

Robotique : Analyse des systèmes électromécaniques

Devoir : Modèles d'états

Boris Alexandre Baudel - Ecole normale supérieure de Rennes - Professeur : Damien Grenier

Introduction

On considère une bille pouvant rouler sans glisser le long d'un rail. Le rail peut lui-même pivoter autour de son axe situé en son centre de gravité. On note r la valeur de la position de la bille le long du rail de ϕ l'angle que fait le rail par rapport à l'horizontalité. Le système est commandé par le couple Γ qu'exerce un actionneur au niveau de l'axe. La sortie mesurée est la position r .

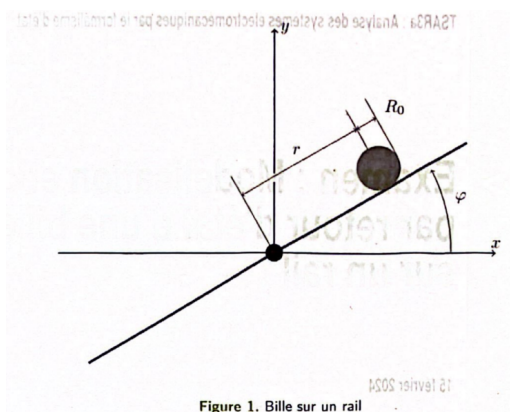


Figure 1: Système à asservir

Les caractéristiques mécaniques sont données par la table 1. La longueur du rail détermine la trajectoire que la bille peut suivre. Dans notre cas, un rail d'un mètre offre à la bille un espace suffisant pour démontrer une gamme de comportements dynamiques, en fonction de la manière dont elle est propulsée et des forces agissant sur elle. Le moment d'inertie de la bille, donné par une formule spécifique en fonction de sa masse et de son rayon, est une mesure de sa tendance à résister à la rotation autour de son centre de masse. Un moment d'inertie plus élevé signifie que la bille sera plus difficile à mettre en rotation ou à arrêter une fois qu'elle a commencé à tourner.

Table 1: Paramètres du système

Paramètre	Symbole	Valeur
Masse de la bille	m	$0,11 \text{ kg}$
Rayon de la bille	R_0	$0,015 \text{ m}$
Moment d'inertie de la bille	J_0	$\frac{2}{5}mR_0^2$
Moment d'inertie du rail autour de son axe	J	$0,1 \text{ kg/m}^2$
Longueur du rail	l	1 m
Accélération de la pesanteur	g	$9,8 \text{ m/s}^2$

On se propose de décomposer le système en deux sous-systèmes, selon les deux degrés de liberté de celui-ci :

- un sous-système constitué de la bille en translation / rotation le long du rail supposé immobile, avec donc comme seul degré de liberté r (autrement dit, un sous-système à ϕ constant) ;

- un système constitué du rail et de la bille, le tout en rotation autour de l'axe du rail, avec comme seul degré de liberté φ (autrement dit un sous-système à r constant).

Etude mécanique : Rappel de Sup

Energie cinétique à ϕ fixe

L'énergie cinétique de translation d'une bille est donnée par la formule:

$$E_{trans} = \frac{1}{2}mv^2 \quad (0.1)$$

où m est la masse de la bille et v est la vitesse de translation du centre de masse de la bille.

L'énergie cinétique de rotation pour une bille qui roule sans glisser est:

$$E_{rot} = \frac{1}{2}I\omega^2 \quad (0.2)$$

où I est le moment d'inertie de la bille et ω est la vitesse angulaire de rotation.

Pour une sphère solide, le moment d'inertie est $I = \frac{2}{5}mR_0^2$, et la relation entre la vitesse angulaire et la vitesse de translation est $v = R_0\omega$. Ainsi, l'énergie cinétique totale est:

$$E_{total} = E_{trans} + E_{rot} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}mR_0^2\right)\left(\frac{v}{R_0}\right)^2 \quad (0.3)$$

En simplifiant, on obtient:

$$E_{total} = \frac{7}{10}mv^2 \quad (0.4)$$

On rappelle aussi que $v = \dot{r}$ et que $w = \dot{\phi}$

Bilan des forces

On effectue maintenant le bilan des forces sur la bille on a :

- Le Poids
- La résistance du support

Comme il n'y a pas de glissement on a donc la relation suivante :

$$\vec{P} = -mg\vec{y}_0 \quad (0.5)$$

$$\vec{R} = R(\cos(\phi)\vec{y}_0 - \sin(\phi)\vec{x}_0) \quad (0.6)$$

Si l'on se place sur l'axe y_1 , on a l'égalité :

$$\vec{R} = \frac{mg}{\cos(\phi)}\vec{y}_1 \quad (0.7)$$

Travail des Forces et Equilibre

La puissance de la force est donnée par :

$$P = -mg\sin(\phi)\dot{r} \quad (0.8)$$

D'après le théorème de l'énergie cinétique, on a:

$$\frac{dE_c}{dt} = \sum_{i=0}^N p_i$$

$$\begin{aligned}\frac{7}{5}m\vec{r} \cdot \vec{r}'' &= -mg \sin(\phi)\vec{r} \\ \Rightarrow \frac{7}{5}m\vec{r}'' \cdot \vec{r} &= -mg \sin(\phi)\vec{r} \\ \Rightarrow \frac{7}{5}m\vec{r}'' &= -mg \sin(\phi) \\ \Rightarrow \vec{r}'' &= -\frac{5}{7}g \sin(\phi) \\ \Rightarrow r' &= -\frac{5}{7}g \sin(\phi)t + A\end{aligned}$$

$$\Rightarrow r(t) = -\frac{5}{7}g \sin(\phi)\frac{t^2}{2} + At + B$$

Energie cinétique à r fixe

À r fixe maintenant et φ variant, on a d'après le Théorème de Huygens par décalage du centre de rotation :

$$\begin{aligned}E_{cin} &= \frac{1}{2} \left[J + \left(\frac{2}{5}mR_0^2 + r^2m \right) \right] \dot{\varphi}^2 \\ E_{cin} &= \frac{1}{2} \left[J + \left(\frac{2}{5}mR_0^2 + r^2m \right) \right] \dot{\varphi}^2\end{aligned}$$

On peut remarquer que :

$$J_{eq} = J + J_0 + r^2m$$

Bilan des forces

Le bilan des forces donne cette fois :

$$P = (m + M)g$$

$$\vec{P}_{bille} = -mg\vec{y}$$

$$\vec{P}_{rail} = -Mg\vec{y}$$

$$\vec{R}_{action} = P_{action}\vec{y}$$

$$Couple = \Gamma \vec{z}$$

Théorème de l'énergie cinétique

Les puissances mécanique sont données par :

$$P_{\text{méca}} = \vec{C}_i \cdot \dot{\vec{\varphi}} \cdot \vec{z}$$

$$P_{\text{con}} = C_m \cdot \dot{\varphi} \cdot \vec{z}$$

Le moment de la bille est donnée par :

$$\vec{M}_{\text{bille}} = \vec{r} \wedge \vec{P}$$

$$\vec{M}_{\text{bille}} = r(\cos(\varphi)\vec{z} + \sin(\varphi)\vec{y}) \wedge (-mg\vec{y})$$

$$M_{\text{bille}} = -mrg \cos(\varphi)$$

On applique le théorème de l'énergie cinétique et on a :

$$\begin{aligned} J_{eq} \ddot{\varphi} &= (-mrg \cos(\varphi) + \Gamma) \dot{\varphi} \\ \Rightarrow \ddot{\varphi} &= \frac{\Gamma - mrg \cos(\varphi)}{J_{eq}} \end{aligned}$$

Linéarisation et modèles d'états

3. Linéariser les équations d'évolution de la position r de la bille et de la position angulaire φ du rail autour de $r = r_0 = 0,25 \text{ m}$ et $\varphi = 0$. Montrer qu'on peut les écrire sous le formalisme d'état :

$$\dot{X} = A \cdot X + B \cdot I$$

avec :

$$X = \begin{pmatrix} r \\ \dot{r} \\ \varphi \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_{41} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ b_4 \end{pmatrix}$$

en posant :

$$a_{23} = -\frac{5}{7} \cdot g, \quad a_{41} = -\frac{mg}{J + mr_0^2}, \quad b_4 = \frac{1}{J + mr_0^2}$$

On linéarise maintenant les équations autour du point de fonctionnement $r = r_0, \varphi = 0$.

$$\ddot{r} = \left(-\frac{mg}{m + \frac{J_0}{r_0^2}} \sin(\phi) \right) = -\frac{5g\phi}{7}$$

$$\ddot{\varphi} = \left(\frac{\Gamma - mgr \cos(\phi)}{J_{eq}} \right)$$

$$X = \begin{pmatrix} r \\ \dot{r} \\ \varphi \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} \tag{0.9}$$

et on a :

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{mg}{m + \frac{J_0}{r_0^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{mg}{J_{eq}} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{J_{eq}} \end{pmatrix} \Gamma \quad (0.10)$$

$$\text{Et } J_0 = \frac{2}{5}mr_0^2$$

$$\Rightarrow -\frac{mg}{m + \frac{J_0}{r_0^2}} = -\frac{5}{7}g$$

$$-\frac{mg}{J + J_0 + mr_0^2} = -\frac{mg}{J + mr_0^2}$$

Analyse du système continu non commandé

Pour obtenir la stabilité d'un système, on regarde les valeurs propres de la matrice d'évolution.

Un algèbre de matrice d'évolution:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & a_{23} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ a_{41} & 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix}$$

D'où on déduit:

$$\det(A - \lambda I) = X^4 - a_{23} \cdot a_{41}$$

et par conséquent :

$$\det(A - \lambda I) = (X - (a_{23} \cdot a_{41})^{\frac{1}{4}})(X + (a_{23} \cdot a_{41})^{\frac{1}{4}})(X - i(a_{23} \cdot a_{41})^{\frac{1}{4}})(X + i(a_{23} \cdot a_{41})^{\frac{1}{4}})$$

On trouve alors 4 racines dont une à partie réelle strictement négative. Le système n'est pas stable. Nous allons étudier à quelle point le système est commandable, nous allons utiliser le critère de Kalman.

Commande du système

Un système est dit **commandable** si pour tout intervalle de temps $[t_i, t_f]$, et tous points $x_i, x_f \in \mathcal{X}$, avec $x(t_i) = x_i$, il existe une commande u appliquée sur $[t_i, t_f]$, telle que $x(t_f) = x_f$.

La condition nécessaire et suffisante de commandabilité ci-après est appelée le *critère de Kalman pour la commandabilité*. Le système considéré est commandable si et seulement si :

$$\text{rang} [B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B] = n$$

La matrice ci-dessus, notée Γ , est communément appelée *matrice de commandabilité*, et ses colonnes se calculent de façon itérative : $A^{k+1}B = A(A^k B)$. En termes intrinsèques on définit le *sous-espace commandable* \mathcal{X}_c de l'espace d'état \mathcal{X} suivant

$$\mathcal{X}_c = \sum_{k=1}^b A^{k-1}B$$

où B est l'image de B , et le système est donc commandable si, et seulement si $\mathcal{X}_c = \mathcal{X}$. On dit alors, que (A, B) (ou, de manière équivalente, $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$) est commandable. Quand ce n'est pas le cas, soit ρ_c le rang de la matrice Γ , c'est-à-dire la dimension de l'espace commandable \mathcal{X}_c , $\{e_1, \dots, e_{\rho_c}\}$ une base de

\mathcal{X}_c et $\{e_{\rho_c+1}, \dots, e_n\}$ une base d'un sous-espace supplémentaire de \mathcal{X}_c dans \mathcal{X} . En choisissant dans \mathcal{X} la base $\{e_1, \dots, e_n\}$, quelle que soit la base choisie dans \mathcal{U} , les applications linéaires A et B sont représentées par des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} A_c & * \\ 0 & A_- \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} B_c \\ 0 \end{pmatrix}$$

où (A_c, B_c) est commandable et où l'astérisque est une sous-matrice dont les éléments sont quelconques. Les valeurs propres de A_- sont les *pôles (ou modes) non commandables du système*, également appelés ses *zéros de découplage en entrée (z.d.e.)*. L'ordre de la matrice A_- est $n - \rho_c$.

Le système est noté $C = [B \ AB \ A^2B \ A^3B]$ de rang plein.

On déduit de B les matrices A puissance et B:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{23} \\ a_{41} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{41} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{23} \\ a_{23}a_{41} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{41} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{41}a_{23} & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ b_4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{23}b_4 \\ 0 & 0 & a_{23}b_4 & 0 \\ 0 & b_4 & 0 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

C est de rang plein. Donc le système est commandable.

Un système est dit observable si l'observation de ses entrées et sorties pendant un intervalle de temps fini $[t_i, t_f]$ permet de déterminer l'état initial $x(t_i)$, et donc, par intégration de l'équation d'état, de connaître $x(t)$ à tout instant appartenant à l'intervalle $[t_i, t_f]$. La condition nécessaire et suffisante d'observabilité ci-après est appelée le critère de Kalman pour l'observabilité. Le système considéré est observable si et seulement si :

$$\text{rang} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = n$$

Cette matrice notée Ω est communément appelée matrice d'observabilité et ses lignes se calculent de façon itérative : $CA^{k+1} = (CA^k)A$. En termes intrinsèques, on définit le sous-espace non observable \hat{X}_0 suivant

$$\hat{X}_0 = \bigcap_{k=1}^n \ker(CA^k)$$

et le système (ou, par abus de langage, (C, A) , ou (C, \bar{A})) est donc observable si, et seulement si $\hat{X}_0 = \{0\}$ (où 0 désigne le sous-espace vectoriel de X réduit au seul élément nul). Quand ce n'est pas le cas, soit ρ_0 la dimension de \hat{X}_0 ($n - \rho_0$ étant donc le rang de Ω), $\{\eta_1, \dots, \eta_{n-\rho_0}\}$ une base d'un sous-espace supplémentaire de \hat{X}_0 , et $\{\eta_{n-\rho_0+1}, \dots, \eta_n\}$ une base de \hat{X}_0 . En choisissant dans X la base $\{\eta_1, \dots, \eta_n\}$, quelle que soit la base choisie dans \mathcal{U} , les applications linéaires C et A sont représentées par des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} C_0 & A_0 \\ 0 & A_- \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} B_c \\ 0 \end{pmatrix}$$

où (C_0, A_0) est observable. On cherche à mesurer uniquement la position r . On a alors $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

La matrice d'observabilité est :

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \end{pmatrix}$$

$$O = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{23} \end{pmatrix}$$

La matrice d'observabilité est aussi de rang plein. Le système est observable.

Commande sur Simulink

Nous allons faire la méthode des poles et de la matrice K, nous allons d'abord faire le code suivant. Nous allons choisir une matrice K telle que $\Gamma = -KX$. Nous allons donc placer les poles souhaitée dans la matrice K à l'aide de la fonction place.

```
m = 0.11;
r_0 = 0.25;
J_0 = (2/5)*m*r_0 ^ 2;
J = 0.1;
g = 9.81;

a23 = -(5/7) * g;
a41 = -(m*g)/(J + m*r_0 ^ 2);
b4 = 1/(J + m*r_0 ^ 2);

A = [0 1 0 0; 0 0 a23 0; 0 0 0 1; a41 0 0 0];
B = [0; 0; 0; b4];

C = eye(4);
D = zeros(4, 1);

desired_poles = [-7+4i,-7-4i, -3 - 2i, -3 + 2i];
K = place(A, B, desired_poles);
plot(K)
```

Nous utilisons le bloc schema bloc Simulink suivant :

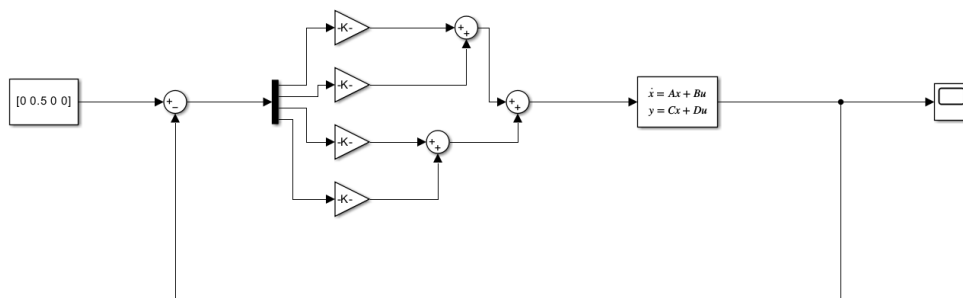


Figure 2: Modèle de résolution linéaire

Nous obtenons le résultats suivants qui converge vers une valeur de 0.6 avec une commande à 0.5 si l'on asservi la vitesse.

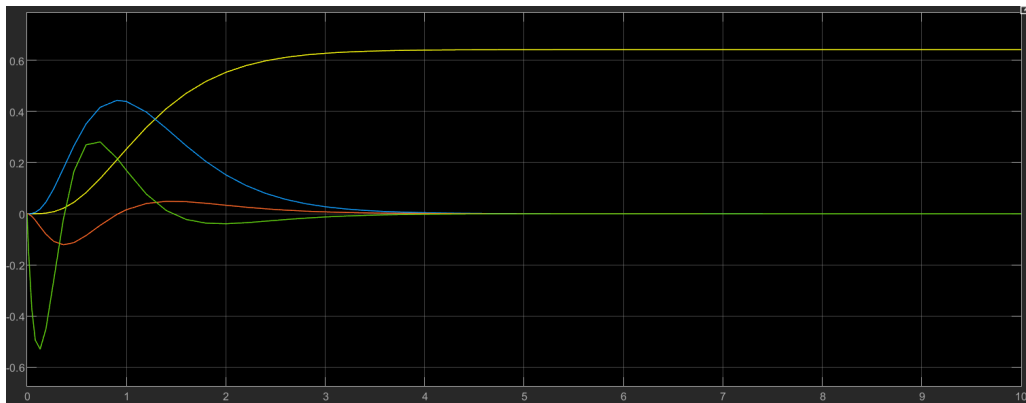


Figure 3: Control en \dot{r}



Figure 4: Control en r pour une commande à 0.5

On observe que la commande marche plutôt bien et on se situe à 5,2.

Résolution d'un système non linéaire

Dans le cas d'un système non linéaire, nous devons établir et changer les équations non linéaire. De plus, nous devons utiliser un observateur sur un seul capteur r . On utilise les équations pour en déduire $\dot{r}, \dot{\phi}, \phi$ que nous allons réutiliser dans le sommateur comme le montre la figure 5. On a:

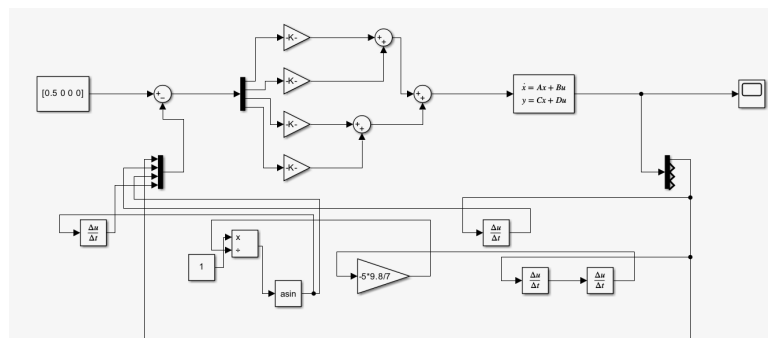


Figure 5

Placement d'un observer

Le placement d'un observer permet de d'utiliser un seul capteur selon r et d'utiliser les équations pour retrouver les autres valeurs manquante dans la boucle de retour. Dans notre cas, l'observer à été réalisé avec les deux équations. Deux essais on été utilisé avec deux méthodes.

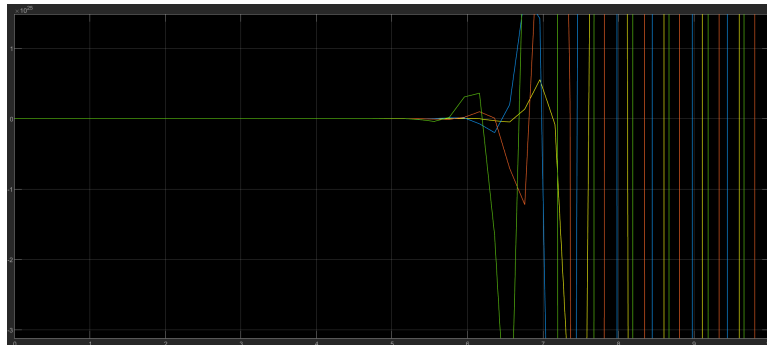


Figure 6: Le système est instable

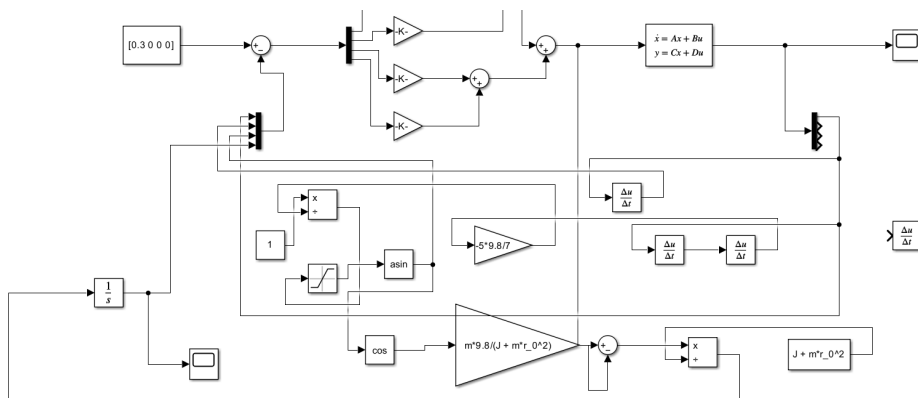


Figure 7: Le système est instable

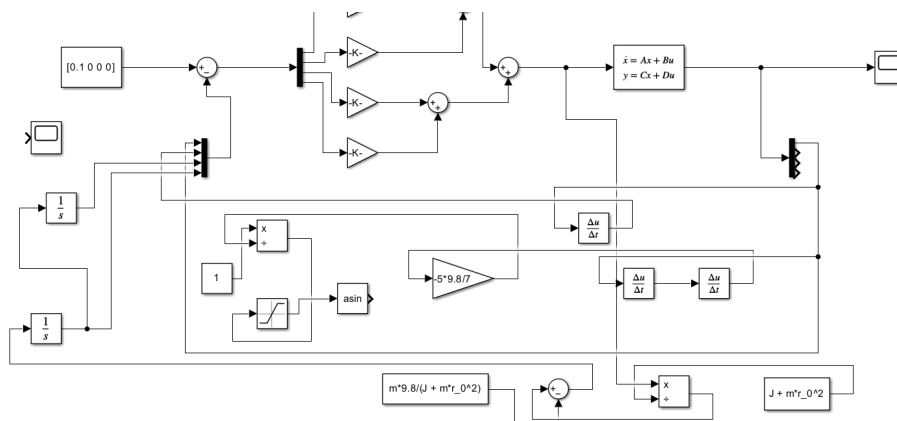


Figure 8: Le système est instable

Pour les deux méthodes de résolution avec le \ddot{r} et le $\ddot{\phi}$ ont montré des résultats instables pour la commande en utilisant l'observer, les mesures sont pas assez précise et le choix des équations pourraient être plus judicieux.

Conclusion

La démarche a débuté par la décomposition du système en deux sous-systèmes basés sur ses deux degrés de liberté : la translation/rotation de la bille le long du rail, et la rotation de l'ensemble bille-rail autour de l'axe du rail. Cette approche a permis d'étudier séparément les dynamiques de chaque sous-système, facilitant ainsi l'analyse mécanique et la formulation des équations d'évolution.

L'étude a approfondi la compréhension de l'énergie cinétique impliquée, tant pour la translation que pour la rotation, en tenant compte des forces en présence, notamment le poids et la résistance du support. Le travail des forces et l'équilibre du système ont été analysés pour dériver des expressions mathématiques décrivant le mouvement de la bille.

Un des aspects important du projet a été la linéarisation des équations d'évolution autour de conditions opérationnelles spécifiques, permettant de les exprimer dans un formalisme d'état adapté au contrôle du système. Cette démarche a posé les bases pour l'analyse de la stabilité, de la commandabilité, et de l'observabilité du système, en utilisant des critères mathématiques rigoureux tels que le critère de Kalman pour évaluer ces propriétés essentielles à la conception de stratégies de contrôle efficaces.

Le projet a également mis en évidence les défis associés au contrôle de systèmes non linéaires, soulignant l'importance des observateurs dans la mise en œuvre de commandes basées sur des mesures limitées. Bien que certaines tentatives de contrôle aient montré des instabilités, ces expériences ont fourni des enseignements précieux pour l'amélioration des approches de contrôle.

Enfin, l'exploration de l'extension du système à une deuxième dimension a ouvert de nouvelles perspectives, illustrées par des références à des projets similaires sur GitHub, montrant la portée et l'application potentielles de ces concepts au-delà du cadre initial du projet.

Rajout d'une deuxième dimension

Pour le rajout d'une deuxième dimension, sur Github certaine personne se sont déjà amusé à faire des projets sur le sujet [1]. Voici comment il a fais : <https://github.com/giusenso/Ball-Balancing-PID-System>

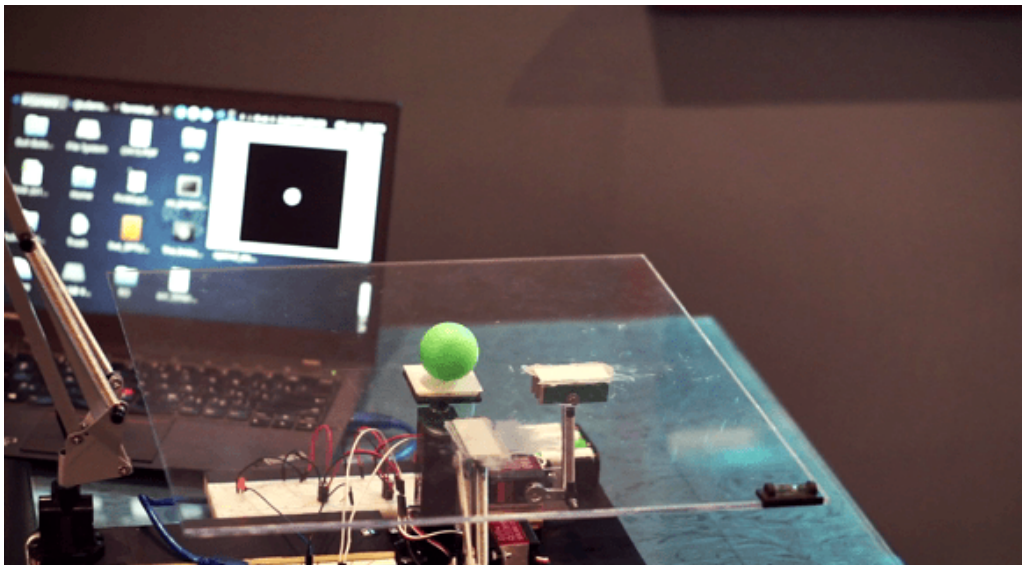


Figure 9: Projet sur GitHub

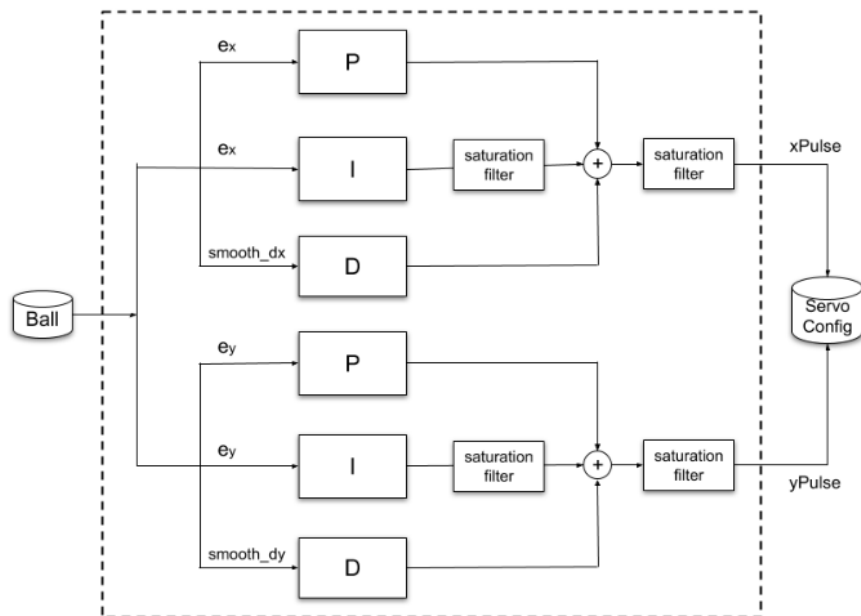


Figure 10: Schéma d'asservissement en 2D