Politecnico di Milano
Scuola di Ingegneria dell'Informazione
Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Informatica

Logica e Algebra 2

Logica e Algebra 2

Appunti

Docente:
Prof. Alessandra Cherubini

Appunti di di:
Edoardo Pasi Matricola n. whocarez
Davide Tateo Matricola n. 799311

Anno Accademico 2011-2012

Indice

Capitolo 1

Introduzione

Se voi signorine finirete questo corso, e se sopravviverete sarete dispensatori di fbf e pregherete per modellizzare sistemi assurdi in modo ancora più assurdo, ma fino a quel giorno non siete altro che buoni annulla convinti che tutti i cretesi sono stupidi e forse mentono.
Lasciate il formaggio fuori dall'aula.

Capitolo 2

Formule di Logica modale e significato

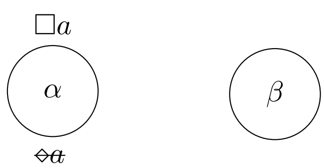
a è vera nel mondo α, e scriviamo $\mu \models_\alpha a$
se

- a è una lettera enunciativa allora deve valere $a \in V(\alpha)$
- a è del tipo: $a \vee b$ .... allora.... $\mu \models_\alpha a$ oppure $\mu \models_\alpha b$

2.1 Relazione seriale

Ip) Frame F con relazione R seriale
Ts) $\Box a \implies \Diamond a$
Dimostrazione:
Se non vale: $\mu \models_\alpha \Box a$ allora immediatemente si ha la tesi in quanto l'antecedente è falso.
Se invce: $\mu \models_\alpha \Box a$ allora
$\forall \beta : \alpha R \beta \implies \mu \models_\beta a$ per definizione di box,
inoltre dato che R seriale per Ip si ha anche che $\exists \beta : (\alpha, \beta) \in R$
da cui: $\mu \models_\alpha \Diamond a$ per definizione di diamond (esiste β in relazione con α per la serialità e in α vale a dato che $\mu \models_\alpha \Box a$)

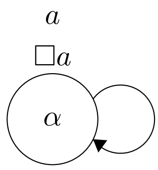
Ip) $\Box a \implies \Diamond a$
Ts) Frame F con relazione R seriale



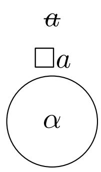
Per assurdo:
Suppongo di trovarmi in un mondo come quello in figura (wow) in cui $\mu \models_\alpha \Box a$, e suppongo che la relazione R del frame NON sia seriale cioè $\sim \exists \beta : (\alpha R \beta)$, se è così vale sicuramente $\mu \models_a \Box a$ (dato che α non ha successori) , d'altra parte per come è il mondo considerato, cioè si nega la tesi, assurdo.

2.2 Relazione riflessiva

Ip) R riflessiva
Ts) $\Box a \implies a$
se l'antecedente è falso il teorema è dimostrato, consideriamo il caso in cui l'antecedente è vero:
$\mu \models_\alpha \Box a$
poichè il frame è riflessivo, abbiamo $\alpha R \alpha$, e quindi varrà:
$\mu \models_\alpha a$
e la tesi è dimostrata.

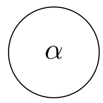


Ip) $\Box a \implies a$
Ts) R è riflessiva
Supponiamo per assurdo che R non sia riflessiva, allora prendiamo uno stato α tale che $\nexists \beta : \alpha R \beta$. Allora si avrà che:
$\mu \models_\alpha \Box a \wedge \mu \not\models_\alpha a$
che è assurdo perchè contraddice la tesi. La tesi allora è valida.

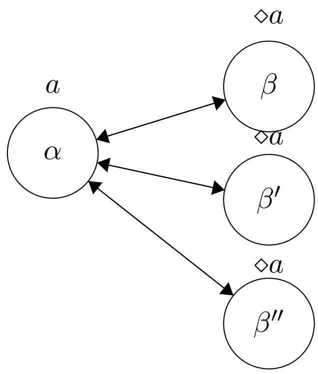


2.3 Relazione simmetrica

Ip) R simmetrica
Ts) $a \implies \Box \diamond a$
Suppongo che $\mu \models_\alpha a$ (se no avrei già la tesi), due casi:
Caso 1: Da α non parte nessun arco, allora sicuramente $\mu \models_\alpha \Box x$ con x qualsiasi e in particolare $\mu \models_\alpha \Box \diamond a$

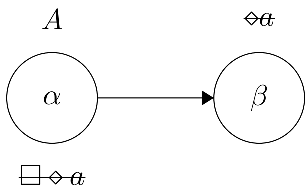


Caso 2: Esiste almeno un β tale che $\alpha R\beta$.



Dato che la relazione è simmetrica se $\alpha R\beta$ allora $\beta R\alpha$. Dato che $\mu \models_\alpha a$, in ognuno di questi β, β',β'' ecc. vale $\diamond a$ perché ognuno di loro è in relazione con α.
Allora per ognuno di questi β si ha $\mu \models_\beta \diamond a$, (esiste infatti un mondo, α, in cui vale a) da cui: $\mu \models_\alpha \Box \diamond a$

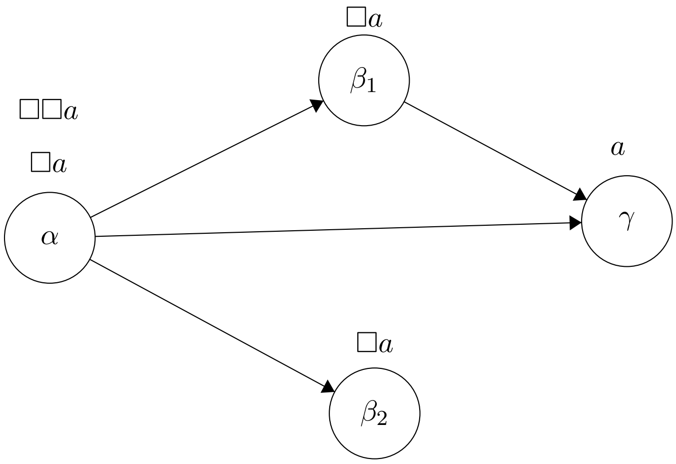
Ip) $a \implies \Box \diamond a$
Ts) R simmetrica
Per assurdo:
suppongo R non sia simmetrica e considero un frame con soli α e β e in cui $R = \{(\alpha, \beta)\}$. In questo frame considero un modello con funzione di verità tale che: $V(A) = \{\alpha\}$.
In β non vale $\diamond a$ perché β non è in relazione con nessun mondo, per questo: $\mu \not\models_\alpha \Box \diamond a$



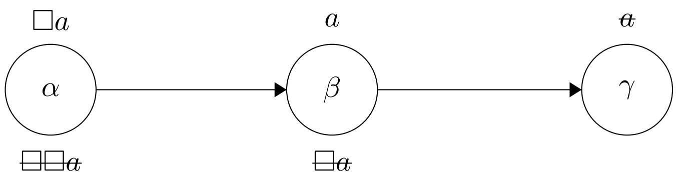
2.4 Relazione Transitiva

Ip) R relazione transitiva
Ts) $\Box a \implies \Box\Box a$
Se $\mu \not\models_\alpha \Box a$ la tesi è dimostrata, consideriamo allora il caso in cui $\mu \models_\alpha \Box a$
per ipotesi:
$\exists \beta \,:\, (\alpha, \beta) \,\in R\, (\beta, \gamma) \,\in R$
allora abbiamo che:
$(\alpha, \gamma) \,\in R$

$\mu \models_\gamma a$
e quindi varrà ovviamente che:
$\mu \models_\beta a$
da cui segue:
$\mu \models_\alpha \Box\Box a$
e la tesi è dimostrata.



Ip) $\Box a \implies \Box\Box a$
Ts) R relazione transitiva
supponiamo per assurdo che esista uno statoα per cui non vale la proprietà transitiva
consideriamo il caso in cui valga la seguente funzione di valutazione:
$V(a) = \{S \,|\, (\alpha, \delta) \in R\}$
Allora a sarà vera in β, ma non in γ. per cui in α sarà vera $\Box a$ ma non $\Box\Box a$



2.5 Funzione parziale

$\diamond a \implies \Box a$	funzione parziale	$\forall \alpha :\ \alpha R \beta,\ \beta R \gamma \implies \beta = \gamma$

Funzione parziale, dimostrazione

Ip) funzione parziale
Ts) $\diamond a \implies \Box a$
$\diamond a$ falsa allora dato che l'antecedente è falso di ha $\diamond a \implies \Box a$
$\diamond a$ vera allora $\exists \beta$:$\alpha R \beta$ e$\in V(\beta)$, ma dato che la funzione è parziale questo β è unico !
da cui $\mu \models \diamond a \implies \Box a$

Ip) $\diamond a \implies \Box a$

Ts) funzione parziale

Per assurdo: suppongo non che la funzione non sia parziale. Se è così $\exists\alpha : \alpha R\beta,\ \alpha R\gamma$, considero un modello in cui V(A) = $\{\beta\}$, $\Box A$ non vale in α dato che A è falsa in γ, il che contraddice l'ipotesi (BAM!)

2.6 Funzione totale

$\diamond a \iff \Box a$	funzione totale	$\forall\alpha\exists!\,\beta:\ \alpha R\beta$

non ci sono "conti" da fare, R è seriale sse R è seriale $\Box a \implies \diamond a$, e se R è una funzione parziale $\diamond a \implies \Box a$

quindi dato che l'implica prevede un and di implica da una parte e dall'altra per definizione abbiamo la tesi

.

2.7 Relazione euclidea

$\diamond a \implies \Box\diamond a$	relazione euclidea	$\forall\alpha,\beta,\gamma:\ (\alpha R\beta,\ \alpha R\gamma) \implies \beta R\gamma$ da cui anche: βRβ, $\gamma R\gamma$, γRβ

Ip) relazione euclidea

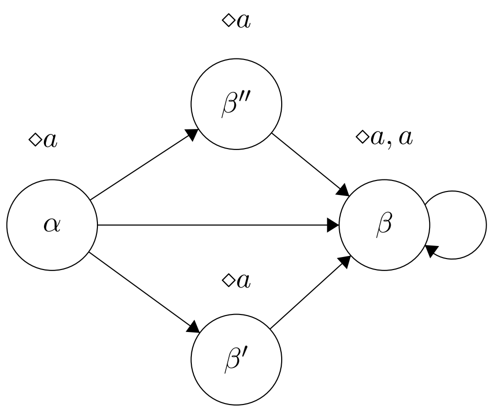
Ts) $\diamond a \implies \Box\diamond a$

Suppongo sia vero l'antecedente (se falso ho finito), quindi vale: $\diamond a$ da cui: $\mu \models \diamond a$

dato che $\diamond a$ si ha che esiste almeno un β tale che in beta vale a

solo un beta: autoanello perché euclidea e quindi $\Box\diamond a$

diversi beta: ognuno dei vari β', β'' , ecc. sono in relazione con β, dato che la relazione è euclidea, pertanto dato che in β vale a, in ognuno di loro vale $\diamond a$



Ip)$\diamond a \implies \Box \diamond a$

Ts) relazione euclidea

Per assurdo, suppondo valga ip) ma non la tesi

Considero un Frame in cui: $\alpha R\beta$, $\alpha R\gamma$, $\beta R\gamma$ ma NON $\beta R\gamma$ cioè si ha un frammento in cui non vale l'euclidea. Poniamo che il modello sia tale che $V(A)= \{\gamma\}$

In queste ipotesi vale $\diamond a$ dato che in γ vale a. In β non vale a e neppure $\diamond a$ perché non ha "uscite", da cui in a non vale $\Box \diamond a$ contraddicendo così l'ipotesi (BAM!)

2.8 Relazione Debolmente Densa

$\diamond a \implies \diamond \diamond a$	relazione debolmente densa	$\forall \alpha, \beta : (\alpha R \beta) \implies \exists \gamma : (\alpha R\gamma \wedge \gamma R\beta)$

Ip) R debolmente densa

Ts) $\diamond a \implies \diamond \diamond a$

supponiamo che sia vero l'antecedente (se è falso la tesi è dimostrata) avremo quindi:

$\mu \models_\alpha \diamond a$

allora segue che:

$\exists \beta : \mu \models_\beta a$

ma poichè la relazione è debolmente densa, si avrà che:

$\exists \gamma : (\alpha R\gamma \wedge \gamma R\beta)$

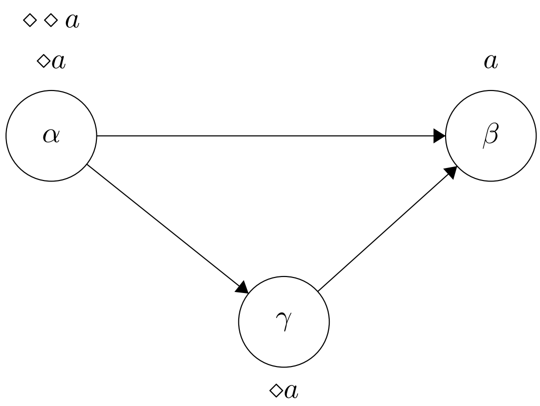
poichè in β è vera a, allora segue:

$\mu \models_\gamma \diamond a$

da cui segue:

$\mu \models_\alpha \diamond \diamond a$

e la tesi è dimostrata.



Ip) $\diamond a \implies \diamond\diamond a$
Ts) R debolmente densa
Supponiamo per assurdo che R non sia debolmente densa.
Supponiamo allora che esista uno stato β pozzo e $\alpha R\beta$ in cui sia vera a
segue che:
$\mu \models_\alpha \diamond a$
ma avremo anche che:
$\mu \not\models_\beta \diamond a$
e allora otteniamo:
$\mu \not\models_\alpha \diamond\diamond a$
che è assurdo perchè contraddice l'ipotesi, e quindi la tesi è dimostrata.

2.9 Relazione Diretta

$\diamond\Box a \implies \Box\diamond a$	relazione diretta	$\forall\alpha,\beta,\gamma : (\alpha R\beta \wedge \alpha R\gamma) \implies \exists\delta : (\beta R\delta \wedge \gamma R\delta)$

Ip) R è diretta
Ts) $\diamond\Box a \implies \Box\diamond a$
Se l'antecedente è falso, il teorema è dimostrato. poniamoci quindi nel caso:
$\mu \models_\alpha \diamond\Box a$
avremo allora che:
$\exists\beta : \alpha R\beta \wedge \mu \models_\beta \Box a$
allora necessariamente si avrà che:
$\exists\delta : \beta R\delta \wedge \mu \models_\delta a$
allora si avrà che:
$\mu \models_\beta \diamond a$

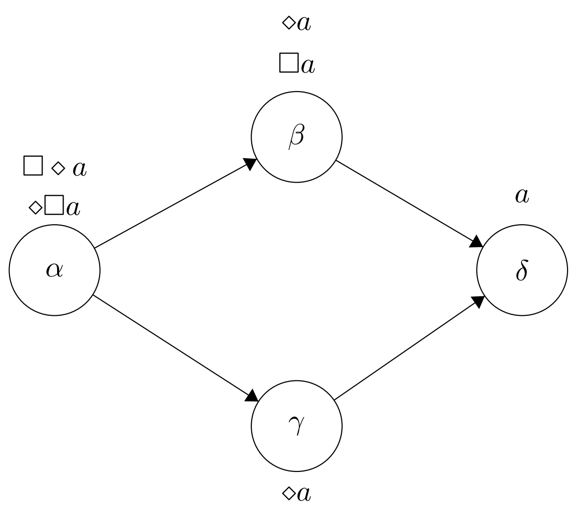
prendiamo ora un qualsiasi mondoγ tale che $\alpha R\gamma$, poichè la relazione è diretta si avrà $\gamma R\delta$, e quindi:

$\mu \models_\gamma \diamond a$

e allora possiamo osservare che vale:

$\mu \models_\alpha \Box \diamond a$

e la tesi è dimostrata



Ip) $\diamond \Box a \implies \Box \diamond a$

Ts) R è diretta

Supponiamo per assurdo R non diretta.

Consideriamo la funzione di valutazione:

$V(a) = \{\delta | \beta R\delta\}$

supponiamo che:

$\exists \alpha : \alpha R\beta \wedge \mu \models_\alpha \diamond \Box a$

allora si avrà:

$\mu \models_\beta \Box a$

Prendiamo ora un qualsiasi mondo γ tale che $\alpha R\gamma$, e supponiamo che:

$\nexists \eta : \gamma R\eta$

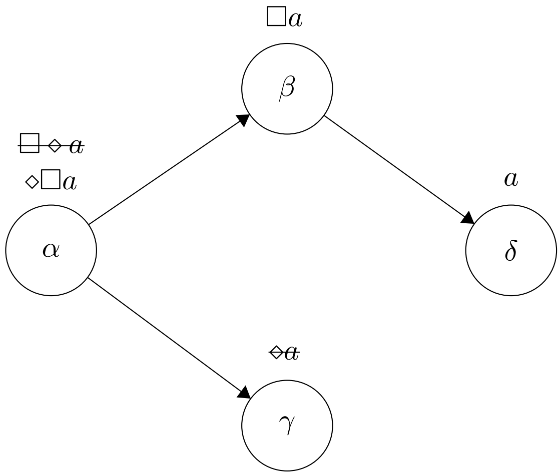
Si avrà dunque che

$\mu \not\models_\gamma \diamond a$

allora avremo che:

$\mu \not\models_\alpha \Box \diamond a$

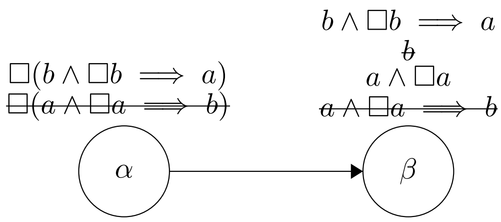
che è assurdo, perchè contraddice la tesi. La tesi è allora valida.



2.10 Relazione Debolmente Connessa

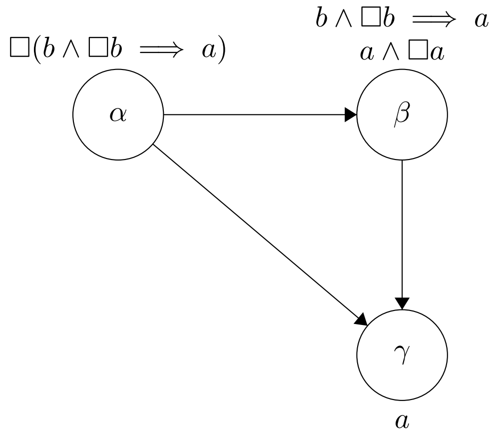
$\Box(a \wedge \Box a \implies b) \vee \Box(b \wedge \Box b \implies a)$	relazione debolmente connessa	$\forall \alpha, \beta :\ (\alpha R \beta \wedge \alpha R \gamma) \implies$ (

Ip) R debolmente connessa
Ts) $\Box(a \wedge \Box a \implies b) \vee \Box(b \wedge \Box b \implies a)$
Se il primo termine è vero, il teorema è verificato. allora supponiamo che:
$\mu \not\models_\alpha \Box(a \wedge \Box a \implies b)$
ne consegue che:
$\mu \not\models_\beta a \wedge \Box a \implies b$
che si ha solo se valgono:
$\mu \not\models_\beta b$
$\mu \models_\beta a \wedge \Box a$
Dobbiamo allora verificare 3 casi:
Caso 1
se da α non esco in altri stati, poichè è falsa b, allora:
$\mu \models_\beta b \wedge \Box b \implies a$
da cui segue che:
$\mu \models_\alpha \Box(b \wedge \Box b \implies a)$
E la tesi è verificata.

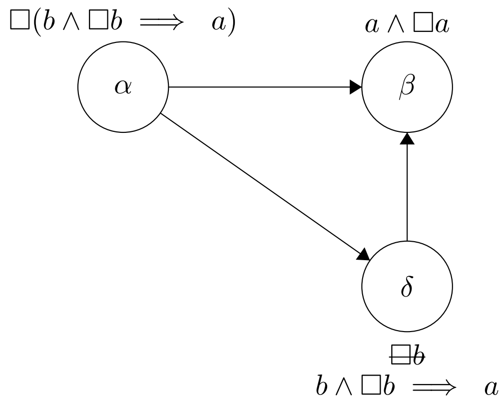


Caso 2
Se da α vado in un altro mondo γ raggiungibile da β:

$\mu \models_\gamma a$
e quindi:
$\mu \models_\beta b \wedge \Box b \implies a$
da cui segue che:
$\mu \models_\alpha \Box(b \wedge \Box b \implies a)$
E la tesi è verificata.

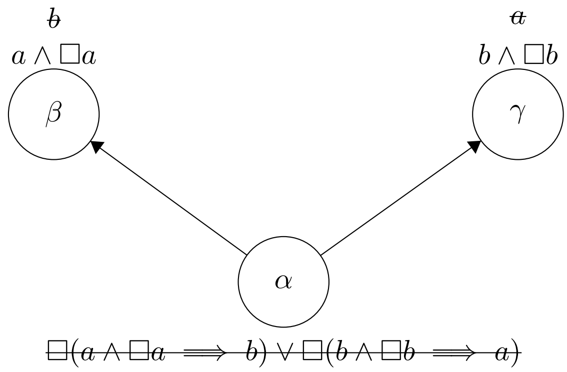


Caso 3
Se da α vado in un altro mondo δ che raggiunge β:
$\mu \not\models_\delta \Box b$
e quindi, poichè è falso l'antecedente, dovrà essere:
$\mu \models_\delta b \wedge \Box b \implies a$
da cui segue che:
$\mu \models_\alpha \Box(b \wedge \Box b \implies a)$
E la tesi è verificata.



Ip) $\Box(a \wedge \Box a \implies b) \vee \Box(b \wedge \Box b \implies a)$
Ts) R debolmente connessa
Supponiamo per assurdo che R non sia debolmente connessa.

Consideriamo il caso in cui dallo stato α si raggiungano due stati β e γ, tali che $\nexists\delta$: $\beta R\delta \vee \gamma R\delta$. Supponiamo inoltre che:
$\mu \models_\beta a \wedge \neg b$
$\mu \models_\gamma b \wedge \neg a$
avremo allora:
$\mu \models_\beta a \wedge \Box a$
$\mu \models_\gamma b \wedge \Box b$
ma, poichè l'antecedente è vero e il conseguente no, avremo anche:
$\mu \not\models_\beta a \wedge \Box a \implies b$
$\mu \not\models_\gamma b \wedge \Box b \implies a$
allora:
$\mu \not\models_\alpha \Box(a \wedge \Box a \implies b) \vee \Box(b \wedge \Box b \implies a)$
che è assurdo, perchè va contro l'ipotesi. La tesi allora deve essere valida.



Capitolo 3

Semantica

3.1 Simboli secessari

$a \vdash b$ cioè a è conseguenza semantica di b, se in ogni Frame, Modello e Mondo in cui $\mu \models b$ si ha anche $\mu \models a$

$\diamond a \equiv \neg\Box\neg a$
Vale da sinistra a destra,
Infatti:
se $\mu \models_{\alpha} \diamond a$ allora
$\exists\beta : \alpha R \beta$ e $\mu \models_{\beta} a$ da cui:
$\mu \not\models_{\beta} \neg a$
per questo in α non vale $\Box\neg a$ (perché non vale $\neg a$ in β)
allora in α vale $\neg\Box\neg a$ cioè $\mu \models_{\alpha} \neg\Box\neg a$ cioè la tesi.

Vale anche da destra a sinistra, dimostrazione simile.

3.2 Logiche

Una logica Λ su L è un insieme di fbf su L che:

- contiene tutte le tautologie
- è chiusa rispetto al Modus Ponens

Ad esempio; $PL(\phi)$ cioè i teoremi della logica proposizionale
Altro esempio $\Lambda_C = \{a \,|\, F \models a \; per \; ogni \; F \in C\}$
infatti:

- contiene tutte le tautologie perché sono vere mondo per mondo dappertutto

- MP : suppongo che in un mondo α accada che: $\mu \not\models_\alpha b$, $\mu \models_\alpha a$. Se vale anche $\mu \models_\alpha a \implies b$ ... l'antecedente è vero, quindi dato che l'implicazione è vera, deve essere vero anche il conseguente da cui non può che essere $\mu \models_\alpha b$

Una logica si dice **uniforme** se è chiusa rispetto a sostituzioni uniformi cioè se sostituendo a una lettere uguali formule uguali in una tautologia, ottengo una tautologia.
Es. $\Lambda_C = \{a \,|\, F \models a \, per \; ogni \; F \in C\}$ NON è uniforme infatti se considero $V(A) = S$, dove S sono tutti gli stati possibili (mondi), vale anche $\mu \models_\alpha A$, e cioè A è una tautologia, se al posto di A sostituisco $B \wedge \neg B$ (falsa in ogni modello e mondo) non ottengo una tautologia.

Teorema
Sono equivalenti:

1. Λ è normale
2. per ogni intero n ≥ 0,
   $\vdash_\Lambda a1 \wedge a2 \wedge ... \wedge an \implies a$ implica $\vdash_\Lambda \Box a1 \wedge \Box a2 \wedge ... \wedge \Box an \implies \Box a$
3. valgono:
   (a) $\vdash_\Lambda \Box T$
   (b) $\vdash_\Lambda \Box a \wedge \Box b \implies \Box(a \wedge b)$
   (c) $\vdash_\Lambda a \implies b$ implica $\vdash_\Lambda \Box a \implies \Box b$

Dimostrazione
$1 \implies 2$
per induzione.
se n = 0 allora $\vdash_\Lambda a$ allora $\vdash_\Lambda \Box a$ per la regola RN che vale in Λ per ipotesi
se n > 0 (passo induttivo) suppongo valga l'antecedente, altrimenti 2 vale senz'altro; si può dimostrare quindi nel seguente modo:
$\vdash_\Lambda a_1 \wedge a_2 \wedge ... \wedge a_n n \implies a$
$\vdash_\Lambda a_1 \wedge a_2 \wedge ... \wedge a_{n-1} \implies (a_n \implies a)$
$\vdash_\Lambda \Box a_1 \wedge \Box a_2 \wedge ... \wedge \Box a_{n-1} \implies \Box(a_n \implies a)$ – per ipotesi di induzione
$\vdash_\Lambda \Box a_1 \wedge \Box a_2 \wedge ... \wedge \Box a_{n-1} \implies (\Box a_n \implies \Box a)$ – per K
$\vdash_\Lambda \Box a_1 \wedge \Box a_2 \wedge ... \wedge \Box a_{n-1} \wedge \Box a_n \implies \Box a$
E la tesi è dimostrata.
$2 \implies 1$
$\vdash_\Lambda (a \wedge (a \implies b)) \implies b$ – per MP
$\vdash_\Lambda (\Box a \wedge \Box(a \implies b)) \implies \Box b$ – per enunciato 2
$\vdash_\Lambda \Box(a \implies b) \implies \Box a \implies \Box b$ – che è K
Abbiamo ricavato usando solo il modus ponens e l'enunciato 2, l'assioma K. segue quindi la tesi.
$1 \implies 3$

$\vdash_\Lambda \top$
$\vdash_\Lambda \Box\top$– per RN
$\vdash_\Lambda a \wedge b \implies a \wedge b$ – per tautologia $(a \implies a)$
$\vdash_\Lambda \Box a \wedge \Box b \implies \Box(a \wedge b)$ – per proposizione 2
$\vdash_\Lambda a \implies b$ – per ipotesi
$\vdash_\Lambda \Box(a \implies b)$ – per RN
$\vdash_\Lambda \Box(a \implies b) \implies (\Box a \implies \Box b)$ – per K
$\vdash_\Lambda \Box a \implies \Box b$ – per MP
La tesi allora è verificata.
$3 \implies 1$
dimostriamo due tesi: che la 3 è chiusa rispetto alla necessitazione e che implica l'assioma K.
$\vdash_\Lambda a$
$\vdash_\Lambda a \implies (\top \implies a)$ – per A1
$\vdash_\Lambda \top \implies a$ – per MP
$\vdash_\Lambda \Box\top \implies \Box a$ – per 3.c
$\vdash_\Lambda \Box a$ – per 3.a e MP
abbiamo così dimostrato la chiusura secondo la necessitazione.
$\vdash_\Lambda a \wedge b \implies c$
$\vdash_\Lambda \Box(a \wedge b) \implies \Box c$ – per 3.c
$\vdash_\Lambda \Box a \wedge \Box b \implies \Box(a \wedge b)$ – per 3.b
$\vdash_\Lambda \Box a \wedge \Box b \implies \Box c$ – per la combinazione delle due implicazioni precedenti
$\vdash_\Lambda a \wedge (a \implies b) \implies b$ – per tautologia
$\vdash_\Lambda \Box a \wedge \Box(a \implies b) \implies \Box b$ – per applicazione dello schema $\Box a \wedge \Box b \implies \Box c$ dimostrato precedentemente
$\vdash_\Lambda \Box(a \implies b) \implies (\Box a \implies \Box b)$
e così è dimostrato che K è implicato da 3. Il teorema dunque è dimostrato.

Capitolo 4

Verso la decidibilità - Logica determinata

4.1 Insieme Λ consistente e sue proprietà

Sia Λ una logica (cioè ha tutte le tautologie ed è chiusa rispetto al Modus Ponens)
Γ si dice Λ-consistente se: $\Gamma \nvdash_\Lambda \bot$, dove $\bot = A \wedge \neg A$
Δ si dice Λ-consistente massimale se per ogni fbf a $a \in \Delta$ oppure $\neg a \in \Delta$

Proprietà:

1. Se $\Gamma \vdash_\Lambda a$ e $\Gamma \subseteq \Delta$ allora $\Delta \vdash_\Lambda a$. Ovvero se alcune premesse non mi servono posso comunque metterle per dedurre una formula

2. Se $\Gamma \vdash_\Lambda a$ e $\Lambda \subseteq \Lambda'$ allora $\Gamma \vdash_{\Lambda'} a$. Ovvero quello che posso dedurre in una logica più scarna (es. PL) lo posso dedurre anche in una più ricca che la contien (es. Modale)

3. se $a \in \Gamma$ allora $\Gamma \vdash_\Lambda a$.
Infatti $\vdash_\Lambda a \implies a$ è un teorema dato che $a \implies a$ è una tautologia

4. $\{a|\Gamma \vdash_\Lambda a\}$ è la minima logica che contiene $\Gamma \cup \Lambda$. Infatti posso dedurre tutte le tautologie da Γ, anche se non userò nessuna formula di Γ ma solo quelle che già sono nella logica Λ

5. Se $\Gamma \vdash_\Lambda a$ e $\{a\}\vdash_\Lambda b$ allora $\Gamma \vdash_\Lambda b$
Infatti: per dedurre a uso regole di inferenza, formule di Γ, assiomi di Λ. Per arrivare in b uso assiomi di Λ e regole di inferenza, quindi posso arrivare da Γ direttamente in b usando formule di Γ, regole di inf. e assiomi di Λ

6. Se $\Gamma \vdash_\Lambda a$ e $\Gamma \vdash_\Lambda a \implies b$ allora $\Gamma \vdash_\Lambda b$, dato che Λ è chiusa rispetto al MP

7. $\Gamma \cup \{a\} \vdash_\Lambda b$ se e solo se $\Gamma \vdash_\Lambda a \implies b$
Andata: $\vdash_\Lambda a_1 \wedge ... \wedge a \wedge ... \wedge a_n \implies b$ (per definizione di teorema), si può portare

a alla destra dell'implicazione $\vdash_\Lambda a_1 \wedge ... \wedge a_n \implies (a \implies b)$
Ritorno: $\vdash_\Lambda a_1 \wedge ... \wedge a_n \implies (a \implies b)$, basta portare a tra le and.

8. $\Gamma \vdash_\Lambda a$ se e solo se $\Gamma \cup \{\neg a\}$ non è Λ-consistente

   Andata: $\Gamma \vdash_\Lambda a$, $\Gamma \vdash_\Lambda \neg a$, posso dedurre $\bot$ che è contro la definizione di Λ-consistenza
   Ritorno: Se$\Gamma \cup \{\neg a\}$ non è Λ-consistente, allora $\Gamma \cup \{\neg a\} \vdash_\Lambda \bot$ da cui per 7.
   $\Gamma \vdash_\Lambda \neg a \implies \bot$ (sposto $\neg a$ a destra e metto l'implica),
   Dato che $(\neg a \implies \bot) \implies a$ è una tatutologica, per MP ottengo
   a

9. Γ è $\Lambda - \textit{consistente}$ se e solo se $\exists \beta : \Gamma \nvdash_\Lambda \beta$
   Andata: Basta prendere $\neg a \wedge a$
   Ritorno: Se deducessi tutte le formule ($\neg \exists \beta : \Gamma \nvdash_\Lambda \beta$ significa $\forall \beta : \Gamma \vdash_\Lambda \beta$) , potrei dedurre anche $\bot$, da cui la non consistenza

10. Γ è $\Lambda - \textit{consistente}$ se per ogni a
    $\Gamma \cup \{a\}$ o $\Gamma \cup \{\neg a\}$ è $\Lambda - \textit{consistente}$
    se $\Gamma \vdash_\Lambda a$ allora $\Gamma \cup \{\neg a\}$ non è consistente perché con a e $\neg a$ posso dedurre $\bot$, ma $\Gamma \cup \{a\}$ lo è
    se $\Gamma \vdash_\Lambda \neg a$ allora $\Gamma \cup \{\neg a\}$ è consistente ma non $\Gamma \cup \{a\}$

11. $\bot \notin \Gamma$ se Γ è $\Lambda - \textit{consistente}$ (altrimenti potrei dedurlo per il 3.)

12. Se Δè $\Lambda - \textit{consistente massimale}$ e $\Delta \vdash_\Lambda a$ allora $a \in \Delta$
    se $a \notin \Delta$ allora $\neg a \in \Delta$ (dato che Δè massimale)
    ma se Δ contiene $\neg a$ allora per il 2.)
    $\Delta \vdash_\Lambda \neg a$, che insieme a $\Delta \vdash_\Lambda a$ mi da $\Delta \vdash_\Lambda \bot$

13. Se Δ è $\Lambda - \textit{consistente massimale}$ e $a \in \Delta$. $a \implies b \in \Delta$ allora $b \in \Delta$.
    Lo si vede subito usando 2.) se tutti e tre, e poi 6.) (deduco a, $a \implies b$, allora deduco anche b)

4.2 Insieme Λ consistente massimale

Lemma di Lindelman - Esistenza dell'insieme $\Lambda - \textit{consistente massimale}$ in una logica Λ consistente

Considero tutte le formule $b1$, $b2$, $b3, \ldots$ della logica Λ (posso farlo perché sono un'infinità numerabile)
Chiamo Γ_0 un insieme che contiene una sola formula (ad esempio una tautologia)
Dopodichè iterativamente, per ogni formula mi chiedo

$$\Gamma_0 \vdash_\Lambda b1\ ? \begin{cases} si: & \Gamma_1 = \Gamma_0 \cup b1 \\ no: & \Gamma_1 = \Gamma_0 \cup \neg b1 \end{cases}$$

$$\Gamma_1 \vdash_\Lambda b2\ ? \begin{cases} si: & \Gamma_2 = \Gamma_1 \cup b2 \\ no: & \Gamma_2 = \Gamma_1 \cup \neg b2 \end{cases}$$

$\Delta = \bigcup_{n \geq 0} \Gamma_i$ (nota, questa unione è infinita)

Δ è consistente massimale infatti:

1. Massimale in quanto contiene a oppure $\neg a$ per costruzione
2. Consistente. Per assurdo se non lo fosse avrei: $\Delta \vdash_\Lambda \perp$
   cioè esiste un numero finito di formule di Δ da cui deduco il falso,
   dato che è un numero finito di formule, sta in Γ_i , cioè esiste un Γ_i non consistente,
   assurdo perché lo sono tutti per costruzione $\lightning$

Nota:

- Non sappiamo costruire Δ perché nasce da unione infinita
- Non è unico, infatti se considero formule in ordine diverse potrei "dire" si o no in modo diverso
  es. $a,\ a \implies b,\ b$ (allora Δ contiene b)
  es. $b,\ c$ (allora Δ contiene $\neg b$)

4.2.1 Teorema

$\Gamma \vdash_\Lambda a$ se e solo se $a \in$ a tutti i quei Δ $\Lambda - \textit{consistenti massimali}$ tali che: $\Gamma \subseteq \Delta$

Andata:
$\Gamma \vdash_\Lambda a$, anche $\Delta \vdash_\Lambda a$ per la 1.)
Ritorno:
Per assurdo, se $\Gamma \nvdash_\Lambda a$ allora $\Gamma \cup \{\neg a\}$ è $\Lambda - \textit{consistente}$ (per la 8.)
da cui per Lindellman esiste Δ' che contiene $\Gamma \cup \{\neg a\}$ consistente massimale
data la consistenza Δ' non contiene a, il che è contro l'ipotesi $\lightning$

4.3 Lemma di Verità

Sia $M^\Lambda(S^\Lambda, R^\Lambda, V^\Lambda)$ il modello canonico di Λ
$M^\Lambda \models_\alpha a$ se e solo se $a \in \alpha$

Ip) $M^\Lambda \models_\alpha a$
TS) $a \in \alpha$

Dimostrazione per **induzione** sul numero n dei connettivi della formula a
$\boxed{\text{n=0}}$ cioè a è del tipo A (lettera enunciativa) da cui $M^\Lambda \models_\alpha a$ se e solo se $\alpha \in V^\Lambda(A)$ se e solo se $A \in \alpha$
$\boxed{\text{Ipotesi di Induzione}}$ a con n connettivi, può essere dei seguenti tipi:

1. $\neg b$
2. $b \implies c$
3. $\Box b$

Caso 1: $M^\Lambda \models_\alpha a$ se e solo se $M^\Lambda \models_\alpha \neg b$ se e solo se $M^\Lambda \not\models_\alpha b$

b ha $n-1$ connettivi (dato che b) ne ha n, quindi vale l'ipotesi di induzione da cui:
$b \notin \alpha$, d'altra parte α è $\Lambda - consistente\, massimale$ (per come è definito S^Λ) da cui:
$b \notin \alpha$ se e solo se $\neg b \in \alpha$ cioè se:
$a \in \alpha$
Caso 2: $M^\Lambda \models_\alpha a$ se e solo se
Caso 21: $M^\Lambda \not\models_\alpha b$
Caso 22: $M^\Lambda \models_\alpha c$

Caso 21: $M^\Lambda \not\models_\alpha b$

Il numero di connettivi di b e di c sommati dà $n-1$
quindi per ipotesi induttiva $M^\Lambda \not\models_\alpha b$ se e solo se $b \notin \alpha$
se e solo se $\neg b \in \alpha$ (per la compattezza max di Λ) **(*)**
D'altra parte $\neg b \implies (b \implies c)$ è una tautologi della PL e quindi è un teorema di Λ (perché un logica contiene tutte le tautologie)
e quindi $\neg b \implies (b \implies c) \in \alpha$ **(**)**
da cui per MP con **(*)** e **(**)** si ha che $b \implies c$ appartiene ad α

Caso 22: $M^\Lambda \models_\alpha c$

Vale l'ipotesi di induzione da cui:
quindi per ipotesi induttiva $M^\Lambda \models_\alpha c$ se e solo se $c \in \alpha$ **(*)**
D'altra parte $c \implies (b \implies c)$ è una tautologi della PL e quindi è un teorema di Λ (perché un logica contiene tutte le tautologie)
e quindi $c \implies (b \implies c) \in \alpha$ **(**)**
MP **(*)** e **(**)** ci dà $b \implies c$ appartiene ad α

Caso 3: a è del tipo $\Box b$
Ip)$M^\Lambda \models_\alpha \Box b$
Ts)$\Box b \in \alpha$

Dall'ipotesi segue che $\forall \beta : (\alpha, \beta) \in R^\Lambda$ si ha: $M^\Lambda \models_\beta b$ (questo per la definizione di $\Box a$)

b ha $n-1$ connettivi quindi vale per lei l'ipotesi di induzione:
$b \in \beta$

$(\alpha, \beta) \in R^{\Lambda}$ se e solo se: $\{a \mid \Box a \in \alpha\} \subseteq \beta$
$\alpha \in V^{\Lambda}(A)$ se e solo se: $A \in \alpha$

Ognuno dei β con cui α è in relazione è $\Lambda - \mathit{consistente\,massimale}$ e ognuno contiene l'insieme $\{a \mid \Box a \in \alpha\}$
$\Gamma \vdash_{\Lambda} a$ se e solo se a appartiene a tutti i Δ_i $\Lambda - \mathit{consistente\,massimale}$ con $\Gamma \subseteq \Delta_i$
$\beta \vdash_{\Lambda} b$ se e solo se b appartiene a tutti i Δ_i $\Lambda - \mathit{consistente\,massimale}$ con $\beta \subseteq \Delta_i$
$\{a \mid \Box a \in \alpha\}$ è consistente massimale (davvero??) e quindi
$\{a \mid \Box a \in \alpha\} \vdash_{\Lambda} b$, per la 2. definizione equivalente di Logica Normale "aggiungo $\Box$ ad entrambi i lati" da cui:
$\{\Box a \mid \Box a \in \alpha\} \vdash_{\Lambda} b$
Ma $\{\Box a \mid \Box a \in \alpha\}$ è un sottoinsieme di formule di α quindi a maggior ragione ricavo b da tutto α da cui:
$\alpha \vdash_{\Lambda} b$
Ip) $\Box b \in \alpha$
TS) $M^{\Lambda} \models_{\alpha} \Box b$
Se $\Box b \in \alpha$ per definizione di R^{Λ} per ogni mondo β con $(\alpha, \beta) \in R^{\Lambda}$ si ha $b \in \beta$
Notiamo che b ha $n-1$ connettivi, quindi vale l'ipotesi di induzione e quindi:
$b \in \beta$ se e solo se $M^{\Lambda} \models_{\beta} b$
Dato che questo vale per ogni β in relazione con α, si ha: $M^{\Lambda} \models_{\alpha} \Box b$

4.4 Correttezza e completezza della logica K rispetto a tutti i Frame

Dimostriamo che la logica K (minima logica modale normale) è corretta e completa
Ip) $\vdash_K a$
Ts)$F \models a$

A1, A2, A3 sono tautologie e quindi valide su tutti i frame
MP, sia la regola di necessitazione (RN) fanno passare da formule valide su un frame a formule valide su quello stesso frame.
Essendo a l'ultima formula di una sequenza finita di fbf che o sono istanze degli assiomi A1, A2, A3, K o sono ottenute da fbf precedenti tramite MP o RN, è una fbf valida su ogni frame.

Ip) $F \models a$
Ts)$\vdash_K a$

Supponiamo $\nvdash_K a$, allora per il corollario del lemma di verità

Per ogni formula a, sia Λ una logica, si ha $M^{\Lambda} \models a$ se e solo se $\vdash_{\Lambda} a$, dove M^{Λ} è il modello canonico

Si avrebbe: $M^{K} \not\models a$ da cui anche
$F^{K} \not\models a$, cioè a non valida sul frame su cui M^{K} è costruito quindi:
$F \not\models a$ (infatti esiste almeno un frame, F^{K}, in cui non è valida a) il che però è contro l'ipotesi $\lightning$.

4.5 Correttezza e completezza della logica K4 rispetto ai Frame transitivi

Nota: K4 è costruita a partire dalla logica K a cui si aggiunge l'assioma della transitività $\Box a \implies \Box\Box a$
Ip)$\vdash_{K4} a$
Ts) $F \models a$ con F frame transitivo

Simile al caso precedente in cui anche 4 è valido in quando il frame è transitivo

Ip) $F \models a$ con F frame transitivo (cioè la cui relazione è transitiva)
Ts)$\vdash_{K4} a$

Per procedere con una dimostrazione sulla falsa riga della precedente abbiamo bisogno di dimostrare la transitività di R^{K4}
cioè della relazione R^{K4} del modello canonico $M^{K4} = (S^{K4}, R^{K4}, V^{K4})$, servirà ragionando per assurdo.

Transitività di R^{K4}
se $(\alpha, \beta) \in R^{K4}$, $(\beta, \gamma) \in R^{K4}$ allora $(\alpha, \gamma) \in R^{K4}$
cioè deve avvenire che: $\{a \mid \Box a \in \alpha\} \subseteq \gamma$ (definizione di essere in relazione $\alpha R^{K4} \gamma$ del modello canonico)
se $\Box a \in \alpha$, ricordando che:
α è un insieme $K4 - \textit{consistente massimale}$,
4 è un teorema della logica
i teoremi di na logica appartengono a tutti gli insiemi consistenti massimali rispetto a quella logica quindi
α, così come ogni insieme $K4 - \textit{consistente massimale}$, contiene anche $\Box a \implies \Box\Box a$ (4) da cui
$\Box\Box a \in \alpha$.
$\{a \mid \Box a \in \alpha\} \subseteq \beta$ (per ipotesi $\alpha R^{K4} \beta$)
ma per ogni formula $\Box a \in \alpha$ si ha che $\Box\Box a \in \alpha$ e quindi: $\{\Box a \mid \Box\Box a \in \alpha\} \subseteq \beta$ da cui $\{\Box a \mid \Box a \in \alpha\} \subseteq \beta$
$\{a \mid \Box a \in \beta\} \subseteq \gamma$ (per ipotesi $\beta R^{K4} \gamma$), ma le formule del tipo $\Box a$ contenute in β sono le stesse contenute in α, quindi si ha anche:

$\{a \mid \Box a \in\alpha\} \subseteq \gamma$ cioè $(\alpha,\gamma) \in R^{K4}$

A questo punto possiamo usare in modo profiquo il corollario del lemma di verità.
Dimostriamo la tesi per assurdo: supponiamo che $\nvdash_{K4} a$
allora per il corollario del teorema di verità si avrebbe anche $M^{K4} \nvDash a$
e in particolare si avrebbe $F^{K4} \nvDash a$, cioè si avrebbe un Frame transtivo (infatti R^{K4} è transitiva) nel quale non è valida a
ma ciò contraddice l'ipotesi $F \models a$ (con F transitivo) $\lightning$

4.6 Teorema di Raggiungibilità

$(\alpha,\beta) \in R^{\Lambda}$ se e solo se $\{a \mid \Box a \in \alpha\} \subseteq \beta$ se e solo se $\{\diamond b \mid b \in \beta\} \subseteq \alpha$
Ip)$\{a \mid \Box a \in \alpha\} \subseteq \beta$
Ts)$\{\diamond b \mid b \in \beta\} \subseteq \alpha$

Per assurdo supponiamo che
$b \in \beta$ e che $\diamond b \notin \alpha$,
$\neg \diamond b \in \alpha$ (dato che α) è $\Lambda - consistente\, massimale$
$\Box\neg b \in \alpha$ (equivalenza $\Box\neg a \equiv\neg \diamond a$) da cui
$\neg b \in \beta$ (definizione di $\Box x$ e considerato $\alpha R^{\Lambda}\beta$)
il che è assurdo perché $b \in \beta$, e β è $\Lambda - consistente\, massimale \lightning$

Ip)$\{\diamond b \mid b \in \beta\} \subseteq \alpha$
Ts)$\{a \mid \Box a \in \alpha\} \subseteq \beta$
Per assurdo supponiamo cioè che
$\Box a \in \alpha$ e $a \notin \beta$
$\neg a \in \beta$ (dato che β è $\Lambda - consistente\, massimale$)
$\diamond\neg a \in \alpha$ (infatti $\alpha R^{\Lambda}\beta$ e in β è vera $\neg a$, quindi a ha almeno un successore nel quale $\neg a$ è vera)
$\neg\Box a \in \alpha$ contro l'ipotesi della consistenza e massimalità di $\alpha \lightning$

Capitolo 5

Logiche modali particolari e Determinatezza

Per il teorema dicorrettezza e completezza abbiamo che $\vdash_\Lambda a$ se e solo se $M^\Lambda \models a$
Il problema di $M^\Lambda \models a$ è che non so costruire a livello "pratico" il modello canonico dato che i suoi mondi sono infiniti.
Provo quindi a vedere se $\vdash_\Lambda a$ se e solo se $F^\Lambda \models a$ possa valere almeno per particolari classi di frame.

Nota: Per dimostrare la determinatezza di una logica rispetto a una classe di frame con una proprietà si può mostrare che la relazione del Frame canonico costruito da quella logica gode della stessa proprietà.
Con questa chiave di lettura diamo alcune dimostrazioni di determinatezza.

5.1 Determinatezza di KD rispetto ai Frame Seriali

R^{KD} è seriale se: $\forall\alpha \in S^{KD}\exists\beta : (\alpha, \beta) \in R^{KD}$
TS) $\vdash_{KD} a$ se e solo se R^{KD} è seriale
$\{a \mid \Box a \in \alpha\} \subseteq \beta$ se e solo se α e β sono in relazione.
Vogliamo quindi provare che per ogni insieme $\{a \mid \Box a \in \alpha\}$ esiste un β che sia $KD-$ *consistente massimale* che lo contiene,
per farlo mi basta mostrare che esiste un insieme β_0 consistente che lo contiene, poi per il teorema di Lindelmann saprò anche che ne esiste uno consistente massimale.

$\beta_0 = \{a \mid \Box a \in \alpha\}$, dimostro che β_0 è consistente.
Se per assurdo non lo fosse
$\vdash_{KD} a_1 \wedge ... \wedge a_n \implies \bot$, dove $a_1, a_2, ..., a_n$ sono formule di β_0
(da cui spostando a_n dopo l'implica)
$\vdash_{KD} a_1 \wedge ... \wedge a_{n-1} \implies \neg a_n$ (uso la definizione 2. di logica normale)
$\vdash_{KD} \Box a_1 \wedge \cdots \wedge \Box a_n \implies \Box\neg a_n$

$\Box a_1 \wedge \cdots \wedge \Box a_n \implies \Box \neg a_n \in \alpha$ (dato che α è $KD - consistente\ massimale$ contiene tutti i teoremi di KD)
$\Box a_1 \wedge \cdots \wedge \Box a_n \in \alpha$ per costruzione di β_0 (in β_0 valgono tutto le $\Box x$ se x vale in α)
$\Box \neg a_n \in \alpha$ (per MP dalle due precedenti)
$\neg \diamond a_n \in \alpha$
$\Box a_n \in \alpha$ **(*)**
$\Box a_n \implies \diamond a_n$ (schema seriale) **(**)**
Per MP fra **(*)** e **(**)** si ha $\diamond a_n \in \alpha$
Da cui α non consistente, assurdo. ↯

5.2 Determinatezza rispetto ai Frame Debolmente Densi

R è debolmente densa se: $\forall \alpha, \beta : (\alpha R \beta) \implies \exists \gamma : (\alpha R \gamma \wedge \gamma R \beta)$
Chiamiamo Λ una costruita a partire dalla logica K aggiungendo lo schema: $\diamond a \implies \diamond\diamond a$
La partenza del ragionamento è simile a quello del precedente in cui come insieme considero:
$\gamma_0 = \{a \mid a \in \alpha\} \cup \{\diamond b \mid b \in \beta\}$

Per assurdo:
$\vdash_\Lambda a_1 \wedge ... \wedge a_n \wedge \diamond b_1 \wedge ... \wedge \diamond b_n \implies \bot$
dove $a_1, ..., a_n$ sono formule di α, e $b_1, ..., b_n$ sono formule di β
$\vdash_\Lambda a_1 \wedge ... \wedge a_n \implies \neg(\diamond b_1 \wedge ... \wedge \diamond b_n)$
pongo $b = b_1 \wedge ... \wedge b_n$

Teorema al volo:
$\vdash_\Lambda \neg(\diamond c \wedge \diamond d) \implies \neg \diamond (c \wedge d)$, cioè:
$\vdash_\Lambda \diamond(c \wedge d) \implies \diamond c \wedge \diamond d$
infatti, sono tautologie della logica proposizionale: $\neg c \implies \neg c \vee \neg d$
e $\neg d \implies \neg c \vee \neg d$,
queste sono anche teoremi di Λ
dato che Λ è normale si ha $\Box \neg c \implies \Box \neg c \vee \neg d$ (definizione 3.3 di logica normale)
e lo stesso vale per la seconda $\Box \neg d \implies \Box \neg c \vee \neg d$
dato che il conseguente si ha per due antecedenti diversi allora:
$\Box \neg c \vee \Box \neg d \implies \Box \neg c \vee \neg d$ da cui negando e scambiando antecedente e conseguente:
$\neg(\Box \neg c \vee \neg d) \implies \neg(\Box \neg c \vee \Box \neg d)$, sviluppo il $\neg$
$\diamond(c \wedge d) \implies \diamond c \wedge \diamond d$

Uso il teorema ottenendo (in un certo senso "portiamo fuori" il $\diamond$)
$\vdash_\Lambda a_1 \wedge ... \wedge a_n \implies \neg \diamond (b_1 \wedge ... \wedge \diamond b_n)$ cioè (per come ho posto b)
$\vdash_\Lambda a_1 \wedge ... \wedge a_n \implies \neg \diamond b$
Uso la definizione 2. di logica normale e riscrivo:
$\vdash_\Lambda \Box a_1 \wedge \cdots \wedge \Box a_n \implies \Box \neg \diamond b$
$\vdash_\Lambda \Box a_1 \wedge \cdots \wedge \Box a_n \implies \neg \diamond \diamond b$

dato che $\Box a_1 \wedge \cdots \wedge \Box a_n \implies \neg \diamond \diamond b \in \alpha$
e che: $\Box a_1 \wedge \cdots \wedge \Box a_n \in \alpha$
anche $\neg \diamond \diamond b \in \alpha$ (MP dalle due precedenti)
dato che $\diamond b \in \alpha$ anche $\diamond \diamond b \in \alpha$ per lo schema delle relazioni debolmente dense
il che ci porterebbe alla non massimalità di α contro l'ipotesi. $\lightning$

5.3 Determinatezza di KT rispetto ai Frame Riflessivi

R^{KT} è riflessiva se: $\forall \alpha,\ \alpha R^{KT} \alpha$
Vogliamo dimostrare che l'insime $\{a \,|\, \Box a \in \alpha\}$ di formule è contenuto in α
Se $\Box a \in \alpha$ cioè se $\vdash_{KT} \Box a$ allora
$\vdash_{KT} x$ dato che $\Box a \implies a$ è uno schema della logica KT e quindi:
$a \in \alpha$.
Per questi motivi $\{a \,|\, \Box a \in \alpha\}$ è in effetti contenuto in α
Da cui segue la tesi.

5.4 Determinatezza di KB rispetto ai frame Simmetrici

R^{KB}è simmetrica se $\forall \alpha, \beta\, \alpha R^{KB} \beta \implies \beta R^{KB} \alpha$
Se $\beta R^{K4} \alpha$ allora:
$\{\diamond b \,|\, b \in \alpha\} \subseteq \beta$
per definizione di R del modello canonico.
Dal momento che vale l'assioma B: $a \implies \Box \diamond a$,
per ogni formula $b \in \alpha$ si ha che:
$\Box \diamond b \in \alpha$,
D'altra parte ogni volta che $b \in \alpha$, $\diamond b \in \beta$ dato che $\beta R^{K4} \alpha$ e quindi:
$\{a \mid \Box a \in \alpha\} \subseteq \beta$ cioè $\alpha R \beta$

5.5 Correttezza e completezza di KD

La logica KD è corretta e completa rispetto alla classe dei Frame seriali
Dimostrazione
Ts) $\vdash_{KD} a$
Ip) $F \models a$ con F seriale
se a è un teorema di KD, è ricavato da una serie di formule che possono essere applicazioni degli schemi A1, A2, A3, K, D oppure applicazioni del modus ponens o della regola di necessitazione.
Supponiamo per assurdo che:
$\nvdash_{KD} a$
allora avremo che:
$\mu^{KD} \nvDash a$
e quindi:

$F^{KD} \not\models a$
Poichè a non è vera nel frame canonico, non può essere vera in alcun frame seriale, ma questo va contro l'ipotesi, assurdo. Allora la tesi deve essere valida.

Chapter 6

Decidibilità Delle Logiche Modali

6.1 Filtrazione

Dato una logica Λ e una formula a, si può garantire cheesiste un modello μ, con un numerodi mondi limitato da f(n), con n numero di sottoformule di a tale che:
$\vdash_\Lambda a \iff \mu \models a$
Dimostrazione.
Ip) $a \in \Gamma \implies sottoformule(a) \subseteq \Gamma$
Ts) $\exists \mu : \vdash_\Lambda a \iff \mu \models a$
sia μ=(S,R,V), consideriamo la seguente relazione:
$\sim_\Gamma \subseteq S \times S$
che gode della seguente proprietà:
$\Gamma_\alpha = \{a \in \Gamma \,|\, \mu \models_\alpha a\}$
$\alpha \sim_\Gamma \beta \iff \Gamma_\alpha = \Gamma_\beta$
Si può notare che $\sim_\Gamma$ è una relazuione di equivalenza, Infatti:

1. è simmetrica
   $\alpha \sim_\Gamma \alpha \iff \Gamma_\alpha = \Gamma_\alpha$

2. è riflessiva
   $\alpha \sim_\Gamma \beta \iff \Gamma_\alpha = \Gamma_\beta \iff \beta \sim_\Gamma \alpha$

3. è transitiva:
   $\alpha \sim_\Gamma \beta \wedge \alpha \sim_\Gamma \gamma \iff \Gamma_\alpha = \Gamma_\beta = \Gamma_\gamma \iff \gamma \sim_\Gamma \beta$

Posso allora considerare l'insieme quoziente:
$S_\Gamma = S/\sim_\Gamma$
Si può dimostrare con il teorema di fattorizzazzione delle applicazioni che:
$|S_\Gamma| \leq 2^{|\Gamma|}$

$$\begin{tikzcd}
\alpha \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "ker f"'] & & \Gamma(\alpha) \\
& S/ker f \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

Per dimostrarlo basta prendere:
$f : \alpha \to \mathcal{P}(\Gamma)$
risulta banale verificare che:
$ker\, f \equiv \sim_\Gamma$
e quindi, ricordando che g è iniettiva, risulta banale che:
$|S/\sim_\Gamma| \leq \Gamma(\alpha)$
Allora possiamo prendere il modello:
$M^\Gamma = (S^\Gamma, R', V^\Gamma)$
$R' \subseteq S^\Gamma \times S^\Gamma$
con R' che soddisfi le seguenti proprietà:
F1) $(\alpha,\, \beta) \in R \implies ([\alpha],\, [\beta]) \in R'$
F2) $([\alpha], [\beta]) \in R' \implies \forall \Box b \in \Gamma,\, \mu \models_\alpha \Box b \implies \mu \models_\beta b$
Una relazione che gode delle proprietà F1 e F2 si chiama Γ-filtrazione della relazione R.
prendiamo infine:
$V^\Gamma : \Phi \cap \Gamma \to \mathcal{P}(S^\Gamma)$
che gode della seguente proprietà:
presa una formula atomica $A \in \Phi \cap \Gamma$
$\alpha \in V^\Gamma(A) \iff \alpha \in V(A)$

6.1.1 Teorema

Esiste almeno una relazione che gode delle proprietà F1 e F2:
$R^\sigma \subseteq S^\Gamma \times S^\Gamma$
così definita:
$([\alpha], [\beta]) \in R^\sigma \iff \exists \delta \in [\alpha], \eta \in [\beta] : (\delta,\, \eta) \in R$
La proprietà F1 è dimostrata banalmente.
Dimostriamo F2
Ip) $([\alpha], [\beta]) \in R^\sigma$, $\Box b \in \Gamma$, $\mu \models_\alpha \Box b$
Ts) R^δgode della proprietà F2
supponiamo che:
$\exists \delta, \eta : \delta R \eta \wedge \delta \in [\alpha] \wedge \eta \in [\beta]$
avremo che:
$\mu \models_\delta \Box b$
$\mu \models_\eta b$

e quindi:
$\mu \models_\beta b$

6.2 Lemma di Filtrazione

dato un insiemeΓ chiuso rispetto alle sottoformule di a, con $a \in \Gamma$
$\mu \models_\alpha a \iff \mu^\Gamma \models_\alpha a$
per ogni $\mu^\Gamma \Gamma$-filtrazione di μ
Dimostrazione:
Ts) $\mu \models_\alpha a \iff \mu^\Gamma \models_{[\alpha]} a$
Ip) $\mu^\Gamma \Gamma$-filtrazione di μ
Per induzione sul numero di connettivi di a
Caso Base, n=0:
a non ha connettivi, allora $a \equiv A$
$\mu \models_\alpha A \iff \alpha \in V(A) \iff \alpha \in V^\Gamma(A) \iff \mu^\Gamma \models_{[\alpha]} a$
Ipotesi di induzione: il teorema vale per ogni formula di Γ con m<n connettivi.
a può essere:

1. $\neg b$
2. $b \implies c$
3. $\Box b$

Caso 1:
$\mu \models_\alpha \neg b \iff \mu \not\models_\alpha b \iff \mu^\Gamma \not\models_{[\alpha]} b \iff \mu^\Gamma \models_{[\alpha]} \neg b$
Caso 2:
$\mu \models_\alpha b \implies c$ se e solo se $\mu \not\models_\alpha b$ oppure $\mu \models_\alpha c$
quindi si può affermare
$\mu \not\models_\alpha b \iff \mu^\Gamma \not\models_{[\alpha]} b$
$\mu \models_\alpha c \iff \mu^\Gamma \models_{[\alpha]} c$
ma vale almeno una delle due se e solo se
$\mu^\Gamma \models_{[\alpha]} b \implies c$
Caso 3:
Ip) $\mu \models_\alpha \Box b$
Ts) $\mu^\Gamma \models_{[\alpha]} \Box b$
Consideriamo la reazione R' avente le proprietà F1 e F2
$\forall[\beta] : ([\alpha], [\beta]) \in R' \implies \mu^\Gamma \models_{[\beta]} b$ – per F2
allora si può affermare che:
$\mu \models_\beta b \implies \mu^\Gamma \models_{[\beta]} b \implies \mu^\Gamma \models_{[\alpha]} \Box b$
Ip)$\mu^\Gamma \models_{[\alpha]} \Box b$
Ts)$\mu \models_\alpha \Box b$
$\forall[\beta] : (\alpha, \beta) \in R, ([\alpha], [\beta]) \in R'$ –per F1

allora si può affermare che:
$\mu^\Gamma \models_{[\beta]} b \implies \mu \models_\beta b \implies \mu \models_\alpha \Box b$

6.3 Determinatezza di K dai Frame Finiti

La minima logica normale K è determinata dalla classe di tutti i frame finiti.
Se a ha n sottoformule a è un teorema di K se e solo se A è valida in tutti i frame con meno di 2^n mondi.
$\vdash_K a$ se e solo se $F \models a$.

Ip)$\vdash_K a$
Ts)$F \models a$

Se a è un teorema di K allora a è valida in tutti i frame (infatti K è determinata rispetto alla classe di tutti i frame) è a maggior ragione valida in tutti i frame finiti ed in tutti i frame con meno di 2^n mondi.

Ip)$F \models a$
Ts)$\vdash_K a$

Suppongo per assurdo che$\nvdash_K a$ se e solo se $M^K \not\models a$ se e solo se (per il lemma di filtrazione) $(M^K)^\Gamma \not\models a$ il che implica che
in particolare $(F^K)^\Gamma \not\models a$ dove $(F^K)^\Gamma$ è il Frame su cui è costruita la filtrazione del modello canonico costruito rispetto alla logica K
Si noti che $(M^K)^\Gamma$ ha al più 2^n mondi.

6.4 Determinatezza di KD dai Frame seriali finiti

Per seguire lo stesso ragionamente della dimostrazione appena fatta, dobbiamo solo mostrare che se R è seriale allora R^σ lo è.

Nota:$R^\sigma \subseteq S^\Gamma \times S^\Gamma$
così definita:
$([\alpha],[\beta]) \in R^\sigma \iff \exists \delta \in [\alpha], \eta \in [\beta] \,:\, (\delta, \eta) \in R$

Sia $[\alpha] \in S^\Gamma$
Se R^{KD} è seriale allora $\forall \delta \in S^{KD} \exists \eta \in S^{KD} :\ (\delta, \eta) \in R^{KD}$
In particolare esisteδ appartiene alla classe di equivalenza $[\alpha]$ (di cui al limite potrebbe essere l'unico elemento con $\alpha = \delta$)
Dalla serialità abbiamo che esisteη appartiene alla classe di equivalenza $[\beta]$
Da cui $([\alpha],[\beta]) \in R^\sigma$

6.5 Determinatezza di K4 dai Frame transitivi finiti

L'aspetto interessante di questa dimostrazione sta nel fatto che non possiamo usare la relazione "classica" R^σ come Γ-filtrazione ma dobbiamo costruirne una ad hoc, dato che se R^{K4} è transitiva la sua filtrazione standard non è detto che lo sia
Definiamo quindi R^τcosì:
$([\alpha], [\beta]) \in R^\tau$ se se e solo se per ogni fbf b, $\Box b \in \Gamma$ e $M \models_\alpha \Box b$ implicano $M \models_\beta b \wedge \Box b$
dimostriamo che R^τ è una Γ-filtrazione transitiva

R^τè una Γ-filtrazione

F2) $([\alpha], [\beta]) \in R^\tau$ se e solo se$M \models_\alpha \Box b$ implicano $M \models_\beta b \wedge \Box b$ da cui: $\{b \mid \Box b \in \alpha\} \subseteq \beta$ e quindi $\alpha, \beta \in R^{K4}$
F1) $(\alpha, \beta) \in R^{K4}$per ogni $\Box b \in \Gamma$, se $M \models_\alpha \Box b$ allora anche (schema 4) $M \models_\alpha \Box\Box b$
dato che $(\alpha, \beta) \in R^{K4}$, anche:
$M \models_\beta b$ e $M \models_\beta \Box b$ e quindi:
$M \models_\beta b \wedge \Box b$

R^τ è transitiva

Sia $([\alpha], [\beta]) \in R^\tau$, $([\beta], [\gamma]) \in R^\tau$ ora la prima implica che per ogni fbf b, da $\Box b \in \Gamma$ e $M \models_\alpha \Box b$ segua $M \models_\beta \Box b \wedge b$, e da questa essendo $([\alpha], [\beta]) \in R^\tau$, segue anche $M \models_\gamma \Box b \wedge b$, cioè $([\beta], [\gamma]) \in R^\tau$