Метод парных расстояний в задаче оценивания параметров сферических поверхностей

Б.М. Суховилов

Выразим радиус аппроксимирующей сферы через линейные измерения парных расстояний между точками, расположенными на этой сферической поверхности.

Зафиксируем на участках сферической поверхности N точек так, чтобы, по крайней мере, четыре из них не лежали в одной плоскости. Пусть погрешность измерения парных расстояний между указанными точками и отклонения от формы сферы настолько малы, что ими можно пренебречь. Совместим центр сферической поверхности радиусом R с началом системы координат $XYZO$.

Расстояние S_{ij} между точками i и j с координатами x_i, y_i, z_i и x_j, y_j, z_j, расположенными на сферической поверхности, составит

$$S_{ij} = \sqrt{\left(x_i - x_j\right)^2 + \left(y_i - y_j\right)^2 + \left(z_i - z_j\right)^2}\,. \tag{1}$$

С учетом того, что $x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 = x_j^2 + y_j^2 + z_j^2 = R^2$, запишем (1) в виде

$$R^2 - \left(x_i x_j + y_i y_j + z_i z_j\right) = \frac{1}{2} S_{ij}^2\,. \tag{2}$$

Рассматривая все возможные парные расстояния между N точками, запишем (2) в матричной форме

$$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{R}_N^2 - \mathbf{S}_N^2\,, \tag{3}$$

где $\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_N \\ y_1 & y_2 & \ldots & y_N \\ z_1 & z_2 & \ldots & z_N \end{bmatrix}$ – матрица, размером $3\times N$; $\mathbf{R}_N^2 = \begin{bmatrix} R^2 & R^2 & \ldots & R^2 \\ R^2 & R^2 & \ldots & R^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ R^2 & R^2 & \ldots & R^2 \end{bmatrix}$ – матрица, размером $N\times N$; $\mathbf{S}_N^2 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & S_{12}^2 & S_{13}^2 & \ldots S_{1N}^2 \\ S_{21}^2 & 0 & S_{23}^2 & \cdots S_{2N}^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots\ \ldots & \ldots \\ S_{N1}^2 & S_{N2}^2 & S_{N3}^2 & \cdots\ 0 \end{bmatrix}$ – симметричная матрица, размером $N\times N$.

Для ранга матрицы $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$ имеют место неравенства Сильвестра [Корн. Справочник по математике, с. 394]:

$$\operatorname{rank}\left(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\right) + \operatorname{rank}\left(\boldsymbol{\alpha}\right) - 3 \le \operatorname{rank}\left(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}\right) \le \left[\min\left(\operatorname{rank}\left(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\right), \operatorname{rank}\left(\boldsymbol{\alpha}\right)\right)\right]. \tag{4}$$

Из неравенства (4) с учетом того, что хотя бы четыре точки из N не лежат в одной плоскости, следует, что $\operatorname{rank}\left(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}\right)=3$ и все миноры матрицы $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$ выше третьего порядка равны нулю. Это свойство матрицы $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$ можно использовать для нахождения радиуса R.

Пусть зафиксированные на сферической поверхности точки пронумерованы таким образом, что первые четыре из них не лежат в одной плоскости.

Запишем минор четвертого порядка, образованный первыми четырьмя столбцами и строками матрицы $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$, и приравняем его к нулю

$$\det\begin{bmatrix} R^2 & R^2-\frac{1}{2}S_{12}^2 & R^2-\frac{1}{2}S_{13}^2 & R^2-\frac{1}{2}S_{14}^2 \\ R^2-\frac{1}{2}S_{21}^2 & R^2 & R^2-\frac{1}{2}S_{23}^2 & R^2-\frac{1}{2}S_{24}^2 \\ R^2-\frac{1}{2}S_{31}^2 & R^2-\frac{1}{2}S_{32}^2 & R^2 & R^2-\frac{1}{2}S_{34}^2 \\ R^2-\frac{1}{2}S_{41}^2 & R^2-\frac{1}{2}S_{42}^2 & R^2-\frac{1}{2}S_{43}^2 & R^2 \end{bmatrix}=0, \qquad (5)$$

где $\det$ – знак детерминанта матрицы.

Используем свойства детерминантов [Корн. Справочник по математике, с. 36]:

- если i–ый столбец или строка детерминанта представляют сумму векторов, то детерминант равен сумме детерминантов, образованных отдельными векторами i–ой строки или столбца, составляющих сумму, при совпадающих остальных элементах детерминанта;
- детерминант равен 0, если соответствующие элементы каких-либо двух его строк или столбцов равны или же пропорциональны;
- умножение строки или столбца на множитель равносильно умножению детерминанта на множитель;

и преобразуем (5) к виду (6) (рис.1):

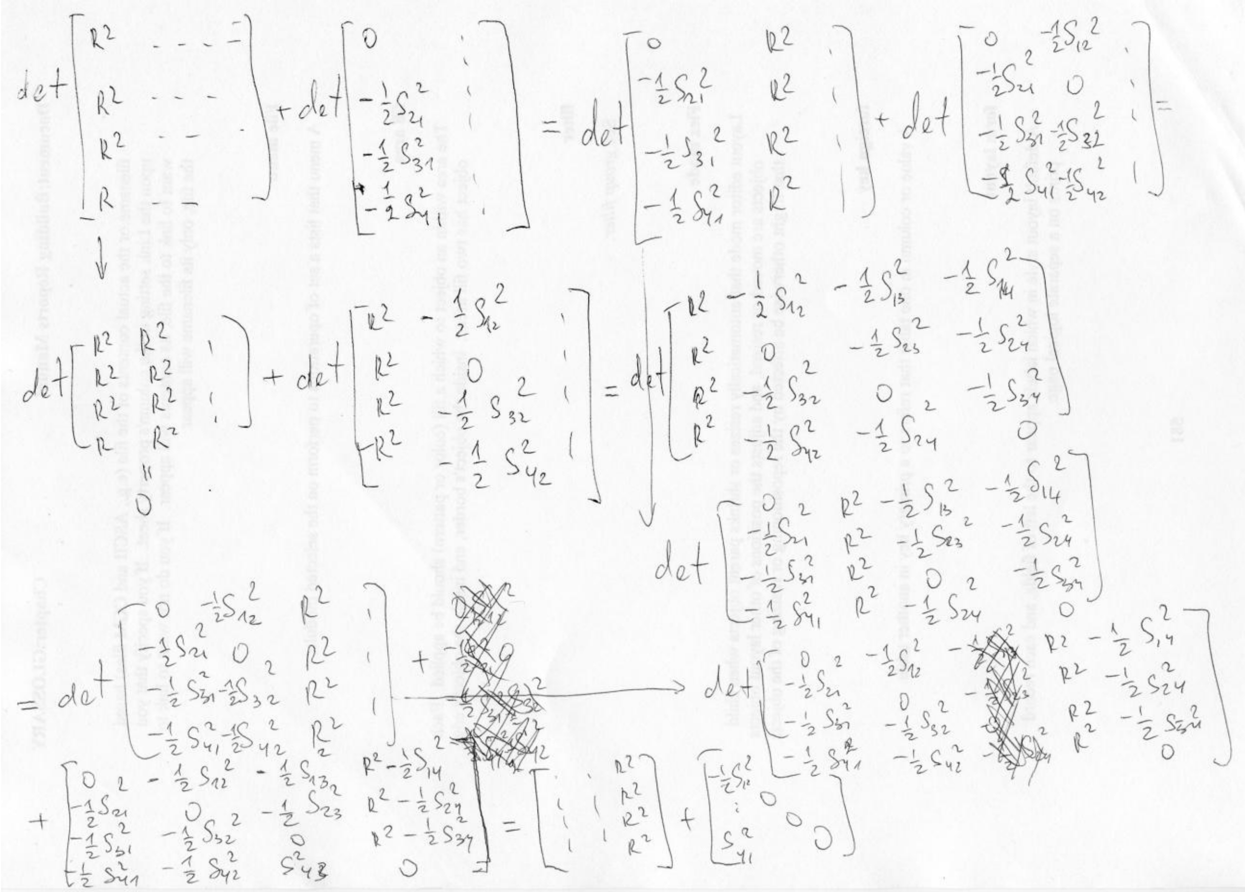


Рис. 1. Получение из (5) – (6)

$$
2R^2\left(\det\begin{bmatrix}1 & S_{12}^2 & S_{13}^2 & S_{14}^2\\ 1 & 0 & S_{23}^2 & S_{24}^2\\ 1 & S_{32}^2 & 0 & S_{34}^2\\ 1 & S_{42}^2 & S_{43}^2 & 0\end{bmatrix}+\det\begin{bmatrix}0 & 1 & S_{13}^2 & S_{14}^2\\ S_{21}^2 & 1 & S_{23}^2 & S_{24}^2\\ S_{31}^2 & 1 & 0 & S_{34}^2\\ S_{41}^2 & 1 & S_{43}^2 & 0\end{bmatrix}+\right.
$$

$$
\left.+\det\begin{bmatrix}0 & S_{12}^2 & 1 & S_{14}^2\\ S_{21}^2 & 0 & 1 & S_{24}^2\\ S_{31}^2 & S_{32}^2 & 1 & S_{34}^2\\ S_{41}^2 & S_{42}^2 & 1 & 0\end{bmatrix}+\det\begin{bmatrix}0 & S_{12}^2 & S_{13}^2 & 1\\ S_{21}^2 & 0 & S_{23}^2 & 1\\ S_{31}^2 & S_{32}^2 & 0 & 1\\ S_{41}^2 & S_{42}^2 & S_{43}^2 & 1\end{bmatrix}\right)=
$$

$$
=\det\begin{bmatrix}0 & S_{12}^2 & S_{13}^2 & S_{14}^2\\ S_{21}^2 & 0 & S_{23}^2 & S_{24}^2\\ S_{31}^2 & S_{32}^2 & 0 & S_{34}^2\\ S_{41}^2 & S_{42}^2 & S_{43}^2 & 0\end{bmatrix}. \tag{6}
$$

Разделив данное равенство на детерминант, стоящий в правой части, что допустимо, так как этот детерминант не равен нулю, (он обращается в нуль только тогда, когда рассматриваемые четыре точки на сфере лежат в одной плоскости), получаем, что величина $\frac{1}{R^2}$ есть сумма решений x_1, x_2, x_3, x_4 системы линейных уравнений вида[1]

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & S_{12}^2 & S_{13}^2 & S_{14}^2 \\ S_{21}^2 & 0 & S_{23}^2 & S_{24}^2 \\ S_{31}^2 & S_{32}^2 & 0 & S_{34}^2 \\ S_{41}^2 & S_{42}^2 & S_{43}^2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{7}$$

Вводя обозначения:

$$\bar{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{S}_4^2 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & S_{12}^2 & S_{13}^2 & S_{14}^2 \\ S_{21}^2 & 0 & S_{23}^2 & S_{24}^2 \\ S_{31}^2 & S_{32}^2 & 0 & S_{34}^2 \\ S_{41}^2 & S_{42}^2 & S_{43}^2 & 0 \end{bmatrix}, \tag{8}$$

получаем формулу для расчета радиуса R сферической поверхности без учета погрешностей измерения парных расстояний

$$R = \frac{1}{\sqrt{\bar{\mathbf{b}}^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{S}_4^2\right)^{-1}\bar{\mathbf{b}}}}, \tag{9}$$

где $\left(\mathbf{S}_4^2\right)^{-1}$ – матрица, обратная матрице $\mathbf{S}_4^2$.

Частный случай окружности на плоскости

Радиус описанной вокруг треугольника окружности. Вывод через парные расстояния.

Пусть дан треугольник со сторонами a, b, c (см. рис.2).

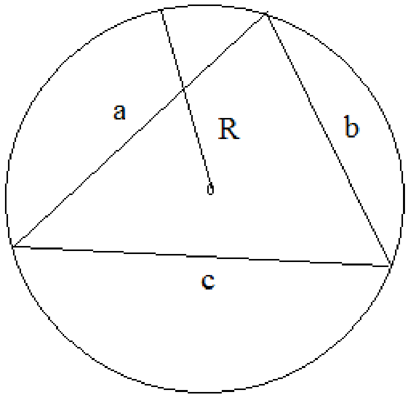


Рис.2

Традиционные формулы.

[1] Условием расположения четырех точек на сфере не в одной плоскости является: $S_{14}*S_{23}+S_{24}*S_{13}-S_{12}*S_{34}\neq 0$; $S_{14}*S_{23}-S_{24}*S_{13}-S_{12}*S_{34}\neq 0$; $S_{14}*S_{23}-S_{24}*S_{13}+S_{12}*S_{34}\neq 0$;

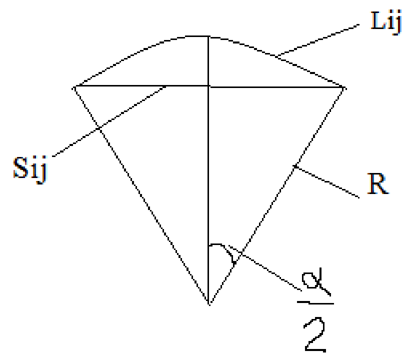
Радиус описанной окружности равен: $R = abc/4S$, где S – площадь треугольника составляет (формула Герона): $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, p – полупериметр.
Вывод через парные расстояния.

$$R = 1\Big/\sqrt{b^T S_2^{-1} b}, b^T = [1 1 1], S_2 = 0.5\begin{bmatrix} 0 & a^2 & c^2 \\ a^2 & 0 & b^2 \\ c^2 & b^2 & 0 \end{bmatrix},$$

После преобразований, как в 1-м, так и во втором случае, получаем следующую формулу:
R=a*b*c/(-b^4+2*c^2*b^2+2*a^2*b^2-c^4+2*a^2*c^2-a^4)^(1/2).

Пример реализации: MATLAB701\work\Cyrcle\r_cycle.m.

Определение радиуса Земли по полетным расстояниям



$$\tfrac{1}{2} S_{ij} = R \cdot \sin(0{,}5\alpha) \rightarrow \tfrac{1}{2} S_{ij}{}^2 = 2R^2 \sin^2\left(\frac{L_{ij}}{2R}\right)$$

Литература

1. Суховилов, Б.М. Метод определения радиуса сферической поверхности / Б.М. Суховилов // Вестник ЮУрГУ. Серия «Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника». – 2018. – Т. 18, № 2. – С. 164–171. DOI: 10.14529/ctcr180217
2. Суховилов, Б.М. Приложение метода парных расстояний к оцениванию радиуса сферической поверхности, имеющей случайные отклонения формы / Б.М. Суховилов // Вестник ЮУрГУ. Серия «Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника». – 2018. – Т. 18, № 2. – С. 12–21. DOI: 10.14529/ctcr180302