Программа курса «Преобразования и перестановки», 8 класс

Б.А. Золотов, Поставы, 2018

1. Ассоциативность композиции функций.
2. Группа, подгруппа. Подгруппа — то же, что замкнутое множество.
3. Группа $\mathrm{Bij}(X)$. Изоморфность таких групп в случае равномощных множеств.
4. Сопряжённость элементов — отн. экв. Изоморфность сопряжённых подгрупп.
5. Сопряжение элементом из подгруппы оставляет подгруппу на месте. Нормальная подгруппа; $g^{-1}Hg = H \Leftrightarrow gH = Hg$.
6. Группа S_n. Поиск обратной, композиция перестановок, сопряжение. Теорема: сопряжение x посредством g — то же самое, что подействовать g на запись x.
7. Ядро гомоморфизма. Пример, когда ядро нетривиально. Ядро гомоморфизма — подгруппа; нормальная подгруппа.
8. Разложение перестановки на циклы. Различные записи циклов. Непересекающиеся циклы коммутируют, пересекающиеся циклы не коммутируют. Транспозиции, разложение цикла на транспозиции, разложение любой перестановки на транспозиции.
9. Количество цикл. типов с двумя циклами. Количество перестановок данного цикл. типа.
10. Обратная перестановка для цикла. С какими перестановками коммутирует $\sigma(x) = x+1$.
11. Сколько циклов в разложении σ^m.
12. Сопряженность перестановок $\Longleftrightarrow$ один цикленный тип.
13. Инверсии, количество инверсий, знак перестановки. Определение знака перестановки через произведение знаков каких-то чисел. Знак транспозиции.
14. А-инверсии, π-инверсии, однозначное соответствие между ними и инверсиями. Эквивалентность разных определений знака.
15. Знак — гомоморфизм $S_n \longrightarrow \{-1, 1\}$.
16. Подгруппа $A_n \leqslant S_n$, её нормальность, её порядок. Разложение на транспозиции и чётность перестановки.
17. Теорема Кэли — доказательство.
18. Группа преобразований множества X — определение. $\mathrm{Iso}(\mathbb{R}^2)$ — определение. Доказательство того, что изометрии биективны. Доказательство того, что $\mathrm{Iso}(\mathbb{R}^2) \leqslant \mathrm{Bij}(\mathbb{R}^2)$. Коммутативна ли $\mathrm{Iso}(\mathbb{R}^2)$?
19. Группа $V(\mathbb{R}^2)$. Нормальность $V(\mathbb{R}^2) \leqslant \mathrm{Iso}(\mathbb{R}^2)$ — доказательство двумя способами.
20. Циклическая группа: количество элементов, коммутативность, порождающий элемент, изоморфность $\mathbb{Z}_n$, вложение в S_n явным образом.
21. Диэдральная группа: количество элементов, некоммутативность, образующие и соотношения, вложение в S_{2n} и S_n.
22. Реализация C_n и D_n как вращений пирамиды и диэдра.
23. Группа SO_2, её элементы. Теорема о конечных подгруппах SO_2.
24. Группа O_2, её элементы. Группы $\mathrm{O}_2^{(0,0)}$ и $\mathrm{O}_2^{(x,y)}$ сопряжены.
25. Теорема о конечных подгруппах $\mathrm{Iso}(\mathbb{R}^2)$.