Вычислительная геометрия

Борис Золотов   Матвей Магин

14 июня 2022 г.

Летняя школа МКН СПбГУ

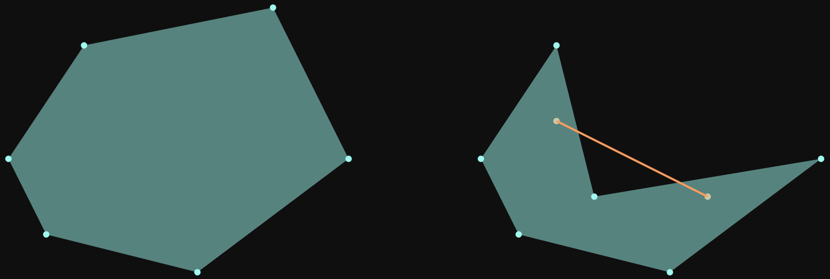
Содержание

Algorithms to get a feeling

Выпуклое множество

Определение

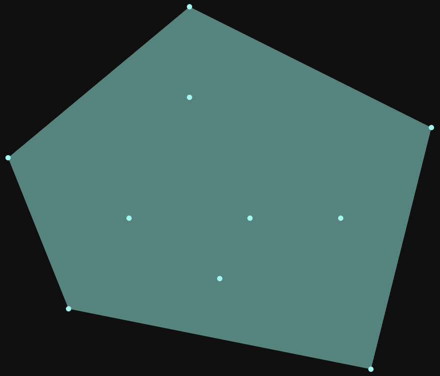
Множество S — выпуклое, если оно вместе с любыми двумя точками содержит отрезок между ними.



Выпуклая оболочка

Определение

Выпуклая оболочка $\mathcal{CH}(S)$ множества S — наименьшее выпуклое множество, содержащее S.



Вычисление выпуклой оболочки

Задача

Дано множество $S \subset \mathbb{R}^2$, $|S| = n$. Требуется найти координаты вершин его выпуклой оболочки $\mathcal{CH}(S)$.

Вычисление выпуклой оболочки

Есть много алгоритмов вычисления выпуклой оболочки на плоскости.

Большинство из них напоминают алгоритмы сортировок, к примеру

- Алгоритм Джарвиса – Selectiont Sort.
- Quick Hull – Quick Sort.
- Алгоритм «Разделяй и властвуй» – Merge Sort.

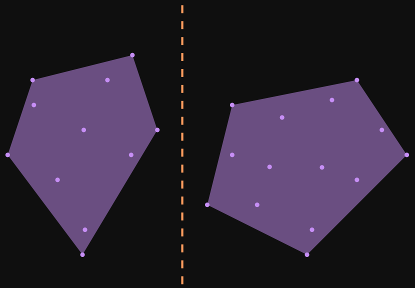
Мы рассмотрим алгоритм «Devide-and-Conquer» из них.

Все алгоритмы «Devide-and-Conquer» имеют одну идею:

- Разбить задачу на подзадачи, от них вызываться рекурсивно.
- Научиться быстро сливать подзадачи.

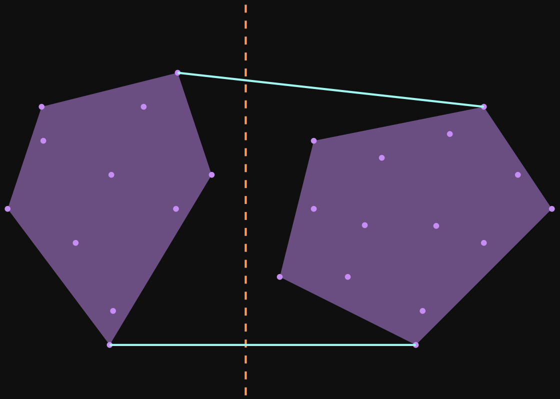
Алгоритм $D\&C$ для $\mathcal{CH}$: описание

- $n \leq 3 \Rightarrow$ «brute force».
- $n \geq 4 \Rightarrow$ разбиваем S на два примерно равных подмножества по x–координате, вызываемся на них рекурсивно.



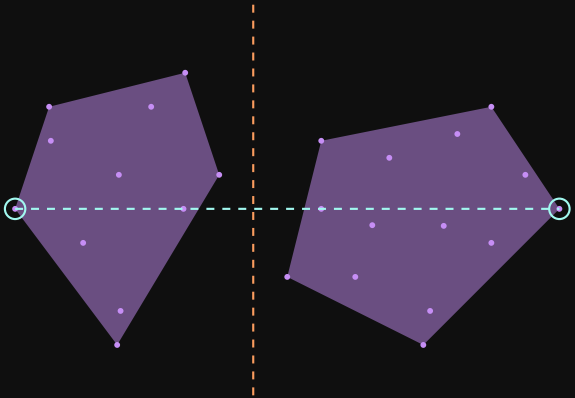
Алгоритм $D\&C$ для $\mathcal{CH}$: слияние подзадач

Для слияния поздадач будем считать верхнюю и нижнюю касательные.



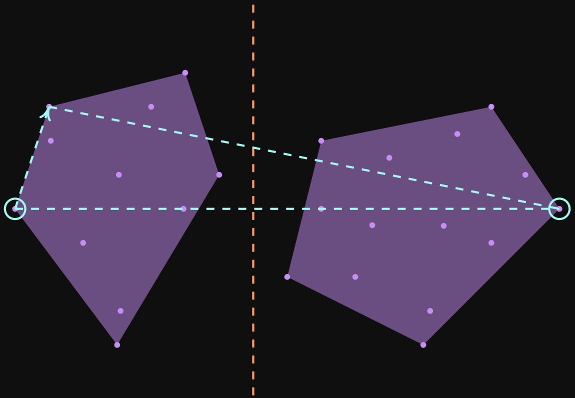
Алгоритм $D\&C$ для $\mathcal{CH}$: верхняя и нижняя касательные

Идея вычисления: поднимаем тот конец,отрезка который можем поднять.



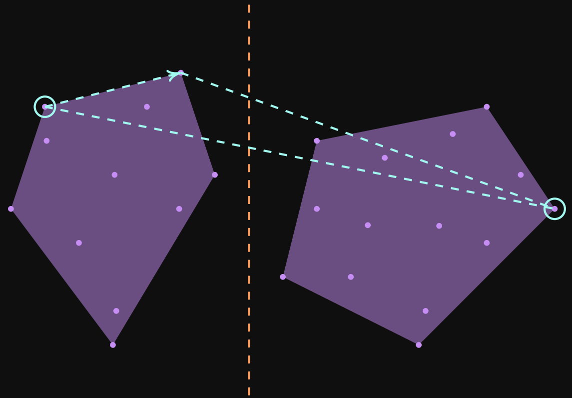
Алгоритм $D\&C$ для $\mathcal{CH}$: верхняя и нижняя касательные

Идея вычисления: поднимаем тот конец отрезка, который можем поднять.



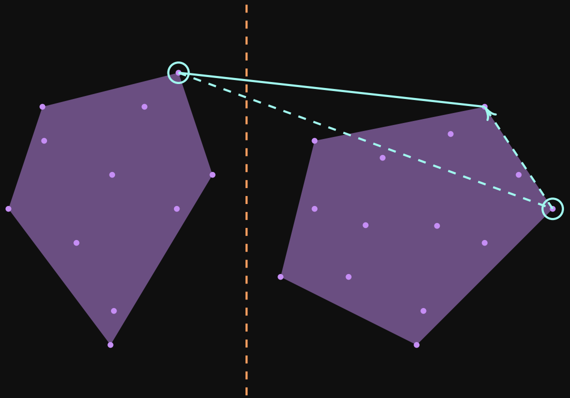
Алгоритм $D\&C$ для $\mathcal{CH}$: верхняя и нижняя касательные

Идея вычисления: поднимаем тот конец отрезка, который можем поднять.



Алгоритм $D\&C$ для $\mathcal{CH}$: верхняя и нижняя касательные

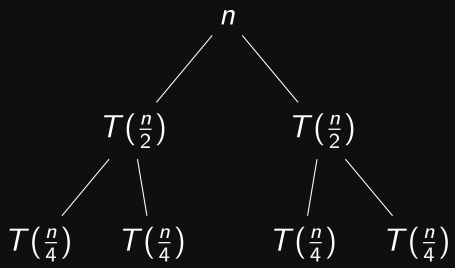
Идея вычисления: поднимаем тот конец отрезка, который можем поднять.



Алгоритм $D\&C$ для $\mathcal{CH}$: оценка времени работы

Количество точек в подзадаче сокращается хотя бы в два раза, на слияние мы тратим линейное время

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + O(n)$$



Алгоритм $D\&C$ для $\mathcal{CH}$: оценка времени работы

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + O(n)$$

Распишем это

$$T(n) = O\left(n \cdot \left(\frac{2}{2} + \left(\frac{2}{2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{2}{2}\right)^{\log_2(n)}\right)\right) = O\left(n \cdot \sum_{k=1}^{\log_2 n} 1\right) = O(n \log_2(n))$$

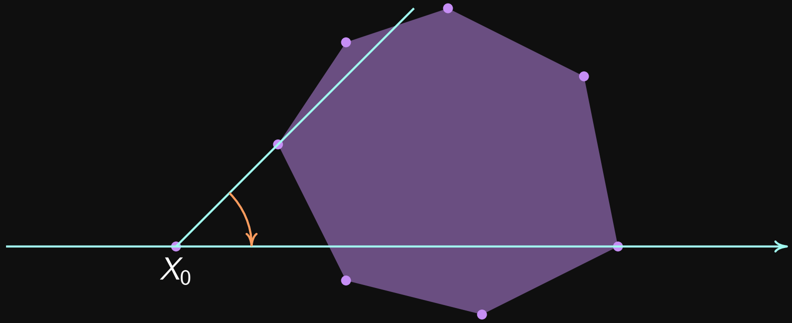
Касательная к выпуклому многоугольнику

Задача

Дан выпуклый многоугольник $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^2$ и точка $X_0(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Найти касательную к $\mathcal{P}$ из точки $X(x_0, y_0)$.

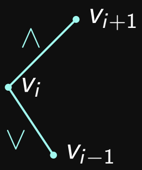
Касательная к выпуклому многоугольнику: алгоритм

Каждой вершине сопоставим *аргумент* – угол, под которым она видна их точки X_0.



Касательная к выпуклому многоугольнику: алгоритм

У нужной вершины v_i аргументы будут расположены так:



Как понять, с какой стороны нужная вершина: