# Contents

# Chapter 1

# Introduzione

## 1.1 Intro

Se voi signorine finirete questo corso, e se sopravviverete sarete dispensatori di fbf e pregherete per modellizzare sistemi assurdi in modo ancora più assurdo, ma fino a quel giorno non siete altro che buoni annulla convinti che tutti i cretesi sono stupidi e forse mentono.

Lasciate il formaggio fuori dall'aula.

# Chapter 2

# Introduction

$a$ è vera nel mondo $\alpha$, e scriviamo $\mu \models_\alpha a$

se

- $a$ è una lettera enunciativa allora deve valere $a \in V(\alpha)$
- $a$ è del tipo: $a \vee b$ .... allora.... $\mu \models_\alpha a$ oppure $\mu \models_\alpha b$

## 2.1 Formule Valide in ogni frame

Le seguenti formule sono valide in ogni frame F
$\Box\top$ con $\top \equiv a \vee \neg a$ /
infatti $\top$è valida in ogni modello di ogni frame F, banalmente è valida $\Box\top$
$\Box(a \implies b) \implies (\Box a \implies \Box b)$
infatti:
Se $M \not\models_\alpha \Box(a \implies b)$ la formula è vera
Se $M \models_\alpha \Box(a \implies b)$ allora:

- Se $M \not\models_\alpha \Box a$ allora $M \models_\alpha \Box a \implies \Box b$ è vera e la formula iniziale è vera
- se $M \models_\alpha \Box a$ allora $\forall\beta : (\alpha, \beta) \in R$ $M \models_\beta a \implies b$, $M \models_\beta a$, $M \models_\beta b$

Esistono relazioni che non solo valide in ogni frame:

$\Box a \implies \diamond a$

Non è valida in ogni frame, infatti $\Box a$ implica che in tutti gli stati raggiungibili (ma potrebbero anche non esserci stati) da $\alpha$, a è vera. Mentre $\diamond a$ implica che esiste almeno uno stato raggiungibile da $\alpha$ in cui a è vero.

Tutte le tautologie sono valide in ogni frame

## 2.2 Formule di Logica modale e significato

### 2.2.1 Relazione seriale

Ip) Frame F con relazione R seriale

Ts) $\Box a \implies \Diamond a$

Dimostrazione:

Se non vale: $\mu \models_\alpha \Box a$ allora immediatamente si ha la tesi in quanto l'antecedente è falso.

Se invce: $\mu \models_\alpha \Box a$ allora

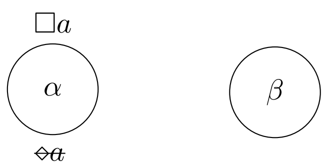
$\forall \beta : \alpha R \beta \implies \mu \models_\beta a$ per definizione di box,

inoltre dato che R seriale per Ip si ha anche che $\exists \beta : (\alpha, \beta) \in R$

da cui: $\mu \models_\alpha \Diamond a$ per definizione di diamond (esiste $\beta$ in relazione con $\alpha$ per la serialità e in $\alpha$ vale $a$ dato che $\mu \models_\alpha \Box a$ )

Ip) $\Box a \implies \Diamond a$

Ts) Frame F con relazione R seriale




Per assurdo:

Suppongo di trovarmi in un mondo come quello in figura (wow) in cui $\mu \models_\alpha \Box a$ , e suppongo che la relazione R del frame NON sia seriale cioè $\neg\exists\beta : (\alpha R \beta)$, se è così vale sicuramente $\mu \models_a \Box a$ (dato che $\alpha$ non ha successori) , d'altra parte per come è il mondo considerato, cioè si nega la tesi, assurdo.

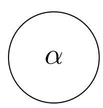
### 2.2.2 Relazione simmetrica

Ip) R simmetrica

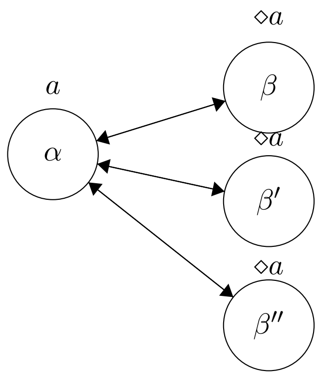
Ts) $a \implies \Box \Diamond a$

Suppongo che $\mu \models_\alpha a$ (se no avrei già la tesi), due casi:

**Caso 1**: Da $\alpha$ non parte nessun arco, allora sicuramente $\mu \models_\alpha \Box x$ con $x$ qualsiasi e in particolare $\mu \models_\alpha \Box \Diamond a$




**Caso 2**: Esiste almeno un $\beta$ tale che $\alpha R \beta$.




Dato che la relazione è simmetrica se $\alpha R\beta$ allora $\beta R\alpha$. Dato che $\mu \models_{\alpha} a$, in ognuno di questi $\beta$, $\beta'$,$\beta''$ ecc. vale $\diamond a$ perché ognuno di loro è in relazione con $\alpha$.

Allora per ognuno di questi $\beta$ si ha $\mu \models_{\beta} \diamond a$, (esiste infatti un mondo, $\alpha$, in cui vale $a$) da cui: $\mu \models_{\alpha} \Box \diamond a$

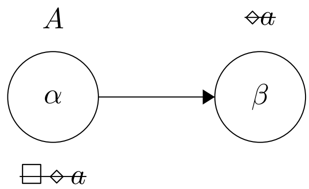
Ip) $a \implies \Box \diamond a$

Ts) R simmetrica

Per assurdo:

suppongo R non sia simmetrica e considero un frame con soli $\alpha$ e $\beta$ e in cui $R = \{(\alpha, \beta)\}$ . In questo frame considero un modello con funzione di verità tale che: $V(A) = \{\alpha\}$.

In $\beta$ non vale $\diamond a$ perché $\beta$ non è in relazione con nessun mondo, per questo: $\mu \not\models_{\alpha} \Box\diamond a$




### 2.2.3 Funzione parziale

| | | |
|---|---|---|
| $\diamond a \implies \Box a$ | funzione parziale | $\forall \alpha : \alpha R\beta,\ \beta R\gamma \implies \beta = \gamma$ |

Funzione parziale, dimostrazione

Ip) funzione parziale

Ts) $\diamond a \implies \Box a$

$\diamond a$ falsa allora dato che l'antecedente è falso di ha $\diamond a \implies \Box a$

$\diamond a$ vera allora $\exists \beta$:$\alpha R\beta$ e$\in V(\beta)$, ma dato che la funzione è parziale questo $\beta$ è unico !

da cui $\mu \models \diamond a \implies \Box a$

Ip) $\diamond a \implies \Box a$
Ts) funzione parziale

Per assurdo: suppongo non che la funzione non sia parziale. Se è così $\exists \alpha : \alpha R \beta,\ \alpha R \gamma$, considero un modello in cui V(A) = $\{\beta\ \}$ , $\Box A$ non vale in $\alpha$ dato che A è falsa in $\gamma$, il che contraddice l'ipotesi (BAM!)

### 2.2.4 Funzione totale

| | | |
|---|---|---|
| $\diamond a \iff \Box a$ | funzione totale | $\forall \alpha \exists !\, \beta :\ \alpha R \beta$ |

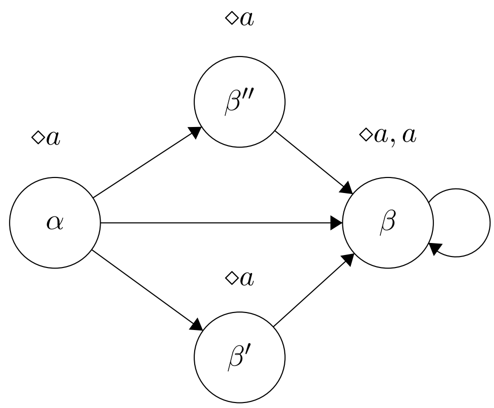
non ci sono "conti" da fare, R è seriale sse R è seriale $\Box a \implies \diamond a$ , e se R è una funzione parziale $\diamond a \implies \Box a$

quindi dato che l'implica prevede un and di implica da una parte e dall'altra per definizione abbiamo la tesi

### 2.2.5 Relazione euclidea

| | | |
|---|---|---|
| $\diamond a \implies \Box \diamond a$ | relazione euclidea | $\forall \alpha, \beta, \gamma :\ (\alpha R \beta,\ \alpha R \gamma) \implies \beta R \gamma$ da cui anche: $\beta$R$\beta$, $\gamma R \gamma$, $\gamma$R$\beta$ |

Ip) relazione euclidea
Ts) $\diamond a \implies \Box \diamond a$
Suppongo sia vero l'antecedente (se falso ho finito), quindi vale: $\diamond a$ da cui: $\mu \models \diamond a$
dato che $\diamond a$ si ha che esiste almeno un $\beta$ tale che in beta vale a
solo un beta: autoanello perché euclidea e quindi $\Box \diamond a$
diversi beta: ognuno dei vari $\beta'$, $\beta''$ , ecc. sono in relazione con $\beta$, dato che la relazione è euclidea, pertanto dato che in $\beta$ vale $a$, in ognuno di loro vale $\diamond a$



Ip)$\diamond a \implies \Box \diamond a$

Ts) relazione euclidea

Per assurdo, suppondo valga ip) ma non la tesi

Considero un Frame in cui: $\alpha R\beta$, $\alpha R\gamma$, $\beta R\gamma$ ma NON $\beta R\gamma$ cioè si ha un frammento in cui non vale l'euclidea. Poniamo che il modello sia tale che $V(A)= \{\gamma\}$

In queste ipotesi vale $\diamond a$ dato che in $\gamma$ vale $a$. In $\beta$ non vale $a$ e neppure $\diamond a$ perché non ha "uscite", da cui in $a$ non vale $\Box \diamond a$ contraddicendo così l'ipotesi (BAM!)

# Chapter 3

# Semantica

## 3.1 Simboli secessari

$a \vdash b$ cioè a è conseguenza semantica di b, se in ogni Frame, Modello e Mondo in cui $\mu \models b$ si ha anche $\mu \models a$

$\diamond a \equiv \neg\Box\neg a$
Vale da sinistra a destra,
Infatti:
se $\mu \models_{\alpha} \diamond a$ allora
$\exists \beta : \alpha R \beta$ e $\mu \models_{\beta} a$ da cui:
$\mu \not\models_{\beta} \neg a$
per questo in $\alpha$ non vale $\Box\neg a$ (perché non vale $\neg a$ in $\beta$)
allora in $\alpha$ vale $\neg\Box\neg a$ cioè $\mu \models_{\alpha} \neg\Box\neg a$ cioè la tesi.

Vale anche da destra a sinistra, dimostrazione simile.

## 3.2 Logiche

Una logica $\Lambda$ su L è un insieme di fbf su L che:

- contiene tutte le tautologie
- è chiusa rispetto al Modus Ponens

Ad esempio; $PL(\phi)$ cioè i teoremi della logica proposizionale
Altro esempio $\Lambda_C = \{a \,|\, F \models a \, per \; ogni \; F \in C\}$
infatti:

- contiene tutte le tautologie perché sono vere mondo per mondo dappertutto

- MP : suppongo che in un mondo $\alpha$ accada che: $\mu \not\models_\alpha b$ , $\mu \models_\alpha a$ . Se vale anche $\mu \models_\alpha a \implies b$ ... l'antecedente è vero, quindi dato che l'implicazione è vera, deve essere vero anche il conseguente da cui non può che essere $\mu \models_\alpha b$

Una logica si dice **uniforme** se è chiusa rispetto a sostituzioni uniformi cioè se sostituendo a una lettere uguali formule uguali in una tautologia, ottengo una tautologia.

Es. $\Lambda_C = \{a \,|\, F \models a per\ ogni\ F \in C\}$ NON è uniforme infatti se considero $V(A) = S$, dove S sono tutti gli stati possibili (mondi), vale anche $\mu \models_\alpha A$, e cioè A è una tautologia, se al posto di A sostituisco $B \wedge \neg B$ (falsa in ogni modello e mondo) non ottengo una tautologia.

***Teorema***

Sono equivalenti:

1. $\Lambda$ è normale
2. per ogni intero n $\geq 0$,

   $\vdash_\Lambda a1 \wedge a2 \wedge ... \wedge an \implies a$ implica $\vdash_\Lambda \Box a1 \wedge \Box a2 \wedge ... \wedge \Box an \implies \Box a$
3. valgono:
   (a) $\vdash_\Lambda \Box T$
   (b) $\vdash_\Lambda \Box a \wedge \Box b \implies \Box(a \wedge b)$
   (c) $\vdash_\Lambda a \implies b$ implica $\vdash_\Lambda \Box a \implies \Box b$

Dimostrazione

1 $\implies$ 2

per induzione.

se n $= 0$ allora $\vdash_\Lambda a$ allora $\vdash_\Lambda \Box a$ per la regola RN che vale in $\Lambda$ per ipotesi

se n $> 0$ (passo induttivo) suppongo valga l'antecedente, altrimenti 2 vale senz'altro;

Ricordiamo che $a1 \wedge a2 \wedge ... \wedge an \implies a \equiv a1 \wedge a2 \wedge ...a_{n-1} \implies (an \implies a)$

# Chapter 4

# Verso la decidibilità - Logica determinata

## 4.1 Insieme $\Lambda$ consistente e sue proprietà

Sia $\Lambda$ una logica (cioè ha tutte le tautologie ed è chiusa rispetto al Modus Ponens)

$\Gamma$ si dice $\Lambda$-consistente se: $\Gamma \nvdash_\Lambda \bot$, dove $\bot = A \wedge \neg A$

$\Delta$ si dice $\Lambda$-consistente massimale se per ogni fbf $a$ $a \in \Delta$ oppure $\neg a \in \Delta$

**Proprietà:**

1. Se $\Gamma \vdash_\Lambda a$ e $\Gamma \subseteq \Delta$ allora $\Delta \vdash_\Lambda a$. Ovvero se alcune premesse non mi servono posso comunque metterle per dedurre una formula
2. Se $\Gamma \vdash_\Lambda a$ e $\Lambda \subseteq \Lambda'$ allora $\Gamma \vdash_{\Lambda'} a$. Ovvero quello che posso dedurre in una logica più scarna (es. PL) lo posso dedurre anche in una più ricca che la contien (es. Modale)
3. se $a \in \Gamma$ allora $\Gamma \vdash_\Lambda a$ .
   Infatti $\vdash_\Lambda a \implies a$ è un teorema dato che $a \implies a$ è una tautologia
4. $\{a|\Gamma \vdash_\Lambda a\}$ è la minima logica che contiene $\Gamma \cup \Lambda$. Infatti posso dedurre tutte le tautologie da $\Gamma$, anche se non userò nessuna formula di $\Gamma$ ma solo quelle che già sono nella logica $\Lambda$
5. Se $\Gamma \vdash_\Lambda a$ e $\{a\}\vdash_\Lambda b$ allora $\Gamma \vdash_\Lambda b$
   Infatti: per dedurre $a$ uso regole di inferenza, formule di $\Gamma$, assiomi di $\Lambda$. Per arrivare in $b$ uso assiomi di $\Lambda$ e regole di inferenza, quindi posso arrivare da $\Gamma$ direttamente in $b$ usando formule di $\Gamma$, regole di inf. e assiomi di $\Lambda$
6. Se $\Gamma \vdash_\Lambda a$ e $\Gamma \vdash_\Lambda a \implies b$ allora $\Gamma \vdash_\Lambda b$, dato che $\Lambda$ è chiusa rispetto al MP
7. $\Gamma \cup \{a\} \vdash_\Lambda b$ se e solo se $\Gamma \vdash_\Lambda a \implies b$
   **Andata**: $\vdash_\Lambda a_1 \wedge ... \wedge a \wedge ... \wedge a_n \implies b$ (per definizione di teorema), si può portare

$a$ alla destra dell'implicazione $\vdash_\Lambda a_1 \wedge ... \wedge a_n \implies (a \implies b)$
**Ritorno**: $\vdash_\Lambda a_1 \wedge ... \wedge a_n \implies (a \implies b)$, basta portare $a$ tra le and.

8. $\Gamma \vdash_\Lambda a$ se e solo se $\Gamma \cup \{\neg a\}$ non è $\Lambda$-consistente

   **Andata**: $\Gamma \vdash_\Lambda a$, $\Gamma \vdash_\Lambda \neg a$, posso dedurre $\perp$ che è contro la definizione di $\Lambda$-consistenza
   **Ritorno**: Se$\Gamma \cup \{\neg a\}$ non è $\Lambda$-consistente, allora $\Gamma \cup \{\neg a\} \vdash_\Lambda \perp$ da cui per 7.
   $\Gamma \vdash_\Lambda \neg a \implies \perp$ (sposto $\neg a$ a destra e metto l'implica),
   Dato che $(\neg a \implies \perp) \implies a$ è una tatutologica, per MP ottengo
   $a$

9. $\Gamma$ è $\Lambda - consistente$ se e solo se $\exists \beta : \Gamma \nvdash_\Lambda \beta$
   **Andata**: Basta prendere $\neg a \wedge a$
   **Ritorno**: Se deducessi tutte le formule ($\neg \exists \beta : \Gamma \nvdash_\Lambda \beta$ significa $\forall \beta : \Gamma \vdash_\Lambda \beta$) , potrei dedurre anche $\perp$, da cui la non consistenza

10. $\Gamma$ è $\Lambda - consistente$ se per ogni $a$
    $\Gamma \cup \{a\}$ o $\Gamma \cup \{\neg a\}$ è $\Lambda - consistente$
    se $\Gamma \vdash_\Lambda a$ allora $\Gamma \cup \{\neg a\}$ non è consistente perché con $a$ e $\neg a$ posso dedurre $\perp$, ma $\Gamma \cup \{a\}$ lo è
    se $\Gamma \vdash_\Lambda \neg a$ allora $\Gamma \cup \{\neg a\}$ è consistente ma non $\Gamma \cup \{a\}$

11. $\perp \notin \Gamma$ se $\Gamma$ è $\Lambda - consistente$ (altrimenti potrei dedurlo per il 3.)

12. Se $\Delta$è $\Lambda - consistente\, massimale$ e $\Delta \vdash_\Lambda a$ allora $a \in \Delta$
    se $a \notin \Delta$ allora $\neg a \in \Delta$ (dato che $\Delta$è massimale)
    ma se $\Delta$ contiene $\neg a$ allora per il 2.)
    $\Delta \vdash_\Lambda \neg a$ , che insieme a $\Delta \vdash_\Lambda a$ mi da $\Delta \vdash_\Lambda \perp$

13. Se $\Delta$ è $\Lambda - consistente\, massimale$ e $a \in \Delta$. $a \implies b \in \Delta$ allora $b \in \Delta$.
    Lo si vede subito usando 2.) se tutti e tre, e poi 6.) (deduco $a$, $a \implies b$, allora deduco anche $b$)

## 4.2 Insieme $\Lambda$ consistente massimale

*Lemma di Lindelman - Esistenza dell'insieme $\Lambda - consistente\, massimale$ in una logica $\Lambda$ consistente*

Considero tutte le formule $b1$, $b2$, $b3, \ldots$ della logica $\Lambda$ (posso farlo perché sono un'infinità numerabile)

Chiamo $\Gamma_0$ un insieme che contiene una sola formula (ad esempio una tautologia)
Dopodichè iterativamente, per ogni formula mi chiedo

$$\Gamma_0 \vdash_\Lambda b1 \ ? \begin{cases} si: & \Gamma_1 = \Gamma_0 \cup b1 \\ no: & \Gamma_1 = \Gamma_0 \cup \neg b1 \end{cases}$$

$$\Gamma_1 \vdash_\Lambda b2 \ ? \begin{cases} si: & \Gamma_2 = \Gamma_1 \cup b2 \\ no: & \Gamma_2 = \Gamma_1 \cup \neg b2 \end{cases}$$

$\Delta = \bigcup_{n \geq 0} \Gamma_i$ (nota, questa unione è infinita)

$\Delta$ è consistente massimale infatti:

1. Massimale in quanto contiene $a$ oppure $\neg a$ per costruzione
2. Consistente. Per assurdo se non lo fosse avrei: $\Delta \vdash_\Lambda \perp$
   cioè esiste un numero finito di formule di $\Delta$ da cui deduco il falso,
   dato che è un numero finito di formule, sta in $\Gamma_i$ , cioè esiste un $\Gamma_i$ non consistente,
   assurdo perché lo sono tutti per costruzione $\lightning$

*Nota:*

- Non sappiamo costruire $\Delta$ perché nasce da unione infinita
- Non è unico, infatti se considero formule in ordine diverse potrei "dire" si o no in modo diverso
  es. $a,\ a \implies b,\ b$ (allora $\Delta$ contiene $b$)
  es. $b,\ c$ (allora $\Delta$ contiene $\neg b$)

### 4.2.1 Teorema

$\Gamma \vdash_\Lambda a$ se e solo se $a \in$ a tutti i quei $\Delta$ $\Lambda - \textit{consistenti massimali}$ tali che: $\Gamma \subseteq \Delta$

**Andata:**
$\Gamma \vdash_\Lambda a$, anche $\Delta \vdash_\Lambda a$ per la 1.)
**Ritorno:**
Per assurdo, se $\Gamma \nvdash_\Lambda a$ allora $\Gamma \cup \{\neg a\}$ è $\Lambda - \textit{consistente}$ (per la 8.)
da cui per Lindellman esiste $\Delta'$ che contiene $\Gamma \cup \{\neg a\}$ consistente massimale
data la consistenza $\Delta'$ non contiene $a$, il che è contro l'ipotesi $\lightning$