

# Contents

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>2</b>
1.1	Intro . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Introduction</b>	<b>3</b>
2.1	Formule di Logica modale e significato . . . . .	3
2.1.1	Relazione seriale . . . . .	3
2.1.2	Relazione simmetrica . . . . .	4
2.1.3	Funzione parziale . . . . .	5
2.1.4	Funzione totale . . . . .	5
2.1.5	Relazione euclidea . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Semantica</b>	<b>7</b>
3.1	Simboli secessari . . . . .	7
3.2	Logiche . . . . .	7
<b>4</b>	<b>Verso la decidibilità - Logica determinata</b>	<b>9</b>
4.1	Insieme $\Lambda$ consistente e sue proprietà . . . . .	9

# Chapter 1

## Introduzione

### 1.1 Intro

Se voi signorine finirete questo corso, e se sopravviverete sarete dispensatori di fbf e pregherete per modellizzare sistemi assurdi in modo ancora più assurdo, ma fino a quel giorno non siete altro che buoni annulla convinti che tutti i cretesi sono stupidi e forse mentono.

Lasciate il formaggio fuori dall'aula.

## Chapter 2

# Introduction

$a$  è vera nel mondo  $\alpha$ , e scriviamo  $\mu \models_{\alpha} a$   
se

- $a$  è una lettera enunciativa allora deve valere  $a \in V(\alpha)$
- $a$  è del tipo:  $a \vee b \dots$  allora....  $\mu \models_{\alpha} a$  oppure  $\mu \models_{\alpha} b$

## 2.1 Formule di Logica modale e significato

### 2.1.1 Relazione seriale

Ip) Frame F con relazione R seriale

Ts)  $\Box a \implies \Diamond a$

Dimostrazione:

Se non vale:  $\mu \models_{\alpha} \Box a$  allora immediatamente si ha la tesi in quanto l'antecedente è falso.

Se invece:  $\mu \models_{\alpha} \Box a$  allora

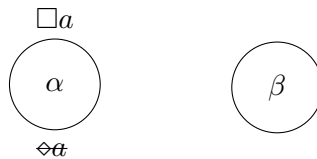
$\forall \beta : \alpha R \beta \implies \mu \models_{\beta} a$  per definizione di box,

inoltre dato che R seriale per Ip si ha anche che  $\exists \beta : (\alpha, \beta) \in R$

da cui:  $\mu \models_{\alpha} \Diamond a$  per definizione di diamond (esiste  $\beta$  in relazione con  $\alpha$  per la serialità e in  $\alpha$  vale  $a$  dato che  $\mu \models_{\alpha} \Box a$  )

Ip)  $\Box a \implies \Diamond a$

Ts) Frame F con relazione R seriale



Per assurdo:

Suppongo di trovarmi in un mondo come quello in figura (wow) in cui  $\mu \models_{\alpha} \Box a$ , e suppongo che la relazione R del frame NON sia seriale cioè  $\sim \exists \beta : (\alpha R \beta)$ , se è così vale sicuramente  $\mu \models_{\alpha} \Box a$  (dato che  $\alpha$  non ha successori), d'altra parte per come è il mondo considerato, cioè si nega la tesi, assurdo.

### 2.1.2 Relazione simmetrica

Ip) R simmetrica

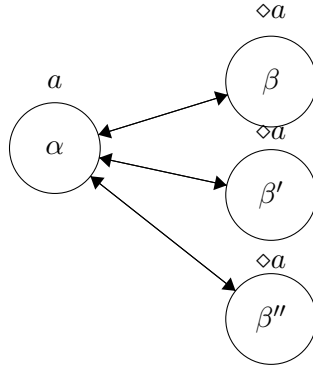
Ts)  $a \implies \Box \Diamond a$

Suppongo che  $\mu \models_{\alpha} a$  (se no avrei già la tesi), due casi:

**Caso 1:** Da  $\alpha$  non parte nessun arco, allora sicuramente  $\mu \models_{\alpha} \Box x$  con  $x$  qualsiasi e in particolare  $\mu \models_{\alpha} \Box \Diamond a$



**Caso 2:** Esiste almeno un  $\beta$  tale che  $\alpha R \beta$ .



Dato che la relazione è simmetrica se  $\alpha R \beta$  allora  $\beta R \alpha$ . Dato che  $\mu \models_{\alpha} a$ , in ognuno di questi  $\beta, \beta', \beta''$  ecc. vale  $\Diamond a$  perché ognuno di loro è in relazione con  $\alpha$ .

Allora per ognuno di questi  $\beta$  si ha  $\mu \models_{\beta} \Diamond a$ , (esiste infatti un mondo,  $\alpha$ , in cui vale  $a$ ) da cui:  $\mu \models_{\alpha} \Box \Diamond a$

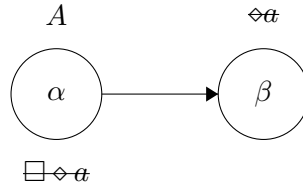
Ip)  $a \implies \Box \Diamond a$

Ts) R simmetrica

Per assurdo:

suppongo R non sia simmetrica e considero un frame con soli  $\alpha$  e  $\beta$  e in cui  $R = \{(\alpha, \beta)\}$ . In questo frame considero un modello con funzione di verità tale che:  $V(A) = \{\alpha\}$ .

In  $\beta$  non vale  $\Diamond a$  perché  $\beta$  non è in relazione con nessun mondo, per questo:  $\mu \not\models_{\alpha} \Box \Diamond a$



### 2.1.3 Funzione parziale

$\Diamond a \Rightarrow \Box a$	funzione parziale	$\forall \alpha : \alpha R \beta, \beta R \gamma \Rightarrow \beta = \gamma$
---------------------------------	-------------------	------------------------------------------------------------------------------

Funzione parziale, dimostrazione

.

Ip) funzione parziale

Ts)  $\Diamond a \Rightarrow \Box a$

.

$\Diamond a$  falsa allora dato che l'antecedente è falso si ha  $\Diamond a \Rightarrow \Box a$

$\Diamond a$  vera allora  $\exists \beta : \alpha R \beta$  e  $\beta \in V(\beta)$ , ma dato che la funzione è parziale questo  $\beta$  è unico !

da cui  $\mu \models \Diamond a \Rightarrow \Box a$

.

.

Ip)  $\Diamond a \Rightarrow \Box a$

Ts) funzione parziale

.

.

Per assurdo: suppongo non che la funzione non sia parziale. Se è così  $\exists \alpha : \alpha R \beta, \alpha R \gamma$ , considero un modello in cui  $V(A) = \{\beta\}$ ,  $\Box A$  non vale in  $\alpha$  dato che  $A$  è falsa in  $\gamma$ , il che contraddice l'ipotesi (BAM!)

### 2.1.4 Funzione totale

$\Diamond a \iff \Box a$	funzione totale	$\forall \alpha \exists ! \beta : \alpha R \beta$
--------------------------	-----------------	---------------------------------------------------

non ci sono "conti" da fare,  $R$  è seriale sse  $R$  è seriale  $\Box a \implies \Diamond a$ , e se  $R$  è una funzione parziale  $\Diamond a \Rightarrow \Box a$

quindi dato che l'implica prevede un and di implica da una parte e dall'altra per definizione abbiamo la tesi

.

### 2.1.5 Relazione euclidea

$\Diamond a \Rightarrow \Box \Diamond a$	relazione euclidea	$\forall \alpha, \beta, \gamma : (\alpha R \beta, \alpha R \gamma) \Rightarrow \beta R \gamma$ da cui anche: $\beta R \beta, \gamma R \gamma, \gamma R \beta$
------------------------------------------	--------------------	---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Ip) relazione euclidea

Ts)  $\Diamond a \Rightarrow \Box \Diamond a$

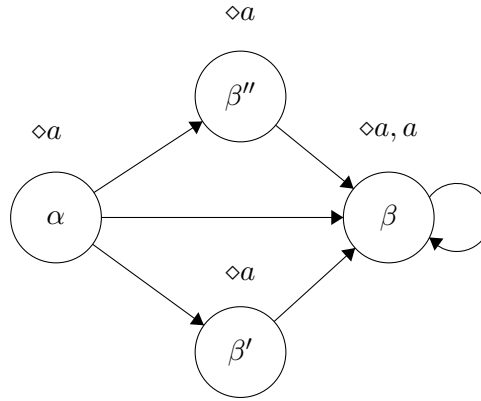
Suppongo sia vero l'antecedente (se falso ho finito), quindi vale:  $\Diamond a$  da cui:

$\mu \models \Diamond a$

dato che  $\Diamond a$  si ha che esiste almeno un  $\beta$  tale che in  $\beta$  vale  $a$

solo un  $\beta$ : autoanello perché euclidea e quindi  $\Box \Diamond a$

diversi  $\beta$ : ognuno dei vari  $\beta', \beta'', \dots$  sono in relazione con  $\beta$ , dato che la relazione è euclidea, pertanto dato che in  $\beta$  vale  $a$ , in ognuno di loro vale  $\Diamond a$



Ip)  $\Diamond a \Rightarrow \Box \Diamond a$

Ts) relazione euclidea

Per assurdo, suppondo valga ip) ma non la tesi

Considero un Frame in cui:  $\alpha R \beta, \alpha R \gamma, \beta R \gamma$  ma NON  $\beta R \beta$  cioè si ha un frammento in cui non vale l'euclidea. Poniamo che il modello sia tale che  $V(A) = \{\gamma\}$

In queste ipotesi vale  $\Diamond a$  dato che in  $\gamma$  vale  $a$ . In  $\beta$  non vale  $a$  e neppure  $\Diamond a$  perché non ha "uscite", da cui in  $a$  non vale  $\Box \Diamond a$  contraddicendo così l'ipotesi (BAM!)

## Chapter 3

# Semantica

### 3.1 Simboli secessari

$a \vdash b$  cioè  $a$  è conseguenza semantica di  $b$ , se in ogni Frame, Modello e Mondo in cui  $\mu \models b$  si ha anche  $\mu \models a$

$$\Diamond a \equiv \sim \Box \sim a$$

Vale da sinistra a destra,

Infatti:

se  $\mu \models_{\alpha} \Diamond a$  allora

$\exists \beta : \alpha R \beta$  e  $\mu \models_{\beta} a$  da cui:

$$\mu \not\models_{\beta} \sim a$$

per questo in  $\alpha$  non vale  $\Box \sim a$  (perché non vale  $\sim a$  in  $\beta$ )

allora in  $\alpha$  vale  $\sim \Box \sim a$  cioè  $\mu \models_{\alpha} \sim \Box \sim a$  cioè la tesi.

Vale anche da destra a sinistra, dimostrazione simile.

### 3.2 Logiche

Una logica  $\Lambda$  su  $L$  è un insieme di fbf su  $L$  che:

- contiene tutte le tautologie
- è chiusa rispetto al Modus Ponens

Ad esempio;  $PL(\phi)$  cioè i teoremi della logica proposizionale

Altro esempio  $\Lambda_C = \{a \mid F \models a \text{ per ogni } F \in C\}$

infatti:

- contiene tutte le tautologie perché sono vere mondo per mondo dappertutto
- MP : suppongo che in un mondo  $\alpha$  accada che:  $\mu \not\models_{\alpha} b$ ,  $\mu \models_{\alpha} a$ . Se vale anche  $\mu \models_{\alpha} a \Rightarrow b$  ... l'antecedente è vero, quindi dato che l'implicazione

è vera, deve essere vero anche il conseguente da cui non può che essere  $\mu \models_{\alpha} b$

Una logica si dice **uniforme** se è chiusa rispetto a sostituzioni uniformi cioè se sostituendo a una lettere uguali formule uguali in una tautologia, ottengo una tautologia.

Es.  $\Lambda_C = \{a \mid F \models a \text{ per ogni } F \in C\}$  NON è uniforme infatti se considero  $V(A) = S$ , dove S sono tutti gli stati possibili (mondi), vale anche  $\mu \models_{\alpha} A$ , e cioè A è una tautologia, se al posto di A sostituisco  $B \wedge \sim B$  (falsa in ogni modello e mondo) non ottengo una tautologia.

### **Teorema**

Sono equivalenti:

1.  $\Lambda$  è normale
2. per ogni intero  $n \geq 0$ ,  
 $\vdash_{\Lambda} a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_n \implies a$  implica  $\vdash_{\Lambda} \Box a_1 \wedge \Box a_2 \wedge \dots \wedge \Box a_n \implies \Box a$
3. valgono:
  - (a)  $\vdash_{\Lambda} \Box T$
  - (b)  $\vdash_{\Lambda} \Box a \wedge \Box b \implies \Box(a \wedge b)$
  - (c)  $\vdash_{\Lambda} a \implies b$  implica  $\vdash_{\Lambda} \Box a \implies \Box b$

Dimostrazione

$1 \implies 2$

per induzione.

se  $n = 0$  allora  $\vdash_{\Lambda} a$  allora  $\vdash_{\Lambda} \Box a$  per la regola RN che vale in  $\Lambda$  per ipotesi

se  $n > 0$  (passo induttivo) suppongo valga l'antecedente, altrimenti 2 vale senz'altro;

Ricordiamo che  $a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_n \implies a \equiv a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_{n-1} \implies (a_n \implies a)$



## Chapter 4

# Verso la decidibilità - Logica determinata

### 4.1 Insieme $\Lambda$ consistente e sue proprietà

$\Gamma$  si dice  $\Lambda$ -consistente se:  $\Gamma \not\vdash_{\Lambda} \perp$ , dove  $\perp = A \wedge \sim A$

$\Delta$  si dice  $\Lambda$ -consistente massimale se per ogni fbf  $a$   $a \in \Delta$  oppure  $\sim a \in \Delta$

**Proprietà:**

1. Se  $\Gamma \vdash_{\Lambda} a$  e  $\Gamma \subseteq \Delta$  allora  $\Delta \vdash_{\Lambda} a$ . Ovvero se alcune premesse non mi servono posso comunque metterle per dedurre una formula
2. Se  $\Gamma \vdash_{\Lambda} a$  e  $\Lambda \subseteq \Lambda'$  allora  $\Gamma \vdash_{\Lambda'} a$ . Ovvero quello che posso dedurre in una logica più scarna (es. PL) lo posso dedurre anche in una più ricca che la contien (es. Modale)
3. se  $a \in \Gamma$  allora  $\Gamma \vdash_{\Lambda} a$ .  
Infatti  $\vdash_{\Lambda} a \implies a$  è un teorema dato che  $a \implies a$  è una tautologia
4.  $\{a | \Gamma \vdash_{\Lambda} a\}$  è la minima logica che contiene  $\Gamma \cup \Lambda$ . Infatti posso dedurre tutte le tautologie da  $\Gamma$ , anche se non userò nessuna formula di  $\Gamma$  ma solo quelle che già sono nella logica  $\Lambda$
5. Se  $\Gamma \vdash_{\Lambda} a$  e  $\{a\} \vdash_{\Lambda} b$  allora  $\Gamma \vdash_{\Lambda} b$   
Infatti: per dedurre  $a$  uso regole di inferenza, formule di  $\Gamma$ , assiomi di  $\Lambda$  per arrivare in  $b$  uso assiomi di  $\Lambda$
6. fgdfg