Справочник по математике

Борис Кожуховский

2017

Оглавление

Введение

Цели этого справочника:

- Систематизация и сохранение математических знаний, полученных мной за годы учёбы
- Сбор информации, которую трудно найти в понятном мне виде
- Конспектирование лекций в красивом виде
- Изучение LaTeX

Часть I

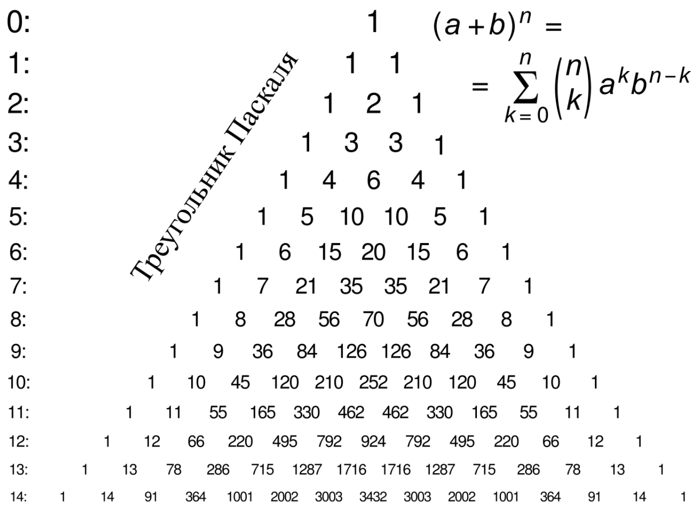
Алгебра

Глава 1

Рациональные выражения

1.1 Формулы сокращённого умножения

- $(a \pm b)^n$ вычисляется через треугольник паскаля



Например:

–

Часть II

Математический анализ

Глава 2

Функции и их свойства.

2.1 График функции

Преобразование графиков ф-ий:

1. **Симметрия относительно осей координат**

   - Функции $y = f(x)$ и $y = -f(x)$ имеют одну и ту же область определения, их графики симметричны относительно оси Ox.
   - Функции $y = f(x)$ и $y = f(-x)$ имеют области определения, симметричные относительно точки O. Их графики симметричны относительно оси Oy.

2. **Сдвиг вдоль осей координат (параллельный перенос)**

   - Функция $y = f(x-a)$, где $a \neq 0$, определена для всех x, таких, что $(x - a) \in D(f(x))$. График ф-ии $y = f(x - a)$ получается сдвигом вдоль оси Ox на величину $|a|$ графика функции $y = f(x)$ вправо, если $a > 0$, и влево, если $a < 0$.
   - Функция $y = f(x) + B$, где $B \neq 0$, имеет ту же область определения, что и ф-ия $y = f(x)$. График ф-ии $y = f(x) + B$ получается сдвигом вдоль оси Oy на величину $|B|$ графика функции $y = f(x)$ вверх, если $B > 0$, и вниз, если $B < 0$.

3. **Растяжение с сжатие графика вдоль всей оси координат**

4. **Построение графика функции $y = Af(k(x - a)) + B$ по графику функции $y = f(x)$**

5. **Симметрия относительно прямой** $y = x$

2.2 Периодичность ф-ий

Определение:

Функцию $y = f(x)$ **с областью определения** X **называют периодической, если** $\exists T \neq 0 \quad \forall x \in X$ **такой, что** $(x + T) \in X$**, и** $(x - t) \in X$**, и** $f(x + T) = f(x)$

Пример ур-ия, где используется периодичность ф-ий:

Пусть $f(x)$ - периодическая функция с периодом 8, такая, что $f(x) = 8x - x^2$ при $x \in [0; 8)$. Решите уравнение $f(2x + 16) + 23 = 5f(x)$.

Решение:

1. $$\begin{cases} f(x) = f(x+T) = f(x-T) \\ T = 8 \end{cases} \implies \quad f(2x+16) = f(2x)$$

2. $x \in [0; 4) \quad \implies \quad 2x \in [0; 8)$
   Решаем уравнение для этого случая:
   $f(2x) + 23 = 5f(x)$
   $16x - 4x^2 + 23 = 40x - 5x^2$
   $x^2 - 24x + 23 = 0$
   $x1 = 1$
   $x2 = 23 \qquad$ побочный корень для $x \in [0; 4)$

3. $x \in [4; 8) \quad \implies \quad (2x - 8) \in [0; 8)$
   Решаем уравнение для этого случая:
   $f(2x - 8) + 23 = 5f(x)$
   $16x - 64 - 4x^2 + 16x - 64 + 23 = 40x - 5x^2$
   $x^2 - 8x - 105 = 0$
   $x1 = 7$
   $x2 = -15 \qquad$ побочный корень для $x \in [4; 8)$

4. Так как наша функция имеет период 8, то и корни будут повторятся с такой же периодичностью, так как $f(x) = f(x + T) = f(x - T)$. То есть получаем корни $x = 1 + 8n$ и $x = 7 + 8n$.

Ответ: $x = 1 + 8n$ и $x = 7 + 8n$.

Глава 3

Пределы

3.1 Предел на бесконечности

Глава 4

Производная

Определение:
Производной функции в точке называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к 0.

$$\boxed{\mathbf{f'(x_0) = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle f}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(x_0 + \triangle x) - f(x_0)}{\triangle x}}}$$

$\triangle x$ - приращение аргумента, то есть изменение аргумента от x до x_0 (дельта x).
$\triangle f = f(x + \triangle x) - f(x)$ - приращение функции (дельта f).

4.1 Свойства производных

1. $\mathbf{(C * x)' = C * (x)'}$ $\quad$ $\mathbf{C = const}$
2. $\mathbf{(f + g)' = f' + g'}$
3. $\mathbf{(f * g)' = f' * g + g' * f}$
4. $\mathbf{\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' * g - g' * f}{g^2}}$
5. $\mathbf{(f(g))' = f'(g) * g'(f)}$
6. $\mathbf{(f^g) = f^g * \ln f * g' + g * f^(g - 1) * f'}$
7. $\mathbf{f'(y) = \frac{1}{g(x)}}$ $\quad$ $\mathbf{f(y)}$ **и** $\mathbf{g(x)}$ **- взаимообратные функции** $\mathbf{(D(f(y)) = E(g(x))}$ **и** $\mathbf{D(g(x)) = E(f(y)))}$**.**

4.1.1 Экстремумы функции двух переменных

Для того, чтобы найти экстремум функции $z(x, y)$ двух переменных, нужно найти точки, в которых частные производные 1-ого порядка равны 0. Пусть мы нашли такую точку $M_0(x_0, y_0)$. Тогда найдём производные второго порядка в этой точке $A = z''_{xx}(x_0, y_0)$, $B = z''_{xy}(x_0, y_0)$ и $C = z''_{yy}(x_0, y_0)$. Если $AC - B^2 > 0$, то $z(x, y)$ имеет экстремум в точке M_0 (если $A > 0$, то минимум, если $A < 0$, то максимум).

4.1.2 Экстремумы функции трёх переменных

Для того, чтобы найти экстремум функции $f(x, y, z)$ двух переменных, нужно найти точки, в которых частные производные 1-ого порядка равны 0. Пусть мы нашли такую точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Тогда найдём производные второго порядка в этой точке, вычислим их и составим **матрицу Гессе**:

$$\begin{pmatrix} f''_{xx}(M_0) & f''_{xy}(M_0) & f''_{xz}(M_0) \\ f''_{yx}(M_0) & f''_{yy}(M_0) & f''_{yz}(M_0) \\ f''_{zx}(M_0) & f''_{zy}(M_0) & f''_{zz}(M_0) \end{pmatrix}$$

Найдём **угловые миноры**: $\sigma_1 = f''_{xx}(M_0)$, $\sigma_2 = \begin{bmatrix} f''_{xx}(M_0) & f''_{xy}(M_0) \\ f''_{yx}(M_0) & f''_{yy}(M_0) \end{bmatrix}$, $\sigma_3 = \begin{bmatrix} f''_{xx}(M_0) & f''_{xy}(M_0) & f''_{xz}(M_0) \\ f''_{yx}(M_0) & f''_{yy}(M_0) & f''_{yz}(M_0) \\ f''_{zx}(M_0) & f''_{zy}(M_0) & f''_{zz}(M_0) \end{bmatrix}$

Теперь возможны 4 случая:

1. Если $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 > 0$ и $\sigma_3 > 0$, то $M_0(x_0, y_0, z_0)$ - точка минимума.
2. Если $\sigma_1 < 0$, $\sigma_2 > 0$ и $\sigma_3 < 0$, то $M_0(x_0, y_0, z_0)$ - точка максимума.
3. Иначе если $\sigma_3 \neq 0$, то $M_0(x_0, y_0, z_0)$ - седловая точка.
4. При $\sigma_3 = 0$, то нужно дополнительное исследование.

4.1.3 Экстремум с условием. Метод множителей Лагранжа

Пусть дана функция $f(x_1 \ldots x_n)$ и несколько условий $u_1(x_1 \ldots x_n) = 0 \ldots u_k(x_1 \ldots x_n) = 0$. Нужно найти экстремум функции при этих условиях. Метод множителей Лагранжа:

1. Составим **функцию Лагранжа** от $n+k$ переменных $L(x_1 \dots x_n, \lambda_1 \dots \lambda_k) = f(x_1 \dots x_n) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i(x_1 \dots x_n)$.

2. Составим систему уравнений, приравняв частные производные L к 0.

3. Если полученная система имеет решение относительно параметров x'_j и λ'_i, тогда точка x' может быть условным экстремумом, то есть решением исходной задачи. Заметим, что это условие носит необходимый, но не достаточный характер.
   Проверка точки для функции двух переменных: найдём дифференциал второго порядка $d^2L = L''_{xx}(dx)^2 + 2L''_{xy}dxdy + L''_{yy}$. Если $d^2L > 0 \quad \forall x, y$ то функция достигает минимума в точке x', если $d^2L < 0 \quad \forall x, y$, то функция достигает максимума в точке x'.

4.2 Геометрическая интерпретация производной

4.2.1 Касательная

В трёхмерном пространстве

Пусть дана функция, задающая поверхность $F(x, y, z) = 0$.
Касательная плоскость к поверхности в точке M_0 – это плоскость, содержащая касательные ко всем кривым, которые принадлежат данной поверхности и проходят через точку M_0. Её уравнение имеет вид $F'_x(M_0)(x - x_0) + F'_y(M_0)(y - y_0) + F'_z(M_0)(z - z_0) = 0$.

4.2.2 Нормаль

В трёхмерном пространстве

Пусть дана функция, задающая поверхность $F(x, y, z) = 0$.
Нормаль к поверхности в точке M_0 – это прямая, проходящая через данную точку перпендикулярно касательной плоскости. Её каноническое уравнение имеет вид $\frac{x-x_0}{F'_x(M_0)} = \frac{y-y_0}{F'_y(M_0)} = \frac{z-z_0}{F'_z(M_0)}$.

Часть III

Геометрия

Часть IV

Дискретная математика

Глава 5

Булевы функции

5.1 Методы минимализации

5.1.1 Импликанты

Литерал - это переменная или её отрицание. Н-р: $x_1, \overline{x_1}x_2$
Импликант K - это такая коньюкция литералов функции F, что $K_i \to F_i$
Простой ипликант - это такой импликант, что вычеркиванием из него литералов нельзя получить новый импликант.
Н-р:

x_1	x_2	x_3	$K_1 = x_1$	$K_2 = \overline{x_3}$	x_1x_2	F
0	0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	1	0	1
0	1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	1	0	1
1	0	1	1	0	0	1
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	0	1	1

K_1 - простой импликант
K_2 - не импликант
K_3 - импликант

5.1.2 Сокращенные ДНФ

5.1.3 Тупиковые ДНФ

5.1.4 Кратчайшие и минимальные ДНФ

5.2 Классы булевых функций и полнота

5.2.1 Классы БФ

5.2.2 Теорема о функциональной полноте

Глава 6

Теория графов

6.1 Основные понятия

Два графа называются **изоморфными**, если они одинаковые с точностью до переименования вершин.

6.2 Эйлеровы и Гамильтоновы пути и циклы

Эйлеров путь — это путь, проходящий по всем рёбрам графа и притом только по одному разу.
Эйлеров цикл — эйлеров путь, являющийся циклом. То есть замкнутый путь, проходящий через каждое ребро графа ровно по одному разу.
Эйлеров граф — граф, содержащий эйлеров цикл.
Полуэйлеров граф — граф, содержащий эйлеров путь.

Существование эйлерова цикла и эйлерова пути

- В неориентированном графе
  Согласно теореме, доказанной Эйлером, эйлеров цикл существует тогда и только тогда, когда граф связный и в нём отсутствуют вершины нечётной степени.

  Эйлеров путь в графе существует тогда и только тогда, когда граф связный и содержит не более двух вершин нечётной степени.[1][2] Ввиду леммы о рукопожатиях, число вершин с нечётной степенью должно быть четным. А значит эйлеров путь существует только тогда, когда это число равно нулю или двум. Причём когда оно равно нулю, эйлеров путь вырождается в эйлеров цикл.

Гамильтоновым циклом является такой цикл, который проходит через каждую вершину данного графа ровно по одному разу.
Гамильтонов граф - граф, содержащий гамильтонов цикл.

Условия существования гамильтонова цикла в графе

- **Условие Дирака**
Пусть p — число вершин в данном графе и $p > 3$. Если степень каждой вершины не меньше, чем $\frac{p}{2}$, то данный граф — гамильтонов.

- **Условие Оре**
Пусть p — количество вершин в данном графе и $p > 2$. Если для любой пары несмежных вершин (x, y) выполнено неравенство $\deg x + \deg y \geqslant p$, то данный граф — гамильтонов (другими словами: сумма степеней любых двух несмежных вершин не меньше общего числа вершин в графе).

6.3 Остовные деревья

Остовное дерево графа состоит из минимального подмножества рёбер графа, таких, что из любой вершины графа можно попасть в любую другую вершину, двигаясь по этим рёбрам.
Минимальное остовное дерево (или минимальное покрывающее дерево) в связанном взвешенном неориентированном графе — это остовное дерево этого графа, имеющее минимальный возможный вес, где под весом дерева понимается сумма весов входящих в него рёбер.

Алгоритмы поиска минимального остовного дерева

- **Алгоритм Крускала**
Алгоритм Крускала изначально помещает каждую вершину в своё дерево, а затем постепенно объединяет эти деревья, объединяя на каждой итерации два некоторых дерева некоторым ребром. Перед началом выполнения алгоритма, все рёбра сортируются по весу (в порядке неубывания). Затем начинается процесс объединения: перебираются все рёбра от первого до последнего (в порядке сортировки), и если у текущего ребра его концы принадлежат разным поддеревьям, то эти поддеревья объединяются, а ребро добавляется к ответу. По окончании перебора всех рёбер все вершины окажутся принадлежащими одному поддереву, и ответ найден.

- **Алгоритм Прима**

  Искомый минимальный остов строится постепенно, добавлением в него рёбер по одному. Изначально остов полагается состоящим из единственной вершины (её можно выбрать произвольно). Затем выбирается ребро минимального веса, исходящее из этой вершины, и добавляется в минимальный остов. После этого остов содержит уже две вершины, и теперь ищется и добавляется ребро минимального веса, имеющее один конец в одной из двух выбранных вершин, а другой — наоборот, во всех остальных, кроме этих двух. И так далее, т.е. всякий раз ищется минимальное по весу ребро, один конец которого — уже взятая в остов вершина, а другой конец — ещё не взятая, и это ребро добавляется в остов (если таких рёбер несколько, можно взять любое). Этот процесс повторяется до тех пор, пока остов не станет содержать все вершины (или, что то же самое, n-1 ребро).

  В итоге будет построен остов, являющийся минимальным. Если граф был изначально не связен, то остов найден не будет (количество выбранных рёбер останется меньше n-1).

6.4 Планарные графы

Плоский граф - граф, который "нарисован"на плоскости так, чтобы ребра не пересекались.
Планарный граф - граф, который изоморфный плоскому.
Грань плоского графа - часть плоскости, границей которого являются его рёбра, и не содержащая внутри себя простых циклов.

Формула Эйлера для плоских графов.

Если граф плоский, то выполняется такой равенство

$$\mathbf{n - m + f = 2}$$

где n - число вершин, m - число рёбер, f - число граней.
Для любых планарных выполняется

$$\mathbf{m \leq 3n - 6}$$

где n - число вершин, m - число рёбер.
Разбиением графа G называется граф, получающийся добавлением новой вершины на какое-нибудь ребро графа G.

Два графа называются гомеоморфными если получаются разбиением из одного и того же графа. (Стягиваем вершины степени 2 в ребро (удаляем их))

Критерий планарности. **Теорема Понтрягина-Куратовского**

Граф планарный тогда и только тогда, когда он не содержит подграфов, гомеоморфных K_5, $K_{3,3}$.

6.5 Коды Прюфера

Код Прюфера - это представление графа на n вершин в виде массива размера $n-2$. По графу однозначно строиться код Прюфера, а по коду Прюфера - граф.
Алгоритм построения графа по коду Прюфера:

1. Из вершин выбираем вершину с наименьшим номером, которая не встречается в коде

Часть V

Теория множеств

Глава 7

Основные понятия

7.1 Определение

Множество - ключевое понятие теории множест. Оно аксиоматично, то есть неопределяемо. Обозначаются множества обычно заглавными буквами латинского алфивита.
$\in$ - символ принадлежности множеству.
Пустое множество — множество, не содержащее ни одного элемента.
Универсальное множество (универсум) — множество, содержащее все мыслимые объекты. В связи с парадоксом Рассела данное понятие трактуется в настоящее время как «множество, включающее все множества, участвующие в рассматриваемой задаче».

7.2 Аксиоматика

7.3 Операции на множествами

- Объеденение $A \cup B = C \quad \Leftrightarrow \quad \forall c \in C : c \in A$ или $c \in B$
- Пересечение $A \cap B = C \quad \Leftrightarrow \quad \forall c \in C : c \in A$ и $c \in B$
- Разница $A \backslash B = C \quad \Leftrightarrow \quad \forall c \in C : c \in A$ и $c \notin B$
- Симметрическая разница $A \bigtriangleup B = C \quad \Leftrightarrow \quad \forall c \in C : c \in A \cup$ и $c \notin A \cap B$
- Дополнение к множеству A (в универсальном множестве M) $\overline{A} \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in \overline{A}, x \in M : x \notin A$

Глава 8

Функции над множествами

8.1 Определение

Функцией f : **A** $\to$ **B** называется правило, ставящие в соответсвие каждому элементу множества A единственный элемент множества B ($f(a) \in B$, $a \in A$).
Множество A - **область определения** f.
Множество B - **область заначения** f.

8.2 Биекции, Иньекции, Сюрьекции

- $f : A \to B$ называют **иньективной**, если $\forall x, y \in A : x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$
- $f : A \to B$ называют **сюрьективной**, если $\forall b \in B \exists a \in A : f(a) = b$
- $f : A \to B$ называют **биньюктивной**, если она является и иньективной и сюрьективной одновременно.

Часть VI

Комбинаторика