Вычислительная геометрия

Борис Золотов   Матвей Магин

20 июня 2022 г.

Летняя школа МКН СПбГУ

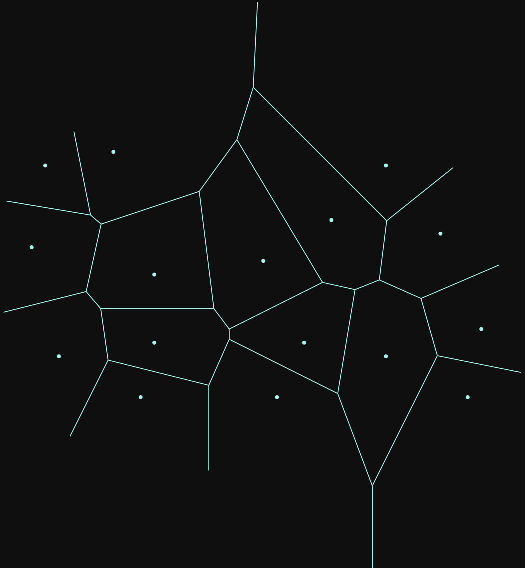
Диаграмма Вороного

Определение

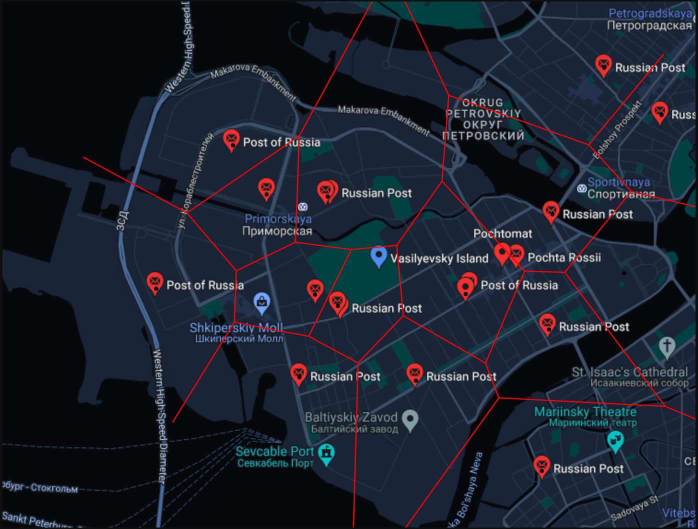
Пусть S — конечное подмножество $\mathbb{R}^2$ (его точки — сайты). Диаграммой Вороного $\mathcal{VD}(S)$ называется разбиение плоскости на n ячеек $\{F_i\}$, при котором $x \in F_i \Leftrightarrow s_i \in S$ – ближайший к x сайт.

Мы рассматриваем $\mathcal{VD}(S)$ в рамках ограниченной области плоскости, содержащей все её вершины.

Диаграмма Вороного



Post office problem



Свойства диаграмм Вороного

- Серединный перпендикуляр к $s_i s_j$ делит плоскость на две гиперплоскости. Пусть $H(s_i s_j)$ – та из них, которая содержит s_i. Тогда
$$F_i = \bigcap_{j=1,\ j \neq i}^{n} H(s_i, s_j)$$
- Вершина – центр окружности, проходящий через 3 соседних с ней сайта.
- Клетка сайта s_i неограничена $\Leftrightarrow s_i \in \mathcal{CH}(S)$.

Свойства диаграмм Вороного

- $\mathcal{VD}(S)$ — планарный трисвязный трирегулярный граф.
- Удобно хранить в *DCEL*.
- Если $|S| = n$, то $V(\mathcal{VD}(S)) \leq 2n - 5$, $E(\mathcal{VD}(S)) \leq 3n - 6$.
- Занимает линейный размер по памяти.

Построение диаграммы Вороногго: Brute force

Идея: пересекать серединные перпендикуляры.

Построение ячейки для сайта s_i:

1. Проводим все серединные перпендикуляры между s_i и s_j, $i \neq j$.
2. Пересекаем попарно все серединные перпендикуляры, получаем $O(n^2)$ точек.
3. Каждую проверяем на принадлежность каждой из $n - 1$ полуплоскостей.

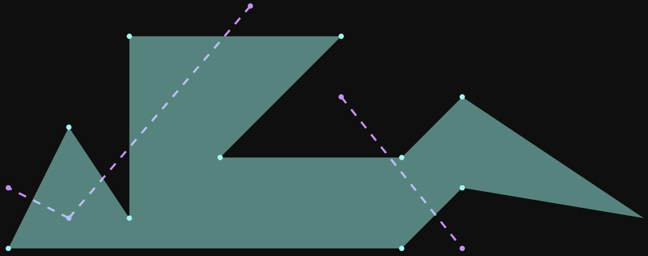
Время работы: $T(n) = n \cdot O(n^2) \cdot (n - 1) = O(n^4)$.

Построение $\mathcal{VD}(S)$: Пересечение полуплоскостей

Рассмотрим теперь более быстрый алгоритм, использующий геометрические идеи, связанные с пересечением полуплоскостей. Сначала мы реализуем несколько важных процедур, а после научимся более оптимально пересекать полуплоскости.

Принадлежность точки выпуклому многоугольнику

- Пускаем луч из точки в произвольном направлении.
- Если он пересекает границу многоугольника нечетное число раз, то точка внутри. Если четное — снаружи.



Пересечение выпуклых многоугольников

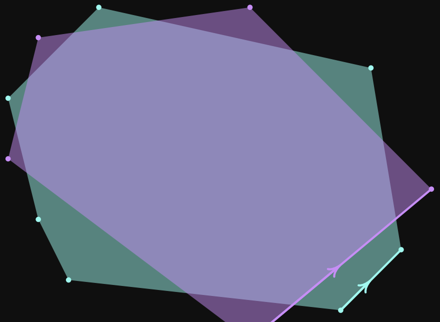
Пользуясь предыдущей процедурой, работающей за $O(n)$ (и $O(\log(n)$ на выпуклом), получаем наивный алгоритм:

- Пересекаем каждую сторону первого многоугольника с каждой стороной второго.
- Точки пересечения проверяем на принадлежность каждому из многоугольников.

Время работы: $T(n, m) = O(m \cdot n \cdot \log(n \cdot m))$.

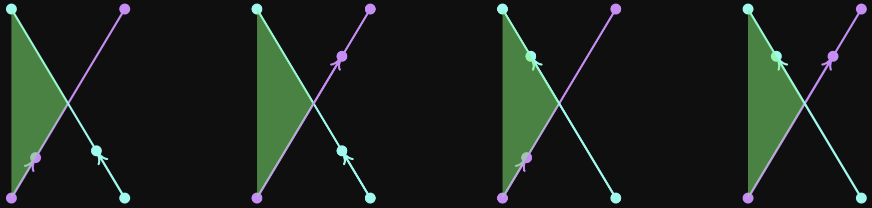
Пересечение выпуклых многоугольников: Алгоритм О'Рурка

- Вершины многоугольников упорядочены против часовой стрелки.
- Движемся по границам и на каждом шаге определяем, по какому многоугольнику переходить на одну вершину дальше.



Пересечение выпуклых многоугольников: Алгоритм О'Рурка

- Каждый раз получаем одну из восьми ситуаций:



- В случаях (1) и (2) двигаемся по второму многоугольнику, в случаях (3) и (4) — по первому.
  Кроме того, для случая (4) необходимо вычислить и добавить точку пересечения.

Пересечение выпуклых многоугольников: Алгоритм О'Рурка

- В результате полного обхода получаем точки пересечения. Если каждый раз будем брать ломанные, лежащие левее в порядке обохода, получим пересечение.
- Интересно, что если каждый раз будем брать лежащую парвее — получим объединение.

Время работы: $T(n, m) \leq 2(n+m) = O(n+m)$.

Построение $\mathcal{VD}(S)$: Пересечение полуплоскостей

Наконец, перейдем к построению диаграммы Вороного.

- Строим все серединные перпендикуляры к отрезкам, соединяющим сайт s_i с остальными сайтами, получаем $n-1$ полуплоскость.
- Пересекаем все полуплоскости следующим образом: Пересекаем все пары, потом пары пересечений и так далее.
- Получаем клетку для выбранного сайта.

Время работы: $T(n) = O(n \cdot n \cdot \log(n)) = O(n^2 \log(n))$.

Недостатки этих алгоритмов

- Неоптимальное время работы — можно за $O(n \log(n))$.
- На выходе получаем список клеток (без всякой информации о их взаимосвязях).

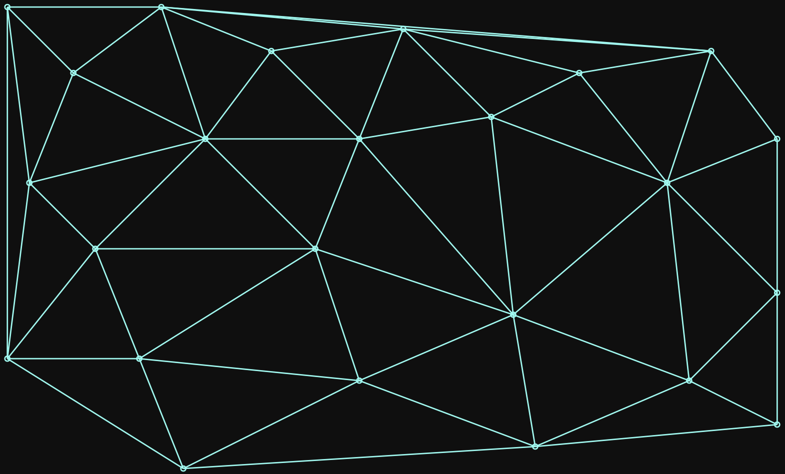
Решение: алгоритм Форчуна с использованием DCEL.
Или алгоритм $D\&C$ за $O(n \log(n))$.

Триангуляция Делоне

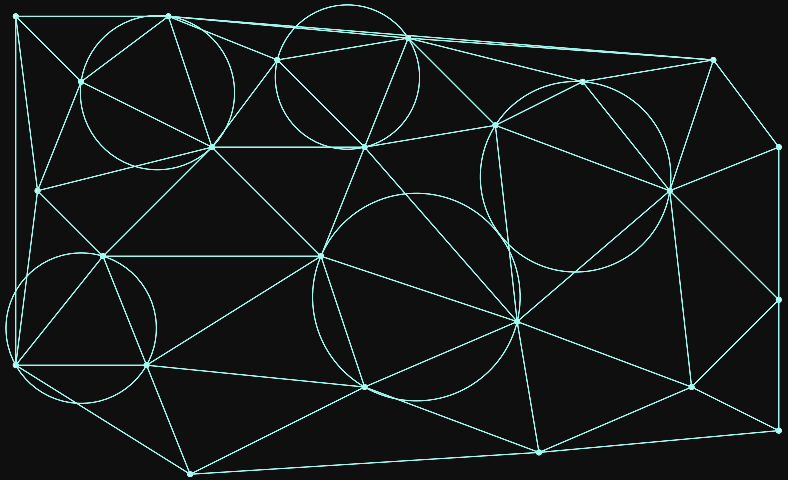
Определение

Пусть S — конечное подмножество $\mathbb{R}^2$. Триангуляцией Делоне $\mathcal{DT}(S)$ называется такая триунгуляция этого множества, при которой круг, описанный около каждого треугольника не содержит других вершин триангуляции.

Триангуляция Делоне



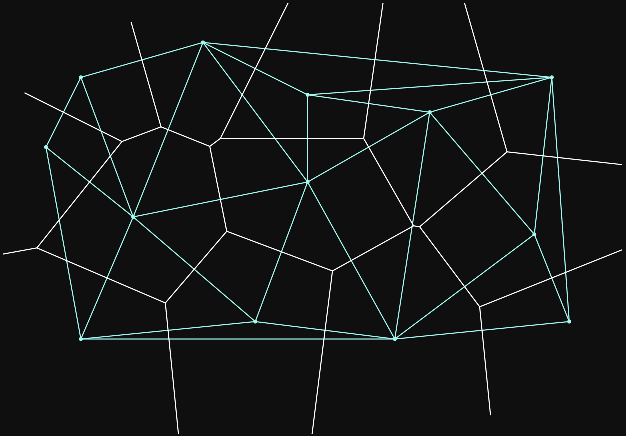
Триангуляция Делоне



$\mathcal{VD}(S)$ и $\mathcal{DT}(S)$ — двойственные графы

Теорема

$\mathcal{DT}(S)$ – двойственный граф к $\mathcal{VD}(S)$.



$\mathcal{VD}(S)$ и $\mathcal{DT}(S)$ — двойственные графы

Доказательство.

Рассмотрим сайты s_i, s_j, s_k из одного треугольника в триангуляции Делоне. Тогда вершина диаграммы Вороного — центр описанной окружности треугольника $\triangle s_i s_j s_k$.

Так как центр описанной окружности единственный, мы получили взаимнооднозначное соответствие.

$\square$

$\mathcal{VD}(S)$ и $\mathcal{DT}(S)$ — двойственные графы

Следствие

При условии общего положения триангуляция Делоне множества точек единственна.

То есть, если мы умеем строить диаграмму Вороного и храним её в DCEL, то мы умеем строить и триангуляцию Делоне.

Свойста трианглуяции Делоне

- Максимизирует минимальный угол.
- *MST* — подграф триангуляции Делоне (что позволяет относительно эффективно его считать).
- Так как триангуляция Делоне избегает узких (похожих на вырожденные) треугольников, её часто использвют в самом разнои моделировании. Например, ландшафтном.