Программа курса «Линейная алгебра», 10 класс

Б.А. Золотов, Поставы, 2018

1. Определение модуля. $(-1)x = -x$, $0x = 0$. Примеры: ${}_RR$, $\{0\}$, ${}_\mathbb{Z}G$, ${}_\mathbb{Z}\mathbb{Z}_n$, ${}_RR^n$, ${}_RR^\infty$, ${}_RR^X$, $\oplus$.
2. Линейные отображения, основные типы, примеры: 0, $x \mapsto \lambda x$, вложение и проекция в $\mathbb{Z}$–модулях. Подмодули, примеры: V, $\{0\}$, постоянные функции, подгруппа для группы, многочлены степени $\leq n$. Подмодули на плоскости $\mathbb{R}^2$.
3. Пересечение и сумма модулей как sup и inf.
4. Ядро и образ: почему подмодули, как характеризуют отображение. График как подмодуль $\oplus$.
5. Фактор-модуль: отношение $\sim_V$, корректность определения операций.
6. Вложения и проекции для внешней прямой суммы. Их композиции.
7. Три теоремы о гомоморфизме.
8. Линейная оболочка векторов как наименьший подмодуль, который их содержит.
9. Внутренняя прямая сумма, однозначность представления, изоморфизм с внешней прямой суммой.
10. Точная последовательность. Два примера точных последовательностей, связанных с гомоморфизмом φ (с коядром, без коядра). Точная последовательность из суммы, прямой суммы и пересечения.
11. Линейная независимость, линейная независимость бесконечных систем. Базис, теорема: базис $\Leftrightarrow$ у любого вектора единственное представление.
12. Формальные линейные комбинации, $R^{(X)} \leqslant R^X$. Матрицы и многочлены как модули формальных линейных комбинаций.
13. Модуль с базисом $u_1 \dots u_n$ изоморфен R^n. Инъективный гомоморфизм сохраняет линейную независимость, сюръективный сохраняет порождающесть.
14. Два свободных модуля изоморфны $\Longleftrightarrow$ в них есть базисы одного размера.
15. Умножение матриц. Ассоциативность умножения матриц.
16. Неединственность ранга: кольцо матриц, где $R^2 \cong R$.
17. Матрица перехода от базиса к базису: как её построить, свойства матриц перехода. Как преобразуются строчки из векторов, как преобразуются столбцы из координат.
18. Матрица линейного отображения: как её построить, преобразование матрицы линейного отображения при переходе между базисами.
19. Линейная зависимость над полем, следствия про линейные оболочки. Условие замены Штейница.
20. Теорема Штейница, доказательство методом замены.
21. Базис как минимальная порождающая и максимальная линейно независимая система.
22. Существование и равномощность базисов. Размерность, размерность прямой суммы. Векторные пространства одной размерности изоморфны.
23. Дополнение системы до линейно независимой через вектор с неизвестной координатой: общий метод.
24. Обратная матрица 2×2, условие её существования.
25. Относительный базис, четыре эквивалентных определения; коразмерность.
26. Теорема о размерности ядра и образа, теорема о размерности суммы и пересечения.
27. Выделение подмодуля, заданного условием, его размерность, базис и относительный базис: примеры.
28. Структура векторного пространства на $\mathrm{Hom}(U, V)$. Функториальность для $\mathrm{Hom}(U, V)$.
29. Базис в пространстве $\mathrm{Hom}(U, V)$: линейная независимость, порождающесть. $\mathrm{Hom}(K, V) = V$.
30. Двойственное пространство. Двойственный базис. Преобразование столбцов базисов в V^* и строчек координат при переходе между базисами V.