

Contents

Chapter 1

Introduzione

1.1 Intro

Se voi signorine finirete questo corso, e se sopravviverete sarete dispensatori di fbf e pregherete per modellizzare sistemi assurdi in modo ancora più assurdo, ma fino a quel giorno non siete altro che buoni annulla convinti che tutti i cretesi sono stupidi e forse mentono.

Lasciate il formaggio fuori dall'aula.

Chapter 2

Introduction

a è vera nel mondo α , e scriviamo $\mu \models_{\alpha} a$

se

- a è una lettera enunciativa allora deve valere $a\alpha$
- a è del tipo: $a \vee b \dots$ allora.... $\mu \models_{\alpha} a$ oppure $\mu \models_{\alpha} b$

2.1 Formule Valide in ogni frame

Le seguenti formule sono valide in ogni frame F

\top con $\top \equiv a \vee \neg a$ /

infatti \top è valida in ogni modello di ogni frame F, banalmente è valida \top

$(a \implies b) \implies (\implies b)$

infatti:

Se $M\alpha(a \implies b)$ la formula è vera

Se $M_{\alpha}(a \implies b)$ allora:

- Se $M\alpha$ allora $M\alpha \implies b$ è vera e la formula iniziale è vera
- se $M\alpha$ allora $\forall \beta : (\alpha, \beta) \in R \ M\beta a \implies b, M\beta a, M\beta b$

Esistono relazioni che non solo valide in ogni frame:

\implies

Non è valida in ogni frame, infatti \implies implica che in tutti gli stati raggiungibili (ma potrebbero anche non esserci stati) da α , a è vera. Mentre \implies implica che esiste almeno uno stato raggiungibile da α in cui a è vero.

Tutte le tautologie sono valide in ogni frame

2.2 Formule di Logica modale e significato

2.2.1 Relazione seriale

Ip) Frame F con relazione R seriale

Ts) \implies

Dimostrazione:

Se non vale: $\mu\alpha$ allora immediatamente si ha la tesi in quanto l'antecedente è falso.

Se invece: $\mu\alpha$ allora

$\beta: \alpha R \beta \mu\beta a$ per definizione di box,

inoltre dato che R seriale per Ip si ha anche che $\exists\beta: (\alpha, \beta) \in R$

da cui: $\mu\alpha$ per definizione di diamond (esiste β in relazione con α per la serialità e in α vale a dato che $\mu\alpha$)

Ip) \implies

Ts) Frame F con relazione R seriale



Per assurdo:

Suppongo di trovarmi in un mondo come quello in figura (wow) in cui $\mu\alpha$, e suppongo che la relazione R del frame NON sia seriale cioè $\neg\exists\beta: (\alpha R \beta)$, se è così vale sicuramente μa (dato che α non ha successori), d'altra parte per come è il mondo considerato, cioè si nega la tesi, assurdo.

2.2.2 Relazione simmetrica

Ip) R simmetrica

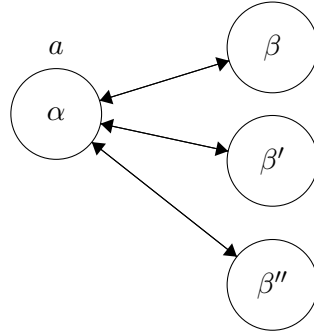
Ts) $a \implies$

Suppongo che $\mu\alpha a$ (se no avrei già la tesi), due casi:

Caso 1: Da α non parte nessun arco, allora sicuramente $\mu\alpha x$ con x qualsiasi e in particolare $\mu\alpha$



Caso 2: Esiste almeno un β tale che $\alpha R \beta$.



Dato che la relazione è simmetrica se $\alpha R \beta$ allora $\beta R \alpha$. Dato che $\mu \alpha a$, in ognuno di questi β, β', β'' ecc. vale perché ognuno di loro è in relazione con α .

Allora per ognuno di questi β si ha $\mu \beta$, (esiste infatti un mondo, α , in cui vale a) da cui: $\mu \alpha$

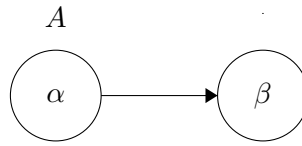
Ip) $a \implies$

Ts) R simmetrica

Per assurdo:

suppongo R non sia simmetrica e considero un frame con soli α e β e in cui $R = \{(\alpha, \beta)\}$. In questo frame considero un modello con funzione di verità tale che: $V(A) = \{\alpha\}$.

In β non vale perché β non è in relazione con nessun mondo, per questo: $\mu \alpha$



2.2.3 Funzione parziale

\implies	funzione parziale	$\alpha: \alpha R \beta, \beta R \gamma \beta = \gamma$
------------	-------------------	---

Funzione parziale, dimostrazione

Ip) funzione parziale

Ts) \implies

a falsa allora dato che l'antecedente è falso di ha aa

a vera allora $\exists \beta: \alpha R \beta$ e $\beta \in V(\beta)$, ma dato che la funzione è parziale questo β è unico !
da cui $\mu \alpha a$

Ip) \implies
 Ts) funzione parziale

Per assurdo: suppongo non che la funzione non sia parziale. Se è così $\exists \alpha : \alpha R \beta, \alpha R \gamma$, considero un modello in cui $V(A) = \{\beta\}$, A non vale in α dato che A è falsa in γ , il che contraddice l'ipotesi (BAM!)

2.2.4 Funzione totale

$a \iff a$	funzione totale	$\forall \alpha \exists ! \beta : \alpha R \beta$
------------	-----------------	---

non ci sono “conti” da fare, R è seriale sse R è seriale $a \implies a$, e se R è una funzione parziale aa

quindi dato che l'implica prevede un and di implica da una parte e dall'altra per definizione abbiamo la tesi

2.2.5 Relazione euclidea

$a \implies a$	relazione euclidea	$\alpha, \beta, \gamma : (\alpha R \beta, \alpha R \gamma) \beta R \gamma$ da cui anche: $\beta R \beta, \gamma R \gamma, \gamma R \beta$
----------------	--------------------	---

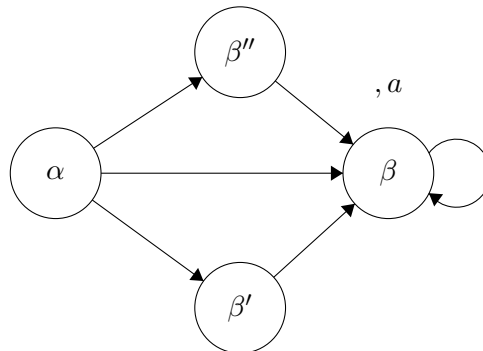
Ip) relazione euclidea

Ts) $a \implies a$

Suppongo sia vero l'antecedente (se falso ho finito), quindi vale: da cui: μ

dato che si ha che esiste almeno un β tale che in beta vale a
 solo un beta: autoanello perché euclidea e quindi

diversi beta: ognuno dei vari β', β'' , ecc. sono in relazione con β , dato che la relazione è euclidea, pertanto dato che in β vale a , in ognuno di loro vale



Ip) $a \implies a$

Ts) relazione euclidea

Per assurdo, suppondo valga ip) ma non la tesi

Considero un Frame in cui: $\alpha R \beta$, $\alpha R \gamma$, $\beta R \gamma$ ma NON $\beta R \gamma$ cioè si ha un frammento in cui non vale l'euclidea. Poniamo che il modello sia tale che $V(A) = \{\gamma\}$

In queste ipotesi vale dato che in γ vale a . In β non vale a e neppure perché non ha “uscite”, da cui in a non vale contraddicendo così l'ipotesi (BAM!)

Chapter 3

Semantica

3.1 Simboli secessari

ab cioè a è conseguenza semantica di b , se in ogni Frame, Modello e Mondo in cui μb si ha anche μa

$$\equiv \neg\neg a$$

Vale da sinistra a destra,

Infatti:

se $\mu\alpha$ allora

$\exists\beta:\alpha R\beta$ e $\mu\beta a$ da cui:

$$\mu\neg_\beta a$$

per questo in α non vale $\neg a$ (perché non vale $\neg a$ in β)

allora in α vale $\neg\neg a$ cioè $\mu\alpha\neg\neg a$ cioè la tesi.

Vale anche da destra a sinistra, dimostrazione simile.

3.2 Logiche

Una logica Λ su L è un insieme di fbf su L che:

- contiene tutte le tautologie
- è chiusa rispetto al Modus Ponens

Ad esempio; $PL(\phi)$ cioè i teoremi della logica proposizionale

Altro esempio $\Lambda_C = \{a \mid Fa \text{ per ogni } F \in C\}$

infatti:

- contiene tutte le tautologie perché sono vere mondo per mondo dappertutto

- MP : suppongo che in un mondo α accada che: $\mu\alpha b$, $\mu\alpha a$. Se vale anche $\mu\alpha ab \dots$ l'antecedente è vero, quindi dato che l'implicazione è vera, deve essere vero anche il conseguente da cui non può che essere $\mu\alpha b$

Una logica si dice **uniforme** se è chiusa rispetto a sostituzioni uniformi cioè se sostituendo a una lettera uguali formule uguali in una tautologia, ottengo una tautologia.

Es. $\Lambda_C = \{a \mid Fa \text{ per ogni } F \in C\}$ NON è uniforme infatti se considero $V(A) = S$, dove S sono tutti gli stati possibili (mondi), vale anche $\mu\alpha A$, e cioè A è una tautologia, se al posto di A sostituisco $B \wedge \neg B$ (falsa in ogni modello e mondo) non ottengo una tautologia.

Teorema

Sono equivalenti:

1. Λ è normale
2. per ogni intero $n \geq 0$,
 $a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_n \implies a$ implica $1 \wedge 2 \wedge \dots \wedge n \implies$
3. valgono:
 - (a) T
 - (b) $\wedge b \implies (a \wedge b)$
 - (c) ab implica $\implies b$

Dimostrazione

$$1 \implies 2$$

per induzione.

se $n = 0$ allora a allora per la regola RN che vale in Λ per ipotesi

se $n > 0$ (passo induttivo) suppongo valga l'antecedente, altrimenti 2 vale senz'altro;

Ricordiamo che $a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_n \implies a \equiv a_1 \wedge a_2 \wedge \dots a_{n-1} \implies (a_n \implies a)$

Chapter 4

Verso la decidibilità - Logica determinata

4.1 Insieme Λ consistente e sue proprietà

Sia Λ una logica (cioè ha tutte le tautologie ed è chiusa rispetto al Modus Ponens)

Γ si dice Λ -consistente se: $\Gamma \nvdash \perp$, dove $\perp = A \wedge \neg A$

Δ si dice Λ -consistente massimale se per ogni fbf a $a \in \Delta$ oppure $\neg a \in \Delta$

Proprietà:

1. Se $\Gamma \subseteq \Delta$ allora Δa . Ovvero se alcune premesse non mi servono posso comunque metterle per dedurre una formula
2. Se $a \in \Lambda \subseteq \Lambda'$ allora $\Gamma \vdash_{\Lambda'} a$. Ovvero quello che posso dedurre in una logica più scarna (es. PL) lo posso dedurre anche in una più ricca che la contien (es. Modale)
3. se $a \in \Gamma$ allora Δa .
Infatti $a \implies a$ è un teorema dato che $a \implies a$ è una tautologia
4. $\{a\}$ è la minima logica che contiene $\Gamma \cup \Lambda$. Infatti posso dedurre tutte le tautologie da Γ , anche se non userò nessuna formula di Γ ma solo quelle che già sono nella logica Λ
5. Se $\Gamma \vdash a$ e $\{a\} \vdash b$ allora $\Gamma \vdash b$
Infatti: per dedurre a uso regole di inferenza, formule di Γ , assiomi di Λ . Per arrivare in b uso assiomi di Λ e regole di inferenza, quindi posso arrivare da Γ direttamente in b usando formule di Γ , regole di inf. e assiomi di Λ
6. Se $\Gamma \vdash a$ e $a \vdash b$ allora $\Gamma \vdash b$, dato che Λ è chiusa rispetto al MP
7. $\Gamma \cup \{a\} \vdash b$ se e solo se $a \vdash b$
Andata: $a_1 \wedge \dots \wedge a_n \wedge a \vdash b$ (per definizione di teorema), si può portare a

alla destra dell'implicazione $a_1 \wedge \dots \wedge a_n \implies (a \implies b)$

Ritorno: $a_1 \wedge \dots \wedge a_n \implies (a \implies b)$, basta portare a tra le and.

8. se e solo se $\Gamma \cup \{\neg a\}$ non è Λ -consistente

Andata: , $\Gamma \neg a$, posso dedurre \perp che è contro la definizione di Λ -consistenza

Ritorno: Se $\Gamma \cup \{\neg a\}$ non è Λ -consistente, allora $\Gamma \cup \{\neg a\} \perp$ da cui per 7.

$\Gamma \neg a \implies \perp$ (sposto $\neg a$ a destra e metto l'implica),

Dato che $(\neg a \implies \perp) \implies a$ è una tautologia, per MP ottengo

a

9. Γ è se e solo se $\exists \beta : \Gamma \wedge \beta$

Andata: Basta prendere $\neg a \wedge a$

Ritorno: Se deducessi tutte le formule ($\neg \exists \beta : \Gamma \wedge \beta$ significa $\forall \beta : \neg \beta$), potrei dedurre anche \perp , da cui la non consistenza

10. Γ è se per ogni a

$\Gamma \cup \{a\}$ o $\Gamma \cup \{\neg a\}$ è

se allora $\Gamma \cup \{\neg a\}$ non è consistente perché con a e $\neg a$ posso dedurre \perp , ma $\Gamma \cup \{a\}$ lo è

se $\Gamma \neg a$ allora $\Gamma \cup \{\neg a\}$ è consistente ma non $\Gamma \cup \{a\}$

11. $\perp \notin \Gamma$ se Γ è (altrimenti potrei dedurlo per il 3.)

12. Se Δ è *massimale* e Δa allora $a \in \Delta$

se $a \notin \Delta$ allora $\neg a \in \Delta$ (dato che Δ è massimale)

ma se Δ contiene $\neg a$ allora per il 2.)

$\Delta \neg a$, che insieme a Δa mi dà $\Delta \perp$

13. Se Δ è e $a \in \Delta$. $ab \in \Delta$ allora $b \in \Delta$.

Lo si vede subito usando 2.) se tutti e tre, e poi 6.) (deduco a , ab , allora deduco anche b)

4.2 Insieme Λ consistente massimale

Lemma di Lindelman - Esistenza dell'insieme in una logica Λ consistente

Considero tutte le formule b_1, b_2, b_3, \dots della logica Λ (posso farlo perché sono un'infinità numerabile)

Chiamo Γ_0 un insieme che contiene una sola formula (ad esempio una tautologia)

Dopodiché iterativamente, per ogni formula mi chiedo

$$\Gamma_0 b_i ? \begin{cases} \text{si} : & \Gamma_1 = \Gamma_0 \cup b_i \\ \text{no} : & \Gamma_1 = \Gamma_0 \cup \neg b_i \end{cases}$$

$$\Gamma_1 b2 ? \begin{cases} si : & \Gamma_2 = \Gamma_1 \cup b2 \\ no : & \Gamma_2 = \Gamma_1 \cup \neg b2 \end{cases}$$

$\Delta = \bigcup_{n \geq 0} \Gamma_i$ (nota, questa unione è infinita)

Δ è consistente massimale infatti:

1. Massimale in quanto contiene a oppure $\neg a$ per costruzione
2. Consistente. Per assurdo se non lo fosse avrei: $\Delta \perp$
cioè esiste un numero finito di formule di Δ da cui deduco il falso,
dato che è un numero finito di formule, sta in Γ_i , cioè esiste un Γ_i non consistente,
assurdo perché lo sono tutti per costruzione \nmid

Nota:

- Non sappiamo costruire Δ perché nasce da unione infinita
- Non è unico, infatti se considero formule in ordine diverse potrei “dire” sì o no in modo diverso
es. a, ab, b (allora Δ contiene b)
es. b, c (allora Δ contiene $\neg b$)

4.2.1 Teorema

se e solo se $a \in \Delta$ a tutti i quei Δ Λ – *consistenti massimali* tali che: $\Gamma \subseteq \Delta$

Andata:

, anche Δa per la 1.)

Ritorno:

Per assurdo, se $\Gamma \not\vdash a$ allora $\Gamma \cup \{\neg a\}$ è (per la 8.)

da cui per Lindellman esiste Δ' che contiene $\Gamma \cup \{\neg a\}$ consistente massimale
data la consistenza Δ' non contiene a , il che è contro l'ipotesi \nmid