

Projet : Introduction à la Mécanique Orbitale

CARACTÉRISATION ORBITALE ET STRATÉGIES DE CORRECTION DES PARAMÈTRES ORBITAUX

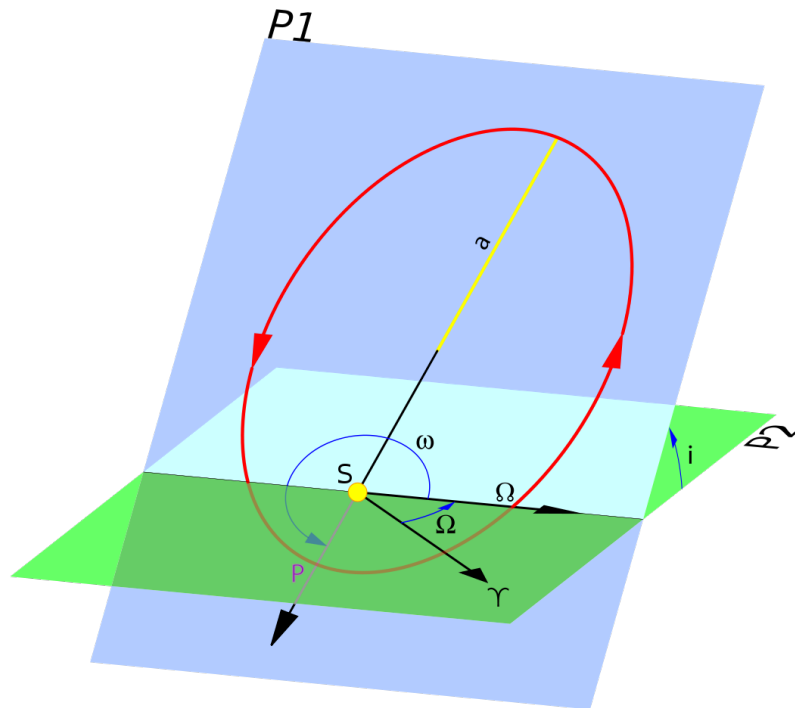


Figure 1: Représentation de l'orbite dans le plan orbital.

Binôme:
BAUDEL – BORIS

Abstract

Ce rapport analyse la dynamique orbitale d'un satellite sur une orbite elliptique autour de la Terre. Après la détermination complète des paramètres orbitaux et des dérives séculaires liées au terme J_2 , plusieurs stratégies de correction sont étudiées afin de stabiliser l'orbite. L'impact des manœuvres sur l'inclinaison et l'argument du périastre est évalué à l'aide de l'équation de Tsiolkovski, et différentes séquences d'exécution sont comparées en termes de coût énergétique et de consommation d'ergols. L'étude met en évidence l'influence majeure des perturbations zonales et l'importance du choix de la stratégie de correction.

Contents

1. Exercice I	3
1.1 Partie I : Détermination des éléments orbitaux et Périogée et apogée	3
1.1.1 Question 1 : Excentricité et demi-grand axe	3
1.1.2 Question 2 : altitudes, les vitesses et les instants de survol (depuis le périogée) des nœuds ascendant et descendant	3
1.1.3 Question 3 : Perturbations dominantes en orbite basse	4
1.1.4 Question 4 : Évolutions séculaires dues au J_2	5
1.1.5 Question 5 : Choix judicieux à considérer pour l'inclinaison	5
1.1.6 Question 6 : Dérives séculaires sur 30 jours	5
1.1.7 Question 7 : Justification du choix d'inclinaison	6
1.2 Partie II: Correction naturelle des dérives dues au J_2	7
1.2.1 Question 8 : Stratégie de correction de l'inclinaison	7
1.2.2 Question 9 : Impact sur les dérives séculaires sur 30 jours	8
1.2.3 Question 10 : Correction de l'argument du périogée	9
1.2.4 Question 11 : Dérives séculaires dues au J_2 après correction de ω	10
1.3 Partie III : Influence de l'Ordre des Manœuvres : Correction de ω puis de l'Inclinaison	12
1.3.1 Question 12 : Correction de l'argument du périogée puis de l'inclinaison	12
1.3.2 Question 13 : Comparaison avec la Partie II	13
2. Exercice II	15
2.1 Partie 1. Transfert sans rendez-vous avec la cible	15
2.1.1 Question 1 :	15
2.2 Partie 2 Transfert avec rendez-vous avec la cible	16
2.2.1 Question 1: Modification qualitative du transfert pour réaliser le rendez-vous	16
2.2.2 Question 2: Position initiale de la cible et temps de vol	17
2.2.3 Question 3: Masse d'ergols consommée	17
2.3 Partie 3 — Transfert avec rendez-vous avec la cible	19
2.3.1 Question 1 : Erreur en anomalie vraie et écart temporel	19
2.3.2 Question 2 : Stratégie de correction du phasage (deux impulsions tangentielles)	19
2.3.3 Question 3 : Correction de phasage en un temps ≤ 10 h	21
2.3.4 Question 4: Cas d'une durée de phasage de 5 h et de 15 h	22
2.3.5 Question 5: Résultats pour 5 h et 15 h	23
2.3.6 Question 6: Masse d'ergols et comparaison avec la stratégie 1	23

Données et hypothèses

L'énoncé fournit les données suivantes :

- Rayon terrestre: $R_T = 6378,14$ km.
- Paramètre gravitationnel de la Terre : $\mu = 3,98610 \times 10^5 \text{ km}^3/\text{s}^2$.
- Coefficient d'aplatissement (terme harmonique) : $J_2 = 1,082 \times 10^{-3}$.

- Altitudes connues aux anomalies vraies : $h_1 = 2200$ km pour $\nu_1 = 120^\circ$ et $h_2 = 800$ km pour $\nu_2 = 40^\circ$.
- Argument du péri  ge : $\omega = 5^\circ$. Inclinaison initiale : $i_0 = 64^\circ$.

1. Exercice I

1.1 Partie I : Détermination des éléments orbitaux et Périogée et apogée

1.1.1 Question 1 : Excentricité et demi-grand axe

Le rayon orbital en fonction de l'anomalie vraie ν s'écrit

$$r(\nu) = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \nu}, \quad (1)$$

où a est le demi-grand axe et e l'excentricité. En connaissant les rayons r_1 et r_2 (somme du rayon terrestre et des altitudes h_1 et h_2) aux anomalies vraies ν_1 et ν_2 , on obtient l'excentricité par l'élimination de a :

$$e = \frac{r_2 - r_1}{r_1 \cos \nu_1 - r_2 \cos \nu_2}. \quad (2)$$

En substituant les valeurs numériques ($r_1 = R_T + h_1$ et $r_2 = R_T + h_2$), on trouve

$$e \approx 0,1430, a = \frac{r_1}{1 + e \cos \nu_1} (1 - e^2) \approx 8131,0 \text{ km} \quad (3)$$

Le paramètre de l'orbite $p = a(1 - e^2)$ vaut environ 7800.5 km.

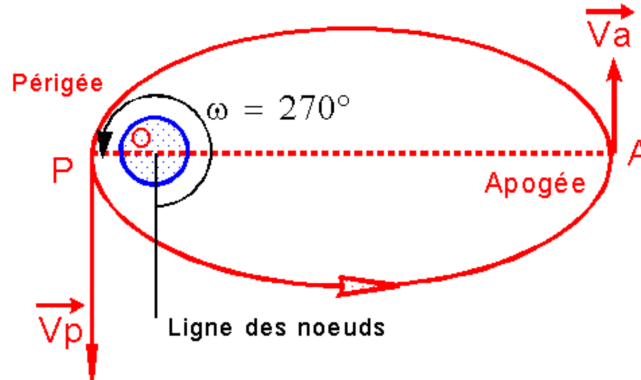


Figure 2: Représentation de l'orbite dans le plan orbital.

1.1.2 Question 2 : altitudes, les vitesses et les instants de survol (depuis le périogée) des nœuds ascendant et descendant

Le périogée ($\nu = 0$) et l'apogée ($\nu = \pi$) sont obtenus en annulant respectivement $\cos \nu = 1$ et $\cos \nu = -1$ dans l'équation (1). Les rayons sont alors

$$\begin{aligned} r_p &= a(1 - e) \approx 6968.0 \text{ km}, & h_p &= r_p - R_T \approx 589.9 \text{ km}, \\ r_a &= a(1 + e) \approx 9294.1 \text{ km}, & h_a &= r_a - R_T \approx 2915.9 \text{ km}. \end{aligned}$$

La vitesse orbitale est donnée par la relation de vis-viva :

$$v = \sqrt{\mu \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)}. \quad (4)$$

On en déduit

$$\begin{aligned} v_p &\approx 8.086 \text{ km s}^{-1}, \\ v_a &\approx 6.063 \text{ km s}^{-1}. \end{aligned}$$

La période orbitale vaut

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \approx 121.6 \text{ min} \quad (5)$$

L'argument du périée ω est l'angle entre le nœud ascendant et le périée dans le plan orbital. L'anomalie vraie du nœud ascendant est donc $\nu_{AN} = -\omega$ (modulo 2π) et celle du nœud descendant $\nu_{DN} = \pi - \omega$. En appliquant l'équation (1) et la relation de vis-viva, on obtient :

Nœud	ν (°)	Altitude (km)	Vitesse (km/s)	Temps depuis le périée (min)
Ascendant	$\approx 355,0$	$\approx 592,9$	$\approx 8,083$	$\approx 120,4$
Descendant	$\approx 175,0$	$\approx 2910,6$	$\approx 6,067$	$\approx 58,6$

Le temps depuis le passage au périée est calculé via l'équation de Kepler. On passe de l'anomalie vraie ν à l'anomalie excentrique E par

$$\tan \frac{\nu}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{E}{2} \quad (6)$$

puis on calcule l'anomalie moyenne $M = E - e \sin E$ et enfin $t = M/n$ avec $n = \sqrt{\mu/a^3}$.

1.1.3 Question 3 : Perturbations dominantes en orbite basse

Une orbite purement képlérienne néglige l'influence de la forme et de l'environnement de la Terre. Dans les basses altitudes ($\lesssim 1000$ km), deux perturbations prédominent :

enumerate

Effet J_2 (aplatissement terrestre): la Terre est légèrement aplatie aux pôles. Le développement harmonique du potentiel gravitationnel fait apparaître le terme J_2 qui provoque une régression du nœud ascendant et une rotation du périée.

Trainée atmosphérique: la haute atmosphère exerce une résistance qui diminue le demi-grand axe et circularise l'orbite. À l'altitude du périée (590 km), cette trainée est réduite mais non nulle. D'autres perturbations (forces du Soleil et de la Lune, pression de radiation) existent mais sont moins importantes.

1.1.4 Question 4 : Évolutions séculaires dues au J_2

Pour une orbite faiblement excentrique et inclinée, les dérivées séculaires moyennes des éléments orbitaux sous l'effet de J_2 sont :

$$\dot{\Omega} = -\frac{3}{2} n J_2 \left(\frac{R_T}{p} \right)^2 \cos i, \quad (7)$$

$$\dot{\omega} = \frac{3}{4} n J_2 \left(\frac{R_T}{p} \right)^2 (4 - 5 \sin^2 i), \quad (8)$$

$$\dot{M}_{J_2} = \frac{3}{4} n J_2 \left(\frac{R_T}{p} \right)^2 \sqrt{1 - e^2} (3 \cos^2 i - 1), \quad (9)$$

où $n = \sqrt{\mu/a^3}$ est le mouvement moyen. Les dérivées sont obtenues en radian par seconde et sont converties en degrés par jour pour l'analyse numérique. En posant la condition $\dot{\omega} = 0$, on obtient $4 - 5 \sin^2 i = 0$, soit $\sin^2 i = \frac{4}{5}$. Cela conduit aux inclinaisons dites critiques $i \approx 63,43^\circ$ (prograde) et $116,57^\circ$ (rétrograde). L'orbite polaire ($i = 90^\circ$) annule pour sa part la dérive du nœud ($\dot{\Omega} = 0$). Les dérivées obtenues numériquement pour différentes inclinaisons sont résumées dans le Tableau 1.

1.1.5 Question 5 : Choix judicieux à considérer pour l'inclinaison

Le terme $\dot{\Omega}$ est proportionnel à $\cos i$; une orbite rétrograde ($i > 90^\circ$) entraîne une dérive positive (vers l'est) tandis qu'une orbite prograde ($i < 90^\circ$) entraîne une dérive négative (vers l'ouest). L'annulation de $\dot{\omega}$ nécessite les inclinaisons critiques $\approx 63,43^\circ$ ou $116,57^\circ$, ce qui fige le périhélie en moyenne. L'orbite polaire annule la dérive du nœud mais induit une forte rotation du périhélie et de l'anomalie moyenne. Pour minimiser les corrections et optimiser l'énergie de lancement, on privilégie généralement l'inclinaison $\approx 63,4^\circ$ qui combine l'absence de dérive du périhélie et un coût de lancement raisonnable. La Figure 11 représente l'orbite dans le plan orbital. Le périhélie, l'apogée, les points correspondant aux anomalies vraies $\nu = 40^\circ$ et $\nu = 120^\circ$, ainsi que les nœuds ascendant et descendant, y sont indiqués. Le centre de la Terre (trait noir en pointillés) est au foyer de l'ellipse.

1.1.6 Question 6 : Dérives séculaires sur 30 jours

Table 1: Dérives séculaires dues au J_2 pour plusieurs inclinaisons ($e \approx 0,143$, $a \approx 8131$ km).

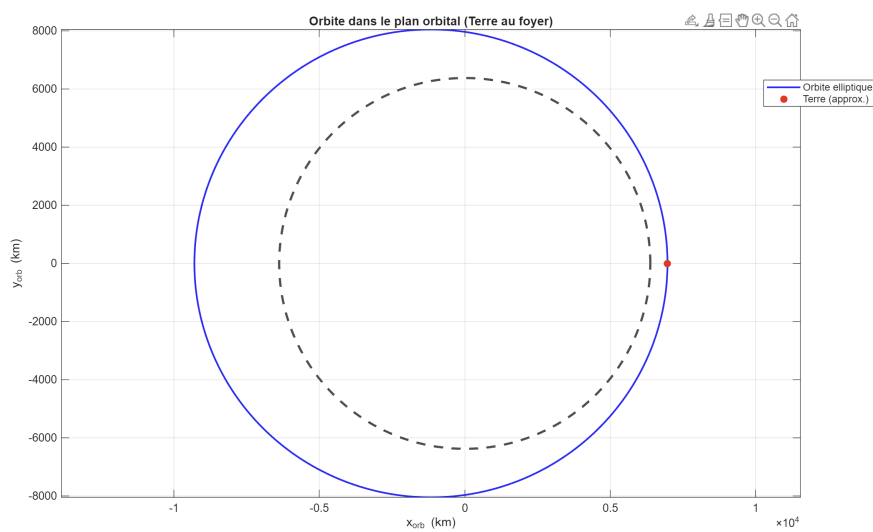
Inclinaison ($^\circ$)	$\dot{\Omega}$ ($^\circ/\text{j}$)	$\dot{\omega}$ ($^\circ/\text{j}$)	\dot{M}_{J_2} ($^\circ/\text{j}$)	Variation sur 30 jours
64,00	-1,945	-0,0869	-0,9298	$\Delta\Omega \approx -58,4$, $\Delta\omega \approx -2,6$, $\Delta M \approx -27,9$
63,43	-1,984	≈ 0	-0,9412	$\Delta\Omega \approx -59,5$, $\Delta\omega \approx 0$, $\Delta M \approx -28,2$
116,57	+1,984	≈ 0	-0,9412	$\Delta\Omega \approx +59,5$, $\Delta\omega \approx 0$, $\Delta M \approx -28,2$
90,00	≈ 0	-2,218	-2,196	$\Delta\omega \approx -66,5$, $\Delta M \approx -65,9$

1.1.7 Question 7 : Justification du choix d'inclinaison

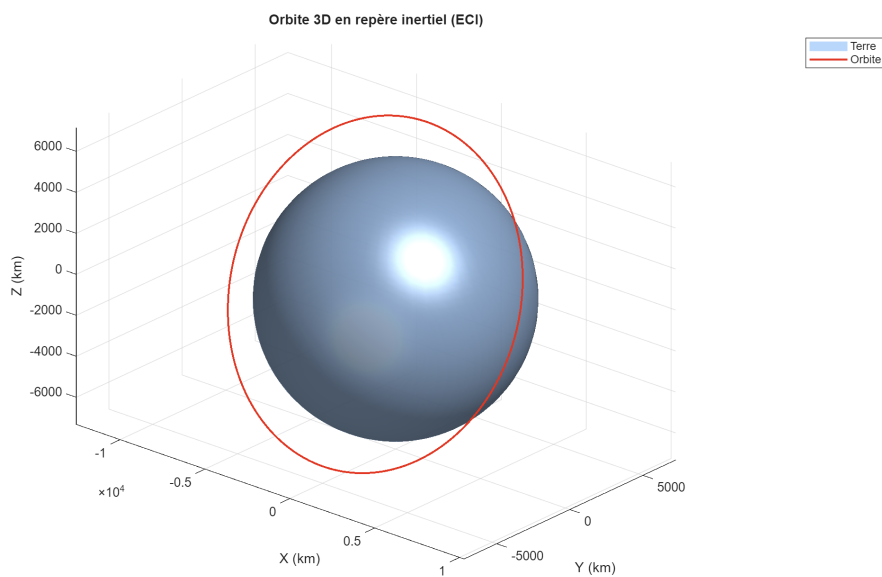
Les deux inclinaisons critiques annulent la dérive de ω , mais :

- l'orbite initiale est **prograde** ($i = 64^\circ$) ;
- passer à $i_1 = 63.43^\circ$ ne demande qu'un **faible** changement d'inclinaison ($\Delta i \approx 0.6^\circ$)
- passer à $i_2 = 116.57^\circ$ impliquerait un basculement en orbite rétrograde ($\Delta i \approx 52^\circ$) avec un ΔV prohibitif.

On retient l'inclinaison $i \approx 63.43^\circ$ comme solution optimale.



(a) Représentation de l'orbite dans le plan orbital (vue 1).



(b) Représentation de l'orbite dans le plan orbital (vue 2).

Figure 3: Comparaison des deux représentations de l'orbite.

1.2 Partie II: Correction naturelle des dérives dues au J_2

1.2.1 Question 8 : Stratégie de correction de l'inclinaison

L'orbite initiale possède une inclinaison $i_0 = 64^\circ$. Afin de réduire naturellement les dérives séculaires dues à l'aplatissement terrestre, on souhaite placer le satellite sur une orbite à **inclinaison critique** prograde, pour laquelle la dérive de l'argument du périégée $\dot{\omega}$ est nulle. Comme montré à la question 5 :

$$\cos^2 i = \frac{1}{5} \implies i_1 \simeq 63.43^\circ \quad (\text{prograde}), \quad i_2 \simeq 116.57^\circ \quad (\text{rétrograde}).$$

On choisit la valeur prograde i_1 , plus proche de l'inclinaison initiale.

Stratégie retenue. On suppose un modèle képlérien pour le calcul des manœuvres. Le coût en ΔV d'un changement de plan d'angle Δi est minimal lorsque la manœuvre est effectuée au point où la vitesse est minimale, c'est-à-dire à l'**apogée** de l'orbite. On retient donc :

- une **seule manœuvre impulsionnelle** ;
- appliquée à l'**apogée** ;
- dans la **direction normale** au plan orbital (direction $\pm \hat{W}$).

La variation d'inclinaison visée est :

$$\Delta i = i_0 - i_1 \approx 64^\circ - 63.43^\circ \approx 0.565^\circ \approx 9.87 \times 10^{-3} \text{ rad.}$$

À l'apogée, la vitesse orbitale vaut (formule de vis-viva) :

$$v_a = \sqrt{\mu \left(\frac{2}{r_a} - \frac{1}{a} \right)},$$

avec $r_a = a(1 + e)$. Numériquement, on trouve, pour les paramètres de l'orbite de la Partie I :

$$v_a \approx 6.06 \text{ km/s} = 6060 \text{ m/s.}$$

Pour une rotation pure du vecteur vitesse de Δi , le module de l'impulsion nécessaire est :

$$\Delta V = 2v_a \sin \left(\frac{\Delta i}{2} \right) \approx 2 \times 6060 \times \sin \left(\frac{0.565^\circ}{2} \right) \approx 60 \text{ m/s.}$$

La manœuvre est appliquée à l'apogée, soit à $t \approx T/2$ après le périégée, où $T \approx 121.6$ minutes est la période orbitale :

$$t_{\text{apogée}} \approx \frac{T}{2} \simeq 60.8 \text{ minutes après le périégée.}$$

Masse d'ergols consommés. Avec $I_{sp} = 200$ s, $g_0 = 9.81$ m/s² et une masse initiale $m_0 = 3000$ kg, l'équation de Tsiolkovski donne :

$$\Delta V = I_{sp} g_0 \ln \left(\frac{m_0}{m_f} \right) \implies \ln \left(\frac{m_0}{m_f} \right) = \frac{\Delta V}{I_{sp} g_0} \approx \frac{60}{200 \times 9.81} \approx 0.030.$$

On en déduit :

$$\frac{m_0}{m_f} \approx e^{0.030} \approx 1.0305, \quad m_f \approx \frac{3000}{1.0305} \approx 2910 \text{ kg},$$

d'où la masse d'ergols consommés :

$$m_{\text{ergols}} = m_0 - m_f \approx 3000 - 2910 \approx 90 \text{ kg}.$$

En résumé, la correction d'inclinaison est obtenue par :

Une seule impulsion à l'apogée, $t \simeq 60.8$ minutes après le périgée,
 $\Delta i \approx 0.565^\circ$, $\Delta V \approx 60$ m/s,
 direction normale au plan orbital, $m_{\text{ergols}} \approx 90$ kg.

1.2.2 Question 9 : Impact sur les dérives séculaires sur 30 jours

Après correction, l'inclinaison devient $i = i_1 \simeq 63.43^\circ$. Les dérives séculaires dues au J_2 sont alors données par les mêmes expressions qu'à la question 4, avec i mis à jour. Numériquement, on obtient les valeurs suivantes (en degrés par jour) :

$$\dot{\Omega} = -\frac{3}{2} n J_2 \left(\frac{R_T}{p} \right)^2 \cos i, \quad \dot{\omega} = \frac{3}{4} n J_2 \left(\frac{R_T}{p} \right)^2 (5 \cos^2 i - 1), \quad \dot{M}_{J_2} = \frac{3}{4} n J_2 \left(\frac{R_T}{p} \right)^2 \sqrt{1 - e^2} (3 \cos^2 i - 1).$$

Avant correction ($i = 64^\circ$).

$$\dot{\Omega} \approx -1.95^\circ/\text{jour}, \quad \dot{\omega} \approx -0.09^\circ/\text{jour}, \quad \dot{M}_{J_2} \approx -0.93^\circ/\text{jour}.$$

Sur 30 jours :

$$\Delta \Omega_{30j} \approx -58.3^\circ, \quad \Delta \omega_{30j} \approx -2.6^\circ, \quad \Delta M_{30j} \approx -27.9^\circ.$$

Après correction ($i = i_1 \simeq 63.43^\circ$).

$$\dot{\Omega} \approx -1.98^\circ/\text{jour}, \quad \dot{\omega} \approx 0^\circ/\text{jour}, \quad \dot{M}_{J_2} \approx -0.88^\circ/\text{jour}.$$

Sur 30 jours :

$$\Delta \Omega_{30j} \approx -59.5^\circ, \quad \Delta \omega_{30j} \approx 0^\circ, \quad \Delta M_{30j} \approx -26.3^\circ.$$

On constate que :

- la régression du nœud ascendant (Ω) est légèrement plus rapide en module après correction ;
- la dérive séculaire de l'argument du périgée ω est annulée ($\Delta \omega_{30j} = 0$) : le périgée est *gelé* ;

- la dérive de l'anomalie moyenne due à J_2 est légèrement réduite.

En conclusion, la mise à l'inclinaison critique $i \simeq 63.43^\circ$ permet d'annuler la dérive de ω au prix d'une manœuvre unique d'environ 60 m/s et ~ 90 kg d'ergols, ce qui constitue un compromis avantageux par rapport à la situation initiale.

1.2.3 Question 10 : Correction de l'argument du périégée

Après la correction d'inclinaison, l'orbite possède une inclinaison critique prograde $i \simeq 63.43^\circ$, tandis que l'argument du périégée reste $\omega \simeq 5^\circ$. On souhaite obtenir $\omega_f = 0^\circ$, soit une rotation de la ligne des apsides de $\Delta\omega = -5^\circ$ dans le plan orbital. On adopte une stratégie simple (non optimale mais pédagogique) consistant à réaliser deux manœuvres impulsionnelles dans le plan orbital : une première impulsion au périégée ; une seconde impulsion à l'apogée ; chacune principalement dans la direction tangentielle, afin de modifier l'orientation de l'ellipse (direction du vecteur excentricité). Pour un petit angle de rotation $\Delta\omega$, on approxime que chaque impulsion fait tourner l'ellipse d'environ $\Delta\omega/2$ et on estime le module des impulsions en assimilant cela à une petite rotation de la vitesse :

$$\Delta V_p \approx 2 v_p \sin\left(\frac{\Delta\omega}{4}\right), \quad \Delta V_a \approx 2 v_a \sin\left(\frac{\Delta\omega}{4}\right),$$

où v_p et v_a sont les vitesses au périégée et à l'apogée. Pour les paramètres de l'orbite considérée, on a numériquement $v_p \approx 8.09$ km/s et $v_a \approx 6.06$ km/s, et $\Delta\omega = 5^\circ \Rightarrow \Delta\omega/4 \approx 1.25^\circ$. On obtient alors :

$$\Delta V_p \approx 353 \text{ m/s}, \quad \Delta V_a \approx 264 \text{ m/s},$$

soit un coût total

$$\Delta V_{\text{tot}} \approx \Delta V_p + \Delta V_a \approx 620 \text{ m/s}.$$

La première impulsion est appliquée au périégée ($t = 0$ par définition) et la seconde à l'apogée, soit à $t \simeq T/2 \approx 60.8$ minutes après le périégée.

En partant d'une masse $m_0 \approx 2910$ kg (après la correction d'inclinaison), l'équation de Tsiolkovski,

$$\Delta V = I_{sp} g_0 \ln\left(\frac{m_0}{m_f}\right),$$

avec $I_{sp} = 200$ s et $g_0 = 9.81$ m/s², donne :

$$\ln\left(\frac{m_0}{m_f}\right) = \frac{620}{200 \times 9.81} \approx 0.314, \quad \frac{m_0}{m_f} \approx e^{0.314} \approx 1.37,$$

soit

$$m_f \approx \frac{2910}{1.37} \approx 2120 \text{ kg}, \quad m_{\text{ergols}} \approx m_0 - m_f \approx 790 \text{ kg}$$

Cette correction de l'argument du périégée est donc très coûteuse en ergols comparée à la correction d'inclinaison.

1.2.4 Question 11 : Dérives séculaires dues au J_2 après correction de ω

Les dérivés séculaires dues au terme J_2 s'écrivent :

$$\dot{\Omega} = -\frac{3}{2}nJ_2 \left(\frac{R_T}{p}\right)^2 \cos i, \quad \dot{\omega} = \frac{3}{4}nJ_2 \left(\frac{R_T}{p}\right)^2 (5 \cos^2 i - 1),$$

$$\dot{M}_{J_2} = \frac{3}{4}nJ_2 \left(\frac{R_T}{p}\right)^2 \sqrt{1-e^2} (3 \cos^2 i - 1).$$

On remarque que ces expressions dépendent uniquement de a , e et i , et non des angles Ω , ω ou M . Si la correction de l'argument du périégée ne modifie pas significativement a , e ou i , alors les dérivés séculaires du fait du J_2 restent identiques à celles obtenues à la question 9. En particulier, pour $i \simeq 63.43^\circ$, on conserve :

$$\dot{\Omega} \approx -1.98^\circ/\text{jour}, \quad \dot{\omega} \approx 0^\circ/\text{jour}, \quad \dot{M}_{J_2} \approx -0.88^\circ/\text{jour},$$

et les variations sur 30 jours ($\Delta\Omega_{30j}$, $\Delta\omega_{30j}$, ΔM_{30j}) restent les mêmes. En conclusion, la correction de l'argument du périégée modifie la valeur instantanée de ω (passage de 5° à 0°), mais ne change pas les dérivés séculaires liés au J_2 , qui sont entièrement déterminées par les paramètres (a, e, i) de l'orbite.

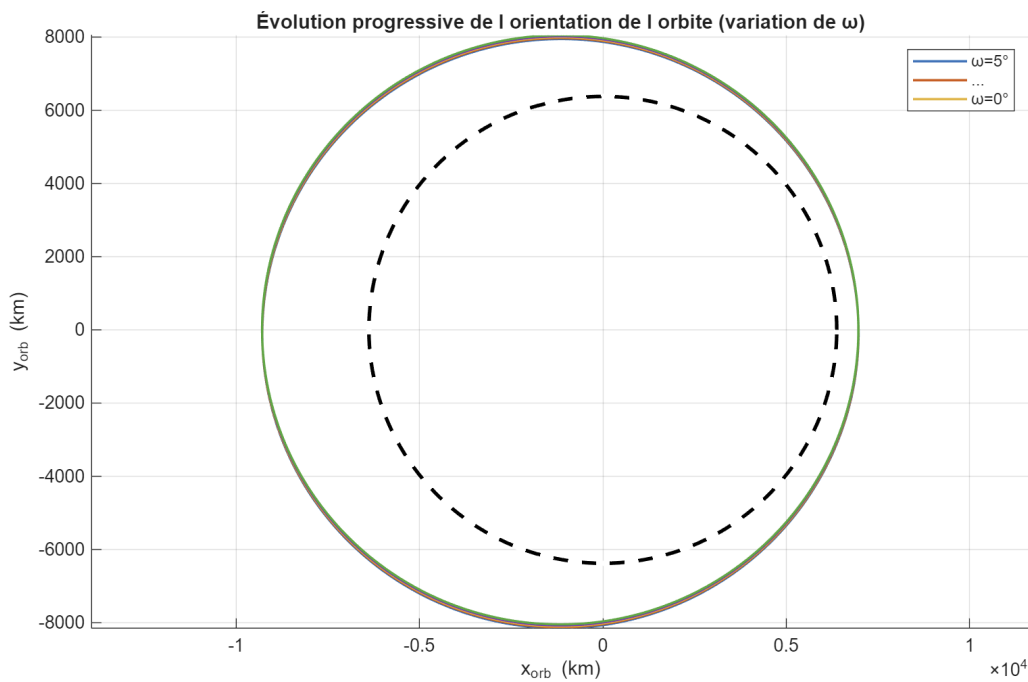


Figure 4: Représentation de l'orbite dans le plan orbital en fonction de ω

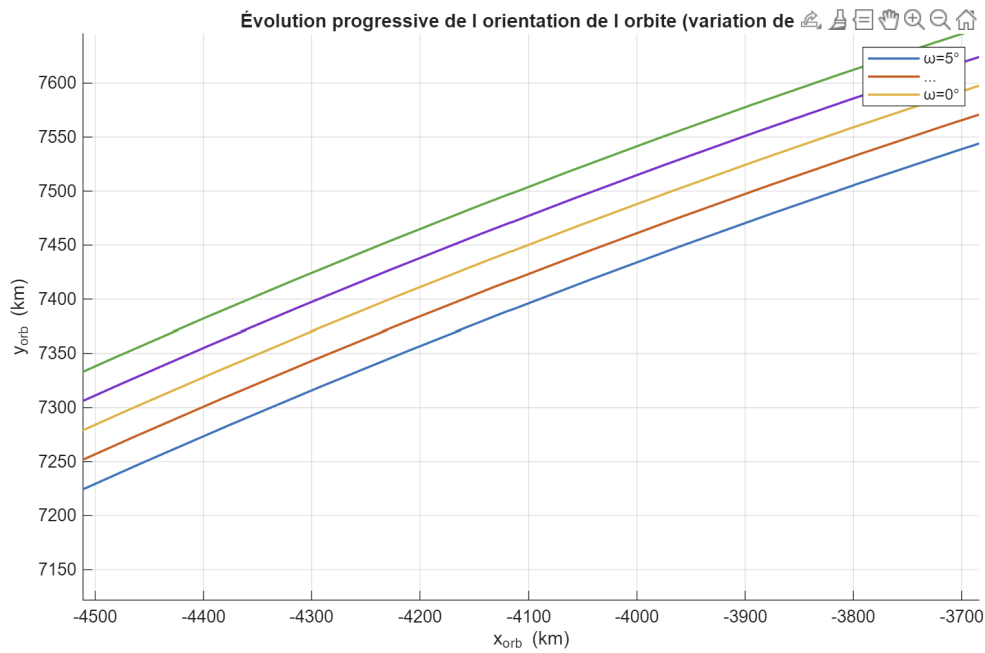


Figure 5: Evolution progressive de l'orientation de l'orbite Représentation dans le plan orbital en fonction de ω

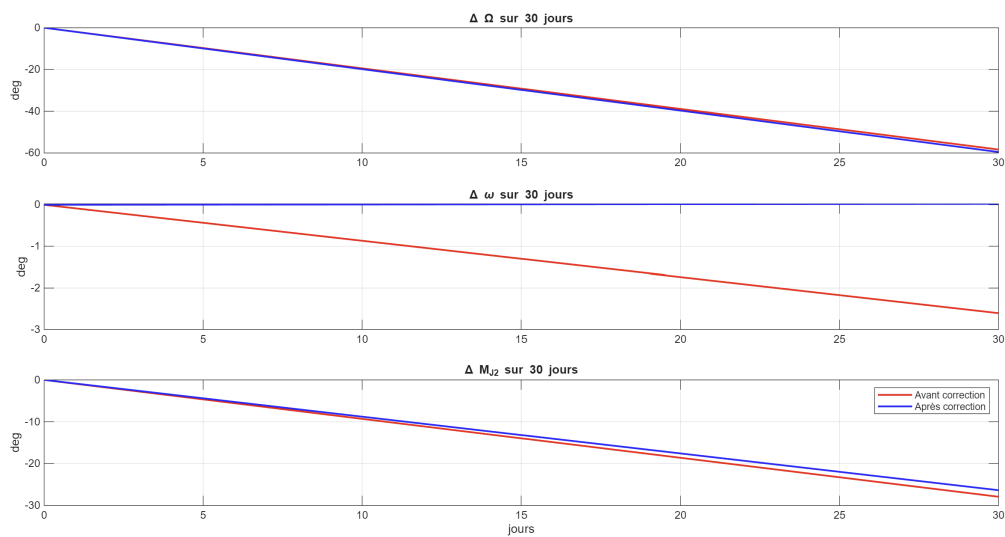


Figure 6: Les différentes valeurs de la variation de ω des paramètres sur 30 jours

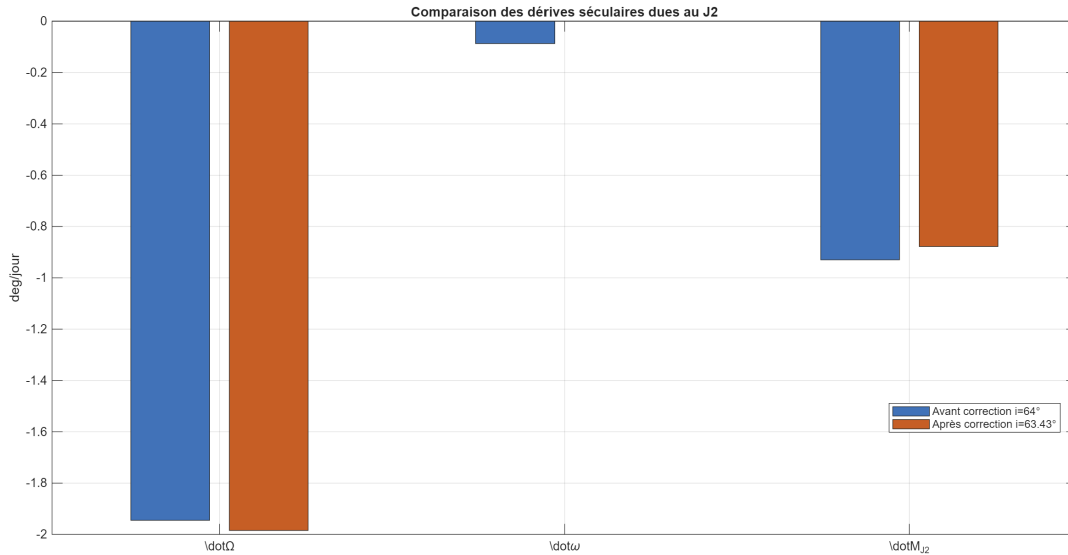


Figure 7: Comparaison des dérivées séculaires

1.3 Partie III : Influence de l'Ordre des Manœuvres : Correction de ω puis de l'Inclinaison

1.3.1 Question 12 : Correction de l'argument du périégée puis de l'inclinaison

On reprend les mêmes paramètres orbitaux que dans les parties précédentes ($a \simeq 8131$ km, $e \simeq 0.143$), avec une inclinaison initiale $i_0 = 64^\circ$ et un argument du périégée $\omega_0 = 5^\circ$. On souhaite, dans un premier temps, corriger l'orientation de l'orbite et obtenir un argument du périégée nul ($\omega_f = 0^\circ$), avant de mettre l'orbite à l'inclinaison critique $i_1 \simeq 63.43^\circ$. La rotation désirée est $\Delta\omega = \omega_f - \omega_0 = -5^\circ$. On adopte la même stratégie simple que dans la Partie II : deux manœuvres impulsionnelles dans le plan orbital, l'une au périégée, l'autre à l'apogée, principalement tangentielle, qui font tourner l'ellipse. Pour un petit angle $\Delta\omega$, chaque impulsion est supposée faire tourner l'ellipse d'environ $\Delta\omega/2$. On approxime alors les modules des impulsions par :

$$\Delta V_p \approx 2v_p \sin\left(\frac{\Delta\omega}{4}\right), \quad \Delta V_a \approx 2v_a \sin\left(\frac{\Delta\omega}{4}\right),$$

où v_p et v_a sont les vitesses au périégée et à l'apogée. Numériquement, avec $v_p \simeq 8.09$ km/s, $v_a \simeq 6.06$ km/s et $\Delta\omega = 5^\circ \Rightarrow \Delta\omega/4 \simeq 1.25^\circ$, on obtient :

$$\Delta V_p \approx 353 \text{ m/s}, \quad \Delta V_a \approx 264 \text{ m/s},$$

soit un coût total

$$\Delta V_\omega \approx \Delta V_p + \Delta V_a \approx 620 \text{ m/s}.$$

La première impulsion est appliquée au périégée ($t = 0$) et la seconde à l'apogée, à $t \simeq T/2 \approx 60.8$ minutes après le périégée ($T \simeq 121.6$ minutes étant la période orbitale). En partant de la masse initiale $m_0 = 3000$ kg, l'équation de Tsiolkovski

$$\Delta V_\omega = I_{sp} g_0 \ln\left(\frac{m_0}{m_1}\right),$$

avec $I_{sp} = 200$ s et $g_0 = 9.81$ m/s² donne

$$\ln\left(\frac{m_0}{m_1}\right) = \frac{\Delta V_\omega}{I_{sp}g_0} \approx \frac{620}{200 \times 9.81} \approx 0.314,$$

d'où un rapport de masse $m_0/m_1 \approx e^{0.314} \approx 1.37$ et :

$$m_1 \approx \frac{3000}{1.37} \approx 2190 \text{ kg}, \quad m_{\text{ergols},\omega} \approx m_0 - m_1 \approx 810 \text{ kg}.$$

Dans un second temps, on ramène l'inclinaison de $i_0 = 64^\circ$ à $i_1 \simeq 63.43^\circ$ (inclinaison critique prograde), soit $\Delta i \simeq 0.57^\circ$. On conserve la stratégie de la Partie II : une manœuvre impulsioonelle à l'apogée, dans la direction normale au plan orbital. Le coût en ΔV pour un changement de plan est approximé par

$$\Delta V_i \approx 2v_a \sin\left(\frac{\Delta i}{2}\right) \approx 60 \text{ m/s}.$$

En partant de la masse $m_1 \approx 2190$ kg, l'équation de Tsiolkovski donne :

$$\Delta V_i = I_{sp}g_0 \ln\left(\frac{m_1}{m_2}\right) \Rightarrow \ln\left(\frac{m_1}{m_2}\right) = \frac{60}{200 \times 9.81} \approx 0.030,$$

soit un rapport de masse $m_1/m_2 \approx e^{0.030} \approx 1.03$, d'où

$$m_2 \approx \frac{2190}{1.03} \approx 2120 \text{ kg}, \quad m_{\text{ergols},i} \approx m_1 - m_2 \approx 70 \text{ kg}.$$

La masse d'ergols totale consommée en Partie III (correction de ω puis de i) est donc de l'ordre de :

$$m_{\text{ergols,III}} \approx m_{\text{ergols},\omega} + m_{\text{ergols},i} \approx 810 + 70 \approx 880 \text{ kg}$$

1.3.2 Question 13 : Comparaison avec la Partie II

Dans la Partie II, on avait adopté l'ordre inverse : correction de l'inclinaison puis de l'argument du périée. Les coûts en ΔV étaient les mêmes valeurs numériques :

$$\Delta V_i \approx 60 \text{ m/s}, \quad \Delta V_\omega \approx 620 \text{ m/s},$$

mais appliqués dans l'ordre inverse. La masse totale d'ergols consommés était alors du même ordre (~ 880 kg, à quelques kg près selon les arrondis).

En effet, en supposant des manœuvres impulsioonelles idéales et un I_{sp} constant, l'équation de Tsiolkovski montre que seul le ΔV total

$$\Delta V_{\text{tot}} = \Delta V_i + \Delta V_\omega$$

intervient dans le rapport de masse global :

$$\frac{m_0}{m_f} = \exp\left(\frac{\Delta V_i}{I_{sp}g_0}\right) \exp\left(\frac{\Delta V_\omega}{I_{sp}g_0}\right) = \exp\left(\frac{\Delta V_i + \Delta V_\omega}{I_{sp}g_0}\right)$$

indépendamment de l'ordre des manœuvres. La consommation totale d'ergols ne dépend donc pas de la séquence, dès lors que les mêmes ΔV sont réalisés. En pratique, on privilégiera néanmoins la stratégie consistant à **corriger d'abord l'inclinaison** (Partie II), car :

- l'inclinaison critique fixe immédiatement la structure des dérives séculaires J_2 (en particulier $\dot{\omega} = 0$) ;
- l'orientation fine de l'orbite (valeur absolue de ω) est moins critique que l'inclinaison pour les objectifs de couverture, de répétitivité de la trace au sol, etc.

Mathématiquement, les deux scénarios consomment une quantité d'ergols quasi identique, mais du point de vue opérationnel, corriger d'abord l'inclinaison est généralement plus pertinent.

2. Exercice II

2.1 Partie 1. Transfert sans rendez-vous avec la cible

2.1.1 Question 1 :

Le véhicule évolue initialement sur une orbite circulaire d'altitude $h_1 = 500$ km et doit rejoindre une orbite circulaire à $h_2 = 1500$ km sans se synchroniser avec la cible. Le transfert optimal dans ce cas est un **transfert de Hohmann**.

$$r_1 = R_T + h_1, \quad r_2 = R_T + h_2,$$

avec $R_T = 6371$ km.

$$v_1 = \sqrt{\frac{\mu}{r_1}}, \quad v_2 = \sqrt{\frac{\mu}{r_2}},$$

où $\mu = 3.986 \times 10^{14} \text{ m}^3/\text{s}^2$ est le paramètre gravitationnel de la Terre.

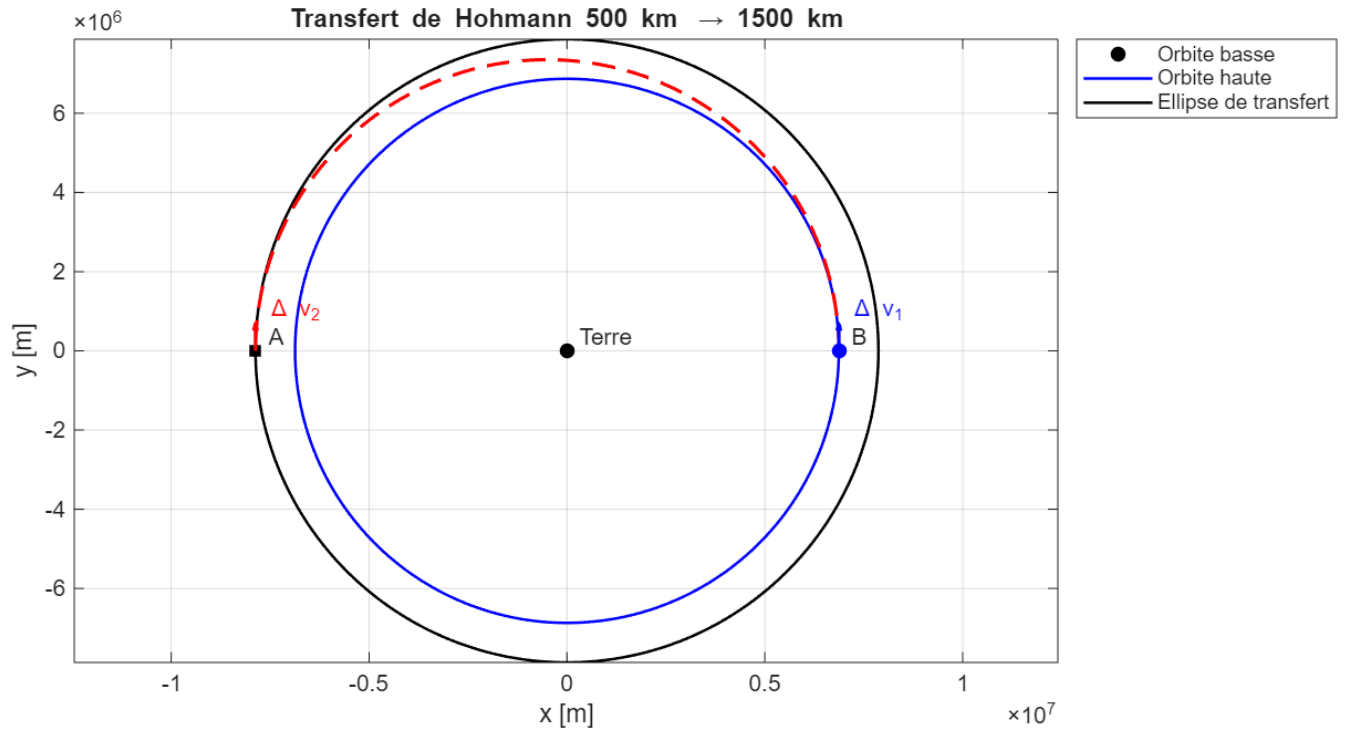


Figure 8: Représentation de l'orbite dans le plan orbital.

Le demi-grand axe de l'ellipse est :

$$a_T = \frac{r_1 + r_2}{2}.$$

Les vitesses sur l'ellipse :

$$v_{p,T} = \sqrt{\mu \left(\frac{2}{r_1} - \frac{1}{a_T} \right)}, \quad v_{a,T} = \sqrt{\mu \left(\frac{2}{r_2} - \frac{1}{a_T} \right)}.$$

La Poussée tangentielle prograde pour injecter sur l'ellipse :

$$\Delta v_1 = v_{p,T} - v_1.$$

La Poussée tangentielle prograde pour circulariser :

$$\Delta v_2 = v_2 - v_{a,T}.$$

L'impulsion totale est :

$$\Delta v_{\text{tot}} = \Delta v_1 + \Delta v_2.$$

Le transfert dure une demi-période de l'ellipse :

$$T_{\text{trans}} = \pi \sqrt{\frac{a_T^3}{\mu}}.$$

$$\Delta v_1 \approx 254 \text{ m/s}, \quad \Delta v_2 \approx 246 \text{ m/s},$$

$$\Delta v_{\text{tot}} \approx 500 \text{ m/s}.$$

$$T_{\text{trans}} \approx 3.15 \times 10^3 \text{ s} \approx 52.5 \text{ min}.$$

Les manoeuvres peuvent être décrites par :

- **Manoeuvre 1** : au point B , poussée prograde tangentielle Δv_1 pour quitter l'orbite basse.
- **Phase balistique** : montée sur une ellipse de transfert de B vers A .
- **Manoeuvre 2** : au point A , poussée prograde tangentielle Δv_2 pour circulariser sur l'orbite haute.

Ces deux impulsions doivent être représentées sur la Fig. 1 par deux vecteurs tangentiels portés en B et A .

2.2 Partie 2 Transfert avec rendez-vous avec la cible

On considère un véhicule spatial de masse initiale $m_0 = 2000 \text{ kg}$, doté d'une propulsion chimique de $I_{sp} = 1000 \text{ s}$. Le véhicule se trouve sur une orbite circulaire d'altitude 500 km et doit rendre rendez-vous avec une cible située sur une orbite circulaire d'altitude 1500 km .

Les paramètres orbitaux sont :

$$r_1 = R_T + 500 = 6871 \text{ km}, \quad r_2 = R_T + 1500 = 7871 \text{ km}, \quad \mu_T = 398600 \text{ km}^3/\text{s}^2.$$

2.2.1 Question 1: Modification qualitative du transfert pour réaliser le rendez-vous

Le transfert de Hohmann reste géométriquement identique à celui de la partie 1 (mêmes impulsions Δv_1 et Δv_2). La différence provient du **phasage** : on doit quitter l'orbite basse uniquement lorsque la cible possède un **angle d'avance initial** φ_0 tel qu'elle atteigne le point de rendez-vous en même temps que le véhicule.

Ainsi, le transfert n'est modifié que par la **date d'allumage** du premier impulsion, de manière à respecter la condition de synchronisation angulaire avec la cible.

2.2.2 Question 2: Position initiale de la cible et temps de vol

L'orbite de transfert est une ellipse de demi-grand axe :

$$a_t = \frac{r_1 + r_2}{2} = 7371 \text{ km.}$$

Le temps de vol entre périégée et apogée est :

$$t_t = \pi \sqrt{\frac{a_t^3}{\mu_T}} \approx 3.15 \times 10^3 \text{ s} \approx 52.5 \text{ min.}$$

La cible se déplace sur son orbite circulaire avec la vitesse angulaire :

$$n_2 = \sqrt{\frac{\mu_T}{r_2^3}} \quad \Rightarrow \quad \Delta\theta_2 = n_2 t_t.$$

Comme le véhicule arrive à l'apogée du transfert, soit à π radians du point de départ, la condition de rendez-vous impose :

$$\varphi_0 + n_2 t_t = \pi.$$

On en déduit l'angle initial de la cible par rapport au point A :

$$\boxed{\varphi_0 = \pi - n_2 t_t \approx 0.295 \text{ rad} \approx 16.9^\circ.}$$

Ainsi, la cible doit se trouver environ **17° en avance** sur le point A pour que le rendez-vous soit possible.

Le temps de vol de la cible depuis A est le même que celui du véhicule :

$$t_t \approx 52.5 \text{ min.}$$

2.2.3 Question 3: Masse d'ergols consommée

Les impulsions du Hohmann sont :

$$\Delta v_1 = \sqrt{\frac{\mu_T}{r_1}} \left(\sqrt{\frac{2r_2}{r_1 + r_2}} - 1 \right),$$

$$\Delta v_2 = \sqrt{\frac{\mu_T}{r_2}} \left(1 - \sqrt{\frac{2r_1}{r_1 + r_2}} \right).$$

Numériquement :

$$\Delta v_1 \approx 254 \text{ m/s}, \quad \Delta v_2 \approx 246 \text{ m/s},$$

$$\Delta v_{\text{tot}} \approx 499 \text{ m/s.}$$

L'équation de Tsiolkovski donne :

$$\Delta v_{\text{tot}} = I_{sp} g_0 \ln \left(\frac{m_0}{m_f} \right).$$

D'où la masse finale :

$$m_f = \frac{m_0}{\exp \left(\frac{\Delta v_{\text{tot}}}{I_{sp} g_0} \right)} \approx 1901 \text{ kg.}$$

La masse d'ergols consommée vaut alors :

$$\boxed{m_{\text{ergols}} = m_0 - m_f \approx 100 \text{ kg.}}$$

- Le transfert géométrique est identique à un Hohmann.
- La cible doit être en avance de $\varphi_0 \simeq 17^\circ$.
- Le temps de vol est $t_t \simeq 52.5$ **minutes**.
- La masse d'ergols consommée est ≈ 100 **kg**.

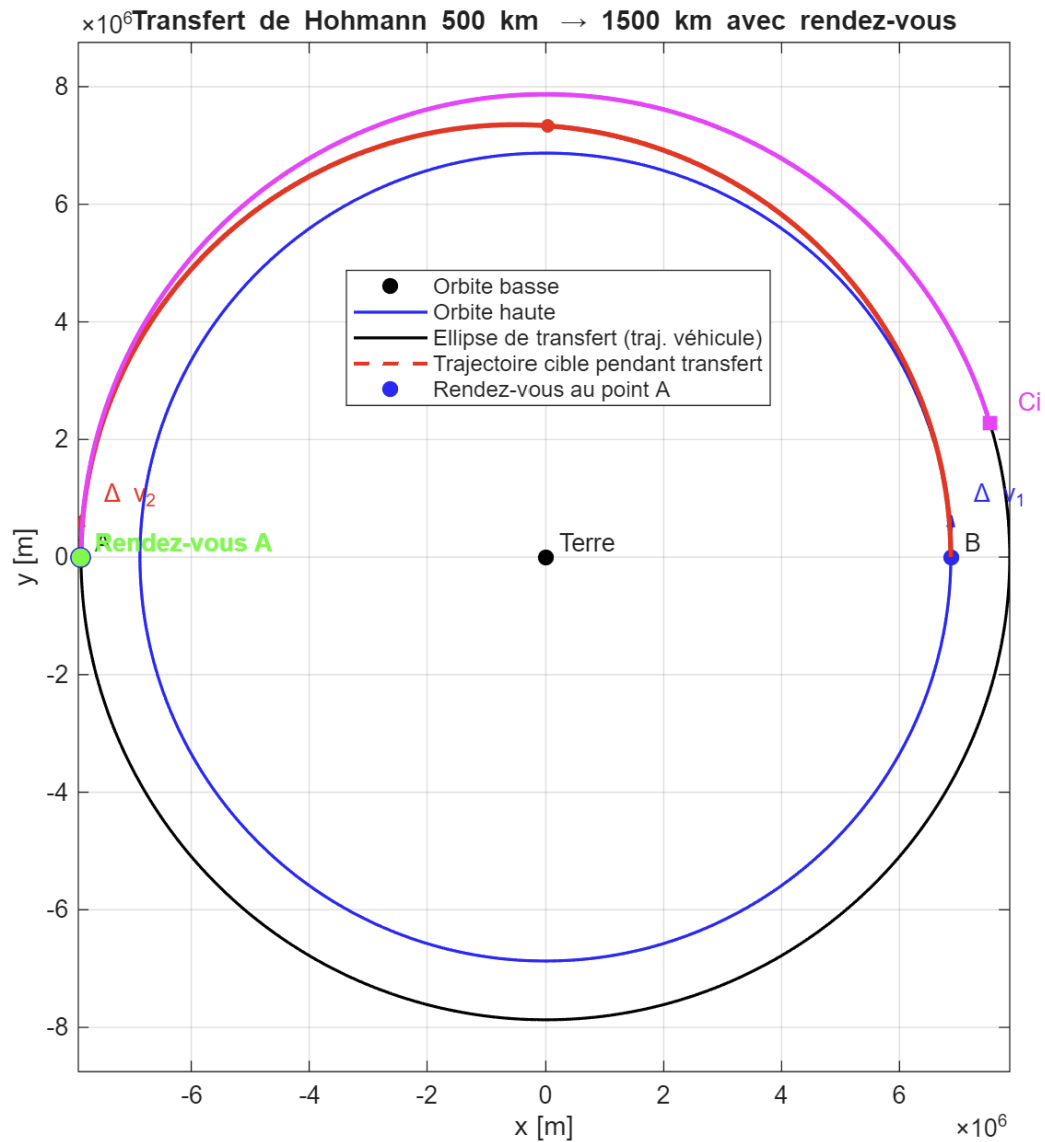


Figure 9: Représentation de l'orbite dans le plan orbital.

2.3 Partie 3 — Transfert avec rendez-vous avec la cible

Après le transfert de Hohmann de la Partie 1, le véhicule et la cible sont tous deux sur l'orbite circulaire haute de rayon r_2 , mais avec un **décalage le long de l'orbite**. On note $s = 5$ km la longueur de l'arc de cercle séparant le véhicule et la cible (cas a : véhicule en avance, cas b : véhicule en retard).

2.3.1 Question 1 : Erreur en anomalie vraie et écart temporel

Sur une orbite circulaire de rayon r_2 , la longueur d'un arc de cercle et l'anomalie vraie correspondante sont liées par :

$$s = r_2 \Delta\nu,$$

d'où l'erreur en anomalie vraie :

$$\Delta\nu = \frac{s}{r_2}.$$

- **Cas a (véhicule devant)** : le véhicule est en avance d'un angle

$$\Delta\nu_a = +\frac{s}{r_2},$$

sa position angulaire est donc $\nu_V = \nu_C + \Delta\nu_a$.

- **Cas b (véhicule derrière)** : le véhicule est en retard d'un angle

$$\Delta\nu_b = -\frac{s}{r_2},$$

soit $\nu_V = \nu_C + \Delta\nu_b$.

La vitesse angulaire (mouvement moyen) sur l'orbite haute est

$$n_2 = \sqrt{\frac{\mu}{r_2^3}} \quad [\text{rad/s}].$$

L'écart en anomalie vraie se traduit par un **décalage temporel** :

$$\Delta t = \frac{\Delta\nu}{n_2}.$$

En valeur absolue :

$$|\Delta t| = \frac{s}{r_2 n_2}$$

est le temps qu'il faut rattraper (cas b) ou perdre (cas a) pour obtenir le rendez-vous.

2.3.2 Question 2 : Stratégie de correction du phasage (deux impulsions tangentielles)

On souhaite corriger ce déphasage par une **orbite de phasage** simple, utilisant deux poussées tangentielles :

1. **Première poussée tangentielle** au point courant (par exemple au point A) : on quitte l'orbite circulaire de rayon r_2 pour une *orbite de phasage* (ellipse coplanaire) de demi-grand axe a_p , choisie de sorte que sa période T_p soit différente de celle de l'orbite cible T_2 juste ce qu'il faut pour corriger le déphasage.

La période de l'orbite cible est :

$$T_2 = \frac{2\pi}{n_2} = 2\pi \sqrt{\frac{r_2^3}{\mu}}.$$

On choisit une orbite de phasage de période

$$T_p = T_2 \pm |\Delta t|$$

le signe dépendant du cas :

- **Cas a (véhicule en avance)** : on veut que le véhicule avance *moins vite* que la cible pour se faire rattraper, donc on choisit une orbite **plus haute** (période plus longue) :

$$T_p = T_2 + |\Delta t|.$$

- **Cas b (véhicule en retard)** : on veut que le véhicule avance *plus vite* que la cible pour la rattraper, donc on choisit une orbite **plus basse** (période plus courte) :

$$T_p = T_2 - |\Delta t|.$$

Le demi-grand axe de l'orbite de phasage est alors

$$a_p = \left(\frac{\mu}{4\pi^2} T_p^2 \right)^{1/3}.$$

L'orbite de phasage est une ellipse qui passe par le point de manœuvre de rayon r_2 , avec un autre rayon r_{autre} tel que

$$a_p = \frac{r_2 + r_{\text{autre}}}{2} \implies r_{\text{autre}} = 2a_p - r_2.$$

À ce point, la vitesse circulaire vaut

$$v_2 = \sqrt{\frac{\mu}{r_2}},$$

tandis que la vitesse sur l'ellipse de phasage au même point est

$$v_p = \sqrt{\mu \left(\frac{2}{r_2} - \frac{1}{a_p} \right)}.$$

La première impulsion tangentielle est donc

$$\boxed{\Delta v_{\text{phas},1} = v_p - v_2}$$

2. **Phase de phasage** : le véhicule effectue un tour complet sur l'orbite de phasage de période T_p . Pendant ce temps, la cible reste sur l'orbite circulaire de période T_2 . Le choix de T_p garantit que, à la fin de l'orbite de phasage, le véhicule et la cible se retrouve

2.3.3 Question 3 : Correction de phasage en un temps ≤ 10 h

On note toujours $s = 5$ km la longueur d'arc séparant le véhicule de la cible sur l'orbite circulaire haute de rayon r_2 .

L'erreur en anomalie vraie vaut :

$$\Delta\nu = \frac{s}{r_2}.$$

La vitesse angulaire sur l'orbite haute est

$$n_2 = \sqrt{\frac{\mu}{r_2^3}},$$

et la période orbitale

$$T_2 = \frac{2\pi}{n_2}.$$

On impose que le rattrapage du phasage soit réalisé en un temps

$$T_{\text{corr}} \leq 10 \text{ h}.$$

Pendant ce temps, l'angle parcouru par la cible est $n_2 T_{\text{corr}}$ et celui du véhicule sur l'orbite de phasage est $n_p T_{\text{corr}}$, où n_p est la vitesse angulaire (mouvement moyen) de l'orbite de phasage.

Pour que le déphasage soit annulé à l'instant T_{corr} , il faut que

$$\Delta\nu + (n_p - n_2)T_{\text{corr}} = 0.$$

D'où :

$$n_p = n_2 - \frac{\Delta\nu}{T_{\text{corr}}}.$$

Ce choix correspond au **cas a** (véhicule en avance, on le fait tourner un peu plus lentement : orbite légèrement plus haute). Dans le **cas b** (véhicule en retard), il suffit de prendre le signe opposé :

$$n_p = n_2 + \frac{\Delta\nu}{T_{\text{corr}}} \Rightarrow \text{orbite légèrement plus basse.}$$

Le demi-grand axe de l'orbite de phasage est alors

$$a_p = \left(\frac{\mu}{n_p^2} \right)^{1/3},$$

et, comme l'orbite de phasage coupe l'orbite circulaire haute de rayon r_2 , le second rayon de l'ellipse vaut

$$r_{\text{autre}} = 2a_p - r_2.$$

La vitesse circulaire sur l'orbite cible est

$$v_2 = \sqrt{\frac{\mu}{r_2}},$$

tandis que la vitesse sur l'ellipse de phasage au point de manœuvre (rayon r_2) est

$$v_p = \sqrt{\mu \left(\frac{2}{r_2} - \frac{1}{a_p} \right)}.$$

On applique alors deux poussées tangentielles :

- **Manœuvre 1 (instant t_0)** : au point où se trouve le véhicule, poussée tangentielle pour passer de l'orbite circulaire de rayon r_2 à l'orbite de phasage :

$$\Delta v_{\text{phas},1} = v_p - v_2.$$

- cas a (véhicule en avance) : $n_p < n_2$ donc $v_p < v_2$, poussée *rétrograde* ($\Delta v_{\text{phas},1} < 0$) pour monter sur une orbite légèrement plus haute (période plus longue) ;
- cas b (véhicule en retard) : $n_p > n_2$ donc $v_p > v_2$, poussée *prograde* pour descendre sur une orbite légèrement plus basse (période plus courte).

- **Manœuvre 2 (instant $t_0 + T_{\text{corr}}$)** : nouvelle poussée tangentielle pour revenir sur l'orbite circulaire de rayon r_2 au moment du rendez-vous :

$$\Delta v_{\text{phas},2} = v_2 - v_p = -\Delta v_{\text{phas},1}.$$

Le module total de vitesse consommé par la correction de phasage est donc

$$\Delta v_{\text{phas,tot}} = |\Delta v_{\text{phas},1}| + |\Delta v_{\text{phas},2}| = 2 |\Delta v_{\text{phas},1}|.$$

La **durée totale du transfert** (stratégie 2) est alors :

$$T_{\text{total}} = T_{\text{Hohmann}} + T_{\text{corr}},$$

où T_{Hohmann} est la durée du transfert de Hohmann obtenu en Partie 1.

En prenant $T_{\text{corr}} = 10$ h (valeur maximale autorisée), on obtient numériquement (cas a) :

$$\Delta v_{\text{phas,tot}} \simeq 9.3 \times 10^{-2} \text{ m/s},$$

correspondant à un demi-grand axe a_p très proche de r_2 (variation d'altitude de l'ordre de 10^2 m seulement). La masse d'ergols consommée par cette correction est obtenue avec l'équation de Tsiolkovski :

$$\Delta v_{\text{phas,tot}} = I_{\text{sp}} g_0 \ln \left(\frac{m_0}{m_f} \right), \quad m_f = m_0 \exp \left(-\frac{\Delta v_{\text{phas,tot}}}{I_{\text{sp}} g_0} \right), \quad m_{\text{ergols,phas}} = m_0 - m_f$$

Pour $I_{\text{sp}} = 1000$ s et $m_0 = 2000$ kg, on trouve

$$m_{\text{ergols,phas}} \simeq 1.9 \times 10^{-2} \text{ kg} \approx 19 \text{ g}.$$

2.3.4 Question 4: Cas d'une durée de phasage de 5 h et de 15 h

On reprend les mêmes formules en remplaçant T_{corr} par 5 h et 15 h.

Pour $T_{\text{corr}} = 5 \text{ h}$:

$$n_p = n_2 - \frac{\Delta v}{T_{\text{corr}}} \Rightarrow a_p \simeq r_2 + 205 \text{ m},$$

$$\Delta v_{\text{phas,tot}} \simeq 1.85 \times 10^{-1} \text{ m/s}, \quad m_{\text{ergols,phas}} \simeq 3.8 \times 10^{-2} \text{ kg}$$

Pour $T_{\text{corr}} = 10 \text{ h}$ (référence précédente) :

$$a_p \simeq r_2 + 102 \text{ m}, \quad \Delta v_{\text{phas,tot}} \simeq 9.3 \times 10^{-2} \text{ m/s}, \quad m_{\text{ergols,phas}} \simeq 1.9 \times 10^{-2} \text{ kg}$$

Pour $T_{\text{corr}} = 15 \text{ h}$:

$$a_p \simeq r_2 + 68 \text{ m}, \quad \Delta v_{\text{phas,tot}} \simeq 6.2 \times 10^{-2} \text{ m/s}, \quad m_{\text{ergols,phas}} \simeq 1.3 \times 10^{-2} \text{ kg}$$

- Plus la durée de phasage T_{corr} est **courte** (5 h), plus il faut une différence de période marquée entre l'orbite de phasage et l'orbite cible, donc une orbite plus éloignée (a_p plus différent de r_2) et des Δv plus **importants**.
- À l'inverse, lorsque l'on accepte un temps de phasage plus **long** (10 h, puis 15 h), l'orbite de phasage se rapproche de l'orbite circulaire ($a_p \rightarrow r_2$), les Δv diminuent et la masse d'ergols nécessaire devient très faible.
- Il y a donc un compromis classique *temps de rendez-vous* vs. *consommation de carburant* : la solution à 10 h est plus économique que celle à 5 h, et celle à 15 h encore plus économique, mais au prix d'un rendez-vous plus lent.

2.3.5 Question 5: Résultats pour 5 h et 15 h

En appliquant les mêmes formules :

T_{corr}	$a_p - r_2 \text{ (m)}$	$\Delta v_{\text{phas,tot}} \text{ (m/s)}$	Commentaire
5 h	≈ 205	1.85×10^{-1}	Correction plus énergivore
10 h	≈ 102	9.3×10^{-2}	Référence
15 h	≈ 68	6.2×10^{-2}	Correction encore plus économique

Plus la durée de phasage est longue, plus l'orbite de phasage se rapproche de l'orbite circulaire, et plus les Δv sont faibles.

2.3.6 Question 6: Masse d'ergols et comparaison avec la stratégie 1

La masse d'ergols consommée pour la correction est :

$$m_{\text{ergols,phas}} = m_0 \left(1 - \exp \left(-\frac{\Delta v_{\text{phas,tot}}}{I_{\text{sp}} g_0} \right) \right).$$

Pour $I_{\text{sp}} = 1000 \text{ s}$, $m_0 = 2000 \text{ kg}$:

$$m_{\text{ergols,phas}} \approx \begin{cases} 3.8 \times 10^{-2} \text{ kg} & (5 \text{ h}) \\ 1.9 \times 10^{-2} \text{ kg} & (10 \text{ h}) \\ 1.3 \times 10^{-2} \text{ kg} & (15 \text{ h}) \end{cases}$$

À comparer avec la stratégie 1 :

$$m_{\text{ergols,Hohmann}} \approx 99 \text{ kg}.$$

- La stratégie 1 (timing optimal du transfert de Hohmann) est la plus économique si l'on peut choisir le moment de départ.
- La stratégie 2 ajoute une correction de phasage minuscule (quelques grammes d'ergols), mais suppose qu'on ait déjà raté la synchronisation.

La stratégie la plus performante en ergols est la stratégie 1.

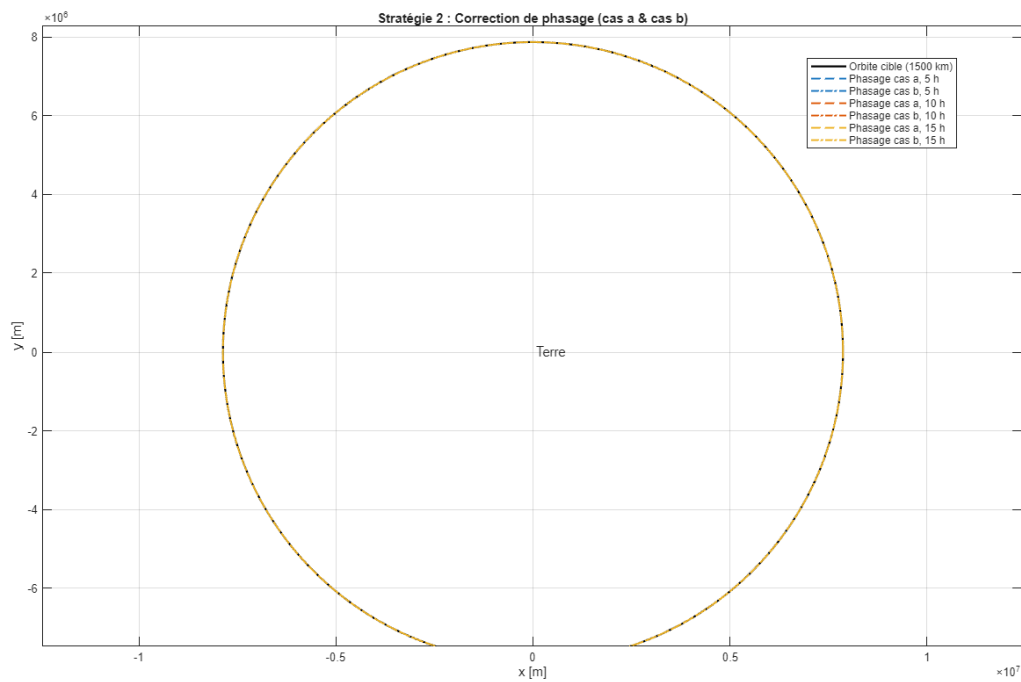


Figure 10: Stratégie : Correction de phasage (cas a cas b) pour les différentes heures

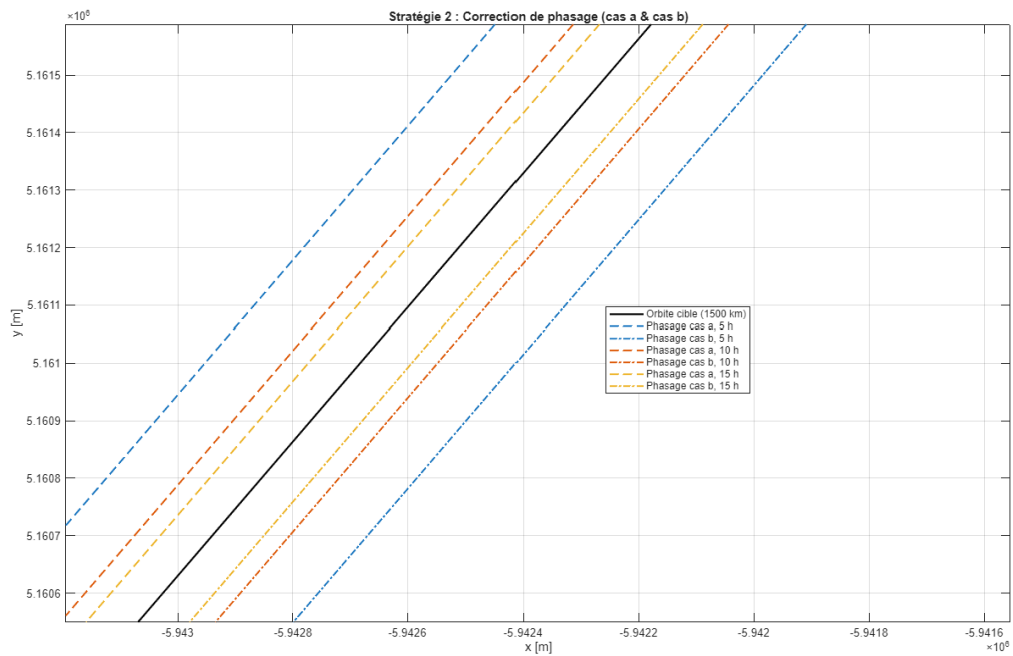


Figure 11: Stratégie : Correction de phasage (cas a cas b) pour les différentes heures