Вычислительная геометрия

Борис Золотов   Матвей Магин

8 июня 2022 г.

Летняя школа МКН СПбГУ

Содержание

Задачи, выполнимые за $O(1)$

Некоторые договоренности

Для удобства мы будем считать, что точки, с которыми мы работаем на плоскости или в пространстве общего положения, то есть что для них выполняется следующее

- Никакие 3 из них не лежат на одной прямой.
- Никакие 4 из них не лежат на одной окружности.
- У них нет общих x и y координат.

В совокупности это верно почти всегда.
Сейчас мы рассмотрим несколько простых задач вычислительной геометрии, некоторые из них понадобятся нам позднее как элементарные позадачи более сложных задач.

Задание фигур уравнениями

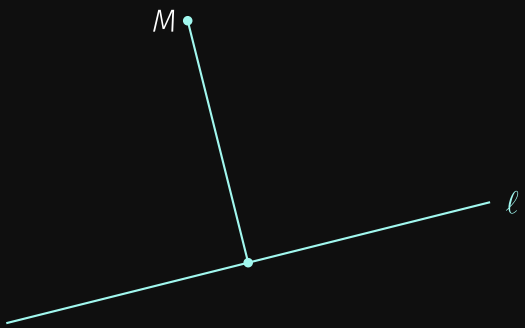
При работе с геометрическими объектами удобно задавать их уравнениями

- Прямая:
  $\ell\colon ax + by + c = 0$ или $\ell\colon y = kx + b$.
  Прямая через точки $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$:
  $$\ell\colon \begin{cases} ax_1 + by_1 + c = 0 \\ ax_2 + by_2 + c = 0 \end{cases}$$
  $$a = y_2 - y_1,\ b = x_1 - x_2,\ c = -(ax_1 + by_1)$$
- Окружность:
  $$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2,\ \text{где } (x_0, y_0) \text{ – центр, а } R \text{ – радиус}$$

Расстояние от точки до прямой

Если прямая задана как $\ell\colon ax + by + c = 0$, то расстояние от точки $M(x_0, y_0)$ до неё можно рассчитать как

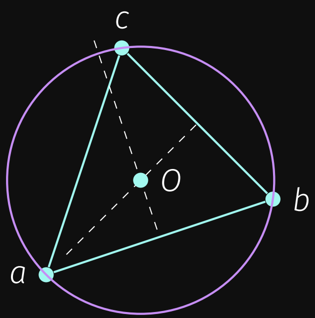
$$d(M, \ell) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$



Центр описанной окружности

Задача

Дана тройка точек a, b, c. Требуется найти центр описанной окружности $\triangle abc$.



Центр описанной окружности

1. Ищем серединные перепендикуляры к $[ac]$ и $[bc]$, как прямые p_1 и p_2.
   Если $\ell_1 : y = a_1 x + b_1$, а $\ell_2 : y = a_2 x + b_2$, то $\ell_1 \perp \ell_2 \Leftrightarrow a_1 \cdot a_2 = -1$.
   Находим серединный перпендикуляр к сторонекак прямую, проходящую через середину стороны и перпендикулярную ей.
2. Ищем их пересечение, как решение линейной системы:
   $p_1 : y = \alpha_1 x + \beta,\ \ p_2 : y = \alpha_2 x + \beta_2$.
   $$\begin{cases} y = \alpha_1 x + \beta_1 \\ y = \alpha_2 x + \beta_2 \end{cases}$$

Смежные задачи

Ясно, что очень большое количество задач можно решить совершенно аналогичным образом, например, задачи нахождения

- инцентра.
- ортоцентра.
- барицентра.

Угол между векторами

Рассмотрим вектора $\vec{a} = (x_1, y_1)$ и $\vec{b} = (x_2, y_2)$.

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = x_1 x_2 + y_1 y_2 = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2} \cos \angle(\vec{a}, \vec{b})$$

Значит, мы знаем, как найти угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \arccos\left(\frac{x_1 y_1 + x_2 y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2}}\right)$$

Косое произведение

Определение

Косым провиезеднием векторов $\vec{a} = (x_1, y_1)$ и $\vec{b} = (x_2, y_2)$ на плоскости будем называть

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{vmatrix} x_1 & y_2 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = x_1 y_2 - x_2 y_1$$

Покажем, что $\vec{a} \wedge \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \sin \angle(\vec{a}, \vec{b})$, где $\angle(\vec{a}, \vec{b})$ – угол вращения против часовой стрелки от $\vec{a}$ к $\vec{b}$.

Эквивалентность определений

В самом деле, $\cos(\angle(\vec{a}, \vec{b})) = x_1x_2 + y_1y_2/(\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2})$.

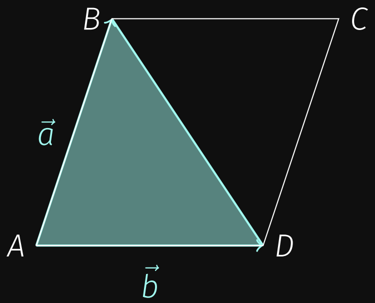
$$\sin(\angle(\vec{a}, \vec{b})) = \sqrt{1 - \cos^2(\angle(\vec{a}, \vec{b}))} = \sqrt{1 - \frac{(x_1x_2 + y_1y_2)^2}{(x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2)}} =$$

$$= \sqrt{\frac{x_1^2x_2^2 + x_1^2y_2^2 + y_1^2x_2^2 + y_1^2y_2^2 - x_1^2x_2^2 - y_1^2y_2^2 - 2x_1x_2y_1y_2}{(x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2)}}$$

$$= \frac{x_1y_2 - y_1x_2}{\sqrt{(x_1^2 + y_1^2)}\sqrt{(x_2^2 + y_2^2)}} = \frac{\vec{a} \wedge \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

Площадь треугольника

Теперь ясно, что $\vec{a} \wedge \vec{b} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABC}$, где площадь ориентированная.



Ориентация

Определение

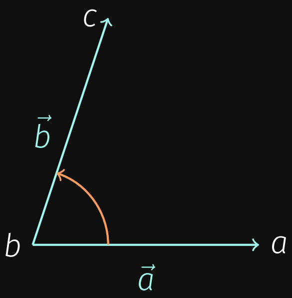
Будем говорить, что тройка точек (a, b, c) положительно ориентирована и писать $\mathbf{sign}(a, b, c) > 0$, если поворот вектора $\vec{ba}$ к вектору $\vec{bc}$ осуществляется против часовой стрелки.

Замечание

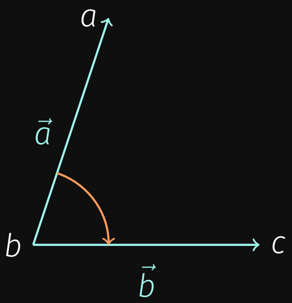
Ориентация тройки точек $(a, b, c,)$ совпадает со знаком косого произведения $\vec{ba} \wedge \vec{bc}$.

Ориентация

$\boxed{\operatorname{sign}(a, b, c) > 0}$



$\boxed{\operatorname{sign}(a, b, c) < 0}$



Пересечение отрезков

Задача

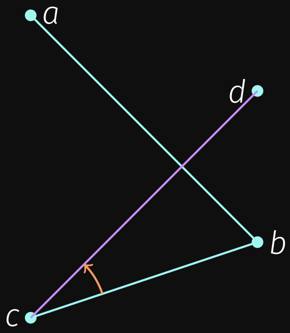
Дана четверка точек a, b, c, d. Требуется определить, пересекаются ли отрезки $[ab]$ и $[cd]$.

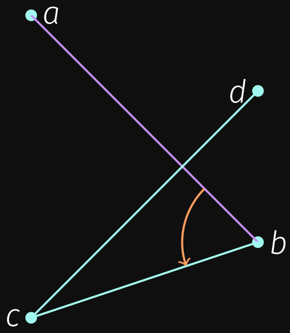
Заметим, что отрезки $[ab]$ и $[cd]$ пересекаются т. и т.т., когда

- Концы a, b лежат по разные стороны от прямой (cd).
- Концы c, d лежат по разные стороны от прямой (ab)

Заметим, что точки a и b лежат по разные стороны от прямой (cd) т. и т.т., когда различны $\mathsf{sign}(a, c, d)$ и $\mathsf{sign}(b, c, d)$.

Пересечение отрезков





Пересечение отрезков

INTERSECT(a, b, c, d):

```
if sign(a, c, d) = sign(b, c, d) then
    return FALSE
else
    if sign(a, b, c) = sign(a, b, d) then
        return FALSE
    else
        return TRUE
    end if
end if
```