Mema2A : TP Vibrations des structures élancées

Boris Alexandre Baudel - Ecole normale supérieure de Rennes - Département Mécatronique

Septembre 2023

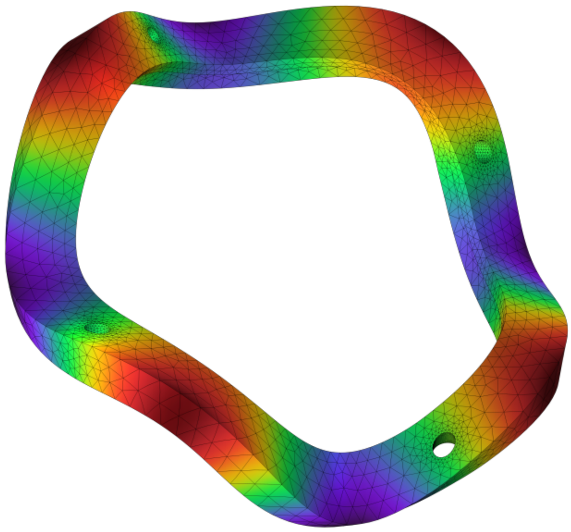

Figure 1: Fréquences Propres d'une poutre

Contents

1 Introduction

L'objectif principal est de mettre en perspective les méthodes analytiques et numériques pour comprendre et prévoir le comportement vibratoire de différents matériaux et structures. L'une des principales tâches sera de mesurer et analyser les fréquences propres de structures telles que des poutres en acier et en aluminium. Ces fréquences seront ensuite comparées à des valeurs théoriques et numériques, en utilisant la théorie des poutres de Bernoulli et des simulations par éléments finis via Comsol.

Le TP permettra notamment de déduire les propriétés élastiques des matériaux étudiés, telles que le module de Young et le coefficient de Poisson, à partir des fréquences propres mesurées. Diverses méthodes de modélisation et de simulation seront utilisées pour valider les approches analytiques. Le but ultime est de comparer la précision et la fiabilité des différentes méthodes en termes de prédiction des fréquences propres.

Le TP se décompose selon plusieurs parties. La première consistera à étudier la théorie de Bernoulli pour mesurer les fréquences propres. Elles seront comparées à des résultats expérimentaux issus de COMSOL. On pourra ainsi comparer les résultats numériques et expérimentaux.

Dans la suite du TP, nous allons déterminer le coefficient de Poisson et son module de Young pour une plaque inconnue qui sera modélisée sur COMSOL. Nous ferons aussi des analyses expérimentales qui nous permettront, avec une minimisation, de déterminer son coefficient de Poisson et son module de Young.

2 Objectifs

L'objectif de ces travaux-pratiques est d'analyser les théories de vibration des structures vues en cours, et de comparer les approches analytiques et numériques à l'expérience. Cela consistera sommairement à déterminer les propriétés élastiques de matériaux à partir de quelques fréquences propres de structures, et à comparer les prédictions des autres fréquences propres avec les fréquences mesures.

3 Poutre de Bernoulli

3.1 Analytique vs. expérimental

Mesure de la masse volumique

La première plaque est une plaque rectangulaire en acier dont les propriétes sont connus. Pour la première plaque, les dimensions sont les suivantes :

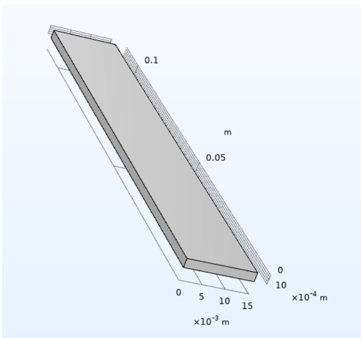

Figure 2: Première pièce à étudier

$$L = 100.06mm,$$
$$l = 10.18mm,$$
$$e = 2.06mm,$$
$$f = 1076Hz.$$

Les valeurs de la plaque sont celles calculées : E = 210e9 ;k1 = 4.73004 ;k2 = 7.85320 ;Ig = 7.42e-12 m4 ;L = 0.1006 m ;Rho = 7570 kg/m3 ;S = 21e-6 m2 Tout d'abord, nous devons calculé la masse volumique, pour cela nous utilsons les dimensions précédentes et nous avons :

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{15.884e9}{10.18mm \times 2.06mm \times 100.061e3mm} \times 1e3 = 7570g/m^3$$

Mesures des fréquences propres

Dans cette partie, nous devons calculés les fréquence propres avec la formule suivante issu de la théorie de Bernoulli. On rappelle h la hauteur de direction de l'impact pour les poutres de Bernoulli, en flexion :

$$f_i = k_i^2/2\pi\sqrt{\frac{EIG_z}{\rho SL^4}} \tag{2}$$

où

$$\begin{aligned} IG_z &= \frac{bh^3}{12}, \\ k_1 &\approx 4.73004, \\ k_2 &\approx 7.85320, \\ i > 2 : k_i &\approx \frac{(2i+1)\pi}{2}. \end{aligned}$$

Les données du problème sont : E = 210e9 k1 = 4.73004 k2= 7.85320 Ig = 7.42e-12 L = 0.1006 m Rho = 7570 kg/m3 S = 21e-6 m2

Tableau des fréquences

Nous allons maintenant, mesurer les fréquences éxpérimentales, puis les comparés avec les fréquences calculés en fonction aussi du coefficient k pour les différentes fréquences propres.

Mode (i)	Fréquence expérimentale (Hz)	k_i	Fréquence calculée (Hz)
1	1076	4.73004	1101
2	2963	7.85320	3036
3	5797	10.99	5952
4	9547	14.137	9840
5	14200	19.1	1512

En utilisant les fréquences propres mesurées on en déduit facilement que le module de young de l'acier est de 190 Gpa. Il suffit juste d'inverser la formule précédente pour isoler E et de le retrouver avec les valeurs que l'on a. Nous devons obtenir les écarts rélatif entre l'expérience et les calculs.

Ecarts Relatif

Pour calculer l'écart relatif entre les fréquences expérimentales et calculées, la formule suivante est utilisée :

$$\text{Écart relatif pour le mode } i = \left| \frac{\text{Fréquence expérimentale} - \text{Fréquence calculée}}{\text{Fréquence expérimentale}} \right| \times 100$$

$$\text{Écart relatif} = \left| \frac{1076 - 1101}{1076} \right| \times 100 \approx 2.32\%$$

$$\text{Écart relatif} = \left| \frac{2963 - 3036}{2563} \right| \times 100 \approx 4.45\%$$

$$\text{Écart relatif} = \left| \frac{5797 - 5952}{5797} \right| \times 100 \approx 2.67\%$$

$$\text{Écart relatif} = \left| \frac{9547 - 9840}{9547} \right| \times 100 \approx 3.07\%$$

Calcule des fréquences en Torsion

L'équation qui donne les fréquences de torsion f_j en théorie de poutre de Bernoulli est donnée par :

$$f_j = \left(\frac{j}{2L}\right)\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$$

où j est le mode, L est la longueur de la poutre, μ est le module de cisaillement, et ρ est la densité de la poutre.Pour une poutre en acier avec $L = 100.06\,\text{mm}$, $E = 190\,\text{GPa}$, et un coefficient de Poisson $\nu = 0.3$, le module de cisaillement μ est :

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{160 \times 10^9\,\text{Pa}}{2(1+0.3)} \approx 80.77 \times 10^9\,\text{Pa}$$

La fréquence du premier mode de torsion ($j = 1$) est alors :

$$f_1 = \left(\frac{1}{2 \times 0.10006}\right)\sqrt{\frac{80.77 \times 10^9}{7800}} \approx 16092\,\text{Hz}$$

La validité de la theorie de Bernoulli est sous certaines hypothèse. Les hypothèses qui explique que nous ayons un tel écart sont les suivantes : Le matériau de la poutre doit être homogène et isotrope. La théorie est valide lorsque les déformations de la poutre sont petites par rapport à ses dimensions. La poutre doit être droite avant l'application de la charge. On suppose que les couches de matériau de la poutre ne glissent pas les unes par rapport aux autres lors de la déformation.La théorie suppose que les charges sont appliquées de manière à produire une flexion pure, sans torsion. De même, l'équation s'appui sur l'hypothèse de non gauchissement qui n'est que valable pour des poutres de section circuleire ou à l'extrème limite carrée.

3.2 Numérique vs. expérimental

La méthode des éléments finis ne donnent pas les valeurs exactes des fréquences de résonance. Elles dépendent du nombre d'éléments utilisés. Cela se comprend assez bien en flexion : plus un mode propre est d'ordre élevé, plus la distance entre deux noeuds de ce mode est courte. S'il n'y a qu'un élément entre ces noeuds, le mode ne peut même pas être simulée. Plus il y a d'éléments entre deux noeuds, plus le mode concerné est correctement simulé. Nous effectuons donc les simulations de la plaque qui sont visibles dans les figures 2, 3 et 4.

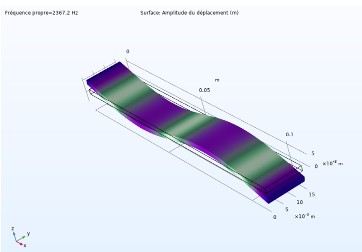

Figure 3: Modes 1

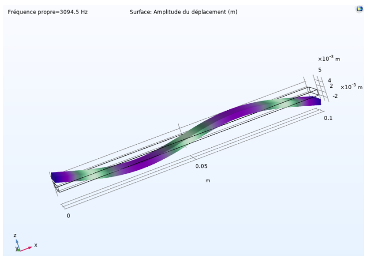

Figure 4: Modes 2

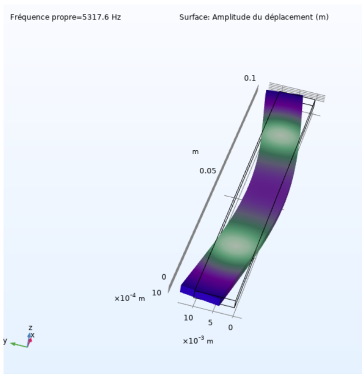

Figure 5: Modes 3

Nous allons donc maintenant faire en sorte d'étudier dans quelles mesures la valeur des fréquences propres varie en fonction du nombre de ddl. Pour cela, nous allons changer la qualité du maillage et nous allons étudier son évolution. Nous allons dresser les tableaux suivants et nous observons les première, deuxième et troisième fréquence propre en fonction de l'inverse du nombre de ddl.

Fréquence	Maillage	ddl	1/Fréquences	1/dd	
Première	Fin	5295	1122	0,000188857	1122,6
	Normale	3303	1122,6	0,000302755	1122,6
	Grossier	2694	1123,3	0,000371195	1123,3
	Très grossier	1551	1124,5	0,000644745	1124,5
Deuxième	Fin	5295	3092,2	0,000188857	3092,2
	Normale	3303	3094	0,000302755	3094
	Grossier	2694	3099	0,000371195	3099
	Très grossier	1551	3111,1	0,000644745	3111,1
Troisième	Fin	5295	5317,4	0,000188857	5317,4
	Normale	3303	5317	0,000302755	5317
	Grossier	2694	5317,7	0,000371195	5317,7
	Très grossier	1551	5319,2	0,000644745	5319,2

Table 1: Tableau des Fréquences

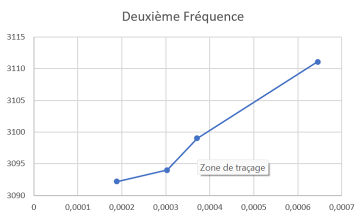

Figure 6: Deuxième fréquence

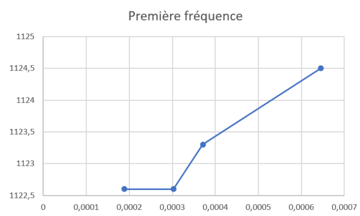

Figure 7: Première fréquence

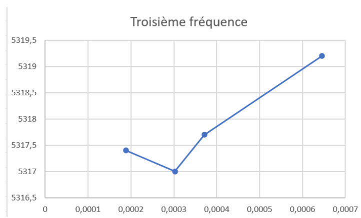

Figure 8: Troisième fréquence

On observe que plus le mode est élevée plus l'erreur est grande avec une fréquence élevée. En effet, lorsque le maillage est plus grossier on diminue la précision. Cette précision dépend alors du modes propres de la fréquence dans laquelle on se situe. Dans le calcule numérique, le premier mode de torsion se situe expérimentalement à 11993 Hz. Avec COMSOL, on trouve 6314 Hz pour le premier mode de torsion, et 12320 Hz. En résumé, la théorie de Bernoulli marche plutot bien pour les fréquences propres en flexion, mais moins bien pour la torsion.

4 Plaque

Mesure de la masse volumique

Pour la deuxième plaque, nous allons donc changer les dimensions et agrandir la plaque. Par ailleurs, la plaque est maintenant en Aluminium et les dimensions sont les suivantes :

$$L = 110,32mm,$$
$$l = 15,2mm,$$
$$e = 2.0mm,$$
$$f = 1076Hz.$$

La masse volumique est calculée comme suit :

$$\rho = \frac{m}{V} = 2700g/m^3$$

Mesure des premières fréquences en torsion et en flexion

Nous allons maintentant faire les premières mesures de fréquences en torsion et en flexion à l'aide de mesures expérimentales. Par ailleurs, nous utilisons aussi des fréquences calculées.

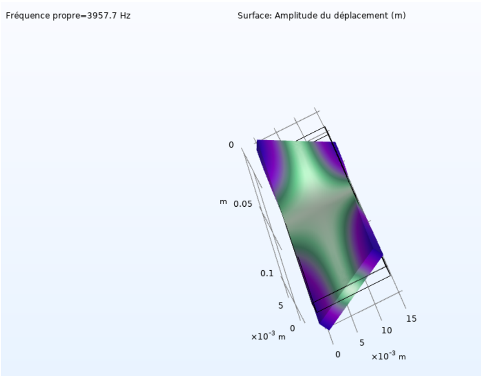

Figure 9: Mode 1

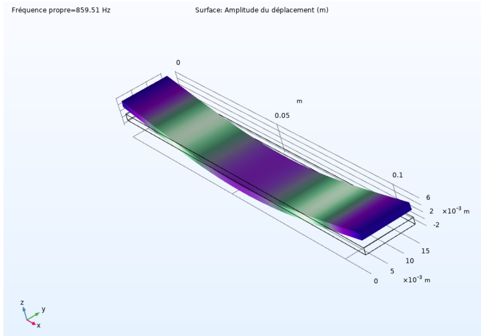

Figure 10: Mode 2

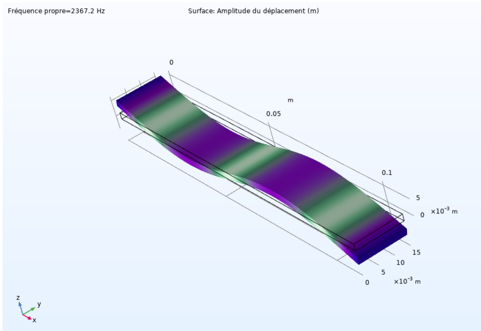

Figure 11: Mode 3

Table 2: Comparaison des fréquences expérimentales et calculées

Fréquence expérimentale (Hz)	Type	Fréquence calculée (Hz)	Écart (Hz)	Écart relatif (%)
864	Flexion	860	4	0.47
3625	Torsion	3658	-33	-0.90
4600	Flexion	4668	-68	-1.46

Comparaison avec Bernoulli

De la même manière que la partie précédente, nous utilisons les simulations issues de COMSOL pour obtenir les fréquences propres de issu de la pièce. Ces fréquences sont visibles ci dessous :

Mode	Fréquence expérimentale (Hz)	Fréquence calculée (Hz)	Écart relatif
Flexion	864	860	0.47%
Torsion	3625	3658	0.90%
Flexion	4600	4668	1.46%

Table 3: Tableau des écarts relatifs

Identification par Analyse Inverse : Méthode et Principe Général

L'analyse inverse est une technique utilisée pour identifier les propriétés matérielles ou les paramètres d'un modèle à partir de mesures expérimentales.Dans ce contexte, nous cherchons à identifier les propriétés d'une plaque en acier en utilisant les fréquences de flexion et de torsion mesurées.

Expression de la Fréquence de Flexion

Même si la géométrie de la plaque est loin des hypothèses de Bernoulli, la première fréquence de flexion est donnée par :

$$f_{\text{flexion}}(E,\nu) = (a_{\text{flexion}}\nu^2 + b_{\text{flexion}}\nu + c_{\text{flexion}}) \times \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

Ici, $a_{\text{flexion}}, b_{\text{flexion}}, c_{\text{flexion}}$ sont des coefficients qui peuvent être déterminés par un ajustement polynomial à partir des données expérimentales.

Expression de la Fréquence de Torsion

De manière similaire, la première fréquence de torsion est donnée par :

$$f_{\text{torsion}}(E,\nu) = (a_{\text{torsion}}\nu^2 + b_{\text{torsion}}\nu + c_{\text{torsion}}) \times \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

ou en fonction de μ :

$$f_{\text{torsion}}(E,\nu) = a_{\text{torsion}}\nu^2\sqrt{\frac{\mu}{\rho}} + b_{\text{torsion}}\nu\sqrt{\frac{\mu}{\rho}} + c_{\text{torsion}}\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$$

$$f_{\text{torsion}}(E,\nu) = \frac{a_{\text{torsion}}\nu^2 + b_{\text{torsion}}\nu + c_{\text{torsion}}}{} \sqrt{\frac{E}{\rho 2(1+\nu)}}$$

Nous allons donc établir les différentes fréquences propres en fonction de nu afin de pouvoir faire l'identification. Pour cela, nous allons considérer la racine de E sur la masse volumique comme une constante et nous allons faire varier le coefficient de poisson. Nous obtenons donc les données suivantes du coefficient de poisson en fonction du maillage pour les fréquences en torsion et en flexion.

Flexion (nu)	Extrêmement Fin	Extra Fin	Plus Fin
0.1	875,66	875,71	875,75
0.2	875,93	875,98	875,03
0.3	876,36	876,41	875,47
0.4	876,91	876,98	877,05

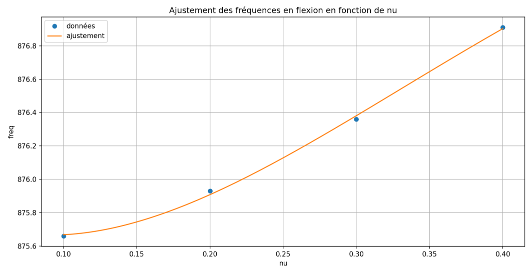

Figure 12: Ajustement des fréquences en flexion en fonction de nu

Torsion (nu)	Extrêmement Fin	Extra Fin	Plus Fin
0.1	4004,5	4009	4015,6
0.2	3837	3841,3	3847,1
0.3	3690,1	3694,2	3698,8
0.4	3560,9	3564,5	3567,6

Sur python nous utilison polyfit et les données trouvées pour pouvoir permettre effectuer Les valeurs trouvées pour la parabole nous donnent donc la fonction définie dans la figure 11. En utilsant python on obtient les paramètres de la parabole données par :

aflexion = -0.021181938481460934 bflexion = 0.13236795782943014 cflexion = 0.26855359026510545
atorsion = 0.020576226006306993 btorsion =0.0032539568672798466 ctorsion = 1.287163751360479

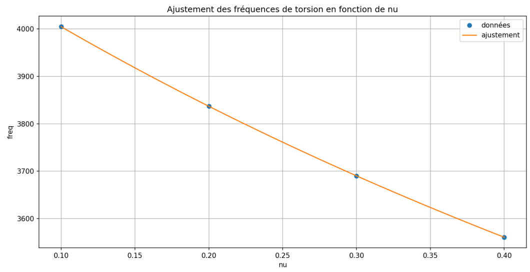

Figure 13: Ajustement des fréquences en torsion en fonction de nu

Méthode d'Identification du module d'élasticité et du coefficient de Poisson

L'identification des coefficients dans les équations pour f_{flexion} et f_{torsion} se fait par ajustement polynomial en utilisant des données expérimentales. Une fois ces coefficients identifiés, ils peuvent être utilisés pour prédire les fréquences pour d'autres conditions ou d'autres matériaux.

La fonction de coût est définie comme suit :

$$f_{\text{torsion}}(E,\nu) = \frac{a_{\text{torsion}}\nu^2 + b_{\text{torsion}}\nu + c_{\text{torsion}}}{} \sqrt{\frac{E}{\rho 2(1+\nu)}}$$

$$\text{coût}(E,\nu) = \left(f_{\text{flexion}}(E,\nu) - f_{\text{flexion-exp}}\right)^2 + \left(f_{\text{torsion}}(E,\nu) - f_{\text{torsion-exp}}\right)^2$$

où $f_{\text{flexion-exp}}$ et $f_{\text{torsion-exp}}$ sont les fréquences de flexion et de torsion mesurées expérimentalement. Les paramètres E et ν qui minimisent cette fonction de coût sont ceux que l'on cherche à identifier. Pour les mesure du module de Young et du coefficient de poisson nous obtenons E = 20 GPa et v = 0,1. Les valeurs semblent être loin de la réalité. Les valeurs de a, b , c doivent être un peu différentes. En ayant comparer les résultats avec des camarades, les résultats devraient plutot être autour de 60 GPa pour le module de Young et de 0,23 pour le coefficient de poisson. Les valeurs expérimentales sont aussi une source d'erreur importante.

5 Pièce inconnue

5.1 Pièce établie

La pièce qui a été choisi est la pièce dont la masse est de 189.0142 g et de son très aigu. Dans une première partie nous mesurons les longeurs, diamiètre. A paritir de COMSOL, nous pouvos mesurer facilement mesurer le volume. Le volume de la pièce est : 5.8e-4 m3.

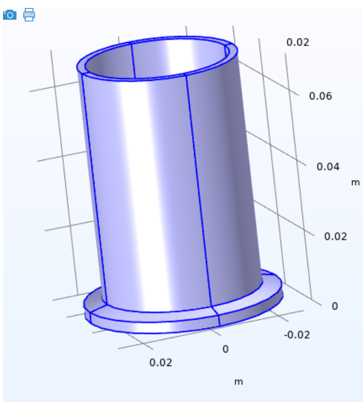

Figure 14: Légende de l'image

Nous devons maintenant relever les valeurs des fréquences propres en fonction du coefficient de poisson pour différent maillage. Nous pouvons aussi relever les différents types de fréquences propres du systèmes visible dans la figure ci dessous.

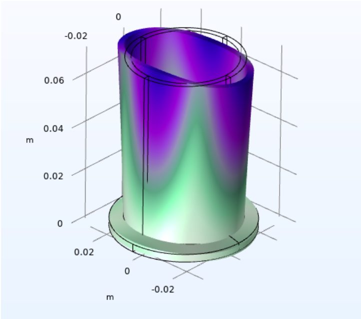

Figure 15: Figure 1

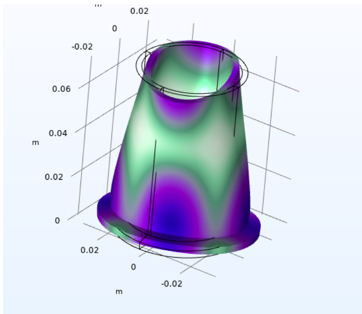

Figure 16: Figure 2

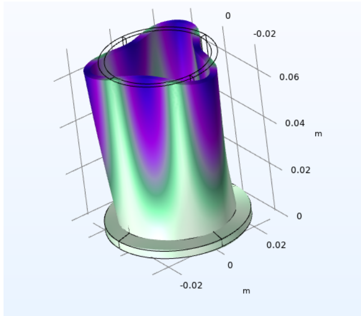

Figure 17: Figure 3

5.2 Données expérimentale et méthode d'analyse inverse

Pour détérminer le module d'élasticité nous allons procéder par méthodes d'indentfication inverse comme nous l'avons fait précédemment. Nous devons prendre les différentes valeurs de

Fréquence expérimentale (Hz)	Fréquence calculée (Maillage Normal nu = 0.1) (Hz)
3422	3233
5438	5307
9325	8824
12000	4668

Le module de Young est de 182 GPa. Le coefficient de poisson est de 0.43. V = 24,9cm3 rho = 7520

F1 (nu)	Extrêmement Fin	Extra Fin	Plus Fin
0.1	3214	3219.9	3224
0.2	3235.6	3241,6	3246
0.3	3285,5	3292,2	3297,2
0.4	3369,9	3378,4	3384

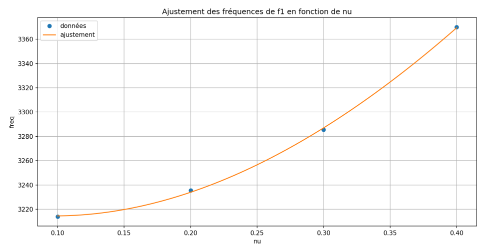

Figure 18: Ajustement polynomiale pour la pièce inconnue

Le nombre de ddl associée à chaque nombre de DDL : 78363 ; 150729 ; 10983 Nous obtenons des coeffficents de la parabole : a = 0.5190832630021597, b = 0.3692731236326002, c = 0.9915489762734809

Méthode d'Identification du module d'élasticité et du coefficient de Poisson

L'identification des coefficients dans les équations pour f_{flexion} et f_{torsion} se fait par ajustement polynomial en utilisant des données expérimentales. Une fois ces coefficients identifiés, ils peuvent être utilisés pour prédire les fréquences pour d'autres conditions ou d'autres matériaux. E = 270 Gp nu = 0,11

La fonction de coût est définie comme suit :

$$\text{coût}(E, \nu) = \left(f_{\text{flexion}}(E, \nu) - f_{\text{flexion-exp}}\right)^2 + \left(f_{\text{torsion}}(E, \nu) - f_{\text{torsion-exp}}\right)^2$$

où $f_{\text{flexion-exp}}$ et $f_{\text{torsion-exp}}$ sont les fréquences de flexion et de torsion mesurées expérimentalement. Les paramètres E et ν qui minimisent cette fonction de coût sont ceux que l'on cherche à identifier.

Dans le cas suivant, nous obtenons 127 Gpa et 0 en coefficient de poisson. L'erreur doit venir des valeurs expérimentales qui semblent ne pas être suffisament précise. De même, la méthode de minimisation ne marche que très rarement étant donnée la précision que l'on devrait avoir sur les données expérimentales ainsi que sur l'approximation polynomiale.

6 Conclusion

Nous avons donc explorer comment mesurer les fréquences propres des différentes pièces que nous pouvons modéliser sur COMSOL. Nous pouvons maintenant dimensionnner des structures pour éviter des problèmes de vibrations. De même, nous avons étudier les fréquences propres des différentes poutres en fonction des différents maillages. De même, nous avons comparer la théorie de Bernoulli, les données expérimentales ainsi que les résultats issu de COMSOL.Nous avons aussi pu détérminer les propriétés mécanique de la matière, notamment le module de Young et le coefficient de poisson. Nous avons donc étudier trois plaques et étudier les différentes fréquences propres.

7 Programmes python

Listing 1: Code Python

```python
from scipy.optimize import minimize
import numpy as np

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# donn es
nu_data = np.array([0.1, 0.2, 0.3, 0.4])
freq = np.array([
    [4004.5, 4009, 4015.6],
    [3837, 3841.3, 3847.1],
    [3690.1, 3694.2, 3698.8],
    [3560.9, 3564.5, 3567.6]
])

col_idx = 0

rho = 7520  # Densit  en kg/m^3
E = 160e9  # Module de Young en Pa

denom_data = np.sqrt(E / (rho * 2 * (1 + nu_data)))

a, b, c = np.polyfit(nu_data, freq[:, col_idx] / denom_data, 2)

print(f"a = {a}, b = {b}, c = {c}")

def f_torsion(nu, a, b, c, denom):
    return (a * nu**2 + b * nu + c) * denom

nu = np.linspace(0.1, 0.4, 100)
denom = np.sqrt(E / (rho * 2 * (1 + nu)))

plt.title("Ajustement des fr quences en flexion en fonction de nu")
plt.plot(nu_data, freq[:, col_idx], 'o', label="donn es")
plt.plot(nu, f_torsion(nu, a, b, c, denom), label="ajustement")
plt.grid(True)
plt.xlabel("nu")
```

```
plt.ylabel("freq")
plt.legend()
plt.show()

freq_exp = np.array([3422, 5438, 9325, 12000])
freq_calc = np.array([3233, 5307, 8824, 4668])

def cout(params):
    E, nu = params

    def f_torsion(nu, a, b, c, denom):
        return (a * nu**2 + b * nu + c) * denom
    rho = 7520

    cout_flexion = np.sum((f_torsion(nu, a, b, c, np.sqrt(E / (rho * 2 * (1 + nu)))) - f
    cout_torsion = np.sum((f_torsion(nu, a, b, c, np.sqrt(E / (rho * 2 * (1 + nu)))) - f

    return cout_flexion + cout_torsion

initial_params = [180e9, 0.3]

res = minimize(cout, initial_params, method='nelder-mead', options={'xatol': 1e-8, 'disp

print(f"Optimized E = {res.x[0]}, nu = {res.x[1]}")
```