Contents

Chapter 1

Introduzione

1.1 Intro

Se voi signorine finirete questo corso, e se sopravviverete sarete dispensatori di fbf e pregherete per modellizzare sistemi assurdi in modo ancora più assurdo, ma fino a quel giorno non siete altro che buoni annulla convinti che tutti i cretesi sono stupidi e forse mentono.

Lasciate il formaggio fuori dall'aula.

Chapter 2

Introduction

a è vera nel mondo α, e scriviamo $\mu \models_\alpha a$

se

- a è una lettera enunciativa allora deve valere $a \in V(\alpha)$
- a è del tipo: $a \vee b$ .... allora.... $\mu \models_\alpha a$ oppure $\mu \models_\alpha b$

2.1 Formule di Logica modale e significato

2.1.1 Relazione seriale

Ip) Frame F con relazione R seriale

Ts) $\Box a \implies \diamond a$

Dimostrazione:

Se non vale: $\mu \models_\alpha \Box a$ allora immediatemente si ha la tesi in quanto l'antecedente è falso.

Se invce: $\mu \models_\alpha \Box a$ allora

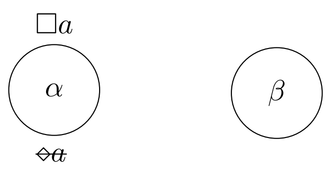
$\forall \beta : \alpha R \beta \Rightarrow \mu \models_\beta a$ per definizione di box,

inoltre dato che R seriale per Ip si ha anche che $\exists \beta : (\alpha, \beta) \in R$

da cui: $\mu \models_\alpha \diamond a$ per definizione di diamond (esiste β in relazione con α per la serialità e in α vale a dato che $\mu \models_\alpha \Box a$)

Ip) $\Box a \implies \diamond a$

Ts) Frame F con relazione R seriale



Per assurdo:

Suppongo di trovarmi in un mondo come quello in figura (wow) in cui $\mu \models_\alpha \Box a$, e suppongo che la relazione R del frame NON sia seriale cioè $\sim \exists \beta :$ $(\alpha R \beta)$, se è così vale sicuramente $\mu \models_a \Box a$ (dato che α non ha successori) , d'altra parte per come è il mondo considerato, cioè si nega la tesi, assurdo.

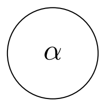
2.1.2 Relazione simmetrica

Ip) R simmetrica

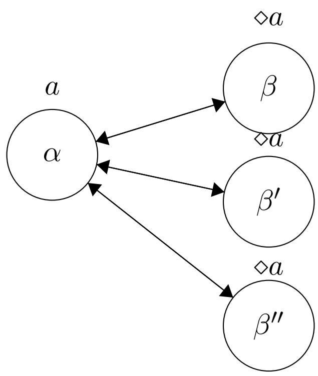
Ts) $a \implies \Box \diamond a$

Suppongo che $\mu \models_\alpha a$ (se no avrei già la tesi), due casi:

Caso 1: Da α non parte nessun arco, allora sicuramente $\mu \models_\alpha \Box x$ con x qualsiasi e in particolare $\mu \models_\alpha \Box \diamond a$



Caso 2: Esiste almeno un β tale che $\alpha R \beta$.



Dato che la relazione è simmetrica se $\alpha R \beta$ allora $\beta R \alpha$**.** Dato che $\mu \models_\alpha a$, in ognuno di questi β, β',β'' ecc. vale $\diamond a$ perché ognuno di loro è in relazione con α.

Allora per ognuno di questi β si ha $\mu \models_\beta \diamond a$, (esiste infatti un mondo, α, in cui vale a) da cui: $\mu \models_\alpha \Box \diamond a$

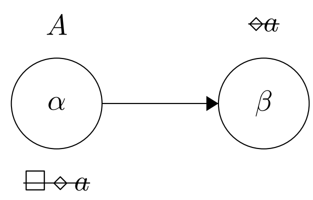
Ip) $a \implies \Box \diamond a$

Ts) R simmetrica

Per assurdo:

suppongo R non sia simmetrica e considero un frame con soli α e β e in cui $R = \{(\alpha, \beta)\}$. In questo frame considero un modello con funzione di verità tale che: $V(A) = \{\alpha\}$.

In β non vale $\diamond a$ perché β non è in relazione con nessun mondo, per questo: $\mu \not\models_\alpha \Box \diamond a$



2.1.3 Funzione parziale

$\diamond a \Rightarrow \Box a$	funzione parziale	$\forall \alpha : \alpha R \beta,\ \beta R \gamma \Rightarrow \beta = \gamma$

Funzione parziale, dimostrazione

.

Ip) funzione parziale

Ts) $\diamond a \Rightarrow \Box a$

.

$\diamond a$ falsa allora dato che l'antecedente è falso di ha $\diamond a \Rightarrow \Box a$

$\diamond a$ vera allora $\exists \beta$:$\alpha R \beta$ e$\in V(\beta)$, ma dato che la funzione è parziale questo β è unico !

da cui $\mu \models \diamond a \Rightarrow \Box a$

.

.

Ip) $\diamond a \Rightarrow \Box a$

Ts) funzione parziale

.

.

Per assurdo: suppongo non che la funzione non sia parziale. Se è così $\exists \alpha$: $\alpha R \beta$, $\alpha R \gamma$, considero un modello in cui V(A) $= \{\beta\ \}$, $\Box A$ non vale in α dato che A è falsa in γ, il che contraddice l'ipotesi (BAM!)

2.1.4 Funzione totale

$\diamond a \iff \Box a$	funzione totale	$\forall \alpha \exists ! \beta : \alpha R \beta$

non ci sono "conti" da fare, R è seriale sse R è seriale $\Box a \implies \diamond a$, e se R è una funzione parziale $\diamond a \Rightarrow \Box a$

quindi dato che l'implica prevede un and di implica da una parte e dall'altra per definizione abbiamo la tesi

.

2.1.5 Relazione euclidea

$\diamond a \Rightarrow \Box \diamond a$	relazione euclidea	$\forall \alpha, \beta, \gamma :$ $(\alpha R\beta,\ \alpha R\gamma) \Rightarrow \beta R\gamma$ da cui anche: βRβ, $\gamma R\gamma$, γRβ

Ip) relazione euclidea

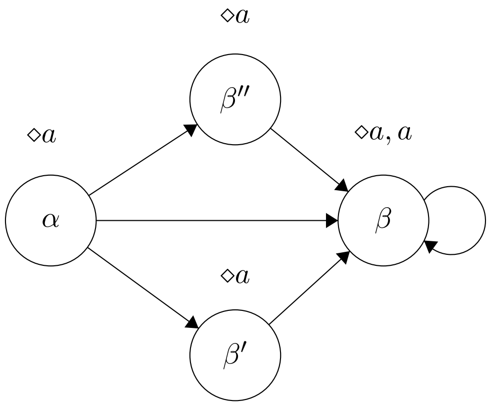
Ts) $\diamond a \Rightarrow \Box \diamond a$

Suppongo sia vero l'antecedente (se falso ho finito), quindi vale: $\diamond a$ da cui: $\mu \models \diamond a$

dato che $\diamond a$ si ha che esiste almeno un β tale che in beta vale a

solo un beta: autoanello perché euclidea e quindi $\Box \diamond a$

diversi beta: ognuno dei vari β', β'' , ecc. sono in relazione con β, dato che la relazione è euclidea, pertanto dato che in β vale a, in ognuno di loro vale $\diamond a$



Ip)$\diamond a \Rightarrow \Box \diamond a$

Ts) relazione euclidea

Per assurdo, suppondo valga ip) ma non la tesi

Considero un Frame in cui: $\alpha R\beta$, $\alpha R\gamma$, $\beta R\gamma$ ma NON $\beta R\gamma$ cioè si ha un frammento in cui non vale l'euclidea. Poniamo che il modello sia tale che $V(A)= \{\gamma\}$

In queste ipotesi vale $\diamond a$ dato che in γ vale a. In β non vale a e neppure $\diamond a$ perché non ha "uscite", da cui in a non vale $\Box \diamond a$ contraddicendo così l'ipotesi (BAM!)

Chapter 3

Semantica

3.1 Simboli secessari

$a \vdash b$ cioè a è conseguenza semantica di b, se in ogni Frame, Modello e Mondo in cui $\mu \models b$ si ha anche $\mu \models a$

$\diamond a \equiv \sim \Box \sim a$
Vale da sinistra a destra,
Infatti:
se $\mu \models_\alpha \diamond a$ allora
$\exists \beta : \alpha R \beta$ e $\mu \models_\beta a$ da cui:
$\mu \not\models_\beta \sim a$
per questo in α non vale $\Box \sim a$ (perché non vale $\sim a$ in β)
allora in α vale $\sim \Box \sim a$ cioè $\mu \models_\alpha \sim \Box \sim a$ cioè la tesi.

Vale anche da destra a sinistra, dimostrazione simile.

3.2 Logiche

Una logica Λ su L è un insieme di fbf su L che:

- contiene tutte le tautologie
- è chiusa rispetto al Modus Ponens

Ad esempio; $PL(\phi)$ cioè i teoremi della logica proposizionale
Altro esempio $\Lambda_C = \{a \,|\, F \models a \, per \; ogni \; F \in C\}$
infatti:

- contiene tutte le tautologie perché sono vere mondo per mondo dappertutto
- MP : suppongo che in un mondo α accada che: $\mu \not\models_\alpha b$, $\mu \models_\alpha a$. Se vale anche $\mu \models_\alpha a \Rightarrow b$ ... l'antecedente è vero, quindi dato che l'implicazione

è vera, deve essere vero anche il conseguente da cui non può che essere $\mu \models_\alpha b$

Una logica si dice **uniforme** se è chiusa rispetto a sostituzioni uniformi cioè se sostituendo a una lettere uguali formule uguali in una tautologia, ottengo una tautologia.

Es. $\Lambda_C = \{a \,|\, F \models a\, per\ ogni\ F \in C\}$ NON è uniforme infatti se considero $V(A) = S$, dove S sono tutti gli stati possibili (mondi), vale anche $\mu \models_\alpha A$, e cioè A è una tautologia, se al posto di A sostituisco $B \wedge \sim B$ (falsa in ogni modello e mondo) non ottengo una tautologia.

Teorema

Sono equivalenti:

1. Λ è normale
2. per ogni intero n ≥ 0,

   $\vdash_\Lambda a1 \wedge a2 \wedge ... \wedge an \implies a$ implica $\vdash_\Lambda \Box a1 \wedge \Box a2 \wedge ... \wedge \Box an \implies \Box a$
3. valgono:
   (a) $\vdash_\Lambda \Box T$
   (b) $\vdash_\Lambda \Box a \wedge \Box b \implies \Box(a \wedge b)$
   (c) $\vdash_\Lambda a \Rightarrow b$ implica $\vdash_\Lambda \Box a \implies \Box b$

Dimostrazione

$1 \implies 2$

per induzione.

se n $= 0$ allora $\vdash_\Lambda a$ allora $\vdash_\Lambda \Box a$ per la regola RN che vale in Λ per ipotesi

se n > 0 (passo induttivo) suppongo valga l'antecedente, altrimenti 2 vale senz'altro;

Ricordiamo che $a1 \wedge a2 \wedge ... \wedge an \implies a \equiv a1 \wedge a2 \wedge ... a_{n-1} \implies (an \implies a)$

Chapter 4

Verso la decidibilità - Logica determinata

4.1 Insieme Λ consistente e sue proprietà

Sia Λ una logica (cioè ha tutte le tautologie ed è chiusa rispetto al Modus Ponens)

Γ si dice Λ-consistente se: $\Gamma \nvdash_\Lambda \bot$, dove $\bot = A \wedge \sim A$

Δ si dice Λ-consistente massimale se per ogni fbf a $a \in \Delta$ oppure $\sim a \in \Delta$

Proprietà:

1. Se $\Gamma \vdash_\Lambda a$ e $\Gamma \subseteq \Delta$ allora $\Delta \vdash_\Lambda a$. Ovvero se alcune premesse non mi servono posso comunque metterle per dedurre una formula

2. Se $\Gamma \vdash_\Lambda a$ e $\Lambda \subseteq \Lambda'$ allora $\Gamma \vdash_{\Lambda'} a$. Ovvero quello che posso dedurre in una logica più scarna (es. PL) lo posso dedurre anche in una più ricca che la contien (es. Modale)

3. se $a \in \Gamma$ allora $\Gamma \vdash_\Lambda a$.
   Infatti $\vdash_\Lambda a \implies a$ è un teorema dato che $a \implies a$ è una tautologia

4. $\{a | \Gamma \vdash_\Lambda a\}$ è la minima logica che contiene $\Gamma \cup \Lambda$. Infatti posso dedurre tutte le tautologie da Γ, anche se non userò nessuna formula di Γ ma solo quelle che già sono nella logica Λ

5. Se $\Gamma \vdash_\Lambda a$ e $\{a\} \vdash_\Lambda b$ allora $\Gamma \vdash_\Lambda b$
   Infatti: per dedurre a uso regole di inferenza, formule di Γ, assiomi di Λ. Per arrivare in b uso assiomi di Λ e regole di inferenza, quindi posso arrivare da Γ direttamente in b usando formule di Γ, regole di inf. e assiomi di Λ

6. Se $\Gamma \vdash_\Lambda a$ e $\Gamma \vdash_\Lambda a \Rightarrow b$ allora $\Gamma \vdash_\Lambda b$, dato che Λ è chiusa rispetto al MP

7. $\Gamma \cup \{a\} \vdash_\Lambda b$ se e solo se $\Gamma \vdash_\Lambda a \Rightarrow b$
Andata: $\vdash_\Lambda a_1 \wedge ... \wedge a \wedge ... \wedge a_n \implies b$ (per definizione di teorema), si può portare a alla destra dell'implicazione $\vdash_\Lambda a_1 \wedge ... \wedge a_n \implies (a \implies b)$
Ritorno: $\vdash_\Lambda a_1 \wedge ... \wedge a_n \implies (a \implies b)$, basta portare a tra le and.

8. $\Gamma \vdash_\Lambda a$ se e solo se $\Gamma \cup \{\sim a\}$ non è Λ-consistente

   Andata: $\Gamma \vdash_\Lambda a$, $\Gamma \vdash_\Lambda \sim a$, posso dedurre $\perp$ che è contro la definizione di Λ-consistenza
Ritorno: Se$\Gamma \cup \{\sim a\}$ non è Λ-consistente, allora $\Gamma \cup \{\sim a\} \vdash_\Lambda \perp$ da cui per 7.
$\Gamma \vdash_\Lambda \sim a \implies \perp$ (sposto $\sim a$ a destra e metto l'implica),
Dato che $(\sim a \implies \perp) \implies a$ è una tatutologica, per MP ottengo
a

9. Γ è $\Lambda - consistente$ se e solo se $\exists \beta : \Gamma \nvdash_\Lambda \beta$
Andata: Basta prendere $\sim a \wedge a$
Ritorno: Se deducessi tutte le formule ($\sim \exists \beta : \Gamma \nvdash_\Lambda \beta$ significa $\forall \beta : \Gamma \vdash_\Lambda \beta$) , potrei dedurre anche $\perp$, da cui la non consistenza

10. Γ è $\Lambda - consistente$ se per ogni a
$\Gamma \cup \{a\}$ o $\Gamma \cup \{\sim a\}$ è $\Lambda - consistente$
se $\Gamma \vdash_\Lambda a$ allora $\Gamma \cup \{\sim a\}$ non è consistente perché con a e $\sim a$ posso dedurre $\perp$, ma $\Gamma \cup \{a\}$ lo è
se $\Gamma \vdash_\Lambda \sim a$ allora $\Gamma \cup \{\sim a\}$ è consistente ma non $\Gamma \cup \{a\}$

11. $\perp \notin \Gamma$ se Γ è $\Lambda - consistente$ (altrimenti potrei dedurlo per il 3.)

12. Se Δè $\Lambda - consistente\, massimale$ e $\Delta \vdash_\Lambda a$ allora $a \in \Delta$
se $a \notin \Delta$ allora $\sim a \in \Delta$ (dato che Δè massimale)
ma se Δ contiene $\sim a$ allora per il 2.)
$\Delta \vdash_\Lambda \sim a$, che insieme a $\Delta \vdash_\Lambda a$ mi da $\Delta \vdash_\Lambda \perp$

13. Se Δ è $\Lambda - consistente\, massimale$ e $a \in \Delta$. $a \Rightarrow b \in \Delta$ allora $b \in \Delta$.
Lo si vede subito usando 2.) se tutti e tre, e poi 6.) (deduco a, $a \Rightarrow b$, allora deduco anche b)