Вычислительная геометрия

Борис Золотов   Матвей Магин

9 июня 2022 г.

Летняя школа МКН СПбГУ

Содержание

О-нотация

Идея O

Пусть некоторая программа принимает на вход данные. Она, скорее всего, работает тем дольше, чем больше данных поступило на вход. Мы хотим оценить время работы программы, сравнивая его с известными функциями $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

Определение из анализа

Определение

Функции $f,\ g:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Говорят, что

$$f(x) = O(g(x)), \quad \text{если} \quad \exists\, C\ \forall\, x\ |f(x)| \leq C \cdot |g(x)|.$$

Определение для нас

Определение

Время работы программы составляет $O(f(n))$, если $\exists C$: для входа *размера* n количество операций составит не более $f(n) \cdot C$.

- Какие операции считаются в данном определении, обычно известно из контекста.
- Если вход состоит из *одного числа*, размер входа равен 1, вне зависимости от величины числа.

Поиск наибольшего элемента в массиве

Задача

Дан массив из n целых чисел, найти в нём наибольший элемент.

Отсмотрим все элементы по порядку, храня наибольший отсмотренный элемент. Мы обращаемся к каждому элементу по разу, поэтому $O(n)$. Быстрее, очевидно, нельзя.

[1 4 4 2 8 1 6 9 8]

max to date: 8

Наличие элемента в отсортированном массиве

Задача

Дан массив M из n целых чисел, они упорядочены по возрастанию.
Дано число k — проверить, есть ли оно в M.

Сравним k и элемент в середине M — назовём его m.
Если $m > k$, ищем в первой половине массива. Иначе во второй.

$$[\ 1 \quad 2 \quad 3 \quad 5 \quad 8 \quad 13 \quad 21 \quad 34 \quad 55\ ]$$

здесь? $\leftarrow \mid \rightarrow$ или здесь?

Как оценить время работы

Пусть $T(n)$ — время работы на массиве из n элементов. Тогда

$$T(n) = 1 + T\left(\frac{n}{2}\right).$$

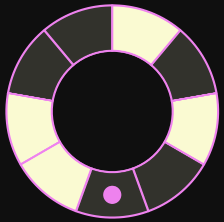
Отсюда

$$T(n) = O(\log_2(n)).$$

Количество комнат на космическом корабле

Задача

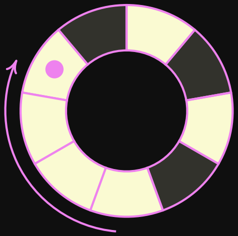
Космический корабль в форме кольца разделён на n одинаковых комнат, в которых горит или не горит свет. Можно переходить между соседними комнатами, включать или выключать свет. Найти n.

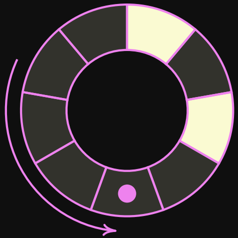


Простое решение

Процедура проход(k) — пройти на k комнат вперёд, включая в каждой комнате свет (может быть что угодно).

Потом пройти на k комнат назад, выключая в каждой комнате свет (должен быть включен).





Оценка времени

Выполним проход(1), проход(2), проход(3), ...

В какой-то момент мы вернёмся, чтобы выключить свет в первой комнате, а он уже будет там выключен. Значит, мы прошли полный круг.

$$2 \cdot (1 + 2 + \ldots + n) = O\left(n^2\right) \quad \text{переходов.}$$

Решение за линейное время

Пусть $2^{k-1} \le n < 2^k$.

Выполним проход(1), проход(2), $\ldots$, проход$\left(2^i\right)$, $\ldots$

Каждый раз длина прохода увеличивается в два раза.
В какой-то момент на обратном пути мы придём
в комнату, свет в которой уже выключен.

$$2 \cdot \left(1 + 2 + 4 + \ldots + 2^k\right) \;=\; 2 \cdot \left(2^{k+1} - 1\right) \;\le\; 8 \cdot n \;=\; O(n).$$

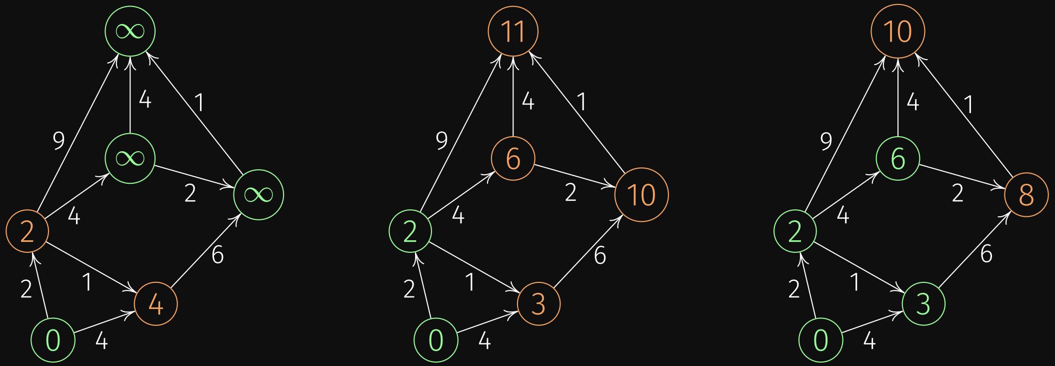
Алгоритм Беллмана — Форда

Задача

Дан граф $G = (V, E)$, на рёбрах расставлены неотрицательные веса. Выбрана $v \in V$, найти наименьшие веса путей от v до каждой из остальных вершин.

Изначально $d(v_i) = +\infty$ для всех v_i.

Идея



Считаем, что все $d(v_i)$ обновляются одновременно. В реальности дело чуть лучше.

Улучшение $d(v_i)$

for $i = 1$ to $|V| - 1$ **do**
  for all $e = (u_1, u_2) \in E$ **do**
    if $d(u_1) + \text{weight}(e) < d(u_2)$ **then**
      $d(u_2) \leftarrow d(u_1) + \text{weight}(e)$ ▷ Пытаемся с помощью ребра e улучшить путь в v_2
    end if
  end for ▷ Нашли оптимальные пути длины $\leq i$
end for

Асимптотика с несколькими параметрами

Время работы оценивается как $O(|V| \cdot |E|)$.

Мы, конечно, знаем, что $|V| \leq |E| + 1$ и $|E| \leq |V|^2$, но зачастую нам нужна точная оценка относительно обоих параметров входа.

Замечания

- $\log_a n \ll n^k \ll a^n$
- $\log_a n \sim \log_b n$
- $\log_a (x^k) \sim \log_a x$