Вычислительная геометрия, день 2

Борис Золотов   Матвей Магин

20 июня 2022 г.

Летняя школа МКН СПбГУ

Содержание

Выпуклая оболочка в 3D

Постановка задачи

Даны точки $p_1, p_2, \ldots, p_n \in \mathbb{R}^3$.

Построить **DCEL**, соответствующий граням выпуклой оболочки множества $S = \{p_1, \ldots, p_n\}$, указывая p_i в записях вершин.

Сложность ответа

Граф любого многогранника планарен, поэтому количества рёбер, вершин и граней отличаются не более чем в константу раз. Отсюда количество записей и ссылок в итоговом DCEL будет $O(h)$.

Gift Wrapping

Gift wrapping

Обобщение алгоритма *Jarvis march* на трёхмерный случай.

Отрезок между самой нижней точкой и другой точкой, который имеет min угол с горизонтальной плоскостью, будет ребром выпуклой оболочки.

Выбор следующей грани

while внешняя грань — не треугольник **do**

  $p_i p_k p_l$ — грань, смежная с внешней

  $p_k p_l$ — ребро внешней грани

  for all $p \in S$ **do**

    Найти угол $\angle((p_i\, p_k\, p_l), (p\, p_l\, p_k))$

  end for

  $p^* \in S$ — точка, для которой угол наибольший

  Добавить грань $p^* p_l p_k$ в DCEL

end while

Выбор следующей грани

while внешняя грань — не треугольник **do**

  $p_i p_k p_l$ — грань, смежная с внешней

  $p_k p_l$ — ребро внешней грани

  for all $p \in S$ **do**

    Найти угол $\angle((p_i\, p_k\, p_l), (p\, p_l\, p_k))$

  end for

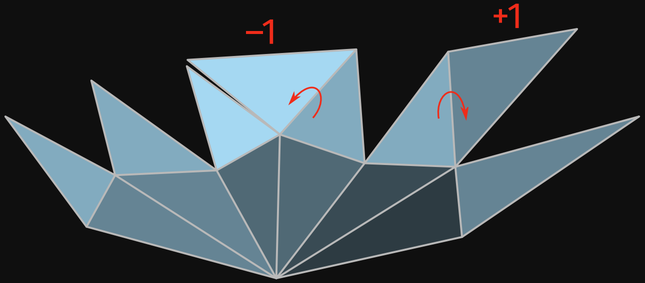
  $p^* \in S$ — точка, для которой угол наибольший

  Добавить грань $p^* p_l p_k$ в DCEL

end while ▷ Время работы — $O(n \cdot h)$

Количество сторон внешней грани

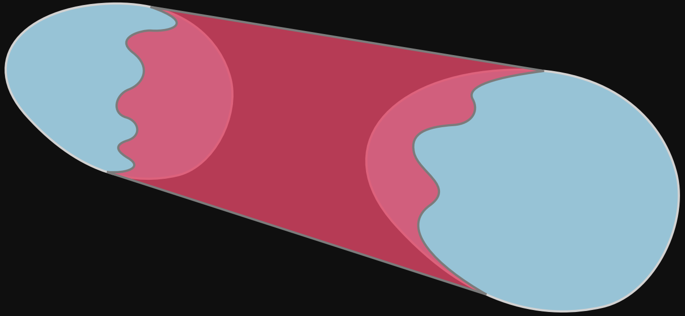
Количество сторон внешней грани может как увеличиться, так и уменьшиться при добавлении очередной грани выпуклой оболочки.



Divide & Conquer

Слияние двух выпуклых оболочек

При слиянии необходимо вычислить цилиндр, состоящий из граней, соединяющих выпуклые оболочки $\mathcal{CH}_1$ и $\mathcal{CH}_2$.



Поиск первой грани

Рассмотрим нижнюю вершину и её соседа в $\mathcal{CH}_1$ и нижнюю вершину в $\mathcal{CH}_2$. Проведём через них плоскость.

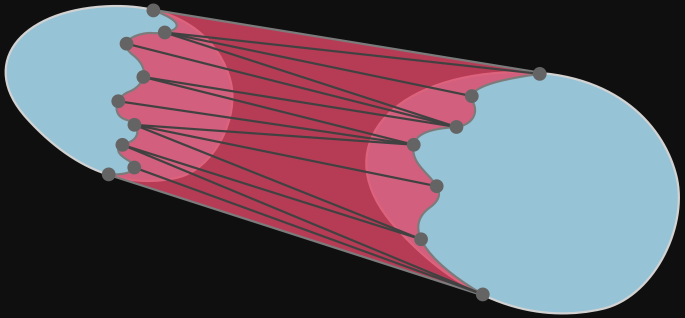
Если кто-то из соседей выбранных вершин лежит ниже этой плоскости, заменим одну из вершин на него.

Повторим процесс.

Картинка на доске

Вычисление цилиндра

Заметим, что рёбра, ограничивающие цилиндр, являются рёбрами выпуклых оболочек $\mathcal{CH}_1$ и $\mathcal{CH}_2$.



Cylinder wrapping

Пусть p_i^1 и p_j^2 — последние вершины, добавленные к цилиндру из $\mathcal{CH}_1$ и $\mathcal{CH}_2$ соответственно; $p_i^1 p_j^2 p_k^*$ — последняя известная грань цилиндра.

Рассмотрим всех соседей p_i^1 и p_j^2 в их выпуклых оболочках, добавим грань $p_*^* p_j^2 p_i^1$, которая образует наибольший угол с $p_i^1 p_j^2 p_k^*$, в цилиндр.

Повторим, пока не придём к изначальному ребру.

Время работы

Может показаться, что «проверяем всех соседей» — долго.

Однако заметим, что каждое ребро проверялось максимум дважды — при поиске как первой грани, так и каждой из последующих.

Отсюда сложность слияния линейна.

$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + O(n)$ даёт время $O(n \cdot \log n)$.

Lifting

Сведéние DT к $3D$-$\mathcal{CH}$

Покажем, что задача построения триангуляции Делоне на плоскости сводится к задаче построения выпуклой оболочки в $\mathbb{R}^3$ за линейное время.

Рассмотрим точки $\{p_1, \ldots, p_n\} = S$ и поднимем их на параболоид:

$$(x, y) \quad \mapsto \quad (x, y, x^2 + y^2).$$

Теорема

Проекции граней выпуклой оболочки, нормаль которых направлена вниз, будут областями Делоне.

Пересечения с плоскостями и окружности

Лемма

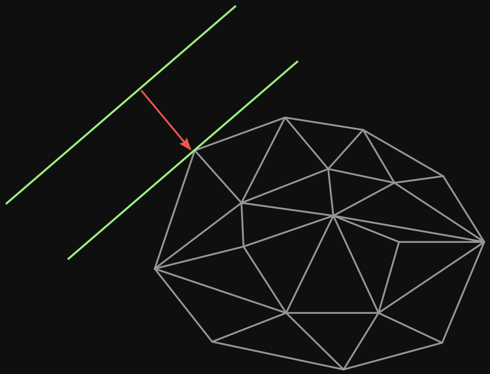
Проекция пересечения параболоида $z = x^2 + y^2$ *и плоскости* $ax + by + cz = d$ *на плоскость* Oxy *— окружность.*

Её центр не зависит от d*.*

Доказательство: раскроем скобки, коэффициенты при x^2 и при y^2 будут одинаковы; выделенные полные квадраты не будут меняться при изменении d.

Почему это работает

Вершина выпуклой оболочки $\mathcal{CH}(S)$ — это первая точка касания S и какой-то плоскости, придвигаемой снаружи.

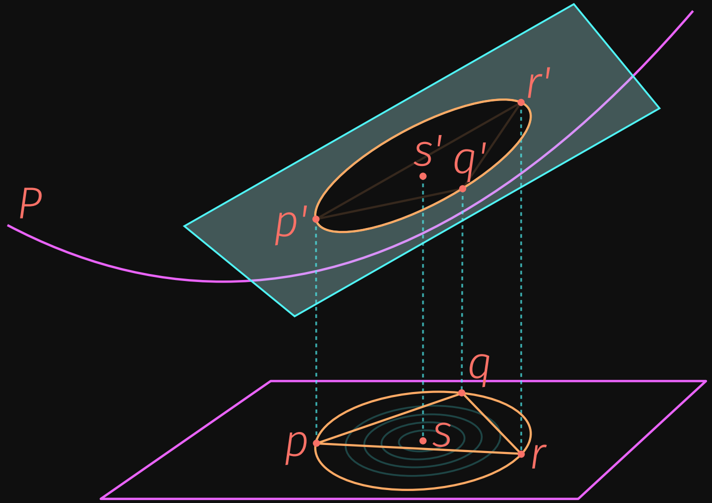


Ещё о касании

Если касание произошло сразу в трёх точках — значит, плоскость была параллельна грани выпуклой оболочки.

Будем поднимать плоскость, параллельную грани $\mathcal{CH}$, и одновременно смотреть, что происходит на плоскости Oxy.

Подъём плоскости



Подъём плоскости — обоснование

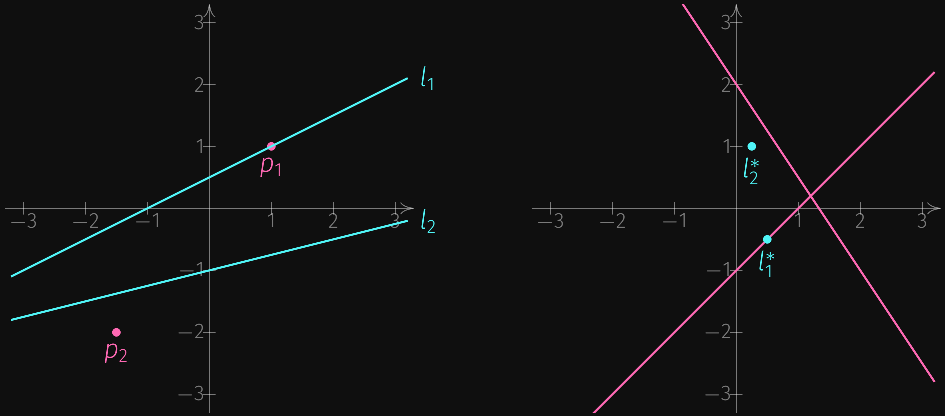
- Рассмотрим плоскость, которая касается P в точке s' — поднятом центре описанной окружности.
- Начнём поднимать её вверх. Коэффициент d растёт. Проекция пересечения с P — окружность с центром в s. Радиус увеличивается.
- Первые точки на P, которых коснётся плоскость, соответствуют первым точкам на Oxy, через которые пройдёт расширяющаяся окружность.
- Треугольники Делоне соответствуют граням $\mathcal{CH}$.

Диаграмма Вороного за $n \cdot \log n$

- Поднять точки на параболоид,
- Построить выпуклую оболочку,
- Спроецировать, получить триангуляцию Делоне,
- Перейти к двойственному графу, profit.

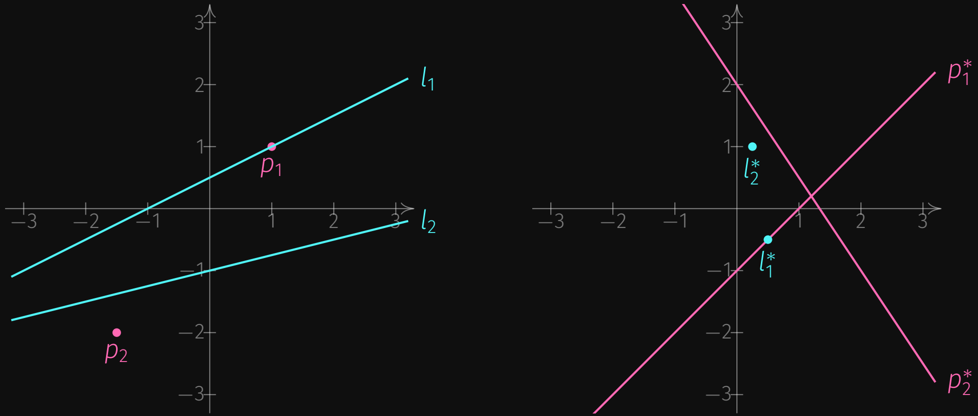
Двойственность точек и прямых

Определение



$$(a, b) \quad \longleftrightarrow \quad \{y = ax - b\}$$

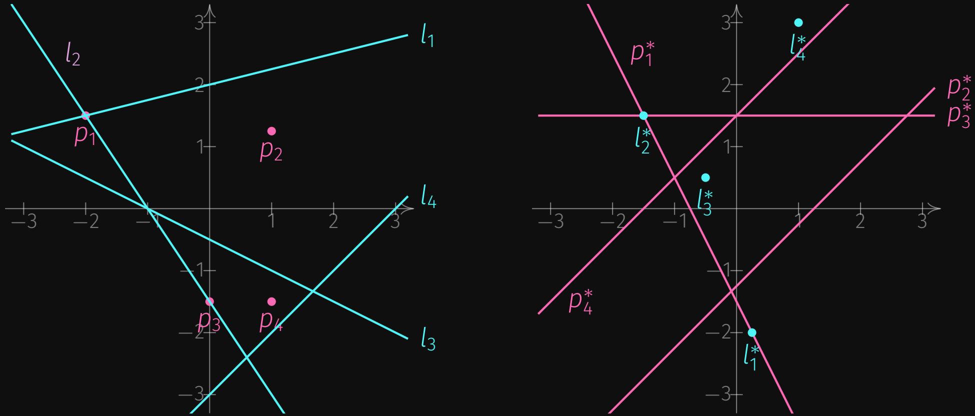
Инцидентность и над / под



$$p \in l \iff l^* \in p^*$$

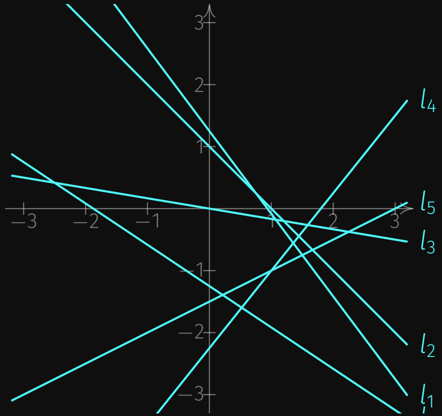
$$p \text{ над } l \iff l^* \text{ над } p^*$$

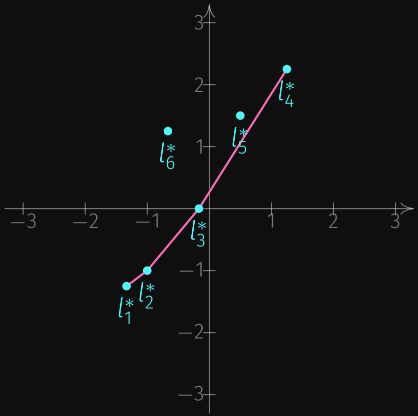
Ещё пример



$$l_1 \cap l_2 = p \quad \Longleftrightarrow \quad p^* \text{ проходит через } l_1^*, l_2^*$$

Двойственность задач





Верхнее пересечение полуплоскостей $\iff$ Нижняя $\mathcal{CH}$

Спасибо за внимание!

Выпуклая оболочка в 3D

Gift Wrapping

Divide & Conquer

Lifting

Двойственность точек и прямых