Вычислительная геометрия, день 2

Борис Золотов   Матвей Магин

20 июня 2022 г.

Летняя школа МКН СПбГУ

Содержание

Диаграммы Вороного
Триангуляции Делоне
VD и DT — двойственные графы
Выпуклая оболочка в 3D
Gift Wrapping
Divide & Conquer
Lifting
Двойственность точек и прямых
Алгоритм Чена—Хана
Теорема Александрова
Склейки: важные примеры

Диаграммы Вороного

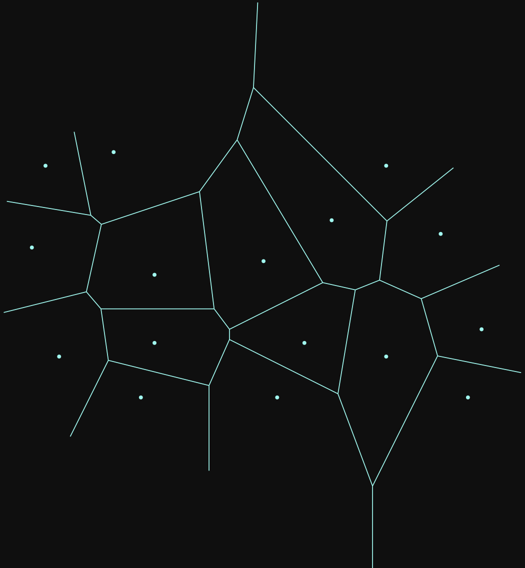
Диаграмма Вороного

Определение

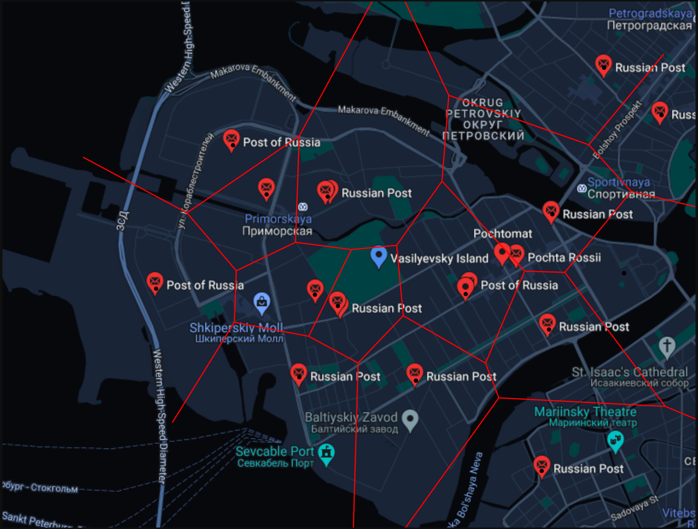
Пусть S — конечное подмножество $\mathbb{R}^2$ (его точки — сайты).
Диаграммой Вороного $\mathcal{VD}(S)$ называется разбиение плоскости на n ячеек $\{F_i\}$, при котором $x \in F_i \Leftrightarrow s_i \in S$ — ближайший к x сайт.

Мы рассматриваем $\mathcal{VD}(S)$ в рамках ограниченной области плоскости, содержащей все её вершины.

Диаграмма Вороного



Post office problem



Свойства диаграмм Вороного

- Серединный перпендикуляр к $s_i s_j$ делит плоскость на две гиперплоскости. Пусть $H(s_i s_j)$ — та из них, которая содержит s_i. Тогда
$$F_i = \bigcap_{j=1,\ j\neq i}^{n} H(s_i, s_j)$$
- Вершина — центр окружности, проходящий через 3 соседних с ней сайта.
- Клетка сайта s_i неограничена $\Leftrightarrow s_i \in \mathcal{CH}(S)$.

Свойства диаграмм Вороного

- $\mathcal{VD}(S)$ — планарный трёхсвязный 3-регулярный граф.
- Удобно хранить в *DCEL*.
- Если $|S| = n$, то $V(\mathcal{VD}(S)) \leq 2n - 5$, $E(\mathcal{VD}(S)) \leq 3n - 6$.
- Занимает линейный размер по памяти.

Построение диаграммы Вороногго: Brute force

Идея: пересекать серединные перпендикуляры.

Построение ячейки для сайта s_i:

1. Проводим все серединные перпендикуляры между s_i и s_j, $i \neq j$.
2. Пересекаем попарно все серединные перпендикуляры, получаем $O(n^2)$ точек.
3. Каждую проверяем на принадлежность каждой из $n - 1$ полуплоскостей.

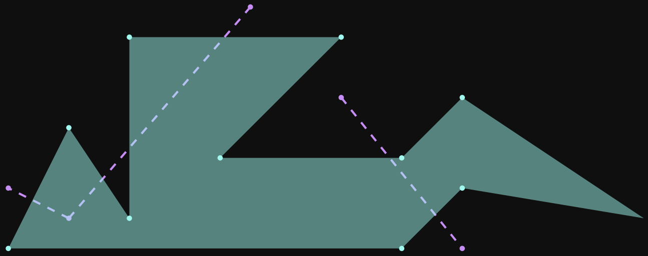
Время работы: $T(n) = n \cdot O(n^2) \cdot (n - 1) = O(n^4)$.

Построение $\mathcal{VD}(S)$: Пересечение полуплоскостей

Рассмотрим теперь более быстрый алгоритм, использующий геометрические идеи, связанные с пересечением полуплоскостей. Сначала мы реализуем несколько важных процедур, а после научимся более оптимально пересекать полуплоскости.

Принадлежность точки выпуклому многоугольнику

- Пускаем луч из точки в произвольном направлении.
- Если он пересекает границу многоугольника нечетное число раз, то точка внутри. Если четное — снаружи.



Пересечение выпуклых многоугольников

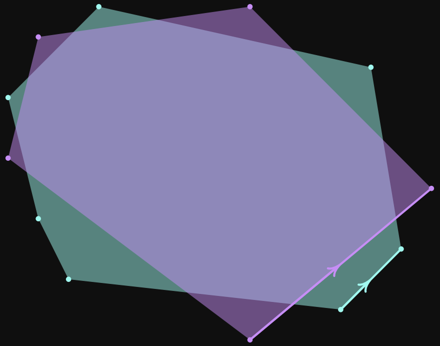
Пользуясь предыдущей процедурой, работающей за $O(n)$ (и $O(\log(n)$ на выпуклом), получаем наивный алгоритм:

- Пересекаем каждую сторону первого многоугольника с каждой стороной второго.
- Точки пересечения проверяем на принадлежность каждому из многоугольников.

Время работы: $T(n, m) = O(m \cdot n \cdot \log(n \cdot m))$.

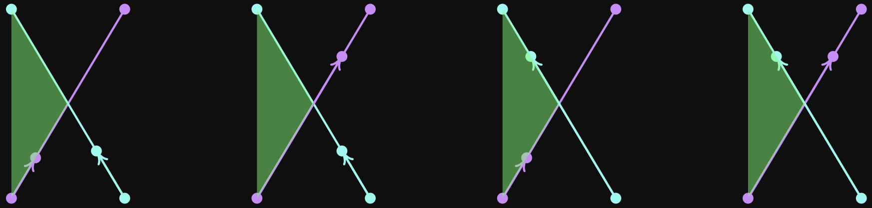
Пересечение вып. многоугольников: O'Rourke

- Вершины многоугольников упорядочены против часовой стрелки.
- Движемся по границам и на каждом шаге определяем, по какому многоугольнику переходить на одну вершину дальше.



Пересечение вып. многоугольников: O'Rourke

- Каждый раз получаем одну из восьми ситуаций:



- В случаях (1) и (2) двигаемся по второму многоугольнику, в случаях (3) и (4) — по первому.
  Кроме того, для случая (4) необходимо вычислить и добавить точку пересечения.

Пересечение вып. многоугольников: O'Rourke

- В результате полного обхода получаем точки пересечения. Если каждый раз будем брать ломанные, лежащие левее в порядке обохода, получим пересечение.
- Интересно, что если каждый раз будем брать лежащую правее — получим объединение.

Время работы: $T(n, m) \leq 2(n + m) = O(n + m)$.

Построение $\mathcal{VD}(S)$: Пересечение полуплоскостей

Наконец, перейдем к построению диаграммы Вороного.

- Строим все серединные перпендикуляры к отрезкам, соединяющим сайт s_i с остальными сайтами, получаем $n-1$ полуплоскость.
- Пересекаем все полуплоскости следующим образом: Сначала все пары, потом пары пересечений и так далее.
- Получаем клетку для выбранного сайта.

Время работы: $T(n) = O(n \cdot n \cdot \log(n)) = O(n^2 \log(n))$.

Недостатки этих алгоритмов

- Неоптимальное время работы — можно за $O(n \log(n))$.
- На выходе получаем список клеток (без всякой информации о их взаимосвязях).

Решение: алгоритм Форчуна с использованием DCEL.
Или алгоритм $D\&C$ за $O(n \log(n))$.

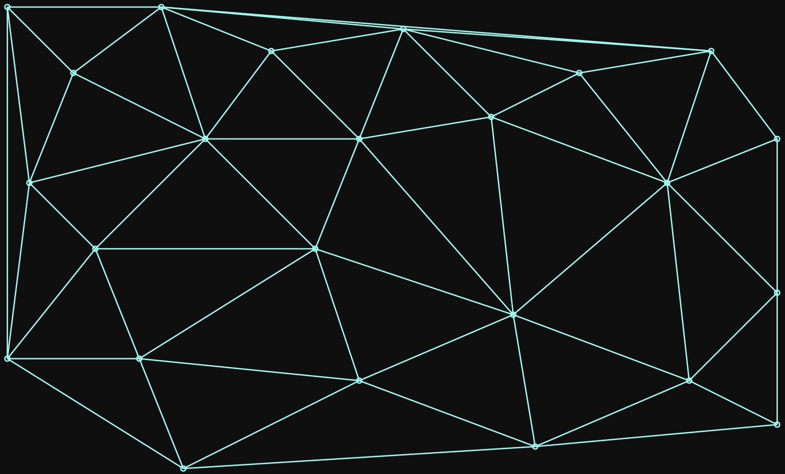
Триангуляции Делоне

Триангуляция Делоне

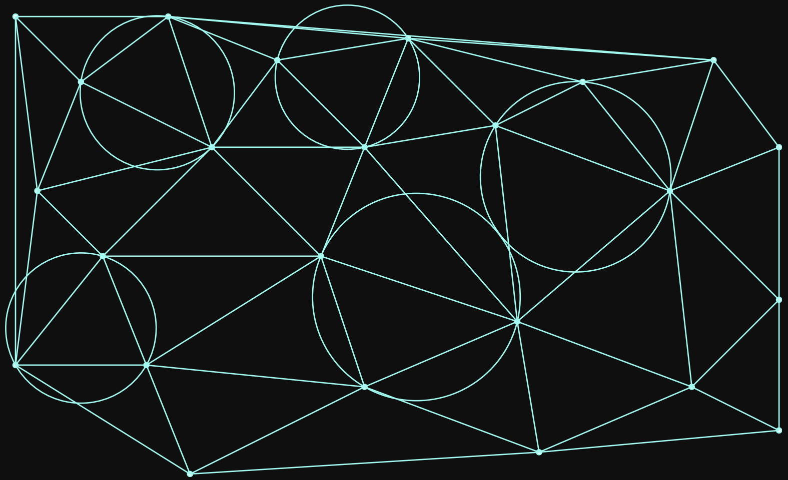
Определение

Пусть S — конечное подмножество $\mathbb{R}^2$. Триангуляцией Делоне $\mathcal{DT}(S)$ называется такая триунгуляция этого множества, при которой круг, описанный около каждого треугольника не содержит других вершин триангуляции.

Триангуляция Делоне



Триангуляция Делоне

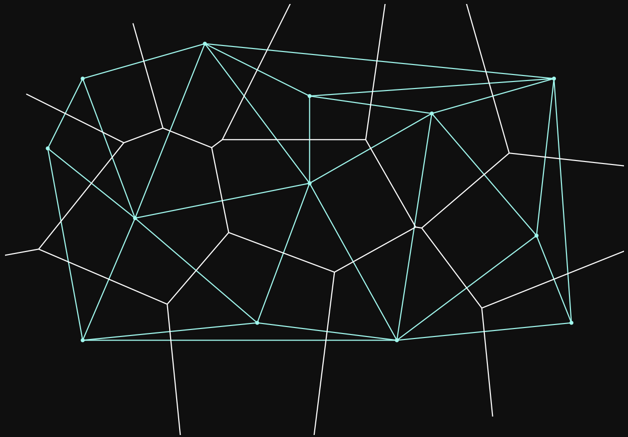


VD и DT — двойственные графы

$\mathcal{VD}(S)$ и $\mathcal{DT}(S)$ — двойственные графы

Теорема

$\mathcal{DT}(S)$ — двойственный граф к $\mathcal{VD}(S)$.



$\mathcal{VD}(S)$ и $\mathcal{DT}(S)$ — двойственные графы

Доказательство.

Рассмотрим сайты s_i, s_j, s_k из одного треугольника в триангуляции Делоне. Тогда вершина диаграммы Вороного — центр описанной окружности треугольника $\triangle s_i s_j s_k$.

Так как центр описанной окружности единственный, мы получили взаимнооднозначное соответствие.

$\square$

$\mathcal{VD}(S)$ и $\mathcal{DT}(S)$ — двойственные графы

Следствие

При условии общего положения триангуляция Делоне множества точек единственна.

То есть, если мы умеем строить диаграмму Вороного и храним её в DCEL, то мы умеем строить и триангуляцию Делоне.

Свойства триангуляции Делоне

- Максимизирует минимальный угол.
- *MST* — подграф триангуляции Делоне (что позволяет относительно эффективно его считать).
- Так как триангуляция Делоне избегает узких (похожих на вырожденные) треугольников, её часто использвют в самом разнои моделировании. Например, ландшафтном.

Выпуклая оболочка в 3D

Постановка задачи

Даны точки $p_1, p_2, \ldots, p_n \in \mathbb{R}^3$.

Построить **DCEL,** соответствующий граням выпуклой оболочки множества $S = \{p_1, \ldots, p_n\}$, указывая p_i в записях вершин.

Сложность ответа

Граф любого многогранника планарен, поэтому количества рёбер, вершин и граней отличаются не более чем в константу раз. Отсюда количество записей и ссылок в итоговом DCEL будет $O(h)$.

Gift Wrapping

Gift wrapping

Обобщение алгоритма *Jarvis march* на трёхмерный случай.

Отрезок между самой нижней точкой и другой точкой, который имеет min угол с горизонтальной плоскостью, будет ребром выпуклой оболочки.

Выбор следующей грани

while внешняя грань — не треугольник **do**

  $p_i p_k p_l$ — грань, смежная с внешней

  $p_k p_l$ — ребро внешней грани

  for all $p \in S$ **do**

    Найти угол $\angle((p_i\, p_k\, p_l), (p\, p_l\, p_k))$

  end for

  $p^* \in S$ — точка, для которой угол наибольший

  Добавить грань $p^* p_l p_k$ в DCEL

end while

Выбор следующей грани

while внешняя грань — не треугольник **do**

  $p_i p_k p_l$ — грань, смежная с внешней

  $p_k p_l$ — ребро внешней грани

  for all $p \in S$ **do**

    Найти угол $\angle((p_i\, p_k\, p_l), (p\, p_l\, p_k))$

  end for

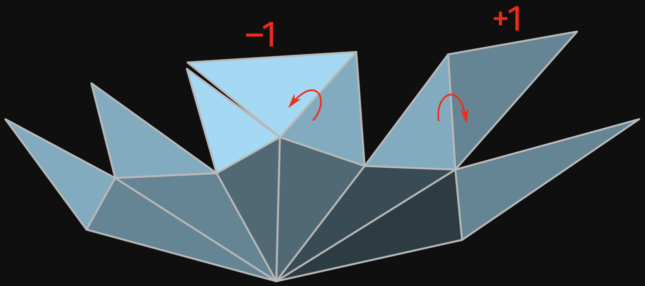
  $p^* \in S$ — точка, для которой угол наибольший

  Добавить грань $p^* p_l p_k$ в DCEL

end while $\triangleright$ Время работы — $O(n \cdot h)$

Количество сторон внешней грани

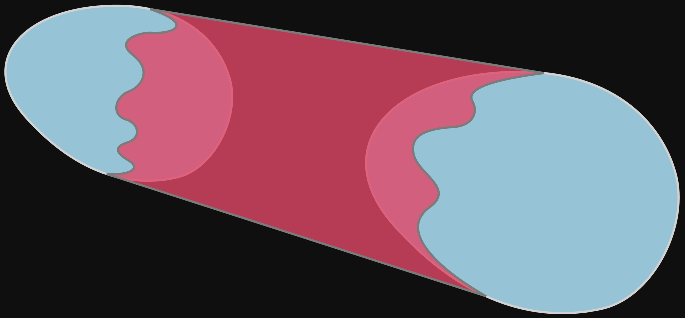
Количество сторон внешней грани может как увеличиться, так и уменьшиться при добавлении очередной грани выпуклой оболочки.



Divide & Conquer

Слияние двух выпуклых оболочек

При слиянии необходимо вычислить цилиндр, состоящий из граней, соединяющих выпуклые оболочки $\mathcal{CH}_1$ и $\mathcal{CH}_2$.



Поиск первой грани

Рассмотрим нижнюю вершину и её соседа в $\mathcal{CH}_1$
и нижнюю вершину в $\mathcal{CH}_2$. Проведём через них плоскость.

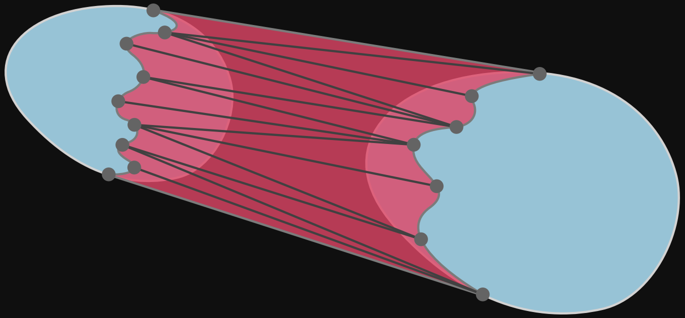
Если кто-то из соседей выбранных вершин лежит ниже этой плоскости, заменим одну из вершин на него.

Повторим процесс.

Картинка на доске

Вычисление цилиндра

Заметим, что рёбра, ограничивающие цилиндр, являются рёбрами выпуклых оболочек $\mathcal{CH}_1$ и $\mathcal{CH}_2$.



Cylinder wrapping

Пусть p_i^1 и p_j^2 — последние вершины, добавленные к цилиндру из $\mathcal{CH}_1$ и $\mathcal{CH}_2$ соответственно;
$p_i^1 p_j^2 p_k^*$ — последняя известная грань цилиндра.

Рассмотрим всех соседей p_i^1 и p_j^2 в их выпуклых оболочках, добавим грань $p_*^* p_j^2 p_i^1$, которая образует наибольший угол с $p_i^1 p_j^2 p_k^*$, в цилиндр.

Повторим, пока не придём к изначальному ребру.

Время работы

Может показаться, что «проверяем всех соседей» — долго.

Однако заметим, что каждое ребро проверялось максимум дважды — при поиске как первой грани, так и каждой из последующих.

Отсюда сложность слияния линейна.

$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + O(n)$ даёт время $O(n \cdot \log n)$.

Lifting

Сведе́ние DT к $3D$-$\mathcal{CH}$

Покажем, что задача построения триангуляции Делоне на плоскости сводится к задаче построения выпуклой оболочки в $\mathbb{R}^3$ за линейное время.

Рассмотрим точки $\{p_1, \ldots, p_n\} = S$ и поднимем их на параболоид:

$$(x, y) \quad \mapsto \quad (x, y, x^2 + y^2).$$

Теорема

Проекции граней выпуклой оболочки, нормаль которых направлена вниз, будут областями Делоне.

Пересечения с плоскостями и окружности

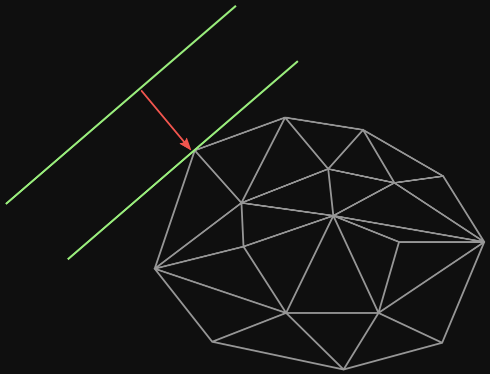
Лемма

Проекция пересечения параболоида $z = x^2 + y^2$ и плоскости $ax + by + cz = d$ на плоскость Oxy — окружность. Её центр не зависит от d.

Доказательство: раскроем скобки, коэффициенты при x^2 и при y^2 будут одинаковы; выделенные полные квадраты не будут меняться при изменении d.

Почему это работает

Вершина выпуклой оболочки $\mathcal{CH}(S)$ — это первая точка касания S и какой-то плоскости, придвигаемой снаружи.

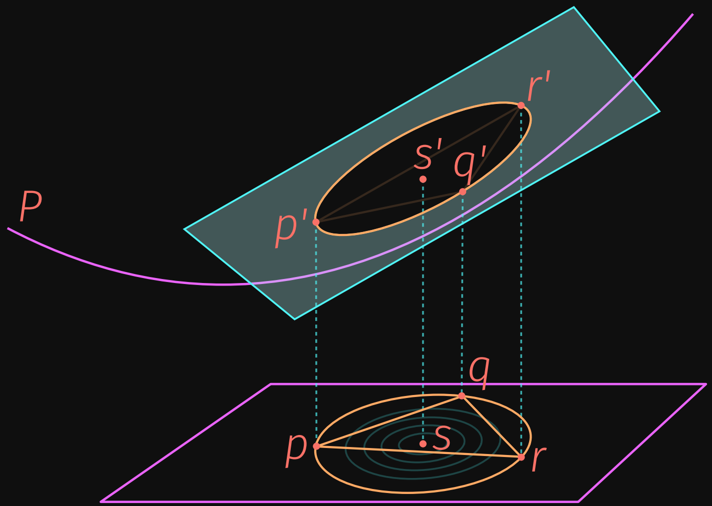


Ещё о касании

Если касание произошло сразу в трёх точках — значит, плоскость была параллельна грани выпуклой оболочки.

Будем поднимать плоскость, параллельную грани $\mathcal{CH}$, и одновременно смотреть, что происходит на плоскости Oxy.

Подъём плоскости



Подъём плоскости — обоснование

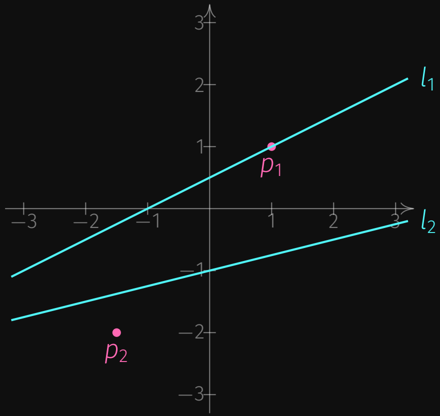
- Рассмотрим плоскость, которая касается P в точке s' — поднятом центре описанной окружности.
- Начнём поднимать её вверх. Коэффициент d растёт. Проекция пересечения с P — окружность с центром в s. Радиус увеличивается.
- Первые точки на P, которых коснётся плоскость, соответствуют первым точкам на Oxy, через которые пройдёт расширяющаяся окружность.
- Треугольники Делоне соответствуют граням $\mathcal{CH}$.

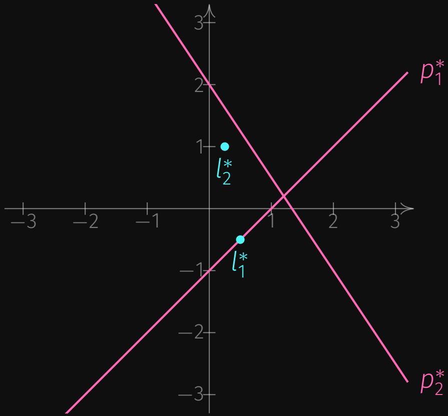
Диаграмма Вороного за $n \cdot \log n$

- Поднять точки на параболоид,
- Построить выпуклую оболочку,
- Спроецировать, получить триангуляцию Делоне,
- Перейти к двойственному графу, profit.

Двойственность точек и прямых

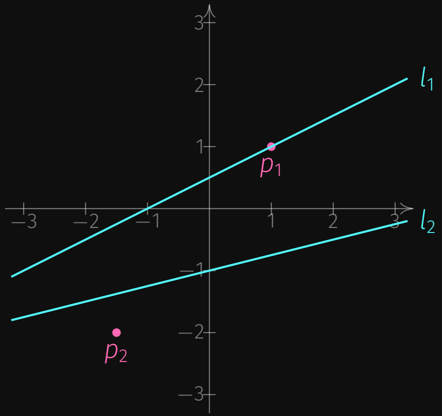
Определение

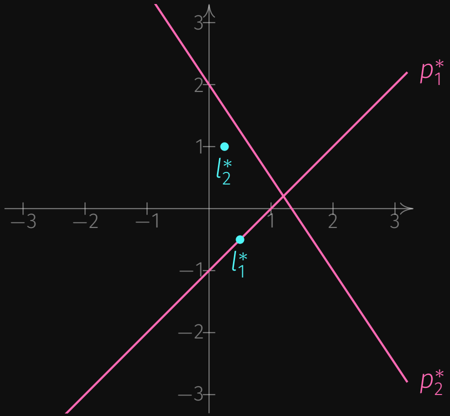




$$(a, b) \quad \longleftrightarrow \quad \{y = ax - b\}$$

Инцидентность и над / под

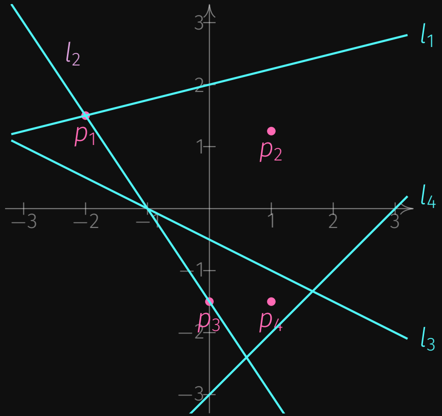


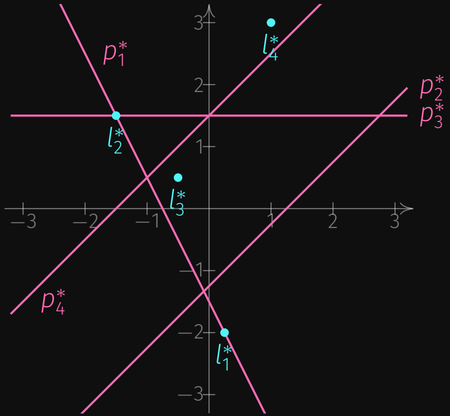


$p \in l \iff l^* \in p^*$

p над $l \iff l^*$ над p^*

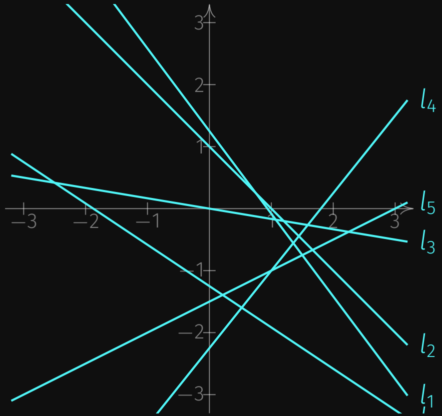
Ещё пример

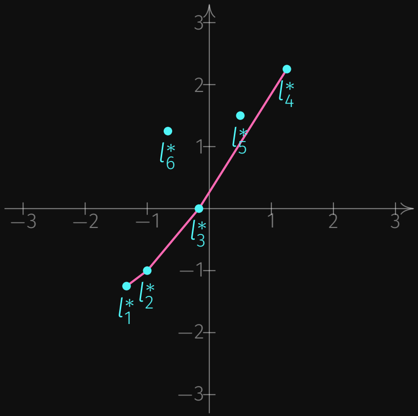




$$l_1 \cap l_2 = p \quad \Longleftrightarrow \quad p^* \text{ проходит через } l_1^*, l_2^*$$

Двойственность задач





Верхнее пересечение полуплоскостей $\Longleftrightarrow$ Нижняя $\mathcal{CH}$

Алгоритм Чена—Хана

Постановка задачи

Дана поверхность многогранника; все грани — треугольники. Выбрана вершина S. Найти длины кратчайших путей *(по поверхности многогранника)* от S до каждой из остальных его вершин.

Устройство кратчайших путей

- Кратчайший путь переходит с грани на грань не более $n - 1$ раза,
- Кратчайшие пути не пересекаются, кроме как в S или в вершине назначения,
- При разгибании рёбер кратчайший путь превращается в отрезок прямой линии.

Дерево кратчайших путей

Грани многогранника хранятся в DCEL; путь определяется последовательностью пройденных граней.

Покажем, как пересчитываются пути при переходе на следующую грань и как формируется двоичное дерево.

One angle — one split

Лемма

Из двух узлов дерева, расположенных на одном полуребре, только у одного может быть два потомка, определяющих кратчайшие пути.

Эффективный алгоритм

Считаем двух детей листа и проверяем, кто теперь *оккупирует* вершину многогранника под ним. У того, кто (*теперь*) не оккупирует, удаляем одного ребёнка.

На каждой итерации у дерева линейное количество листьев: по одному на каждое полуребро, плюс по одному разделяющемуся на каждое полуребро.

Глубина дерева не более n.

Теорема Александрова

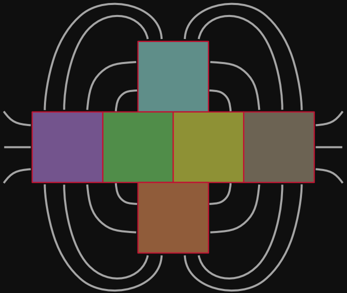
Отношение эквивалентности

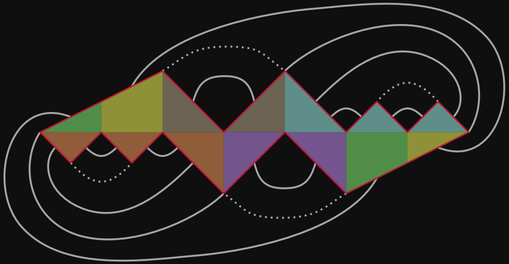
Дан набор многоугольников. Разобьём $\bigcup \partial P_i$ на отрезки, пары отрезков одинаковой длины можно склеивать между собой.

Будем рассматривать фактор-пространство, получающееся при таком склеивании.

Теорема Александрова: склейки

Нас интересуют склейки, которые гомеоморфны сфере и угол в каждой точке которых не превосходит 360°.

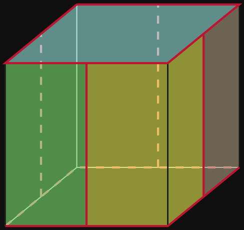


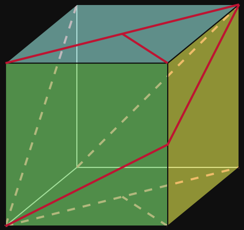


Теорема Александрова: многогранники

Теорема

Склейке, удовлетворяющей этим условиям, соответствует (изометричен) единственный выпуклый многогранник.

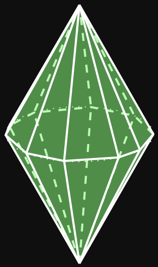




Склейки: важные примеры

Не существует замкнутой формулы

Координаты правильного N-угольника со стороной L не выражаются в радикалах.

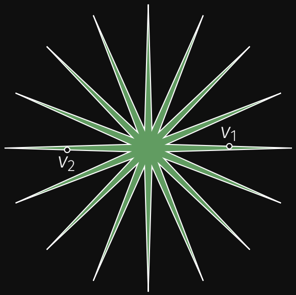


Отсюда координаты вершин бипирамиды (которая получается из набора треугольников с целыми сторонами по теореме Александрова) также не выражаются.

Экспоненциально много различных склеек

Теорема

Для любого чётного n существует многоугольник с n вершинами, из которого можно сделать не менее $2^{C\cdot n}$ комбинаторно различных порёберных склеек.



Спасибо за внимание!

Диаграммы Вороного

Триангуляции Делоне

VD и DT — двойственные графы

Выпуклая оболочка в 3D

Gift Wrapping

Divide & Conquer

Lifting

Двойственность точек и прямых

Алгоритм Чена—Хана

Теорема Александрова

Склейки: важные примеры