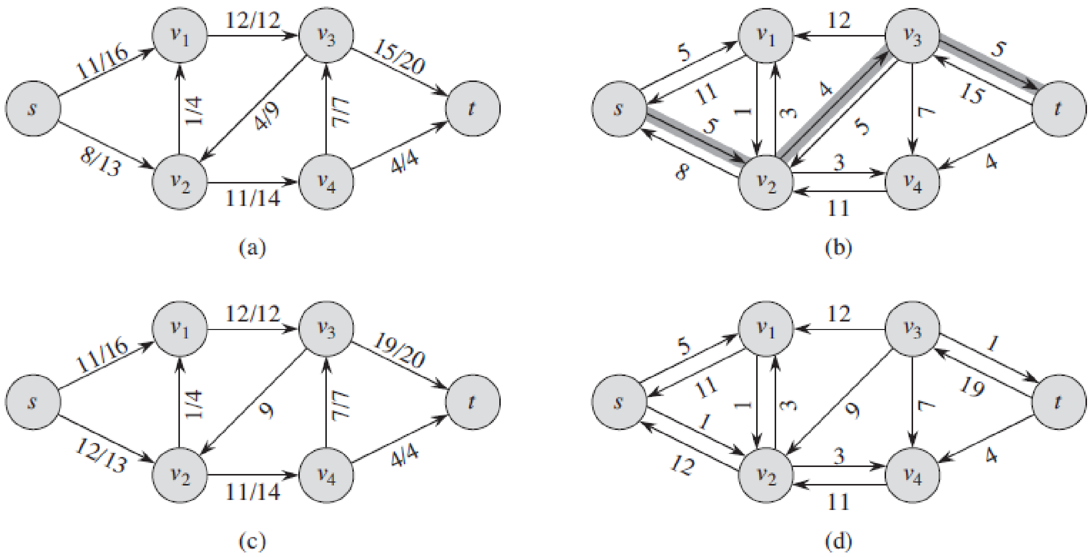
<u>הרצאה 12</u>

דיברנו על רשתות זרימה. בתמונה למטה תהליך קביעת הזרימה המקס/



דיברנו על פורד פולקרסון שבכל שלב מוצא ברשת השיורית מסלול שיפור וכך בסופו של דבר מגיעים לזרימה המקסימלית.

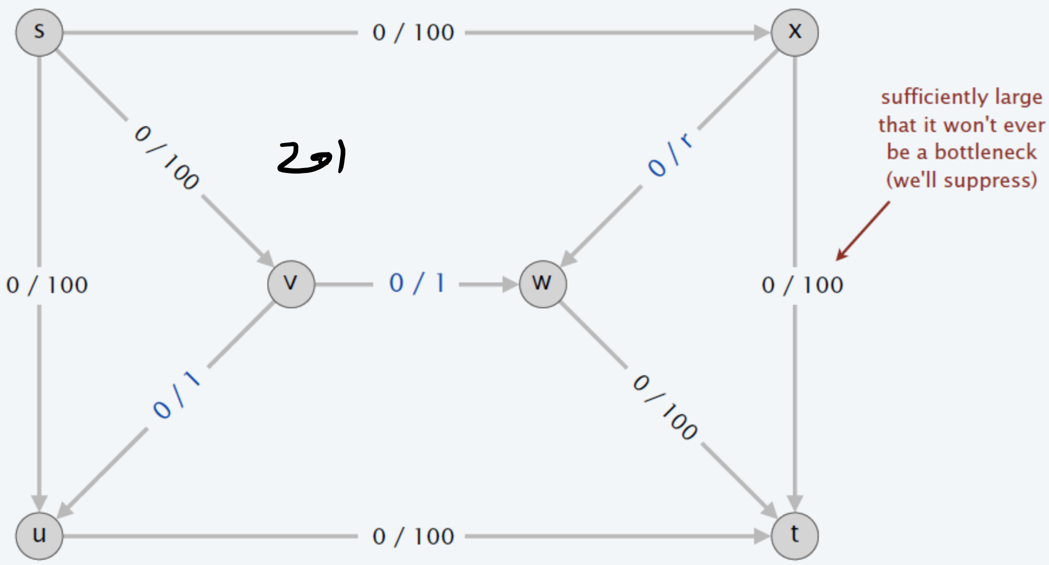
דיברנו על משפט השטף וחתך - Max-flow Min-cut - אמרנו שהזרימה המקסימלית שווה לגודל של חתך מינימלי כלשהו ברשת, דיברנו על Edmonds Karp - שזה כמו פורד פולקרסון אבל עם בחירת מסלולי שיפור ע"י BFS. הזכרנו שפורד פולקרסון מתכנס לזרימה המקסימלית אם הקיבולים ראציונאלים ואחרת לא בטוח.

דוגמא פתולוגית - אפשר להראות שבבחירה מסויימת של מסלולי שיפור התהליך לא יסתיים וגם לא יתכנס לזרימה המקסימלית האמיתית

Ford-Fulkerson pathological example

$$r = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \implies r^2 = 1 - r$$

network G



אפשר לבחור מסלולים כך שיתקיים הדבר הבא

Ford-Fulkerson pathological example

Theorem. The Ford-Fulkerson algorithm may not terminate; moreover, it may converge a value not equal to the value of the maximum flow.

Pf.

- Using the given sequence of augmenting paths, after $(1+4k)^{th}$ such path, the value of the flow

$$\begin{aligned} &= 1 + 2\sum_{i=1}^{k} r^i \\ &\leq 1 + 2\sum_{i=1}^{\infty} r^i \\ &= 3 + 2r \\ &< 5 \end{aligned} \qquad r = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

- Value of maximum flow $= 200 + 1$. ▪

בפורד פולקרסון ניתן להגיע לסיבוכיות O(E*|F|), ובEdmonds Karp אפשר להגיע

$O(VE^2)$

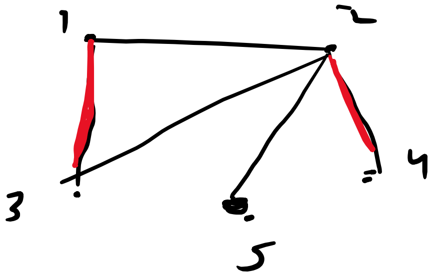
נקשר את זה לבעיה בגרפים

<u>שידוך מקסימאלי</u>

בהנתן גרף G=(V, E) שידוך הוא תת קבוצה של <u>קשתות</u>

$M \subseteq E$

שמחלקות את הקודקודים לזוגות למשל

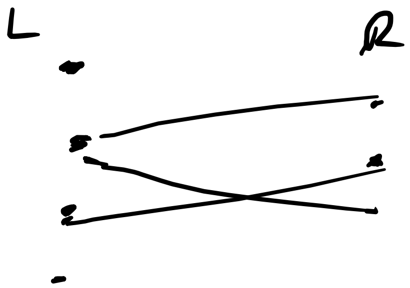


2 משודך ל4, 1 משודך ל3, 5 לא משודך

שידוך מקסימום - הוא שידוך שעבורו לכל שידוך אחר M' מתקיים

$|M| \geq |M'|$

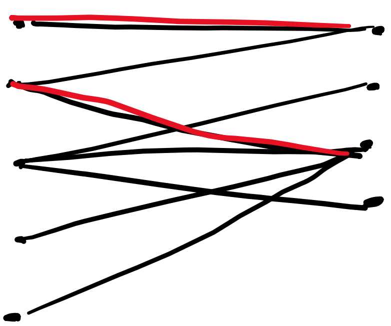
אנחנו נדבר על גרפים דו צדדיים שבהם קיימת חלוקה של הקודקודים לשתי קבוצות כאשר בין קודקודים באותה קבוצה אין קשתות למשל



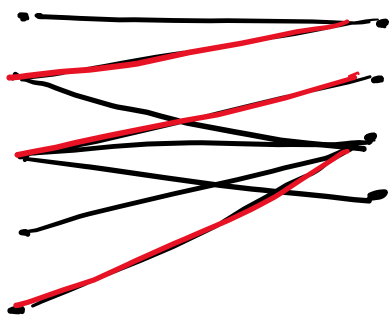
סימון מקובל

$V = L \cup R$

שידוך בגרף דו צדדי



גודל השידוך כאן הוא 2



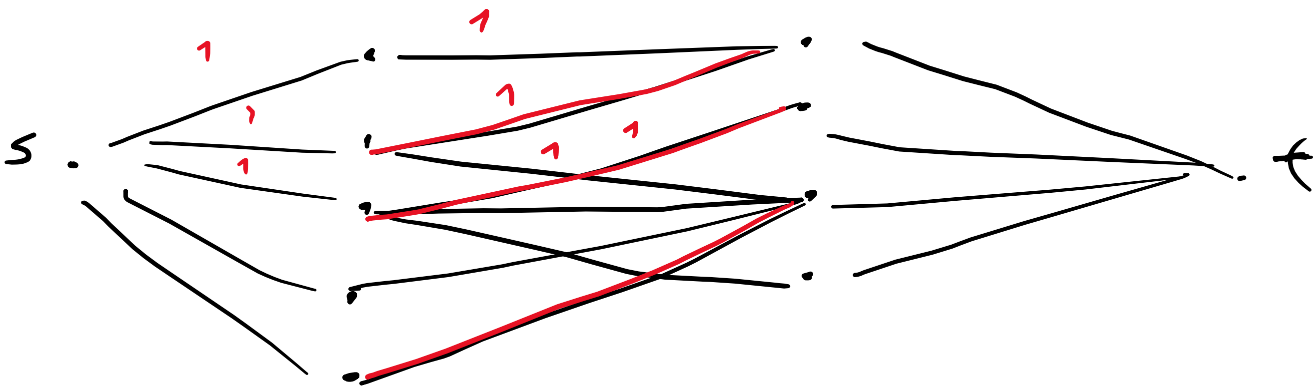
גודל השידוך כאן הוא 3

המטרה למצוא שידוך מקסימאלי - ישום לאלגוריתם כזה למשל מתאימים מעבדים למשימות

מסתבר שאפשר לפתור את זה בעזרת רשת זרימה. (טריק נפוץ ברשתות זרימה) נוסיף קודקוד

s ונחבר לכל הצמתים של L וגם t ונחבר לכל הצמתים של R ונגדיר קיבול לקשתות, קיבול 1 -

G’=(V’, E’)



ההנחה שלנו תהיה שבגרף הדו צדדי לכל צומת יש לפחות קשת שכנה אחת (אחרת הוא לא מחובר ונוותר עליו)

נראה ששידוך בG מתאים לזרימה בG’ ולהיפך.

<u>טענה</u>

אם M שידוך בG אז יש זרימה <u>שלמה</u> (כלומר בכל קשת זורם מספר שלם) ב'G כך ש

$|f|=|M|$

ולהיפך, אם f זרימה <u>שלמה</u> ב'G אז יש שידוך בגודל |M|=|f| ב-G

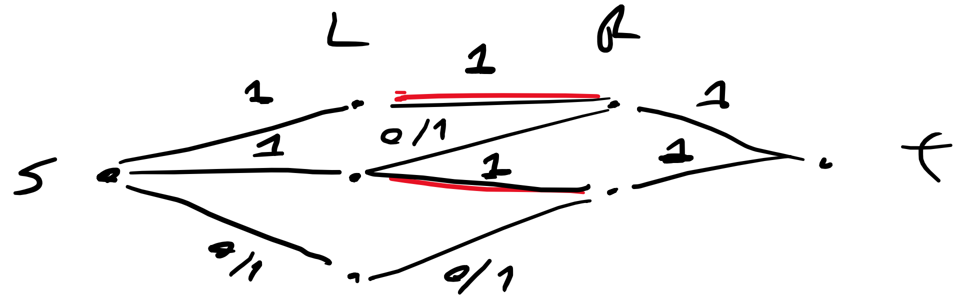
<u>הוכחה</u>

$(u,v)\in M$

נראה ששידוך M ב-G מתאים לזרימה f ב-'G. זרימה לכל

(קשת אדומה) נגדיר f(u, v) =1 ב

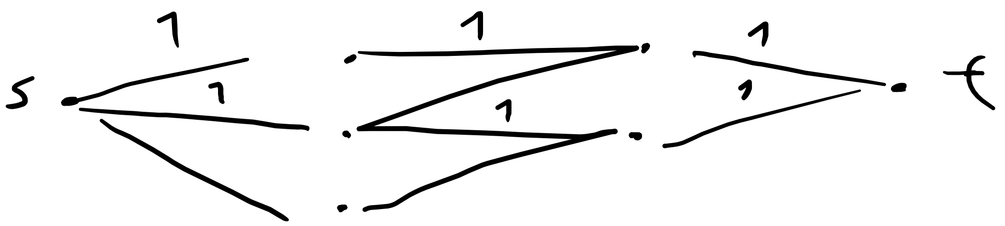
וגם f(s, u) = 1 וגם f(v, t) =1



הגדרנו זרימה גודל השידוך 2, גודל הזרימה 2 כלומר |M|=|f| (הזרימה שווה לזרימה דרך

כל חתך בגרף, שווה לכל מה שיוצא מs ולכל מה שנכנס לt)

בכוון ההפוך אם נתונה זרימה שלמה f על 'G נגדיר שידוך



מי יהיה השידוך? כל קשת שזורם דרכה משהו מבין הקשתות המקוריות (באמצע)

שייכת לשידוך. מכיוון שהזרימה היא שלמה בכל קשת יהיה 0 או 1 ולא יתכנו מצבים באמצע של פיצול למשל ל 0.3 ו 0.7

ומתקיים |M| = |f|

<u>משפט חשוב ושימושי</u> משפט השלמות - ניתן להראות שאם הקיבולים שלמים אז Ford-Folkerson

יתן זרימה שלמה (למרות שאולי יש זרימות שונות לא שלמות שסכומן שווה)

<u>טענה</u>

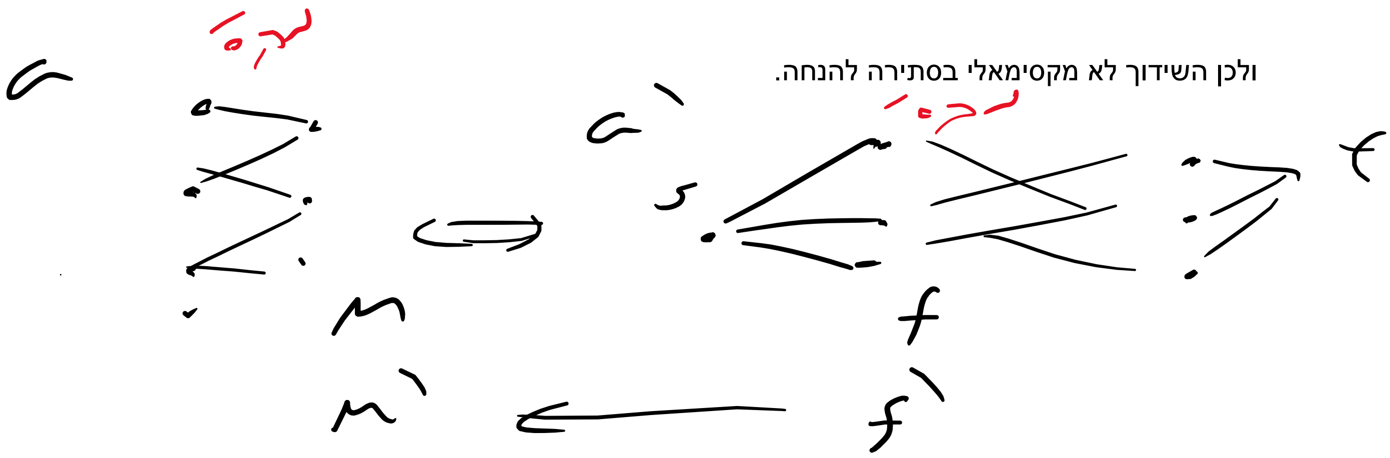
גודל השידוך המקסימאלי בגרף G שווה לזרימה המקסימאלית ברשת G′

<u>פתרון</u>

נניח בשלילה שM שידוך מקסימאלי והזרימה שמתאימה לו לא מקסימאלית, אז יש זרימה אחרת f′ בG′ שהיא מקסימאלית |f′|>|f| . מהטענות שהוכחנו, מכיוון שערך הזרימה שלם מתאים לו שידוך M′ שגודלו כגודל הזרימה. כלומר

$|M'| = |f'| > |f| = |M|$

ולכן השידוך לא מקסימאלי בסתירה להנחה.

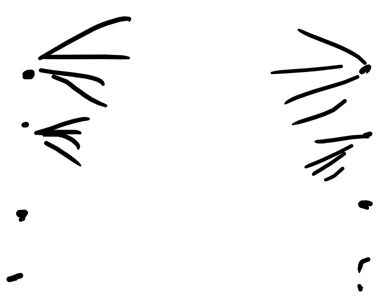


<u>שאלה</u>

יהי $G=(L\cup R, E)$ גרף דו-צדדי

2019 רגולרי. הציגו אלגוריתם יעיל שמפרק את הגרף לאיחוד זר של 2019 שידוכים מושלמים זרים
$|L|=|R|$

הבהרות - גרף 2019 רגולרי הוא גרף שבו מכל צומת בL יוצאות 2019 קשתות ולכל צומת בR מתחברות 2019 קשתות

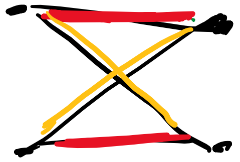


שידוך מושלם הוא שידוך שמשדך את כל הצמתים.

איחוד זר - הכוונה היא למצוא 2019 שידוכים כלומר קשתות שמחברות את כל צמתי L לR, אבל שבכל אחד מהם יהיה סט שונה לגמרי של קשתות, למשל

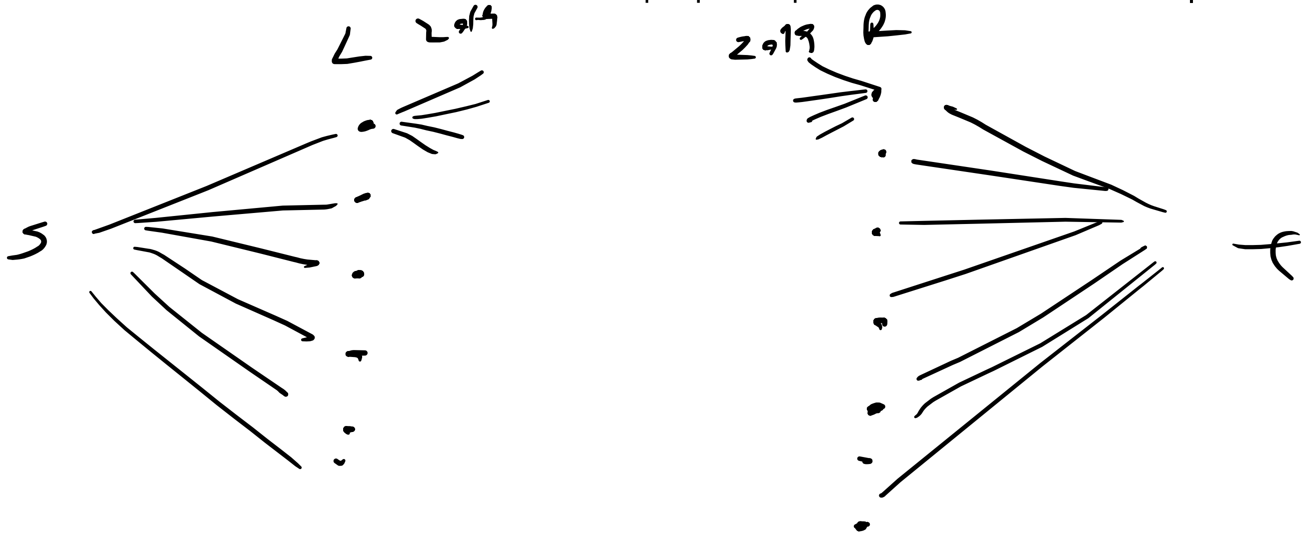
למשל שני שידוכים מושלמים זרים - אדום וכתום

כל אחד מהם הוא שידוך שגודלו 2.



הערה - במקרה של הגרף המתואר בשאלה השידוך המקסימלי הוא שידוך מושלם.

הפתרון - נבצע משהו דומה למה שתארנו קודם נוסיף מקור s ובור t.



נקבע את כל קיבולי הקשתות להיות 1, נמצא זרימה מקסימאלית שכמו שראינו מתאימה לשידוך

מקסימאלי, במקרה של הגרף הזה הוא מושלם. וכך מצאנו שידוך אחד. נמחק את הקשתות שהשתתפו בשידוך ונבצע את התהליך שוב 2019 פעמים.

הערה - הוכחה שיש שידוך מושלם בגרף אפשר לפתור כשאלה נפרדת אולי נפתור בשבוע הבא.

<u>שימוש בזרימות להוכחת משפט החתונה של הול</u>

<u>משפט החתונה של הול</u>

יהי גרף דו-צדדי $G=(L\cup R, E)$

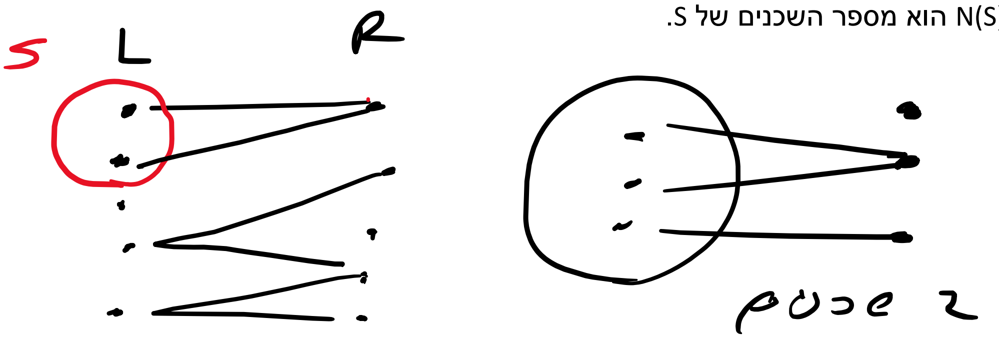
שבו |L|=|R|=n

אז ב-G יש שידוך מושלם אם ורק אם לכל $S\subseteq L$

מתקיים $|S|\le|N(S)|$

כאשר N(S) הוא מספר השכנים של S.

<u>הסבר</u>



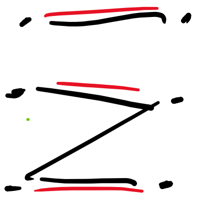
בשרטוט לS יש שכן אחד מתקיים שגודל הקבוצה גדול ממספר השכנים שלה ולכן על פי משפט החתונה של הול, אין בגרף הזה שידוך מושלם.

המשפט ניתן להוכחה בעזרת רשתות זרימה ע"י הוספת s וt. יתכן שנוסיף בהמשך - לא בטוח שנספיק.

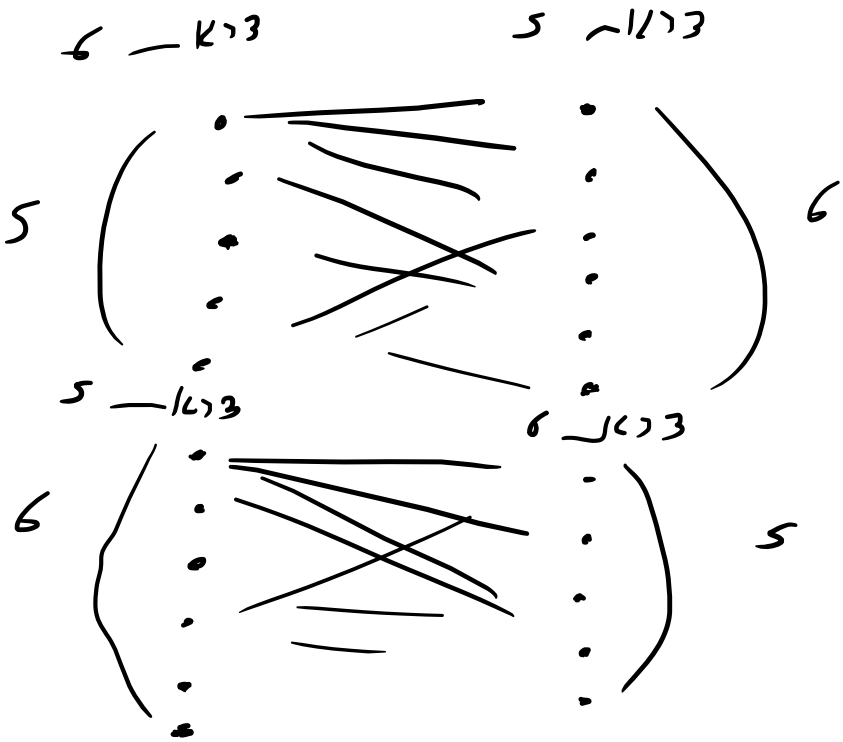
<u>שאלה</u>

תנו דוגמא לגרף דו צדדי שבו שני הצדדים שווי גודל, דרגת כל קודקוד היא לפחות 5 ואין בו שידוך מושלם

<u>פתרון</u>



דוגמאת חימום - שכנים = כמה קודקודים שונים מחוברים אליו, לא כמה קשתות



בגרף הזה אין שידוך מושלם - בקבוצה למטה משמאל ישנם 6 קודקודים ולהם רק 5 שכנים, על פי משפט החתונה של הול אין שידוך מושלם.

בזאת סיימנו את החומר! בפעם הבאה חזרה ונתכונן למבחן