

# Теорија типова и унификација типова

Борисав Живановић

# Увод

- ▶ Теорија типова је област математике и рачунарства која се бави формалним представљањем система типова
- ▶ Систем типова је формални (логички) систем правила који појмовима програмског језика додељује својство звано тип
  - ▶ Појам може да буде било шта, у зависности од програмског језика
  - ▶ Ми ћемо изучавати императивне програмске језике, те су наши појмови: литерали, изрази, функције, кориснички дефинисани типови
- ▶ Систем типова је настао као један од првих покушаја аутоматске провере исправности кода
- ▶ Да бисмо ово разумели, потребан је кратак осврт на историју програмских језика

# Шта је рачунар?

*Рачунар је машина коју је могуће испрограмирати да изврши низ **аритметичких и логичких операција** (израчунавања) аутоматски.*

# Шта рачунар заиста зна да ради?

- ▶ Језик рачунара: **скуп инструкција** (енгл. ISA, Instruction Set Architecture)
- ▶ Аритметичке операције: **add, sub, div, mul, ...**
- ▶ Померање података:
  - ▶ са улазног уређаја у меморију
  - ▶ из меморије на излазни уређај
  - ▶ са једне меморијске локације на другу
- ▶ Условно гранање: извршавање кода уколико је логички услов испуњен

# Шта је програм?

*Рачунарски програм је **низ инструкција** садржаних у формату који рачунар може да **изврши**.*

# Како рачунари омогућавају аутоматизацију процеса?

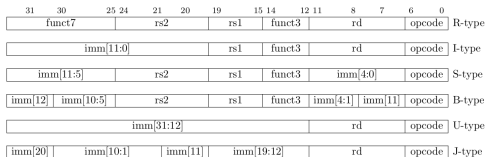
- ▶ Неопходно је да имамо формалну дефиницију процеса који желимо да аутоматизујемо - **морамо да дефинишемо алгоритам**
  - ▶ сама дефиниција мора бити формална, односно мора садржати прецизан опис корака
  - ▶ формат дефиниције не мора да буде формалан!
- ▶ Формалну дефиницију морамо изразити у формату који рачунар може да изврши - **морамо да имплементирамо алгоритам**
- ▶ У пракси, грешке у дизајну и имплементацији су честе - **морамо да тестирамо програм**

# Како је могуће описати алгоритам?

- ▶ Очигледно је да је неопходно да формат буде разумљив рачунару
- ▶ Пожељно је да формат буде разумљив и људима
  - ▶ бржа имплементација, мање грешака, мање документације
- ▶ Још боље: аутоматска провера исправности програма
- ▶ Из овога је настала потреба за програмским језицима (и програмским преводиоцима)
- ▶ Програмски језици се класификују у 4 (по неким 5) генерација

# I генерација

- ▶ Ручно уношење инструкција и података у бинарном формату
- ▶ Којим грешкама је ово подложно?





# II генерација

- ▶ Инструкције су представљене својим симболичким називом
- ▶ Како побољшање ово представља?
- ▶ Који недостаци су и даље присутни?
- ▶ Које типове уочавамо?

nop	addi x0, x0, 0	No operation
li rd, immediate	<i>Myriad sequences</i>	Load immediate
mv rd, rs	addi rd, rs, 0	Copy register
not rd, rs	xori rd, rs, -1	One's complement
neg rd, rs	sub rd, x0, rs	Two's complement
negw rd, rs	subw rd, x0, rs	Two's complement word
sext.w rd, rs	addiw rd, rs, 0	Sign extend word
seqz rd, rs	sltiu rd, rs, 1	Set if = zero
snez rd, rs	sltu rd, x0, rs	Set if ≠ zero
sltz rd, rs	slt rd, rs, x0	Set if < zero
sgtz rd, rs	slt rd, x0, rs	Set if > zero
fmv.s rd, rs	fsgnj.s rd, rs, rs	Copy single-precision register
fabs.s rd, rs	fsgnjx.s rd, rs, rs	Single-precision absolute value
fneg.s rd, rs	fsgnjn.s rd, rs, rs	Single-precision negate
fmv.d rd, rs	fsgnj.d rd, rs, rs	Copy double-precision register
fabs.d rd, rs	fsgnjx.d rd, rs, rs	Double-precision absolute value
fneg.d rd, rs	fsgnjn.d rd, rs, rs	Double-precision negate
beqz rs, offset	beq rs, x0, offset	Branch if = zero
bnez rs, offset	bne rs, x0, offset	Branch if ≠ zero
blez rs, offset	bge x0, rs, offset	Branch if ≤ zero
bgez rs, offset	bge rs, x0, offset	Branch if ≥ zero
bltz rs, offset	blt rs, x0, offset	Branch if < zero
bgtz rs, offset	blt x0, rs, offset	Branch if > zero
bgt rs, rt, offset	blt rt, rs, offset	Branch if >
ble rs, rt, offset	bge rt, rs, offset	Branch if ≤
bgtu rs, rt, offset	bltu rt, rs, offset	Branch if ≥, unsigned
bleu rs, rt, offset	bgeu rt, rs, offset	Branch if ≤, unsigned

# III генерација

- ▶ Структура програма слична стаблу
- ▶ Ограничен приступ меморији
- ▶ Ограничена слобода у условном гранању
- ▶ Подела на исказе и изразе

```
1  #include "myMult.h"
2
3  void myMult(const double a[12], const double b[20], double c[15])
4  {
5      int i0;
6      int i1;
7      int i2;
8      for (i0 = 0; i0 < 3; i0++) {
9          for (i1 = 0; i1 < 5; i1++) {
10             c[i0 + 3 * i1] = 0.0;
11             for (i2 = 0; i2 < 4; i2++) {
12                 c[i0 + 3 * i1] += a[i0 + 3 * i2] * b[i2 + (i1 << 2)];
13             }
14         }
15     }
16 }
```

# Теорија и пракса

- ▶ На најнижем нивоу апстракције, тип представља бинарни формат и правила за његово тумачење
- ▶ Ограничење је потребно како би се извршавао искључиво код који уме да интерпретира садржај на исправан начин
- ▶ На вишем нивоу апстракције, тип представља скуп дозвољених вредности и дозвољених операција
- ▶ Ограничење је потребно како би се извршавале операције искључиво над семантички компатибилним ентитетима

# Мутабилност I

- ▶ Мутабилност је појам који постоји у рачунарству, али не постоји у математици
- ▶ Математика познаје само вредности
- ▶ Вредности могу да припадају скуповима и променљиве могу да имају одређену вредност
- ▶ Вредности које припадају скупу су унапред задате дефиницијом скупа
- ▶ Међутим, природа **променљивости** саме вредности није дефинисана!
- ▶ Сматра се да је сама вредност **целовита** и **непроменљива**, док је могуће да променљива има различите вредности!

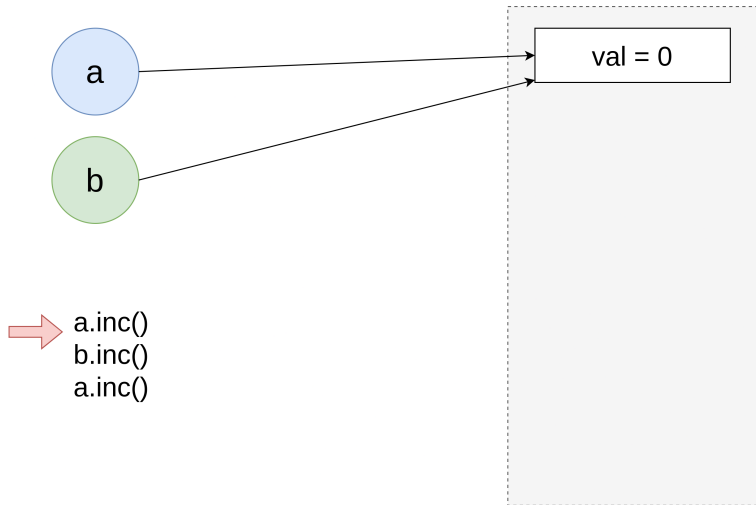
# Мутабилност II

- ▶ Рачунарство такође познаје појам променљиве и вредности, али уводи и једно својство које сведочи о променљивости саме вредности
- ▶ Речником рачунарства, вредности у математици су имутабилне
- ▶ Више променљивих може да показује на исту вредност (показивачи), због чега измена саме вредности постаје видљива преко различитих променљивих!
- ▶ У рачунарству постоји ограничење задато хардвером (и у крајњој граници, законима физике) које захтева увођење оваквог својства

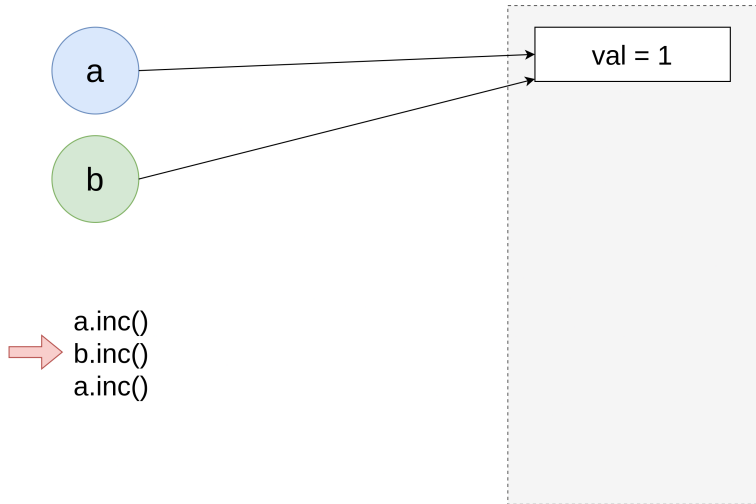
# Мутабилност III

- ▶ Прости типови заузимају мало простора, због чега је њихово складиштење на стеку и у регистрима једноставно
- ▶ Креирање копија вредности простих типова је једноставно и брзо
- ▶ Сложени типови заузимају далеко више простора и најчешће се складиште на хипу
- ▶ Стање мутабилних објеката је могуће мењати и након креирања
- ▶ Мутабилност побољшава перформансе, али уноси непредвидивост
  - ▶ имате ли идеју како?
- ▶ Мутабилност утиче на дизајн система типова!
  - ▶ више речи о овоме нешто касније

## Мутабилни објекти

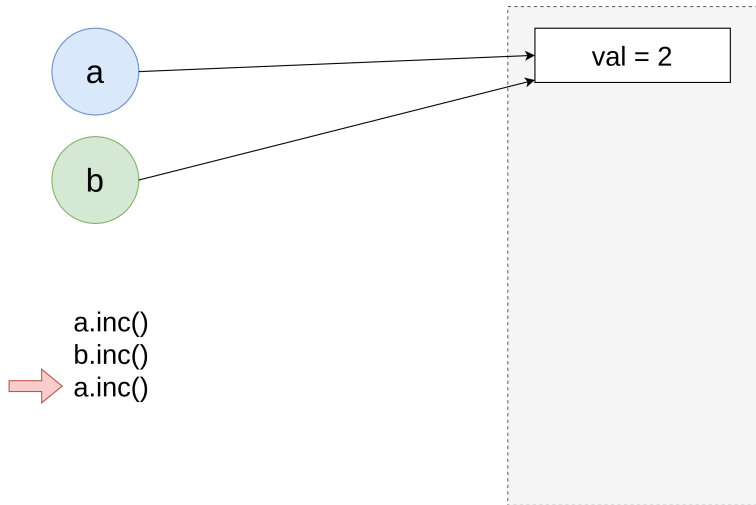


# Мутабилни објекти

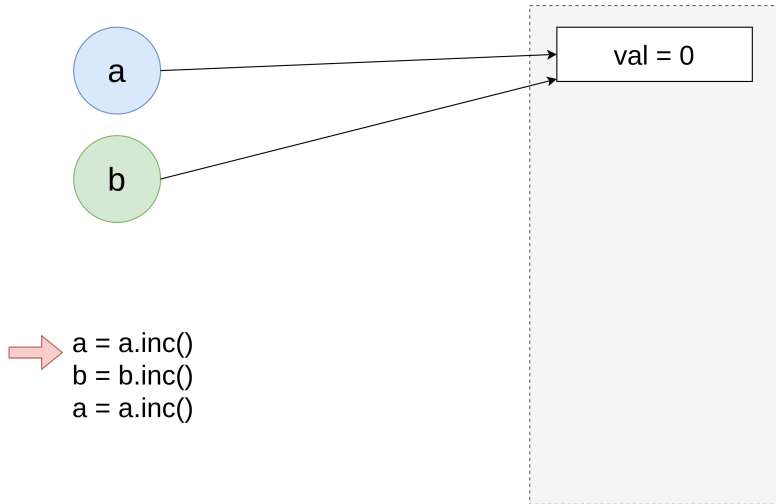




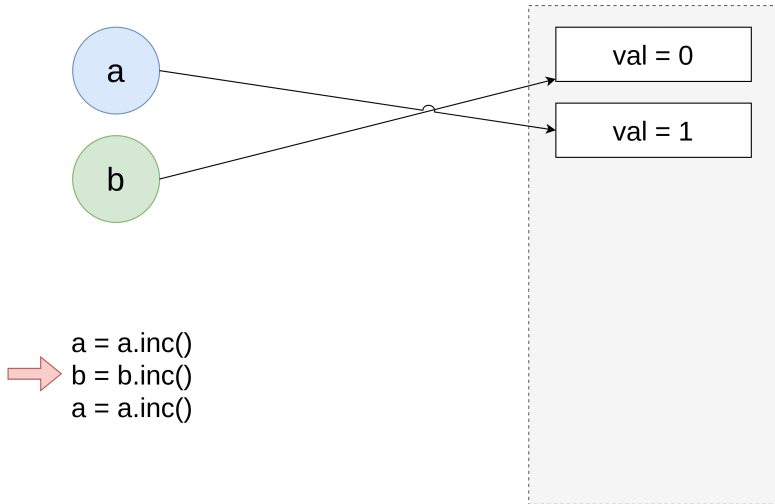
# Мутабилни објекти



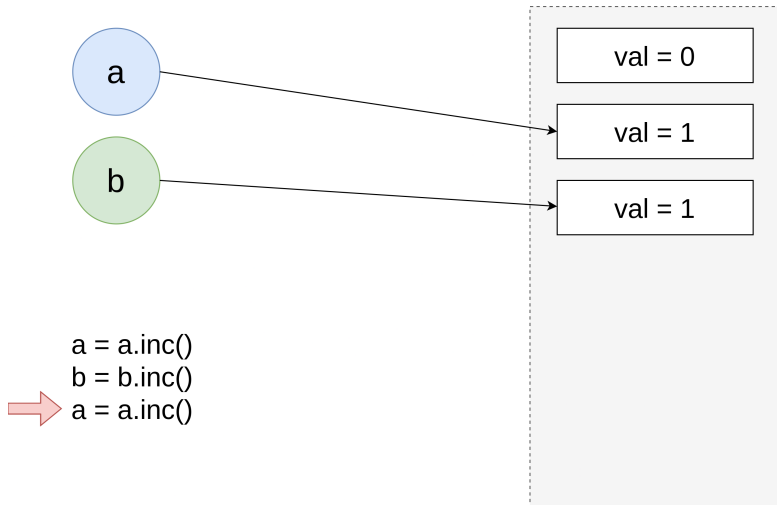
# Имутабилни објекти



# Имутабилни објекти



# Имутабилни објекти



# Теорија типова и теорија скупова

- ▶ Једнакост типова осигурава исправност програма
- ▶ Да ли отежава писање програма?
  - ▶ у стварном свету, уочавамо сличност између различитих појмова и облика
  - ▶ некада су ти појмови довољно слични да можемо да занемаримо разлике
  - ▶ пример: потребан нам је аутомобил, али нас не занима произвођач
- ▶ Тип је појам сродан скупу
- ▶ Ако постоје подскупови, да ли постоје и подтипови?
- ▶ Шта описују подскупови, а шта би описивали подтипови?
- ▶ Релација подтипа је слична релацији подскупа!

# Конвертибилност типова (релација подтипа)

- ▶ Кажемо да је  $A \leq B$  уколико је  $A$  конвертибилно у  $B$ 
  - ▶  $A \leq B$  (**рефлексивност**)
  - ▶  $A \leq B \wedge B \leq C \Rightarrow A \leq C$  (**транзитивност**)
  - ▶  $A \leq B \wedge B \leq A \Rightarrow A = B$  (**антисиметричност**)
- ▶ Релација подтипа је релација парцијалног поретка!

# Шта одређује конвертибилност типова? I

- ▶ Правила која дефинишу конвертибилност типова су одлука дизајнера система типова
- ▶ Главни водич је тип  $A$  мора да садржи све вредности које подржава  $B$  као и да приликом имплицитне конверзије не долази до губитка података
  - ▶ Релативан појам: скуп целих бројева је подскуп скупа реалних бројева у математици, док је у програмирању могућ губитак приликом претварања целобројне вредности у вредност са покретним зарезом
  - ▶ Неки програмски језици ово игноришу, док други ово сматрају за грешку и захтевају експлицитну конверзију целобројног типа
- ▶ Додатно: мутабилност не сме да изазове грешке приликом извршавања програма

# Шта одређује конвертибилност типова? II

- ▶ За просте типове, конвертибилност је дефинисана правилима система типова
- ▶ За сложене типове, конвертибилност је релацијом између сложених типова (коју задаје корисник) и/или у односу на садржај (правила дефинише систем типова)
  - ▶ више речи о овоме нешто касније



# Закључивање типова

- ▶ До сада смо разумели појам типа, система типова и релације подтипа
- ▶ Како можемо да стечено знање употребимо за решавање полазног проблема: одређивање исправности израза?
- ▶ Као и сваки формални систем, и систем типова се састоји од аксиома и правила
- ▶ Идеја: типови простих израза (литерали и променљиве) су познати (аксиоми), а тип сложеног израза је могуће закључити уколико су подизрази одговарајућих типова (правила)

# Правила

- ▶ Бинарни изрази:
  - ▶ оба подизраза морају да имају заједнички тип у који су конвертибилни како би операција била могућа
  - ▶ резултат бинарне аритметичке операције је заједничког типа
  - ▶ резултат бинарне логичке или релацине операције је булова вредности
- ▶ Позив функције:
  - ▶ евалуација позива функције враћа вредност типа повратног типа функције
  - ▶ шта је још потребно да би позив био могућ?

# Сложени типови

- ▶ До сада смо разумели просте типове као и њихову примену
- ▶ Уочавамо потребу за креирањем сложених типова
  - ▶ једноставан пример: желимо обраду над скупом простих типова
  - ▶ напреднији пример: желимо да ентитете из стварног света представимо у програмима, уз задржавање правила за аутоматску проверу исправности
  - ▶ додатно: постоји потреба да ентитете програмског језика (попут функција) опишемо типом, како би могли да их обрађујемо на исти начин као и корисничке типове
- ▶ Како бисмо могли да креирамо овакве типове?

# Конструктор типа

- ▶ Конструктор типа омогућава креирање новог типа користећи претходно дефинисане типове
- ▶ Подсетник: систем типова дефинише основне типове
- ▶ Додатно: систем типова дефинише конструкторе типова
- ▶ Омогућено је произвољно комбиновање типова без обзира на контекст
  - ▶ аксиоми и правила система типова омогућавају проверу исправности употребе у односу на релацију подтипа
- ▶ Релација подтипа је дефинисана само за типове који су инстанцирани од сродних конструктора типова
  - ▶ физика: није могуће поредити килограме и километре
  - ▶ народски речено: не треба да се мешају бабе и жабе

- ▶ Низови су најједноставнији пример сложеног типа
- ▶ У пракси, честа је потреба за обрадом колекције података
- ▶ Желимо да спречимо складиштење произвољних вредности како би омогућили униформну обраду
- ▶ Да ли је услов за униформну обраду једнакост типова ( $=$ ) или релација подтипа ( $\leq$ )?
- ▶ Можемо ли да упоредимо два типа низова?

## Низови II

- ▶ У низ  $t : T[]$  можемо да ускладишtimo вредност  $x : X$  уколико  $X \leq T$ 
  - ▶  $T$  представља горњу границу типа вредности у низу!
- ▶ У променљиву  $y : A[]$  можемо да ускладишtimo низ  $x : B[]$  уколико је  $B \leq A$ 
  - ▶ тип низа је коваријантан у односу на тип  $T$
  - ▶ да ли морамо да водимо рачуна и о дужини низа?

# Коваријантност типова

*Сложени тип  $A\langle T \rangle$  је коваријантан у односу на тип параметра  $T$  уколико важи  $A\langle X \rangle \leq A\langle Y \rangle$  за  $X \leq Y$*

# Варијантност и мутабилност I

- ▶ Имутабилни низови су очигледно коваријантни у односу на  $T$
- ▶ Проблем: шта се дешава уколико су низови мутабилни?



## Варијантност и мутабилност II

$$A \leq B \leq C$$

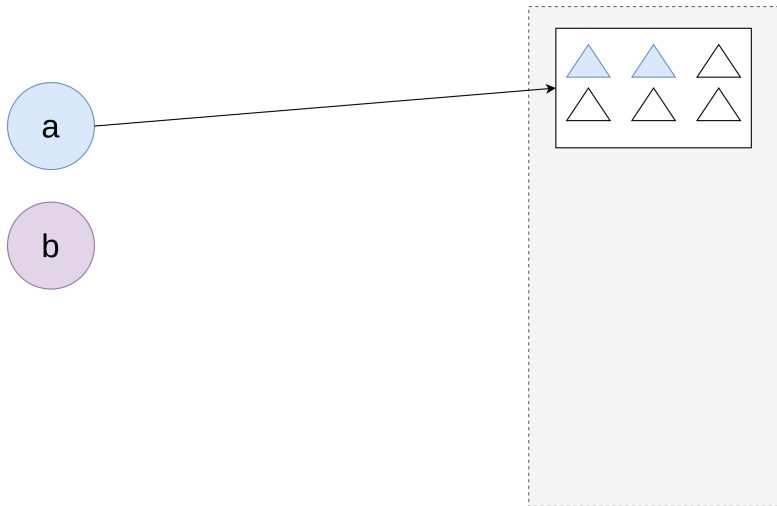
$$a : A[] = [A, A, A]$$

$$b : B[] = a$$

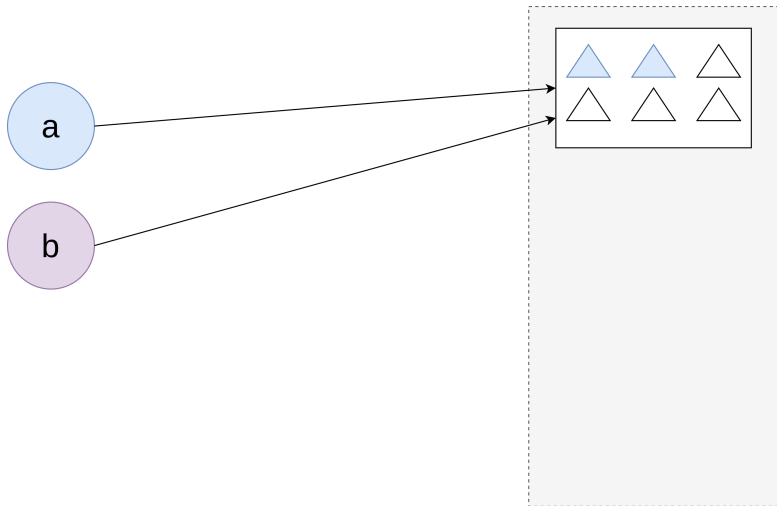
$$b.add(B)$$

Грешка: није могуће сачувати вредност  
У објекту типа  $A$  јер не важи  $B \leq A$ !

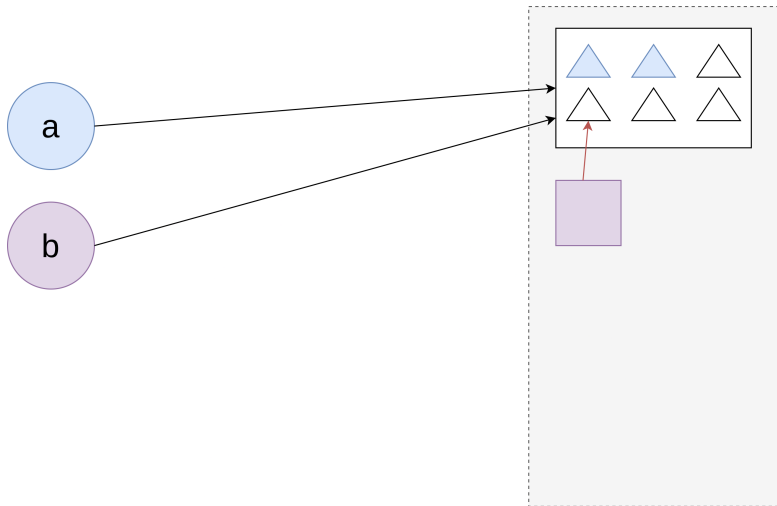
## Варијантност и мутабилност III



## Варијантност и мутабилност IV



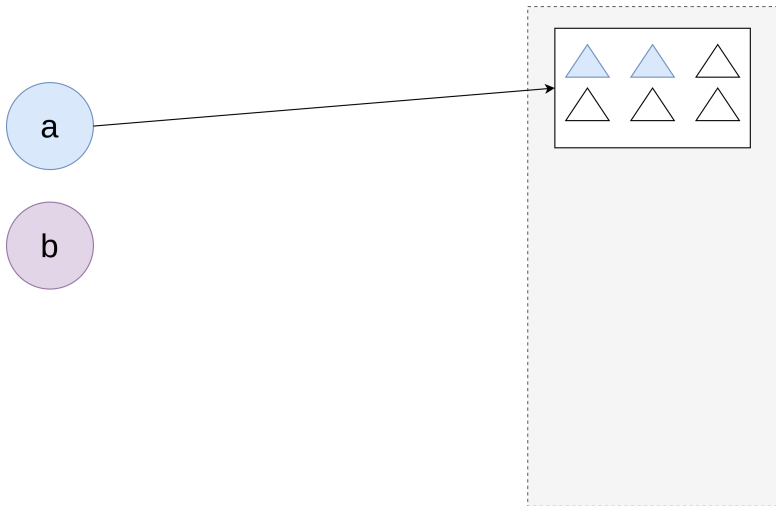
# Варијантност и мутабилност V



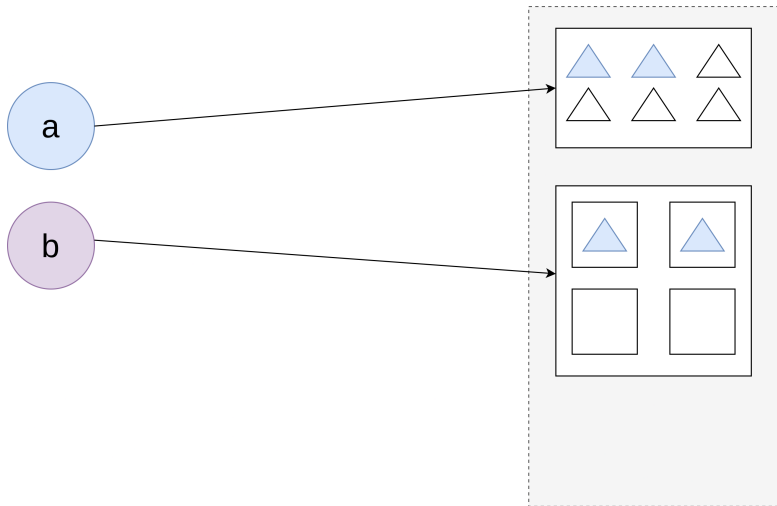
# Варијантност и мутабилност VI

- ▶ Дошло је до грешке приликом извршавања кода
- ▶ Систем типова је то морао да спречи!
- ▶ Могућа решења:
  - ▶ обавезно копирање низа (имутабилност)
  - ▶ инваријантност у односу на  $T$

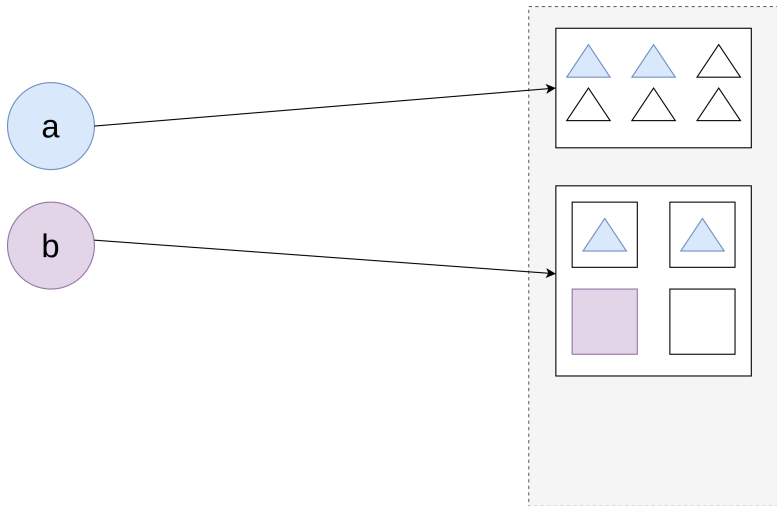
## Варијантност и мутабилност VII



## Варијантност и мутабилност VIII



# Варијантност и мутабилност IX





# Структуре

- ▶ Структура садржи именоване вредности (поља) чији тип може бити произвољан тип, укључујући и саму структуру из дефиниције (рекурзија је дозвољена)
- ▶ Које услове би требало да задовољи структура  $s : B$  како би важило  $B \leq A$ ?
- ▶ Проблем: мутабилност
  - ▶ мутабилне структуре такође морају да буду инваријантне у односу на типове поља
  - ▶ имутабилне структуре могу да буду варијантне
- ▶ Потребно је обратити пажњу на називе поља и њихове типове
- ▶ Мишљења о томе како би ту пажњу требало обратити су подељена

# Номинални системи типова

*У номиналном систему типова, релације између сложених типова су задате приликом конструкције типова употребом ознака типова.*

# Структурални системи типова

*У структуралном систему типова, релације између сложених типова се одређују приликом употребе типа, поређењем садржаја очекиваног и употребљеног типа.*

# Структуре (наставак) I

- ▶ Интуиција: уколико је вредност типа  $B$  могуће сачувати у  $a : A$  уколико важи  $B \leq A$ , да ли је правило могуће генерализовати и применити на поља структуре?
- ▶ Структуре су коваријантне у односу на тип појединачних поља
  - ▶ поредак важи искључиво за иста поља (поља истог имена)
- ▶ Иста општа правила важе и у номиналним и у структуралним системима типова
- ▶ Различит је начин на који се провера спроводи

## Структуре (наставак) II

- ▶ У номиналним системима типова, приликом конструкције типова се проверава да ли поља задовољавају релације у складу са осталим релацијама подтипа које је корисник задао
- ▶ У структуралним системима типова, приликом употребе типа у одређеном контексту се проверава да ли поља задовољавају релације у складу са релацијом између доступног и траженог типа која би требало да буде задовољена
- ▶ У пракси, системи типова често комбинују елементе оба приступа

# Функције I

- ▶ Тип функције је сложени тип који се састоји од типа параметера и типа повратне вредности
- ▶ Не треба мешати тип функције и тип повратне вредности функције!
- ▶ У језицима у којима функције представљају *грађане првог реда*, функције је могуће чувати у променљивама и вратити као тип израза
- ▶ Како можемо да дефинишемо релацију поретка?
- ▶ Да ли је тип функције боље посматрати и описивати номиналним или структуралним приступом?

# Функције II

- ▶ Интуиција: враћање вредности је једнако додели, типови функција су коваријантни у односу на тип повратне вредности
- ▶ Да ли на исти начин можемо да посматрамо и типове аргумената?
- ▶ Може ли интуиција да нас превари?

# Функције III

- ▶ Прослеђивање аргумената (конкретне вредности које се додељују параметрима) приликом позива функције је такође једнако додели вредности
- ▶ Нека су  $A$  и  $B$  типови функција, а  $a$  и  $b$  променљиве
- ▶ Нека су типови свих параметара  $B$  подтипови параметара  $A$
- ▶ Покушајмо да  $B$  доделимо у  $a$  и извршимо позив функције



## Функције IV

$X$

$Y \leq X$

$Z \leq X$

$A : (p : X) \rightarrow X$

$B : (p : Y) \rightarrow Z$

$a : A = \text{some\_}B\_func$

$a(\text{new } Z)$

Грешка!

$\text{some\_}B\_func$  очекује  $type(p) \leq Y$ , али  $A$  дозвољава  $type(p) \leq X$ !

Тип  $Z$  не задовољава услов задат од стране  $\text{some\_}B\_func$ !

# Функције V

- ▶ Интуиција (други покушај): како би спречили прослеђивање типа са којим функција не може да ради, неопходно је да аргументи подтипа функције буду у  $\geq$  релацији у односу на аргументе надтипа функције
- ▶ Важи правило које је супротно од коваријантности

# Контраваријантност типова

*Сложени тип  $A\langle T \rangle$  је контраваријантан у односу на тип параметра  $T$  уколико важи  $A\langle X \rangle \leq A\langle Y \rangle$  за  $X \geq Y$*

## Функције (други покушај)

 $X$  $Y \leq X$  $Z \leq X$  $Q \leq Y$  $A : (p : Y) \rightarrow X$  $B : (p : X) \rightarrow Z$  $a : A = \text{some\_}B\_func$  $a(\text{new } Q)$ 

Релација подтипа је транзитивна!

За сваки тип  $T$  за који важи  $T \leq A$  такође важи  $T \leq B$  уколико  $A \leq B$  (односно  $B \geq A$ ).

## Функције (закључак)

- ▶ Функције су коваријантне у односу на тип повратне вредности и контраваријантне у односу на типове параметара
- ▶ Вредност функције је заправо програмски код који она садржи
- ▶ Како ово није могуће у току извршавања програма, можемо функције да сматрамо имутабилним
- ▶ У теорији, можемо да слободно користимо варијантност у релацији подтипа
- ▶ У пракси, програмски језици често сматрају функције инваријантним у односу на типове параметара
- ▶ Овиме се олакшава имплементација, а исправност се не крши јер је инваријантност *строжа* од варијантности!
- ▶ Доста програмских језика погрешно сматра функције коваријантним у односу на типове параметара!

# Генерички типови

- ▶ До сада смо баратали искучиво са унапред познатим типовима
- ▶ Релација подтипа нам је давала одређену слободу да не морамо да знамо све детаље о коришћеним типовима
- ▶ Генеричко програмирање омогућава опис алгоритама који раде над типовима који су накнадно дефинисани
- ▶ Најчешћа примена: опште структуре података морају да омогуће складиштење свих корисничких типова, уз правило да се у инстанци генеричке колекције не мешају типови који нису компатибилни
  - ▶ због чега релација подскупа није употребљива за ову проверу?

## Конструкција типова (наставак)

- ▶ Уводи се ниво индирекције у конструкцији типова
- ▶ Дефиниција типа креира апстрактни тип
- ▶ Конструктор генеричког типа садржи параметре типова
- ▶ Корисник дефинише ограничења над параметрима (у виду релације подтипа)
- ▶ Додатно: корисник дефинише варијантност у односу на тип параметра
- ▶ Сви до сада наведени сложени типови могу да буду генерички типови!

# Унификација типова I

- ▶ Приликом креирања конкретног типа из апстрактног, корисник може да проследи произвољан тип
- ▶ Потребно је проверити да ли типови задовољавају ограничења која задаје апстрактни тип
- ▶ Додатно: потребно је доделити конкретне типове параметара



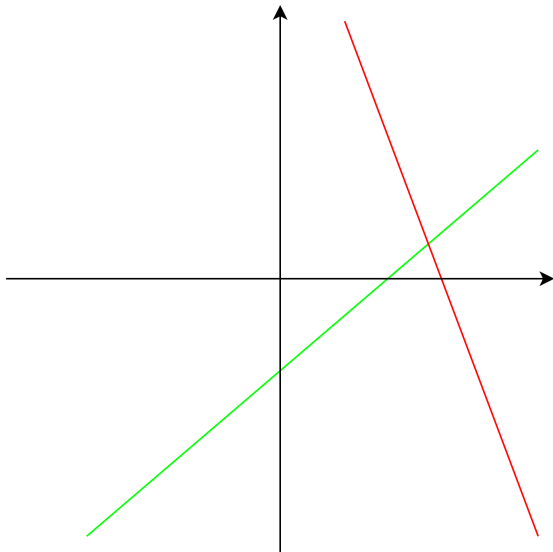
# Унификација типова II

- ▶ Уколико систем типова не подржава релацију подтипа, поступак је једнак решавању система једначина
- ▶ Уколико је систем одређен, унификација је успешна
- ▶ Уколико је систем неодређен или немогућ, унификација је неуспешна

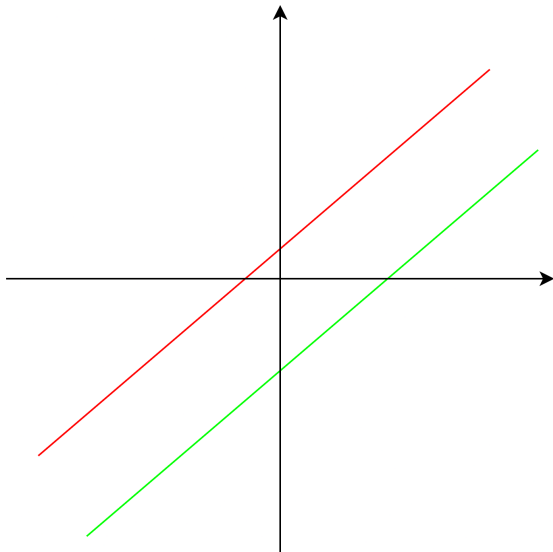
# Унификација типова III

- ▶ Систем типова дефинише под којим условима је могуће унификовати два типа
  - ▶ подсетник: номинални и структурални системи различито посматрају једнакост типова и релацију подтипа
  - ▶ додатни подсетник: бабе и жабе
- ▶ Опште правило:
  - ▶ два проста типа је могуће унификовати уколико су једнаки
  - ▶ два сложена типа је могуће унификовати уколико су једнаки и уколико је могуће унификовати све типове од којих се састоје
- ▶ Поступак се примењује док не остану искључиво једначине познатих простих типова и параметара и простих типова
- ▶ Методом замене решавамо зависности између параметара

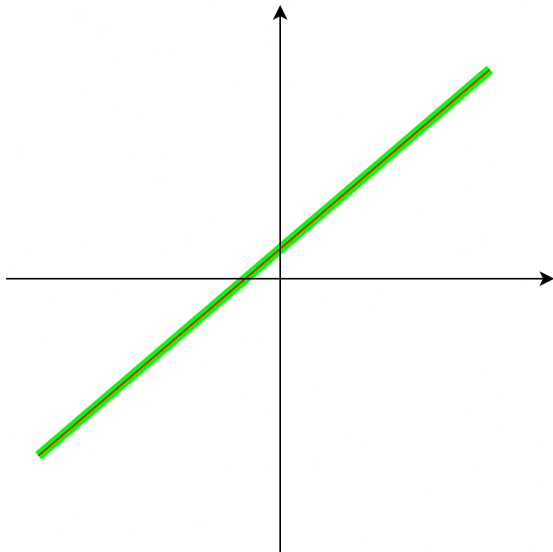
## Одређен систем једначина



# Немогућ систем једначина



# Неодређен систем једначина



# Унификација типова (поступак) I

$A, B, C$

$List<T>$

$Map<K, V>$

$func : (a : T1, b : T2, c : List<T1>, d : List<T2>) \rightarrow$   
 $Map<T1, T2>$

$a = A$

$b = B$

$c = List<A>$

$d = List<B>$

$x = func(a, b, c, d)$

$type(x) = ?$

## Унификација типова (поступак) II

$$A = T1$$

$$B = T2$$

$$List<A> = List<T1>$$

$$List<B> = List<T2>$$

## Унификација типова (поступак) III

$$T1 = A$$

$$T2 = B$$

$$List = List$$

$$A = T1$$

$$List = List$$

$$B = T2$$



## Унификација типова (поступак) IV

$$T1 = A$$

$$T2 = B$$

Систем је одређен, унификација је успешна!

## Унификација типова (поступак) V

$A, B, C$

$List<T>$

$Map<K, V>$

$func : (a : T1, b : T2, c : List<T1>, d : List<T2>) \rightarrow$   
 $Map<T1, T2>$

$a = A$

$b = B$

$c = List<A>$

$d = List<A>$

$x = func(a, b, c, d)$

$type(x) = ?$

## Унификација типова (поступак) VI

$$A = T1$$

$$B = T2$$

$$List\langle A \rangle = List\langle T1 \rangle$$

$$List\langle A \rangle = List\langle T2 \rangle$$

## Унификација типова (поступак) VII

$$T1 = A$$

$$T2 = B$$

$$List = List$$

$$A = T1$$

$$List = List$$

$$A = T2$$

## Унификација типова (поступак) VIII

$$T1 = A$$

$$T2 = B, T2 = A$$

Систем је немогућ, унификација је неуспешна!

## Унификација типова (поступак) IX

$A, B, C$

$List<T>$

$Map<K, V>$

$func : (a : T1, b : T2, c : List<T1>, d : List<T2>) \rightarrow$   
 $Map<T1, T2>$

$a = A$

$b = B$

$c = List<A>$

$d = Map<A, B>$

$x = func(a, b, c, d)$

$type(x) = ?$

# Унификација типова (поступак) X

$$A = T1$$

$$B = T2$$

$$List<A> = List<T1>$$

$$Map<A, B> = List<T2>$$

# Унификација типова (поступак) XI

$$T1 = A$$

$$T2 = B$$

$$List = List$$

$$A = T1$$

$$Map = List$$

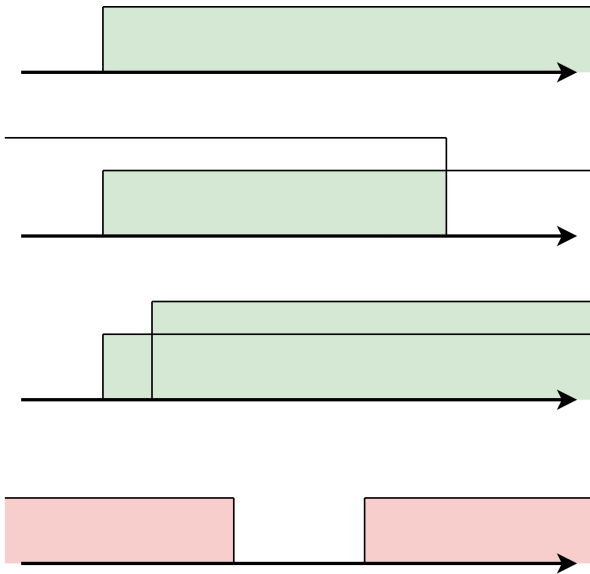
Унификција два различита сложена типа није могућа!



# Унификација и релација подтипа

- ▶ Уколико систем типова подржава релацију подтипа, поступак унификације је једнак решавању система неједначина
- ▶ Решење има доњу и горњу границу
- ▶ Исправна су сва решења која су у интервалу!
- ▶ У пракси, бира се доња или горња граница јер резултат унификације мора да буде јединствено решење

# Системи неједначина



# Унификација типова (наставак) I

- ▶ Поступак можемо да посматрамо као генерализовану верзију претходног поступка
- ▶ Општа правила:
  - ▶ два проста типа је могуће унификовати уколико пружени тип задовољава релацију у односу на тражени тип у датом контексту употребе ( $\leq$ ,  $\geq$ ,  $=$ )
  - ▶ два сложена типа је могуће унификовати уколико пружени тип задовољава релацију у односу на тражени тип у датом контексту употребе и уколико је могуће унификовати све типове од којих се састоје
- ▶ Додатно: решење постоји уколико је интервал правило одређен

## Унификација типова (наставак) II

- ▶ Подсетник: релација подтипа ( $\leq, \geq$ ) је антисиметрична, а релација једнакости ( $=$ ) симетрична!
- ▶ Због тога је потребно разликовати пружени и тражени тип
- ▶ Додела вредности у променљиву захтева  $\leq$  зависност
- ▶ Прослеђивање вредности генеричком параметру захтева  $\leq, \geq, =$  у зависности од варијантности
- ▶ Правила за свођење израза који садрже сложене типове у изразе који садрже просте типове и параметре су приближно иста
- ▶ Додатно: потребно је обратити пажњу на варијатност типова у односу на одређени параметар јер утиче на смер релације подтипа!

## Унификација типова (наставак) III

$List<T>$ , коваријантно у односу на  $T$   
 $Map<K, V>$ , инваријантно у односу на  $K$ ,  
коваријантно у односу на  $V$

$ArrayList \leq List$

$LinkedList \leq List$

$HashMap \leq Map$

$OrderedHashMap \leq Map$

$Q, P, R$

$Q \leq P \leq R$

$K, L, M$

$K \leq L \leq M$

## Унификација типова (наставак) IV

$$A(p_1 : List<X>, p_2 : Map<X, Y>) \rightarrow Y$$
$$a_1 = LinkedList<Q>$$
$$a_2 = HashMap<Q, P>$$
$$res = A(a_1, a_2)$$
$$X, Y = ?$$

## Унификација типова (наставак) V

$$type(a_1) \leq type(p_1)$$

$$type(a_2) \leq type(p_2)$$

Прослеђивање аргумента функцији захтева да пружени тип буде подтип траженог типа ( $\leq$ ).

## Унификација типова (наставак) VI

$LinkedList<Q> \leq List<X>$

$HashMap<Q, P> \leq Map<X, Y>$



## Унификација типова (наставак) VII

$$\textit{LinkedList} \leq \textit{List}$$

$$Q \leq X$$

$$\textit{HashMap} \leq \textit{Map}$$

$$Q = X$$

$$P \leq Y$$

Приликом свођења на простији облик, сложени типови су задржали релацију подтипа ( $\leq$ ).

Код параметара који су коваријантни, услов је да задовољавају релацију подтипа ( $\leq$ ).

Код параметара који су инваријантни, услов је да задовољавају релацију једнакости ( $=$ ).

## Унификација типова (наставак) VIII

$$Q \leq X$$

$$Q = X$$

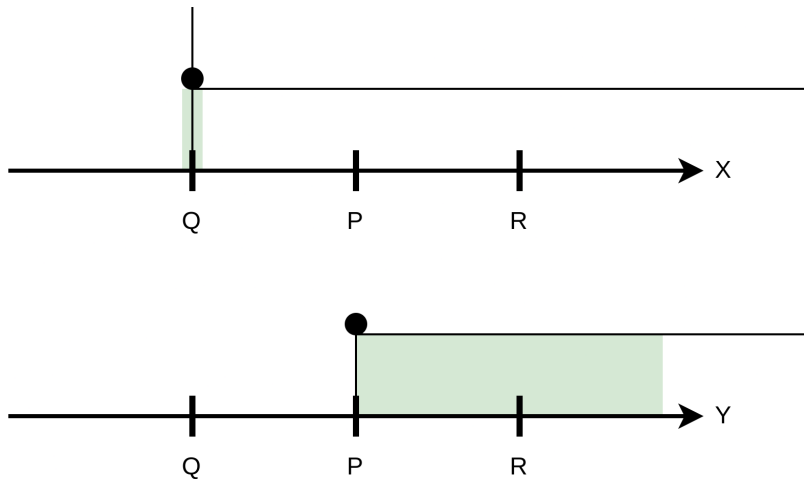
$$P \leq Y$$

Унификација је успешна!

Познати типови су задовољили задата ограничења, а интервал решења непознатих типова је исправан.

Из интервала по потреби бирамо горњу или доњу границу (задаје се као додатно ограничење).

## Унификација типова (наставак) IX



## Унификација типова (наставак) X

$$A(p_1 : List<X>, p_2 : Map<X, Y>) \rightarrow Y$$
$$a_1 = LinkedList<Q>$$
$$a_2 = HashMap<P, R>$$
$$res = A(a_1, a_2)$$
$$X, Y = ?$$

## Унификација типова (наставак) XI

$$type(a_1) \leq type(p_1)$$

$$type(a_2) \leq type(p_2)$$

## Унификација типова (наставак) XII

$$\mathit{LinkedList}\langle Q \rangle \leq \mathit{List}\langle X \rangle$$

$$\mathit{HashMap}\langle P, R \rangle \leq \mathit{Map}\langle X, Y \rangle$$

## Унификација типова (наставак) XIII

$$\textit{LinkedList} \leq \textit{List}$$

$$Q \leq X$$

$$\textit{HashMap} \leq \textit{Map}$$

$$P = X$$

$$R \leq Y$$

## Унификација типова (наставак) XIV

$$Q \leq X$$

$$P = X$$

$$R \leq Y$$

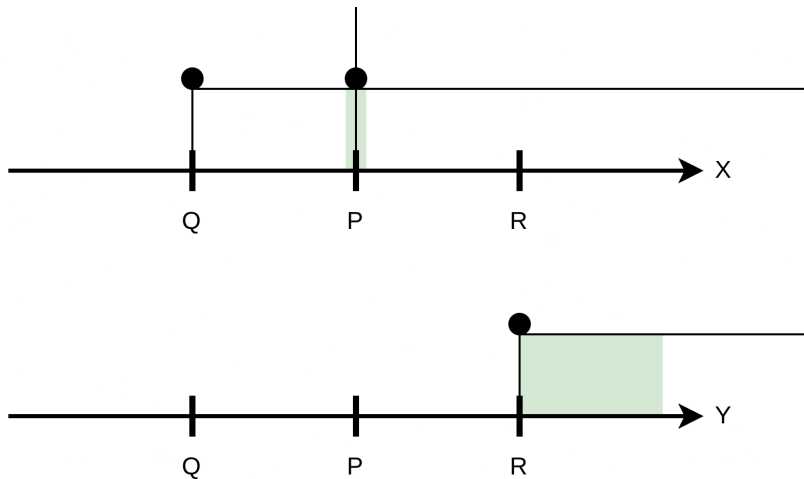
Унификација је успешна!

Уочавамо да иако су два различита типа прослеђења на месту на којем је параметар  $X$ , гледамо који тип задовољава оба ограничења.

Тако параметар  $X$  постаје јединствено одређен тип!



## Унификација типова (наставак) XV



## Унификација типова (наставак) XVI

$$A(p_1 : List<X>, p_2 : Map<X, Y>) \rightarrow Y$$

$$a_1 = LinkedList<Q>$$

$$a_2 = ArrayList<K>$$

$$res = A(a_1, a_2)$$

$$X, Y = ?$$

## Унификација типова (наставак) XVII

$$\textit{type}(a_1) \leq \textit{type}(p_1)$$

$$\textit{type}(a_2) \leq \textit{type}(p_2)$$

## Унификација типова (наставак) XVIII

$$\mathit{LinkedList}\langle Q \rangle \leq \mathit{List}\langle X \rangle$$

$$\mathit{ArrayList}\langle K \rangle \leq \mathit{Map}\langle X, Y \rangle$$

## Унификација типова (наставак) XIX

$LinkedList \leq List$

$Q \leq X$

$ArrayList \leq Map$

Дошло је до грешке!

Није могуће унификовати два сложена типа чији конструктор типова није сродан!

## Унификација типова (наставак) XX

$$A(p_1 : List<X>, p_2 : Map<X, Y>) \rightarrow Y$$
$$a_1 = LinkedList<Q>$$
$$a_2 = HashMap<K, P>$$
$$res = A(a_1, a_2)$$
$$X, Y = ?$$

## Унификација типова (наставак) XXI

$$type(a_1) \leq type(p_1)$$

$$type(a_2) \leq type(p_2)$$

## Унификација типова (наставак) XXII

$$\textit{LinkedList}\langle Q \rangle \leq \textit{List}\langle X \rangle$$

$$\textit{HashMap}\langle K, P \rangle \leq \textit{Map}\langle X, Y \rangle$$



## Унификација типова (наставак) XXIII

$$LinkedList \leq List$$

$$Q \leq X$$

$$HashMap \leq Map$$

$$K = X$$

$$P \leq Y$$

## Унификација типова (наставак) XXIV

$$Q \leq X$$

$$K = X$$

$$R \leq Y$$

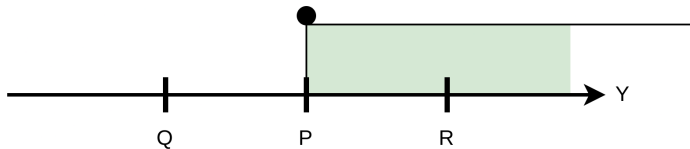
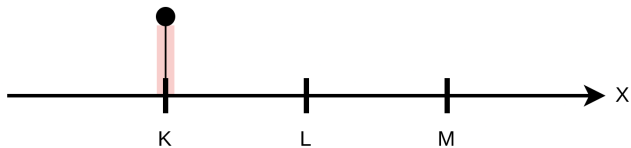
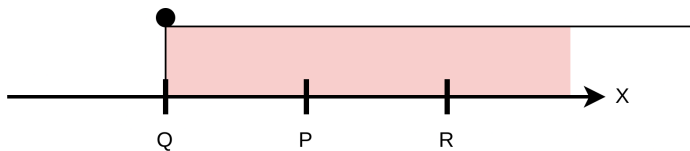
Унификација је неуспешна!

Не постоји тип који задовољава ограничења која се захтевају од параметра  $X$ .

Интервал решења  $X$  није исправан јер типови  $Q$  и  $K$  нису у никаквој релацији.

Доња граница интервала мора да буде мања или једнака горњој граници како би интервал био исправан.

## Унификација типова (наставак) XXV



# Имплементација I

- ▶ Приказани модел тражења интервала решења преко преклапања решења на оси је погодан за разумевање од стране људи
- ▶ Могуће га је имплементирати као алгоритам, али приказани облик није најпогоднији
- ▶ Уместо накнадног тражења интервала из ограничења, једноставније је интервал тражити у лету
- ▶ Подсетник: решење има горњу и доњу границу
- ▶ Ограничење које смо уврстили у интервал можемо да уклонимо из скупа нерешених ограничења
- ▶ Унификација је успешна уколико су сва ограничења разрешена успешно

## Имплементација II

- ▶ Нека је  $X$  непознат тип, а  $[lower, upper]$  интервал решења
- ▶ Интервал је исправан уколико важи  $lower \leq upper$
- ▶ Горња или доња граница могу да недостају
- ▶ У решавању бројчаних неједначина крајње границе интервала су  $+\infty$  и  $-\infty$
- ▶ У неједначинама типова, обиласком хијерархије типова се проналазе доња и горња граница у складу са релацијом подтипа

# Имплементација III

- ▶ Ограничење  $X \geq T$ :
  - ▶ како би интервал био исправан, мора да важи  $T \leq upper$
  - ▶ уколико  $lower$  нема вредност, доња граница добија нову вредност  $lower = T$
  - ▶ уколико  $T \leq lower$ , доња граница задржава стару вредност
  - ▶ уколико  $T \geq lower$ , доња граница добија нову вредност  $lower = T$

# Имплементација IV

- ▶ Ограничење  $X \leq T$ :
  - ▶ како би интервал био исправан, мора да важи  $T \geq lower$
  - ▶ уколико  $upper$  нема вредност, горња граница добија нову вредност  $upper = T$
  - ▶ уколико  $T \geq upper$ , горња граница задржава стару вредност
  - ▶ уколико  $T \leq upper$ , горња граница добија нову вредност  $upper = T$

# Имплементација V

- ▶ Проблем: како уврстити ограничење  $=$ ?
- ▶ Подсетник: релација подтипа је антисиметрична  $(A \leq B \wedge B \leq A \Rightarrow A = B)!$
- ▶ Уместо ограничења  $A = B$  уводимо пар ограничења:  $A \leq B$  и  $B \leq A$
- ▶ У пракси, ово се ради у једном кораку
- ▶ Интервал тражимо по правилима дефинисаним за ограничења  $\leq$  и  $\geq$



# Закључак I

- ▶ Као покушај налажења заједничког језика разумљивог и рачуанрима и људима, настали су виши програмски језици
- ▶ Додатна замисао је била аутоматска провера исправности програма
- ▶ Једнакост између очекиваног и обезбеђеног типа је била довољан услов да се спречи неисправна употреба вредности у програму
- ▶ Како појмови у природи показују сличност, замисао је била представити ту сличност кроз релацију подтипа

## Закључак II

- ▶ Сложени типови су неопходни како би се описале појаве из природе, као и појаве из света рачунарства
- ▶ Релација подтипа код сложених типова зависи од конструктора типова и од садржаја самих типова
- ▶ За неке типове је природно да релација између садржаних типова директно одговара релацији између сложених типова (коваријантност), док је за одређене типове она супротна (контраваријантност)
- ▶ За разлику од математике, рачунарство познаје појам мутабилности
- ▶ Иако типови природно показују варијантност, мутабилност је често значајно ограничава

# Закључак III

- ▶ Релација подтипа не обезбеђује довољну флексибилност за типове попут листа и мапа
- ▶ Генерички типови омогућавају да корисник при инстанцирању типа зада прецизнија ограничења типа
- ▶ Код генеричких типова, потребно је обавити поступак унификације како би одредили вредности непознатих параметара
- ▶ Уколико систем типова подржава само једнакост типова, поступак је једнак решавању система једначина
- ▶ Уколико систем типова подржава релацију, поступак је једнак решавању система неједначина

# Литература I

- ▶ Type Checking (Part 1), Keith Schwarz  
<https://web.stanford.edu/class/archive/cs/cs143/cs143.1128/lectures/09/Slides09.pdf>
- ▶ Type Checking (Part 2), Keith Schwarz  
<https://web.stanford.edu/class/archive/cs/cs143/cs143.1128/lectures/10/Slides10.pdf>
- ▶ Everything You Always Wanted to Know About Type Inference  
- And a Little Bit More, Robert Griesemer  
<https://go.dev/blog/type-inference>
- ▶ Unification in Chalk (part 1), Niko Matsakis  
<https://smallcultfollowing.com/babysteps/blog/2017/03/25/unification-in-chalk-part-1/>

## Литература II

- ▶ Type unification rules (The Go Programming Language Specification) [https://tip.golang.org/ref/spec#Type\\_unification\\_rules](https://tip.golang.org/ref/spec#Type_unification_rules)
- ▶ Kotlin type constraints (Kotlin language specification), Marat Akhin & Mikhail Belyaev <https://kotlinlang.org/spec/kotlin-type-constraints.html>
- ▶ Type inference (Rust Compiler Development Guide) <https://rustc-dev-guide.rust-lang.org/type-inference.html>