Теорија типова и унификација типова

Борисав Живановић

Увод

- Теорија типова је област математике и рачунарства која се бави формалним представљањем система типова
- Систем типова је формални (логички) систем правила који појмовима програмског језика додељује својство звано тип
  - Појам може да буде било шта, у зависности од програмског језика
  - Ми ћемо изучавати императивне програмске језике, те су наши појмови: литерали, изрази, функције, кориснички дефинисани типови
- Систем типова је настао као један од првих покушаја аутоматске провере исправности кода
- Да бисмо ово разумели, потребан је кратак осврт на историју програмских језика

Шта је рачунар?

Рачунар је машина коју је могуће испрограмирати да изврши низ ***аритметичких*** *и* ***логичких операција*** *(израчунавања)* ***аутоматски****.*

Шта рачунар заиста зна да ради?

- Језик рачунара: **скуп инструкција** (енгл. ISA, Instruction Set Architecture)
- Аритметичке операције: **add**, **sub**, **div**, **mul**, ...
- Померање података:
  - са улазног уређаја у меморију
  - из меморије на излазни уређај
  - са једне меморијске локације на другу
- Условно гранање: извршавање кода уколико је логички услов испуњен

Шта је програм?

Рачунарски програм је ***низ инструкција*** *садржаних у формату који рачунар може да* ***изврши****.*

Како рачунари омогућавају аутоматизацију процеса?

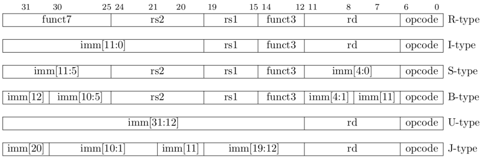
- Неопходно је да имамо формалну дефиницију процеса који желимо да аутоматизујемо - **морамо да дефинишемо алгоритам**
  - сама дефиниција мора бити формална, односно мора садржати прецизан опис корака
  - формат дефиниције не мора да буде формалан!
- Формалну дефиницију морамо изразити у формату који рачунар може да изврши - **морамо да имплементирамо алгоритам**
- У пракси, грешке у дизајну и имплементацији су честе - **морамо да тестирамо програм**

Како је могуће описати алгоритам?

- Очигледно је да је неопходно да формат буде разумљив рачунару
- Пожељно је да формат буде разумљив и људима
  - бржа имплементација, мање грешака, мање документације
- Још боље: аутоматска провера исправности програма
- Из овога је настала потреба за програмским језицима (и програмским преводиоцима)
- Програмски језици се класификују у 4 (по некима 5) генерација

I генерација

- Ручно уношење инструкција и података у бинарном формату
- Којим грешкама је ово подложно?



II генерација

- Инструкције су представљене својим симболичким називом
- Какво побољшање ово представља?
- Који недостаци су и даље присутни?
- Које типове уочавамо?

`nop`	`addi x0, x0, 0`	No operation
`li rd, immediate`	*Myriad sequences*	Load immediate
`mv rd, rs`	`addi rd, rs, 0`	Copy register
`not rd, rs`	`xori rd, rs, -1`	One's complement
`neg rd, rs`	`sub rd, x0, rs`	Two's complement
`negw rd, rs`	`subw rd, x0, rs`	Two's complement word
`sext.w rd, rs`	`addiw rd, rs, 0`	Sign extend word
`seqz rd, rs`	`sltiu rd, rs, 1`	Set if = zero
`snez rd, rs`	`sltu rd, x0, rs`	Set if ≠ zero
`sltz rd, rs`	`slt rd, rs, x0`	Set if < zero
`sgtz rd, rs`	`slt rd, x0, rs`	Set if > zero
`fmv.s rd, rs`	`fsgnj.s rd, rs, rs`	Copy single-precision register
`fabs.s rd, rs`	`fsgnjx.s rd, rs, rs`	Single-precision absolute value
`fneg.s rd, rs`	`fsgnjn.s rd, rs, rs`	Single-precision negate
`fmv.d rd, rs`	`fsgnj.d rd, rs, rs`	Copy double-precision register
`fabs.d rd, rs`	`fsgnjx.d rd, rs, rs`	Double-precision absolute value
`fneg.d rd, rs`	`fsgnjn.d rd, rs, rs`	Double-precision negate
`beqz rs, offset`	`beq rs, x0, offset`	Branch if = zero
`bnez rs, offset`	`bne rs, x0, offset`	Branch if ≠ zero
`blez rs, offset`	`bge x0, rs, offset`	Branch if ≤ zero
`bgez rs, offset`	`bge rs, x0, offset`	Branch if ≥ zero
`bltz rs, offset`	`blt rs, x0, offset`	Branch if < zero
`bgtz rs, offset`	`blt x0, rs, offset`	Branch if > zero
`bgt rs, rt, offset`	`blt rt, rs, offset`	Branch if >
`ble rs, rt, offset`	`bge rt, rs, offset`	Branch if ≤
`bgtu rs, rt, offset`	`bltu rt, rs, offset`	Branch if >, unsigned
`bleu rs, rt, offset`	`bgeu rt, rs, offset`	Branch if ≤, unsigned

III генерација

- Структура програма слична стаблу
- Ограничен приступ меморији
- Ограничена слобода у условном гранању
- Подела на **исказе** и **изразе**

```
#include "myMult.h"

void myMult(const double a[12], const double b[20], double c[15])
{
  int i0;
  int i1;
  int i2;
  for (i0 = 0; i0 < 3; i0++) {
    for (i1 = 0; i1 < 5; i1++) {
      c[i0 + 3 * i1] = 0.0;
      for (i2 = 0; i2 < 4; i2++) {
        c[i0 + 3 * i1] += a[i0 + 3 * i2] * b[i2 + (i1 << 2)];
      }
    }
  }
}
```

Теорија и пракса

- На најнижем нивоу апстракције, тип представља бинарни формат и правила за његово тумачење
- Ограничење је потребно како би се извршавао искључиво код који уме да интерпретира садржај на исправан начин

- На вишем нивоу апстракције, тип представља скуп дозвољених вредности и дозвољених операција
- Ограничење је потребно како би се извршавале операције искључиво над семантички компатибилним ентитетима

Мутабилност I

- Мутабилност је појам који постоји у рачунарству, али не постоји у математици
- Математика познаје само вредности
- Вредности могу да припадају скуповима и променљиве могу да имају одређену вредност
- Вредности које припадају скупу су унапред задате дефиницијом скупа
- Међутим, природа **променљивости** саме вредности није дефинисана!
- Сматра се да је сама вредност **целовита** и **непроменљива**, док је могуће да променљива има различите вредности!

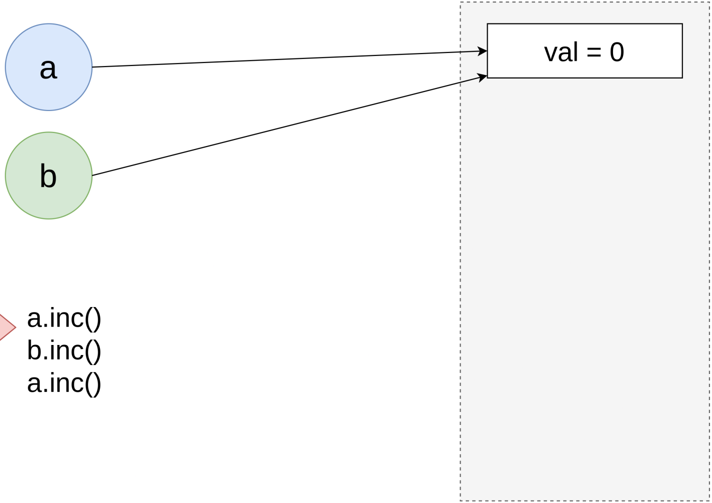
Мутабилност II

- Рачунарство такође познаје појам променљиве и вредности, али уводи и једно својство које сведочи о променљивости саме вредности
- Речником рачунарства, вредности у математици су имутабилне
- Више променљивих може да показује на исту вредност (показивачи), због чега измена саме вредности постаје видљива преко различитих променљивих!
- У рачунарству постоји ограничење задато хардвером (и у крајњој граници, законима физике) које захтева увођење оваквог својства

Мутабилност III

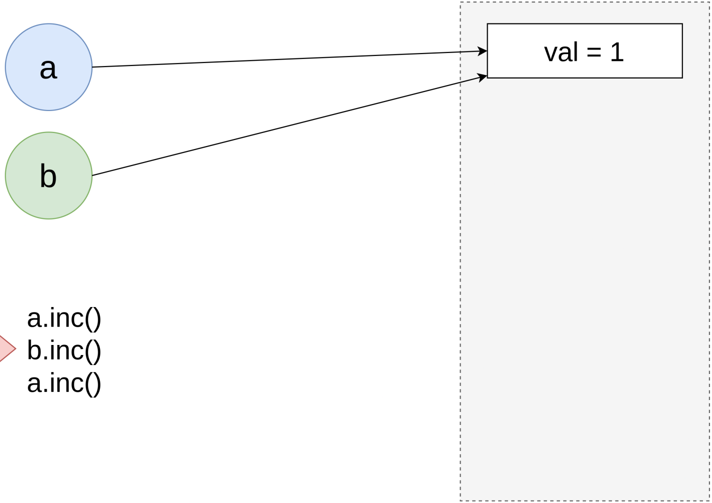
- Прости типови заузимају мало простора, због чега је њихово складиштење на стеку и у регистрима једноставно
- Креирање копија вредности простих типова је једноставно и брзо
- Сложени типови заузимају далеко више простора и најчешће се складиште на хипу
- Стање мутабилних објеката је могуће мењати и након креирања
- Мутабилност побољшава перформансе, али уноси непредвидивост
  - имате ли идеју како?
- Мутабилност утиче на дизајн система типова!
  - више речи о овоме нешто касније

Мутабилни објекти



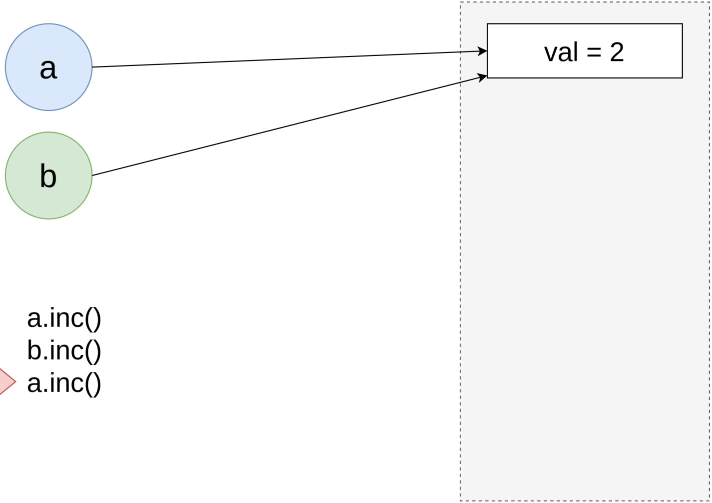

```
a.inc()
b.inc()
a.inc()
```

Мутабилни објекти



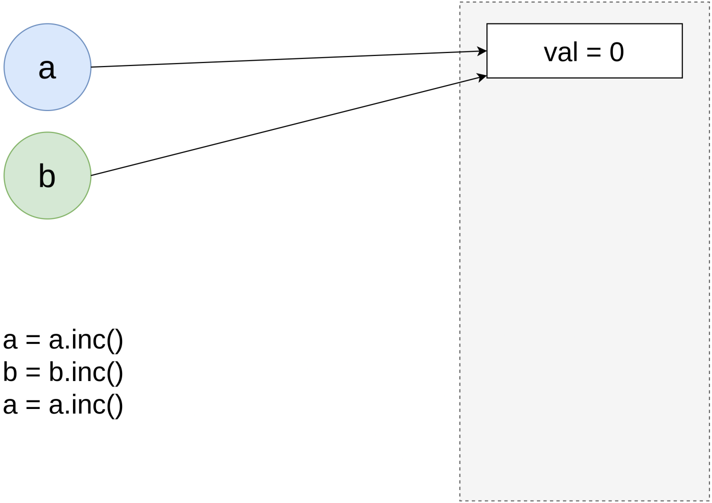
a.inc()
b.inc()
a.inc()

Мутабилни објекти



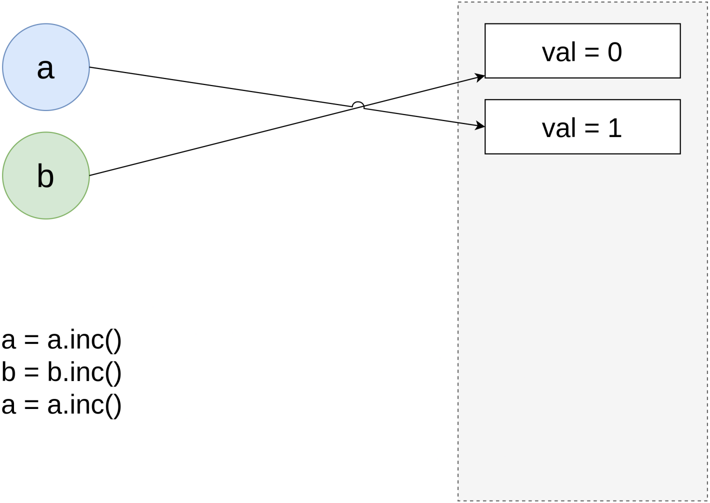
a.inc()
b.inc()
a.inc()

Имутабилни објекти



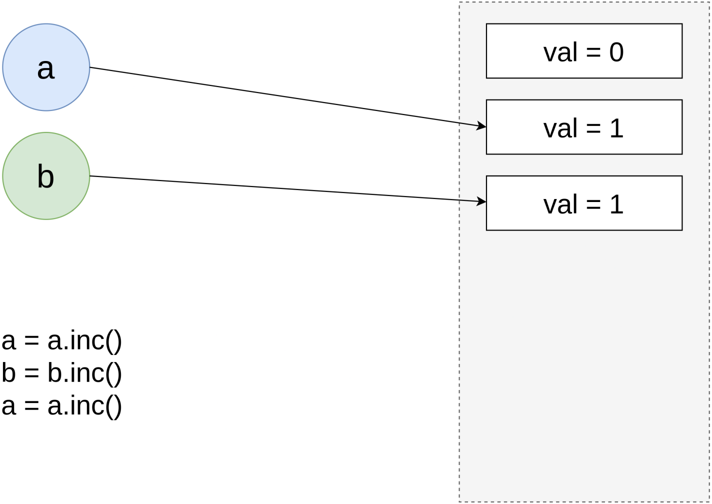
a = a.inc()
b = b.inc()
a = a.inc()

Имутабилни објекти



a = a.inc()
b = b.inc()
a = a.inc()

Имутабилни објекти



a = a.inc()
b = b.inc()
a = a.inc()

Теорија типова и теорија скупова

- Једнакост типова осигурава исправност програма
- Да ли отежава писање програма?
  - у стварном свету, уочавамо сличност између различитих појмова и облика
  - некада су ти појмови довољно слични да можемо да занемаримо разлике
  - пример: потребан нам је аутомобил, али нас не занима произвођач
- Тип је појам сродан скупу
- Ако постоје подскупови, да ли постоје и подтипови?
- Шта описују подскупови, а шта би описивали подтипови?
- Релација подтипа је слична релацији подскупа!

Конвертибилност типова (релација подтипа)

- Кажемо да је $A \leq B$ уколико је A конвертибилно у B
  - $A \leq B$ **(рефлексивност)**
  - $A \leq B \wedge B \leq C \Rightarrow A \leq C$ **(транзитивност)**
  - $A \leq B \wedge B \leq A \Rightarrow A = B$ **(антисиметричност)**
- Релација подтипа је релација парцијалног поретка!

Шта одређује конвертибилност типова? I

- Правила која дефинишу конвертибилност типова су одлука дизајнера система типова
- Главни водич је тип А мора да садржи све вредности које подржава Б као и да приликом имплицитне конверзије не долази до губитка података
  - Релативан појам: скуп целих бројева је подскуп скупа реалних бројева у математици, док је у програмирању могућ губитак приликом претварања целобројне вредности у вредност са покретним зарезом
  - Неки програмски језици ово игноришу, док други ово сматрају за грешку и захтевају експлицитну конверзију целобројног типа
- Додатно: мутабилност не сме да изазове грешке приликом извршавања програма

Шта одређује конвертибилност типова? II

- За просте типове, конвертибилност је дефинисана правилима система типова
- За сложене типове, конвертибилност је релацијом између сложених типова (коју задаје корисник) и/или у односу на садржај (правила дефинише систем типова)
  - више речи о овоме нешто касније

Закључивање типова

- До сада смо разумели појам типа, система типова и релације подтипа
- Како можемо да стечено знање употребимо за решавање полазног проблема: одређивање исправности израза?
- Као и сваки формални систем, и систем типова се састоји од аксиома и правила
- Идеја: типови простих израза (литерали и променљиве) су познати (аксиоми), а тип сложеног израза је могуће закључити уколико су подизрази одговарајућих типова (правила)

Правила

- Бинарни изрази:
  - оба подизраза морају да имају заједнички тип у који су конвертибилни како би операција била могућа
  - резултат бинарне аритметичке операције је заједничког типа
  - резултат бинарне логичке или релацине операције је булова вредсноти
- Позив функције:
  - евалуација позива функције враћа вредност типа повратног типа функције
  - шта је још потребно да би позив био могућ?

Сложени типови

- До сада смо разумели просте типове као и њихову примену
- Уочавамо потребу за креирањем сложених типова
  - једноставан пример: желимо обраду над скупом простих типова
  - напреднији пример: желимо да ентитете из стварног света представимо у програмима, уз задржавање правила за аутоматску проверу исправности
  - додатно: постоји потреба да ентитете програмског језика (попут функција) опишемо типом, како би могли да их обрађујемо на исти начин као и корисничке типове
- Како бисмо могли да креирамо овакве типове?

Конструктор типа

- Конструктор типа омогућава креирање новог типа користећи претходно дефинисане типове
- Подсетник: систем типова дефинише основне типове
- Додатно: систем типова дефинише конструкторе типова
- Омогућено је произвољно комбиновање типова без обзира на контекст
  - аксиоми и правила система типова омогућавају проверу исправности употребе у односу на релацију подтипа
- Релација подтипа је дефинисана само за типове који су инстанцирани од сродних конструктора типова
  - физика: није могуће поредити килограме и километре
  - народски речено: не треба да се мешају бабе и жабе

Низови I

- Низови су најједноставнији пример сложеног типа
- У пракси, честа је потреба за обрадом колекције података
- Желимо да спречимо складиштење произвољних вредности како би омогућили униформну обраду
- Да ли је услов за униформну обраду једнакост типова ($=$) или релација подтипа ($\leq$)?
- Можемо ли да упоредимо два типа низова?

Низови II

- У низ $t : T[]$ можемо да ускладиштимо вредност $x : X$ уколико $X \leq T$
  - T представља горњу границу типа вредности у низу!
- У променљиву $y : A[]$ можемо да ускладиштимо низ $x : B[]$ уколико је $B \leq A$
  - тип низа је коваријантан у односу на тип T
  - да ли морамо да водимо рачуна и о дужини низа?

Коваријантност типова

Сложени тип $A{<}T{>}$ *је коваријантан у односу на тип параметра* T *уколико важи* $A{<}X{>} \leq A{<}Y{>}$ *за* $X \leq Y$

Варијантност и мутабилност I

- Имутабилни низови су очигледно коваријантни у односу на T
- Проблем: шта се дешава уколико су низови мутабилни?

Варијантност и мутабилност II

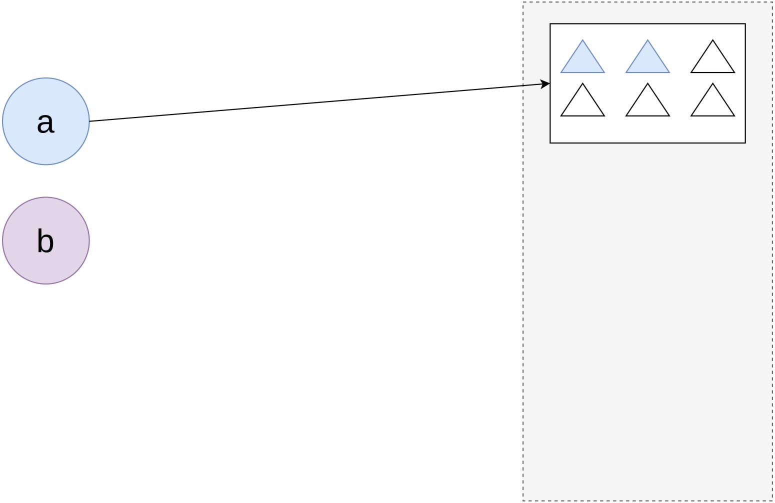
$A \leq B \leq C$

$a : A[] = [A, A, A]$
$b : B[] = a$

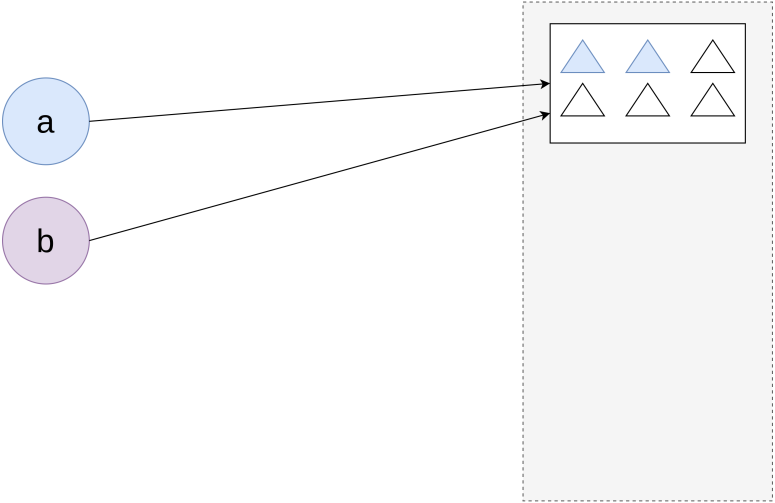
$b.add(B)$

Грешка: није могуће сачувати вредност
Bу објекту типаAјер не важи$B \leq A$!

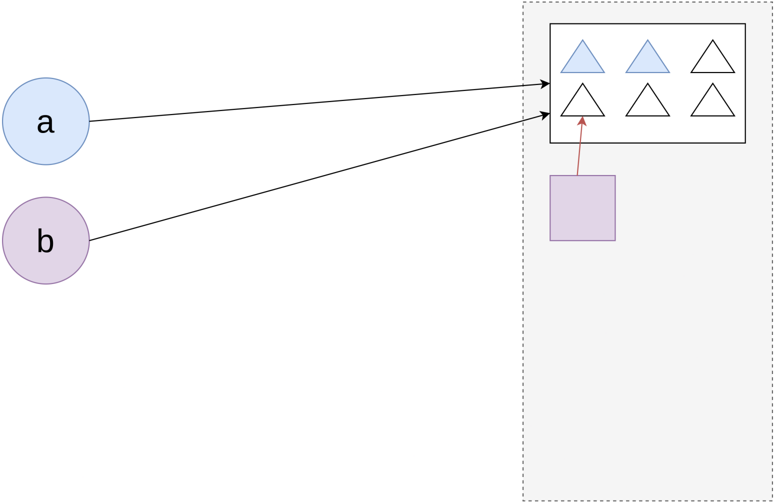
Варијантност и мутабилност III



Варијантност и мутабилност IV



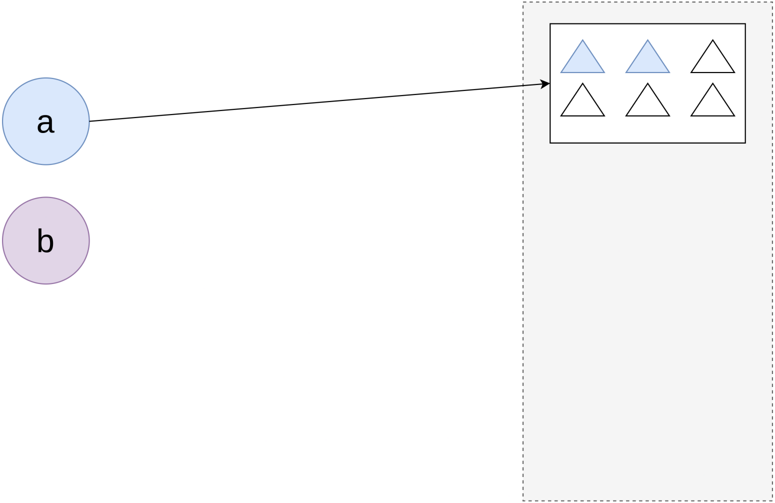
Варијантност и мутабилност V



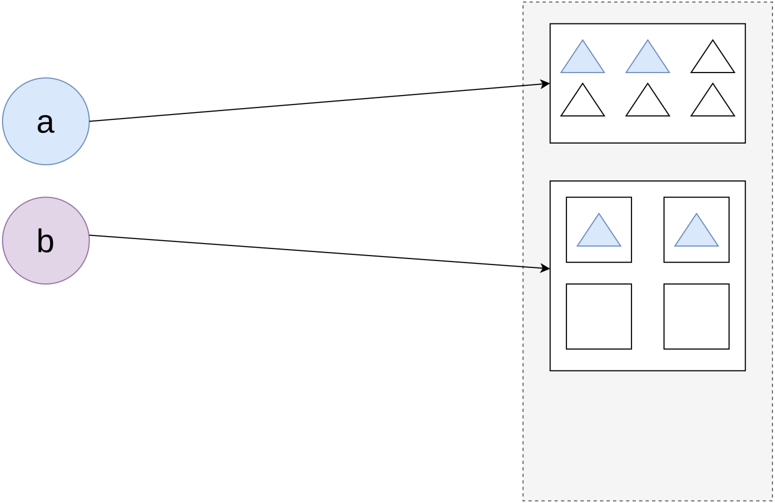
Варијантност и мутабилност VI

- Дошло је до грешке приликом извршавања кода
- Систем типова је то морао да спречи!
- Могућа решења:
  - обавезно копирање низа (имутабилност)
  - инваријантност у односу на T

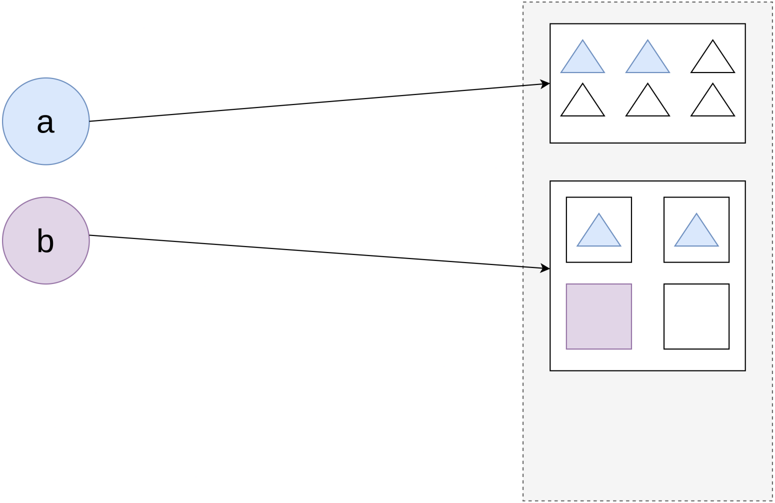
Варијантност и мутабилност VII



Варијантност и мутабилност VIII



Варијантност и мутабилност IX



Структуре

- Структура садржи именоване вредности (поља) чији тип може бити произвољан тип, укључујући и саму структуру из дефиниције (рекурзија је дозвољена)
- Које услове би требало да задовољи структура $s : B$ како би важило $B \leq A$?
- Проблем: мутабилност
  - мутабилне структуре такође морају да буду инваријантне у односу на типове поља
  - имутабилне структуре могу да буду варијантне
- Потребно је обратити пажњу на називе поља и њихове типове
- Мишљења о томе како би ту пажњу требало обратити су подељена

Номинални системи типова

У номиналном систему типова, релације између сложених типова су задате приликом конструкције типова употребом ознака типова.

Структурални системи типова

У структуралном систему типова, релације између сложених типова се одређују приликом употребе типа, поређењем садржаја очекиваног и употребљеног типа.

Структуре (наставак) I

- Интуиција: уколико је вредност типа B могуће сачувати у $a : A$ уколико важи $B \leq A$, да ли је правило могуће генерализовати и применити на поља структуре?
- Структуре су коваријантне у односу на тип појединачних поља
  - поредак важи искључиво за иста поља (поља истог имена)
- Иста општа правила важе и у номиналним и у структуралним системима типова
- Различит је начин на који се провера спроводи

Структуре (наставак) II

- У номиналним системима типова, приликом конструкције типова се проверава да ли поља задовољавају релације у складу са осталим релацијама подтипа које је корисник задао
- У структуралним системима типова, приликом употребе типа у одређеном контексту се проверава да ли поља задовољавају релације у складу са релацијом између доступног и траженог типа која би требало да буде задовољена
- У пракси, системи типова често комбинују елементе оба приступа

Функције I

- Тип функције је сложени тип који се састоји од типа параметера и типа повратне вредности
- Не треба мешати тип функције и тип повратне вредности функције!
- У језицима у којима функције представљају *грађане првог реда*, функције је могуће чувати у променљивама и вратити као тип израза
- Како можемо да дефинишемо релацију поретка?
- Да ли је тип функције боље посматрати и описивати номиналним или структуралним приступом?

Функције II

- Интуиција: враћање вредности је једнако додели, типови функција су коваријантни у односу на тип повратне вредности
- Да ли на исти начин можемо да посматрамо и типове аргумената?
- Може ли интуиција да нас превари?

Функције III

- Прослеђивање аргумената (конкретне вредности које се додељују параметрима) приликом позива фунцкије је такође једнако додели вредности
- Нека су A и B типови функција, а a и b променљиве
- Нека су типови свих параметара B подтипови параметара A
- Покушајмо да B доделимо у a и извршимо позив функције

Функције IV

X
$Y \leq X$
$Z \leq X$
$A : (p : X) \rightarrow X$
$B : (p : Y) \rightarrow Z$

$a : A = some\_B\_func$
$a(new\ Z)$

Грешка!
$some\_B\_func$ очекује $type(p) \leq Y$, али A дозвољава $type(p) \leq X$!
Тип Z не задовољава услов задат од стране $some\_B\_func$!

Функције V

- Интуиција (други покушај): како би спречили прослеђивање типа са којим функција не може да ради, неопходно је да аргументи подтипа функције буду у $\geq$ релацији у односу на аргументе надтипа функције
- Важи правило које је супротно од коваријантности

Контраваријантност типова

Сложени тип $A{<}T{>}$ *је контраваријантан у односу на тип параметра* T *уколико важи* $A{<}X{>} \leq A{<}Y{>}$ *за* $X \geq Y$

Функције (други покушај)

X
$Y \leq X$
$Z \leq X$
$Q \leq Y$
$A : (p : Y) \to X$
$B : (p : X) \to Z$

$a : A = some\_B\_func$
$a(new\ Q)$

Релација подтипа је транзитивна!
За сваки тип T за који важи $T \leq A$ такође важи $T \leq B$ уколико $A \leq B$ (односно $B \geq A$).

Функције (закључак)

- Функције су коваријантне у односу на тип повратне вредности и контраваријантне у односу на типове параметара
- Вредност функције је заправо програмски код који она садржи
- Како ово није могуће у току извршавања програма, можемо функције да сматрамо имутабилним
- У теорији, можемо да слободно користимо варијантност у релацији подтипа
- У пракси, програмски језици често сматрају функције инваријантним у односу на типове параметара
- Овиме се олакшава имплементација, а исправност се не крши јер је инваријантност *строжа* од варијантности!
- Доста програмских језика погрешно сматра функције коваријантним у односу на типове параметара!

Генерички типови

- До сада смо баратали искучиво са унапред познатим типовима
- Релација подтипа нам је давала одређену слободу да не морамо да знамо све детаље о коришћеним типовима
- Генеричко програмирање омогућава опис алгоритама који раде над типовима који су накнадно дефинисани
- Најчешћа примена: опште структуре података морају да омогуће складиштење свих корисничких типова, уз правило да се у инстанци генеричке колекције не мешају типови који нису компатибилни
  - због чега релација подскупа није употребљива за ову проверу?

Конструкција типова (наставак)

- Уводи се ниво индирекције у конструкцији типова
- Дефиниција типа креира апстрактни тип
- Конструктор генеричког типа садржи параметре типова
- Корисник дефинише ограничења над параметрима (у виду релације подтипа)
- Додатно: корисник дефинише варијантност у односу на тип параметра
- Сви до сада наведени сложени типови могу да буду генерички типови!

Унификација типова I

- Приликом креирања конкретног типа из апстрактног, корисник може да проследи произвољан тип
- Потребно је проверити да ли типови задовољавају ограничења која задаје апстрактни тип
- Додатно: потребно је доделити конкретне типове параметара

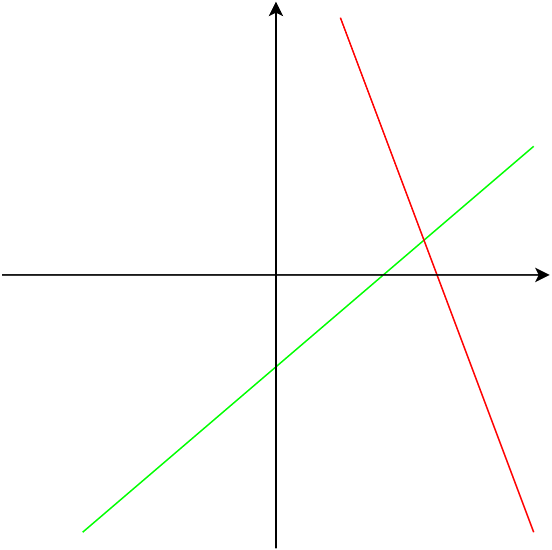
Унификација типова II

- Уколико систем типова не подржава релацију подтипа, поступак је једнак решавању система једначина
- Уколико је систем одређен, унификација је успешна
- Уколико је систем неодређен или немогућ, унификација је неуспешна

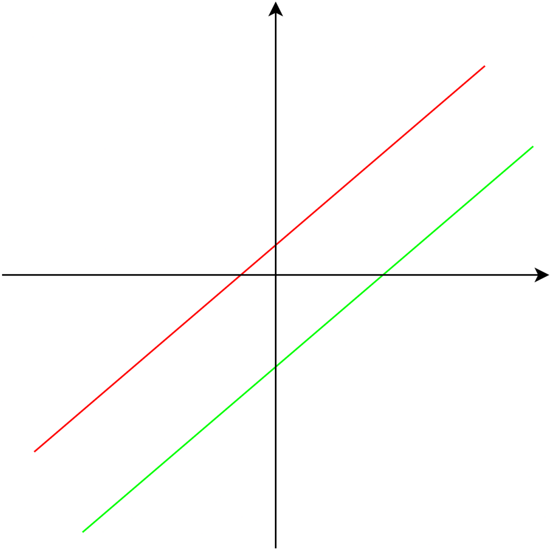
Унификација типова III

- Систем типова дефинише под којим условима је могуће унификовати два типа
  - подсетник: номинални и структурални системи различито посматрају једнакост типова и релацију подтипа
  - додатни подсетник: бабе и жабе
- Опште правило:
  - два проста типа је могуће унификовати уколико су једнаки
  - два сложена типа је могуће унификовати уколико су једнаки и уколико је могуће унификовати све типове од којих се састоје
- Поступак се примењује док не остану искључиво једначине познатих простих типова и параметара и простих типова
- Методом замене решавамо зависности између параметара

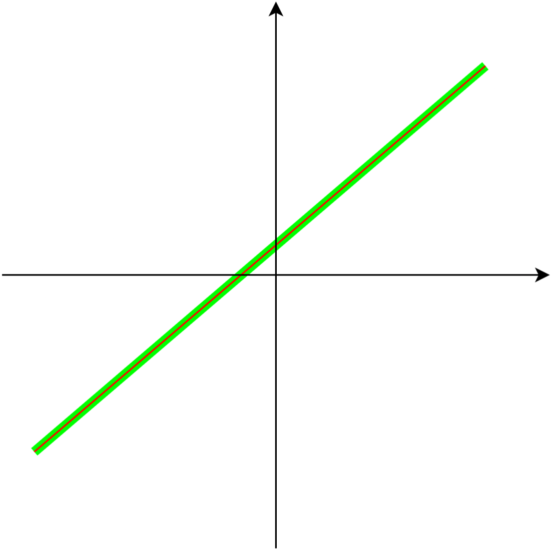
Одређен систем једначина



Немогућ систем једначина



Неодређен систем једначина



Унификација типова (поступак) I

$$A, B, C$$
$$List{<}T{>}$$
$$Map{<}K, V{>}$$
$$func : (a : T1, b : T2, c : List{<}T1{>}, d : List{<}T2{>}) \to$$
$$Map{<}T1, T2{>}$$

$$a = A$$
$$b = B$$
$$c = List{<}A{>}$$
$$d = List{<}B{>}$$

$$x = func(a, b, c, d)$$
$$type(x) = ?$$

Унификација типова (поступак) II

$A = T1$
$B = T2$
$List\langle A\rangle = List\langle T1\rangle$
$List\langle B\rangle = List\langle T2\rangle$

Унификација типова (поступак) III

$$T1 = A$$
$$T2 = B$$

$$List = List$$
$$A = T1$$
$$List = List$$
$$B = T2$$

Унификација типова (поступак) IV

$$T1 = A$$
$$T2 = B$$

Систем је одређен, унификација је успешна!

Унификација типова (поступак) V

A, B, C
$List{<}T{>}$
$Map{<}K, V{>}$
$func : (a : T1, b : T2, c : List{<}T1{>}, d : List{<}T2{>}) \rightarrow$
$Map{<}T1, T2{>}$

$a = A$
$b = B$
$c = List{<}A{>}$
$d = List{<}A{>}$

$x = func(a, b, c, d)$
$type(x) =?$

Унификација типова (поступак) VI

$$A = T1$$
$$B = T2$$
$$List\text{<}A\text{>} = List\text{<}T1\text{>}$$
$$List\text{<}A\text{>} = List\text{<}T2\text{>}$$

Унификација типова (поступак) VII

$$T1 = A$$
$$T2 = B$$

$$List = List$$
$$A = T1$$
$$List = List$$
$$A = T2$$

Унификација типова (поступак) VIII

$T1 = A$
$T2 = B, T2 = A$

Систем је немогућ, унификација је неуспешна!

Унификација типова (поступак) IX

$$A, B, C$$
$$List\!<\!T\!>$$
$$Map\!<\!K, V\!>$$
$$func : (a : T1, b : T2, c : List\!<\!T1\!>, d : List\!<\!T2\!>) \rightarrow Map\!<\!T1, T2\!>$$

$$a = A$$
$$b = B$$
$$c = List\!<\!A\!>$$
$$d = Map\!<\!A, B\!>$$

$$x = func(a, b, c, d)$$
$$type(x) =?$$

Унификација типова (поступак) X

$$A = T1$$
$$B = T2$$
$$List{<}A{>} = List{<}T1{>}$$
$$Map{<}A, B{>} = List{<}T2{>}$$

Унификација типова (поступак) XI

$$T1 = A$$
$$T2 = B$$

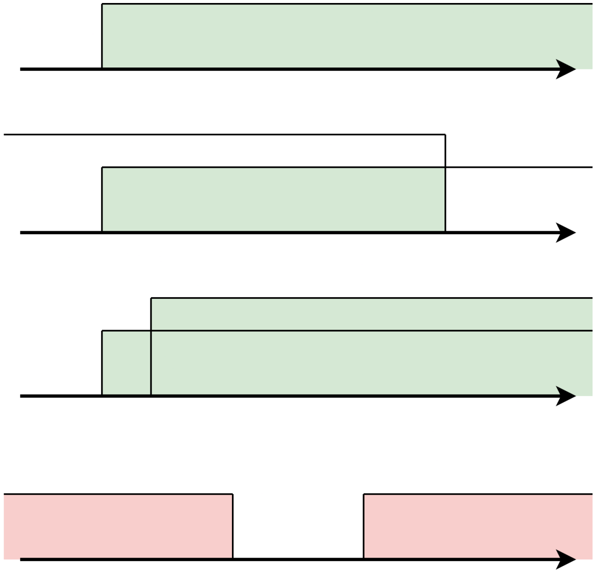
$$List = List$$
$$A = T1$$
$$Map = List$$

Унификција два различита сложена типа није могућа!

Унификација и релација подтипа

- Уколико систем типова подржава релацију подтипа, поступак унификације је једнак решавању система неједначина
- Решење има доњу и горњу границу
- Исправна су сва решења која су у интервалу!
- У пракси, бира се доња или горња граница јер резултат унификације мора да буде јединствено решење

Системи неједначина



Унификација типова (наставак) I

- Поступак можемо да посматрамо као генерализовану верзију претходног поступка
- Општа правила:
  - два проста типа је могуће унификовати уколико пружени тип задовољава релацију у односу на тражени тип у датом контексту употребе $(\leq, \geq, =)$
  - два сложена типа је могуће унификовати уколико пружени тип задовољава релацију у односу на тражени тип у датом контексту употребе и уколико је могуће унификовати све типове од којих се састоје
- Додатно: решење постоји уколико је интервал правило одређен

Унификација типова (наставак) II

- Подсетник: релација подтипа $(\leq, \geq)$ је антисиметрична, а релација једнакости $(=)$ симетрична!
- Због тога је потребно разликовати пружени и тражени тип
- Додела вредности у променљиву захтева $\leq$ зависност
- Прослеђивање вредности генеричком параметру захтева $\leq, \geq, =$ у зависности од варијантности
- Правила за свођење израза који садрже сложене типове у изразе који садрже просте типове и параметре су приблжно иста
- Додатно: потребно је обратити пажњу на варијатност типова у односу на одређени параметар јер утиче на смер релације подтипа!

Унификација типова (наставак) III

$List{<}T{>}$, коваријантно у односу на T
$Map{<}K, V{>}$, инваријантно у односу на K, коваријантно у односу на V

$ArrayList \leq List$
$LinkedList \leq List$
$HashMap \leq Map$
$OrderedHashMap \leq Map$

Q, P, R
$Q \leq P \leq R$

K, L, M
$K \leq L \leq M$

Унификација типова (наставак) IV

$$
\begin{aligned}
&A(p_1 : List{<}X{>},\ p_2 : Map{<}X, Y{>}) \to Y \\
&a_1 = LinkedList{<}Q{>} \\
&a_2 = HashMap{<}Q, P{>} \\
\\
&res = A(a_1, a_2) \\
&X, Y = ?
\end{aligned}
$$

Унификација типова (наставак) V

$type(a_1) \leq type(p_1)$
$type(a_2) \leq type(p_2)$

Прослеђивање аргумента функцији захтева да пружени тип буде подтип траженог типа ($\leq$).

Унификација типова (наставак) VI

$$LinkedList{<}Q{>} \leq List{<}X{>}$$
$$HashMap{<}Q, P{>} \leq Map{<}X, Y{>}$$

Унификација типова (наставак) VII

$$
\begin{aligned}
&LinkedList \leq List \\
&Q \leq X \\
&HashMap \leq Map \\
&Q = X \\
&P \leq Y
\end{aligned}
$$

Приликом свођења на простији облик, сложени типови су задржали релацију подтипа ($\leq$).

Код параметара који су коваријантни, услов је да задовољавају релацију подтипа ($\leq$).

Код параметара који су инваријантни, услов је да задовољавају релацију једнакости ($=$).

Унификација типова (наставак) VIII

$$Q \leq X$$
$$Q = X$$
$$P \leq Y$$

Унификација је успешна!

Познати типови су задовољили задата ограничења, а интервал решења непознатих типова је исправан.

Из интервала по потреби бирамо горњу или доњу границу (задаје се као додатно ограничење).

Унификација типова (наставак) IX

$$A(p_1 : List{<}X{>},\ p_2 : Map{<}X, Y{>}) \rightarrow Y$$
$$a_1 = LinkedList{<}Q{>}$$
$$a_2 = HashMap{<}P, R{>}$$

$$res = A(a_1, a_2)$$
$$X, Y = ?$$

Унификација типова (наставак) X

$$type(a_1) \le type(p_1)$$
$$type(a_2) \le type(p_2)$$

Унификација типова (наставак) XI

$$LinkedList{<}Q{>} \leq List{<}X{>}$$
$$HashMap{<}P, R{>} \leq Map{<}X, Y{>}$$

Унификација типова (наставак) XII

$$LinkedList \leq List$$
$$Q \leq X$$
$$HashMap \leq Map$$
$$P = X$$
$$R \leq Y$$

Унификација типова (наставак) XIII

$$Q \leq X$$
$$P = X$$
$$R \leq Y$$

Унификација је успешна!

Уочавамо да иако су два различита типа прослеђења на месту на којем је параметар X, гледамо који тип задовољава оба ограничења.

Тако параметар X постаје јединствено одређен тип!

Закључак I

- Као покушај налажења заједничког језика разумљивог и рачуанрима и људима, настали су виши програмски језици
- Додатна замисао је била аутоматска провера исправности програма
- Једнакост између очекиваног и обезбеђеног типа је била довољан услов да се спречи неисправна употреба вредности у програму
- Како појмови у природи показују сличност, замисао је била представити ту сличност кроз релацију подтипа

Закључак II

- Сложени типови су неопходни како би се описале појаве из природе, као и појаве из света рачунарства
- Релација подтипа код сложених типова зависи од конструктора типова и од садржаја самих типова
- За неке типове је природно да релација између садржаних типова директно одговара релацији између сложених типова (коваријантност), док је за одређене типове она супротна (контраваријантност)
- За разлику од математике, рачунарство познаје појам мутабилности
- Иако типови природно показују варијантност, мутабилност је често значајно ограничава

Закључак III

- Релација подтипа не обезбеђује довољну флексибилност за типове попут листа и мапа
- Генерички типови омогућавају да корисник при инстанцирању типа зада прецизнија ограничења типа
- Код генеричких типова, потребно је обавити поступак унификације како би одредили вредности непознатих параметара
- Уколико систем типова подржава само једнакост типова, поступак је једнак решавању система једначина
- Уколико систем типова подржава релацију, поступак је једнак решавању система неједначина

Литература I

- Type Checking (Part 1), Keith Schwarz
  https://web.stanford.edu/class/archive/cs/cs143/cs143.1128/lectures/09/Slides09.pdf
- Type Checking (Part 2), Keith Schwarz
  https://web.stanford.edu/class/archive/cs/cs143/cs143.1128/lectures/10/Slides10.pdf
- Everything You Always Wanted to Know About Type Inference - And a Little Bit More, Robert Griesemer
  https://go.dev/blog/type-inference
- Unification in Chalk (part 1), Niko Matsakis
  https://smallcultfollowing.com/babysteps/blog/2017/03/25/unification-in-chalk-part-1/

Литература II

- Type unification rules (The Go Programming Language Specification) https://tip.golang.org/ref/spec#Type_unification_rules
- Kotlin type constraints (Kotlin language specification), Marat Akhin & Mikhail Belyaev https://kotlinlang.org/spec/kotlin-type-constraints.html
- Type inference (Rust Compiler Development Guide) https://rustc-dev-guide.rust-lang.org/type-inference.html