Справочник по математике

Борис Кожуховский

2017

Оглавление

Введение

Цели этого справочника:

- Систематизация и сохранение математических знаний, полученных мной за годы учёбы
- Сбор информации, которую трудно найти в понятном мне виде
- Конспектирование лекций в красивом виде
- Изучение LaTeX

Благодарность

Автор это справочника благодарит Максима Гунбина за предоставление некоторых материалов в уже написанном в TeX виде.

Часть I

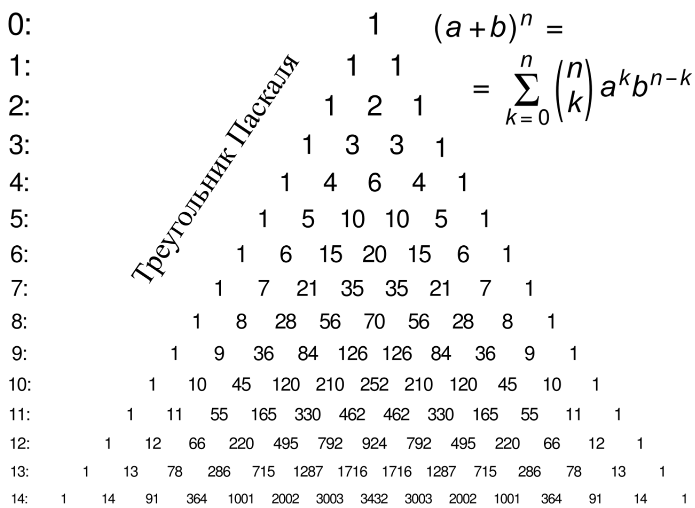
Алгебра

Глава 1

Рациональные выражения

1.1 Формулы сокращённого умножения

- $(a \pm b)^n$ вычисляется через треугольник паскаля



Например:

–

Часть II

Математический анализ

Глава 2

Функции и их свойства.

2.1 График функции

Преобразование графиков ф-ий:

1. **Симметрия относительно осей координат**
   - Функции $y = f(x)$ и $y = -f(x)$ имеют одну и ту же область определения, их графики симметричны относительно оси Ox.
   - Функции $y = f(x)$ и $y = f(-x)$ имеют области определения, симметричные относительно точки O. Их графики симметричны относительно оси Oy.
2. **Сдвиг вдоль осей координат (параллельный перенос)**
   - Функция $y = f(x - a)$, где $a \neq 0$, определена для всех x, таких, что $(x - a) \in D(f(x))$. График ф-ии $y = f(x - a)$ получается сдвигом вдоль оси Ox на величину $|a|$ графика функции $y = f(x)$ вправо, если $a > 0$, и влево, если $a < 0$.
   - Функция $y = f(x) + B$, где $B \neq 0$, имеет ту же область определения, что и ф-ия $y = f(x)$. График ф-ии $y = f(x) + B$ получается сдвигом вдоль оси Oy на величину $|B|$ графика функции $y = f(x)$ вверх, если $B > 0$, и вниз, если $B < 0$.
3. **Растяжение с сжатие графика вдоль всей оси координат**
4. **Построение графика функции $y = Af(k(x - a)) + B)$ по графику функции** $y = f(x)$
5. **Симметрия относительно прямой $y = x$**

2.2 Периодичность ф-ий

Определение:

Функцию $y = f(x)$ с областью определения X называют периодической, если $\exists T \neq 0 \quad \forall x \in X$ такой, что $(x + T) \in X$, и $(x - t) \in X$, и $f(x + T) = f(x)$

Пример ур-ия, где используется периодичность ф-ий:

Пусть $f(x)$ - периодическая функция с периодом 8, такая, что $f(x) = 8x - x^2$ при $x \in [0; 8)$.

Решите уравнение $f(2x+16)+23=5f(x)$.
Решение:

1. $$\begin{cases} f(x)=f(x+T)=f(x-T) \\ T=8 \end{cases} \implies f(2x+16)=f(2x)$$

2. $x \in [0;4) \implies 2x \in [0;8)$
   Решаем уравнение для этого случая:
   $f(2x)+23=5f(x)$
   $16x-4x^2+23=40x-5x^2$
   $x^2-24x+23=0$
   $x1=1$
   $x2=23$ побочный корень для $x \in [0;4)$

3. $x \in [4;8) \implies (2x-8) \in [0;8)$
   Решаем уравнение для этого случая:
   $f(2x-8)+23=5f(x)$
   $16x-64-4x^2+16x-64+23=40x-5x^2$
   $x^2-8x-105=0$
   $x1=7$
   $x2=-15$ побочный корень для $x \in [4;8)$

4. Так как наша функция имеет период 8, то и корни будут повторятся с такой же периодичностью, так как $f(x)=f(x+T)=f(x-T)$. То есть получаем корни $x=1+8n$ и $x=7+8n$.

Ответ: $x=1+8n$ и $x=7+8n$.

Глава 3

Пределы

3.1 Предел на бесконечности

Глава 4

Производная

Определение:
Производной функции в точке называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к 0.

$$\boxed{\mathbf{f'(x_0) = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle f}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(x_0 + \triangle x) - f(x_0)}{\triangle x}}}$$

$\triangle x$ - приращение аргумента, то есть изменение аргумента от x до x_0 (дельта x).
$\triangle f = f(x + \triangle x) - f(x)$ - приращение функции (дельта f).

4.1 Свойства производных

1. $\mathbf{(C * x)' = C * (x)' \qquad C = const}$
2. $\mathbf{(f + g)' = f' + g'}$
3. $\mathbf{(f * g)' = f' * g + g' * f}$
4. $\mathbf{\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' * g - g' * f}{g^2}}$
5. $\mathbf{(f(g))' = f'(g) * g'(f)}$
6. $\mathbf{(f^g) = f^g * \ln f * g' + g * f^(g - 1) * f'}$
7. $\mathbf{f'(y) = \frac{1}{g(x)}}$ **$\mathbf{f(y)}$ и $\mathbf{g(x)}$ - взаимообратные функции ($\mathbf{D(f(y)) = E(g(x))}$ и $\mathbf{D(g(x)) = E(f(y))}$).**

4.1.1 Экстремумы функции двух переменных

Для того, чтобы найти экстремум функции $z(x, y)$ двух переменных, нужно найти точки, в которых частные производные 1-ого порядка равны 0. Пусть мы нашли такую точку $M_0(x_0, y_0)$. Тогда найдём производные второго порядка в этой точке $A = z''_{xx}(x_0, y_0)$, $B = z''_{xy}(x_0, y_0)$ и $C = z''_{yy}(x_0, y_0)$. Если $AC - B^2 > 0$, то $z(x, y)$ имеет экстремум в точке M_0 (если $A > 0$, то минимум, если $A < 0$, то максимум).

4.1.2 Экстремумы функции трёх переменных

Для того, чтобы найти экстремум функции $f(x, y, z)$ двух переменных, нужно найти точки, в которых частные производные 1-ого порядка равны 0. Пусть мы нашли такую точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Тогда найдём производные второго порядка в этой точке, вычислим их и составим **матрицу Гессе**:

$$\begin{pmatrix} f''_{xx}(M_0) & f''_{xy}(M_0) & f''_{xz}(M_0) \\ f''_{yx}(M_0) & f''_{yy}(M_0) & f''_{yz}(M_0) \\ f''_{zx}(M_0) & f''_{zy}(M_0) & f''_{zz}(M_0) \end{pmatrix}$$

Найдём **угловые миноры**: $\sigma_1 = f''_{xx}(M_0)$,

$\sigma_2 = \begin{bmatrix} f''_{xx}(M_0) & f''_{xy}(M_0) \\ f''_{yx}(M_0) & f''_{yy}(M_0) \end{bmatrix}$,

$\sigma_3 = \begin{bmatrix} f''_{xx}(M_0) & f''_{xy}(M_0) & f''_{xz}(M_0) \\ f''_{yx}(M_0) & f''_{yy}(M_0) & f''_{yz}(M_0) \\ f''_{zx}(M_0) & f''_{zy}(M_0) & f''_{zz}(M_0) \end{bmatrix}$

Теперь возможны 4 случая:

1. Если $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 > 0$ и $\sigma_3 > 0$, то $M_0(x_0, y_0, z_0)$ - точка минимума.
2. Если $\sigma_1 < 0$, $\sigma_2 > 0$ и $\sigma_3 < 0$, то $M_0(x_0, y_0, z_0)$ - точка максимума.
3. Иначе если $\sigma_3 \neq 0$, то $M_0(x_0, y_0, z_0)$ - седловая точка.
4. При $\sigma_3 = 0$, то нужно дополнительное исследование.

4.1.3 Экстремум с условием. Метод множителей Лагранжа

Пусть дана функция $f(x_1 \dots x_n)$ и несколько условий $u_1(x_1 \dots x_n) = 0 \dots u_k(x_1 \dots x_n) = 0$. Нужно найти экстремум функции при этих условиях. Метод множителей Лагранжа:

1. Составим **функцию Лагранжа** от $n+k$ переменных $L(x_1 \dots x_n, \lambda_1 \dots \lambda_k) = f(x_1 \dots x_n) + \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i u_i(x_1 \dots x_n)$.
2. Составим систему уравнений, приравняв частные производные L к 0.
3. Если полученная система имеет решение относительно параметров x'_j и λ'_i, тогда точка x' может быть условным экстремумом, то есть решением исходной задачи. Заметим, что это условие носит необходимый, но не достаточный характер.
   Проверка точки для функции двух переменных: найдём дифференциал второго порядка $d^2L = L''_{xx}(dx)^2 + 2L''_{xy}dxdy + L''_{yy}$. Если $d^2L > 0 \quad \forall x, y$ то функция достигает минимума в точке x', если $d^2L < 0 \quad \forall x, y$, то функция достигает максимума в точке x'.

4.2 Геометрическая интерпретация производной

4.2.1 Касательная

В трёхмерном пространстве

Пусть дана функция, задающая поверхность $F(x, y, z) = 0$.
Касательная плоскость к поверхности в точке M_0 – это плоскость, содержащая касательные ко всем кривым, которые принадлежат данной поверхности и проходят через точку M_0. Её уравнение имеет вид $F'_x(M_0)(x - x_0) + F'_y(M_0)(y - y_0) + F'_z(M_0)(z - z_0) = 0$.

4.2.2 Нормаль

В трёхмерном пространстве

Пусть дана функция, задающая поверхность $F(x, y, z) = 0$.
Нормаль к поверхности в точке M_0 – это прямая, проходящая через данную точку перпендикулярно касательной плоскости. Её каноническое уравнение имеет вид $\frac{x-x_0}{F'_x(M_0)} = \frac{y-y_0}{F'_y(M_0)} = \frac{z-z_0}{F'_z(M_0)}$.

Часть III

Геометрия

Часть IV

Дискретная математика

Глава 5

Булевы функции

5.1 Методы минимализации

5.1.1 Импликанты

Литерал - это переменная или её отрицание. Н-р: $x_1, \overline{x_1}x_2$
Импликант K - это такая коньюкция литералов функции F, что $K_i \to F_i$
Простой ипликант - это такой импликант, что вычеркиванием из него литералов нельзя получить новый импликант.
Н-р:

x_1	x_2	x_3	$K_1 = x_1$	$K_2 = \overline{x_3}$	x_1x_2	F
0	0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	1	0	1
0	1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	1	0	1
1	0	1	1	0	0	1
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	0	1	1

K_1 - простой импликант
K_2 - не импликант
K_3 - импликант

5.1.2 Сокращенные ДНФ

5.1.3 Тупиковые ДНФ

5.1.4 Кратчайшие и минимальные ДНФ

5.2 Классы булевых функций и полнота

5.2.1 Классы БФ

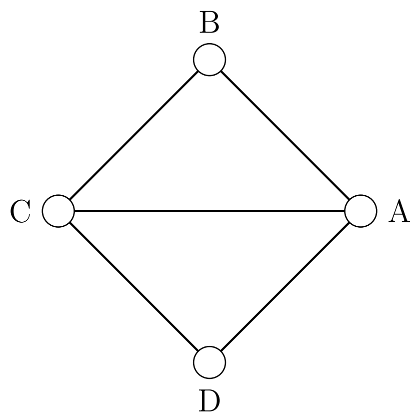
5.2.2 Теорема о функциональной полноте

Глава 6

Теория графов

6.1 Основные понятия

Граф — абстрактный математический объект, представляющий собой множество вершин графа и набор рёбер, то есть соединений между парами вершин. Например, за множество вершин можно взять множество аэропортов, обслуживаемых некоторой авиакомпанией, а за множество рёбер взять регулярные рейсы этой авиакомпании между городами. Пример графа:



Формальное определение:

Графом называется пара множеств $G = (V, E)$, где V — множество вершин графа, $E \subseteq V^2$ — множество рёбер графа.

Если $e = \{u, v\}$, $e \in E$, то говорят, что:

- ребро e соединяет вершины u и v;
- u и v — концы ребра e;
- ребро e инцидентно вершинам u и v;
- вершины u и v **инцидентны** ребру e.

На рисунках вершины графа изображают точками, а рёбра $e = \{u, v\}$ — кривыми, соединяющими точки, которые изображают вершины u и v.

Вершины называются **соседними**, если их соединяет ребро, иначе — **несоседними**.

Ребро вида $e = \{u, u\}$ называется **петлёй**.

Граф, в котором любые две вершины соединены ребром, называется **полным** и обозначается K_n, где n — число вершин в нём.

Графы $G_1 = (V_1, E_1)$ и $G_2 = (V_2, E_2)$ называются **изоморфными**, если существует биекция $\varphi\colon V_1 \to V_2$ такая, что $\forall u, v \in V_1$ $((u, v) \in E_1 \Leftrightarrow (\varphi(u), \varphi(v)) \in E_2)$, иначе —

неизоморфными. Иными словами два графа называются **изоморфными**, если они одинаковые с точностью до переименования вершин.

φ называется **изоморфизмом**.

Число рёбер в графе G, инцидентных вершине u, называется **степенью** вершины и обозначается $\deg_G u$.

Лемма 6.1.1 (о рукопожатиях).

$$\sum_{u \in V} \deg_G u = 2|E|$$

где $G = (V, E)$ *— граф.*

Доказательство (методом математической индукции).

- *База индукции.* $|E| = 0$: в таком графе $\sum\limits_{u \in V} \deg u = 0$.
- *Шаг индукции.* Пусть лемма верна для $|E| = n$. Докажем её для $|E| = n+1$. Для этого достаточно заметить, что каждое новое ребро увеличивает степени двух вершин на 1.

■

Маршрутом в графе $G = (V, E)$ называется последовательность вершин и рёбер вида $v_1 e_1 v_2 \dots e_k v_{k+1}$, где $e_i = \{v_i, v_{i+1}\}$.

Маршрут, в котором все рёбра различны, называется **цепью**.

Цепь, в которой все вершины, за исключением, может быть, первой и последней, различны, называется **простой**.

Маршрут, в котором первая и последняя вершины совпадают, называется **замкнутым**.

Замкнутая цепь называется **циклом**.

Маршрут, соединяющий вершины u и v, называется (u, v)**-маршрутом**.

Лемма 6.1.2. (u, v)*-маршрут содержит* (u, v)*-простую цепь.*

Доказательство. Пусть $u = v_1 e_1 v_2 \dots e_k v_{k+1} = v$ — не простая цепь, тогда $\exists i < j \colon v_i = v_j$. Уберём из маршрута подпоследовательность $e_i v_{i+1} \dots e_{j-1} v_j$, получим маршрут, в котором совпадающих вершин на одну меньше. Повторяя, получим простую цепь, являющуюся частью данного маршрута. ■

Лемма 6.1.3. *Любой цикл содержит простой цикл.* Доказательство аналогично предыдущему.

Лемма 6.1.4. *Если в графе есть две различные простые цепи, соединяющие одни и те же вершины, то в этом графе есть простой цикл.*

Доказательство. Пусть $u = v_1 e_1 v_2 \dots e_n v_{n+1} = v$, $u = v'_1 e'_1 v'_2 \dots e'_m v'_{m+1} = v$ — простые цепи. Найдём наименьшее $i \colon e_i \neq e'_i$, тогда $v_i e_i v_{i+1} \dots e_n v_{n+1} = v'_{m+1} e'_m \dots e'_i v'_i = v_i$ — цикл, значит, можно получить простой цикл. ■

6.2 Связность графов

Вершины u и v называются **связанными**, если существует (u, v)-маршрут, иначе — **несвязанными**.

Граф называется **связным**, если в нём любые две вершины связаны, иначе — **несвязным**.

Граф $G' = (V', E')$ называется **подграфом** графа $G = (V, E)$, если $V' \subseteq V$ и $E' \subseteq E$.

Компонентой связности графа называется его максимальный (относительно включения) связный подграф.

6.2.1 Эйлеровы графы

Цикл, содержащий все рёбра графа, называется **эйлеровым**.
Граф, содержащий эйлеров цикл, называется **эйлеровым**.
Теорема 6.2.1. *Связный граф эйлеров $\Leftrightarrow$ степени всех вершин чётны.*
Доказательство.

1. $\Rightarrow$. Пусть в графе есть эйлеров цикл. Выберем вершину v_0 в этом цикле и начнём обходить его. При каждом посещении вершины $v \neq v_0$ её степень увеличивается на 2. То есть, если посетить её k раз, то $\deg v = 2k \div 2$.

   Для v_0 степень увеличивается на 1 в начале обхода, на 1 в конце обхода и на 2 при промежуточных посещениях. Т. о., её степень чётна.

2. $\Leftarrow$. Пусть степени всех вершин чётны. Выберём цепь $C = (v_0; e_0; v_1; e_1; \ldots; e_{k-1}; v_k)$ наибольшей длины. Все рёбра, инцидентные v_k, присутствуют в этой цепи, иначе её можно было бы удлинить.

   Докажем методом от противного, что $v_0 = v_k$. Пусть $v_0 \neq v_k$. При прохождении вершины $v_i = v_k$, где $0 < i < k$, степень v_k увеличивается на 2. Также проходим по ребру e_{k-1}, тогда степень v_k нечётна. Противоречие.

   Докажем методом от противного, что C содержит все рёбра. Пусть найдётся ребро $e = \{u, v\}$, не входящее в C. Возьмём первое ребро $e' = \{v_i, v'\}$ из (v_0, u)-маршрута, не входящее в C. Тогда цепь $(v'; e'; v_i; e_i; \ldots; e_{k-1}; v_k = v_0; e_0; v_1; e_1; \ldots; v_{i-1})$ длиннее, чем C. Противоречие.

■

Алгоритмы нахождения эйлерова цикла

1. **Алгоритм Флёри (очень медленный)**.
   (a) Выберем произвольную вершину.
   (b) Пусть находимся в вершине v. Выберем ребро, инцидентное ей, которое должно быть мостом, только если не осталось других рёбер.
   (c) Проходим по выбранному ребру и вычёркиваем его.
   (d) Повторяем, пока есть рёбра.

2. **Алгоритм объединения циклов**.
   (a) Выберем произвольную вершину.
   (b) Выбираем любое непосещённое ребро и идём по нему.
   (c) Повторяем, пока не вернёмся в начальную вершину.
   (d) Получим цикл C. Если он не эйлеров, то $\exists u \in C,\ e = \{u, u'\} \colon u' \notin C$. Повторяем шаги 2a–2c для начальной вершины u. Получим цикл C', рёбра которого не совпадают с рёбрами C. Объединим эти циклы и получим новый. Повторяем шаг 2d.

Цепь называется **эйлеровым путём**, если она не является циклом и содержит все рёбра.

Граф называется **полуэйлеровым**, если в нём есть эйлеров путь.

Теорема 6.2.2. *Связный граф полуэйлеров $\Leftrightarrow$ степени двух вершин нечётны, а остальных — чётны.*

Доказательство.

1. $\Rightarrow$. Пусть в графе есть эйлеров путь. Соединив его концы ребром, получим эйлеров цикл. Степени соединённых вершин увеличились каждая на 1, значит, они были нечётными, а степени остальных вершин — чётными.

2. $\Leftarrow$. Пусть степени двух вершин нечётны, а остальных — чётны. Соединим нечётные вершины ребром, тогда можно получить эйлеров цикл. Убрав из него добавленное ребро, получим эйлеров путь.

■

6.2.2 Гамильтоновы графы

Простой цикл, содержащий все вершины графа, называется **гамильтоновым**.

Граф называется **гамильтоновым**, если в нём есть гамильтонов цикл.

Теорема 6.2.3 (Дирака). *Если в графе $G = (V, E)$ с $n \geqslant 3$ вершинами $\forall u \in V \ \deg u \geqslant \frac{n}{2}$, то граф гамильтонов.*

Доказательство.

1. Докажем методом от противного, что граф связный. Пусть он несвязный. Выберем компоненту связности $G' = (V', E')$ с наименьшим числом вершин, тогда $|V'| \leqslant \frac{n}{2}$. Возьмём $v \in V'$, тогда $\deg v \leqslant |V'| - 1 < \frac{n}{2}$. Противоречие с условием.

2. Выберем цепь $C = (v_0; e_0; v_1; \ldots; e_{k-1}; v_k)$ максимальной длины. Тогда все вершины, соседние с v_0, лежат в этой цепи, иначе можно увеличить длину цепи. Среди $v_1, v_2, \ldots, v_k$ не менее $\frac{n}{2}$ вершин, соседних с v_0, т. к. $\deg v_0 \geqslant \frac{n}{2}$. Аналогично для v_k.

   Найдутся v_{i-1} и v_i такие, что v_{i-1} соседняя с v_k, а v_i — с v_0.

   Докажем, что $(v_i; e_{i+1}; \ldots; v_k; e; v_{i-1}; e_{i-1}; \ldots; v_0; e'; v_i)$ — гамильтонов цикл, методом от противного. Предположим обратное, тогда есть вершина u, не входящая в цикл, и существует (v_0, u)-маршрут. Значит, существует ребро, инцидентное одной из вершин цикла, но не входящее в него, и можно получить более длинную цепь. Противоречие.

■

Теорема 6.2.4 (Оре). *Если в графе с $n \geqslant 3$ вершинами для любых двух несмежных вершин u и v $degu + degv \geqslant n$, то граф гамильтонов.*

Доказательство.

1. Докажем методом от противного, что граф связный. Пусть он несвязный, тогда в нём найдутся хотя бы две компоненты связности $G_1(V_1, E_1)$ и $G_2(V_2, E_2)$. Пусть $u \in V_1$, $v \in V_2$. u и v несмежные, тогда

   $$\deg u \leqslant |V_1| - 1, \ \deg v \leqslant |V_2| - 1 \Rightarrow \deg u + \deg vopbr \leqslant |V_1| + |V_2| - 2 \leqslant n - 2$$

   Противоречие с условием.

2. Докажем, что граф гамильтонов. Выберем цепь $W = (v_0; e_0; v_1; \ldots; e_{k-1}; v_k)$ наибольшей длины. В ней содержатся все вершины, соседние с v_0 или с v_k. Т. о., среди вершин $v_1, \ldots, v_k$ $degv_0$ соседних с v_0. Аналогично для v_k.

   $\deg v_0 + \deg v_k \geqslant n$, тогда найдутся v_i и v_{i+1} такие, что v_i соседняя с v_k, а v_{i+1} — с v_0. $(v_{i+1}; e_{i+1}; \ldots; v_k; e; v_i; e_{i-1}; v_{i-1}; \ldots; e_0; v_0; e'; v_{i+1})$ — гамильтонов цикл (доказательство аналогично доказательству в теореме 6.2.3 (Дирака)).

■

6.3 Деревья

Граф без циклов называется **лесом**.

Связный лес называется **деревом**.

Ребро называется **мостом**, если при его удалении увеличивается число компонент связности.

Дерево с n вершинами, которым сопоставлены числа $1, \ldots, n$, называется **помеченным**.

Утверждение 6.3.1. *Ребро — мост ровно тогда, когда оно не содержится в цикле.A*

Доказательство.

1. Докажем методом от противного, что если ребро содержится в цикле, то оно не является мостом. Пусть ребро e содержится в цикле $W = v_0 e_0 \ldots uev \ldots v_k$, u' и v' — смежные вершины.

   (a) Если в этом маршруте нет ребра e, то при его удалении из графа u' и v' останутся смежными.

   (b) Если $u' = v_0' e_0' \ldots uev \ldots e_m v_m' = v'$ — маршрут, соединяющий u' и v', тогда при удалении e из графа u' и v' соединяет маршрут $u' = v_0' e_0' \ldots u \ldots e_0 v_0 = v_k e_{k-1} \ldots v \ldots e_m v_m' = v'$.

2. Пусть $e = (u, v)$ не является мостом, тогда u, v лежат в одной компоненте связности. Удалим e из графа, тогда число компонент связности не изменилось, значит, u и v также лежат в одной компоненте связности, т./,е. существует цепь, соединяющая u и v: $u = v_0 e_0 \ldots e_{k-1} v_k = v$. Тогда в исходном графе существует цикл $u = v_0 e_0 \ldots e_{k-1} v_k = veu$.

■

Теорема 6.3.1. *Следующие утверждения о графе G с n вершинами эквивалентны:*

1. *G — дерево.*

2. *G связный и имеет $n-1$ ребро.*

3. *G связный и каждое его ребро — мост.*

4. *G не содержит циклов и имеет $n-1$ ребро.*

5. *Любые две вершины графа G соединены ровно одной простой цепью.*

6. *G не содержит циклов и добавление ребра приводит к появлению цикла.*

Доказательство.

- *Докажем 1) $\Rightarrow$ 3). Связность следует из определения дерева. В силу пред. утв. каждое ребро — мост.*

- *Докажем 3) $\Rightarrow$ 2). Связность по предположению. Докажем методом математической индукции, что в графе $n-1$ ребро.*

  - *База индукции. Для $n = 1, 2$ очевидно.*
  - *Шаг индукции. Пусть для графов с числом вершин, меньшим n, Возьмём мост e и удалим его. Получим две компоненты связности $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$. По предположению индукции $|E_1| = |V_1| - 1$, $|E_2| = |V_2| - 1$. В исходном графе рёбер $|E_1| + |E_2| + 1 = |V_1| + |V_2| - 1 = n - 1$.*

- *Докажем 2) $\Rightarrow$ 4). В G $n-1$ ребро по предположению. Докажем методом математической индукции, что G не содержит циклов.*

  - *База индукции. Для $n = 1, 2$ очевидно.*
  - *Шаг индукции. Докажем, что в графе есть вершина степени 1. $\forall u\ deg u \geqslant 1$. $\forall u\ deg u \geqslant 2 \Rightarrow 2|E| = \sum_{u \in V} deg u \geqslant 2n \Rightarrow n - 1 = |E| \geqslant n$. Значит, в графе найдётся вершина степени 1. Удалим её и инцидентное ей ребро. Полученный граф содержит $n-1$ вершину и удовлетворяет утверждению 2). По предположению индукции он не содержит циклов, тогда и исходный граф не содержит циклов.*

- *Докажем 4) $\Rightarrow$ 5). Докажем связность методом математической индукции.*

  - *База индукции. Для $n = 1, 2$ очевидно.*
  - *Шаг индукции. Пусть в графе k компонент связности: $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$, ..., $G_k = (V_k, E_k)$. Они являются деревьями.*

  $|E_1| = |V_1| - 1$, $|E_2| = |V_2| - 1$, ..., $|E_k| = |V_k| - 1$. $n - 1 = |E_1| + \ldots + |E_k| = n - k \Rightarrow k = 1$, значит, граф связный.

  Пусть существуют вершины u, v такие, что их соединяют две простые цепи, тогда в графе есть цикл, что противоречит предположению. Тогда эти вершины соединены ровно одной простой цепью.

- *Докажем 5) $\Rightarrow$ 6). Предположим, что в графе есть цикл $v_0 e_0 v_1 e_1 \ldots v_k = v_0$, тогда есть две простые цепи $v_0 e_0 \ldots v_{k-1}$ и $v_{k-1} e_k v_k = v_0$, соединяющие v_0 и v_{k-1}, что противоречит предположению.*

Докажем, что добавление ребра приводит к появлению ровно одного цикла. Рассмотрим несоседних вершины u и v. По предположению есть цепь $u = v_0 e_0 \dots v_k = v$, соединяющая их. Тогда $u = v_0 e_0 \dots v_k = veu$ — цикл, где e — (u, v)-маршрут. Пусть есть 2 цикла, соединяющих u и v. Удалим e, цикл останется. Получили исходный граф, в котором нет циклов. Противоречие.

- *6) $\Rightarrow$ 1). Докажем связность. Рассмотрим вершины u и v. Если они не соединены ребром, то соединим и по предположению получим цикл $v_0 e_0 \dots uev \dots e_{k-1} v_k = v_0$. Тогда $u \dots e_0 v_0 = v_k e_{k-1} \dots v$ — (u, v)-маршрут. Противоречие.*

■

6.3.1 Остовные деревья и методы нахождения минимальных остовных деревьев

Остовом графа $G = (V, E)$ называется его подграф $G' = (V', E')$ такой, что $V = V'$ и G' — дерево.

Утверждение 6.3.2. *Любой связный граф содержит остов.*

Утверждение 6.3.3. *Если граф не является деревом, то в нём несколько остовов.*

Пусть $G = (V, E)$ — граф. Весом называется функция $\alpha \colon E \to \mathbb{R}^+$. Весом графа называется $\sum_{e \in E} \alpha(e)$.

Остовное дерево графа состоит из минимального подмножества рёбер графа, таких, что из любой вершины графа можно попасть в любую другую вершину, двигаясь по этим рёбрам.

Минимальное остовное дерево (или минимальное покрывающее дерево) в связанном взвешенном неориентированном графе — это остовное дерево этого графа, имеющее минимальный возможный вес, где под весом дерева понимается сумма весов входящих в него рёбер.

Алгоритмы поиска минимального остовного дерева

- **Алгоритм Крускала**
  Алгоритм Крускала изначально помещает каждую вершину в своё дерево, а затем постепенно объединяет эти деревья, объединяя на каждой итерации два некоторых дерева некоторым ребром. Перед началом выполнения алгоритма, все рёбра сортируются по весу (в порядке неубывания). Затем начинается процесс объединения: перебираются все рёбра от первого до последнего (в порядке сортировки), и если у текущего ребра его концы принадлежат разным поддеревьям, то эти поддеревья объединяются, а ребро добавляется к ответу. По окончании перебора всех рёбер все вершины окажутся принадлежащими одному поддереву, и ответ найден.

- **Алгоритм Прима**
  Искомый минимальный остов строится постепенно, добавлением в него рёбер по одному. Изначально остов полагается состоящим из единственной вершины (её можно выбрать произвольно). Затем выбирается ребро минимального веса, исходящее из этой вершины, и добавляется в минимальный остов. После этого остов содержит уже две вершины, и теперь ищется и добавляется ребро минимального веса, имеющее один конец в одной из двух выбранных вершин, а другой — наоборот, во всех остальных, кроме этих двух. И так далее, т.е. всякий раз ищется минимальное по весу ребро, один конец которого — уже взятая в остов вершина, а другой конец —

ещё не взятая, и это ребро добавляется в остов (если таких рёбер несколько, можно взять любое). Этот процесс повторяется до тех пор, пока остов не станет содержать все вершины (или, что то же самое, n-1 ребро).

В итоге будет построен остов, являющийся минимальным. Если граф был изначально не связен, то остов найден не будет (количество выбранных рёбер останется меньше n-1).

6.3.2 Код Прюфера

Каждому помеченному дереву можно взаимнооднозначно сопоставить последовательность из $(n-2)$ чисел от 1 до n, называемая **кодом Прюфера**. Алгоритм построения кода Прюфера для помеченного дерева $G = (V, E)$:

1. Выбираем висячую вершину v с наименьшим номером.
2. Добавляем номер вершины, смежной с v, в код.
3. Удаляем v и ребро, инцидентное v, из дерева.
4. Повторить, начиная с шага 1, $(n-2)$ раза.

Утверждение 6.3.4. *Различным помеченным деревьям соответствуют различные коды Прюфера.*

Доказательство (методом математической индукции).

- *База индукции.* При $n = 3$ легко проверить.
- *Шаг индукции.* Пусть утверждение верно при $n \geqslant 3$, $G = (V, E)$ и $G' = (V', E')$ — различные помеченные деревья с $(n+1)$ вершинами в каждом.
    1. Пусть в G и G' вершины с наименьшим номером смежны с вершинами с различными номерами.
    2. Пусть в G и G' вершины с наименьшим номером смежны с вершинами с одинаковыми номерами. Выполняем шаг построения кода, тогда оставшиеся деревья различны, значит, по предположению индукции у них различные коды.

■

Алгоритм построения дерева по коду $A_0 = (a_1, \ldots, a_{n-2})$.

1. Пусть $B_0 = (1, \ldots, n)$.
2. Находим наименьшее $b \in B_i : b \notin A_i$. Тогда в дереве есть ребро $\{b, a_i\}$. $A_{i+1} = A_i \setminus \{a_i\}$, $B_{i+1} = B_i \setminus \{b\}$.
3. Повторяем шаг 2 $(n-2)$ раз. Получим $B_{n-2} = \{b', b''\}$, значит, в дереве есть ребро $\{b', b''\}$.

Утверждение 6.3.5. *Указанный алгоритм построения дерева по коду из n чисел строит дерево.*

Доказательство (методом математической индукции).

- *База индукции.* При $n = 1$ легко проверить.

- *Шаг индукции.* Рассмотрим графы $T_1, \ldots, T_{n-1}$, полученные в процессе построения дерева. T_1 не содежрит циклов. T_2 получается из T_1 либо добавлением новой вершины, либо добавлением моста, что не приводит к появлению цикла.

  T_{n-1} не содержит циклов и содержит n вершин и $(n-1)$ ребёр, значит, T_{n-1} — дерево.

■

Теорема 6.3.2 (Кэли). *Пусть $G = (V, E)$ — дерево, $n = |V|$, вершинам G сопоставлены числа $1, \ldots, n$. Всего можно составить n^{n-2} таких неизоморфных деревьев.*

6.4 Планарные графы

Плоским называется граф $G = (V, E)$ такой, что:

- $V \subset \mathbb{R}^2$;
- рёбра — (Жордановы) кривые, концами которых являются вершины;
- различные рёбра не имеют общих точек, за исключением концов.

Простыми словами **плоский граф** - граф, который "нарисован"на плоскости так, чтобы ребра не пересекались.

Планарный граф - граф, который изоморфный плоскому.

Разбиением графа G называется граф, получающийся добавлением новой вершины на какое-нибудь ребро графа G.

Если G — граф и G' — плоский граф, изоморфный G, то G' называется укладкой G в $\mathbb{R}^2$.

Аналогично можно определить укладку графа в $\mathbb{R}^3$, на сферу и т. д.

Теорема 6.4.1. *Любой граф можно уложить в $\mathbb{R}^3$.*

Доказательство. Пусть $G = (V, E)$ — граф, $V = \{(1; 0; 0), (2; 0; 0), \ldots, (n; 0; 0)\}$. Рассмотрим плоскости, проходящие через Ox и образующие с плоскостью Oxy углы $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2\cdot 2}, \ldots, \frac{\pi}{2m}$, где $m = |E|$. Получим плоский граф, т. к. плоскости пересекаются только по прямой Ox.
■

Теорема 6.4.2. *Граф укладывается на плоскость ровно тогда, когда он укладывается на сферу.*

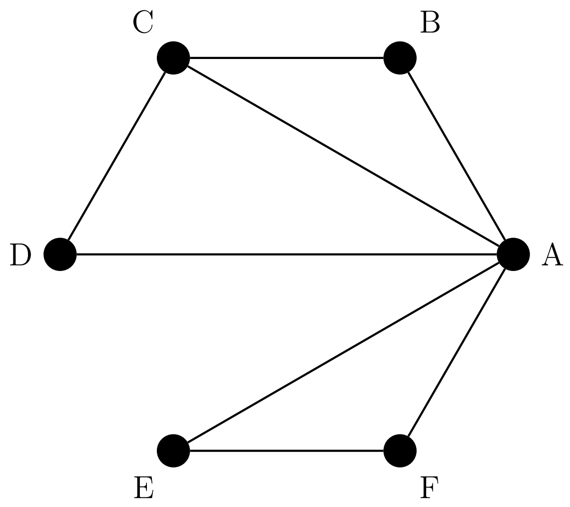
Доказательство. Пусть плоскость $z = 0$ касается сферы в точке $O(0; 0; 0)$, N — точка на сфере, диаметрально противоположная точке O. Для каждой точки сферы, не совпадающей с N, проведём прямую через неё и точку N, которая пересечёт сферу и плоскость, причём любые две из этих прямых имеют единственную общую точку N. Получим биекцию между точками сферы и точками плоскости, тогда можно построить биекцию между укладками на сфере и укладками на плоскости. ■

Определение 6.4.1. *Множество на плоскости называется **линейно связным**, если любые две точки этого множества можно соединить кривой, целиком лежащей в этом множестве.*

Гранью плоского графа $G = (V, E)$ называется часть множества $\mathbb{R}^2 \setminus G$, которая линейно связна и не является подмножеством другого линейно связного множества.

Грань плоского графа - часть плоскости, границей которого являются его рёбра, и не содержащая внутри себя простых циклов. На рисунке 6.2 у графа G есть 4 грани: между вершинами ACD, ABC, AFE и та часть плоскости, которая окружает весь граф.

Теорема 6.4.3 (формула Эйлера). *В плоском связном графе $n - m + f = 2$, где n, m, f — число вершин, рёбер и граней соответственно.*



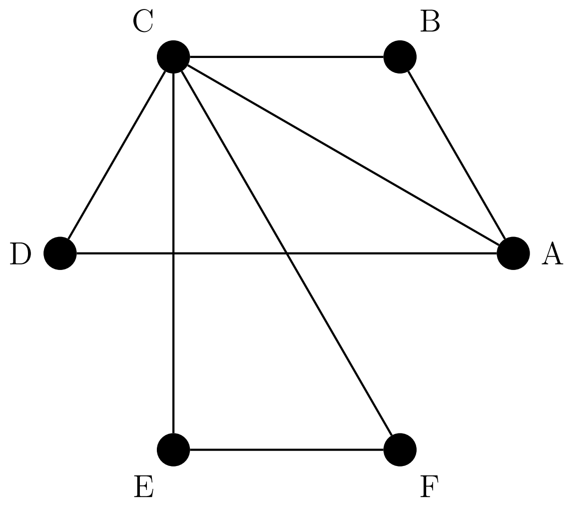


Рис. 6.1: Плоский граф G и изоморфный ему планарный граф

Доказательство. Рассмотрим остов данного графа. В нём n вершин, $n-1$ рёбер и 1 грань. Формула Эйлера верна для него: $n-(n-1)+1=2$.

Добавим 1 ребро данного графа, тогда оно разобьёт одну грань на две, т. е. число граней увеличится на 1. Формула Эйлера верна для полученного графа. Повторяя $(m-(n-1))$ раз, получим исходный граф, для которого формула Эйлера верна. ■

Теорема 6.4.4. *Пусть G — планарный граф с $n \geqslant 3$ вершинами и m рёбрами. Тогда $m \leqslant 3n-6$.*

Доказательство. При $m=2$ неравенство выполняется.

Пусть в графе f граней, m_i — число рёбер в границе i-й грани. Тогда $m_i \geqslant 3$, $\sum\limits_{i=1}^{f} m_i \geqslant 3f$. С другой стороны, $\sum\limits_{i=1}^{f} m_i = 2m$. По формуле Эйлера $n-m+f=2 \Leftrightarrow f=m+2-n$. Получим:

$$2m \geqslant 3f \Leftrightarrow 2m \geqslant 3m+6-3n \Leftrightarrow m \leqslant 3n-6$$

■

Следствие 6.4.1. *Планарный граф содержит хотя бы одну вершину со степенью, не большей 5.*

Доказательство (методом от противного). Пусть $\forall v \in V\ degv \geqslant 6$. Тогда ∎
Теорема 6.4.5. *Графы K_5 и $K_{3,3}$ не планарные.*
Доказательство.

- Рассмотрим K_5: $n = 5$, $m = 10$. Тогда $m \leqslant 3n - 6 \Leftrightarrow 10 \leqslant 9$. Неверно, значит, K_5 не планарен.

- Рассмотрим $K_{3,3}$. Пусть он планарный. В нём самый короткий цикл имеет длину 4. Тогда $2m \geqslant 4f \Leftrightarrow 2m \geqslant 4m + 8 - 4n \Leftrightarrow m \leqslant 2n - 4$. $n = 6$, $m = 9$, тогда $9 \leqslant 8$. Неверно, значит, $K_{3,3}$ не планарен.

∎

Граф $G' = (V', E')$ получается **подразбиением** ребра $e = \{u, v\}$ графа $G = (V, E)$, если:

- $V' = V \cup \{u'\}$;

- $E' = (E \setminus \{e\}) \cup \{\{u, u'\}, \{v, u'\}\}$.

Графы G и G' **гомеоморфны**, если они изоморфны графам, получающимся подразбиениями рёбер одного и того же графа (Стягиваем вершины степени 2 в ребро (удаляем их)).

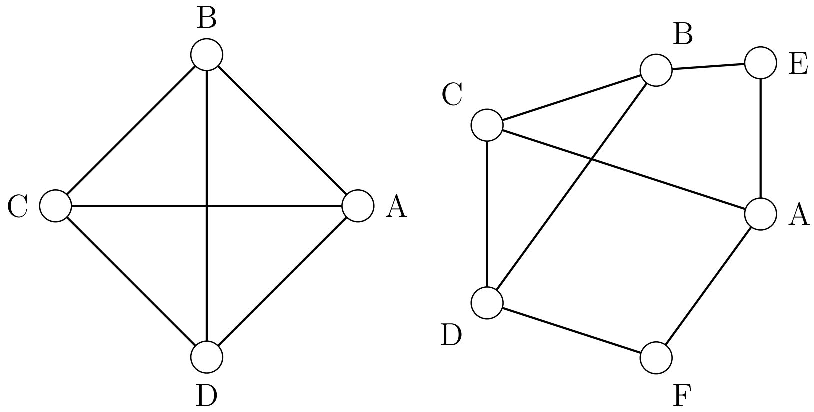


Рис. 6.2: Граф G и получающийся из него двумя подразбиениями ($AB \Rightarrow AEB$, $\quad AD \Rightarrow AFD$) граф G'.

Теорема 6.4.6 (Понтрягина-Куратовского). *Граф G планарен ровно тогда, когда он не содержит подграфов, гомеоморфных K_5 или $K_{3,3}$.*

Доказательство. Очевидно, что подграф планарного графа планарен. Если G — планарный граф, содержащий подграф G', гомеоморфный K_5 или $K_{3,3}$, то G' тоже планарный, значит, K_5 или $K_{3,3}$ планарен. Противоречие. ∎

Часть V

Теория множеств

Глава 7

Основные понятия

7.1 Определение

Множество - ключевое понятие теории множест. Оно аксиоматично, то есть неопределяемо. Обозначаются множества обычно заглавными буквами латинского алфивита.
$\in$ - символ принадлежности множеству.
Пустое множество — множество, не содержащее ни одного элемента.
Универсальное множество (универсум) — множество, содержащее все мыслимые объекты. В связи с парадоксом Рассела данное понятие трактуется в настоящее время как «множество, включающее все множества, участвующие в рассматриваемой задаче».

7.2 Аксиоматика

7.3 Операции на множествами

- Объеденение $A \cup B = C \quad \Leftrightarrow \quad \forall c \in C : c \in A$ или $c \in B$
- Пересечение $A \cap B = C \quad \Leftrightarrow \quad \forall c \in C : c \in A$ и $c \in B$
- Разница $A \backslash B = C \quad \Leftrightarrow \quad \forall c \in C : c \in A$ и $c \notin B$
- Симметрическая разница $A \triangle B = C \quad \Leftrightarrow \quad \forall c \in C : c \in A \cup$ и $c \notin A \cap B$
- Дополнение к множеству A (в универсальном множестве M) $\overline{A} \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in \overline{A}, x \in M : x \notin A$

Глава 8

Функции над множествами

8.1 Определение

Функцией f : $\mathbf{A} \to \mathbf{B}$ называется правило, ставящие в соответсвие каждому элементу множества A единственный элемент множества B ($f(a) \in B$, $a \in A$).
Множество A - **область определения** f.
Множество B - **область заначения** f.

8.2 Биекции, Иньекции, Сюрьекции

- $f : A \to B$ называют **иньективной**, если $\forall x, y \in A : x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$
- $f : A \to B$ называют **сюрьективной**, если $\forall b \in B \exists a \in A : f(a) = b$
- $f : A \to B$ называют **биньюктивной**, если она является и иньективной и сюрьективной одновременно.

Часть VI

Комбинаторика