |x_n|$

   $d_1((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)) = d_1(x_1 - y_1, \ldots, x_n - y_n)$

9. $d_\infty(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \max(|x_1|, \ldots, |x_n|)$

   $d_\infty((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)) = d_\infty((x_1 - y_1), \ldots, (x_n - y_n))$

   Легко показать, что обе эти функции задат метрическое пространство. В качестве замечания отметим, что существуют метрики d_x для всех x в промежутке от 1 до ∞. Желающие могут попытаться угадать, как выглядит общая формула, если Евклидова метрика - это d_2

Def.Пусть X - метрическое пространство, $x \in X$, $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$
Открытым шаром радиуса r с центром в x называется множество:

$$B_r(x) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$$

Замкнутым шаром радиуса r с центром в x называется множество:

$$\overline{B}_r(x) = \{y \in X : d(x, y) \leq r\}$$

Def.Пусть X - метрическое пространство, $A \subseteq X$, $A \neq \emptyset$, $x \in X$, тогда расстояние между A и x определяется так:

$$d(x, A) = \inf\{|xy| : y \in A\}$$

Аналогично случаю точки r-окрестностью множества A при $r > 0$ называется множество:

$$U_r(A) = \{x \in X : d(x, A) < r)$$

Def.Пусть X - метрическое пространство, $A \subseteq X$, $A \neq \emptyset$. Диаметром множества A называется величина:

$$diam(A) = \sup_{x,y \in A} \{|xy|\}$$

Множество A называется ограниченым, если $diam(a) < \infty$
St. A - ограничено $\Leftrightarrow$ A содержится в некотором шаре.
Proof: очевидно.
Упражнение: A, B - ограниченные $\Leftrightarrow$ $A \bigcup B$ - ограничено.

Def.Пусть X - метрическое пространство, $A \subseteq X$
A называется открытым, если:

$$\forall x \in A \, \exists r > 0 :_r (x) \subseteq A$$

Ex.

1. X - открыто.
2. $\emptyset$ - открыто.
3. Любой открытый шар открыт:

$$\forall x \in B_r(p) \, B_{r-|px|}(x) \subseteq B_r(p)$$

4. Случай $X = \mathbb{R}$
   (a) Интервал $(x,\, y)$, $x, y \in \mathbb{R} \bigcup \{\pm\infty\}$ открыт.
   Proof:
   Пусть $t \in (x,\, y)$. Тогда $B_{min(|tx|,|ty|}(t) \subseteq (x,\, y)$ (считаем, что $d(t, +\infty) = d(t, -\infty) = \infty$)
   (b) Замкнутый хоть с одной стороны интервал не открыт.
   Proof:
   Пусть наш интервал - $[x,\, y)$(остальные случаи разбираются аналогично)
   Тогда $\forall r > 0 \, x - r/2 < x \Rightarrow (x - r/2) \notin [x,\, y) \Rightarrow$
   $\Rightarrow \forall r > 0 \, B_r(x) \nsubseteq [x,\, y) \Rightarrow [x,\, y)$ - не открыто.
   (c) **Th.**Все открытые множества в $\mathbb{R}$ - объединения непересекающихся интервалов
   Proof:
   $]U$ - открытое множество в $\mathbb{R}$. Введём на его элементах следующее отношение:
   $x, y \in U$. $x \sim y \Leftrightarrow [x,\, y] \subseteq U$
   Легко проверить, что это отношение является отножением эквивалентности.

St.Любой класс эквивалентности - открыт.

Proof:

Пусть V - один из классов эквивалентности, $x \in V$

Тогда $x \in U \Rightarrow \exists r > 0 : B_r(x) \subseteq U$. Но тогда:

$\forall y \in B_r(x) x \sim y \Rightarrow \forall y \in B_r(x) y \in V \Rightarrow B_r(x) \in V$

Таким образом V - открыто.

Из определения классов эквивалентности следует, что все классы эквивалентности выпуклы(то есть с любыми 2 точками содержат весь отрезок между ними). В $\mathbb{R}$ выпуклыми множествами, очевидно, являются только интервалы. Таким образом любой класс эквивалентности является во-первых открытам множеством, а во-вторых интервалом. Значит, по пунктам (a) и (b), V - открытый интервал.

Таким образом, так как U - дизъюнктное объединение классов эквивалентности по отношению $\sim$, то U является объединием непересекающихся открытых интервалов и теорема доказана.

Th.Объединение любого набора открытых множеств открыто:

Proof:

$]\{U_i\}_{i \in I}$ - семейство открытых множеств в X.

Хотим доказать, что $U = \bigcup\limits_{i \in I} U_i$ - открыто.

$]x \in U$. Тогда $\exists i \in I : x \in U_i$.

Так как U_i - открыто, то $\exists r > 0 : B_r(x) \subseteq U_i$. Но тогда верно и что $B_r(x) \subseteq U$, так как $U_i \subseteq U$. Таким образом U - открыто.

Cons.$\forall A \subseteq X$, $\forall r > 0\, U_r(A)$ - открыто.

Proof:

Очевидно, что $U_r(A) = \bigcup\limits_{a \in A} B_r(a)$. Тогда, поскольку все открытые шары открыты, мы можем применить только что доказанную теорему и получить, что $U_r(A)$ - открыто.

Th.Пересечение конечного набора открытых множеств открыто.

Proof: достаточно доказать для 2 открытых, для большего числа будет следовать по индукции.

$]U$, V - открытые. Хотим доказать, что $U \bigcap V$ - открыто.

Рассмотрим произвольный x из $U \bigcap V$.

Так как $x \in U$ и $x \in V$, то существуют такие $r_1 > 0$, $r_2 > 0$, что:

$B_{r_1}(x) \subseteq U$, $B_{r_2}(x) \subseteq V$

Но тогда $B_{min(r_1,r_2)} \subseteq U \bigcap V$

Пример, показывающий важность слова "конечного":

$X = \mathbb{R} \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} B_{1/n}(0) = \{0\}$ - не открыто в $\mathbb{R}$.

Прмер, показывающий, что в некоторых простанствах бесконечное пересечение открытых множеств всё же может быть открытым(aka контрпример к контрпримеру)

$]d(x, y) = 1\, \forall x \neq y$

В этой метрике любое множество является открытым, поэтому бесконечное пересечение любого семейства множеств не имеет других возможностей, кроме как быть открытым.

Def. Дискретное пространство - пространство, в котором все множества открыты.

1.3 Топологические пространства

Def. $]X$ - некое множество, $\Omega \in 2^X$

Ω - топологическая структура(топология) на X, если:

1. $\emptyset \in \Omega$, $X \in \Omega$
2. A, $B \in \Omega \Rightarrow A \bigcap B \in \Omega$
3. $\forall i \in I\ A_i \in \Omega \Rightarrow \bigcup\limits_{i \in I} A_i \in \Omega$

Def. Топологическое пространство - это пара (X, Ω), где Ω - топологическая структура на X

Элементы Ω называют открытыми множествами топологического пространства (X, Ω)

Ex.

1. Метрические пространства
2. $\Omega = 2^X$ - дискретная топология
3. $\Omega = \emptyset, X$ - антидискретная топология
4. $X = \mathbb{R}$, $\Omega = \{(a, +\infty) : a \in \mathbb{R}\} \bigcup \{\mathbb{R}\} \bigcup \{\emptyset\}$

   Такая топология называется стрелкой.
5. $\Omega = \{\emptyset\} \bigcup \{A \in X : |X \backslash A| < \infty\}$ - дополнения конечных множеств и пустое множество.
6. $X = \{a, b\}$, $\Omega = \{\emptyset, X, \{a\}\}$

Def. Топологическое пространство называется метризуемым, если существует метрика, которая порождает его топологию.

Какие из указанных выше примеров являются метризуемыми?

1. Метризуемо.
2. Метризуемо.(см. конец 1 параграфа)
3. При $|X| > 1$ - не метризуемо.
4. Не метризуемо.
5. Не метризуемо для бесконечных множеств.
6. Не метризуемо.

Проверить все эти утверждения, а так же то что все эти примеры - действительно топологические пространства, остаётся читателю в качестве упражнения.

Далее для краткости мы будем говорить про топологическое пространство $X(= (X, \Omega))$, если из контекста понятно, как на нём задана топология. Всегда по умолчанию считается, что топология наиболее естественная из возможных(обычно метрическая).

Def. X - топологическое пространство. $A \subseteq X$ называется замкнутым, если $X \backslash A$ - открыто.

Th.

1. $\emptyset, X$ - замкнуты
2. A, B - замкнуты $\Rightarrow A \bigcup B$ - замкнуто

3. $\forall i \in I\ A_i$ - замкнуты $\Rightarrow \bigcap\limits_{i\in I} A_i \in \Omega$

Proof: Переход к дополнениям в определении топологического пространства.

Ex.

1. В метрическом пространстве все одноточечные множества замкнуты:

   $\{a\} = X \backslash \{ \bigcup\limits_{b\in X\backslash a} B_{d(a,b)}(b)\}$ - дополнение открытого.

2. В метрическом пространстве замкнутые шары замкнуты:

   $X\backslash \overline{B}_r(a) = \bigcup\limits_{b\in X\backslash \overline{B}_r(a)} B_{d(a,b)-r}(b)$ - открыто.

3. На прямой замкнутыми являются($X = \mathbb{R}$:

   $\emptyset, \mathbb{R}, [a,b]\ (a \leq b), [a. +\infty), (-\infty, a]$

   Все отсальные интервалы не являются замкнутыми.

   Однако, в отличие от открытых множеств, на прямой нет такой удобной классификации замкнутых множеств. Например существует такое плохое замкнутое множество, не состоящее из конечного числа замкнутых интервалов: канторово множество: $C_0 = [0.1]$

   $C_1 = C_0 \backslash (1/3, 2/3)$

   $C_2 = C_1 \backslash ((1/9, 2/9) \bigcup (7/9, 8/9))$

   И так далее.

   $C_0 \supset C_1 \supset C_2 \supset ...$

   $C = \bigcap\limits_{i=0}^{\infty} C_i$ Оно замкнуто, как пересечение бесконечного семейства закнутых, но при этом, очевидно, не является объединением конечного семейства интервалов.

   Существуют и более плохие примеры замкнутых множеств на $\mathbb{R}$.

4. В дискретной топологии все множества - замкнутые.

5. В антидискретной топологии замкнуты только $\emptyset$ и X.

Сревнение топологий:

Def.] Ω_1, Ω_2 - топологии на X

Пусть $\Omega_1 \subseteq \Omega_2$. Тогда говорят, что Ω_1 слабее(грубее), чем Ω_2, а Ω_2 соответсвенно сильнее(тоньше), чем Ω_1

Th.] $d_1,\ d_2$ - 2 метрики на X

Топология матрики d_1 слабее, чем топология метрики $d_2 \Leftrightarrow$ в любом шаре d_1 содержится шар метрики d_2 с тем же центром.

Proof:

$\Rightarrow$] d_1 слабее d_2

Любой открытый шар $B_r^{d_1}(x)$ открыт в $d_2\ \Rightarrow$ любая точка содержится вместе с некоторым шаром $\Rightarrow \exists r_1 : B_{r_1}^{d_2}(x) \subseteq B_r^{d_1}(x)$ - что и требовалось

$\Leftarrow$ Пусть B - открыто в d_1. Для каждой точки B возьмём шар с тем радиусом(в d_1), с которым она лежит в B. После этого возьмём для каждого выбранного шара шар в d_2 с тем же центром, лежащий в нём(такой есть по предположению). объеденим их все - получим как раз B.

Cons.

1. $d_1 \leq d_2 \Rightarrow d_2$ грубее d_1

2. $\exists c > 0 : d_1 \leq c d_2 \Rightarrow d_2$ грубее d_1

3. $\exists c_1,\ c_2 : 0 < c_2 \leq d_1/d_2 \leq c_1 \Rightarrow d_1$ и d_2 задают одну и ту же топологию(отношение имеется ввиду тогда, когда оно определено)

Def. d_1 и d_2 называются липшицево эквивалентными, если $\exists c_1, c_2 > 0$:
$c_1 d_2 \leq d_1 \leq c_2 d_2$
Очевидно это отношение эквивалентности.
Th. d_1 и d_2 липшицево эквивалентны $\Rightarrow$ их топологии совпадают.
Proof: см. Cons. 3

Ex.

На $\mathbb{R}^n$ $d_2,\ d_1,\ d_\infty,\ d_p (1 \le p \le \infty)$ попарно эквивалентны:

$d_\infty \le d_p \le n d_\infty$

Замечание: если две метрики задают одну и ту же топологию, то не обязательно чтобы они были липшицево эквиваленты, например:

$X = \mathbb{R}$ $d(x, y) = \sqrt{|x - y|}$. d и d_1 задают, очевидно, одну и ту же топологию, но они не эквивалентны.

Th.] U - открытое, V - замкнутое. Тогда:

$U \backslash V$ - открыто($U \backslash V = U \bigcap (X \backslash V)$)

$V \backslash U$ - замкнуто($V \backslash U = V \bigcap (X \backslash V)$)

1.4 Внутренность и замыкание

Def.] X - топологическое пространство, $A \subseteq X$

Внутренностью A называется объединение всех открытых множеств, содержащихся в A:

$$Int(A) = \bigcup_{U \subseteq A,\ U \in \Omega} U$$

Замыканием A называется пересечение всех замкнутых множеств, содержащих A:

$$Cl(A) = \bigcap_{U \supseteq A,\ X \setminus U \in \Omega} U$$

Prop.

1. $Int(A)$ - открытое множество

   $Cl(A)$ - замкнутое множество

2. B - открыто, $B \subseteq A \Rightarrow B \subseteq Int(A)$

   B - замкнуто, $B \supseteq A \Rightarrow B \supseteq Cl(A)$

3. $A = Int(A) \Leftrightarrow A$ открыто

   $A = Cl(A) \Leftrightarrow A$ замкнуто

4. $Int(Int(A)) = Int(A)$

   $Cl(Cl(A)) = Cl(A)$

5. $Int(X \setminus A) = X \setminus Cl(A)$

   $Cl(X \setminus A) = X \setminus Int(A)$

6. $A \subseteq B \Rightarrow Int(A) \subseteq Int(B)$

   $A \subseteq B \Rightarrow Cl(A) \subseteq Cl(B)$

7. $Int(A \bigcap B) = Int(A) \bigcap Int(B)$

   $Cl(A \bigcap B) = Cl(A) \bigcup Cl(B)$

8. $Int(A \bigcup B) \supseteq Int(A) \bigcup Int(B)$

   $Cl(A \bigcap B) \subseteq Cl(A) \bigcap Cl(B)$

Замечание: бывает, что не равно

$X = \mathbb{R}, A = \mathbb{Q}, B = \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$

$IntA = IntB = \emptyset$

$Int(A \bigcup B) = Int(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$

Все эти свойства вполне очевидны, поэтому остаются читателю в качестве упражнения.
Def. $]X$ - топологическое пространство, $A \subseteq X$
Границей множества A называется разность его внутренности и замыкания:
$Fr(A) = Cla(A) \backslash Int(A)$
Prop.

1. $Fr(A)$ - замкнуто
2. $Fr(A) = Fr(X \backslash A)$
3. A - замкнуто $\Leftrightarrow A \supseteq Fr(A)$
4. A - открыто $\Leftrightarrow A \bigcap Fr(A) = \emptyset$

Расположение точки относительно множества.
Def. $]X$ - топологическое пространство, $x \in X$
Окрестностью точки x называется любое открытое множество, содержащее x
Для дальнейших определений считается, что X - топологическое пространство, $A \subseteq X$
Def. $x \in A$ называется внутренней точкой множества A, если существует такая окрестность U точки x, что $U \subseteq A$

$x \in X$ называется внешней точкой множества A, если X - внутренняя для $X \backslash A$. Другими словами существует такая окрестность U точки x, что $U \bigcap A = \emptyset$

$x \in X$ называется граничной точкой множества A, если она не является ни внутренней, ни внешней точкой множества A. То есть:
$\forall U$ - окрестности x $U \bigcap A \neq \emptyset \ \wedge \ U \bigcap (X \backslash A) \neq \emptyset$
Th. Множество A - открыто $\Leftrightarrow$ все его точки внутренние
Proof:
$\Rightarrow$ В качестве окрестности подойдёт само A

$\Leftarrow$ Рассмотрим для каждой точки $x \in A$ такую окрестность U_x, что $x \in U_x \subseteq A$

Тогда $A \subseteq \bigcup\limits_{x \in A} U_x$, поскольку $\forall x \in A \ x \in U_x$ и $\bigcup\limits_{x \in A} U_x \subseteq A$, поскольку $\forall x \in A \ U_x \subseteq A$. Тогда $A = \bigcup\limits_{x \in A} U_x$, а значит A - открыто

Th. $Int(A) = \{x \in A | x$ - внутренняя точка $A\}$

Proof:

$x \in Int(A) \Rightarrow x$ содержится в A со своей окрестностью - $Int(A)$, значит x - внтуренняя

x - внутренняя $\Rightarrow \exists U$ - окрестность x такая что $U \subseteq A$. Тогда по свойству внутренности $U \subseteq Int(A)$ и значит $x \in Int(A)$

Def. x - точка прикосновения множества A, если любая её окрестность пересекается с A (= x - не внешняя)

Th. $Cl(A) = \{x \in X | x$ - точка прикосновения $A\}$

Proof: $Cl(A) = X \backslash Int(X \backslash A)$

x - точка прикосновения $A \Leftrightarrow x$ - не внешняя точка $A \Leftrightarrow x$ - не внутренняя точка $X \backslash A \Leftrightarrow x \notin Int(X \backslash A)$

Cons. A - замкнуто $\Leftrightarrow$ A содержит все свои точки прикосновения

Proof: A - замкнуто $\Leftrightarrow$ $A = Cl(A)$

Def. $x \in A$ называется изолированной точкой множества A, если

$\exists U$ - окрестность x такая что $A \backslash \{x\} \bigcap U = \emptyset$

Def. x - предельная точка множества A, если $\forall U$ - окрестности x $A \backslash \{x\} \bigcap U \neq \emptyset$

Очевидно из определения, что любая предельная точка является точкой прикосновения.

Таким образом у нас получилось 2 классификации точек замыкания множества A:

1. $Cl(A) = \{$ внутренние точки $A\} \bigsqcup \{$ граничные точки $A\}$

2. $Cl(A) = \{$ предельные точки $A\} \bigsqcup \{$ изолированные точки $A\}$

Def. $A \subseteq X$ называется всюду плотным, если $Cl(A) = X$

Def. Говорят, что топологическое пространство X - сепарабельно, если в нём существует не более чем счётное всюду плотное множество

Ex.

$\mathbb{R}, \ \mathbb{R}^n$ - сепарабельны: $\mathbb{R} = Cl(\mathbb{Q}), \ \mathbb{R}^n = Cl(\mathbb{Q}^n)$

St. A - всюду плотно $\Leftrightarrow Int(X \backslash A) = \emptyset$

Proof: $Int(X \backslash A) = X \backslash Cl(A)$

St. A - всюду плотно $\Leftrightarrow \forall U \neq \emptyset$ - открытого $U \bigcap A \neq \emptyset$

Proof: Пусть U - такое непустое открытое, что $U \bigcap A \neq \emptyset$. Тогда $U \subseteq X \backslash A$ и значит $Int(X \backslash A) \supseteq U \neq \emptyset$

Th. В сепарабельном пространстве нет более чем счётного дизъюнктного набора непустых открытых множеств

Proof: Пусть $S \in X$ - не более чем счётное всюду плотное множество, $\{U_i\}_{i \in I}$ - дизъюнктный набор непустых откдытых множеств

Так как S - счётно, то $\forall i \in I \ \exists p_i \in S \bigcap U_i$

Все p_i различны, поскольку U_i попарно не пересекаются.

$\{p_i\}_{i \in I} \subseteq S \Rightarrow \{p_i\}_{i \in I}$ - не более чем счётно $\Rightarrow I$ - не более чем счётно.

1.5 База топологии

Def.] $X = (X, \Omega)$ - топологическое пространство

$\Sigma \subseteq \Omega$ называется базой топологии, если:

$\forall U \in \Omega \ \exists \ \Lambda \subseteq \Sigma : \ U = \bigcup \Lambda$

Иными словами любое множество из Ω представляется как объединение какого-то набора множеств из Σ

Ex. X - метрическое, $\Sigma = \{B_r(x) | x \in X, \ r \in \mathbb{R}_+\}$

Def. X - топологическое пространство, $x \in X$. $\Lambda \subseteq \Omega$ называется базой в точке x(= база окрестностей в точке x)? если:

1. $\forall \ V \in \Lambda \ x \in V$
2. $\forall U \in \Omega, \ x \in U \ \exists \ V \in \Lambda : V \subseteq U$

Ex. X - метрическое, $\Sigma_x = \{B_r(x) | \ r \in \mathbb{R}_+\}$

Th. Σ - база топологии $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall x \in X \ \forall U$ - окрестность $x \ \exists V \in \Sigma : x \in V \subseteq U$

Proof:

$\Rightarrow$ Рассмотрим произвольный элемент x, поризвольное U - открытое, содержащее x.

Так как Σ - база топологии, то U является объединением некоторых элементов Σ: $U = \bigcup \Lambda, \ \Lambda \in \Sigma$

Рассмотрим такое $V \in \Lambda$, что $x \in V$ - оно нам подойдёт.

$\Leftarrow$ U - произвольное открытое множество. Для каждого x из U рассмотрим такое $V_x \in \Sigma$, что $x \in V_x \subseteq U$. Тогда $U = \bigcup\limits_{x \in U} V_x$, что и требовалось.

Cons.

1. $\Sigma \subseteq \Omega$ - база топологии $\Leftrightarrow \forall x \in X \ \Sigma_x := \{V \in \Sigma | x \in V\}$ - база в точке x
2. $\{\Sigma_x\}_{x \in X}$ - семейство баз в точках.Тогда $\bigcup\limits_{x \in X} \Sigma_X$ - база топологии

Th. X - множествоб $\Sigma \in 2^X$

Σ - база некоторой топологии на $X \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \bigcup \Sigma = X \ \wedge \ \forall \ U, V \in \Sigma \ \exists \Lambda \subseteq \Sigma : U \bigcap V = \bigcup \Lambda$

Proof:

$\Rightarrow$ Само X должно быть объединением некоторых множеств из базы, поэтому тем более $\bigcup \Sigma = X$

Если U и V из базы, то U и V - открыты. Тогда и $U \bigcap V$ открыто и значит должно представляться в виде объединения некоторых элементов базы.

$\Leftarrow \Omega := \{\bigcup \Lambda | \Lambda \subseteq \Sigma\}$

Покажем, что Ω - это топология(то, что тогда Σ будет её базой очевидно из определения Ω)

1. $\emptyset = \bigcup \emptyset$

   $X = \bigcup \Sigma$

2. $\{U_i\}_{i \in I} \subseteq \Omega$

   $U_i = \bigcup \Lambda_i,\ \Lambda_i \subseteq \Sigma$

   $\bigcup\limits_{i \in I} U_i = \bigcup (\bigcup\limits_{i \in I} \Lambda_i)$

3. $U, V \in \Omega$

   $U = \bigcup\limits_{i \in I} U_i,\ U_i \in \Sigma$

   $V = \bigcup\limits_{j \in J} V_j,\ V_j \in \Sigma$

   $U \bigcap V = \bigcup\limits_{i \in I,\ j \in J} (U_i \bigcap V_j)$

   По условию $U_i \bigcap V_j \in \Omega$, тогда по п. 2 $\bigcup\limits_{i \in I,\ j \in J} (U_i \bigcap V_j) \in \Omega$

Def. $\Sigma \subseteq \Omega$ - предбаза, если Ω - наименьшая по включению топология, содержащая Σ

St. $\forall\ \Sigma \subseteq 2^X\ \exists\ \Omega$ - такая топология на X, что Σ - её предбаза

Proof:

Рассмотрим $\Sigma' = \{U_1 \bigcap U_2 \bigcap \ldots \bigcap U_n | U_i \in \Sigma,\ n \in \mathbb{N}\} \bigcup X$

Легко видеть, что Σ' удовлетворяет условию бытия базой топологии и топология, порождённая Σ', является наименьшей по включению, содержащей Σ

1.6 Подпространства

Def.] $X = (X, \Omega)$ - топологическое пространство, $Y \subseteq X$

Индуцированная топология на Y(=относительная топология) определяется следующим образом:

$A \subseteq Y$ - открыто $\Leftrightarrow \exists\, U \in \Omega : A = U \bigcap Y$

Y с такой топологией называют подпространством Y

St. это действительно топология на Y:

1. $\emptyset = \emptyset \bigcap Y$

   $Y = X \bigcap Y$

2. $\bigcup\limits_{i \in I}(U_i \bigcap Y) = (\bigcup\limits_{i \in I} U_i) \bigcap Y$

3. $(U \bigcap Y) \bigcap (V \bigcap Y) = (U \bigcap V) \bigcap Y$

St. X - метрическое $\Rightarrow$ индуцированная топология будет топологией, порождаемой той же метрикой.

Это будет очевидным следствием следующей теоремы.

Th. X - топологическое пространство, $Y \subseteq X$ - подпространство, $y \in Y$. Λ - база исходной топологии в y, тогда $\{U \bigcap Y | U \in \Lambda\}$ - база в точке y индуцированной топологии

Proof:

Обозначим $\{U \bigcap Y | U \in \Lambda\}$ за Λ_Y, а индуцированную топологию за Ω_Y

1. Все $U \bigcap Y$ открыты в Y, поэтому $\Lambda_Y \subseteq \Omega_Y$

2. $]y \in A \in \Omega_Y$. Тогда $A = Y \bigcap U,\ U \in \Omega$. Тогда, так как Λ - база в точке:

   $\exists\, V \in \Lambda : y \in V \subseteq U \Rightarrow V \bigcap Y \subseteq U \bigcap Y$ - что и требовалось

Подставив в качестве базы в точке шары как раз получим ранее высказанное утверждение

Cons. если везде вместо базы топологии в точке написать просто базу топологии, то утверждение останется верным:

$]\Sigma$ - база Ω. Тогда $\Sigma_Y = \{U \bigcap Y | U \in \Sigma\}$ - база Ω_Y

Prop. X - топологическое пространство, Y - его подпространство, $A \subseteq Y$

1. A - открыто в $X \Rightarrow\ A$ - открыто в Y

2. A - замкнуто в $Y \Leftrightarrow A = U \bigcap Y$, где U замкнуто в X

3. A - замкнуто в $X \Rightarrow A$ - замкнуто в Y

4. Если Y - открыто, то открыты в Y ровно те подмножества Y, которые открыты в X

5. Если Y - замкнуто, то замкнуты в Y ровно те подмножества Y, которые замкнуты в X

Th.] X - топологическое пространство, $Z \subseteq Y \subseteq X$

Тогда X и относительная топология на Y индуцируют одну и ту же топологию на Z.

Proof:

U - открыто в Z с индуцированной из X топологией $\Leftrightarrow\ U = V \bigcap Z,$ где V - открытое в X.

U - открыто в Z с индуцированной из Y топологией $\Leftrightarrow\ U = V \bigcap Z,$ где V - открытое в $Y \Leftrightarrow\ U = W \bigcap Y \bigcap Z,$ где W - открытое в X. Так как $Z \subseteq Y$, то $W \bigcap Y \bigcap Z = W \bigcap Z$ и мы получили что и требовалось

1.7 Аксиомы отделимости

Всего будеть 4 аксиомы отделимости T_1, T_2, T_3, T_4(на самом деле их несколько больше, но остальные не будут нами использоваться)

Def. Говорят, что топологическое пространство X - хаусдорфово, если:
$\forall x, y \in X, x \neq y\ \exists\ U$ - окрестность x, V - окрестность y: $U \bigcap V = \emptyset$
Хаусдорфовость - это аксиома T_2
Ex. все метрические пространства - хаусдорфовы
Def. Топологическое пространство удовлетворяет аксиоме T_1, если:
$\forall x, y \in X x \neq y\ \exists\ U$ - окрестность $x : y \notin U$
Th. X удовлетворяет $T_1 \Leftrightarrow$ в X все одноточечные множества замкнуты
Proof:
$\Leftarrow \{y\}$ - замкнуто $\Rightarrow X \backslash \{y\}$ - открыто.
$x \neq y \Rightarrow x \in X \backslash \{y\}$, таким образом $X \backslash \{y\}$ нам подойдёт
$\Rightarrow$ Для каждого $x \neq y$ рассмотрим U_x - окрестность x такую что $y \notin U_x$
Теперь объединим все такие окрестности:
$U = \bigcup\limits_{x \neq y} U_x$. $U = X \backslash \{y\}$ - открыто, тогда $\{y\}$ - замкнуто.
St. $T_2 \Rightarrow T_1$ - очевидно
Def. X - топологическое пространство, $A, B \subseteq X$
Говорят, что A и B - отделимы, если $\exists\ U, V$ - открытые такие что:
$A \subseteq U,\ B \subseteq V,\ U \bigcap V = \emptyset$
Def. Говорят, что X - регулярно($=$ X удовлетворяет аксиоме T_3), если:

1. X удовлетворет T_1
2. $\forall\ V \subseteq X$ - замкнутого, $\forall x \notin V$ $\{x\}$ и V отделимы

St. $T_3 \Rightarrow T_2$ - очевидно
Th. Следующие условия эквивалентны аксиоме отделимости:

1. X удовлетворет T_1
2. $\forall\ V \subseteq X$ - открытого, $\forall x \in V\ \exists\ U$ - окрестность x: $Cl(V) \subseteq U$

Proof: Покажем, что вторые условия в обеих формулировках эквивалентны
$\Rightarrow x \in V \subseteq X$, V - открыто. Применим аксиому отделимости к x и $X \backslash V$:
U, W - открытые такие, что $x \in U,\ X \backslash V \subseteq W,\ U \bigcap W = \emptyset$
Возьмём в качестве искомого окрытого множества U. $Cl(U) = X \backslash Int(X \backslash U)$
$X \backslash U \supseteq W \Rightarrow Int(X \backslash U) \supseteq W \supseteq X \backslash V \Rightarrow X \backslash Int(X \backslash U) \subseteq V$ - что и требовалось
$\Leftarrow V$ - замкнуто, $x \notin V$. Применим 2 условие 2 формулировки к x и $X \backslash V$:
$\exists\, U$ - окрестность x: $Cl(U) \subseteq X \backslash V$. Тогда $X \backslash Cl(U) \supseteq V$ и открытые множества U и $X \backslash Cl(U)$ отделяют $\{x\}$ и V
St. Метрические пространства удовлетворяют T_3
Proof: Будем доказывать, что метрическое пространство удовлетворяет переформулировке аксиомы T_3
V - открытое, $x \in V$. Тогда $\exists r > 0 : B_r(x) \subseteq V$. Тогда возьмём $U = B_{r/2}(x)$. Тогда $Cl(U) = \overline{B}_{r/2}(x) \subseteq B_r(x) \subseteq U$
Def. Говорят, что топологическое простраанство X нормально($=$ удовлетворяет аксиоме T_4), если:

1. X удовлетворяет T_1

2. Любые 2 непересекающихся замкнутых множества в X отделимы.

St. $T_4 \Rightarrow T_3$ - очевидно
Th. Все метрические пространства нормальны
Proof: $]A,\ B \subseteq X$ - 2 непересекающихся замкнутых множества.
$X \backslash B$ - открыто, $X \backslash B \supseteq A \Rightarrow \forall x \in A\ \exists r_x > 0 : B_{r_x}(x) \subseteq X \backslash B$
Аналогично для точек из B:
$\forall x \in B\ \exists r_x > 0 : B_{r_x}(x) \subseteq X \backslash A \Leftrightarrow \forall x \in B\ \exists r_x > 0 : B_{r_x}(x) \bigcap A = \emptyset$
Поделим все радиусы на 2 и объеденим соответствующие шары:
$U = \bigcup\limits_{x \in A} B_{r_x/2}(x)$
$V = \bigcup\limits_{x \in B} B_{r_x/2}(x)$
Покажем, что $U \bigcap V = \emptyset$
$]x \in U \wedge x \in V$
$x \in U \Rightarrow \exists y \in A : x \in B_{r_y/2}(y)$
$x \in V \Rightarrow \exists z \in B : x \in B_{r_z/2}(z)$
Но тогда $d(y, z) < (r_y + r_z)/2 \leq min(r_y, r_z)$
Тогда $y \in B_{r_z}(z)$ или $z \in B_{r_y}(y)$, что невозможно
St. $]X$ - топологическое пространство, Y - его подпространство. Тогда если X удовлетворяет T_i, где $i \in \{1, 2, 3\}$, то Y тоже удовлетворяет T_i
Proof: Рассмотрим все варианты i:

1. $x \in Y$. В $X \{x\}$ - замкнуто, тогда в Y $Y \bigcap \{x\} = \{x\}$ - замкнуто

2. $x, y \in Y$. В X x и y отделимы открытыми множествами U и V. Тогда в Y x и y отделимы множествами $U \bigcap Y$, $V \bigcap Y$

3. $x \in Y, A \subseteq Y$ - замкнуто, $x \notin A$. A - замкнуто в Y, тогда $A = B \bigcap Y$, где B замкнуто в X. $x \notin A \Rightarrow x \notin B$. Тогда в X x и B отделимы открытыми множествами U и V. Тогда x и A отделимы в Y множествами $U \bigcap Y$ и $V \bigcap Y$

1.8 Аксиомы счётности

Def. Говорят, что топологическое пространство X удовлетворяет 1 аксиоме счётности, если $\forall x \in X$ $\exists$ счётная база в точке x

Th. Все метрические пространства удовлетворяют 1 аксиоме счётности

Proof: возьмём в качестве баы в точке x множество $\{B_{1/n}(x)\}$

Def. Говорят, что топологическое пространство x удовлетворяет 2 аксиоме счётности, если у X существует счётная база

Ex. $\mathbb{R}^n : \{B_r(\overline{x}) | r, x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{Q}\}$

Замечание: из 2 аксиомы счётности следует вторая

Th. X удовлетворяет 2 аксиоме счётности $\Rightarrow$ X - сепарабельно, а если X - метрическое, то $\Leftrightarrow$

Proof:

$\Rightarrow$ выберем по точке из каждого множества из базы. Любое непустое открытое будет пересекаться с полученным множеством, так как открытое множество - это объединение некоторого множества базовых.

$\Leftarrow$ $]S = \{s_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ - счётное всюду плотное множество.

Рассмотрим $\Sigma = \{B_{1/n}(s_i) | n, i \in \mathbb{N}\}$. Покажем, что Σ - база топологии

$\forall x$ $\forall U$ - окрестности x $\exists V \in \Sigma : x \in V \subseteq U$

Если $x \in U$ - открытом, то $\exists r > 0 : B_r(x) \subseteq U$

Возьмём такое $n \in \mathbb{N}$, что $\frac{1}{n} < \frac{r}{2}$

Так как S - всюду плотно:

$\exists s \in S : |xs| < \frac{1}{n}$

Тогда если $|sy| < \frac{1}{n}$, то $|xy| \leq |sy| + |sx| < \frac{2}{n} < r$

Тогда $B_{1/n}(s) \subseteq U$

Def. покрытие: $\Sigma \subseteq 2^X : \bigcup \Sigma = X$

Def. подпокрытие: $\Sigma' \subseteq \Sigma$ и Σ' - покрытие

Th. (Линделёф) X - топологическое пространство, удовлетворяющее 2 аксиоме счётности

$\{U_i\}_{i \in I}$ - открытое(открытыми множествами) покрытие X

Тогда у $\{U_i\}_{i \in I}$ есть не более чем счётное подпокрытие

Proof: $]\Sigma$ - счётная база X

$\forall i$ $U_i = \bigcup\limits_{j \in J_i} V_{ij}$, $V_{ij} \in \Sigma$

Для каждого $V \in \Sigma$ возьмём какое-нибудь одно множество из нашего набора, которое содержит V(если такое вообще есть) - это и будет наше не более чем счётное подпокрытие.

1.9 Непрерывность

Def. Отображение - тройка (S, Y, f), где F - "правило сопоставляющее каждому элементу из X элемент из Y(формально: подмножество $X \times Y$, удовлетворяющее некоторым свойствам)

$A \subseteq X$, тогда $f(A) = \{f(x)|x \in A\}$ - образ множества A

$B \subseteq Y$, тогда $f^{-1}(B) = \{x \in X|f(x) \in B\}$ - прообраз множества B

Напомним некоторые простейшие свойства образа и прообраза из теории множеств

$f^{-1}(A) \bigcup f^{-1}(B) = f^{-1}(A \bigcup B)$

$f^{-1}(A) \bigcap f^{-1}(B) = f^{-1}(A \bigcap B)$

$f(A) \bigcup f(B) = f(A \bigcup B)$

Эти свойства остаются верны, если множеств больше 2, в том числе если объединение или пересечение берёться по некоторому множеству индексов I

$f^{-1}(A) \backslash f^{-1}(B) = f^{-1}(A \backslash B)$

Вообще, если прменить любые операции к множествам, то такие же операции будут применены к их прообразам. Для образов это не так:

$f(A) \bigcap f(B) \supseteq f(A \bigcap B)$

Def. X, Y - топологические пространства, $f : X \to Y$

Говорят, что f - непрерывно, если прообраз любого открытого множества открыт:

$\forall V \in \Omega_Y \ f^{-1}(V) \in \Omega_X$

Prop.

1. если усилить Ω_X или ослабить Ω_Y, то непрерывное отображение останется непрерывным
2. $f : X \to Y$ - непрерывно $\Leftrightarrow \forall Z \subseteq X \ f|_Z : Z \to Y$ - непрерывно

Th. композиция непрерыных отображений непрерывна

Proof:

$f : X \to Y, \ g : Y \to Z$ - непрерывны

$U \subseteq Z$ - открыто $\Rightarrow g^{-1}(U)$ - открыто $\Rightarrow f^{-1}(g^{-1}(U))$ - открыто

Th. $f : X \to Y$, $f(X) = Z$. Тогда:

f - непрерывно $\Leftrightarrow \widetilde{f} : X \to Z$ $(\widetilde{f}(x) = f(x))$ - непрерывно

Proof:

$\Rightarrow f = in \circ \widetilde{f}$, где in - вложение Z в $Y(in(x) = x)$

Легко видеть, что вложение непрерывно:

$in^{-1}(U) = U \bigcap Z$

$\Leftarrow]U$ - открыто в Z. Тогда $U = V \bigcap Z$, V - открыто в Y.

$f^{-1}(U) = f^{-1}(V) \bigcap f^{-1}(Z) = f^{-1}(V) \bigcap X = f^{-1}(V)$ - открыто

Def. $f : X \to Y$ - непрерывна в точке x_0, если:

$\forall U$ - окрестности $f(x_0)$ $\exists V$ - окрестность x_0 такая что $f(V) \subseteq U$

Замечание: можно ограничиться множествами U из базы в точке $f(x_0)$, а V - из базы в точке x

Cons. $]X, Y$ - метрические пространства, $f : X \to Y$

Тогда f - непрерывна в $x_0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ \forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : f(B_\delta(x)) \subseteq B_\epsilon(f(x)) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : |xy| < \delta \Rightarrow |f(x)f(y)| < \epsilon$

Th. f - непрерывна $\Leftrightarrow f$ непрерывна в каждой своей точке

$\Rightarrow x_0 \in U$ - точка и её окрестность. В качестве U подойдёт $f^{-1}(V)$

$\Leftarrow U \subseteq Y$ - открытое

Так как f непрерывна в каждой своей точке:

$\forall x \in f^{-1}(U) \ \exists V_x$ - окрестность $x : f(V) \subseteq U$

$f^{-1}(U) = \bigcup\limits_{x \in f^{-1}(U)} V_x$ - открыто

Def. $]X, Y$ - метрические пространства, $f : X \to Y$

f называется липшицевовым, если:

$\exists C > 0 : \forall x, y \in X \ |f(x)f(y)| < C|xy|$

Такое C называют константой Липшица отображения f

Th. Всякое липшицево отображение непрерывно

Proof: Покажем, что f непрерывна в каждой точке x с помощь $\epsilon - \delta$ определения. Действительно, взяв $\delta = \frac{\epsilon}{C}$ получим то, что нужно.

Def. говорят, что f - нерастягивающее(кортокое) отображение, если оно липшицево с константой 1

Def. Изометрия - биекция между метрическими пространствами, которая сохраняет метрику

Ex.

1. $x_0 \in X, f(x) = d(x, x_0)(f : X \to \mathbb{R})$ - нерастягивающая по определению метрики, значит непрерывная

2. $A \subseteq X, f(x) = d(x, A)$. Так же легко показать, что эта функция - нерастягивающая

3. $d : X \times X \to \mathbb{R}$

   $d(x'.y') \le d(x, y) + d(x, x') + d(y, y') \le d(x, y) + 2\sqrt{d(x, x')^2 + d(y, y')^2}$

   $d(x', y') - d(x, y) \le 2d_{X \times X}((x, y), (x', y')) \Rightarrow d$ - липшицева с константой $2 \Rightarrow d$ - непрерывна

Рассмотрим следующую конструкцию: $X = (X, \Omega)$ - топологическое пространство, $x \in X$

$\Omega^x = \{\emptyset\} \bigcup \{A \subseteq X : \exists U \in \Omega : x \in U \subseteq A\}$

Легко видеть, что это топология

Th. $f : X \to Y$ - непрерывна в $x \Leftrightarrow f$ - непрерывна, если на X и Y заданы топологии Ω^X и Ω^Y соответственно

Proof:

$\Rightarrow U \in \Omega^Y$. Если $U = \emptyset$, то $f^{-1}(U) = \emptyset \in \Omega^X$. Иначе $\exists V \subseteq Y$ - окрестность $f(x)$ в старой топологии на Y такая что $V \subseteq U$. Так как f непрерывна в x, то $\exists W$ - окрестность x в старой топологии такая что $f(W) \subseteq V$. Тогда $W \subseteq f^{-1}(V) \subseteq f^{-1}(U)$. Тогда $f^{-1}(U) \in \Omega^X$

$\Leftarrow U$ - окрестность $f(x)$ в старой топологии на Y. Тогда, так как $f(x) \in U \subseteq U$, U - открыто в Ω^Y. По условию $f^{-1}(U)$ - открыто в X.

Так как $x \in f^{-1}(U)$, то $f^{-1}(U) \neq \emptyset$. Тогда $\exists V \subseteq X$ - окрестность x в старой топологии на X такая что $V \subseteq f^{-1}(U)$ - что и требовалось.

Cons. композиция непрерывных в точке отображений непрерывно в точке:

$f : X \to Y, g : Y \to Z$. f - непрерывна в x, g непрерывна в $f(x)$, тогда $g \circ f$ непрерывна в x

Def. X, Y - топологические пространства, $f : X \backslash x_0 \to Y$

$f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} y_0$, если следующая функция непрерывна в x_0:

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), x \neq x_0 \\ y_0, x = x_0 \end{cases}$$

1.10 Гомеоморфизм

Def.] X, Y - топологические пространства.

$f : X \to Y$ - гомеоморфим, если;

1. f - биекция
2. f - непрерывно
3. f^{-1} - непрерывно

Говорят, что X, Y - гомеоморфны, если между ними существует гомеоморфизм.Очевидно, что гомеоморфность - это отношение эквивалентности(обозначается $X \simeq Y$)

Def. Топологическое свойство - свойство топологического пространства, которое одинаково для гомеоморфных пространств

Введём некоторые обозначения:

D^n - единичный замкнутый шар в $\mathbb{R}^n$(пока с центром в 0, далее покажем, что все замкнутые шары гомеоморфны)

S^n - единичная сфера в $\mathbb{R}^{n+1}$(опять же с центром в 0)

Примеры гомеоморфизмов:

1. $a < b, c < d$

   $[a,\ b] \simeq [c,\ d] \simeq D^1$

   $(a,\ b] \simeq [c,\ d)$

   $(a,\ b) \simeq (c,\ d)$

2. $(0, 1) \simeq \mathbb{R}$

   $f(x) = \text{tg}(\pi(x - 1/2))$

3. $[0, 1) \simeq [0, +\infty)$

   $(0, 1) \simeq (0, \infty)$

   $f(x) = tg(\pi x)$

4. $\widehat{\mathbb{R}} = \{-\infty\} \bigcup \mathbb{R} \bigcup \{+\infty\}$, окрестонсть $+\infty$ - $\{+\infty\} \bigcup (a, +\infty) \bigcup U$, окрестность $-\infty$ - $\{-\infty\} \bigcup (-\infty$ U - открыто в $\mathbb{R}$. Другими словами это порядковая топология(топология с предбазой $\{x | x < a, a \in \widehat{\mathbb{R}}\}$ и $\{x | x > a, a \in \widehat{\mathbb{R}}\}$), если указать, что $+\infty$ больше всех других элементов,а $-\infty$ меньше всех других элементов.

   $\widehat{\mathbb{R}} \simeq [0, 1]$. Возьмём гомеоморфизм $\mathbb{R}$ и $(0, 1)$, скажем, что $f(0) = -\infty$, $f(1) = +\infty$

5. в $\mathbb{R}^n$ $B_1(0) \simeq B_r(x) \simeq \mathbb{R}^n$ - рассмотрим все лучи, выходящие из центра шара, на каждом из ни воспользуемя отображением из 2 примера.

6. в $\mathbb{R}^2$ $[0, 1] \times [0, 1] \simeq D^2$ Рассмотрим все лучи, выходящие из центра квадрата. На каждом из них рассмотрим гомотетию с соответствующим коэффициентом. Аналогично в $\mathbb{R}^n$ $[0, 1]^n \simeq D^n$

7. $S^n \backslash \{p\} \simeq \mathbb{R}^n$ (p - точка сферы)

   Проведём из этой точки все возможные лучи, пересекающие сферу в какой-то другой точке(они, очевидно, пересекут её ещё ровно 1 раз). Эти прямые так же пересекут в 1 точке плоскость, проходящую через 0 и перпендикулярную прямой через p и 0. Сопоставим точке сферы точку на этой плоскости, которую она пересечёт - это и будет наш гомеоморфизм. Это называется стереографической проекцией.

Def. Вложение - отображение $f : X \to Y$, такое что f - гомеоморфизм между X и $f(X)$

1.11 Фундаментальное покрытие

Def. $]X$ - топологичесоке пространство, Γ - его покрытие

Γ - фундаментальное покрытие, если выполняется следующее свойство:

$\forall A \subseteq X: \ (\forall C \in \Gamma\ C \bigcap A$ - открыто в $C) \Rightarrow (A$ - открыто в $X)$

Замечание: то же самое можно сказать про замкнутость

Th. $]X, Y$ - топологические пространства, Γ - фундаментальное покрытие X, $f : X \to Y$

Пусть $\forall C \in \Gamma f|_C$ - непрерывно. Тогда f - непрерывно

Proof: $A \subseteq Y$ - открытое. $\forall C \in \Gamma f^{-1}(A) \bigcap C$ - открыто в C. Тогда, поскольку покрытие фундаментально, $f^{-1}(A)$ - открыто

Def. покрытие Γ называется открытым, если все его элементы - открытые множества

Def. покрытие Γ называется замкнутым, если все его элементы - замкнутые множества

Def. покрытие Γ называется конечным, если $|\Gamma| < \infty$

Def. покрытие Γ называется локально конечным, если $\forall x \in X\ \exists U$ - окрестность x, которая пересекается лишь с конечным числом множеств из Γ.

Ex. $X = \mathbb{R}$, $\Gamma = \{[i, i+1] | i \in \mathbb{N}\}$ - локально конечное, но не конечное покрытие $\mathbb{R}$

Th.

1. Любое открытое покрытие фундаментально
2. Любое конечное замкнутое покрытие фундаментально
3. Любое локально конечное замкнутое покрытие фундаментально

Proof:

1. $]\Gamma$ - открытое покрытие, $A \in X$.

   $\forall C \in \Gamma\ A \bigcap C$ - открыто в $C \Rightarrow A \bigcap C = C \bigcap U$, U открыто в $X \Rightarrow$
   $\Rightarrow C \bigcap A$ - открыто в X

   $A = A \bigcap X = \bigcup\limits_{C \in \Gamma} A \bigcap C$ - открыто, как объединение семейства открытых

2. $]\Gamma$ - конечное замкнутое покрытие, $A \in X$

   $\forall C \in \Gamma\ A \bigcap C$ замкнуто в $C \Rightarrow A \bigcap C$ замкнуто в X.

   $A = \bigcup\limits_{C \in \Gamma} A \bigcap C$ - замкнуто, как объединение конечного числа замкнутых

3. $]\Gamma$ - локально конечное замкнуктое покрытие.

   Для каждого $x \in X$ существует такая окрестность x U_x, которая пересекается лишь с конечным числом элементов Γ.

   $\{U_x\}_{x \in X}$ - очевидно открытое покрытие X. Для каждого U_x у нас есть лишь конечное число множеств из нашего набора, пересекающихся с ним, поэтому они образуют фундаментальное покрытие U_x по пункту 2

   $A \subseteq X, \forall C \in \Gamma A \bigcap C$ - открыто в $\Gamma \Rightarrow \forall C \in \Gamma\ \forall x \in X A \bigcap (C \bigcap U_x)$ - открыто в $C \bigcap U_x \Rightarrow$
   $\forall x \in X A \bigcap U_x$ - открыто в $U_x \Rightarrow A$ - открыто

1.12 Прямое произведение

Def. $]X, Y$ - топологические пространства.

Стандартной топологией на $X \times Y$ называется топология с базой вида $A \times B$, где A открыто в X, а B открыто в Y.

Замечание: это действительно база некоторой топологии

$(A \times B) \bigcap (A' \times B') = (A \bigcap A' \times B \bigcap B')$

Так же легко видеть, что в качестве A и B достаточно брать только множества из базы X и Y соответственно

Th. $]X, Y$ - метрические пространства. Тогда топология произведения на $X \times Y$ и топология, порождённая метрикой на $X \times Y$, совпадают.

Proof: покажем, что базовые множества одной топологии являются базовыми и наоборот:

1. Базовое в топологии произведения открыто в топологии, порождённой метрикой:

   $U = B_{r_1}(x_0) \times B_{r_2}(y_0)$

   $U = \bigcup\limits_{(x,y) \in U} B_{min(r_1 - |xx_0|, r_2 - |yy_0|)}((x, y))$, поскольку если

   $|(x, y)(x', y') < r_1 - |xx_0|$, то $|xx'| < r_1 - |xx_0| \Rightarrow |x'x_0| < r_1$. Аналогично для 2 координаты

2. Открытое в топологии, порождённой метрикой, открыто в топологии произведения:

   U - открытое. Тогда каждая точка U содержится в нём с некоторым шаром:

   $\forall (x, y) \in U \exists r_x > 0 : B_{r_{(x,y)}}((x, y)) \subseteq U$

   Тогда рассмотрим для каждой такой точки следующее множество:

   $B_{\frac{r_{(x,y)}}{2}}(x) \times B_{\frac{r_{(x,y)}}{2}}(y)$. Оно открыто в топологии произведения, содержит точку (x, y) и расстояние от любой точки этого множества до (x, y) не более $\sqrt{2 * (\frac{r_{(x,y)}}{2})^2} < r_{(x,y)}$, значит оно лежит в U. Объеденим такие множества по всем точкам из U - получим ровно U.

Th. $A \subseteq X, B \subseteq Y$ - замкнуты, тогда $A \times B$ замкнуто в $X \times Y$

Proof: $X \times Y \backslash A \times B = (X \backslash A \times Y) \bigcup (X \times Y \backslash B)$

Замечание: так же легко показать, что

1. $Int(A \times B) = Int(A) \times Int(B)$

2. $Cl(A \times B) = Cl(A) \times Cl(B)$

3. Индуцированная на $A \times B$ топология совпадает с топологией, получающиейся перемножением топологий, индуцированных на A и B соответственно

Th. $]X, Y$. Определим 2 отображения:

$pr_X : X \times Y \to X$

$pr_X((x, y)) = x$

$pr_Y : X \times Y \to Y$

$pr_Y((x, y)) = y$

Утверждается, что они непрерывны.

Proof:

Мы докажем только для pr_X, для pr_Y доказательство будет полностью аналогично.

$U \subseteq X$ - открыто

$pr_X^{-1}(U) = U \times Y$ - открыто

Th. $]X, Y, Z$ - тополгические пространства.

$f : Z \to X \times Y$

$f = (g, h)$
$\forall z \in Z f(z) = (g(z), h(z))$
Тогда утверждается, что f непрерывна тогда и только тогда, когда g и h непрерывны.
Proof:
$\Rightarrow g = pr_X \circ f$, $h = pr_Y \circ f$ - непрерывны как композиция непрерывных
$\Leftarrow$ Пусть g и h непрерывны.
Докажем, что прообраз базовых множеств открыт:
$U = f^{-1}(A \times B)$, A открыто в X, B открыто в Y
$U = g^{-1}(A) \bigcap h^{-1}(B)$ - открыто как пересечение октрытых
Замечание: никакого подобного утверждения про функции из $X \times Y$ нет:
например рассмотрим функцию $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$

При фиксированном x или y получаем непрерывную функцию, но тем не менее в 0 эта функция разрывна(например если взять $x = y \neq 0$, то $f(x, y) = 1/2 \neq 0$)

Th. Арифметические операции$(+, -, *)$ из $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}$ непрерывны.

Proof:

$|x_0 - x| < \delta, |y_0 - y| < \delta$

$\delta(\epsilon) = \frac{\epsilon}{2}$

$|x + y - x_0 - y_0| \le |x - x_0| + |y - y_0| \le 2\delta = \epsilon$

Если зафиксировать (x_0, y_0), то получим, что функция $+$ в этой точке непрерывна. Значит она непрерывна всюду в силу произвольности (x_0, y_0)

Непрерывность произведения доказывается аналогично.

Cons.

$]X$ - топологическое пространство, $f, g : X \to \mathbb{R}$ - непрерывны.

Тогда $f + g$ и fg непрерывны:

рассмотрим $h : X \to \mathbb{R}^2 : h(x) = (f(x), g(x))$ - она непрерывна по теореме, тогда $f + g$ и fg непрерывны, как композиции непрерывных

Th. $f, g : X \to \mathbb{R}$. Тогда $\frac{f}{g}$ непрерывна на множестве $\{x | g(x) \neq 0\}$

Proof: легко видеть, что функция $h : \mathbb{R} \backslash \{0\} \to \mathbb{R} : h(x) = \frac{1}{x}$ непрерывна.

Тогда функция $\frac{1}{g(x)}$ непрерывна на $\{x | g(x) \neq 0\}$, как композиция непрерывных. Тогда $\frac{f}{g}$ непрерывна, как произведение непрерывных

Cons. Если функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ задана алгебраической формулой, то она непрерывна

1.13 Связность

Def. говорят, что топологическое пространство X связно, если его нельзя разбить на 2 непустых открытых непересекающихся множества:

$\nexists U, V$ - открытые: $U \neq \emptyset, V \neq \emptyset,\ U \bigcap V = \emptyset,\ U \bigcup V = X$

Эквивалентные формулировки:

1. X нельзя разбить на 2 непустых непересекающихся замкнутых множества
2. В X единственными замкнутыми и открытыми одновременно множествами являются X и $\emptyset$
3. Не существует непрерывной сюръекции из X в $\{0.1\}$, если на $\{0,1\}$ задана дискретная топология(иначе $f^{-1}(0)$ и $f^{-1}(1)$ подойдут)

Легко видеть, что связность - это топологическое свойство, то есть сохраняется при гомеоморфзиме

Def. $]X$ - топологическое пространство, $A \subseteq X$.

Говорят, что A - связное подмножество X, если A связно в индуцированной из X топологии

Th. В $\mathbb{R}$ отрезок $[0,1]$ связен

Proof:

$]\ [0,1] = A \bigcup B$ - объединение двух непустых непересекающихся открытых множеств

Не умаляя общности скажем, что $1 \in A$.

Пусть $y = \sup\limits_{x \in B} x$(y существует, так как B непусто)

Рассмотрим 2 случая:

1. $y \in B$. Тогда $y < 1$, так как $1 \in A$.

   Так как B открыто, то $B_r(y) \subseteq B$. Но тогда $min(1, y + \frac{r}{2}) \in B$, что противоречит тому, что $1 \notin B$ и y - супремум B
2. $y \in A$. Тогда, если $y = 0$, то $B = \emptyset$. Значит $y > 0$. Тогда, так как A - открыто $B_r(y) \subseteq A$. Но, так как y - супремум B, то в любой его окрестности есть элемент из B - противоречие.

Th. В $\mathbb{R}$ открыты интервалы и только они

Proof:

Для $\emptyset$ и $\{a\}$ очевидно. Для интервалов с непустой внутренностью это будет следствием некоторого более общего факта, который будет доказан в следующем параграфе.

Пусть теперь наше множество - не интервал:

$a \in I, b \in I, a < b, \exists c \in (a,b) : c \notin I$

Тогда $I = ((-\infty, c) \bigcap I) \bigcup ((c, +\infty) \bigcap I)$ - объединение 2 непустых непересекающихся открытых множеств

Th. $]X, Y$ - топологические пространства

$f : X \to Y$ - непрерывно, X - связно

Тогда $f(X)$ - связно

Proof:

$]f(X)$ - не связно. Тогда $\exists g : f(x) \to \{0,1\}$ - непрерывная сюръекция.

Тогда $g \circ f$ - так же непрерывная сюръекция из X в $\{0,1\}$, что невозможно, поскольку X связно.

Th. (о среднем значении функции) $]X$ - связно

$f : X \to \mathbb{R}$ - непрерывно, $a, b \in f(X)$. Тогда $[a,b] \in f(X)$

Proof: $f(X)$ - связно, значит $f(X)$ - интервал, значит вместе с любыми 2 точками содержит все точки между ними

Компоненты связности.

Lemma 1 $]X$ - топологическое пространство, $A \subseteq X$

A - связно $\Rightarrow Cl(A)$ - связно

Proof:

$]Cl(A)$ - не связно.

$Cl(A) = U \bigcup V$ - 2 непустых непересекающихся открытых множества в $Cl(A)$

$U' = U \bigcap A$, $V' = V \bigcap A$ - 2 открытых в A.

$A = U' \bigcup V'$, $U' \bigcap V' = \emptyset$

Если A связно, то $U' = \emptyset$ или $V' = \emptyset$

Пусть $U' = \emptyset$

$p \in U \subseteq Cl(A)$

$p \notin A \Rightarrow p$ - отчка прикосновениея $A \Rightarrow$ в любой окрестности p есть точки из $A \Rightarrow$ в U есть точка из $A \Rightarrow U' \neq \emptyset$

Lemma 2 $]X$ - топологическое пространство

$\{A_i\}_{i \in I}$ - семейство связных множеств, $\forall i, j \in I A_i \bigcap A_j \neq \emptyset$

Тогда $A = \bigcup\limits_{i \in I} A_i$ - связно

Proof:

$]A$ - не связно, тогда $A = U \bigcup V$, U, V - 2 непустых непересекающихся открытых в A

$]p \in U, q \in V$

$p \in A_i$, $q \in A_j$

A_i - связно $\Rightarrow A_i \bigcap V$ - пусто(иначе $A_i = (A_i \bigcap V) \bigcup (A_i \bigcap U)$)

Аналогично $A_j \bigcap U = \emptyset$

Тогда $A_i \bigcap A_j = (A_i \bigcap A) \bigcap (A_j \bigcap A) = (A_i \bigcap U) \bigcap (A_j \bigcap V) = \emptyset$

Def. X - топологическое пространство, $p \in X$

Компонента связности точки p - это объединение всех связных множеств, содержащих p

Props.

1. Она связна по Лемме 2
2. 2 различные компоненты связности не пересекаются или совпадают - опять же из Леммы 2
3. Всё пространство разбивается на компоненты связности
4. 2 точки лежат в одной компоненте связности тогда и только тогда когда существует связное множество, содержащее их обе

Th. Компоненты связности замкнуты

Proof: очевидно по Лемме 1.

1.14 Линейная связность

Def. Путём(кривой) в топологическом пространстве X называетсчя непрерывное отображение $s : [0, 1] \to X$.

$s(0)$ называют началом пути, $s(1)$ - концом

Def. Говорят, что топологическое пространство X линейно связно, если:

$\forall x, y \in X \exists$ путь с началом x и концом y

Def. компоненты линейной связности:

классы эквивалентности по отношению $\sim$:

$x \sim y \Leftrightarrow \exists$ путь с началом x и концом y.

Очевидно, что это и вправду отношение эквивалентности:

1. $s_{x \to x}(t) = x$
2. $s_{y \to x}(t) = s_{x \to y}(1 - t)$
3. $s_1(1) = s_2(0)$

   $s(t) = \begin{cases} s_1(2t), 0 \le t \le 1/2 \\ s_2(2t - 1), 1/2 \le t \le 1 \end{cases}$

   Путь s в этом случае называется произведением путей s_1 и s_2

Th. X - линейно связно$\Rightarrow$ X - связно

Proof: $]X = A \bigcup B$, A и B - 2 непустых непересекающихся открытых.

Пусть $p \in A$, $q \in B$

Существует путь s с началом в p и концом в q.

Посмотрим на $s^{-1}(A)$ и $s^{-1}(B)$ - это разбиение отрезка на 2 непустых открытых множества - противоречие.

При этом обратное не всегда верно:

Возьмём график функции $y = \sin(1/x)$ и добавим вертикальный отрезок:

$X = \{(x, \sin(1/x))|x > 0\} \bigcup \{(0, y)|y \in [-1.1]\}$

Очевидно, что сам по себе график функции линейно связен, значит линейно связен. Значит его замыкание связно, а его замыкание совпадает с X, значит X связно.

Чуть сложнее понять, что X не линейно связно:

Пусть есть путь s между точками $p = (1, \sin(1))$ и $q = (0, 0)$

$s(t) = (x(t), y(t))$

$t_0 = \min\{t \in [0, 1]|x(t) = 0\}$(такое есть, поскольку $\{0\}$ - замкнуто, значит $s^{-1}(0)$ тоже замкнуто и значит содержит свой инфимум)

При этом $t_0 > 0, x(0) = 1 \neq 0$

Посмотрим на ϵ - окрестность t_0:

$x(t_0 - \epsilon) > 0$

Так как $x(t)$ - непрерывно, то $\{x(t) | t \in [t_0 - \epsilon, t_0]\}$ содержит некоторую окрестность 0 в $[0, +\infty)$

Тогда в ϵ - окрестности t_0 $y(t)$ бывает как 1, так и -1 и значит $y(t)$ не непрерыно в t_0

Замечание: также теперь мы доказали, что все интервалы в $\mathbb{R}$ связны, поскольку легко видеть, что любые 2 точки интервала легко соединить путём.

Th. Образ линейно связного пространства при непрерывном отображении линейно связен

$f : X \to Y$, X - линейно связно.

Посмотрим на 2 точки $f(p)$ и $f(q)$ из $f(X)$.

Если в X p и q можно соединить путём s, то в $f(X)$ $f(p)$ и $f(q)$ можно соединить путём $f \circ s$

Cons.

1. Все выпуклые множества в $\mathbb{R}^n$ линейно связны, а значит и просто связны(выпуклое множество - то, которое с любыми 2 точками содержит весь отрезок между ними)

2. Все многоугольники связны

Th.

Следующие пространства попарно не гомеоморфны:

$[0, 1]$, $[0, 1)$, $\mathbb{R}$, S^1, $\mathbb{R}^2$

Proof:

Свойство прямой: при выкидывании любой одной точки она перестаёт быть связной - для остальных приведённых пространств это не так. Значит $\mathbb{R}$ не гомеоморфно ни одному из остальных пространств

В $[0, 1)$ существует только одна такая точка, при выкидывании которой оно теряет связность

В $[0, 1]$ таких точек ровно 2

В S^1 и $\mathbb{R}^2$ таких точек нет.

Таким образом нам осталось проверить только что $S^1 \not\simeq \mathbb{R}^2$

Из окружности можно выкинуть 2 точки так, чтобы она потеряла связность, а вот какие бы 2 точки мы не выкинули из плоскости она останется линейно связной, а значит и просто связной

1.15 Компактность

Def. топологическое пространство X называется компактным, если у любого открытого покрытия X есть конечное подпокрытие

Так же в этом случае для краткости иногда просто говорят, что X - компакт

Замечание 1: компактность так же является топологическим свойством, то есть сохраняется при гомеоморфизме

Замечание 2: достаточно рассматривать только покрытие множества элементами базы топологии X. Если есть какое-нибудь открытое покрытие, то можно сначала разбить каждый его элемент на базовые, из которых он состоит, потом из этих базовых составить множество(которое, очевидно, будет покрытием). Взяв из этих базовых множеств конечное подпокрытие а потом для каждого элемента подпокрытия взяв то открытое из изначального покрытия, которое его содержало, мы получим конечное покрытие исходными открытыми множествами

Ex.

1. Антидисретное пространство всегда компактно
2. Конечное пространство
3. Пространство с конечным числом открытых множеств
4. Дискретное пространство компактно тогда и только тогда, когда оно конечно

Th. Отрезок $[0,1]$ компактен

Proof: предположим противное

$]\{U_i\}_{i\in I}$ - открытое покрытие $[0,1]$, у которого нет конечного подпокрытия (замечание: не удобно думать про открытые в индуцированной топологии, поэтому будем считать, что U_i открыты в $\mathbb{R}$ и их объединение содержит $[0,1]$)

Рассмотрим отрезки $[0,1/2]$ и $[1/2,1]$

Хотя бы один из них не допускает конечного подпокрытия, иначе мы бы смогли взять покрытие отрезка $[0,1]$ как объединение покрытий этих двух отрезков.

Не умаляя общности скажем, что это $[0,1/2]$

Разобьём этот отрезок опять же на 2:

$[0,1/4]$ и $[1/4,1/2]$ - один из них опять же не допускает конечного подпокрытия.

Делая так дальше мы получим последовательность вложенных отрезков $[0,1]=I_1\supset I_2\supset\dots$

Длины этих отрезков убывают, как геометрическая прогрессия, поэтому их пересечение содержит ровно одну точку. Обозначим её за x_0

Так как $\{U_i\}_{i\in I}$ - покрытие $[0,1]$, то существует такое i_0, что $x_0\in U_{i_0}$

Тогда x_0 содержится в U_{i_0} с некоторым шаром радиуса r.

Возьмём такое n, что $2^{-n}<r$ и получим, что I_n допускает конечное покрытие 1 множеством, что противоречит тому, что у него нет конечного подпокрытия

Cons.

В $\mathbb{R}$ любой отрезок компактен

Th. $[0,1)$ и $(0,1)$ - не компактны.

$(0,1)\simeq\mathbb{R}$

А у $\mathbb{R}$ есть покрытие, которое, очевидно, не допускает конечного подпокрытия:

$\{(i,i+2)|i\in\mathbb{Z}\}$

Аналогично $[0,1)\simeq[0,+\infty)$ и у $[0,+\infty)$ так же есть покрытие, не допускающее конечное подпокрытие:

$\{[0,2)\}\bigcup\{(i,i+2)|i\in\mathbb{N}\}$

Th. любое замкнутое подмножество компакта - компакт:

X - компакт, $Y\subseteq X$ - замкнутое

$Y \subseteq \bigcup\limits_{i\in I} U_i$ - покрытие Y открытыми множествами в X

Тогда $\{U_i\}_{i\in I} \bigcup X\backslash Y$ - покрытие X открытыми множествами

Выберем из него конечное подпокрытие, выкинем при необходимости $X\backslash Y$(если оно было в этом конечном подпокрытии) и получим конечное покрытие Y открытыми множествами из $\{U_i\}_{i\in I}$

Cons.

В $\mathbb{R}$ все замкнутые и ограниченные множества компактны

St. Объединение компактов - компакт

Proof:

$A, B \subseteq X$ - компактны

Пусть $\{U_i\}_{i\in i}$ - открытое покрытие $A \bigcup B$

Тогда $\{U_i \bigcap A\}_{i\in I}$ - открытое покрытие A, а $\{U_i \bigcap B\}_{i\in I}$ - открытое покрытие B

Выберем из них соответственно открытые подпокрытия - их объединение(тоже, конечно, конечное) будет открытым подпокрытием $A \bigcup B$

Th. прямое произведение компактов - компакт

$]X, Y$ - компактные пространства, $\{U_i\}_{i\in I}$ - открыто. Будем считать, что все эти U_i - базовые

Рассмотрим множество $\{x_0\} \times Y$ - оно компакт, поскольку Y - компакт

$\forall x \in X \exists$ конечный набор "прямоугольников"$V_1 \times U_1, \dots,\ V_n \times U_n$, объединение которых содержит $\{x\} \times Y$

Рассмотрим множество $W_x = \bigcap\limits_{i=1}^{n} V_i$ - оно открыто в X как пересечение конечного числа открытых

$W_x \times Y$ имеет конечное подпокрытие - это $V_1 \times U_1, \dots, V_n \times U_n$

При этом $\{W_x\}_{x\in X}$ - открытое покрытие X

Тогда у него есть конечное подпокрытие $W_{x_1}, \dots, W_{x_k}$

Каждое $W_{x_k} \times Y$ допускает конечное подпокрытие, значит и всё $X \times Y$ - тоже

Cons. В $\mathbb{R}^n$ все замкнутые и ограниченные множества компактны

Th. Компактное множество в хаусдорфовом пространстве замкнуто

$]X$ - хаусдорфово пространство, $K \subseteq X$ - компакт

Что мы хотим доказать:

$\forall p \in X\backslash K\ \exists U$ - окрестность p: $U \bigcap K = \emptyset$

Рассмотрим произвольное p из $X\backslash K$.

Так как X - хаусдорфово:

$\forall x \in K\ \exists U_x$ - окрестность x и V_x - окрестность p: $U_x \bigcap V_x = \emptyset$

U_x - покрытие K. тогда у него есть конечное подпокрытие $U_{x_1}, \dots, U_{x_k}$.

Тогда $K \bigcap (\bigcap\limits_{i=1}^{k} V_{x_k}) = \emptyset$, а $\bigcap\limits_{i=1}^{k} V_{x_k}$ - открыто как пересечение конечного числа открытых

Заметим, что мы так же доказали, что хаусдрфов компакт - регулярен. А если повторить все те же самые слова ещё раз, то получим, что хаусдорфов компакт нормален

Th. X - метрическое пространство, $K \subseteq X$ - компакт.

Тогда K - ограничено.

Proof:

Рассмотрим следующее покрытие K: $\{B_1(x)\}_{x\in K}$

Пусть из него можно выбрать конечное подпокрытие, содержащее n множеств. Тогда, по неравенству многоугольника, расстояние между любыми 2 точками K меньше превосходит $2{+}d$, где d - наибольшее из попарных расстояний между центрами шаров, образующих конечное подпокрытие. Тогда K можно засунуть в шар радиуса $2 + d$

Из всего вышесказанного следует, что в $\mathbb{R}^n$ компактны замкнутые и ограниченные множества и только они

Th. X, Y - топологические пространства, $f : X \to Y$ - непрерывно, X - компактно

Тогда $f(X)$ - компактно

Proof: пусть $\{U_i\}_{i\in I}$ - открытое покрытие $f(X)$

Пусть $f^{-1}(U_i) = V_i$ - открытое множество в X. $\{V_i\}_{i\in I}$ - открытое покрытие X. Тогда у него есть конечное подпокрытие $V_{i_1}, \dots, V_{i_k}$

Тогда $U_{i_1}, \dots, U_{i_k}$ - конечное подпокрытие $f(X)$

Cons. (Теорема Вейерштрасса) $f : X \to \mathbb{R}$ - непрерывно, X - компакт. Тогда f достигает наибольшего и наименьшего значения

Proof:

$f(X)$ - замкнуто и ограничено $\Rightarrow |\sup\limits_{y\in f(X)} y| < \infty$ и $|\inf\limits_{y\in f(X)} y| < \infty$ и они принадлежат $f(X)$

Th. X - компакт, Y - хаусдорфово, $f : X \to$ - непрерывная биекция. Тогда f - гомеоморфизм

Proof: достаточно показать, что f^{-1} - непрерывно

Мы покажем, что образ замкнутого множества замкнут.

$A \subseteq X$ - замкнуто $\Rightarrow A$ - компакт$\Rightarrow f(A)$ - компакт $\Rightarrow f(A)$ - замкнуто

Def. Центрированная система множеств - это набор множеств, в котором пересечение любого конечного поднабора непусто

Th. X - компактно $\Leftrightarrow$ Любоая центрированная система замкнутых множеств в X имеет непустое пересечение

Proof:

$\Rightarrow$ Предположим противное - есть центрированная система замкнутых множеств с пустым пересечением.

Тогда их дополнения образуют открытое покрытие. Поскольку X компактно у этого покрытия есть конечное подпокрытие. Но тогда в нашей центрированной системе есть конечное число множеств, пересечение которых пусто - противоречие

$\Leftarrow$ Пусть есть семейство открытых множеств, объединение которых равно X. Тогда пересечение дополнений этих множеств пусто. Но тогда дополнения не образуют центрированную систему и значит есть конечный поднабор, пересечение которого пусто, а значит объединение дополнений множеств этого поднабора равно X - это и есть конечное подпокрытие.

Cons. X - хаусдорфово, тогда любая центрированная система компактных множеств в X имеет непустое пересечение

Proof: возьмём пересечение одного компакта со всеми(все компакты замкнуты), далее применим теорему

Cons. $\{U_i\}_{i\in I}$ - семейство компактных непустых пространств в хаусдорфовом пространстве X, $\forall i, j \in I\ U_i \subseteq U_j \vee U_j \subseteq U_i$

Тогда существует точка, принадлежащая всем этим компактам.

Proof: пересечение любого конечного числа компактных множеств совпадает с наименьшим из них по включению, значит оно не пусто. Тогда $\{U_i\}_{i\in I}$ - центрированная система компактных множеств в хаусдорфовом пространстве и значит их пересечение непусто

Th. (лемма Лебега) X - компактное метрическое пространство, $\{U_i\}_{i\in I}$ - открытое покрытие X. Тогда существует такое $r > 0$ что:

$\forall x \in X \exists i \in I : B_r(x) \subseteq U_i$

Proof: Рассмотрим следующую функцию:

$r(x) = \sup\{r \in (0,1) | \exists i \in I B_r(x) \subseteq U_i\}$

Утверждается, что эта функция Липшицева с константой 1:

$|r(x) - r(y)| \leq |xy|$

Покажем, что $r(x) - r(y) \leq |xy|$

Если $|xy| \geq r(x)$, то доказываемое неравенство очевидно

Пусть $|xy| < r(x)$:

В таком случае $\forall \epsilon > 0\ \exists i \in I : B_{r(x)-|xy|-\epsilon}(y) \subseteq B_{r(x)-\epsilon}(x) \subseteq U_i \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall \epsilon > 0\ r(y) \geq r(x) - |xy| - \epsilon \Rightarrow r(y) \geq r(x) - |xy|$ - что и требовалось

Аналогично $r(x) \geq r(y) - |xy|$, значит $|r(x) - r(y)| \leq |xy|$

Значит $r : X \to \mathbb{R}$ - непрерывна, значит у неё есть какое-то минимальное значение r_0, которого она достигает(так как X - компакт). При этом $r_0 > 0$, поскольку $\forall x \in X\ r(x) > 0$. Тогда $r = \frac{r_0}{2}$ подойдёт в качестве искомого радиуса

Cons. X - компактное метрическое пространство, Y - топологическое пространство

$f : X \to Y$ - непрерывно, $\{U_i\}_{i\in I}$ - открытое покрытие Y

Тогда $\exists r > 0 : \forall x \in X\ \exists i \in I : f(B_r(x)) \subseteq U_i$

Proof: рассмотрим $\{f^{-1}(U_i)\}_{i\in I}$, применим лемму Лебега

Def. X, Y - метрические пространства, $f : X \to Y$. Говорят, что f - равномерно непрерывна, если:

$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x, y \in X\ |xy| < \delta \Rightarrow |f(x)f(y)| < \epsilon$

Замечание: очевидно, что если f равномерно непрерывна, то она просто непрерывна

St. X, Y - метрические пространства, X - компакт, $f : X \to Y$ - непрерывно. Тогда f - равномерно непрерывно

Proof:

$\{B_{\frac{\epsilon}{2}}(y)\}_{y\in Y}$ - открытое покрытие Y.Тогда по следствию к теореме:

$\exists r > 0 : \forall x \in X\ \exists y \in Y : f(B_r(x)) \subseteq B_{\frac{\epsilon}{2}}(y) \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists r > 0 : \forall x, y \in X |xy| < r \Rightarrow |f(x)f(y)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$

Таким образом в качестве δ подойдёт r.

1.16 Секванциальная компактность

Def. Топологическое пространство X называется секвенциально компактным, если любая последовательность в X имеет сходящуюся подпоследовательность
Последовательность это отображение из $\mathbb{N}$ в X:$f : \mathbb{N} \to X f(n) = x_n$
Говорят, что x_0 - предел этой последовательности, если:
$\forall U$ - окрестность x_0 $\exists n_0 : \forall n > n_0 x_n \in U$

Th. (этой теореме будет посвящён весь параграф) метрическое пространство компактно тогда и только тогда когда оно секвенциально компактно

Lemma 1 X - компактное топологическое пространство, тогда $\forall A \subseteq X, |A| = \infty$ у A есть предельная точка

Proof: для доказательства достаточно доказать следующий факт:
$\exists x \in X : \forall U$ - окрестность $x |U \bigcap A| = \infty$
Предположим противное:
$\forall x \in X \exists U_x$ - окрестность $x : |U_x \bigcap A| < \infty$
U_x образуют открытое покрытие X, тогда у него есть конечное подпокрытие. Тогда:
$|A| = |\bigcup\limits_{i=1}^{n}(U_{x_i} \bigcap A)| < \infty$ - противоречие

Lemma 2 X - окмпактное метрическое пространство. Тогда оно секвенциально компактно.
$\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ - последовательность в X. Рассмотрим 2 случая:

1. $|\bigcup\{x_i\}| < \infty$ в этом случае какое-то значение встречается в последовательности бесконечно много раз и есть постоянная подпоследовательность, которая, очевидно, сходится

2. $|\bigcup\{x_i\}| = \infty$. Тогда по лемме 1 у $\bigcup\{x_i\}$ есть предельная точка x_0

   тогда есть подпоследовательность:

   $x_{i_1} \subseteq B_1(x_0)$
   $x_{i_2} \subseteq B_{1/2}(x_0) \wedge i_2 > i_1$
   .
   .
   .
   Легко видеть, что x_0 - предел $\{x_{i_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$

Lemma 3 X - секвенциально компактно и удовлетворяет 2 аксиоме счётности(у X есть не более чем счётная база). Тогда X компактно

Proof:

$\{U_j\}_{j\in J}$ - открытое покрытие X.По теореме Линделёфа у него есть открытое подпокрытие. Предположим, что у этого подпокрытия нет конечного подпокрытия:

$x_1 \in X \backslash U_1$

$x_2 \in X \backslash (U_1 \bigcup U_2)$ . . . Все x_k существуют, поскольку по предположению никакой конечный поднабор U_k не является покрытием

X секвенциально компактно, поэтому у последовательности $\{x_k\}$ есть сходящаяся подпоследовательность:

$x_{n_k} \to x_0$

Так как $\{U_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ - покрытие X, то есть такое $n \in \mathbb{N}$, что $x_0 \in U_n$. Тогда есть такое $m \in \mathbb{N}$, что $\forall k > m \ x_{n_k} \in U_n$. Но $\forall k > n \ x_{n_k} \notin U_n$, поскольку $n_k \geq k$ - противоречие

Def. X - метрическое пространство, $\epsilon > 0$

Множество $S \subseteq X$ - это ϵ - сеть в X, если $\forall x \in X \ \exists y \in S : |xy| < \epsilon$

Def. метрическое пространство называется вполне ограниченным, если для любого $\epsilon > 0$ в нём есть конечная ϵ - сеть

Lemma 4 Секвенциально компактное метрическое пространство вполне ограничено

Proof:

Будем строить сеть последовательно:

x_1 - любое

x_2 - такое что $|x_1x_2| < \epsilon$

x_3 - такое что $|x_1x_3| < \epsilon$ и $|x_2x_3| < \epsilon$

.

.

.

Если в какой-то момент очередного x_k не найдётся, то $x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}$ - конечная ϵ-сеть

Иначе у последовательности $\{x_n\}$ есть сходящаяся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$. Пусть она сходится к x_0.

Тогда существует такое n, что $\forall k > n \ |x_{n_k}x_0| < \frac{\epsilon}{2}$

Тогда $|x_{n_k}x_{n_{k+1}}| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$, что противоречит построению

Lemma 5 X - метрическое секвенциально компактное пространство сепарабельно

Proof:

Возьмём конечные ϵ-сети для $\epsilon = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$ (они есть по Лемме 4) - это будут множества $S_1, S_2, \ldots$

Утвержается, что $S = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} S_i$ - всюду плотно

Действительно, для любого $\epsilon > 0$ в любой ϵ - окрестности любой точки x есть точка из S_n для такого n, что $\frac{1}{n} < \epsilon$, значит в ϵ - окрестности любой точки x есть точка из S. А так как S, очевидно, не более чем счётно, то X - сепарабельно

Теперь начнём из этих ингридиентов собирать нашу теорему:

$\Rightarrow$ По лемме 2 метрическое компактное пространство секвенциально компактно - это в одну сторону

$\Leftarrow$ По лемме 5 метрическое секвенциально компактное пространство сепарабельно. Пусть S - не более чем счётное всюду плотное множество.

Возьмём в центре с каждым элементом S шар радиуса $\frac{1}{n}$ для каждого $n \in \mathbb{N}$. Утверждается, что полученное множество будет базой топологии(то что оно не более чем счётно очевидно)

Действительно, нам достаточно:

$\forall x \in X \ \forall r > 0 \ \exists s \in S, n \in \mathbb{N} : B_r(x) \supseteq B_{1/n}(s) \ni x$

Возьмём такое $n \in \mathbb{N}$, что $\frac{1}{n} < r$

Так как S всюду плотно, то в нём есть элемент s такой что $|sx| < \frac{1}{2n}$
Тогда $x \in B_{1/2n}(s) \subseteq B_{1/n}(x) \subseteq B_r(x)$ - что и требовалось.
Таким образом у нас есть счётная база. Тогда по лемме 3 X компактно

1.17 Полное метрическое пространство

Def. Последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ в метрическом пространстве называется фундаментальной, если:

$\forall \epsilon > 0\ \exists N : \forall n, k > N\ |x_n x_k| < \epsilon$

Def. метрическое пространство называется полным, если любая фундаментальная последовательность в нём имеет предел

Замечание: утверждение в обратную сторону верно для всех без исключения метрических пространств: любая сходящаяся последовательность фундаментальна.

Действительно, взяв ϵ в определении сходящейся последовательности равным $\frac{r}{2}$ получим, что любые 2 члена последовательности начиная с некоторого отличаются менее чем на r - что и требуется

Ex.

1. $\mathbb{R}^n$ - полное

2. X, Y - полные, тогда $X \times Y$ - полное

   Действительно, если $\{(x_n, y_n)\}$ - фундаментальная, то $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ - тоже.Тогда пусть x - предел $\{x_n\}$, y - $\{y_n\}$.

   Тогда легко видеть, что $\{(x_n, y_n)\}$ сходится к $\{(x, y)\}$ - достаточно взять такое n, для которого $|x_n x| < \frac{\epsilon}{2}$ и $|y y_n| < \frac{\epsilon}{2}$

3. $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ - не полное

4. X - метрическое пространство, $Y \subseteq X$ - полное. Тогда Y замкнуто. Действительно, если Y - не замкнуто, то у него есть предельная точка, не принадлежающая ему: $x \in Cl(Y), x \notin Y$. Тогда Возьмём $x_1 \in B_1(x)$, $x_2 \in B_{1/2}(x), \ldots$ - очевидно последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ фундамен

5. X - полное, $Y \subseteq X$ - замкнуто. Тогда Y - полное. Действительно, пусть $\{x_n\}$ - последовательность точек в Y. Тогда у неё есть предел в X - какая-то точка x. НоY содержит все свои предельные точки, значит $x \in Y$

6. Полнота - не топологическое свойство, то есть оно может не сохраняться при гомеоморфизме:

   $(0, 1) \simeq \mathbb{R}$, но $\mathbb{R}$ - полное, а $(0, 1)$ - нет

Th. (О вложенных шарах) X - полное пространство, $X \supset X_1 \supset \dots$ - последовательность непустых замкнутых множеств. Пусть $diam(X_i) \to 0$

Тогда $\bigcap\limits_{i \in \mathbb{N}} X_i \neq \emptyset$ и состоит ровно из одной точки

Proof:

В каждом множестве выберем по точке и стставим из них последовательность $\{x_i\}$

Она, очевидно, фундаментальна, так как $diam(X_i) \to 0$, тогда у неё есть предел x_0. Каждое X_n замкнуто, поэтому с последовательностью в нём лежит и её предел. Тогда $x_0 \subseteq \bigcap\limits_{i \in \mathbb{N}} X_n$. Двух же точек быть не может, поскольку с некоторого момента диаметр X_n станет меньше расстояния между ними

Th. метрическое пространство компактно $\Leftrightarrow$ оно полное и вполне ограниченное

Proof:

$\Rightarrow$

1. компактное $\Rightarrow$ вполне ограниченное

   Рассмотрим в каждой точке шар радиуса ϵ - это, очевидно, покрытие. Выберем конечное подпокрытие и получим конечную ϵ - сеть

2. компактное $\Rightarrow$ полное

   X - компактно $\Rightarrow$ секвенциально компактно(см. §15)

   $\{x_n\}$ - фундаментальная последовательность. У неё есть сходящаяся подпоследовательность. Легко видеть из фундаментальности исходной последовательности, что тогда она вся сходится к пределу этой подпоследовательности

$\Leftarrow$] есть покрытие $\{U_i\}_{i \in I}$, у которого нет конечного подпокрытия

Рассмотрим конечную ϵ-сеть из замкнутых шаров(она есть, так как даже для открытых конечная есть)

Возьмём $\epsilon = 1$. Если из всего покрытия нельзя выбрать конечное подпокрытия, то из покрытия какого-нибудь из этих шаров нельзя выбрать конечного подпокрытия(иначе мы бы объединили все эти подпокрытия и получили бы конечное подпокрытие X)

Возьмём ϵ-сеть для этого шара с $\epsilon = \frac{1}{2}$(она есть, так как даже для всего X есть). Опять же из покрытия хотя бы одного шара нельзя выбрать конечное подпокрытие. Продолжим так далее - получим последовательность вложенных замкнутых непустых множеств, диаметры которых стремяться к 0. Тогда у неё есть непустое пересечение - какая-то точка x_0. Посмотрим на то открытое множество U из нашего покрытия, которое содержит x_0 - x_0 содержится в нём с шаром радиуса r. Возьмём n такое что $\frac{1}{2n} < r$ Тогда всё замкнутое множество с номером n можно покрыть одним U - противоречие

1.18 Факторизация

Def. X - множество, на нём введено отношение эквивалентности $\sim$.
Фактор множество $X/\sim$ - множество классов эквивалентности.
$p : X \to X/\sim$
$x \to [x]$ - лкасс, которому принадлежит x.
Теперь пусть $X = (X, \Omega)$ - топологическое пространство
фактортопология на $X/\sim$ определяется следующим образом:
$\Omega_\sim = \{A \subseteq X/\sim : p^{-1}(A) \in \Omega\}$
St. $\Omega_\sim$ - это топология

1. $p^{-1}(\emptyset) = \emptyset$, $p^{-1}(X/\sim) = X$
2. $p^{-1}(A \bigcap B) = p^{-1}(A) \bigcap p^{-1}(B)$
3. $f^{-1}(\bigcup\limits_{i \in I} U_i) = \bigcup\limits_{i \in I} f^{-1}(U_i)$

Th. Проекция $p : X \to X/\sim$ непрерывна
Proof: $U \in \Omega_\sim \Rightarrow p^{-1}(U) \in \Omega$ по определению
Замечание: фактортопология - сильнейшая топология, для которой p непрерывна
Ex.

1. Стягивание подмножества в точку

   X - топологическое пространство, $Y \subseteq X$

   X/Y - факторпространство $X/\sim$, где $a \sim b \Leftrightarrow a = b \vee a, b \in Y$

   Например $D^2/S^1 \simeq S^2$(фактор диска по его границе гомеоморфен сфере)

2. Приклеивание(по отображению)

   X, Z - топологические пространства, $Y \subseteq X$

   $f : Y \to Z$

   Сначала рассматривается несвязное объединение X и Z: $X \sqcup Z$. Открытыми в нём считаються объединение открытого в X и открытого в Z. Если изначально X и Z пересекаются, то можно, например, рассмотреть $X \times \{0\} \sqcup Z \times \{1\}$ - эти 2 множества точно не пересекаются

   Рассмотрим $\sim$ - наименьшее по включению отношение эквивалентности, для которого $\forall x \in Y\ x \sim f(x)$. Приклеиванием по отображению называется факторпространство $(X \sqcup Z)/\sim$

3. Букет.

   $\{X_i\}_{i \in I}$ - семейство топологических пространств

   $x_i \in X_i$ - из каждого пространства выбирается по 1 точке

   $V(X_i, x_i) = (\sqcup X_i)/\sim$, где $\sim$ определяется следующим образом:

   $a \sim b \Leftrightarrow a = b \vee \exists i, j \in I : a = x_i, b = x_j$

   Неформально говоря это склейка семейства топологических пространств по одной точке

Th. X, Y - топологические пространства, $\sim$ - отношение эквивалентности на X, $f : X/\sim \to Y$. Тогда f непрерывна $\Leftrightarrow$ $f \circ p$ непрерывна

Proof:

$\Rightarrow$ Пусть f непрерывна. Тогда $f \circ p$ непрерывна, как композиция непрерывных

$\Leftarrow$ $U \in Y$ - открыто. $f^{-1}(U) = p(p^{-1}(f^{-1}(U))$, так как p сюрьективна. Обозначим $f \circ p$ за g.

По условию g - непрерывно, поэтому $p^{-1}(f^{-1}(U)) = g^{-1}(U)$ открыто в X. Тогда, по определению фактортопологии, $p(g^{-1}(U))$ открыто в $X/\sim$

Ex. Хотим узнать, правда ли что $[0,1]/\{0,1\} \simeq S^1$

$g : [0,1] \to S^1$ $g(x) = (sin(x), cos(x))$

Каждый класс эквивалентности переходит в одну точку(только для 0 и 1 значения g совпадают, что нам и нужно). Поэтому существует такая $f : [0,1]/\{0,1\} \to S^1$, что $f \circ p = g$

g - непрерывна $\Rightarrow$ f - непрерывна(см. теорему)

При этом f, очевидно, биекция. $[0,1]$ - компактно, p - непрерывно, поэтому $[0,1]/\{0,1\}$ - тоже компактно. S^1, очевидно, хаусдорфово. Тогда f - гомеоморфизм, поскольку он - непрерывная биекция из компакта в хаусдрфово пространство.

Аналогично можно показать, что $D^2/S^1 \simeq S^2$

1.19 Тихоновское произведение

Def. $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ - семейство множеств. Их декартовым произведением называется следующий объект:

$\prod\limits_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha = \{\{x_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda} : \forall\alpha\ x_\alpha \in X_\alpha\}$

Более формально:

$\prod\limits_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha = \{f : \Lambda \to \bigcup X_\alpha : \forall\alpha \in \Lambda\ f(\alpha) \in X_\alpha\}$ - множество функций из Λ в обьъединение множеств X_α, для которых образ каждого элемента α лежит в X_α.

Замечание: как легко увидеть из 2 определения, даже утверждение о непустоте декартова произведения множество эквивалентно аксиоме выбора

Введём некоторые обозначения:

$X^\Lambda = \{f : \Lambda \to X\} = \prod\limits_{\alpha\in\Lambda} X$

Если $\Lambda = \{1, 2, \ldots, n\}$, $X_1, \ldots, X_n$ - семейство множеств

$\prod\limits_{i=1}^{n} X_i = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_i \in X_i\}$ - декартово произведение n пространств

$p_\beta : \prod\limits_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha \to X_\beta$

$p_\beta(x) = x_\beta$

Это отображение называется координатной проекцией

С этого момента и до конца параграфа мы будем считать, что все X_α - топологические пространства

Def. Тихоновская топология на $\prod X_\alpha$ - это минимальная по включению топология, для которой p_α непрерывно для всех $\alpha \in \Lambda$

Def. Цилиндр - любое множество вида $p_\alpha^{-1}(U)$, где $\alpha \in \Lambda$, а U открыто в X_α

St. в качестве базы тихоновской топологии можно взять пересечение конечного числа цилиндров(другими словами предбазой тихоновской топологии являются сами цилиндры)

Proof: Действительно, так как все p_α должны быть непрерывны, то все цилиндры должны быть открыты в тихоновской топологии. Значит любая топология, для которой все p_α непрерывны, не слабее топологии, порождённой цилиндрами, как предбазой. С другой стороны, так как всё декартово произведение является цилиндром, то объединение всех цилиндров совпадает со всем пространством и значит цилиндры являются предбазой некторой топологии.

Замечание: базовые множества тихоновской топологии можно описать следующим образом:
$U_1 \subseteq X_{\alpha_1}, \dots, U_n \subseteq X_{\alpha_n}$ - конечный набор пространств и открытые множества в них
Тогда базовым является множество:
$\{x \in \prod X_\alpha : x_{\alpha_1} \in U_1, \dots, x_{\alpha_n} \in U_n\}$
Th. (о покоординатной непрерывнсти)
$\{X_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ - семейство топологических пространств.
Y - так же топологическое пространство
$f : Y \to \prod\limits_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$
Тогда f - непрерывно $\Leftrightarrow \forall \alpha \in \Lambda \; p_\alpha \circ f$ - непрерывно
Proof:
$\Rightarrow$ Так как все p_α непрерывны, то $p_\alpha \circ f$ непрерывны, как композиции непрерывных
$\Leftarrow$ Достаточно доказать, что прообраз предбазового множества открыт.
$\alpha \in \Lambda$, $U \in X_\alpha$ - открыто, $V = p_\alpha^{-1}(U)$
$p_\alpha \circ f$ - непрерывно, поэтому $(p_\alpha \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(p_\alpha^{-1}(U))$ - открыто
Теперь заметим, что это то, что нам и нужно: $f^{-1}(V)$ - открыто
Def. Тихоновский куб - это $[0,1]^{\mathbb{N}}$
Th. Тихоновский куб метризуем
Proof:
$x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \forall n \in \mathbb{N} \; x_n \in [0,1]$
$y = \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$
Введём следующую функцию:
$d(x,y) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n - y_n|}{2^n}$
Легко видеть, что во-первых этот ряд всегда сходится и во-вторых функция d является метрикой на тихоновском кубе

Теперь покажем, что она задаёт ту же метрику, что и тихоновская топология

Для этого необходимо показать, что для любой точки в кубе для любого базового множества U в тихоновской топологии, содержащего x, есть базовое в метрической топологии, содержащее x и содержащееся в U и наоборот(U базовое в метрической топологии, ищется базовое в тихоновской топологии)

Proof:

1. Пусть U - открыто в тихоновской топологии

   $U = C_1 \bigcap \dots \bigcap C_n$, $C_k = p_k^{-1}(U_k)$, U_k открыто в $[0,1]$

   U_k - окрестность точки x_k. Тогда $\forall k \in \{1, \dots, n\} \; \exists \epsilon_k : B_{\epsilon_k}(x_k) \subseteq U_k$

   Пусть $\epsilon = \frac{1}{2^n} \min\limits_{k=1}^{n} \epsilon_k$. Покажем, что $B_\epsilon(x) \subseteq U$.

   Предположим противное. Тогда $\exists y \in B_\epsilon(x) : y \notin U$

   Тогда $\exists k \in \{1, \dots, n\} : y_k \notin U_k \Rightarrow |x_k - y_k| \geq \epsilon_k \Rightarrow \frac{|x_k - y_k|}{2^k} \geq \frac{\epsilon_k}{2^k}$

   Но $\frac{\epsilon_k}{2^k} \geq \frac{\epsilon_k}{2^n} \geq \epsilon$. Тогда $|xy| \geq \epsilon$, но $y \in B_\epsilon(x)$ - противоречие

2. $U = B_r(y)$ - базовое в метрической топологии. Если $x \in U$, то рассмотрим $B_{r-|xy|}(x)$ - найдём внутри уже этого шара открытое в тихоновской топологии, содержащее x. Теперь, за ненадобностью y, переобозначим $r = r - |xy|$

   Пусть n - такое натуральное число, что $\frac{1}{2^n} < \frac{r}{2}$

   Пусть $\epsilon = \dfrac{1}{n 2^n}$

   Возьмём $V = C_1 \bigcap C_2 \bigcap \dots \bigcap C_n$, $C_k = p_k^{-1}(B_\epsilon(x_k))$($x = (x_1, x_2, \dots)$)

V открыто в тихоновской топологии, $x \in V$. Осталось показать, что $V \subseteq B_r(x)$

Пусть $y \in V$. Тогда $|xy| \le \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\epsilon}{2^i} + \sum\limits_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \le n\epsilon + \frac{1}{2^n} = \frac{2}{2^n} < r$.

Таким образом $y \in B_r(x)$ для любого y из V. Значит $V \subseteq B_r(x)$

Cons. $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ - метризуемо
$\mathbb{R} \simeq (0,1) \subset [0,1]$
$\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \simeq (0,1)^{\mathbb{N}} \subset [0,1]^{\mathbb{N}}$
$(0,1)^{\mathbb{N}}$ метризуемо, как подпространство метризуемого. Тогда и $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ метризуемо, как гомеоморфное метризуемому

Th. (теорема Тихонова) произведение любого семейства компактных пространств - компакт.
$X = \prod\limits_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$, $\forall \alpha \in \Lambda$ X_α - компакт

Proof: Предположим противное - пусть существует открытое покрытие, не имеющее конечного подпокрытия. Назовём такие покрытия плохими

Покажем, что плохие покрытия удовлетворяют условию леммы Цорна относительно отношения частичного порядка $\subseteq$. Пусть есть цепь плохих покрытий, у объединения которых есть конечное подпокрытие. Пусть это подпокрытие - множества $U_1, \ldots, U_n$. Для каждого U_k существует плохое покрытие Σ_k, которое содержит его в качестве элемента. Любые 2 элемента в цепи сравнимы, поэтому есть покрытие, содержащее все $U_1, \ldots U_n$ - наибольшее по включению среди $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_n$. Но тогда у него есть конечное подпокрытие $U_1, \ldots, U_n$ - противоречие

Таким образом есть плохое покрытие M, к которому нельзя ничего добавить. Другими словами $\forall U \notin M$ - открытого, существует конечное покрытие $X \setminus U$ конечным набором элементов M

Перечислим некоторые свойства M:

1. $U \in M$, $V \subseteq U, V$ - открыто, то $V \in M$. Действительно,если это не так, то добавив V в покрытие, оно очевидно, не перестанет быть плохим

2. если $U, V \notin M$, то $U \bigcap V \notin M$.

   Дополнение U покрывается конечным набором из M $U_1, \ldots, U_n$

   Дополнение V покрывается конечным набором из M $V_1, \ldots, V_k$

   Тогда дополнение $U \bigcap V$ покрывается $U_1, \ldots, U_n, V_1, \ldots, V_k$

Назовём точку $x_\alpha \in X_\alpha$ интересной, если:
$\forall U$ - окрестности x_α $p_\alpha^{-1}(U) \notin M$

Lemma В каждом X_α есть по крайней мере одна интересная точка. Предположим противное:

$\exists \alpha : \forall p \in X_\alpha$ $\exists U_p$ - окрестность $p : p_\alpha^{-1}(U_p) \in M$

В таком случае U_p по всем p из X_α образуют покрытие X_α. Тогда у него есть конечное подпокрытие $U_{p_1}, \ldots, U_{p_n}$.

Но тогда $p_\alpha^{-1}(U_{p_1}), \ldots, p_\alpha^{-1}(U_{p_n})$ - конечное подпокрытие в M

Значит в каждом X_α есть интересная точка. Выберем из каждого по 1 интересной точке(тут мы пользуемся аксиомой выбора) - получим некоторую точку $x \in X$

Так как все координатные проекции x - интересные, то ни один цилиндр, содержащий x, не лежит в M. Тогда (по 2 свойству M) ни одно базовое множество, содержащее x, не лежит в M.

Пусть U - то множество в M, которое содержит x. U - объединение базовых. Тогда x лежит в одном из этих базовых - назовём его V.

Таким образом $x \in V \subseteq U \in M$. Тогда по 1 свойству M $V \in M$, но V - базовое, содержащее x, значит $V \notin M$ - противоречие

Замечание: видно, что всё наше доказательство держится на аксиоме выбора. На самом деле мы так же использовали аксиому выбора при доказательстве компактности произведения 2 компактов, желающие могут попытаться понять, где.

1.20 Продолжение непрерывных функций

Во всём этом параграфе областью значений всех отображений считается $\mathbb{R}$, если не оговорено обратное

Th. (Лемма Урысона)

$]X$ - нормальное топологическое пространство

A, B - замкнутые непересекающиеся подмножества X

Тогда существует непрерывное отображение $f : X \to [0, 1]$(а значит и из X в $\mathbb{R}$) такое, что $f(A) = \{0\}, f(B) = \{1\}$

Замечание: это условие эквивалентно нормальности - достаточно рассмотреть $f^{-1}([0, \frac{1}{2}))$ и $f^{-1}((\frac{1}{2}, 1])$

Proof:

Если $A = \emptyset$ или $B = \emptyset$, то условие теоремы очевидно - можно взять постоянную функцию. Будем считать, что $A \neq \emptyset$ и $B \neq \emptyset$

Будем пользоваться переформулировкой условия нормальности:

$\forall A$ - замкнутого, $A \subseteq U$, U - открыто

$\exists V$ - открытое: $A \subseteq V, Cl(V) \subseteq U$

Введём обозначение:

$D = \{\frac{k}{2^n} : k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$

Нашей задачей будет сопоставиль каждому $t \in D$ открытое U_t такое что если $t < s$, то $Cl(U_t) \subseteq U_s$

$A \subseteq U_0$, $U_1 \subseteq X\backslash B, Cl(U_0) \subseteq U_1$ - такие есть из переформулировки нормальности для множеств A и $X\backslash B$

при $t > 1$ положим $U_t = X$; при $t < 0$ $U_t = \emptyset$

Далее будем строить по индукции для множеств вида $\frac{k}{2^n}$, $k \in \mathbb{N}$

$U_{1/2}$ - такое, что $Cl(U_0) \subseteq U_{1/2}$ и $Cl(U_{1/2}) \subseteq U_1$ - такое есть из переформулировки нормальности для множеств $Cl(U_0)$ и U_1

И так далее - на каждом шаге на всех отрезках вида $[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}]$ мы ищем множество $U_{\frac{2k+1}{2^{n+1}}}$ такое, что в нём лежит замыкание $U_{\frac{k}{2^n}}$ и его замыкание лежит в $U_{\frac{k+1}{2^n}}$

Теперь введём следующую функцию:

$f(x) = \inf\{t \in D : x \in U_t\}$

Очевидно, что $f(X) \subseteq [0, 1]$, $f(A) = 0$, $f(B) = 1$

Осталось понять, почему f - непрерывна(мы покажем, что она непрерывна, как отображение из X в $\mathbb{R}$ - из этого будет следовать, что она непрерывна, как отображение из X в $[0, 1]$)

$a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Достаточно показать, что $f^{-1}((a, b))$ - открыто

$(a, b) = (-\infty, b) \bigcap (a, +\infty)$. Поэтому мы докажем только что $f^1((-\infty, b))$ и $f^{-1}((a, +\infty))$ - открыты

1. $f^{-1}((-\infty, b))$ - открыто:

   $f^{-1}((-\infty, b)) = \{x : f(x) < b\} = \{x : \exists t \in D : t < b \wedge x \in U_t\} =$
   $= \bigcup\limits_{t \in D, t < b} U_t$ - открыто, как объединение открытых

2. $C = f^{-1}((a, +\infty))$

   $x \in C \Leftrightarrow \inf\{t : x \in U_t\} > a$

   Так как D всюду плотно:

   $\inf\{t : x \in U_t\} = \sup\{t : x \notin U_t\}$

   Из построения U_t:

   $\sup\{t : x \notin U_t\} = \sup\{t : x \notin Cl(U_t)\}$ - мы потеряли на этом переходе не более 1 значения t, поскольку $\forall s > t$ $Cl(U_t) \subseteq U_s$, а значит супремум не изменился

   Таким образом:

   $x \in C \Leftrightarrow \sup\{t : x \notin Cl(U_t)\} > a$

   Значит $C = \bigcup\limits_{t > a, t \in D} (X \backslash Cl(U_t))$ - объединение семейства открытых, а значит C открыто