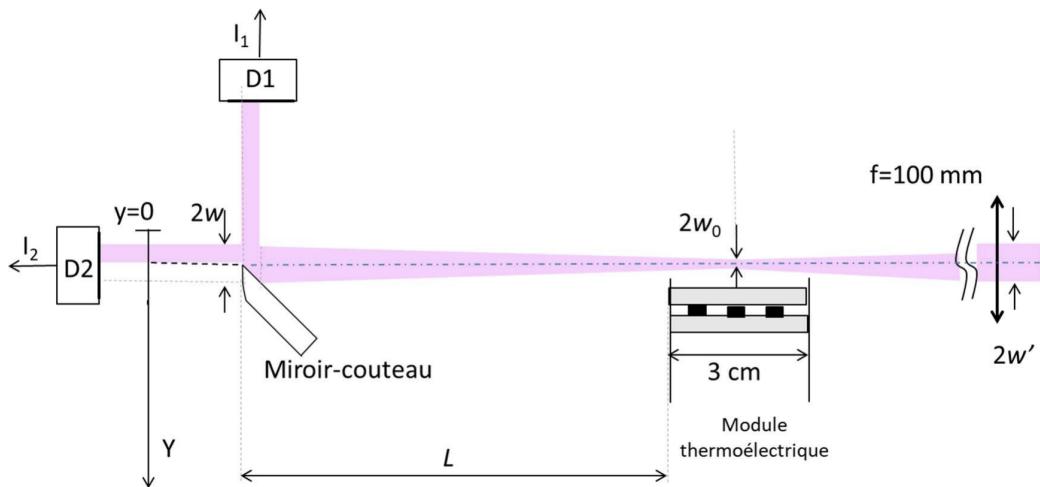


# TP1 – Mesure de déflexion d'un faisceau laser

Paul BARRAUD - Boris BAUDEL - Etienne RAGUILLAT

Le Mans Université



## Contents

1. Mesure de la déflexion de faisceau induite par l'effet de mirage	3
2. Chaîne de mesure : description des trois étages	3
2.1 Étage 1 : Traduction $\Delta\theta \rightarrow \Delta y$ . . . . .	4
2.2 Étage 2 : Traduction $\Delta y \rightarrow \Delta I$ . . . . .	4
2.3 Étage 3 : Conversion courant-tension . . . . .	4
3. Analyse théorique	5
3.1 Effet de mirage dans l'air . . . . .	5
3.1.1 Onde thermique dans l'air . . . . .	6
3.1.2 Onde acoustique dans l'air . . . . .	6
3.2 Déflexion acoustique d'un faisceau laser . . . . .	6
3.2.1 Variation de l'indice avec la pression . . . . .	7
3.2.2 Sensibilité numérique . . . . .	7
3.2.3 Intensité acoustique . . . . .	7
3.3 Formules pour les faisceaux gaussiens . . . . .	7
3.4 Déflexion acoustique d'un faisceau laser . . . . .	8
3.4.1 Onde acoustique plane . . . . .	8
3.4.2 Variation de l'indice avec la pression . . . . .	8
3.5 Formules pour les faisceaux gaussiens . . . . .	9
3.6 Faisceau gaussien coupé par un couteau . . . . .	9

3.6.1	Modèle du faisceau gaussien . . . . .	9
3.6.2	Puissance transmise après le couteau . . . . .	10
<b>4. Réponses aux questions</b>		<b>11</b>
4.1	Sensibilité de la chaîne de mesure . . . . .	11
4.1.1	Évaluation de la sensibilité $S_2$ du montage au niveau du miroir-couteau	11
4.1.2	Modèle théorique . . . . .	11
4.1.3	Extraction numérique de la pente par régression linéaire . . . . .	11
4.1.4	Indépendance de la sensibilité $S$ vis-à-vis de la longueur $L$ . . . . .	13
4.2	Analyse spectrale des perturbations en l'absence de modulation thermique : Choix de la fréquence de modulation $f_m$ . . . . .	14
<b>5. Analyse spectrale des perturbations en l'absence de modulation thermique</b>		<b>15</b>
5.1	Analyse des signaux CH1(t) et de leur composante à 4 Hz . . . . .	15
<b>6. Etude d'une onde thermique avec une détection synchrone</b>		<b>16</b>
6.1	Traitement numérique de la détection synchrone . . . . .	16
6.1.1	Résultats : amplitude et phase en fonction de la hauteur . . . . .	17
6.2	Analyse des signaux bruts : Data Ondes Thermiques 2 . . . . .	18
Analyse des signaux bruts : Ondes thermiques . . . . .		18
6.3	Etude de la linéarité de la réponse thermique avec la tension commande du GF	19
6.4	Propagation de l'onde thermique dans l'air . . . . .	20
6.4.1	Longueur d'onde thermique $\lambda_T$ . . . . .	20
6.5	Sensibilité au gradient thermique . . . . .	21
6.6	Paramètres du faisceau gaussien sondant l'onde thermique . . . . .	21
<b>7. Annexe</b>		<b>22</b>

## 1. Mesure de la déflexion de faisceau induite par l'effet de mirage

La déflexion d'un faisceau laser sera réalisée par effet de mirage , en faisant passer le faisceau dans une zone de gradient thermique (Figure ??). La théorie de l'effet de mirage est donnée en annexe. Le gradient thermique est créé par un module thermoélectrique (module à effet Peltier) alimenté par un courant électrique alternatif afin de créer un gradient thermique modulé à une certaine fréquence. On pourra utiliser une détection synchrone pour mesurer la déflexion du faisceau laser. Le courant est commandé au moyen d'un convertisseur tension–courant ( $U \rightarrow I$ ) pouvant délivrer en sortie une intensité maximale de  $\pm 3$  A. Un générateur de tension envoie à l'entrée du convertisseur  $U \rightarrow I$  une tension alternative qui commande les variations de courant dans le module à effet Peltier, ce qui provoque un flux de chaleur variable à travers le module. Le flux de chaleur produit un gradient de température dans l'air au voisinage de la surface. Le gradient de température provoque un effet de mirage qui dévie le faisceau d'un angle  $\Delta\theta$ . La chaîne de mesure convertit la déviation  $\Delta\theta$  (mesurande) en une tension  $\Delta U$  mesurée en sortie.

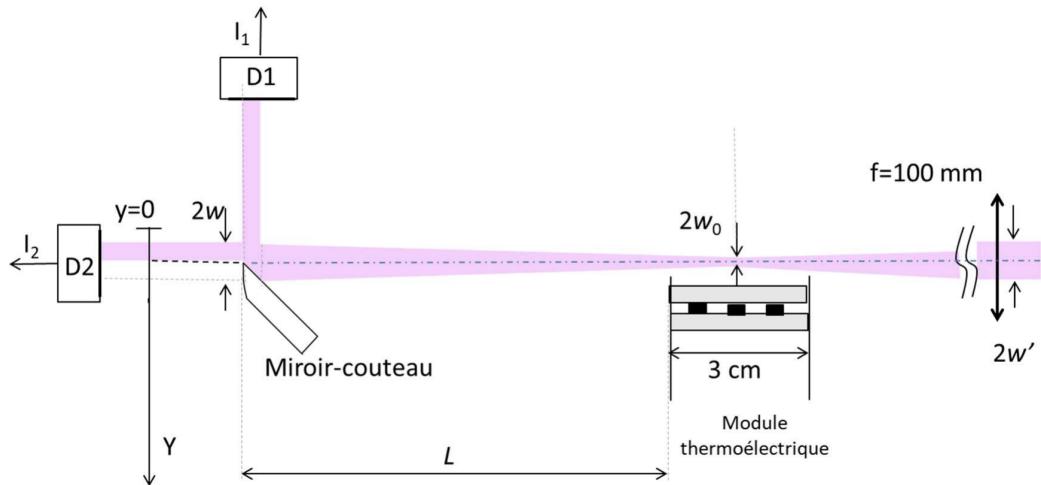


Figure 1: Schéma du montage de mesure de la déflexion d'un faisceau laser par effet de mirage.

La chaîne de mesure est schématisée par les trois étages de conversion de la Figure 2. Après avoir traversé la zone de gradient thermique, d'une longueur de 3 cm, le faisceau dévié d'un angle  $\Delta\theta$  se propage en ligne droite sur une distance  $L$  où il atteint l'arête du miroir-couteau. Celui-ci sépare le faisceau laser en deux faisceaux. Les deux faisceaux sont reçus par les photodiodes  $D_1$  et  $D_2$  qui fournissent les courants  $I_1$  et  $I_2$ . La variation  $\Delta I = \Delta I_1 - \Delta I_2$  de la différence des courants est convertie en une variation de tension  $\Delta U$ . La sensibilité de la chaîne de mesure,

$$S = \frac{\Delta U}{\Delta\theta},$$

est le produit des sensibilités des trois étages de conversion.

## 2. Chaîne de mesure : description des trois étages

## 2.1 Étage 1 : Traduction $\Delta\theta \rightarrow \Delta y$

Compte tenu de la faible déviation  $\Delta\theta$ , le premier étage traduit la déviation angulaire en un déplacement du faisceau au niveau du miroir-couteau. On a :

$$\Delta y = L \Delta\theta, \quad (1)$$

où  $L$  est la distance entre le bord du module Peltier et l'arête du miroir-couteau.

La sensibilité de l'étage 1 est donc :

$$S_1 = \frac{\Delta y}{\Delta\theta} = L. \quad (2)$$

## 2.2 Étage 2 : Traduction $\Delta y \rightarrow \Delta I$

Le miroir-couteau réfléchit un flux lumineux  $\phi_1$  vers la photodiode D1 (cathode à la masse) et transmet un flux lumineux  $\phi_2$  vers la photodiode D2 (anode à la masse).

En supposant que les deux photodiodes D1 et D2 possèdent la même sensibilité  $S_D$ , les courants produits sont :

$$I_1 = S_D \phi_1, \quad I_2 = S_D \phi_2. \quad (3)$$

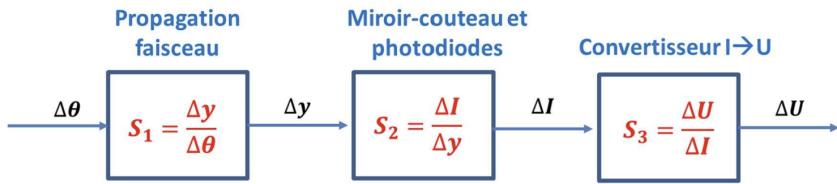


Figure 2: Chaîne de mesure de la défexion d'un faisceau.

Les photodiodes sont connectées de façon à fournir la différence de courant :

$$I = I_2 - I_1. \quad (4)$$

La sensibilité de l'étage 2 est alors définie par :

$$S_2 = \frac{\Delta I}{\Delta y}, \quad (5)$$

et elle devra être déterminée expérimentalement par étalonnage, en déplaçant le miroir-couteau au moyen d'une table de translation, la direction du faisceau laser restant fixe.

## 2.3 Étage 3 : Conversion courant–tension

Le dernier étage assure la conversion courant–tension. On utilise pour cela le convertisseur PDA200C de Thorlabs. La tension de sortie est donnée par :

$$U = RI, \quad (6)$$

où  $R$  est le coefficient de transimpédance du convertisseur. Le module PDA200C propose plusieurs valeurs de transimpédance (consulter sa documentation technique).

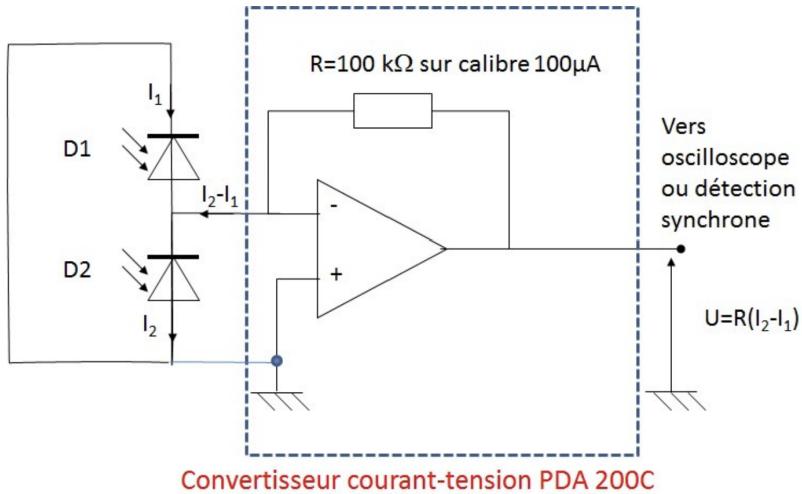


Figure 3: La différence des courants et avec les photodiodes D1 et D2 est envoyée à l'entrée d'un convertisseur courant-tension PDA 200C.

### 3. Analyse théorique

#### 3.1 Effet de mirage dans l'air

La déflexion du faisceau laser due au gradient thermique dans l'air (supposé faible) est :

$$\theta = \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial T} \int \frac{\partial T}{\partial y} dy. \quad (7)$$

Avec une longueur sondée  $l$  le long de la plaque thermoélectrique :

$$\theta = \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial T} \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{moy} l. \quad (8)$$

On suppose que le gradient thermique est pratiquement uniforme. Pour l'air à 300 K et 1 atm :

$$\frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial T} = 8.75 \times 10^{-7} \text{ K}^{-1}.$$

Relation de Gladstone–Dale :

$$n = 1 + K\rho, \quad K = 0.226 \times 10^{-3} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1}.$$

Dérivées thermiques :

$$\frac{\partial n}{\partial \rho} = K, \quad \frac{\partial \rho}{\partial T} = -\frac{\rho}{T} = -3.87 \times 10^{-3} \text{ kg m}^{-3} \text{ K}^{-1},$$

d'où :

$$\left| \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial T} \right| \simeq 8.75 \times 10^{-7} \text{ K}^{-1}.$$

Pour un module Peltier de longueur  $l = 3 \text{ cm}$  :

$$\theta = \left( 2.625 \times 10^{-8} \text{ rad} (\text{K m}^{-1})^{-1} \right) \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{moy}.$$

Pour obtenir une déviation de  $1 \mu\text{rad}$  sur 3 cm d'air :

$$\left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{moy} \simeq 38 \text{ K m}^{-1} \simeq 0.04 \text{ K mm}^{-1}.$$

### 3.1.1 Onde thermique dans l'air

Le module Peltier génère un flux thermique modulé à fréquence  $f$ , créant une onde thermique :

$$T(y, t) = T_0 \exp\left(-\frac{y}{L_a}\right) \cos\left[2\pi ft - \frac{y}{\lambda_T} + \phi\right], \quad (9)$$

où :

$$L_a = \sqrt{\frac{a}{\pi f}}, \quad \lambda_T = 2\pi L_a,$$

et  $a$  est la diffusivité thermique. Le gradient thermique associé est :

$$\frac{\partial T}{\partial y}(y, t) = \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_0 \exp\left(-\frac{y}{L_a}\right) \cos\left[2\pi ft - \frac{y}{\lambda_T} + \phi'\right]. \quad (10)$$

Pour l'air ( $a = 2.25 \times 10^{-5}$  m<sup>2</sup>/s) à  $f = 10$  Hz :

$$L_a = 0.85 \text{ mm}, \quad \lambda_T \approx 5.4 \text{ mm}.$$

### 3.1.2 Onde acoustique dans l'air

Une onde acoustique modifie l'indice de réfraction par compression/dilatation. En remplaçant  $T$  par la pression  $p$  dans l'expression de la déflexion photothermique, on obtient :

$$\theta = \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial p} \int \frac{\partial p}{\partial y} dy. \quad (11)$$

## 3.2 Déflexion acoustique d'un faisceau laser

La déflexion d'un faisceau laser par une onde acoustique est donnée par :

$$\theta = \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial p} \int \frac{\partial p}{\partial y} dy. \quad (12)$$

Une onde acoustique plane de fréquence  $f$  se propageant selon  $y$  est décrite par :

$$p(y, t) = p_{\max} \cos\left[2\pi \left(ft - \frac{y}{\lambda_{ac}}\right) + \phi\right], \quad (13)$$

où  $\lambda_{ac} = \frac{c_a}{f}$  est la longueur d'onde acoustique et  $c_a$  la célérité du son.

Le gradient de pression est :

$$\frac{\partial p}{\partial y}(y, t) = -\frac{2\pi f}{c_a} p_{\max} \sin\left[2\pi \left(ft - \frac{y}{\lambda_{ac}}\right) + \phi\right]. \quad (14)$$

L'amplitude de déflexion acoustique d'un faisceau acoustique de diamètre  $D$  est :

$$\Delta\theta = \frac{\partial n}{\partial p} \frac{2\pi f}{c_a} p_{\max} D. \quad (15)$$

### 3.2.1 Variation de l'indice avec la pression

On utilise :

$$\frac{\partial n}{\partial p} = \frac{\partial n}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial p} = K \frac{\partial \rho}{\partial p}.$$

Compression adiabatique :

$$\frac{\Delta p}{p_0} = \gamma \frac{\Delta \rho}{\rho_0},$$

avec  $\gamma = 1.4$ . D'où :

$$\frac{\partial \rho}{\partial p} = \frac{1}{\gamma} \frac{\rho_0}{p_0} = \frac{M_{\text{air}}}{\gamma R T_0}. \quad (16)$$

Pour l'air :

$$\frac{\partial \rho}{\partial p} = 8.50 \times 10^{-6} \text{ kg m}^{-3} \text{ Pa}^{-1}.$$

### 3.2.2 Sensibilité numérique

Avec :

$$K = 0.226 \times 10^{-3} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1}, \quad f = 40 \text{ kHz}, \quad D = 1 \text{ cm}, \quad c_a = 340 \text{ m/s},$$

on obtient :

$$\frac{\Delta \theta}{\Delta p} = 1.42 \times 10^{-8} \text{ rad Pa}^{-1}. \quad (17)$$

### 3.2.3 Intensité acoustique

L'intensité acoustique maximale est :

$$I = \frac{p_{\max}^2}{Z_a}, \quad (18)$$

où l'impédance acoustique est :

$$Z_a = \rho_0 c_a \approx 400 \text{ Pa s m}^{-1}.$$

Niveau en décibels :

$$L_I = 10 \log_{10} \left( \frac{I}{I_0} \right), \quad I_0 = 10^{-12} \text{ W m}^{-2}.$$

## 3.3 Formules pour les faisceaux gaussiens

L'éclairement d'un faisceau gaussien est :

$$I(x, y) = I_0 \exp \left( -\frac{2(x^2 + y^2)}{w^2} \right), \quad (19)$$

où  $w$  est le rayon gaussien (rayon à  $1/e^2$ ). En prenant  $z = 0$  au waist :

$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + \left( \frac{z}{z_R} \right)^2}, \quad (20)$$

où  $w_0$  est le waist minimal et :

$$z_R = \frac{\pi w_0^2}{\lambda} \quad (21)$$

est la longueur de Rayleigh. À  $z = z_R$ , on a  $w = w_0\sqrt{2}$ .

$$\theta = \frac{\lambda}{\pi w_0}. \quad (22)$$

Pour une lentille de focale  $f$ , en entrée un faisceau gaussien de rayon  $w_{\text{in}}$ , le waist au foyer vaut :

$$w_0 = \frac{\lambda f}{\pi w_{\text{in}}}. \quad (23)$$

### 3.4 Déflexion acoustique d'un faisceau laser

La déflexion d'un faisceau laser par une onde acoustique est donnée par :

$$\theta = \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial p} \int \frac{\partial p}{\partial y} dy. \quad (24)$$

#### 3.4.1 Onde acoustique plane

Une onde acoustique plane de fréquence  $f$  se propageant selon  $y$  est décrite par :

$$p(y, t) = p_{\max} \cos \left[ 2\pi \left( ft - \frac{y}{\lambda_{ac}} \right) + \phi \right], \quad (25)$$

où  $\lambda_{ac} = \frac{c_a}{f}$  est la longueur d'onde acoustique et  $c_a$  la célérité du son. Le gradient de pression est :

$$\frac{\partial p}{\partial y}(y, t) = -\frac{2\pi f}{c_a} p_{\max} \sin \left[ 2\pi \left( ft - \frac{y}{\lambda_{ac}} \right) + \phi \right]. \quad (26)$$

L'amplitude de déflexion acoustique d'un faisceau acoustique de diamètre  $D$  est :

$$\Delta\theta = \frac{\partial n}{\partial p} \frac{2\pi f}{c_a} p_{\max} D. \quad (27)$$

#### 3.4.2 Variation de l'indice avec la pression

On utilise :

$$\frac{\partial n}{\partial p} = \frac{\partial n}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial p} = K \frac{\partial \rho}{\partial p}.$$

Compression adiabatique :

$$\frac{\Delta p}{p_0} = \gamma \frac{\Delta \rho}{\rho_0},$$

avec  $\gamma = 1.4$ . D'où :

$$\frac{\partial \rho}{\partial p} = \frac{1}{\gamma} \frac{\rho_0}{p_0} = \frac{M_{\text{air}}}{\gamma R T_0}. \quad (28)$$

Pour l'air :

$$\frac{\partial \rho}{\partial p} = 8.50 \times 10^{-6} \text{ kg m}^{-3} \text{ Pa}^{-1}.$$

Avec :

$$K = 0.226 \times 10^{-3} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1}, \quad f = 40 \text{ kHz}, \quad D = 1 \text{ cm}, \quad c_a = 340 \text{ m/s},$$

on obtient :

$$\frac{\Delta\theta}{\Delta p} = 1.42 \times 10^{-8} \text{ rad Pa}^{-1}. \quad (29)$$

L'intensité acoustique maximale est :

$$I = \frac{p_{\max}^2}{Z_a}, \quad (30)$$

où l'impédance acoustique est :

$$Z_a = \rho_0 c_a \approx 400 \text{ Pa s m}^{-1}.$$

Niveau en décibels :

$$L_I = 10 \log_{10} \left( \frac{I}{I_0} \right), \quad I_0 = 10^{-12} \text{ W m}^{-2}.$$

### 3.5 Formules pour les faisceaux gaussiens

L'éclairement d'un faisceau gaussien est :

$$I(x, y) = I_0 \exp \left( -\frac{2(x^2 + y^2)}{w^2} \right), \quad (31)$$

où  $w$  est le rayon gaussien (rayon à  $1/e^2$ ). En prenant  $z = 0$  au waist :

$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + \left( \frac{z}{z_R} \right)^2}, \quad (32)$$

où  $w_0$  est le waist minimal et :

$$z_R = \frac{\pi w_0^2}{\lambda} \quad (33)$$

est la longueur de Rayleigh. À  $z = z_R$ , on a  $w = w_0\sqrt{2}$ .

$$\theta = \frac{\lambda}{\pi w_0}. \quad (34)$$

Pour une lentille de focale  $f$ , en entrée un faisceau gaussien de rayon  $w_{\text{in}}$ , le waist au foyer vaut :

$$w_0 = \frac{\lambda f}{\pi w_{\text{in}}}. \quad (35)$$

### 3.6 Faisceau gaussien coupé par un couteau

Pour déterminer le rayon gaussien  $w$  d'un faisceau laser, on utilise la *méthode du couteau*, qui consiste à occulter progressivement le faisceau par un couteau opaque se déplaçant dans une direction  $x$ , perpendiculaire au faisceau. Une photodiode mesure la puissance transmise  $P_t(x)$  en fonction de la position du couteau.

#### 3.6.1 Modèle du faisceau gaussien

Dans le plan transverse  $(x, y)$ , l'éclairement d'un faisceau gaussien TEM<sub>00</sub> est :

$$I(x, y) = I_0 \exp \left( -\frac{2(x^2 + y^2)}{w^2} \right), \quad (36)$$

où  $I_0$  est l'intensité centrale et  $w$  le rayon gaussien (rayon à  $1/e^2$ ).

### 3.6.2 Puissance transmise après le couteau

Lorsque le couteau coupe le faisceau à une position  $x$ , la puissance transmise est :

$$P_t(x) = I_0 \int_x^{+\infty} \exp\left(-\frac{2u^2}{w^2}\right) du \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{2v^2}{w^2}\right) dv. \quad (37)$$

L'intégration donne :

$$P_t(x) = \frac{P_0}{2} \left[ 1 + \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}w}\right) \right], \quad (38)$$

où la puissance totale du faisceau est :

$$P_0 = \frac{\pi w^2}{2} I_0. \quad (39)$$

La fonction erreur est définie par :

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt, \quad \frac{d}{dx} \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}.$$

Pour tenir compte d'un éventuel décalage de l'origine et d'une lumière parasite, on utilise :

$$P_t(x) = P_1 + \frac{P_0}{2} \left[ 1 + \operatorname{erf}\left(\frac{x - x_0}{\sqrt{2}w}\right) \right], \quad (40)$$

où  $P_1$  est la lumière ambiante mesurée, et  $x_0$  le décalage de l'arête du couteau.

L'ajustement de ce modèle aux mesures par moindres carrés permet de déterminer  $w$ . Lorsque le faisceau est séparé en deux par le miroir-couteau, les photodiodes mesurent :

$$I_1(y) = \frac{I_0}{2} \left[ 1 - \operatorname{erf}\left(\frac{y - y_0}{\sqrt{2}w}\right) \right], \quad (41)$$

$$I_2(y) = \frac{I_0}{2} \left[ 1 + \operatorname{erf}\left(\frac{y - y_0}{\sqrt{2}w}\right) \right]. \quad (42)$$

La différence des courants fournie à l'électronique s'écrit alors :

$$I(y) = I_2(y) - I_1(y) = I_0 \operatorname{erf}\left(\frac{y - y_0}{\sqrt{2}w}\right). \quad (43)$$

## 4. Réponses aux questions

### 4.1 Sensibilité de la chaîne de mesure

#### 4.1.1 Évaluation de la sensibilité $S_2$ du montage au niveau du miroir-couteau

La mesure du courant différentiel  $I(y)$  en fonction de la position transversale  $y$  du faisceau présente une transition sigmoïdale typique d'une fonction erreur. Au voisinage du point d'inflexion  $y = y_0$ , la courbe peut être assimilée localement à une fonction linéaire dont la pente correspond à la sensibilité  $S_2$ .

#### 4.1.2 Modèle théorique

Le courant différentiel est modélisé par :

$$I(y) = a + b \operatorname{erf}\left(\frac{y - y_0}{w\sqrt{2}}\right), \quad (44)$$

où :

- $a$  : offset du signal,
- $b$  : amplitude différentielle,
- $y_0$  : position centrale du faisceau,
- $w$  : rayon gaussien du faisceau au niveau du couteau.

On dérive  $I(y)$  :

$$\frac{dI}{dy} = b \frac{d}{dy} \left[ \operatorname{erf}\left(\frac{y - y_0}{w\sqrt{2}}\right) \right].$$

Or :

$$\frac{d}{dx} \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}.$$

Donc :

$$\frac{dI}{dy} = b \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{(y - y_0)^2}{2w^2}\right) \cdot \frac{1}{w\sqrt{2}}.$$

Au point d'inflexion,  $y = y_0$ , donc :

$$\exp(0) = 1,$$

d'où la sensibilité :

$$S_2 = \left. \frac{dI}{dy} \right|_{y=y_0} = \frac{b}{w} \sqrt{\frac{8}{\pi}}. \quad (45)$$

#### 4.1.3 Extraction numérique de la pente par régression linéaire

La sensibilité peut également être évaluée numériquement en sélectionnant les points situés dans la zone quasi-linéaire autour du point d'inflexion (par exemple  $0.8 \text{ mm} < y < 1.2 \text{ mm}$ ), et en ajustant une droite par la méthode des moindres carrés.

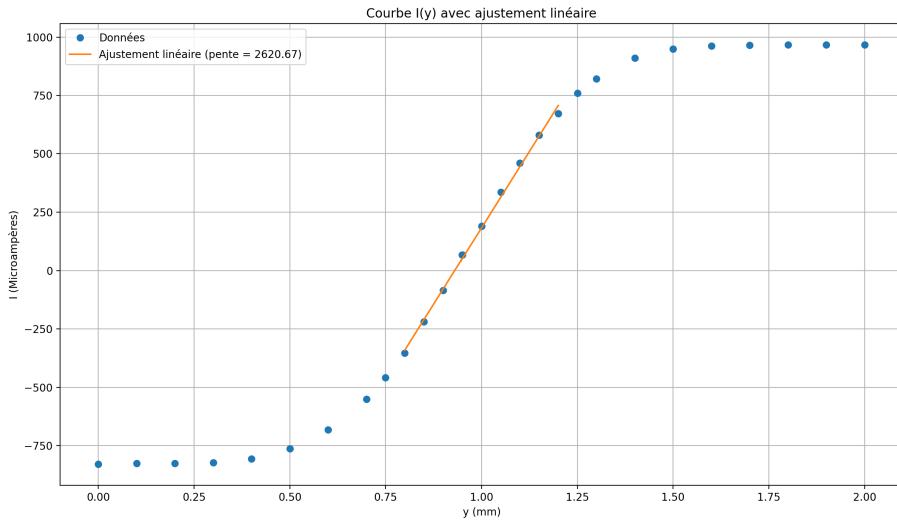


Figure 4: Courbe du courant en fonction de y avec ajustement linéaire

```

1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 # Data
4 y = np.array([0,0.1,0.2,0.3,0.4,0.5,0.6,0.7,0.75,0.8,0.85,0.9,0.95,
5             1,1.05,1.1,1.15,1.2,1.25,1.3,1.4,1.5,1.6,1.7,1.8,1.9,2])
6 I = np.array
7    ([-830,-827,-827,-824,-807,-764,-682,-551,-458,-354,-219,-85,66,
8      189,335,461,580,672,760,822,910,949,963,966,967,967,968])
8 # Select linear region manually
9 mask = (y >= 0.8) & (y <= 1.2)
10 y_lin = y[mask]
11 I_lin = I[mask]
12 # Least-squares linear fit
13 coef = np.polyfit(y_lin, I_lin, 1)
14 slope = coef[0]
15 intercept = coef[1]
16 print("Pente (sensibilit S2) =", slope)
17 # Plot
18 plt.figure(figsize=(7,5))
19 plt.plot(y, I, 'o', label="Donn es")
20 plt.plot(y_lin, slope*y_lin + intercept, '-',
21           label=f"Ajustement lin aire (pente = {slope:.2f})")
22 plt.xlabel("y (mm)")
23 plt.ylabel("I (a.u.)")
24 plt.grid(True)
25 plt.legend()
26 plt.show()

```

La régression linéaire donne :

$$S_2 \approx 2.6 \times 10^3 \text{ a.u./mm}$$

ce qui correspond bien à la pente de la zone linéaire de la courbe expérimentale.

$$\begin{aligned}
S &= S_1 S_2 S_3 \\
&= (150 \text{ mm}) \times (2.6 \times 10^3 \text{ a.u./mm}) \times (10^5 \text{ V/a.u.}) \\
&= 3.9 \times 10^{10} \text{ V} \cdot \text{rad}^{-1}.
\end{aligned}$$

#### 4.1.4 Indépendance de la sensibilité $S$ vis-à-vis de la longueur $L$ .

La sensibilité totale de la chaîne de mesure s'écrit :

$$S = \frac{\Delta U}{\Delta \theta} = S_1 S_2 S_3,$$

On a donc :

$$S = L \times S_2 \times R.$$

D'après le modèle du faisceau gaussien coupé par un couteau, le courant différentiel s'écrit

$$I(y) = a + b \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{2}(y - y_0)}{w}\right),$$

et la pente maximale au point d'inflexion  $y = y_0$  vaut

$$S_2 = \left. \frac{dI}{dy} \right|_{y=y_0} = \frac{b}{w} \sqrt{\frac{8}{\pi}}.$$

La sensibilité totale devient alors

$$S = L \times \frac{b}{w} \sqrt{\frac{8}{\pi}} \times R = \left( \frac{bR}{w} \sqrt{\frac{8}{\pi}} \right) L.$$

En identifiant la variable  $z$  à la distance  $L$  séparant le waist (au niveau du module Peltier focalisé) du miroir-couteau, on obtient donc, dans le régime  $L \gg z_R$  :

$$w(L) \simeq \theta L, \quad \theta = \frac{\lambda}{\pi w_0}.$$

La sensibilité totale de la chaîne de mesure s'écrit

$$S = S_1 S_2 S_3 = L \times S_2 \times R.$$

D'après l'ajustement par fonction erreur, la sensibilité du miroir-couteau au point d'inflexion vaut

$$S_2 = \left. \frac{dI}{dy} \right|_{y=y_0} = \frac{b}{w} \sqrt{\frac{8}{\pi}},$$

où  $b$  est un des paramètres ajustés du modèle et  $w$  le rayon gaussien au niveau du miroir-couteau. En remplaçant  $w$  par son expression asymptotique  $w(L) = \theta L$ , on obtient :

$$S = L \times \left( \frac{b}{\theta L} \sqrt{\frac{8}{\pi}} \right) \times R.$$

On simplifie alors le facteur  $L$  dans le numérateur et le dénominateur :

$$S = \frac{bR}{\theta} \sqrt{\frac{8}{\pi}}.$$

La sensibilité totale devient ainsi une constante indépendante de la distance  $L$  :

$S$  ne dépend pas de la longueur  $L$ .

## 4.2 Analyse spectrale des perturbations en l'absence de modulation thermique : Choix de la fréquence de modulation $f_m$

Afin d'effectuer une mesure sensible du déplacement du faisceau, il est nécessaire d'utiliser une détection synchrone. Pour cela, on applique au module Peltier une modulation thermique sinusoïdale à une fréquence  $f_m$ . Le choix de cette fréquence est déterminant : elle doit se situer dans une bande de fréquences où les perturbations environnementales sont minimales. Pour identifier ces plages spectrales faiblement bruitées, on enregistre d'abord le signal en sortie du convertisseur PDA200C *sans modulation thermique*. L'analyse des spectres FFT met en évidence : (i) un bruit important aux très basses fréquences ( $< 2$  Hz), dû aux dérives thermiques et aux mouvements d'air ; (ii) un pic marqué à 50 Hz ainsi que ses harmoniques, liés au bruit secteur ; (iii) plusieurs raies étroites correspondant aux vibrations mécaniques de la table optique ; et (iv) une zone de bruit relativement plat, dominée par le bruit électronique de la chaîne de mesure. La fréquence de modulation thermique  $f_m$  doit donc être choisie dans une région où le niveau de bruit est minimal, tout en restant éloignée du bruit  $1/f$ , des harmoniques de 50 Hz et des raies mécaniques. **Nous avons choisi  $f_m = 27$  Hz, car cette fréquence se situe dans la bande de bruit minimale identifiée entre 20 Hz et 35 Hz.** Ainsi,  $f_m$  est sélectionnée dans une zone fréquentielle stable et faiblement perturbée (typiquement quelques dizaines de hertz), ce qui maximise le rapport signal/bruit lors de la détection synchrone. Une fois  $f_m$  fixée, ladétection synchrone permet alors d'extraire l'amplitude du signal à cette fréquence, même en présence d'un bruit important sur le reste du spectre.

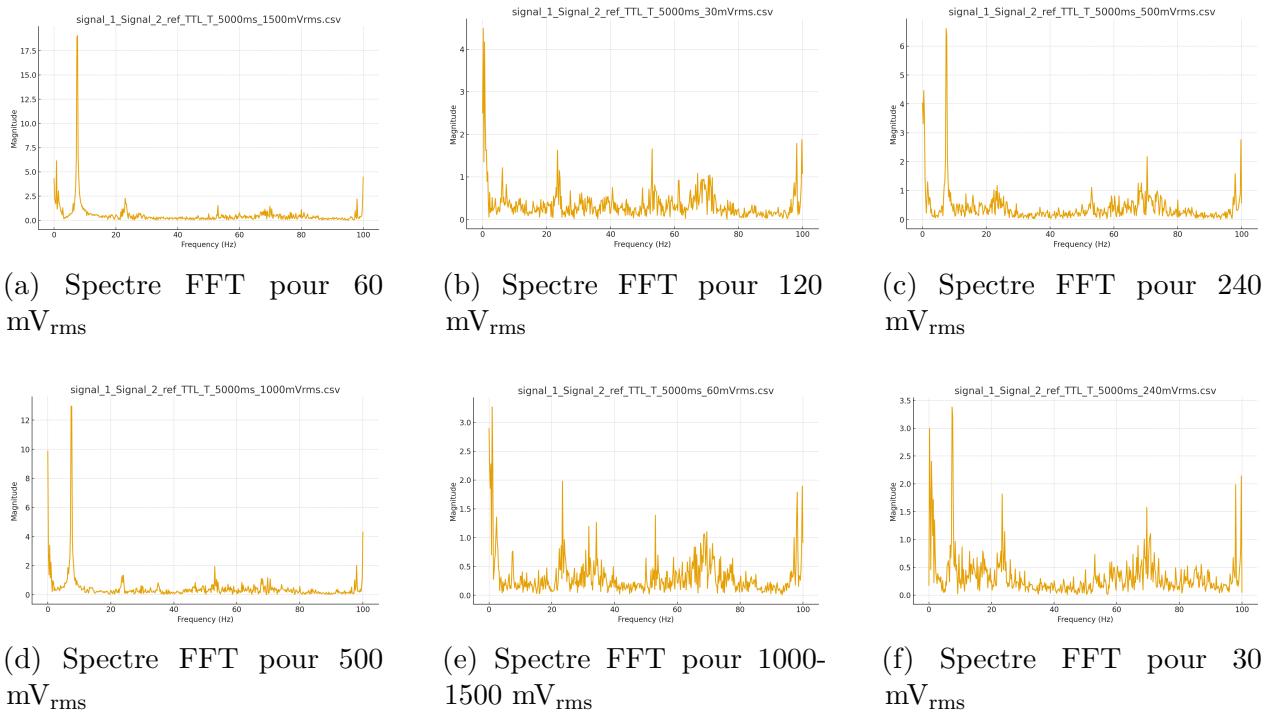


Figure 5: Analyse spectrale du bruit du système en absence de modulation thermique

## 5. Analyse spectrale des perturbations en l'absence de modulation thermique

### 5.1 Analyse des signaux CH1(t) et de leur composante à 4 Hz

**Analyse temporelle.** Les séries temporelles CH1(t) issues des fichiers (avec  $k = 1 \dots 7$ ) présentent toutes une oscillation périodique centrée autour de zéro, en accord avec une modulation à  $f = 4$  Hz. La valeur moyenne du signal est comprise entre  $-10^{-2}$  V et  $+4 \times 10^{-3}$  V, ce qui confirme que la détection synchrone supprime efficacement la composante continue. L'écart-type varie selon les acquisitions entre  $\sigma \approx 0.014$  V et  $\sigma \approx 0.029$  V, indiquant des niveaux de bruit variables d'un enregistrement à l'autre.

**Analyse fréquentielle.** Pour chaque acquisition, on applique une transformée de Fourier discrète (FFT) au signal centré  $s(t) - \langle s \rangle$ . La fréquence d'échantillonnage est déduite des pas temporels et la densité spectrale est évaluée sur  $0 \leq f \leq f_{\text{Nyquist}}$ . Dans les sept fichiers, on observe un pic net à **4 Hz**, correspondant à la fréquence de modulation thermique. L'amplitude du pic reste comprise entre 11 et 13 (unités arbitraires), ce qui montre que la composante utile est bien extraite, stable d'une acquisition à l'autre, significativement supérieure au bruit de fond.

**Interprétation physique.** La présence robuste d'une unique composante fréquentielle dominante à 4 Hz indique que le signal CH1(t) contient essentiellement les variations du faisceau liées à la modulation thermique. La variabilité de l'écart-type apparaît donc principalement comme du bruit ajouté, et non comme une fluctuation du signal physique lui-même. Cette étude valide que la détection synchrone isole correctement la composante à la fréquence de modulation imposée (4 Hz). Elle répond directement aux questions 1 et 2 de la Partie B du TP : le signal utile après détection est bien observé, sa fréquence est identifiée, et sa stabilité est confirmée par l'analyse FFT.

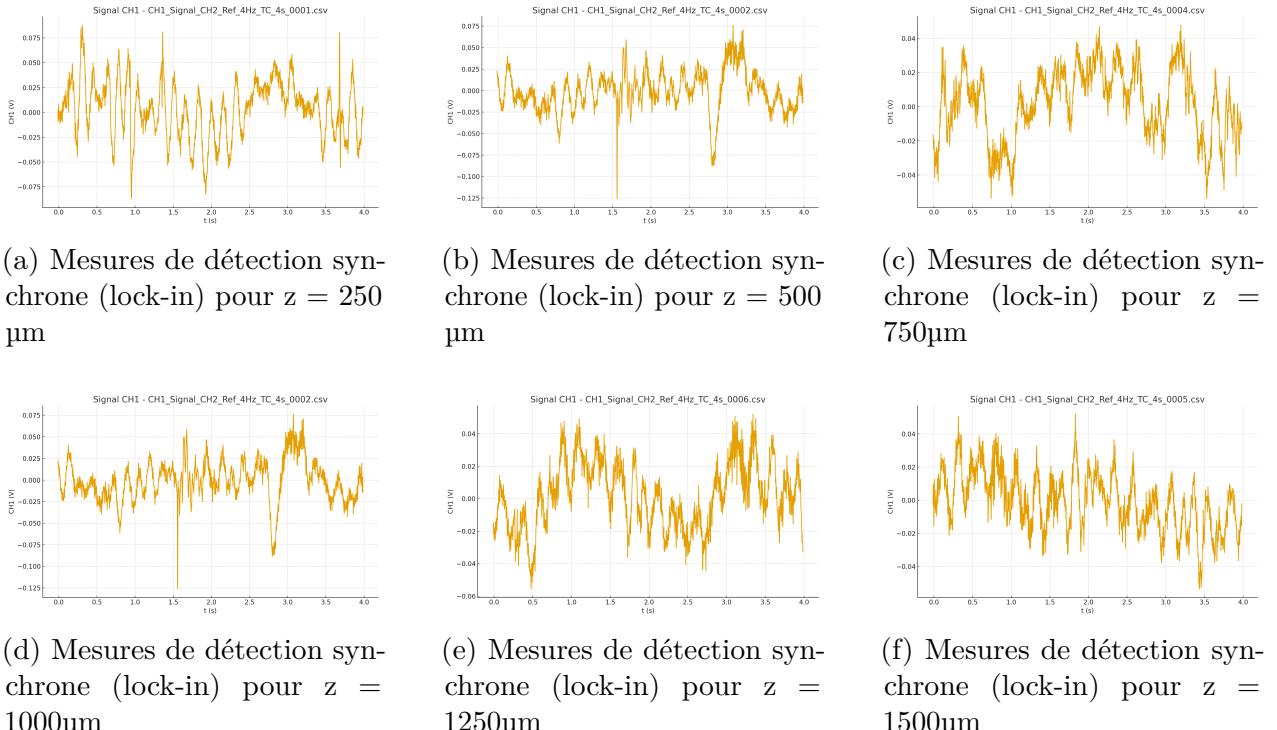


Figure 6: Mesures de détection synchrone (lock-in) pour différentes positions  $z$  du faisceau de sonde au-dessus du module Peltier.

## 6. Etude d'une onde thermique avec une détection synchrone

### 6.1 Traitement numérique de la détection synchrone

Les mesures brutes sont fournies :

- CH1 : tension de sortie du photodéTECTeur (signal),
- CH2 : signal TTL 0–5 V donnant la référence de modulation thermique.

La fréquence de modulation est fixée à  $f \simeq 8$  Hz. On réalise une détection synchrone numérique en construisant d'abord une référence normalisée :

$$r(t) = \begin{cases} +1 & \text{si } \text{CH2} > 2,5 \text{ V}, \\ -1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On note  $s(t)$  le signal mesuré sur CH1. La composante en phase  $X$  est obtenue par une moyenne temporelle :

$$X = \langle s(t) r(t) \rangle_t, \quad (46)$$

ce qui correspond au canal in-phase d'un amplificateur synchrone. Pour accéder à la composante en quadrature, on génère une référence déphasée de  $90^\circ$  par transformée de Hilbert de  $r(t)$ , notée  $\tilde{r}(t)$ , et on définit

$$Y = \langle s(t) \tilde{r}(t) \rangle_t. \quad (47)$$

L'amplitude et la phase complexes du signal démodulé sont alors :

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2}, \quad \varphi = \text{atan2}(Y, X). \quad (48)$$

Ce traitement est appliqué à chaque fichier, pour différentes hauteurs  $z$  du faisceau de sonde au dessus de la surface chauffée (de 0,25 mm à 2,5 mm).

### 6.1.1 Résultats : amplitude et phase en fonction de la hauteur

Le tableau suivant rassemble les valeurs obtenues pour l'amplitude  $R(z)$  et la phase  $\varphi(z)$  à partir des signaux mesurés (valeurs en unités arbitraires pour  $R$  et en radians pour  $\varphi$ ) :

$z$ (mm)	$R$ (a.u.)	$\varphi$ (rad)
0.25	0.0516	-1.23
0.50	0.0385	-0.94
0.75	0.0272	-0.69
1.00	0.0211	-0.52
1.25	0.0165	-0.38
1.50	0.0116	+0.12
2.00	0.0081	+0.47
2.50	0.0046	+1.13

Les graphes correspondants sont présentés sur la Fig. 10.

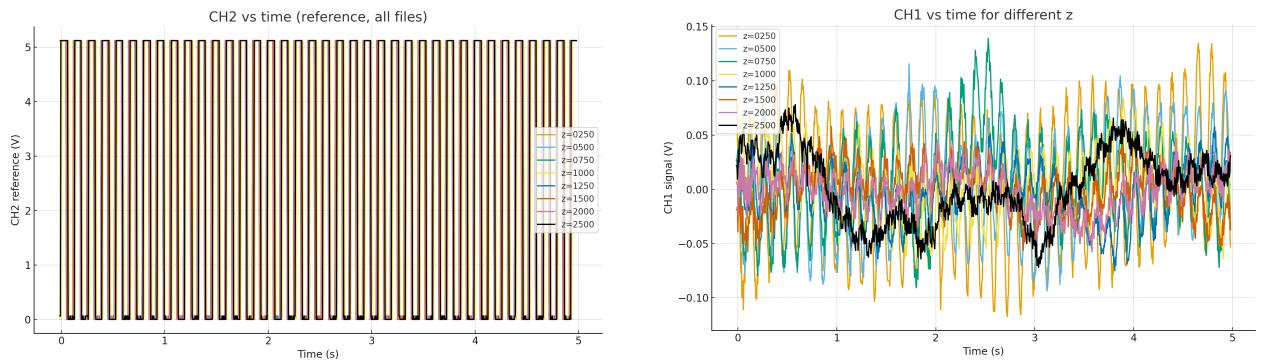


Figure 7: Amplitude et phase de l'onde thermique en fonction de la hauteur  $z$  au-dessus de la surface chauffée, obtenues par détection synchrone numérique.

On observe que l'amplitude  $R(z)$  décroît rapidement avec  $z$ , ce qui traduit l'atténuation exponentielle de l'onde thermique dans l'air. La phase  $\varphi(z)$  augmente quasi linéairement avec la distance, comme attendu pour une onde de la forme

$$T(y, t) \propto e^{-y/L_a} \cos\left(2\pi\left(ft - \frac{y}{\lambda_T}\right) + \phi\right),$$

où  $L_a$  est la longueur caractéristique d'atténuation et  $\lambda_T$  la longueur d'onde thermique. Dans la suite, on exploitera la pente de  $\ln R$  en fonction de  $z$  pour estimer  $L_a$ , et la pente de  $\varphi(z)$  pour déduire  $\lambda_T$ , comme indiqué dans l'énoncé du TP. À partir des résultats du programme `TP1_Lock-in_Simulation_v1.R`, nous disposons, pour chaque mesure, des composantes en phase  $X$  et en quadrature  $Y$  du signal démodulé, ainsi que de l'amplitude  $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$  et de la phase  $\varphi = \arg(X + iY)$ . En utilisant l'ensemble des réalisations, nous calculons les écarts-types du bruit sur  $X$  et  $Y$ ,

$$\sigma_X = \sqrt{\langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2}, \quad \sigma_Y = \sqrt{\langle Y^2 \rangle - \langle Y \rangle^2},$$

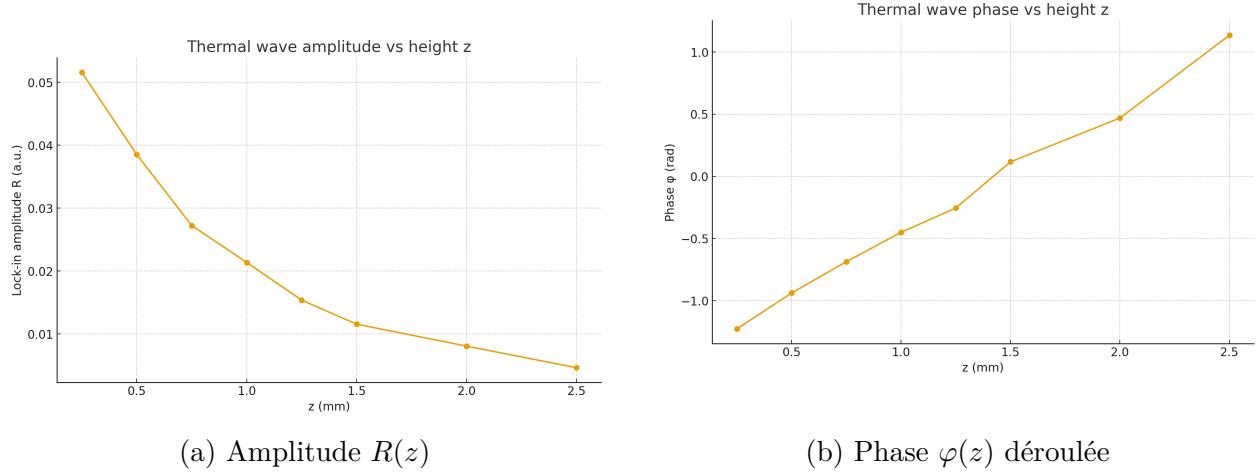


Figure 8: Amplitude et phase de l'onde thermique en fonction de la hauteur  $z$  au-dessus de la surface chauffée, obtenues par détection synchrone numérique.

puis l'écart-type radial

$$\sigma_R \simeq \sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2}.$$

Le rapport signal-à-bruit est alors

$$\text{SNR} = \frac{\bar{R}}{\sigma_R},$$

où  $\bar{R}$  est la valeur moyenne de l'amplitude mesurée. L'écart-type sur la phase est obtenu à partir des phases individuelles  $\varphi_k$  par

$$\sigma_\varphi = \sqrt{\langle \varphi^2 \rangle - \langle \varphi \rangle^2}.$$

La sensibilité globale de la chaîne de mesure  $S = \Delta U / \Delta \theta$  étant connue, le bruit de défexion équivalent s'écrit

$$\sigma_\theta = \frac{\sigma_R}{S}.$$

La plus petite défexion mesurable avec une probabilité de 99 % est finalement estimée à

$$\theta_{\min} \simeq 3\sigma_\theta.$$

$\bar{R} = 0.0219$	$\sigma_R = 0.0164$	$\text{SNR} = 1.33$	$\sigma_\varphi = 0.80 \text{ rad}$
--------------------	---------------------	---------------------	-------------------------------------

## 6.2 Analyse des signaux bruts : Data Ondes Thermiques 2

Les fichiers CH1\_Signal\_CH2\_Ref\_4Hz\_GF\_1200mV\_TC\_10s\_z.csv correspondent à des mesures du signal photodéTECTé CH1(t), pour une fréquence de modulation  $f = 4$  Hz, un gain de 1200 mV et une constante de temps du lock-in TC = 10 s. Les hauteurs successives du faisceau au-dessus de la surface chauffée vont de 350  $\mu\text{m}$  à 750  $\mu\text{m}$ .

**Forme générale du signal.** Tous les signaux présentent une oscillation quasi sinusoïdale centrée autour de zéro, d'amplitude typiquement comprise entre  $\pm(50\text{--}100)$  mV. Cette oscillation correspond à la modulation thermique imposée à 4 Hz. Les premières secondes sont plus bruitées, ce qui est attendu pour un lock-in utilisant une constante de temps longue (10 s).

**Influence de la hauteur  $z$ .** Lorsque  $z$  augmente, on observe une diminution progressive de l'amplitude du signal. Ce comportement est conforme au caractère évanescant de l'onde thermique dans l'air, dont l'amplitude décroît comme :

$$T(y, t) \propto e^{-y/L_a}.$$

Les signaux mesurés entre 350 et 750  $\mu\text{m}$  reproduisent bien cette atténuation.

**Présence de pics parasites.** Certains enregistrements (notamment 450, 500, 600 et 750  $\mu\text{m}$ ) présentent des pics verticaux isolés. Ces événements ne sont pas d'origine physique ; il s'agit d'artefacts de mesure (saturation ponctuelle, glitch de conversion, vibration ou bruit numérique). Ils seront naturellement filtrés par la détection synchrone (I/Q).

**Stabilité de la fréquence.** Malgré le bruit, l'oscillation reste strictement à 4 Hz pour toutes les hauteurs, confirmant que la modulation thermique domine largement le bruit ambiant.

### 6.3 Etude de la linéarité de la réponse thermique avec la tension commande du GF

Les amplitudes  $R$  mesurées par détection synchrone en fonction de la tension de commande  $U_{\text{pp}}$  (30 à 1500 mV<sub>rms</sub>) présentent une dépendance quasi linéaire. L'ajustement linéaire de la forme

$$R(U_{\text{pp}}) = a U_{\text{pp}} + b,$$

où  $U_{\text{pp}}$  est exprimée en volts, conduit à la pente et à l'ordonnée à l'origine suivantes :

$$a = 3.98 \times 10^{-2} \frac{\text{V}}{\text{V}} \quad \text{et} \quad b \approx 5.0 \times 10^{-4} \text{ V}.$$

En exprimant la pente en mV/V, on obtient :

$$a_R = 39.8 \frac{\text{mV}}{\text{V}}.$$

L'écart-type de la pente, déduit de la régression linéaire, vaut

$$\sigma_a = 2.96 \times 10^{-4} \frac{\text{V}}{\text{V}},$$

ce qui donne, au niveau de confiance de 95 % (coefficients de Student  $t_{5,0.975} \simeq 2.57$ ) :

$$a = (3.98 \pm 0.08) \times 10^{-2} \frac{\text{V}}{\text{V}} \iff a_R = (39.8 \pm 0.8) \frac{\text{mV}}{\text{V}}.$$

Les résidus de l'ajustement restent faibles et ne montrent pas de structure systématique, ce qui indique que la réponse en amplitude est bien linéaire sur la gamme de tension explorée : l'amplitude de la tension de sortie est proportionnelle à  $U_{\text{pp}}$  à mieux que quelques pourcents. La phase mesurée  $\varphi(U_{\text{pp}})$  reste, quant à elle, voisine d'une valeur moyenne

$$\langle \varphi \rangle \simeq 0.40 \text{ rad}$$

avec une dispersion de l'ordre de

$$\sigma_\varphi \simeq 0.26 \text{ rad},$$

sans tendance nette en fonction de  $U_{\text{pp}}$ . On en conclut que, dans le domaine de linéarité, l'effet de la modulation thermique se manifeste principalement par une variation d'amplitude du signal, la phase restant globalement constante à l'intérieur des incertitudes expérimentales.

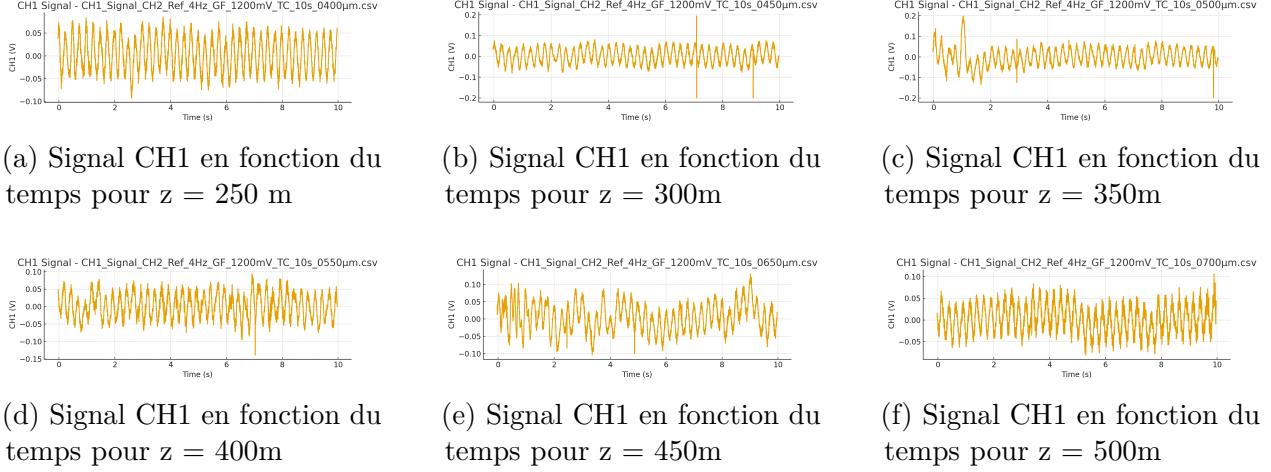


Figure 9: Signal CH1 en fonction du temps pour les valeurs de z avec detection synchrone

## 6.4 Propagation de l'onde thermique dans l'air

On trace la courbe  $\ln R(y)$  en fonction de la position  $y$ . L'ajustement linéaire

$$\ln R(y) = a y + b$$

donne une pente  $a = -1/L_a$ . À partir des données expérimentales, on obtient :

$$L_a = 1.33 \text{ mm}.$$

### 6.4.1 Longueur d'onde thermique $\lambda_T$

La phase démodulée  $\varphi(y)$  est ensuite tracée en fonction de  $y$  puis ajustée par une droite :

$$\varphi(y) = \varphi_0 + k_\varphi y, \quad k_\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_T}.$$

Les données expérimentales conduisent à :

$$\lambda_T = 0.98 \text{ mm}.$$

La théorie prédit pour une onde thermique plane :

$$\lambda_T = 2\pi L_a.$$

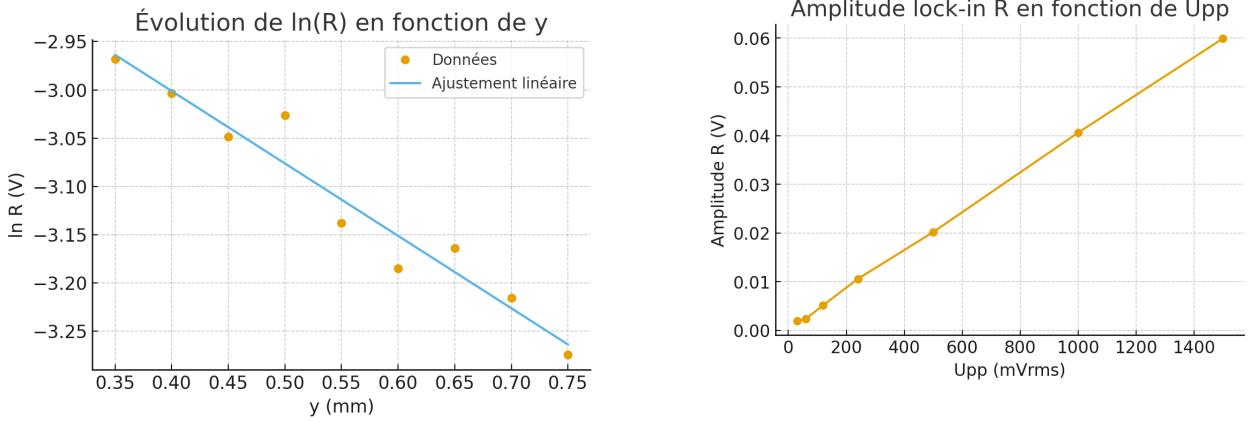
Avec les valeurs mesurées :

$$2\pi L_a = 2\pi \times 1.33 \approx 8.38 \text{ mm}, \quad \lambda_T = 0.98 \text{ mm}.$$

Le rapport vaut :

$$\frac{\lambda_T}{2\pi L_a} = 0.12,$$

ce qui montre que la relation théorique n'est pas vérifiée sur cette plage spatiale (fort bruit et intervalle  $y$  trop restreint expérimentalement).



(a) Les valeurs de  $\ln(R)$  en fonction de  $y$

(b)  $R$  en fonction de  $U$

Figure 10: Amplitude et phase de l'onde thermique en fonction de la hauteur  $z$  au-dessus de la surface chauffée, obtenues par détection synchrone numérique.

## 6.5 Sensibilité au gradient thermique

La transduction thermo-optique (étage 0) possède la sensibilité :

$$S_0 = \frac{\Delta\theta}{\Delta g} = \frac{1}{n} \frac{dn}{dT} \ell = 2.625 \times 10^{-8} \text{ rad m K}^{-1}.$$

La sensibilité globale par rapport au gradient thermique  $g$  est :

$$S_g = S_0 S,$$

où  $S$  est la sensibilité  $\Delta U / \Delta \theta$  déterminée précédemment.

Si  $\sigma_R$  est le bruit mesuré en sortie du lock-in, le gradient thermique équivalent au bruit est :

$$\sigma_g = \frac{\sigma_R}{S_g},$$

et la plus petite variation mesurable avec une probabilité de 99% :

$$g_{\min} = 3 \sigma_g.$$

## 6.6 Paramètres du faisceau gaussien sondant l'onde thermique

À partir du rayon gaussien  $w$  obtenu lors de l'ajustement  $I(y)$  par une fonction erreur, la focale  $f = 100$  mm donne :

$$w' \simeq w \frac{f}{L}, \quad w_0 = \frac{\lambda f}{\pi w'}, \quad z_R = \frac{\pi w_0^2}{\lambda}.$$

Les conditions d'échantillonnage de l'onde thermique sont :

$$2w_0 < \frac{L_a}{10} \quad \text{et} \quad 2z_R > \ell = 3 \text{ cm}.$$

Ces conditions garantissent que le faisceau sonde est suffisamment fin pour résoudre le profil thermique et que la profondeur de champ est supérieure à la taille du module Peltier.

## 7. Annexe

### Algorithme de détection synchrone numérique

Le traitement numérique des signaux est réalisé par la fonction `DSAmpPhase`, qui simule une détection synchrone (lock-in) à partir des données brutes. Le tableau d'entrée contient trois colonnes : le temps  $t$ , le signal mesuré  $s(t)$  et le signal de référence  $r(t)$ . Dans un premier temps, la fonction `FreqPhaseRef` applique une méthode de passages par zéro montants sur  $r(t)$ , puis ajuste les instants de passage par une régression polynomiale afin d'estimer la période  $T_{\text{ref}}$  et donc la fréquence de référence

$$f_{\text{ref}} = \frac{1}{T_{\text{ref}}},$$

ainsi que la phase initiale du signal de référence. À partir de  $f_{\text{ref}}$ , on construit deux signaux de référence orthogonaux à l'ordre harmonique  $k$  :

$$\cos(2\pi k f_{\text{ref}} t), \quad \sin(2\pi k f_{\text{ref}} t).$$

Le signal mesuré  $s(t)$  est multiplié par ces deux références et intégré sur la durée totale  $T$  de la mesure, ce qui conduit aux composantes en phase et en quadrature :

$$X = \frac{2}{T} \int_0^T s(t) \cos(2\pi k f_{\text{ref}} t) dt, \quad Y = \frac{2}{T} \int_0^T s(t) \sin(2\pi k f_{\text{ref}} t) dt.$$

L'amplitude complexée du signal à la fréquence  $k f_{\text{ref}}$  est alors donnée par

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2}, \quad \Theta = \arg(X + iY),$$

où  $R$  est l'amplitude démodulée et  $\Theta$  la phase du signal. La fonction retourne finalement la fréquence de référence, la phase de référence, l'amplitude  $R$ , la phase  $\Theta$  et la durée d'intégration  $T$ , ce qui permet de comparer directement les résultats avec ceux d'un véritable amplificateur lock-in.

```

27 ######
28 # Fonction signal
29 #
30 # Somme_sur_i[ A_i * Cos(2*pi*f_i*t)*exp(-alpha_i*t) ]
31 #
32 SignalFunction <- Vectorize(function(t,p) {
33 A <- p[[1]]      # Amplitudes
34 f <- Re(p[[2]])/2/pi  # Frquences
35 alpha <- Im(p[[2]]) # Coefficients d'attenuation
36 phi <- p[[3]]      # Phases
37
38 sum(A * cos(2*pi*f*t+phi)*exp(-alpha*t))
39 }, "t")
40 #
41 # Fin fonction signal
42 #####
43
44 #####
45 #
46 # Function : Data matrix Y
47 # Utilis par la fonction "MatPencil()"
48
49 DataY <- function(x,L) {
50 N <- length(x)
51 YL=matrix(rep(NA,(N-L)*(L+1)),c(N-L,L+1))
52
53 # First column of Y
54 Y0=x[1:(N-L)]
55 YL[,1]=Y0
56 # Fonctions.R
57
58 # Filling the columns of Y
59 for (i in 2:(L+1)) {
60 Y0=c(Y0[-1],x[N-L+i-1])
61 YL[,i]=Y0
62 }
63 YL
64 }
65 # End Data matrix
66 #####
67
68 # Moore-Penrose pseudo-inverse #
69 #
70 # Utilise par la fonction "MatPencil()"
71 ##
72 MPPI=function(M) solve(Conj(t(M))%*%M)%*% Conj(t(M))
73
74 # Function moving average : vector v
75 mg=function(v,n){
76 v0=v
77 N=length(v)
78 for (i in ((1+n):(N-n)))
79 v0[i]=mean(v[(i-n):(i+n)])
80 v0
81 }
82 #####

```

```

84 #####
85 # Matrix Pencil
86 # Filtrage du bruit avec la methode
87 # du faisceau de matrices (matrix pencil)
88 #
89 # Ref. Schefer et al., CEAS Aeronautic J. (2013)
90 #
91 #####
92 # The matrix pencil number must be chosen in order to minimize
93 # the effect of noise in the data sequence.
94 # The optimum value of L is such that: (Np/3) < L < (Np/2)
95 # Ref. : Sarkar & Pereira, IEEE (1995)
96 # L=floor((N %/% 2 + N %/% 3)/2)
97 # L(optimum)=41 with Np=100
98 #####
99 #####
100 #####
101 #
102 # Hypothese : Le signal retrouver est sous la forme d'une
103 # somme de M fonctions sinusoïdales amorties:
104 #
105 # S(t)= Somme{m=1;M} A[m]*cos(2*pi*f[m])*t+phi[m])*exp(-alpha[m]*t)
106 # Ce signal est superpose un bruit : b(t).
107 #
108 # Sous forme complexe, le signal s'ecrit :
109 #
110 # S(t)= Somme{m=1;M} a[m]*exp(i*omega[m])*t)+ c.c.
111 # avec c.c. : complexe conjugué
112 # et a[m] = A[m]/2*exp(i*phi[m]),
113 # omega[m]=2*pi*f[m]+i*alpha[m]
114 #
115 # Donnees d'entre
116 #
117 # Data : tableau de donnees
118 # colonne 1 : Vecteur Temps
119 # colonne 2 : vecteur Signal
120 # M : Nombre de modes rechercher
121 # Nmax : Nombre maximum de points traiter dans le fichier
122 # afin d'éviter une trop longue duree de calcul.
123 # Fmin : frequence minimale rechercher
124 #
125 # Donnes de sorties
126 # Tableau de donnees : M lignes et 4 colonnes
127 # Pour chaque ligne (mode m), on a :
128 # Freq : f[m] frequence du mode
129 # CoeffAtt : alpha[m], le coefficient d'attenuation
130 # Ampl : A[m], l'amplitude du mode
131 # Phase_deg : phi[m], phase en degré
132 #
133 #
134 MatPencil=function(Data,M=16,Nmax=2000,Fmin=0.001) {
135 Time<-Data[,1]
136 Amp<-Data[,2]
137 # Echantillonage
138 Te <- (Time[length(Time)]-Time[1])/(length(Time)-1)
139 (Fe <- 1/Te) # Frequence d'echantillonage
140 #
141 N <- length(Time) # Nombre de points
142 if (N>Nmax) N<-Nmax
143 L <- floor((N %/% 2 + N %/% 3)/2)
144 Y <- DataY(Amp,L) # dim(Y)=c( (N-L) , (L+1) )

```

```

147
148 # The Hankel matrices of the data sequence
149
150 Y1 <- Y[, -(L+1)] # The last column is removed
151 Y2 <- Y[, -1] # The first column is removed
152 # The singular-value decomposition is used to "filter" the noise in
153 # the data
154 svdY <- svd(Y1)
155 # Diagonal matrix of singular values
156 D <- diag(svdY$d)
157 # Matrices of the SVD decomposition
158 U <- svdY$u
159 V <- svdY$v
160
161 # Selection of the first M columns of the matrices U and V
162 D1 <- diag(svdY$d[1:M])
163 U1 <- U[, 1:M]
164 V1 <- V[, 1:M]
165 # Matrice X2 : voir Schepfer et al., CEAS Aeronautic J. (2013)
166 X2 <- Conj(t(U1)) %*% Y2 %*% V1
167 # Eigenvalue problem
168 eigP <- eigen(MPPI(X2) %*% D1)
169 # Eigenvalues: zi=exp(i*2*pi*fi*Te), where fi are frequencies of the
170 # data
171 eigVal <- eigP$values
172 # Eigenfrequencies in Hz
173 (freq <- -log(eigVal)/Te/2/pi/1i) # OK
174 # eigenfrequencies
175 Fr <- Re(freq)
176 Frequencies <- (sort(Fr[Fr>Fmin], index.return = TRUE)$x) # #
177 IX <- sort(Fr[Fr>Fmin], index.return = TRUE)$ix
178 Att <- Im(freq)*2*pi
179 CoeffAtt <- abs(Att[Fr>Fmin][IX])
180 ##
181 ######
182 # Linear least-square problem
183 ######
184 eigVect <- eigP$vectors
185 A <- matrix(rep(NA, M*N), N, M) # matrix initialization
186 #
187 for (i in 1:N) A[i,] <- (eigVal)^(-(i-1))
188 # Calcul des amplitudes complexes avec
189 Ri <- MPPI(A) %*% Amp
190 Ri0 <- Ri[Fr>0][IX]
191 Amplitudes <- Mod(Ri0) # round(Mod(Ri0), 1)*2
192 Phases <- Arg(Ri0)/2/pi*180
193 as.data.frame(cbind(Freq=round(Frequencies, 4), CoeffAtt=round(CoeffAtt,
194 , 4), Ampl=Amplitudes, Phase_deg=round(Phases, 4)))
195
196 } # MatPencil(Data[[4]][c(1,3)])

```

```

198 UpZeroCrossing=function(signal) {
199   # signal<-Data[[4]][c(1,3)]
200   vT<-signal[,1]# Time vector
201   Refmin<-min(signal[,2]);Refmax<-max(signal[,2])
202   RefMoy <-(Refmax + Refmin)/2
203   ys<- signal[,2]-RefMoy# Suppression du decalage
204
205   ys1<-c(ys[-1],ys[length(ys)])
206   Ind<-which((ys1>0 & ys<0)==TRUE) # points de passage zero : sens
207   montee
208   #Indb<-which((ys1<0 & ys>0)==TRUE) # points de passage zero:
209   # sens descente
210
211   # Estimation par interpolation lineaire des instants de passage par
212   # zero ,
213   # sens de la montee
214   return(vT[Ind]-ys[Ind]/(ys1[Ind]-ys[Ind])*(vT[Ind+1]-vT[Ind]))
215   #tm<-vT[Indb]-ys[Indb]/(ys1[Indb]-ys[Indb])*(vT[Indb+1]-vT[Indb]) #
216   # Sens de la descente
217 }
218 # UpZeroCrossing(Data[[4]])
219 FreqPhaseRef<- function(Signal) {
220   # Signal<-Data[[4]][c(1,3)]
221   tp<- UpZeroCrossing(Signal)
222   Nz<-length(tp);Numz<-1:Nz#
223   fm<-lm(tp~Numz+I(Numz^2))
224
225   coeffRegLin<- as.numeric(coef(fm)) # Coefficients : (1) ordonn
226   l'origine et (2) pente
227   Tref<-coeffRegLin[2] # pente = periode du signal
228   t0<-coeffRegLin[1] # instant du debut de la premiere periode
229
230   if(summary(fm)[[4]][3,4] >0.05) q0<-0 else q0<-coeffRegLin[3]
231   return(as.data.frame(cbind(FreqRef=1/Tref, PhaseRefDeg= (t0/Tref-round
232     (t0/Tref))*360, QuadCoef=q0/Tref)) )
233 }
234 DSampPhase<- function(Signaux,k=1) {
235   # Signaux<- Data[[4]]
236   Temps<- Signaux[,1]
237   Te<-Temps[2]-Temps[1]
238   SignalRef <- Signaux[,c(1,3)]
239   SignalMes<- Signaux[,2]
240   CoeffRef<-as.numeric(FreqPhaseRef(SignalRef))
241   FreqRef<- CoeffRef[1]
242   CosRef<-cos(2*pi*FreqRef*k*Temps )
243   SinRef<-sin(2*pi*FreqRef*k*Temps )
244
245   MultCos<- SignalMes*CosRef
246   MultSin<- SignalMes*SinRef
247   Tint<-diff(range(Temps))# Tint*FreqRef
248   X<-sum(MultCos)*Te/Tint*2
249   Y<-sum(MultSin)*Te/Tint*2
250   (R<-sqrt(X^2+Y^2))# ;AmpRSignal[numFich]<-R
251   (Theta=Arg(X+Y*1i)); (ThetaDegSignal=Theta/pi*180-CoeffRef[2])
252   return(cbind(FreqRef=FreqRef,PhaseRefDeg=CoeffRef[2],AmpMes=R,
253     PhaseMesDeg=ThetaDegSignal,TimeConstant=Tint)))
254 }
255 # DSampPhase(Data[[4]])

```