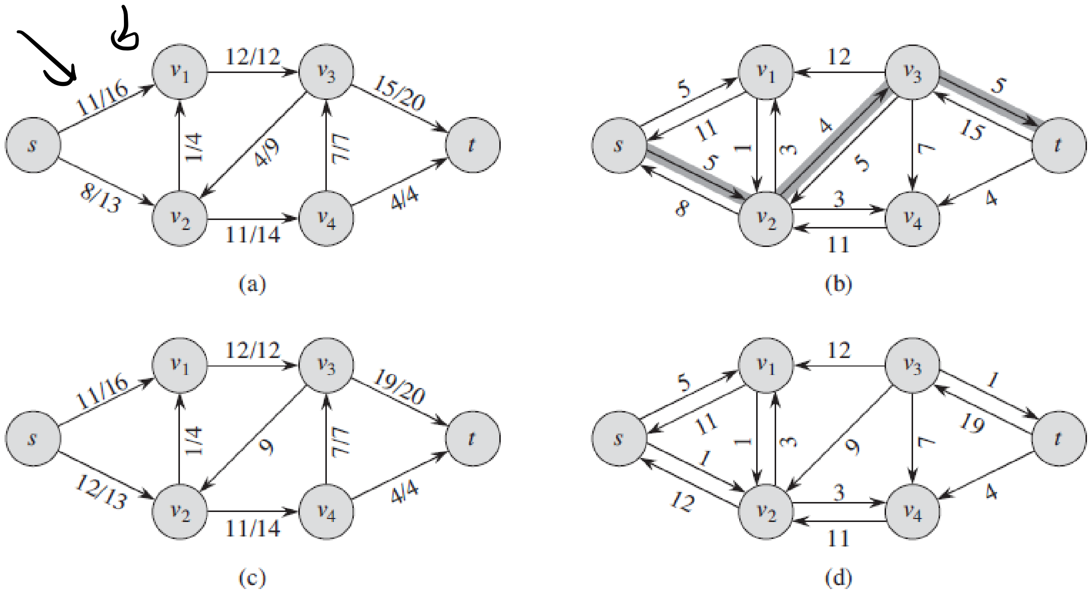
<u>הרצאה 12</u>

זרימות - בגרפים הרעיון - רוצים להעביר משהו מצומת S לצומת t (למשל - מS עיר מסויימת - להעביר סחורות לעיר אחרת t) יש מסלולים שעוברים דרך ערים אחרות ובכל מסלול יש קיבול - מקסימום שאפשר להעביר במסלול הזה. בשרטוט השמאלי העליון למטה - רואים מצב של רשת זרימה

כמות 11 מקס' 16



(a) (b) (c) (d)

המטרה - למצוא דרך להעביר ברשת מS לt הכי הרבה שאפשר אסור לעבור קיבול בקשת כלשהי. קיבול על קשת (u,v) סימנו C(u, v), זרימה על קשת (u,v) סימנו f(u,v)

דיברנו על חוק השימור

$$\sum_{v \in V} f(u,v) = 0$$

מה שנכנס לצומת יוצא (למעט s, t), ערך הזרימה בגרף הוא מה שיוצא מs

<u>שיטת פורד פולקרסון</u>

תזכורת - רשת שיורית - מה עוד אפשר להעביר, מה פנוי

מחפשים האם יש מסלול שיפור ברשת השיורית מs לt ואז מוסיפים את המסלול הזה לרשת בערך של הקיבול הכי קטן בתוכו (צואר הבקבוק)

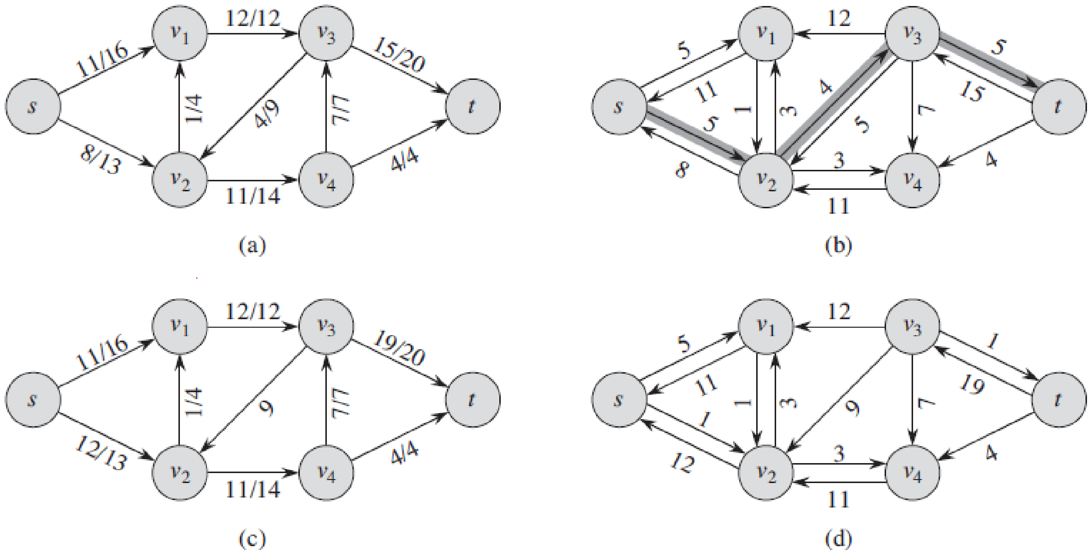
$$\xrightarrow{5}\xrightarrow{1}\xrightarrow{20} = 1$$

נבחר להעביר 1

למשל

רשת

רשת שיורית



(a) (b) (c) (d)

<u>מסלול שיפור augmenting path</u>

מסלול ברשת השיורית Gf מ s ל t. ניתן להגדיל את הזרימה במסלול הזה, P, עד ל

$$c_f(p) = \min(c_f(u,v) \mid (u,v) \in p)$$

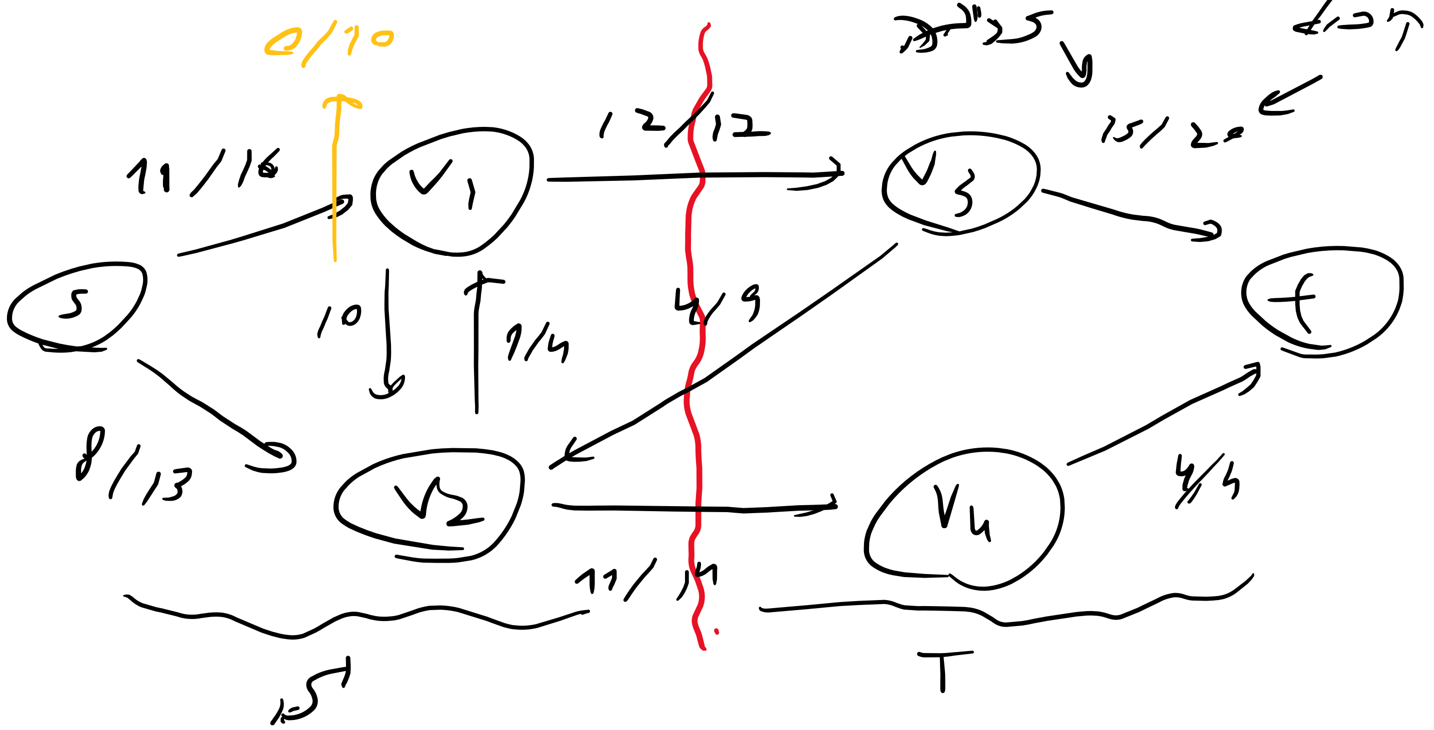
אם נסמן את הזרימה שהוספנו בfp אז הזרימה החדשה תהיה

$$f' = f + f_p$$

ברור שזה יותר ממה שהיה קודם ולכן יש שיפור.

נוסיף - משפטים חשובים, וריאציה על פורד פולקרסון שנקראת Edmonds Karp ונוסיף שימושים לרשתות זרימה

נדבר על כיצד ניתן לקבוע מהי הזרימה המקסמלית ונקשר את זה לקיבולים של הרשת - נראה כיצד ניתן לדעת מה ערך הזרימה המקסימלית האפשרית בלי להריץ את האלגוריתם אלא רק מתוך נתוני הגרף (הסתכלות אחרת) - כדי לעשות את זה נצטרך להזכר במונח חתך.



חתך הוא חלוקה של הגרף לשתי קבוצות צמתים זרות, לקבוצה אחת, זו שיש בה את המקור נקרא S (גדול),

לקבוצה שיש בה את t נקרא T

אפשר לדבר על מהי הזרימה בחתך, ואפשר לדבר על מה הקיבול של החתך.

זרימה בחתך - מה עובר בקשתות שחוצות אותו

$$f(S,T) = 12 + 11 - 4 = 19$$

קיבול החתך - מה הקיבול של קשתות שחוצות אותו, אבל רק בכוון החיובי כלומר מS לT

$$c(S,T) = 12 + 14 = 26$$

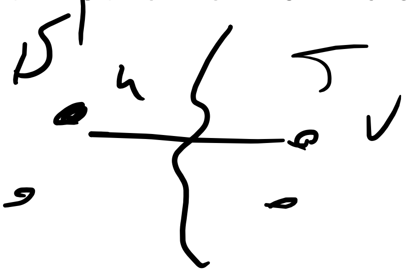
נראה שיש קשר הדוק בין קיבולי החתכים בגרף לבין הזרימה המקסימלית, משפט לגבי זה עוד מעט.

משפטי עזר לפני -

<u>משפט</u>

לכל חתך (S, T) , הזרימה דרך החתך שווה לזרימה הכללית בגרף

(שאלתם איך יודעים איפה להעביר את החתך - באופן כללי כל בחירה של צמתים לשתי קבוצות יוצרת חתך אחר, אנחנו כרגע אומרים משפטים כלליים שנכונים לכל חתך שהוא)



<u>טענה</u>

הערך של כל זרימה f חסום מלמעלה על ידי הקיבול של כל חתך בG

<u>הוכחה</u>

לכל חתך

$$|f| \underset{\uparrow}{=} f(S,T) = \sum_{u\in S}\sum_{v\in T} f(u,v) \leq$$

למה 1

$$\sum_{u\in S}\sum_{v\in T} c(u,v) = c(S,T)$$

<u>מסקנה</u> הזרימה בכל רשת חסומה מלמעלה על ידי החתך המינימלי min-cut

<u>Max-flow-min-cut</u>

משפט השטף והחתך. המשפט אומר שהזרימה המקסימלית לא רק חסומה מלמעלה ע"י החתך המינימלי אלא גם שווה לו ממש.

תהא f זרימה ברשת G=(V, E) עם מקור s ובר t, המשפטים הבאים שקולים

1. F זרימה מקסימלית בG
2. הרשת השיורית Gf לא מכילה מסלולי שיפור
3. |f|=C(S, T) לחתך כלשהו בG.

<u>הוכחה</u>

1 ->2 נניח בשלילה שיש מסלול שיפור, אז ניתן לשפר וf אינה מקסימלית

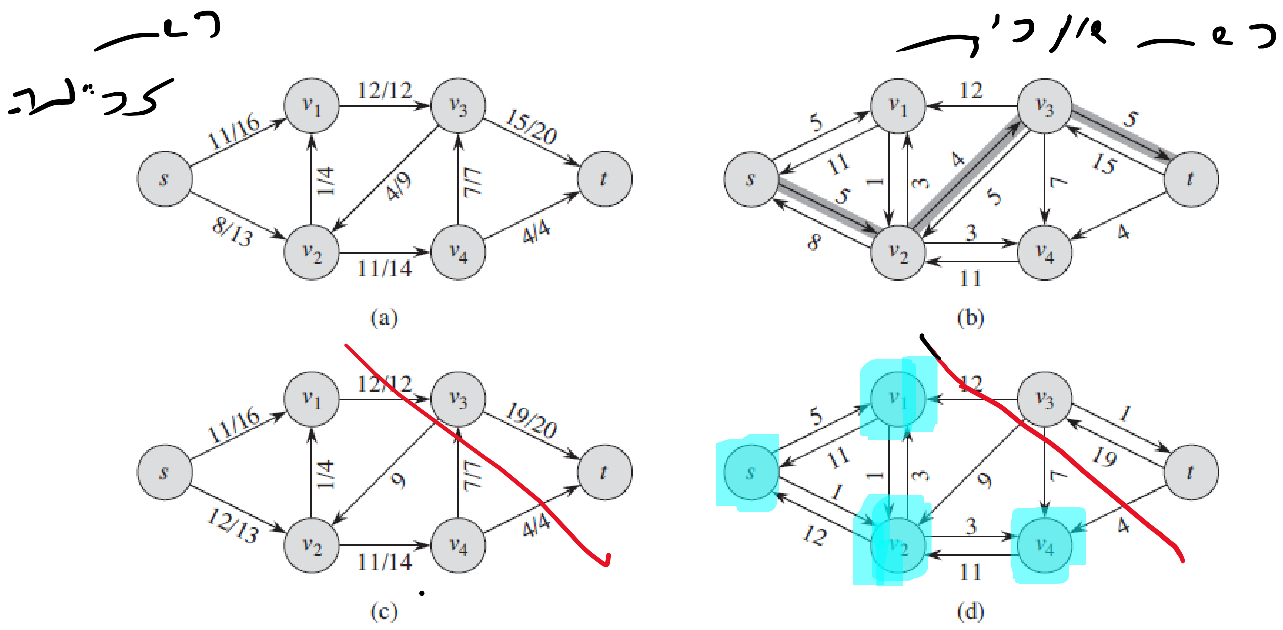
2->3 נניח שברשת השיורית אין מסלולי שיפור, אז נוכל להגדיר בה חתך. החתך בצד S יכלול את כל הצמתים שנגישים מS על הרשת השיורית - t בודאות לא חלק מהצמתים האלו כי אין מסלול שיפור. והחתך בצד T יכלול את כל השאר. המשמעות היא שבחתך הזה אין אפשרות להוסיף זרימה אז מתקיים לכל הקשתות בחתך f(u,v)=C(u,v) - אחרת היה מסלול (גשר שניתן לעבור דרכו מצד S לצד T). ולכן

$$|f| = f(S,T) = c(S,T)$$

3->1 הוכחנו שלכל חתך מתקיים

$$|f| \leq c(S,T)$$

טענה 3 אומרת שמצאנו חתך |f|=C(S, T) - אז זה בהכרח המקסימום



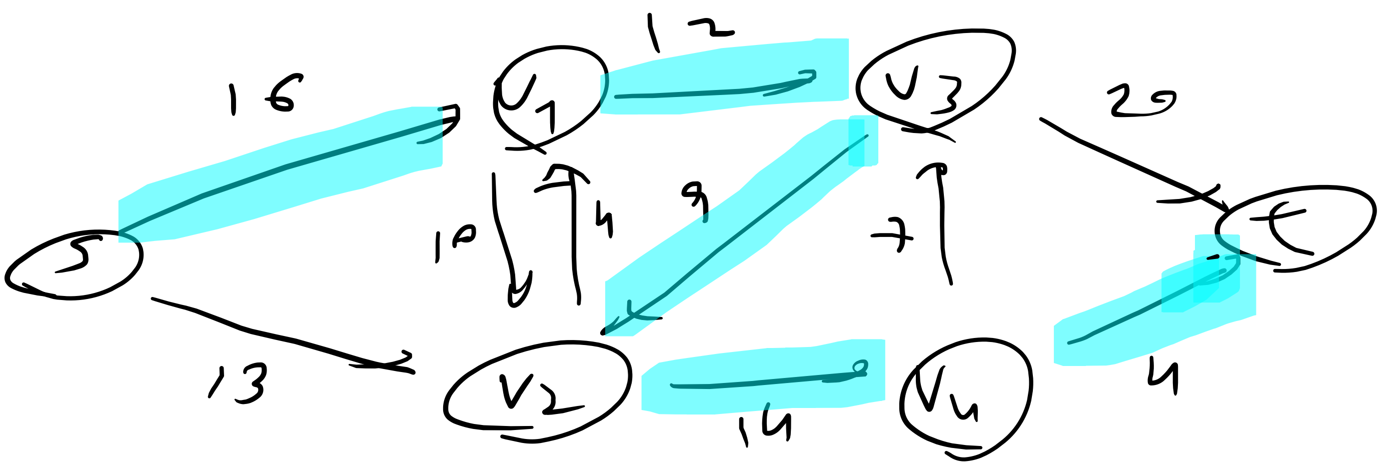
החתך בקיבול 23.

<u>אלגוריתם Ford-Folkerson</u>

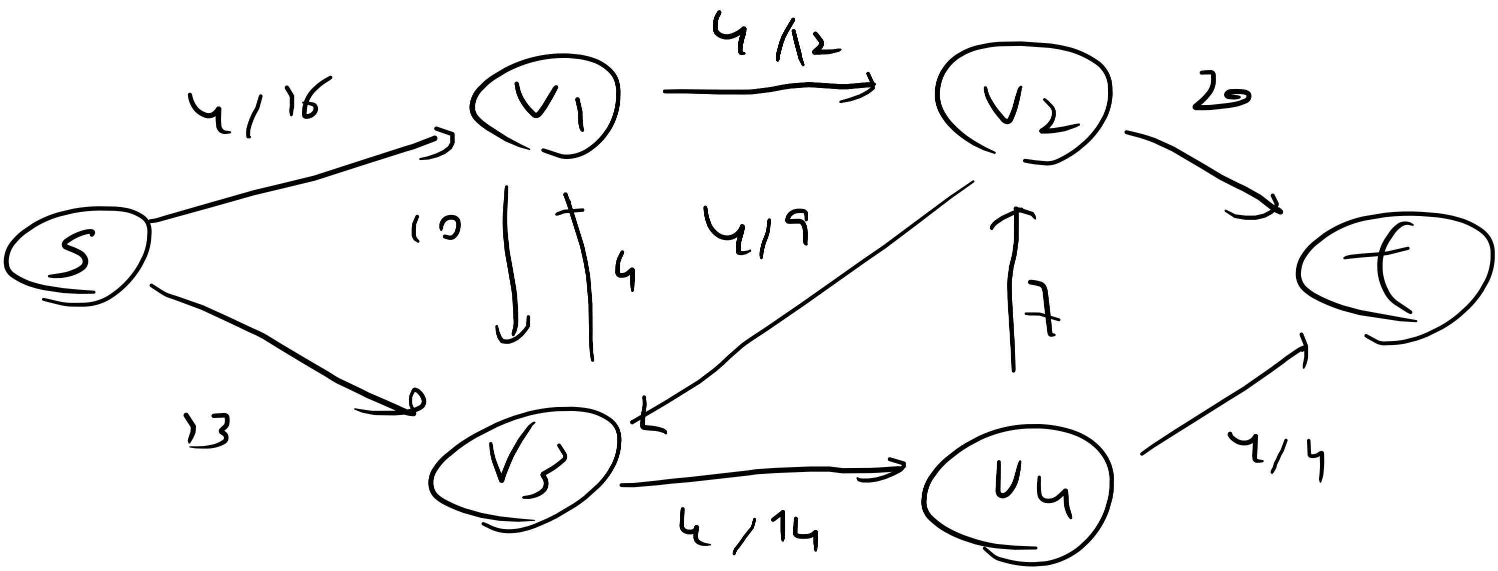
1. לכל קשת f(u,v)←0
2. אם קיים מסלול P מs לt ברשת השיורית Gf, והקיבול המינימלי במסלול הוא Cf(P) אז f(u,v)←f(u,v)+Cf(P)

זמן הריצה תלוי בזמן מציאת המסלול ברשת השיוריות.

הרצה - בשלב הזה אין זרימה בגרף - הרשת השיורית נראית ככה -



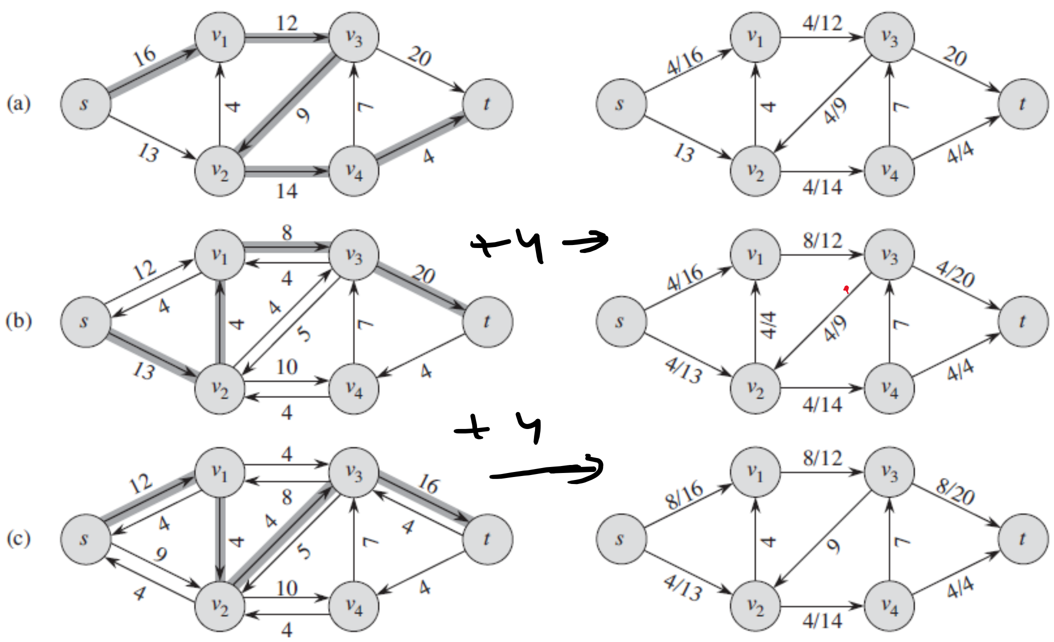
נוסיף זרימה 4 למסלול

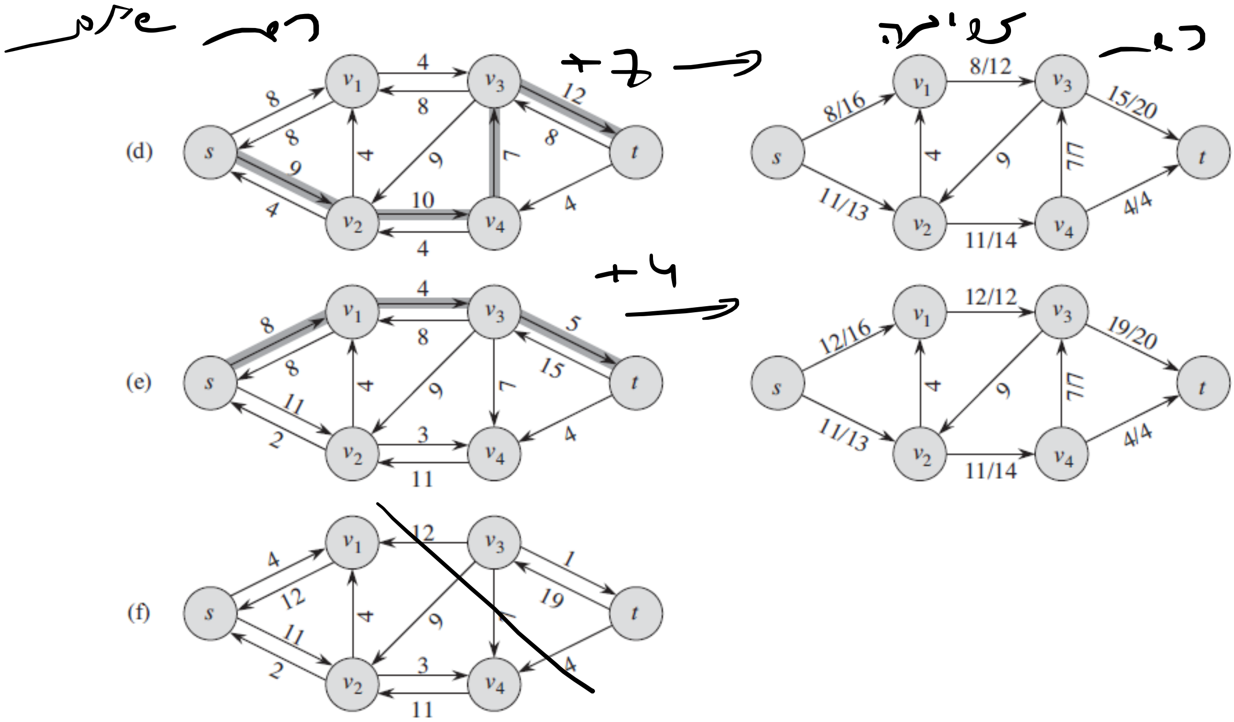


המשך הריצה

הגרף השיורית

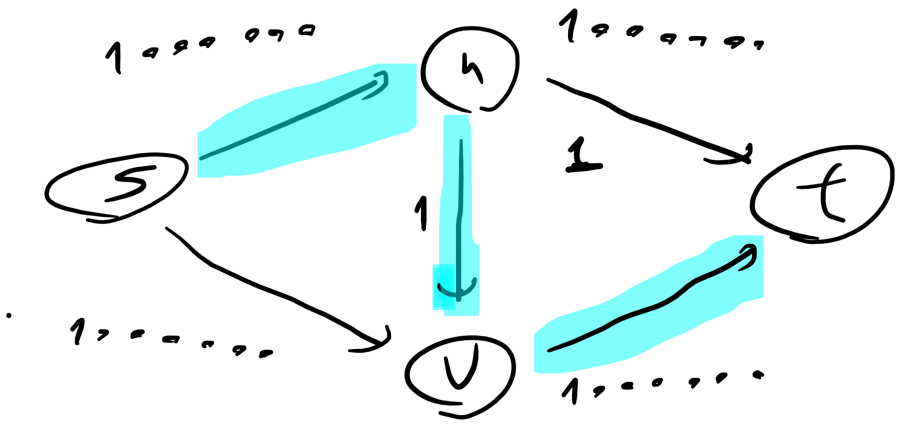
גרף הזרימה



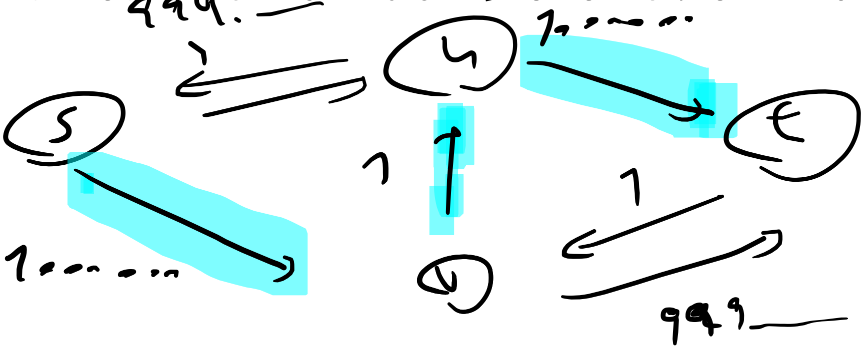


הזרימה המקסימלית היא 23. החתך המינימלי

זמן הריצה יכול להיות תלוי בגודל הזרימה



הזרימה המקס' 2000000 - בפורד פולקרסון אם בוחרים מסלולים בצורה לא מוצלחת יכול להיות שנשפר כל פעם רק ב1. הרשת השיורית



אפשר להגיע למצב של שיפור ב1 בכל צעד.

אם הקיבולים שלמים, זה יכול לקחת עד (O(E|fmax|

אם הקיבולים אי רציונאליים - האלגוריתם יכול לא להתכנס

אם מוצאים את מסלול השיפור על ידי אלגוריתם BFS (מ s המסלול לt) במקום Ford-Folrkerson

זה נקרא Edmonds-Karp והסיבוכיות היא $O(VE^2)$

אם המספרים רציונאליים - אז הם נראים כמו $\frac{m}{n} = \frac{5}{2}$

אפשר להכפיל בכל המכנים או במכנה המשותף הקטן ביותר ולהגיע לגרף בשלמים

(ואחר כך לחלק חזרה) אז זה בדיוק כמו הבעיה בשלמים. ובמצב הזה פורד פולקרסון בכל צעד משפר ומשפר עד שמגיעים לזה שאין מסלול שיפור. אם היה מסלול יכולנו לשפר עוד ועוד.

שאלות אפשריות - בפעם הבאה יתווסף עוד נושא עליו יכולות להיות שאלות. תראו שאלות בסגנון אצל אליהו וחיים, וגם במטלה, נעשה ביחד שאלה אחת בפעם הבאה, נדבר גם על משפט השלמות בזרימות,

שאלות שאפשר לפתור בעזרת זרימות למרות שזה נראה לא קשור.