

Mema1b : Mécanique des milieux continus

Boris Baudel – ENS Rennes – Mécatronique

TP : Contraintes dans une plaque percée

Introduction

Dans cette étude, nous analysons une plaque percée en son centre par un trou elliptique soumise à un essai de traction. Loin du trou, la seule contrainte non-nulle est σ_{yy} , notée σ_{∞} . Nous nous intéressons aux cas où les dimensions du trou (a , b) sont très petites par rapport aux dimensions de la plaque (L , h), avec $b < L/10$, $a < h/10$ et $b \leq a$.

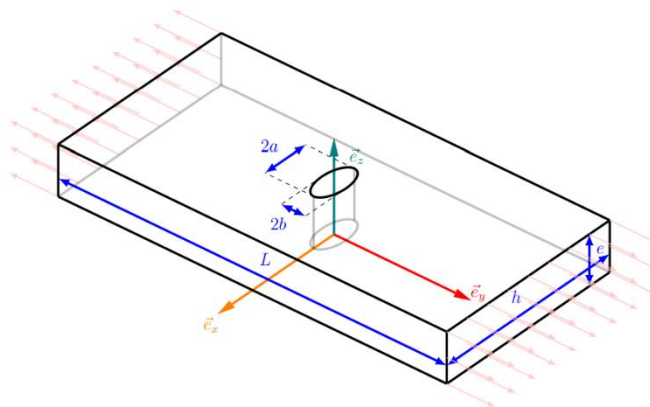


Figure 1 : Solide à étudier vue 3D

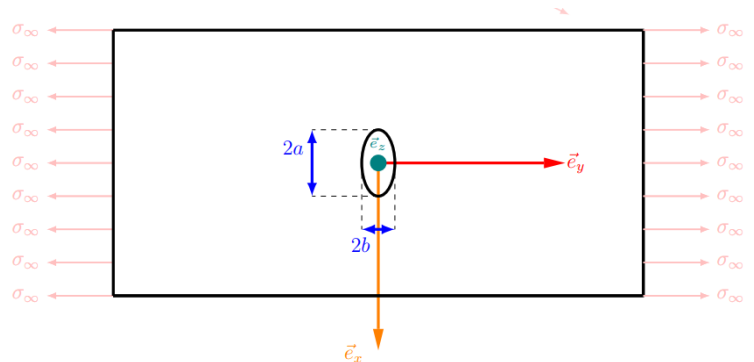


Figure 2 : Solide à étudier vue plane

Ce travail pratique vise deux objectifs principaux : déterminer le facteur de concentration de contrainte dans la plaque, c'est-à-dire le ratio $\sigma_{\max}/\sigma_{\infty}$ (σ_{\max} étant la contrainte σ_{yy} maximale dans l'ensemble de la plaque), et analyser la convergence de la solution pour identifier la meilleure simulation permettant d'obtenir un résultat correct rapidement et efficacement. Nous comparerons pour cela trois types de simulations : la simulation 3D, la simulation 3D améliorée et la simulation 2D en déformation plane, afin d'évaluer leur performance dans la détermination du facteur de concentration de contrainte et la convergence de la solution. De même, nous allons étudier, à partir des différentes simulations, quelles sont celles qui sont le moins coûteuses en temps de calcul. Par ailleurs, nous allons aussi étudier les concentrations de contraintes et leurs propriétés respectives.

Partie 1 : Simulation 3D

Propriété mécanique

Tout d'abord nous devons décrire les équations que met en place le logiciel COMSOL. Il s'agit des équations de la mécanique des milieux continus. Ce sont les équations que le logiciel va résoudre. Ainsi, les hypothèses utilisées par le logiciel sont aussi les hypothèses des équations. Par exemple, pour la définition du tenseur de déformation, on a sous l'hypothèse des petites déformations $u_{i,j} < 3\%$:

$$\bar{\epsilon} = \frac{1}{2} \left(\text{grad}(\vec{u}) + \text{grad}^T(\vec{u}) \right)$$

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i})$$

De même, on a l'équation locale de la statique des milieux continus :

$$\text{div}(\bar{\sigma}) + \vec{f} = \vec{0}$$

Celle-ci va permettre de mettre en relation les efforts et l'influence des efforts sur les contraintes. Par ailleurs, la troisième équation et dernière équation sont :

$$C = C(E, \nu)$$

$$E_{el} = C$$

C'est deux équations vont prendre en compte le matériau utilisé. En effet, cela va prendre en compte le module de Young, responsable de la résistance d'un matériau, le coefficient de poisson, et la déformation élastique E_{el} . Tout cela va permettre aux logiciels de résoudre ces équations dans le solide que nous allons le lui donner.

Les conditions limite choisi sont 3 appui plan pour permettre la déformation uniquement en traction comme le montre la figure 1. On place ainsi l'effort comme le montre la figure 3. On peut alors illustrer la figure suivante représentant la pièce que l'on souhaite étudier

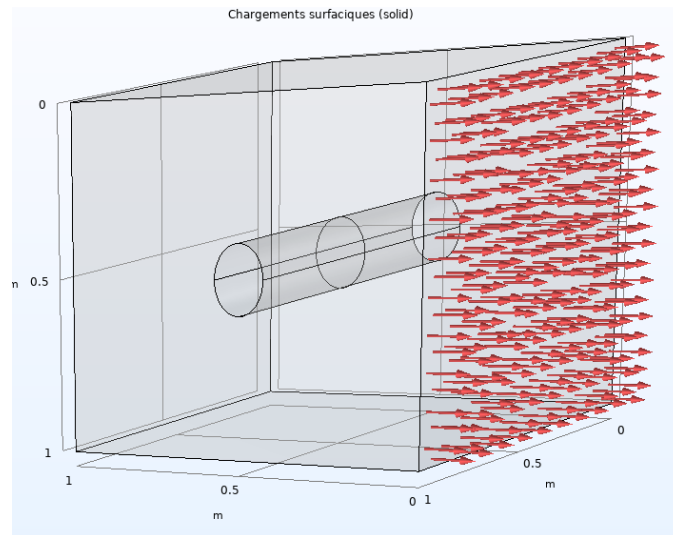


Figure 3 : Solide en traction

Tout d'abord, nous devons effectuer un maillage du solide. On effectue le maillage que l'on peut observer dans la figure 4.

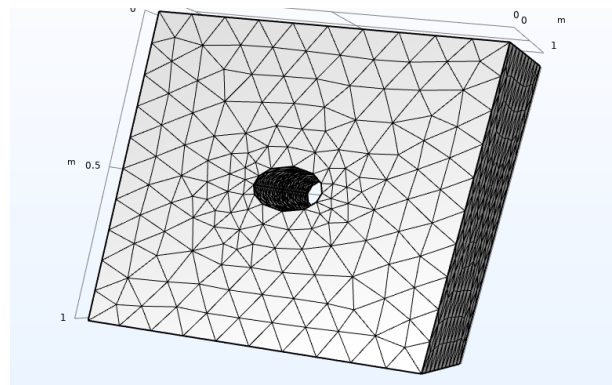


Figure 4 : Solide à étudier vue 3D

Nous pouvons maintenant lancer la simulation des éléments finies sur un solide. On obtient alors la figure 5 qui décrit les contraintes de Von mises sur le solide. Rappelons que les contraintes de Von mises sont définies par la relation suivante :

$$\sigma_{VM} = \frac{\sqrt{(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_I - \sigma_{III})^2}}{\sqrt{2}}$$

Ou les différentes valeurs de $\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}$ sont les contraintes principales. C'est-à-dire les valeurs propres du tenseur des contraintes. On peut alors visualiser les contraintes de Von Mises dans le Solide. (Par ailleurs, le logiciel affiche les contraintes de Von mises par ce que c'est le critère le plus utilisée pour vérifier la résistance d'un matériau)

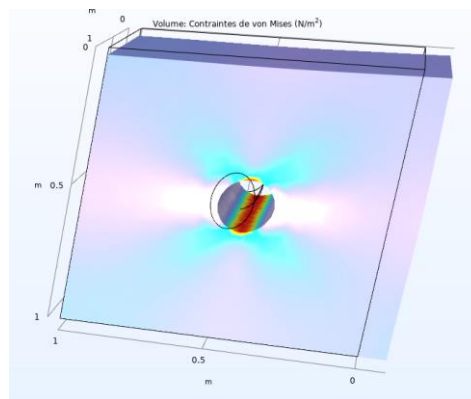


Figure 5 : Solide à étudier vue 3D

On peut alors demander aux logiciels d'afficher les trois types de contraintes principales.

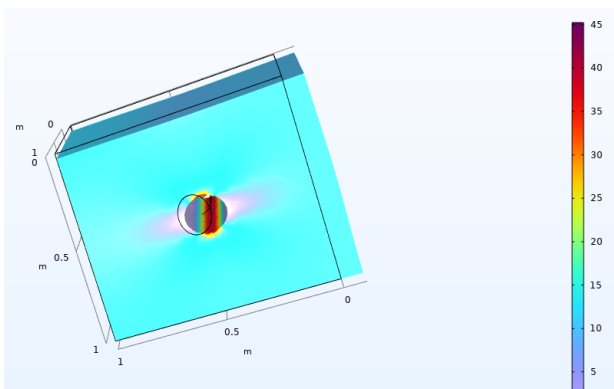


Figure 6 : Première contrainte principale

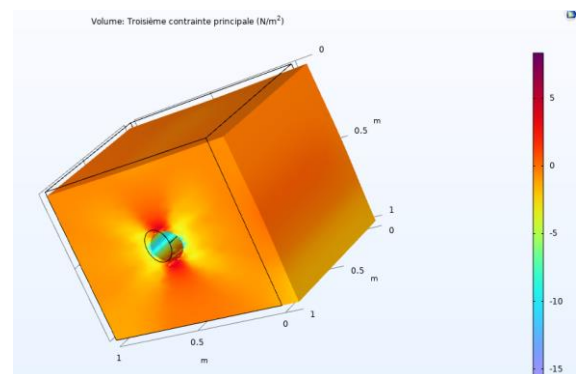


Figure 7 : Deuxième contrainte principale

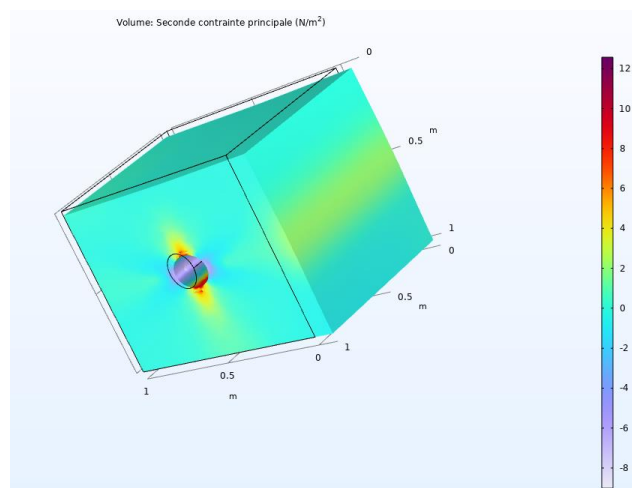


Figure 8 : Troisième contrainte principale

Nous allons donc étudier l'évolution de la valeur des contraintes principales en fonction de la valeur de la contrainte qui est appliquée sur le solide. Pour une valeur de 40 Pa :

Première contrainte principale (N/m ²)	Seconde contrainte principale (N/m ²)	Troisième contrainte principale (N/m ²)
162.54	40.192	24.523

Pour 30 Pa, on a :

Première contrainte principale (N/m ²)	Seconde contrainte principale (N/m ²)	Troisième contrainte principale (N/m ²)
121.91	30.144	18.392

Pour 20 Pa :

Première contrainte principale (N/m ²)	Seconde contrainte principale (N/m ²)	Troisième contrainte principale (N/m ²)
81.271	20.096	12.261

Pour 10 Pa :

Première contrainte principale (N/m ²)	Seconde contrainte principale (N/m ²)	Troisième contrainte principale (N/m ²)
40.636	10.048	6.1307

On peut alors tracer les différentes contraintes principales en fonction de la valeur de la contrainte appliquée.

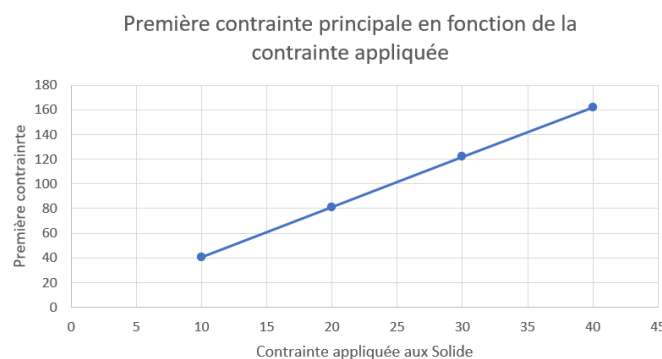


Figure 9 : Première contrainte principale

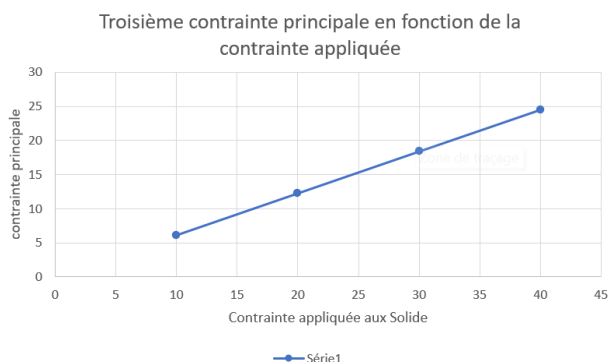


Figure 10 : Troisième contrainte principale

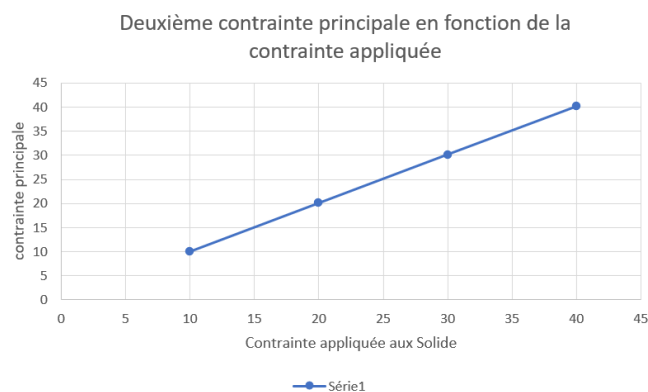


Figure 11 : Deuxième contrainte principale

Propriétés mécaniques

Voici les caractéristiques que nous avons mis dans notre simulation :

Préciser:

Module d'Young et coefficient de Poisson

Module d'Young:

E Défini par l'utilisateur

200000000

Coefficient de Poisson:

ν Défini par l'utilisateur

0.3

Masse volumique:

ρ Défini par l'utilisateur

2.3

Figure 12 : Caractéristiques principale du matériau

On remarque que pour différentes valeurs du module de Young les contraintes de Von mises varient. De même, la masse volumique ne fait pas varier la contrainte.

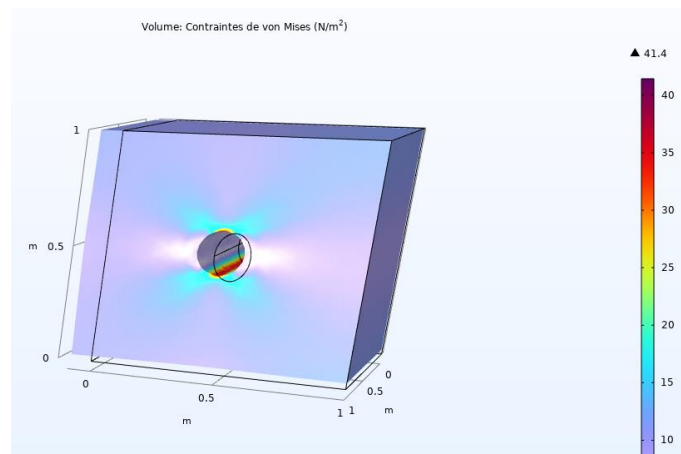


Figure 13 : Contraintes de Von Mises

La masse volumique n'a donc pas un grand intérêt si l'on étudie la contrainte de Von Mises.

Nous allons donc changer mes différentes valeurs du coefficient de poisson et nous allons évaluer son influence sur les contraintes.

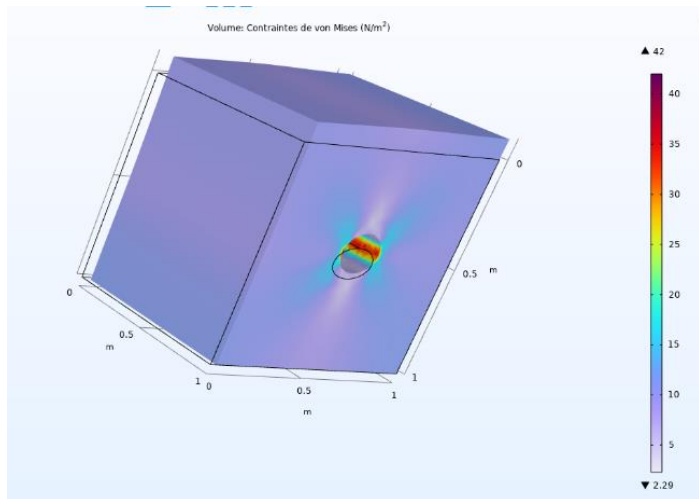


Figure 14 : Contraintes à $\nu = 0,35$

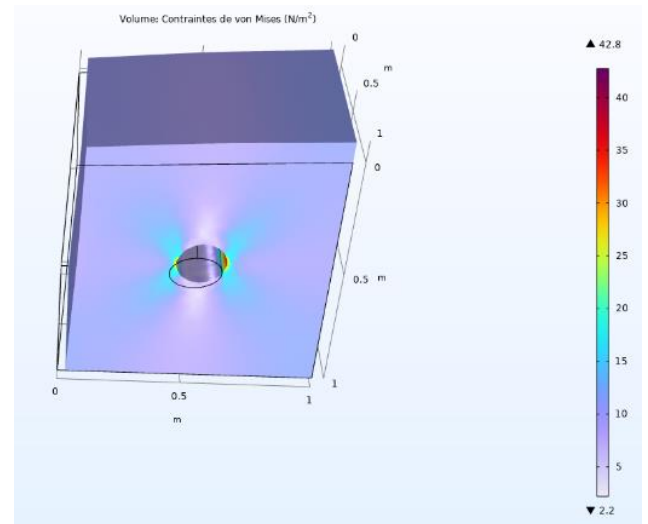


Figure 15 : Contraintes à $\nu = 0,4$

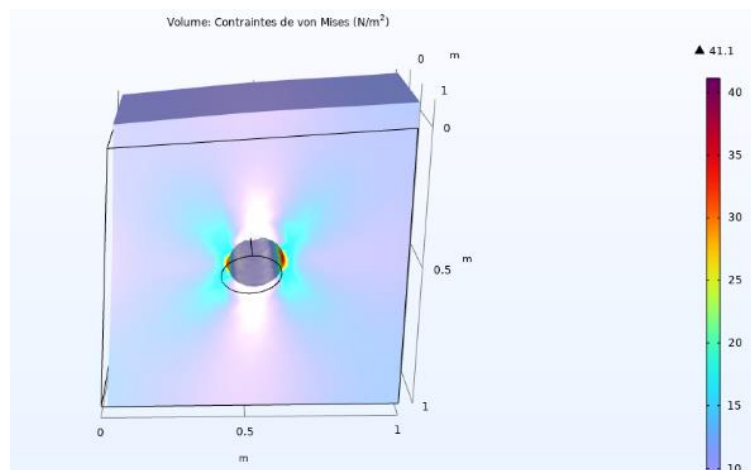


Figure 16 : Contraintes à $\nu = 0,25$

Nous avons donc relevé les différentes valeurs de la contrainte maximale en fonction de différentes valeurs du coefficient de poisson.

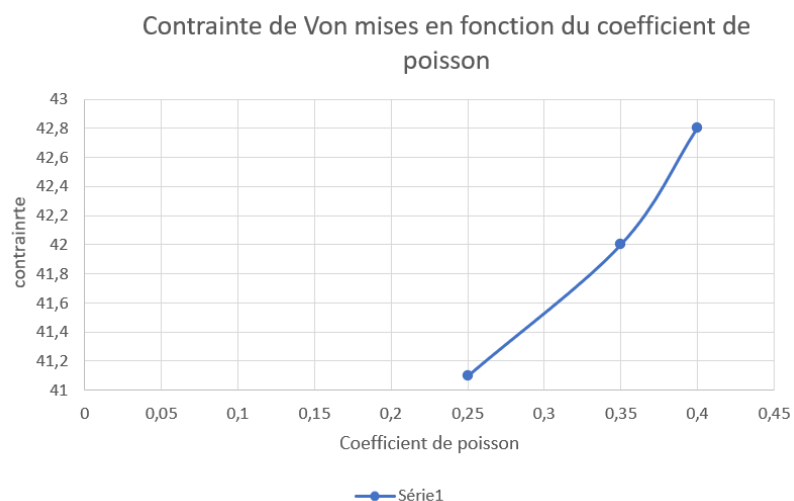


Figure 17 : Influence du coefficient de poisson en fonction de la contrainte

L'évolution de l'évolution du coefficient de poisson en fonction de la contrainte semble suivre une loi exponentielle.

Convergence

En faisant la simulation, nous remarquons que la valeur de la contrainte maximale est sur les parties latérales de l'ellipse, comme on peut l'observer dans la figure 18.

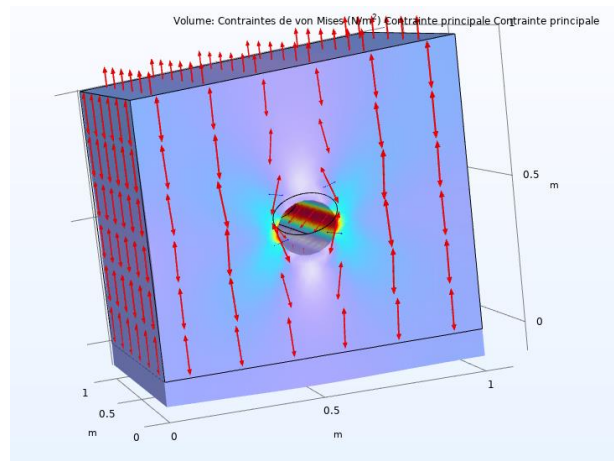


Figure 18 : Contraintes de Von mises pour un coefficient de poisson nul

Nous devons maintenant faire varier la densité du maillage et observer la convergence pour une certaine valeur de la première contrainte principale. Nous allons donc évaluer la contrainte principale pour différente densité de maillage. On obtient alors :

On a pour 161223, 87975, 38190, 21783 ddl, c'est-à-dire pour un maillage fin, normale, grossier et très grossier :

Première contrainte principale (N/m ²)	Première contrainte principale (N/m ²)	Première contrainte principale (N/m ²)	Première contrainte principale (N/m ²)
40.595	40.587	40.865	41.171

On en déduit alors la contrainte suivante en fonction des différents types de maillage :

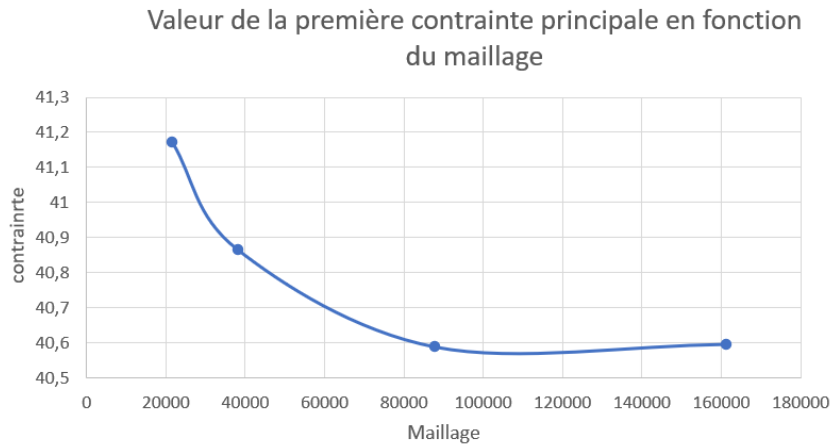


Figure 19 : contrainte en fonction du maillage

On observe donc cette convergence en augmentant le maillage. Nous allons donc maintenant changer de Solide. Nous considérons maintenant le solide suivant :

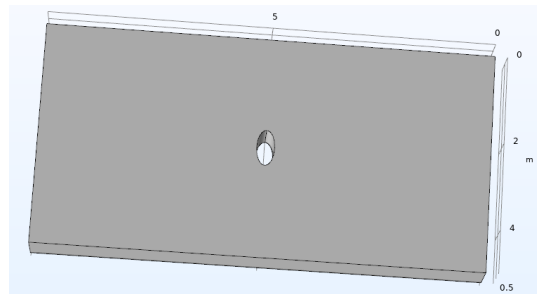


Figure 20 : Modèle utilisé

Nous allons maintenant étudier les concentrations de contraintes en fonction du maillage. Nous rappelons que la concentration de contrainte :

$$Kt = \frac{\max(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)}{\sigma}$$

» Expression
`max(solid.sp1,max(solid.sp2,solid.sp3))`

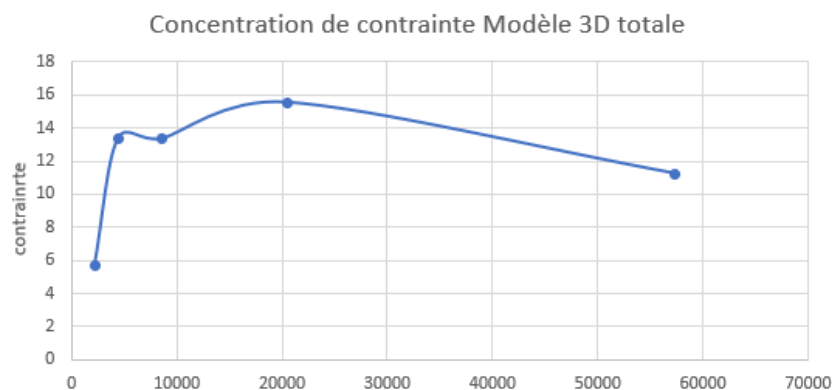


Figure 21 : Concentration de contrainte

Simulation 3D amélioré

Le nouveau modèle ressemble à ceci en raison de deux plans de symétrie. Les conditions limites à appliquer sont 3 appui plan, pour que le système puisse être étudié en traction.

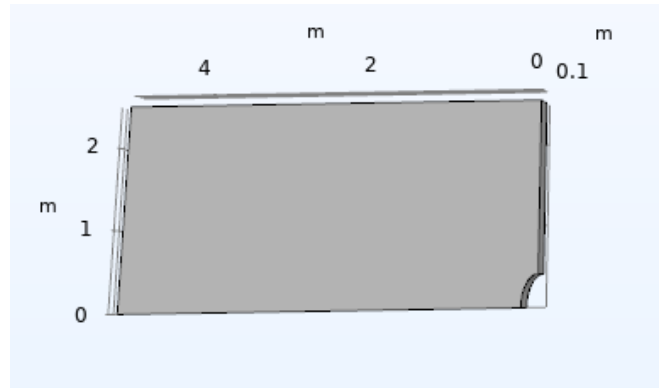


Figure 22 : Modèle utilisé

Le nouveaux modèle semble converger à plus grande vitesse que le modèle précédent et les deux modèles converge vers la même valeurs de concentration de contraintes ($K_t = 5$) et $K_t = 9$ pour le premier. Il y a un écart, mais cela semble être du fait que j'aurais du prendre plus de valeurs de maillage fin pour la première méthode.

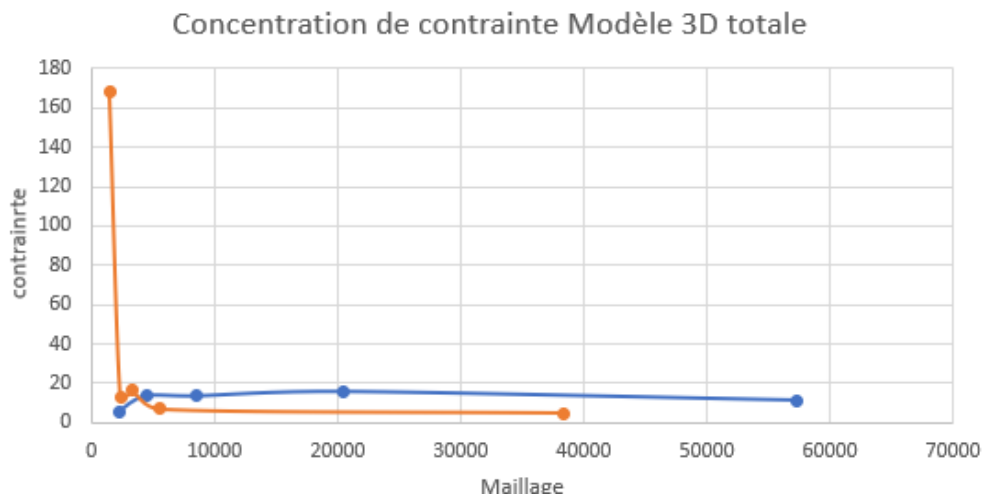


Figure 23 : Modèle utilisé

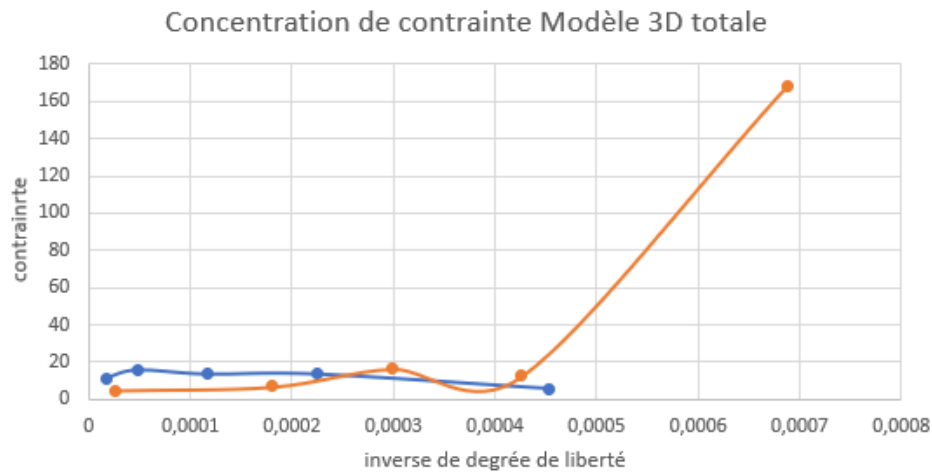


Figure 24 : Concentration de contraintes

Le nouveau modèle limite le temps de calcul. Nous calculons maintenant à l'aide du nouveau modèle les différentes valeurs des contraintes et déformations données par l'énoncé.

Contrainte principale direction 1, composante z	Contrainte principale direction 2, composante z	Contrainte principale direction 3, composante z
0.17141	0.82513	1.1299E-4

Déformation principale direction 1, composante Z	Déformation principale direction 2, composante Z	Déformation principale direction 3, composante Z
0.17141	0.82513	1.1299E-4

Certes les contraintes sont proches de 0, mais elles ne le sont pas exactement. Logiquement, il devrait s'agir d'une contrainte plane, étant donnée l'effort qui nous ait donné et aussi en déformation plane.

Simulation 2D déformation plane.

Nous utilisons le modèle suivant, composé de trois appuis plans. De même, on utilise une modélisation 2D car on sait que les contraintes et la déformation sont planes, donc nous pouvons étudier sous la forme suivante :

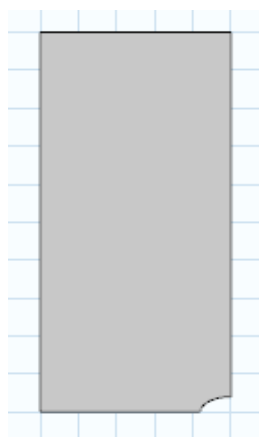


Figure 25 : Modèle utilisé

Par ailleurs, l'épaisseur ne joue pas de rôle sur le résultat, c'est pour cela que nous pouvons le modéliser comme ceci.

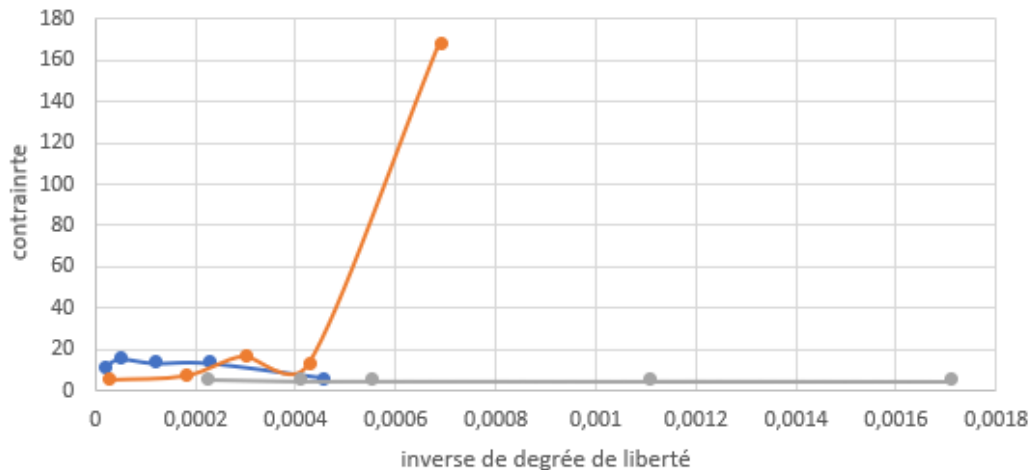


Figure 26 : Concentration de contraintes

Par ailleurs, on peut aussi observer les résultats de la simulation plane, sous la forme suivante :

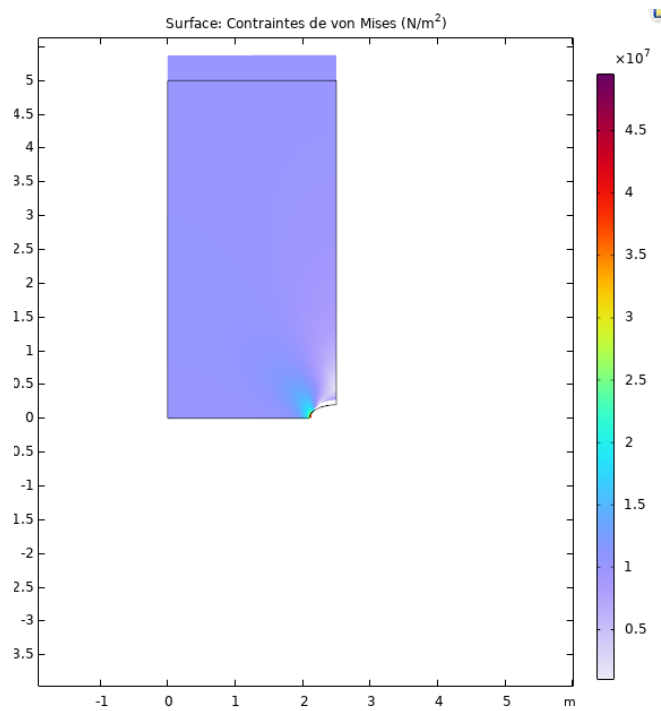


Figure 27 : Contraintes

Par ailleurs, on peut alors montrer les différentes convergences des trois méthodes, on remarque que la nouvelle méthode converge plus rapidement vers les valeurs souhaitées avec un temps de calcul plus faible. Par ailleurs, la valeur de la concentration de contraintes est d'environ 5 dans les deux derniers cas. En revanche, pour la première, converge vers 9. Il s'agit du fait que j'aurais dû prendre un maillage plus fin pour en arriver à 5. Par ailleurs, les contraintes plane ne sont pas intéressante à analyser comme nous l'avons expliqué précédemment.

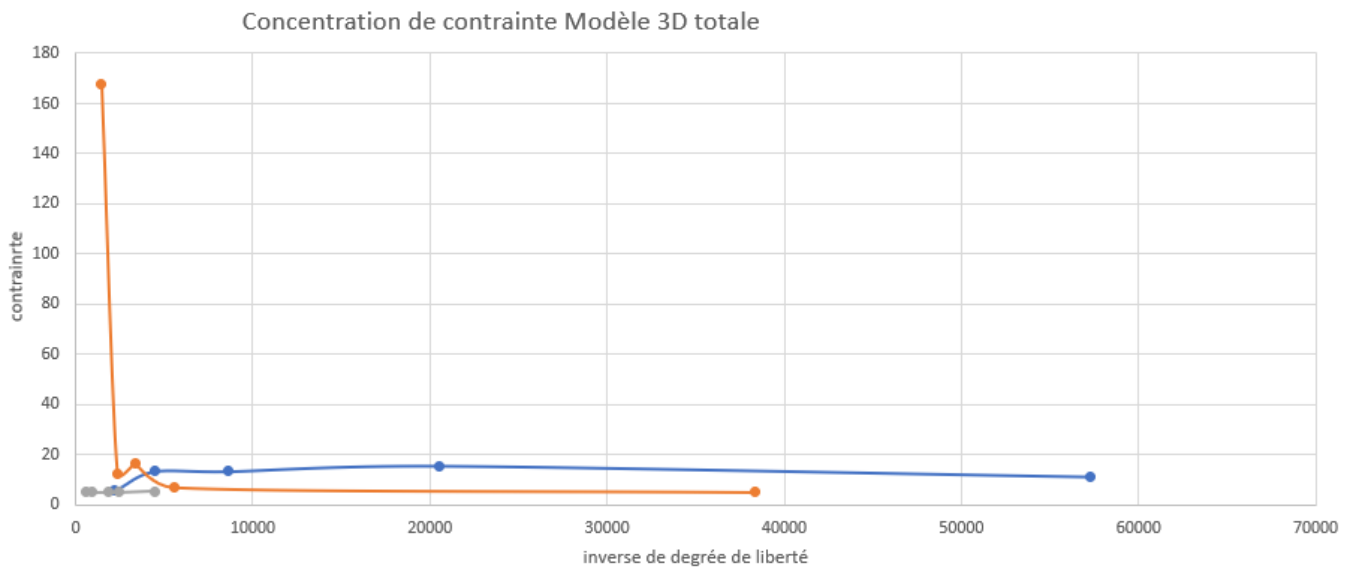


Figure 28 : Concentration de contraintes

Facteur de concentration de contraintes

Nous allons maintenant en déduire une structure générale en fonction de la taille d'une ellipse. Tout d'abord nous pouvons relever les dimensions de l'ellipse précédente qui était :

demi-axe a:	0.4	m
demi-axe b:	0.2	m
demi-axe c:	30	m
▼ Position		
x:	2.5	m
y:	5	m
z:	0	m

Avec ceci nous avons obtenu un facteur de coefficient de concentration de contraintes de 5. En changeant les dimensions des différentes ellipses nous pouvons en déduire alors la relation suivante, dans le cas d'un trou elliptique :

$$K_t = 1 + 2 \frac{a}{b}$$

Conclusion

Pour conclure, ce TP a permis par trois méthodes différentes les contraintes d'un même solide ainsi que le facteur de coefficient de contraintes. Le but de ce TP a été de mettre en évidence les simplifications qui peuvent être effectuées afin de réduire le temps de calcul, la quantité du maillage, pour converger plus vite vers les valeurs souhaitées. Nous avons donc mis cela en évidence en étudiant : Un modèle 3D totale de la pièce, un modèle 3D simplifié, puis finalement, comment on est en structure plane, une simple étude 2D. L'importance dans ce type de résolution est donc de déterminer les simplifications qui vont permettre de réduire le temps de calcul et d'améliorer le temps de calcul.