

Contents

1	Introduzione	2
1.1	Intro	2
2	Introduction	3
2.1	Formule di Logica modale e significato	3
2.1.1	Relazione seriale	3
2.1.2	Relazione simmetrica	4
2.1.3	Funzione parziale	5
2.1.4	Funzione totale	5
2.1.5	Relazione euclidea	6
3	Semantica	7
3.1	Simboli secessari	7
3.2	Logiche	7
4	Verso la decidibilità - Logica determinata	9
4.1	Insieme Λ consistente e sue proprietà	9
4.2	Insieme Λ consistente massimale	10

Chapter 1

Introduzione

1.1 Intro

Se voi signorine finirete questo corso, e se sopravviverete sarete dispensatori di fbf e pregherete per modellizzare sistemi assurdi in modo ancora più assurdo, ma fino a quel giorno non siete altro che buoni annulla convinti che tutti i cretesi sono stupidi e forse mentono.

Lasciate il formaggio fuori dall'aula.

Chapter 2

Introduction

a è vera nel mondo α , e scriviamo $\mu \models_{\alpha} a$
se

- a è una lettera enunciativa allora deve valere $a \in V(\alpha)$
- a è del tipo: $a \vee b \dots$ allora.... $\mu \models_{\alpha} a$ oppure $\mu \models_{\alpha} b$

2.1 Formule di Logica modale e significato

2.1.1 Relazione seriale

Ip) Frame F con relazione R seriale

Ts) $\Box a \implies \Diamond a$

Dimostrazione:

Se non vale: $\mu \models_{\alpha} \Box a$ allora immediatamente si ha la tesi in quanto l'antecedente è falso.

Se invece: $\mu \models_{\alpha} \Box a$ allora

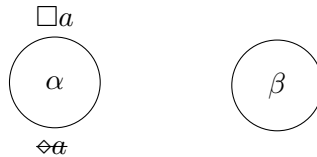
$\forall \beta : \alpha R \beta \implies \mu \models_{\beta} a$ per definizione di box,

inoltre dato che R seriale per Ip si ha anche che $\exists \beta : (\alpha, \beta) \in R$

da cui: $\mu \models_{\alpha} \Diamond a$ per definizione di diamond (esiste β in relazione con α per la serialità e in α vale a dato che $\mu \models_{\alpha} \Box a$)

Ip) $\Box a \implies \Diamond a$

Ts) Frame F con relazione R seriale



Per assurdo:

Suppongo di trovarmi in un mondo come quello in figura (wow) in cui $\mu \models_{\alpha} \Box a$, e suppongo che la relazione R del frame NON sia seriale cioè $\sim \exists \beta : (\alpha R \beta)$, se è così vale sicuramente $\mu \models_{\alpha} \Box a$ (dato che α non ha successori), d'altra parte per come è il mondo considerato, cioè si nega la tesi, assurdo.

2.1.2 Relazione simmetrica

Ip) R simmetrica

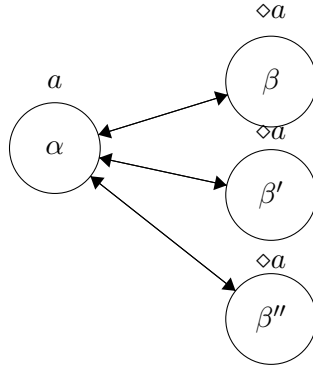
Ts) $a \implies \Box \Diamond a$

Suppongo che $\mu \models_{\alpha} a$ (se no avrei già la tesi), due casi:

Caso 1: Da α non parte nessun arco, allora sicuramente $\mu \models_{\alpha} \Box x$ con x qualsiasi e in particolare $\mu \models_{\alpha} \Box \Diamond a$



Caso 2: Esiste almeno un β tale che $\alpha R \beta$.



Dato che la relazione è simmetrica se $\alpha R \beta$ allora $\beta R \alpha$. Dato che $\mu \models_{\alpha} a$, in ognuno di questi β, β', β'' ecc. vale $\Diamond a$ perché ognuno di loro è in relazione con α .

Allora per ognuno di questi β si ha $\mu \models_{\beta} \Diamond a$, (esiste infatti un mondo, α , in cui vale a) da cui: $\mu \models_{\alpha} \Box \Diamond a$

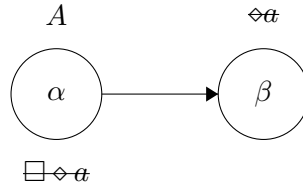
Ip) $a \implies \Box \Diamond a$

Ts) R simmetrica

Per assurdo:

suppongo R non sia simmetrica e considero un frame con soli α e β e in cui $R = \{(\alpha, \beta)\}$. In questo frame considero un modello con funzione di verità tale che: $V(A) = \{\alpha\}$.

In β non vale $\Diamond a$ perché β non è in relazione con nessun mondo, per questo: $\mu \not\models_{\alpha} \Box \Diamond a$



2.1.3 Funzione parziale

$\Diamond a \Rightarrow \Box a$	funzione parziale	$\forall \alpha : \alpha R \beta, \beta R \gamma \Rightarrow \beta = \gamma$
---------------------------------	-------------------	--

Funzione parziale, dimostrazione

.

Ip) funzione parziale

Ts) $\Diamond a \Rightarrow \Box a$

.

$\Diamond a$ falsa allora dato che l'antecedente è falso di ha $\Diamond a \Rightarrow \Box a$

$\Diamond a$ vera allora $\exists \beta : \alpha R \beta$ e $\beta \in V(\beta)$, ma dato che la funzione è parziale questo β è unico !

da cui $\mu \models \Diamond a \Rightarrow \Box a$

.

.

Ip) $\Diamond a \Rightarrow \Box a$

Ts) funzione parziale

.

.

Per assurdo: suppongo non che la funzione non sia parziale. Se è così $\exists \alpha : \alpha R \beta, \alpha R \gamma$, considero un modello in cui $V(A) = \{\beta\}$, $\Box A$ non vale in α dato che A è falsa in γ , il che contraddice l'ipotesi (BAM!)

2.1.4 Funzione totale

$\Diamond a \iff \Box a$	funzione totale	$\forall \alpha \exists ! \beta : \alpha R \beta$
--------------------------	-----------------	---

non ci sono "conti" da fare, R è seriale sse R è seriale $\Box a \implies \Diamond a$, e se R è una funzione parziale $\Diamond a \Rightarrow \Box a$

quindi dato che l'implica prevede un and di implica da una parte e dall'altra per definizione abbiamo la tesi

.

2.1.5 Relazione euclidea

$\Diamond a \Rightarrow \Box \Diamond a$	relazione euclidea	$\forall \alpha, \beta, \gamma : (\alpha R \beta, \alpha R \gamma) \Rightarrow \beta R \gamma$ da cui anche: $\beta R \beta, \gamma R \gamma, \gamma R \beta$
--	--------------------	---

Ip) relazione euclidea

Ts) $\Diamond a \Rightarrow \Box \Diamond a$

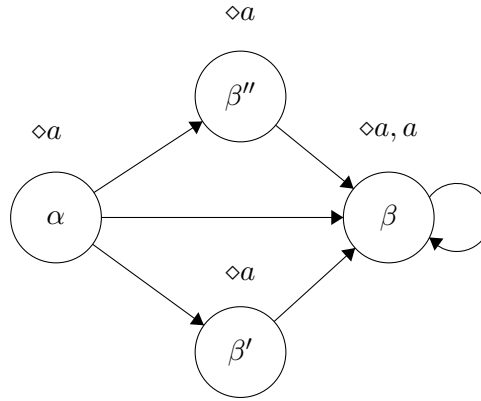
Suppongo sia vero l'antecedente (se falso ho finito), quindi vale: $\Diamond a$ da cui:

$\mu \models \Diamond a$

dato che $\Diamond a$ si ha che esiste almeno un β tale che in β vale a

solo un β : autoanello perché euclidea e quindi $\Box \Diamond a$

diversi β : ognuno dei vari β', β'', \dots sono in relazione con β , dato che la relazione è euclidea, pertanto dato che in β vale a , in ognuno di loro vale $\Diamond a$



Ip) $\Diamond a \Rightarrow \Box \Diamond a$

Ts) relazione euclidea

Per assurdo, suppondo valga ip) ma non la tesi

Considero un Frame in cui: $\alpha R \beta, \alpha R \gamma, \beta R \gamma$ ma NON $\beta R \beta$ cioè si ha un frammento in cui non vale l'euclidea. Poniamo che il modello sia tale che $V(A) = \{\gamma\}$

In queste ipotesi vale $\Diamond a$ dato che in γ vale a . In β non vale a e neppure $\Diamond a$ perché non ha "uscite", da cui in a non vale $\Box \Diamond a$ contraddicendo così l'ipotesi (BAM!)

Chapter 3

Semantica

3.1 Simboli secessari

$a \vdash b$ cioè a è conseguenza semantica di b , se in ogni Frame, Modello e Mondo in cui $\mu \models b$ si ha anche $\mu \models a$

$$\Diamond a \equiv \sim \Box \sim a$$

Vale da sinistra a destra,

Infatti:

se $\mu \models_{\alpha} \Diamond a$ allora

$\exists \beta : \alpha R \beta$ e $\mu \models_{\beta} a$ da cui:

$$\mu \not\models_{\beta} \sim a$$

per questo in α non vale $\Box \sim a$ (perché non vale $\sim a$ in β)

allora in α vale $\sim \Box \sim a$ cioè $\mu \models_{\alpha} \sim \Box \sim a$ cioè la tesi.

Vale anche da destra a sinistra, dimostrazione simile.

3.2 Logiche

Una logica Λ su L è un insieme di fbf su L che:

- contiene tutte le tautologie
- è chiusa rispetto al Modus Ponens

Ad esempio; $PL(\phi)$ cioè i teoremi della logica proposizionale

Altro esempio $\Lambda_C = \{a \mid F \models a \text{ per ogni } F \in C\}$

infatti:

- contiene tutte le tautologie perché sono vere mondo per mondo dappertutto
- MP : suppongo che in un mondo α accada che: $\mu \not\models_{\alpha} b$, $\mu \models_{\alpha} a$. Se vale anche $\mu \models_{\alpha} a \Rightarrow b$... l'antecedente è vero, quindi dato che l'implicazione

è vera, deve essere vero anche il conseguente da cui non può che essere
 $\mu \models_{\alpha} b$

Una logica si dice **uniforme** se è chiusa rispetto a sostituzioni uniformi cioè se sostituendo a una lettere uguali formule uguali in una tautologia, ottengo una tautologia.

Es. $\Lambda_C = \{a \mid F \models a \text{ per ogni } F \in C\}$ NON è uniforme infatti se considero $V(A) = S$, dove S sono tutti gli stati possibili (mondi), vale anche $\mu \models_{\alpha} A$, e cioè A è una tautologia, se al posto di A sostituisco $B \wedge \sim B$ (falsa in ogni modello e mondo) non ottengo una tautologia.

Teorema

Sono equivalenti:

1. Λ è normale
2. per ogni intero $n \geq 0$,
 $\vdash_{\Lambda} a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_n \implies a$ implica $\vdash_{\Lambda} \Box a_1 \wedge \Box a_2 \wedge \dots \wedge \Box a_n \implies \Box a$
3. valgono:
 - (a) $\vdash_{\Lambda} \Box T$
 - (b) $\vdash_{\Lambda} \Box a \wedge \Box b \implies \Box(a \wedge b)$
 - (c) $\vdash_{\Lambda} a \implies b$ implica $\vdash_{\Lambda} \Box a \implies \Box b$

Dimostrazione

$1 \implies 2$

per induzione.

se $n = 0$ allora $\vdash_{\Lambda} a$ allora $\vdash_{\Lambda} \Box a$ per la regola RN che vale in Λ per ipotesi

se $n > 0$ (passo induttivo) suppongo valga l'antecedente, altrimenti 2 vale senz'altro;

Ricordiamo che $a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_n \implies a \equiv a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_{n-1} \implies (a_n \implies a)$

Chapter 4

Verso la decidibilità - Logica determinata

4.1 Insieme Λ consistente e sue proprietà

Sia Λ una logica (cioè ha tutte le tautologie ed è chiusa rispetto al Modus Ponens)

Γ si dice Λ -consistente se: $\Gamma \not\vdash_{\Lambda} \perp$, dove $\perp = A \wedge \sim A$

Δ si dice Λ -consistente massimale se per ogni fbf a $a \in \Delta$ oppure $\sim a \in \Delta$

Proprietà:

1. Se $\Gamma \vdash_{\Lambda} a$ e $\Gamma \subseteq \Delta$ allora $\Delta \vdash_{\Lambda} a$. Ovvero se alcune premesse non mi servono posso comunque metterle per dedurre una formula
2. Se $\Gamma \vdash_{\Lambda} a$ e $\Lambda \subseteq \Lambda'$ allora $\Gamma \vdash_{\Lambda'} a$. Ovvero quello che posso dedurre in una logica più scarna (es. PL) lo posso dedurre anche in una più ricca che la contien (es. Modale)
3. se $a \in \Gamma$ allora $\Gamma \vdash_{\Lambda} a$.
Infatti $\vdash_{\Lambda} a \implies a$ è un teorema dato che $a \implies a$ è una tautologia
4. $\{a | \Gamma \vdash_{\Lambda} a\}$ è la minima logica che contiene $\Gamma \cup \Lambda$. Infatti posso dedurre tutte le tautologie da Γ , anche se non userò nessuna formula di Γ ma solo quelle che già sono nella logica Λ
5. Se $\Gamma \vdash_{\Lambda} a$ e $\{a\} \vdash_{\Lambda} b$ allora $\Gamma \vdash_{\Lambda} b$
Infatti: per dedurre a uso regole di inferenza, formule di Γ , assiomi di Λ . Per arrivare in b uso assiomi di Λ e regole di inferenza, quindi posso arrivare da Γ direttamente in b usando formule di Γ , regole di inf. e assiomi di Λ
6. Se $\Gamma \vdash_{\Lambda} a$ e $\Gamma \vdash_{\Lambda} a \implies b$ allora $\Gamma \vdash_{\Lambda} b$, dato che Λ è chiusa rispetto al MP

7. $\Gamma \cup \{a\} \vdash_{\Lambda} b$ se e solo se $\Gamma \vdash_{\Lambda} a \Rightarrow b$
Andata: $\vdash_{\Lambda} a_1 \wedge \dots \wedge a \wedge \dots \wedge a_n \Rightarrow b$ (per definizione di teorema), si può portare a alla destra dell'implicazione $\vdash_{\Lambda} a_1 \wedge \dots \wedge a_n \Rightarrow (a \Rightarrow b)$
Ritorno: $\vdash_{\Lambda} a_1 \wedge \dots \wedge a_n \Rightarrow (a \Rightarrow b)$, basta portare a tra le and.
8. $\Gamma \vdash_{\Lambda} a$ se e solo se $\Gamma \cup \{\sim a\}$ non è Λ -consistente
Andata: $\Gamma \vdash_{\Lambda} a$, $\Gamma \vdash_{\Lambda} \sim a$, posso dedurre \perp che è contro la definizione di Λ -consistenza
Ritorno: Se $\Gamma \cup \{\sim a\}$ non è Λ -consistente, allora $\Gamma \cup \{\sim a\} \vdash_{\Lambda} \perp$ da cui per 7.
 $\Gamma \vdash_{\Lambda} \sim a \Rightarrow \perp$ (sposto $\sim a$ a destra e metto l'implica),
Dato che $(\sim a \Rightarrow \perp) \Rightarrow a$ è una tautologia, per MP ottengo
 a
9. Γ è Λ - consistente se e solo se $\exists \beta : \Gamma \not\vdash_{\Lambda} \beta$
Andata: Basta prendere $\sim a \wedge a$
Ritorno: Se deducessi tutte le formule ($\sim \exists \beta : \Gamma \not\vdash_{\Lambda} \beta$ significa $\forall \beta : \Gamma \vdash_{\Lambda} \beta$), potrei dedurre anche \perp , da cui la non consistenza
10. Γ è Λ - consistente se per ogni a
 $\Gamma \cup \{a\}$ o $\Gamma \cup \{\sim a\}$ è Λ - consistente
se $\Gamma \vdash_{\Lambda} a$ allora $\Gamma \cup \{\sim a\}$ non è consistente perché con a e $\sim a$ posso dedurre \perp , ma $\Gamma \cup \{a\}$ lo è
se $\Gamma \vdash_{\Lambda} \sim a$ allora $\Gamma \cup \{\sim a\}$ è consistente ma non $\Gamma \cup \{a\}$
11. $\perp \notin \Gamma$ se Γ è Λ - consistente (altrimenti potrei dedurlo per il 3.)
12. Se Δ è Λ - consistente massimale e $\Delta \vdash_{\Lambda} a$ allora $a \in \Delta$
se $a \notin \Delta$ allora $\sim a \in \Delta$ (dato che Δ è massimale)
ma se Δ contiene $\sim a$ allora per il 2.)
 $\Delta \vdash_{\Lambda} \sim a$, che insieme a $\Delta \vdash_{\Lambda} a$ mi dà $\Delta \vdash_{\Lambda} \perp$
13. Se Δ è Λ - consistente massimale e $a \in \Delta$. $a \Rightarrow b \in \Delta$ allora $b \in \Delta$.
Lo si vede subito usando 2.) se tutti e tre, e poi 6.) (deduco a , $a \Rightarrow b$, allora deduco anche b)

4.2 Insieme Λ consistente massimale

Esistenza dell'insieme Λ - consistente massimale in una logica Λ consistente

Considero tutte le formule b_1, b_2, b_3, \dots della logica Λ (posso farlo perché sono un'infinità numerabile)

Chiamo Γ_0 un insieme che contiene una sola formula (ad esempio una tautologia)

Dopodichè iterativamente, per ogni formula mi chiedo

$$\Gamma_0 \vdash_{\Lambda} b1 ? \begin{cases} si : & \Gamma_1 = \Gamma_0 \cup b1 \\ no : & \Gamma_1 = \Gamma_0 \cup \sim b1 \end{cases}$$

$$\Gamma_1 \vdash_{\Lambda} b2 ? \begin{cases} si : & \Gamma_2 = \Gamma_1 \cup b2 \\ no : & \Gamma_2 = \Gamma_1 \cup \sim b2 \end{cases}$$

$\Delta = \bigcup_{n \geq 0} \Gamma_i$ (nota, questa unione è infinita)

Δ è consistente massimale infatti:

1. Massimale in quanto contiene a oppure $\sim a$ per costruzione
2. Consistente. Per assurdo se non lo fosse avrei: $\Delta \vdash_{\Lambda} \perp$
cioè esiste un numero finito di formule di Δ da cui deduco il falso,
dato che è un numero finito di formule, sta in Γ_i , cioè esiste un Γ_i non
consistente, assurdo perché lo sono tutti per costruzione ∇