Contents

Chapter 1

Introduzione

1.1 Intro

Se voi signorine finirete questo corso, e se sopravviverete sarete dispensatori di fbf e pregherete per modellizzare sistemi assurdi in modo ancora più assurdo, ma fino a quel giorno non siete altro che buoni annulla convinti che tutti i cretesi sono stupidi e forse mentono.
Lasciate il formaggio fuori dall'aula.

Chapter 2

Introduction

a è vera nel mondo α, e scriviamo $\mu \models_\alpha a$
se

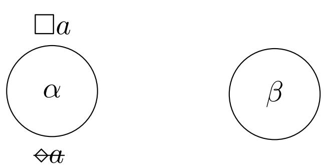
- a è una lettera enunciativa allora deve valere $a \in V(\alpha)$
- a è del tipo: $a \vee b$ .... allora.... $\mu \models_\alpha a$ oppure $\mu \models_\alpha b$

2.1 Formule di Logica modale e significato

2.1.1 Relazione seriale

Ip) Frame F con relazione R seriale
Ts) $\Box a \implies \Diamond a$
Dimostrazione:
Se non vale: $\mu \models_\alpha \Box a$ allora immediatemente si ha la tesi in quanto l'antecedente è falso.
Se invce: $\mu \models_\alpha \Box a$ allora
$\forall \beta \, : \, \alpha R \beta \implies \mu \models_\beta a$ per definizione di box,
inoltre dato che R seriale per Ip si ha anche che $\exists \beta : \, (\alpha, \beta) \in R$
da cui: $\mu \models_\alpha \Diamond a$ per definizione di diamond (esiste β in relazione con α per la serialità e in α vale a dato che $\mu \models_\alpha \Box a$)

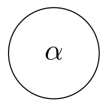
Ip) $\Box a \implies \Diamond a$
Ts) Frame F con relazione R seriale



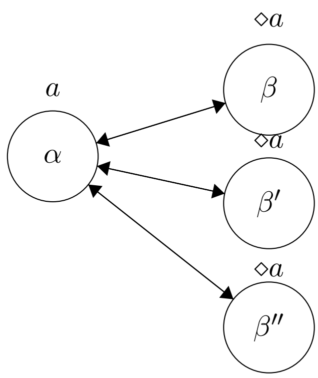
Per assurdo:
Suppongo di trovarmi in un mondo come quello in figura (wow) in cui $\mu \models_\alpha \Box a$, e suppongo che la relazione R del frame NON sia seriale cioè $\sim \exists \beta : (\alpha R \beta)$, se è così vale sicuramente $\mu \models_a \Box a$ (dato che α non ha successori) , d'altra parte per come è il mondo considerato, cioè si nega la tesi, assurdo.

2.1.2 Relazione simmetrica

Ip) R simmetrica
Ts) $a \implies \Box \diamond a$
Suppongo che $\mu \models_\alpha a$ (se no avrei già la tesi), due casi:
Caso 1: Da α non parte nessun arco, allora sicuramente $\mu \models_\alpha \Box x$ con x qualsiasi e in particolare $\mu \models_\alpha \Box \diamond a$

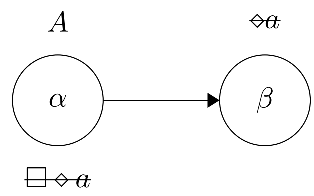


Caso 2: Esiste almeno un β tale che $\alpha R \beta$.



Dato che la relazione è simmetrica se $\alpha R \beta$ allora $\beta R \alpha$. Dato che $\mu \models_\alpha a$, in ognuno di questi β, β',β'' ecc. vale $\diamond a$ perché ognuno di loro è in relazione con α.
Allora per ognuno di questi β si ha $\mu \models_\beta \diamond a$, (esiste infatti un mondo, α, in cui vale a) da cui: $\mu \models_\alpha \Box \diamond a$

Ip) $a \implies \Box \diamond a$
Ts) R simmetrica
Per assurdo:
suppongo R non sia simmetrica e considero un frame con soli α e β e in cui $R = \{(\alpha, \beta)\}$. In questo frame considero un modello con funzione di verità tale che: $V(A) = \{\alpha\}$.
In β non vale $\diamond a$ perché β non è in relazione con nessun mondo, per questo: $\mu \not\models_\alpha \Box \diamond a$



2.1.3 Funzione parziale

$\diamond a \implies \Box a$	funzione parziale	$\forall \alpha : \alpha R \beta,\ \beta R \gamma \implies \beta = \gamma$

Funzione parziale, dimostrazione

.

Ip) funzione parziale

Ts) $\diamond a \implies \Box a$

.

$\diamond a$ falsa allora dato che l'antecedente è falso di ha $\diamond a \implies \Box a$

$\diamond a$ vera allora $\exists \beta$:$\alpha R \beta$ e$\in V(\beta)$, ma dato che la funzione è parziale questo β è unico !

da cui $\mu \models \diamond a \implies \Box a$

.

.

Ip) $\diamond a \implies \Box a$

Ts) funzione parziale

.

.

Per assurdo: suppongo non che la funzione non sia parziale. Se è così $\exists \alpha : \alpha R \beta,\ \alpha R \gamma$, considero un modello in cui V(A) = $\{\beta\ \}$, $\Box A$ non vale in α dato che A è falsa in γ, il che contraddice l'ipotesi (BAM!)

2.1.4 Funzione totale

$\diamond a \iff \Box a$	funzione totale	$\forall \alpha \exists !\, \beta : \alpha R \beta$

non ci sono "conti" da fare, R è seriale sse R è seriale $\Box a \implies \diamond a$, e se R è una funzione parziale $\diamond a \implies \Box a$

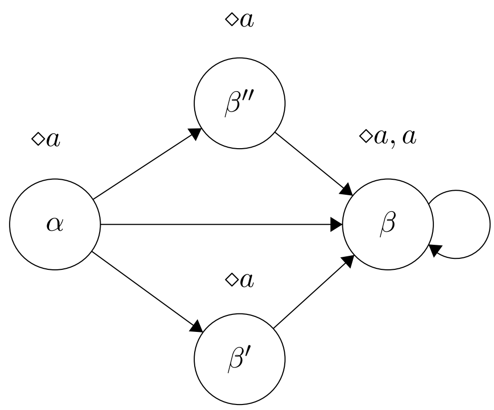
quindi dato che l'implica prevede un and di implica da una parte e dall'altra per definizione abbiamo la tesi

.

2.1.5 Relazione euclidea

$\diamond a \implies \Box \diamond a$	relazione euclidea	$\forall \alpha, \beta, \gamma :\ (\alpha R \beta,\ \alpha R \gamma) \implies \beta R \gamma$ da cui anche: βRβ, $\gamma R \gamma$, γRβ

Ip) relazione euclidea
Ts) $\diamond a \implies \Box \diamond a$
Suppongo sia vero l'antecedente (se falso ho finito), quindi vale: $\diamond a$ da cui: $\mu \models \diamond a$
dato che $\diamond a$ si ha che esiste almeno un β tale che in beta vale a
solo un beta: autoanello perché euclidea e quindi $\Box \diamond a$
diversi beta: ognuno dei vari β', β'' , ecc. sono in relazione con β, dato che la relazione è euclidea, pertanto dato che in β vale a, in ognuno di loro vale $\diamond a$



Ip)$\diamond a \implies \Box \diamond a$
Ts) relazione euclidea
Per assurdo, suppondo valga ip) ma non la tesi
Considero un Frame in cui: $\alpha R \beta$, $\alpha R \gamma$, $\beta R \gamma$ ma NON $\beta R \gamma$ cioè si ha un frammento in cui non vale l'euclidea. Poniamo che il modello sia tale che $V(A)$= $\{\gamma\}$
In queste ipotesi vale $\diamond a$ dato che in γ vale a. In β non vale a e neppure $\diamond a$ perché non ha "uscite", da cui in a non vale $\Box \diamond a$ contraddicendo così l'ipotesi (BAM!)

Chapter 3

Semantica

3.1 Simboli secessari

$a \vdash b$ cioè a è conseguenza semantica di b, se in ogni Frame, Modello e Mondo in cui $\mu \models b$ si ha anche $\mu \models a$

$\diamond a \equiv \neg \Box \neg a$
Vale da sinistra a destra,
Infatti:
se $\mu \models_\alpha \diamond a$ allora
$\exists \beta : \alpha R \beta$ e $\mu \models_\beta a$ da cui:
$\mu \not\models_\beta \neg a$
per questo in α non vale $\Box \neg a$ (perché non vale $\neg a$ in β)
allora in α vale $\neg \Box \neg a$ cioè $\mu \models_\alpha \neg \Box \neg a$ cioè la tesi.

Vale anche da destra a sinistra, dimostrazione simile.

3.2 Logiche

Una logica Λ su L è un insieme di fbf su L che:

- contiene tutte le tautologie
- è chiusa rispetto al Modus Ponens

Ad esempio; $PL(\phi)$ cioè i teoremi della logica proposizionale
Altro esempio $\Lambda_C = \{a \,|\, F \models a \; per \; ogni \; F \in C\}$
infatti:

- contiene tutte le tautologie perché sono vere mondo per mondo dappertutto

- MP : suppongo che in un mondo α accada che: $\mu \not\models_\alpha b$, $\mu \models_\alpha a$. Se vale anche $\mu \models_\alpha a \implies b$ ... l'antecedente è vero, quindi dato che l'implicazione è vera, deve essere vero anche il conseguente da cui non può che essere $\mu \models_\alpha b$

Una logica si dice **uniforme** se è chiusa rispetto a sostituzioni uniformi cioè se sostituendo a una lettere uguali formule uguali in una tautologia, ottengo una tautologia.
Es. $\Lambda_C = \{a \,|\, F \models a \, per \ ogni \ F \in C\}$ NON è uniforme infatti se considero $V(A) = S$, dove S sono tutti gli stati possibili (mondi), vale anche $\mu \models_\alpha A$, e cioè A è una tautologia, se al posto di A sostituisco $B \wedge \neg B$ (falsa in ogni modello e mondo) non ottengo una tautologia.

Teorema

Sono equivalenti:

1. Λ è normale
2. per ogni intero n ≥ 0,
   $\vdash_\Lambda a1 \wedge a2 \wedge ... \wedge an \implies a$ implica $\vdash_\Lambda \Box a1 \wedge \Box a2 \wedge ... \wedge \Box an \implies \Box a$
3. valgono:
   (a) $\vdash_\Lambda \Box T$
   (b) $\vdash_\Lambda \Box a \wedge \Box b \implies \Box(a \wedge b)$
   (c) $\vdash_\Lambda a \implies b$ implica $\vdash_\Lambda \Box a \implies \Box b$

Dimostrazione
$1 \implies 2$
per induzione.
se n = 0 allora $\vdash_\Lambda a$ allora $\vdash_\Lambda \Box a$ per la regola RN che vale in Λ per ipotesi
se n > 0 (passo induttivo) suppongo valga l'antecedente, altrimenti 2 vale senz'altro;
Ricordiamo che $a1 \wedge a2 \wedge ... \wedge an \implies a \equiv a1 \wedge a2 \wedge ...a_{n-1} \implies (an \implies a)$

Chapter 4

Verso la decidibilità - Logica determinata

4.1 Insieme Λ consistente e sue proprietà

Sia Λ una logica (cioè ha tutte le tautologie ed è chiusa rispetto al Modus Ponens)
Γ si dice Λ-consistente se: $\Gamma \nvdash_\Lambda \perp$, dove $\perp = A \wedge \neg A$
Δ si dice Λ-consistente massimale se per ogni fbf a $a \in \Delta$ oppure $\neg a \in \Delta$

Proprietà:

1. Se $\Gamma \vdash_\Lambda a$ e $\Gamma \subseteq \Delta$ allora $\Delta \vdash_\Lambda a$. Ovvero se alcune premesse non mi servono posso comunque metterle per dedurre una formula
2. Se $\Gamma \vdash_\Lambda a$ e $\Lambda \subseteq \Lambda'$ allora $\Gamma \vdash_{\Lambda'} a$. Ovvero quello che posso dedurre in una logica più scarna (es. PL) lo posso dedurre anche in una più ricca che la contien (es. Modale)
3. se $a \in \Gamma$ allora $\Gamma \vdash_\Lambda a$.
   Infatti $\vdash_\Lambda a \implies a$ è un teorema dato che $a \implies a$ è una tautologia
4. $\{a|\Gamma \vdash_\Lambda a\}$ è la minima logica che contiene $\Gamma \cup \Lambda$. Infatti posso dedurre tutte le tautologie da Γ, anche se non userò nessuna formula di Γ ma solo quelle che già sono nella logica Λ
5. Se $\Gamma \vdash_\Lambda a$ e $\{a\}\vdash_\Lambda b$ allora $\Gamma \vdash_\Lambda b$
   Infatti: per dedurre a uso regole di inferenza, formule di Γ, assiomi di Λ. Per arrivare in b uso assiomi di Λ e regole di inferenza, quindi posso arrivare da Γ direttamente in b usando formule di Γ, regole di inf. e assiomi di Λ
6. Se $\Gamma \vdash_\Lambda a$ e $\Gamma \vdash_\Lambda a \implies b$ allora $\Gamma \vdash_\Lambda b$, dato che Λ è chiusa rispetto al MP
7. $\Gamma \cup \{a\} \vdash_\Lambda b$ se e solo se $\Gamma \vdash_\Lambda a \implies b$
   Andata: $\vdash_\Lambda a_1 \wedge ... \wedge a \wedge ... \wedge a_n \implies b$ (per definizione di teorema), si può portare

a alla destra dell'implicazione $\vdash_\Lambda a_1 \wedge ... \wedge a_n \implies (a \implies b)$
Ritorno: $\vdash_\Lambda a_1 \wedge ... \wedge a_n \implies (a \implies b)$, basta portare a tra le and.

8. $\Gamma \vdash_\Lambda a$ se e solo se $\Gamma \cup \{\neg a\}$ non è Λ-consistente

   Andata: $\Gamma \vdash_\Lambda a$, $\Gamma \vdash_\Lambda \neg a$, posso dedure $\perp$ che è contro la definizione di Λ-consistenza
   Ritorno: Se$\Gamma \cup \{\neg a\}$ non è Λ-consistente, allora $\Gamma \cup \{\neg a\} \vdash_\Lambda \perp$ da cui per 7.
   $\Gamma \vdash_\Lambda \neg a \implies \perp$ (sposto $\neg a$ a destra e metto l'implica),
   Dato che $(\neg a \implies \perp) \implies a$ è una tatutologica, per MP ottengo
   a

9. Γ è $\Lambda - \mathit{consistente}$ se e solo se $\exists \beta : \Gamma \nvdash_\Lambda \beta$
   Andata: Basta prendere $\neg a \wedge a$
   Ritorno: Se deducessi tutte le formule ($\neg\exists\beta : \Gamma \nvdash_\Lambda \beta$ significa $\forall\beta : \Gamma \vdash_\Lambda \beta$) , potrei dedurre anche $\perp$, da cui la non consistenza

10. Γ è $\Lambda - \mathit{consistente}$ se per ogni a
    $\Gamma \cup \{a\}$ o $\Gamma \cup \{\neg a\}$ è $\Lambda - \mathit{consistente}$
    se $\Gamma \vdash_\Lambda a$ allora $\Gamma \cup \{\neg a\}$ non è consistente perché con a e $\neg a$ posso dedurre $\perp$, ma $\Gamma \cup \{a\}$ lo è
    se $\Gamma \vdash_\Lambda \neg a$ allora $\Gamma \cup \{\neg a\}$ è consistente ma non $\Gamma \cup \{a\}$

11. $\perp \notin \Gamma$ se Γ è $\Lambda - \mathit{consistente}$ (altrimenti potrei dedurlo per il 3.)

12. Se Δè $\Lambda - \mathit{consistente\, massimale}$ e $\Delta \vdash_\Lambda a$ allora $a \in \Delta$
    se $a \notin \Delta$ allora $\neg a \in \Delta$ (dato che Δè massimale)
    ma se Δ contiene $\neg a$ allora per il 2.)
    $\Delta \vdash_\Lambda \neg a$, che insieme a $\Delta \vdash_\Lambda a$ mi da $\Delta \vdash_\Lambda \perp$

13. Se Δ è $\Lambda - \mathit{consistente\, massimale}$ e $a \in \Delta$. $a \implies b \in \Delta$ allora $b \in \Delta$.
    Lo si vede subito usando 2.) se tutti e tre, e poi 6.) (deduco a, $a \implies b$, allora deduco anche b)

4.2 Insieme Λ consistente massimale

Lemma di Lindelman - Esistenza dell'insieme $\Lambda - \mathit{consistente\, massimale}$ in una logica Λ consistente

Considero tutte le formule $b1$, $b2$, $b3, \ldots$ della logica Λ (posso farlo perché sono un'infinità numerabile)
Chiamo Γ_0 un insieme che contiene una sola formula (ad esempio una tautologia)
Dopodichè iterativamente, per ogni formula mi chiedo

$\Gamma_0 \vdash_\Lambda b1$? $\begin{cases} si: & \Gamma_1 = \Gamma_0 \cup b1 \\ no: & \Gamma_1 = \Gamma_0 \cup \neg b1 \end{cases}$

$\Gamma_1 \vdash_\Lambda b2$? $\begin{cases} si: & \Gamma_2 = \Gamma_1 \cup b2 \\ no: & \Gamma_2 = \Gamma_1 \cup \neg b2 \end{cases}$

$\Delta = \bigcup_{n \geq 0} \Gamma_i$ (nota, questa unione è infinita)

Δ è consistente massimale infatti:

1. Massimale in quanto contiene a oppure $\neg a$ per costruzione
2. Consistente. Per assurdo se non lo fosse avrei: $\Delta \vdash_\Lambda \bot$
   cioè esiste un numero finito di formule di Δ da cui deduco il falso,
   dato che è un numero finito di formule, sta in Γ_i , cioè esiste un Γ_i non consistente,
   assurdo perché lo sono tutti per costruzione $\lightning$

Nota:

- Non sappiamo costruire Δ perché nasce da unione infinita
- Non è unico, infatti se considero formule in ordine diverse potrei "dire" si o no in modo diverso
  es. $a,\ a \implies b,\ b$ (allora Δ contiene b)
  es. $b,\ c$ (allora Δ contiene $\neg b$)

4.2.1 Teorema

$\Gamma \vdash_\Lambda a$ se e solo se $a \in$ a tutti i quei Δ $\Lambda -$ *consistenti massimali* tali che: $\Gamma \subseteq \Delta$

Andata:
$\Gamma \vdash_\Lambda a$, anche $\Delta \vdash_\Lambda a$ per la 1.)
Ritorno:
Per assurdo, se $\Gamma \nvdash_\Lambda a$ allora $\Gamma \cup \{\neg a\}$ è $\Lambda -$ *consistente* (per la 8.)
da cui per Lindellman esiste Δ' che contiene $\Gamma \cup \{\neg a\}$ consistente massimale
data la consistenza Δ' non contiene a, il che è contro l'ipotesi $\lightning$

4.3 Lemma di Verità

Sia $M^\Lambda(S^\Lambda, R^\Lambda, V^\Lambda)$ il modello canonico di Λ
$M^\Lambda \models_\alpha a$ se e solo se $a \in \alpha$

Ip) $M^\Lambda \models_\alpha a$
TS) $a \in \alpha$

Dimostrazione per **induzione** sul numero n dei connettivi della formula a
$\boxed{\text{n=0}}$ cioè a è del tipo A (lettera enunciativa) da cui $M^\Lambda \models_\alpha a$ se e solo se $\alpha \in V^\Lambda(A)$ se e solo se $A \in \alpha$
$\boxed{\text{Ipotesi di Induzione}}$ a con n connettivi, può essere dei seguenti tipi:

1. $\neg b$
2. $b \implies c$
3. $\Box b$

Caso 1: $M^\Lambda \models_\alpha a$ se e solo se $M^\Lambda \models_\alpha \neg b$ se e solo se $M^\Lambda \not\models_\alpha b$

b ha $n-1$ connettivi (dato che b) ne ha n, quindi vale l'ipotesi di induzione da cui:
$b \notin \alpha$, d'altra parte α è $\Lambda - consistente\, massimale$ (per come è definito S^Λ) da cui:
$b \notin \alpha$ se e solo se $\neg b \in \alpha$ cioè se:
$a \in \alpha$
Caso2: $M^\Lambda \models_\alpha a$ se e solo se
Caso 21: $M^\Lambda \not\models_\alpha b$
Caso 22: $M^\Lambda \models_\alpha c$

Caso 21: $M^\Lambda \not\models_\alpha b$

Il numero di connettivi di b e di c sommati dà $n-1$
quindi per ipotesi induttiva $M^\Lambda \not\models_\alpha b$ se e solo se $b \notin \alpha$
se e solo se $\neg b \in \alpha$ (per la compattezza max di Λ) **(*)**
D'altra parte $\neg b \implies (b \implies c)$ è una tautologi della PL e quindi è un teorema di Λ (perché un logica contiene tutte le tautologie)
e quindi $\neg b \implies (b \implies c) \in \alpha$ **(**)**
da cui per MP con **(*)** e **(**)** si ha che $b \implies c$ appartiene ad α

Caso 22: $M^\Lambda \models_\alpha c$

Vale l'ipotesi di induzione da cui:
quindi per ipotesi induttiva $M^\Lambda \models_\alpha c$ se e solo se $c \in \alpha$ **(*)**
D'altra parte $c \implies (b \implies c)$ è una tautologi della PL e quindi è un teorema di Λ (perché un logica contiene tutte le tautologie)
e quindi $c \implies (b \implies c) \in \alpha$ **(**)**
MP **(*)** e **(**)** ci dà $b \implies c$ appartiene ad α

Caso 3: a è del tipo $\Box b$
Ip)$M^\Lambda \models_\alpha \Box b$
Ts)$\Box b \in \alpha$

Dall'ipotesi segue che $\forall \beta : (\alpha, \beta) \in R^\Lambda$ si ha: $M^\Lambda \models_\beta b$ (questo per la definizione di $\Box a$)

b ha $n-1$ connettivi quindi vale per lei l'ipotesi di induzione:
$b \in \beta$

$(\alpha, \beta) \in R^{\Lambda}$ se e solo se: $\{a \mid \Box a \in \alpha\} \subseteq \beta$
$\alpha \in V^{\Lambda}(A)$ se e solo se: $A \in \alpha$

Ognuno dei β con cui α è in relazione è $\Lambda - \mathit{consistente\,massimale}$ e ognuno contiene l'insieme $\{a \mid \Box a \in \alpha\}$
$\Gamma \vdash_{\Lambda} a$ se e solo se a appartiene a tutti i Δ_i $\Lambda - \mathit{consistente\,massimale}$ con $\Gamma \subseteq \Delta_i$
$\beta \vdash_{\Lambda} b$ se e solo se b appartiene a tutti i Δ_i $\Lambda - \mathit{consistente\,massimale}$ con $\beta \subseteq \Delta_i$
$\{a \mid \Box a \in \alpha\}$ è consistente massimale (davvero??) e quindi
$\{a \mid \Box a \in \alpha\} \vdash_{\Lambda} b$, per la 2. definizione equivalente di Logica Normale "aggiungo $\Box$ ad entrambi i lati" da cui:
$\{\Box a \mid \Box a \in \alpha\} \vdash_{\Lambda} b$
Ma $\{\Box a \mid \Box a \in \alpha\}$ è un sottoinsieme di formule di α quindi a maggior ragione ricavo b da tutto α da cui:
$\alpha \vdash_{\Lambda} b$
Ip) $\Box b \in \alpha$
TS) $M^{\Lambda} \models_{\alpha} \Box b$
Se $\Box b \in \alpha$ per definizione di R^{Λ} per ogni mondo β con $(\alpha, \beta) \in R^{\Lambda}$ si ha $b \in \beta$
Notiamo che b ha $n-1$ connettivi, quindi vale l'ipotesi di induzione e quindi:
$b \in \beta$ se e solo se $M^{\Lambda} \models_{\beta} b$
Dato che questo vale per ogni β in relazione con α, si ha: $M^{\Lambda} \models_{\alpha} \Box b$

4.4 Correttezza e completezza della logica K

Dimostriamo che la logica K (minima logica modale normale) è corretta e completa
Ip) $\Gamma \vdash_{\Lambda} a$
Ts)$F \models a$
Nella logica K, dato che è una logica, valgono A1, A2, A3