

# TP : Inégalités de Bell

Philéas Thibault - Boris Baudel - Benjamin Oksenberg

Ecole Normale Supérieure Paris-Saclay - ArteQ

## 1. Introduction

### 1.1 Introduction à la théorie des inégalités de Bell

Bell a montré que les théories locales à variables cachées satisfont une inégalité mathématique que la mécanique quantique peut potentiellement violer. L'inégalité CHSH (Clauser-Horne-Shimony-Holt) s'écrit :

$$|S| \leq 2 \quad (\text{prédiction des variables locales}).$$

La mécanique quantique prédit quant à elle :

$$S_{\text{QM}} = 2\sqrt{2} \approx 2.828.$$

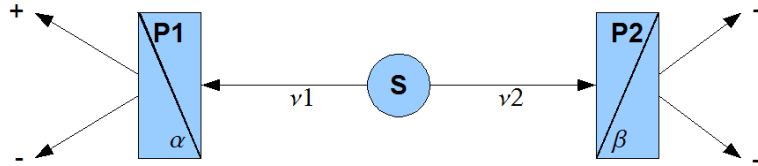


Figure 1: Expérience de pensée du paradoxe EPR

- **Source d'intrication** : Photons générés par une cascade atomique (ex. calcium excité) dans l'état :

$$|\psi\rangle = \frac{|HH\rangle + |VV\rangle}{\sqrt{2}}.$$

- **Angles de mesure** : Configurations optimales pour Alice ( $a = 0^\circ$ ,  $a' = 45^\circ$ ) et Bob ( $b = 22.5^\circ$ ,  $b' = 67.5^\circ$ ).

Pour des photons intriqués mesurés avec un angle relatif  $\theta = a - b$  :

$$E(a, b) = \cos(2\theta).$$

Exemple pour  $\theta = 22.5^\circ$  :

$$E(0^\circ, 22.5^\circ) = \cos(45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$S = E(a, b) - E(a, b') + E(a', b) + E(a', b').$$

Résultat final :

$$S = \frac{\sqrt{2}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}.$$

**Conclusion** : L'expérience de Clauser valide la non-localité de la théorie Quantique.

## 1.2 Matériel expérimental

Le matériel expérimental est composé d'une source de photons intriqués (généré par un cristal non linéaire) ainsi que de deux miroirs et deux polariseurs.

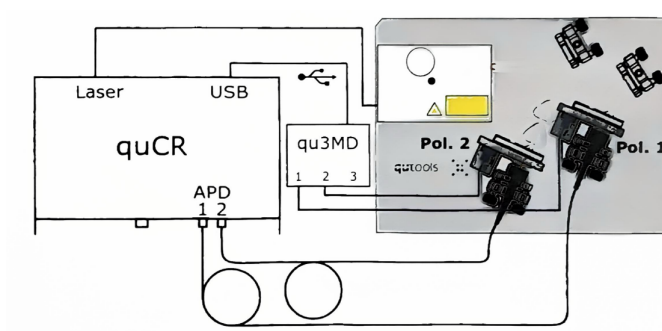


Figure 2: Schéma du montage expérimental.



Figure 3: Source de photons intriqués ainsi que les miroirs et polariseurs disposés sur le chemin de chaque photon.

### 1.2.1 Mesure des paramètres de Bell

Pour calculer  $S$ , 16 probabilités doivent être déterminées. En pratique, nous mesurons les comptages de coïncidences  $N_c$  pour différents jeux d'angle de polariseurs  $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$  sur une période d'intégration  $T$ :

$$\begin{array}{cccc} N_c(V_\alpha, V_\beta) & N_c(H_\alpha, H_\beta) & N_c(V_\alpha, H_\beta) & N_c(H_\alpha, V_\beta) \\ N_c(V_\alpha, V_{\beta'}) & N_c(H_\alpha, H_{\beta'}) & N_c(V_\alpha, H_{\beta'}) & N_c(H_\alpha, V_{\beta'}) \\ N_c(V_{\alpha'}, V_\beta) & N_c(H_{\alpha'}, H_\beta) & N_c(V_{\alpha'}, H_\beta) & N_c(H_{\alpha'}, V_\beta) \\ N_c(V_{\alpha'}, V_{\beta'}) & N_c(H_{\alpha'}, H_{\beta'}) & N_c(V_{\alpha'}, H_{\beta'}) & N_c(H_{\alpha'}, V_{\beta'}) \end{array}$$

avec  $\alpha = 0^\circ$ ,  $\beta = 22.5^\circ$ ,  $\alpha' = 45^\circ$ ,  $\beta' = 67.5^\circ$ . Puis, nous calculons le nombre total de coïncidences pour chaque configuration de polariseur afin de déterminer les probabilités de détection associées. Ces probabilités permettent d'obtenir les degrés de corrélation  $E(\alpha, \beta)$  à partir desquels s'exprime  $S$ .

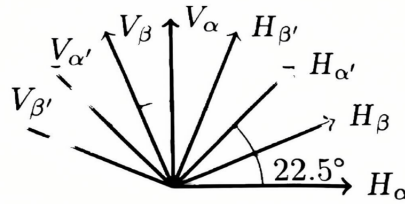


Figure 4: Disposition des polariseurs.

L'incertitude sur  $S$ ,  $\Delta S$  doit également être calculée :

$$\Delta S^2 = \sum_{\substack{\alpha=\alpha' \\ b=\beta, \beta'}} \Delta E(\alpha, b)^2 \quad (7)$$

où l'incertitude sur la corrélation  $E(\alpha, b)$  s'exprime par :

$$\Delta E(\alpha, b)^2 = \frac{4}{N_t(\alpha, b)^3} [(N_e(V_\alpha, V_b) + N_e(H_\alpha, H_b)) (N_e(V_\alpha, H_b) + N_e(H_\alpha, V_b))]$$

Enfin, on peut déterminer le nombre d'écarts type avec lequel l'inégalité de Bell est violée :

$$n_{\Delta} = \frac{2 - S}{\Delta S}$$

## 2. Violation des inégalités de Bell

### 2.1 Dark counts

Lorsque les deux voies de l'appareil sont obstruées, le nombre de détections de photons sur chaque voie est de l'ordre de 50/s. Le nombre de coïncidences est de 0. De même, lorsque les voies sont reliées au reste du dispositif expérimental et que le laser est éteint. Le faible éclairage ambiant ne perturbe donc pas nos mesures.

### 2.2 Coïncidences fortuites

Nous devons déterminer le nombre de coïncidences accidentelles qui ont lieu, c'est-à-dire le nombre de photons qui arrivent aléatoirement au même moment dans le détecteur. Pour une fenêtre temporelle de largeur  $\tau$  lorsque les détecteurs comptent un nombre de photons respectif,  $n_0, n_1$  le taux de coïncidences accidentelles est de  $n_0 n_1 \tau$ . Pour déterminer la taille de la fenêtre temporelle, nous laissons une faible lumière ambiante atteindre les APDs, il y a alors environ 240 000 détections par secondes sur chacune des voies pour environ 1700 coïncidences par secondes. Puisque la lumière ambiante ne présente à priori pas de corrélations entre les deux voies, toutes ces coïncidences sont accidentelles. Nous obtenons alors une fenêtre temporelle de 30 ns de large. Cette valeur dévie quelque peu des 40 ns annoncées par le constructeur.

### 2.3 État de la paire de photon

Pour différentes orientations  $\alpha$  on relève la probabilité de coïncidences lorsque les polariseurs sont dans une orientation parallèle :  $H_{\alpha} - H_{\alpha}$  et perpendiculaire  $H_{\alpha} - V_{\alpha}$ . Pour chaque orientation, lorsque les polariseurs sont parallèles, la probabilité de détecter une coïncidence est de l'ordre de 7%. Tandis que lorsque les polariseurs sont perpendiculaires, elle est inférieure à 0.3%, le nombre de coïncidences est alors de l'ordre de celui des coïncidences accidentelles.

Pour quatre orientations  $\alpha = 0, 45, 90, 135^{\circ}$  du polariseur sur la voie 0, on mesure le taux de coïncidences selon l'orientation  $\beta$  du polariseur sur la voie 1. On constate une variation du taux de coïncidence en  $\cos(\alpha - \beta)^2$  (Fig.5) comme attendu avec un état de Bell.

### 2.4 Changement de l'état du photon

La lame  $\lambda/2$  placée devant le laser à 405 nm est retiré de sorte que la polarisation de la lumière traversant les cristaux soit horizontale. Ainsi, le laser n'interagit plus qu'avec un seul des cristaux, le dispositif génère alors des paires de photons  $|HH\rangle$  qui n'est pas un état intriqué. Les taux de coïncidences sont à nouveau évalués pour différentes configurations  $(\alpha, \beta)$  de polariseurs. On constate alors que le taux de coïncidences est cette fois-ci proportionnel à  $\cos(\alpha)^2 \cos(\beta)^2$  (Fig.6) ce qui est cohérent avec le fait que l'état  $|HH\rangle$  est préparé.

### 2.5 Mesure du paramètre de Bell

Afin de vérifier les inégalités de Bell, on choisit la situation qui va maximiser  $S$  par rapport à l'incertitude  $\Delta S^2$  afin que la violation des inégalités de Bell soit la plus significative possible. On utilise donc les angles  $\alpha = 0^{\circ}, \beta = 22,5^{\circ}, \alpha' = 45^{\circ}$  et  $\beta' = 67,5^{\circ}$ . On a alors 16 configurations différentes pour les quatre angles de polarisation, on mesure le taux de coups corrélés pour

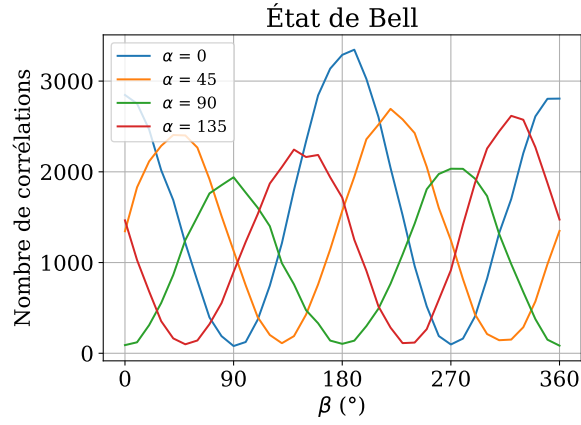


Figure 5: Relevé du nombre de corrélations comptées sur un même temps d'intégration lorsque qu'un état de photons intriqué est préparé.

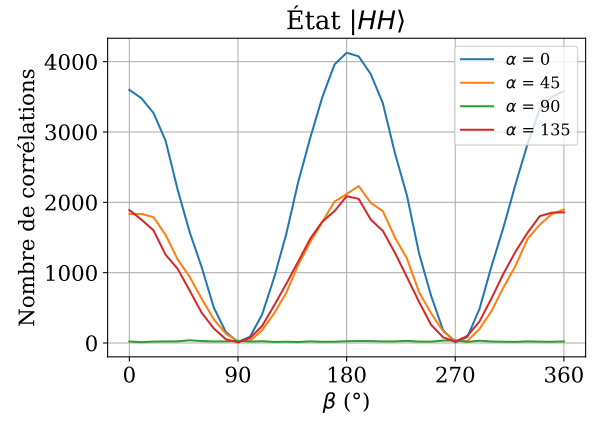


Figure 6: Relevé du nombre de corrélations comptées sur un même temps d'intégration lorsque qu'un état de photons de même polarisation est préparé.

chacune d'elle. Cela nous permet alors d'évaluer les degrés de corrélation et de déduire  $S$  ainsi que  $\Delta S$  (1.2.1).

| $E(\alpha, \beta)$ | $E(\alpha', \beta)$ | $E(\alpha, \beta')$ | $E(\alpha', \beta')$ |
|--------------------|---------------------|---------------------|----------------------|
| 0.69               | 0.66                | -0.73               | 0.67                 |

Table 1: Mesure des différents degrés de corrélation

On obtient alors  $S = 2.74$  avec un nombre d'écarts type  $n_{\Delta} = 85.7$ . On trouve bien  $S > 2$  avec une incertitude suffisamment faible, la non-localité quantique est vérifiée. C'est donc la mécanique quantique qui décrit le mieux les résultats observés par rapport à la théorie des variables cachées. En effet, la valeur de  $S$  obtenue est bien plus proche de  $2\sqrt{2} \approx 2.83$  donnée par la théorie quantique que celle de 2 prédite par la théorie des variables cachées. Cependant, il convient de déterminer la valeur de  $S$  pour des valeurs de l'angle variant de 0 à  $2\pi$  pour pouvoir invalider toute modélisation probabiliste du système.

### 3. Caractérisation de la source de photon

La fibre transportant l'un des photons est connectée à l'entrée d'un interféromètre de Michelson. Dans cette configuration expérimentale, la différence de chemin optique entre les bras de l'interféromètre est contrôlée à l'aide d'un coin de verre (BK7) placé sur l'un des bras. Le déplacement de la lame de BK7 d'indice optique  $n = 1.511$  perpendiculairement au trajet du faisceau modifie la quantité de verre traversée par le faisceau, et donc le chemin optique.

La différence de marche entre les bras est donc proportionnelle à la position de la lame de BK7 d'un facteur  $2 \tan(1^\circ) \times 0.511$ .

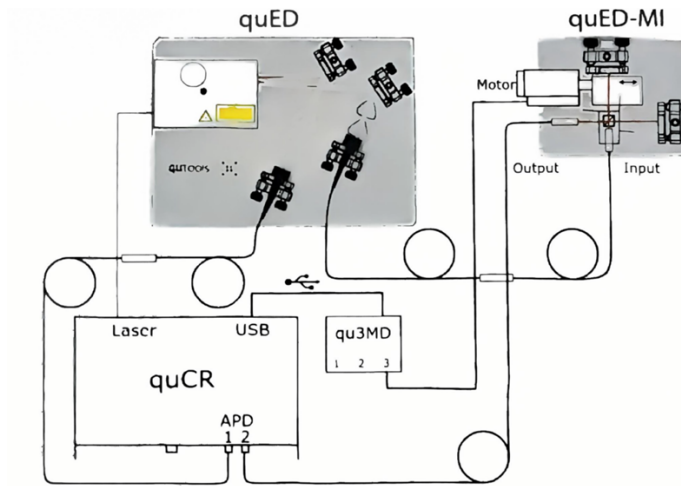


Figure 7: Montage expérimental de l'interféromètre de Michelson connecté au premier montage

En faisant balayer par la lame une plage de positions autour du contact optique tout en mesurant l'intensité en sortie, on trace une figure d'interférence. On observe des interférences sur une plage d'environ  $12 \mu\text{m}$  (Fig.8), ce qui correspond à un temps de cohérence de l'ordre de 40 fs.

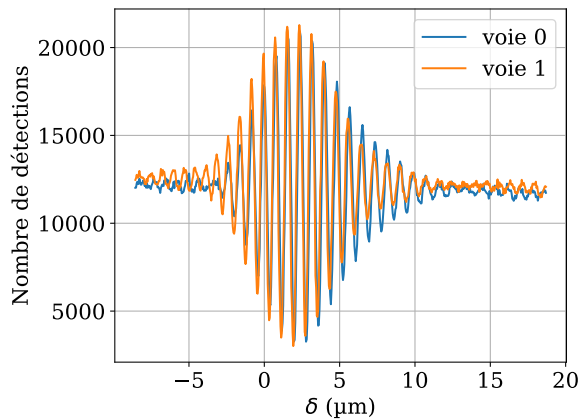


Figure 8: Figure d'interférences des photons traversant le Michelson, en fonction de la différence de marche  $\delta$ .

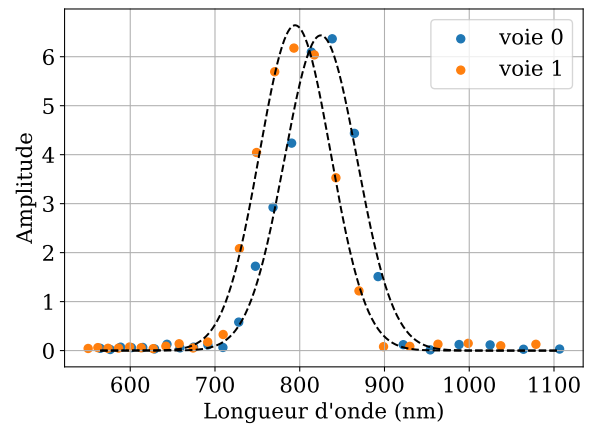


Figure 9: Spectre des figures d'interférence pour chacune des voies en sortie du cristal non linéaire.

La transformée de Fourier des interf  rographes obtenus nous donne alors le spectre de la source (Fig.9). Puisque les photons sont filtrés par un polariseur vertical ou horizontal, on a plus précisément le spectre d'un des deux cristaux non-linéaires utilisé. Un ajustement avec une fonction gaussienne nous donne alors la fréquence centrale ainsi que la largeur des paquets d'onde émis par les cristaux. Un des cristaux émet sur la voie de droite un paquet d'onde centré à 825 nm et un paquet d'onde centré à 795 nm sur la voie de gauche. On a bien une moyenne de 810 nm qui correspond au double de 405 nm qui est la longueur d'onde du laser de pompe. La largeur spectrale des paquets d'onde est elle de 43 nm environ. Des résultats similaires sont obtenus en tournant les polariseurs    90 degrés, donc en récoltant les photons provenant de l'autre cristal. Dans les deux cas, les photons de plus haute fréquence sont émis sur la voie de gauche et de plus basse fréquence sur celle de droite.

## 4. Expérience de la gomme Quantique

La source est paramétrée pour envoyer dans le Michelson des photons polarisé à  $45^\circ$ , un polariseur est ajouté dans chaque bras respectivement en polarisation H et V. Les polariseurs obligent les photons à passer dans un seul des bras à la fois, on ne constate donc aucune figure d'interférence (Fig.10).

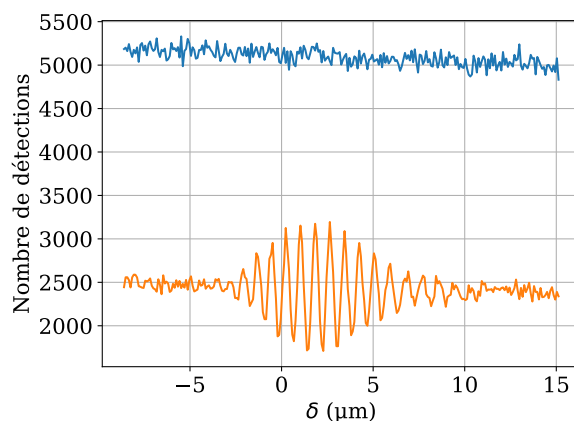


Figure 10: En bleu : interférogramme des photons lorsque l'on ajoute des polariseurs croisés H et V respectivement sur chacun des bras du Michelson. On ne constate aucune interférence. En orange : interférogramme des photons lorsqu'un polariseur à  $45^\circ$  est ajouté en sortie du Michelson. Les interférences sont à nouveau visibles.

Un filtre à  $45^\circ$  est alors ajouté à la sortie de l'interféromètre. Les états des photons polarisés sur H et V sont projetés selon la même direction, ils peuvent donc à nouveau interférer. La figure d'interférence est conséquemment à nouveau visible (Fig.10).

## 5. Conclusion

Ce TP a permis de mettre en évidence l'invalidité de l'inégalité CHSH et d'écarter la plausibilité de la théorie des variables cachées. Nous avons mesuré un paramètre  $S = 2.74$  différent de 2 avec un nombre d'écarts type  $n_\delta = 85.7$ . Par la suite, par un procédé d'interférométrie, nous avons pu caractériser la source de photons intriqués à notre disposition. Nous avons ainsi obtenu le spectre en longueur d'onde des paquets d'onde qu'elle émet sur chacune des voies.