Statistik II – Teil II
5. Einfaktorielle Varianzanalyse mit Messwiederholung

Dr. Boris Mayer
Institut für Psychologie
Universität Bern

UNIVERSITÄT BERN

Was bedeutet Messwiederholung?

> Varianzanalyse OHNE Messwiederholung (Buch Kap. 13)
  – UNABHÄNGIGE STICHPROBEN: In den verschiedenen Bedingungen (Faktorstufen) müssen sich verschiedene Personen befinden (und diese Personen dürfen in keiner systematischen Beziehung zueinander stehen)

> Varianzanalyse MIT Messwiederholung (Buch Kap. 14)
  – ABHÄNGIGE STICHPROBEN: In den verschiedenen Bedingungen (Faktorstufen) befinden sich
    1. Dieselben Personen (intraindividuelle Bedingungsvariation, wiederholte Messung derselben Personen)
    2. Verschiedene Personen, die in einer „natürlichen" Beziehung zueinander stehen (z.B. Geschwister, Ehepaare)
    3. Verschiedene Personen, die aufgrund einer **Parallelisierung** systematische Ähnlichkeiten aufweisen. **Parallelisierung („Matching"):** Man bildet Paare etc. von Versuchspersonen, die die gleiche oder eine sehr ähnliche Ausprägung auf einem Merkmal aufweisen, dessen Einfluss man in der Untersuchung kontrollieren will
  – Man spricht daher auch von VERBUNDENEN STICHPROBEN

🕮 367 - 368

Einfaktorielle Varianzanalyse mit Messwiederholung

- Erweiterung des t-Tests für abhängige/verbundene Stichproben
  - Vergleich von mehr als 2 abhängigen/verbundenen Stichproben bezüglich ihrer zentralen Tendenz (Mittelwerte)
- **Beispiel:** Dreimalige Erhebung der kognitiven Leistungsfähigkeit einer Gruppe von Personen unter 3 verschiedenen Bedingungen

  (1) ohne Stimmungsinduktion

  (2) nach positiver Stimmungsinduktion

  (3) nach negativer Stimmungsinduktion

  Da in allen drei Bedingungen dieselben Personen sind, hängt die kognitive Leistungsfähigkeit nicht nur von der induzierten Stimmung, sondern auch von personengebundenen Variablen ab, die über die 3 Stimmungsbedingungen hinweg stabil bleiben (z.B. Intelligenz, Teilnahmemotivation)
- Kovarianz der Messwerte über die drei Bedingungen gibt an, wie gross diejenigen Unterschiede zwischen Personen sind, die über die 3 Bedingungen/Messzeitpunkte hinweg stabil bleiben

📖 462

Typische Anwendungsgebiete und Probleme von Messwiederholungsdesigns

> **Veränderungsmessung** (Längsschnittstudien)

– Entwicklungspsychologie: Frage nach der Veränderung psychologischer Merkmale mit dem Alter

➔ Zeit als unabhängige Variable, wiederholte Messung eines Merkmals an den gleichen Personen in kleineren oder grösseren Abständen

> **Evaluationsforschung:** Inwieweit verändert sich eine Merkmalsausprägung nach einer Intervention (z.B. Wohlbefinden nach einer Psychotherapie) und inwiefern bleibt die Veränderung nach einer bestimmten Zeitspanne erhalten?

– Vorher-/nachher-Messungen, mehrere Messzeitpunkte (Stabilität der Veränderung)

> **Problem:** Sequenzeffekte, z.B.

– Übertragung von Lösungsstrategien von einer Messung auf die nächste

– Abnehmende Teilnahme-Motivation

Datenbeispiel: Modelllernen

Person m	Stufe a_j des Faktors			Personmittelwert $\bar{x}_{m\bullet}$
	Belohnung (a_1)	Bestrafung (a_2)	Keine Konsequenz (a_3)	
1	57	18	36	37
2	45	15	27	29
3	49	13	43	35
4	69	37	29	45
5	70	37	55	54
Bedingungsmittelwert $\bar{x}_{\bullet j}$	58	24	38	$\bar{x} = 40$

- Es gibt zwar immer noch 15 Messungen (3 Gruppen × 5 Messungen), aber nur noch 5 Personen, die die verschiedenen Bedingungen nacheinander durchlaufen haben.
- Nach dem Film wurde jeweils die Aggressions-Nachahmungstendenz erfasst.
- Neben den (bekannten) Bedingungsmittelwerten zu „Belohnung“, „Bestrafung“ und „Keine Konsequenz“ gibt es für jede Person einen Personenmittelwert, der die generelle aggressive Nachahmungstendenz einer Person im Mittel über alle 3 Bedingungen repräsentiert.
- Personen als „zufällige Faktorstufen“ eines Personenfaktors

Messwertzerlegung

Person m	Stufe a_j des Faktors			Personmittelwert $\bar{x}_{m\bullet}$
	Belohnung (a_1)	Bestrafung (a_2)	Keine Konsequenz (a_3)	
1	57	18	36	37
2	45	15	27	29
3	49	13	43	35
4	69	37	29	45
5	70	37	55	54
Bedingungsmittelwert $\bar{x}_{\bullet j}$	58	24	38	$\bar{x} = 40$

Bedingungseffekt

Personeneffekt

Populationsmodell: $x_{mj} = \mu + \tau_j + \pi_m + \varepsilon_{mj}$

Stichprobenmodell: $x_{mj} = \bar{x} + t_j + p_m + e_{mj}$

📖 464, 469

Definition der Effekte

Person m	Stufe a_j des Faktors			Personmittelwert $\bar{x}_{m\bullet}$
	Belohnung (a_1)	Bestrafung (a_2)	Keine Konsequenz (a_3)	
1	57	18	36	37
2	45	15	27	29
3	49	13	43	35
4	69	37	29	45
5	70	37	55	54
Bedingungsmittelwert $\bar{x}_{\bullet j}$	58	24	38	$\bar{x} = 40$

Bedingungseffekte **Personeneffekte**

Populationsmodell: $\tau_j = \mu_{\bullet j} - \mu \quad und \quad \pi_m = \mu_{m\bullet} - \mu$

Stichprobenmodell: $t_j = \bar{x}_{\bullet j} - \bar{x} \quad und \quad p_m = \bar{x}_{m\bullet} - \bar{x}$

UNIVERSITÄT BERN

Bedingungs- und Personeneffekte im Beispiel

Person m	Stufe a_j des Faktors			Personmittelwert $\bar{x}_{m\bullet}$
	Belohnung (a_1)	Bestrafung (a_2)	Keine Konsequenz (a_3)	
1	57	18	36	37
2	45	15	27	29
3	49	13	43	35
4	69	37	29	45
5	70	37	55	54
Bedingungsmittelwert $\bar{x}_{\bullet j}$	58	24	38	$\bar{x} = 40$

Bedingungseffekte:

$$t_1 = \bar{x}_{\bullet 1} - \bar{x} = 58 - 40 = 18$$

$$t_2 = \bar{x}_{\bullet 2} - \bar{x} = 24 - 40 = -16$$

$$t_3 = \bar{x}_{\bullet 3} - \bar{x} = 38 - 40 = -2$$

Personeneffekte:

$$p_1 = \bar{x}_{1\bullet} - \bar{x} = 37 - 40 = -3$$

$$p_2 = \bar{x}_{2\bullet} - \bar{x} = 29 - 40 = -11$$

$$p_3 = \bar{x}_{3\bullet} - \bar{x} = 35 - 40 = -5$$

$$p_4 = 45 - 40 = 5$$

$$p_5 = 54 - 40 = 14$$

UNIVERSITÄT BERN

Hypothesen

> **Nullhypothese:** Die (Populations-)Bedingungsmittelwerte unterscheiden sich nicht.

$$H_0:\ \mu_{\bullet 1} = \mu_{\bullet 2} = \mu_{\bullet 3}$$

oder alternativ:

$$H_0:\ \mu_{\bullet j} - \mu = 0 \quad \text{für alle } j$$

> **Alternativhypothese:** Mindestens zwei Bedingungsmittelwerte unterscheiden sich, bzw. mindestens ein Bedingungseffekt ist ungleich null.

$$H_1:\ \mu_{\bullet j} - \mu \neq 0 \quad \text{für mindestens ein } j$$

Quadratsummenzerlegung

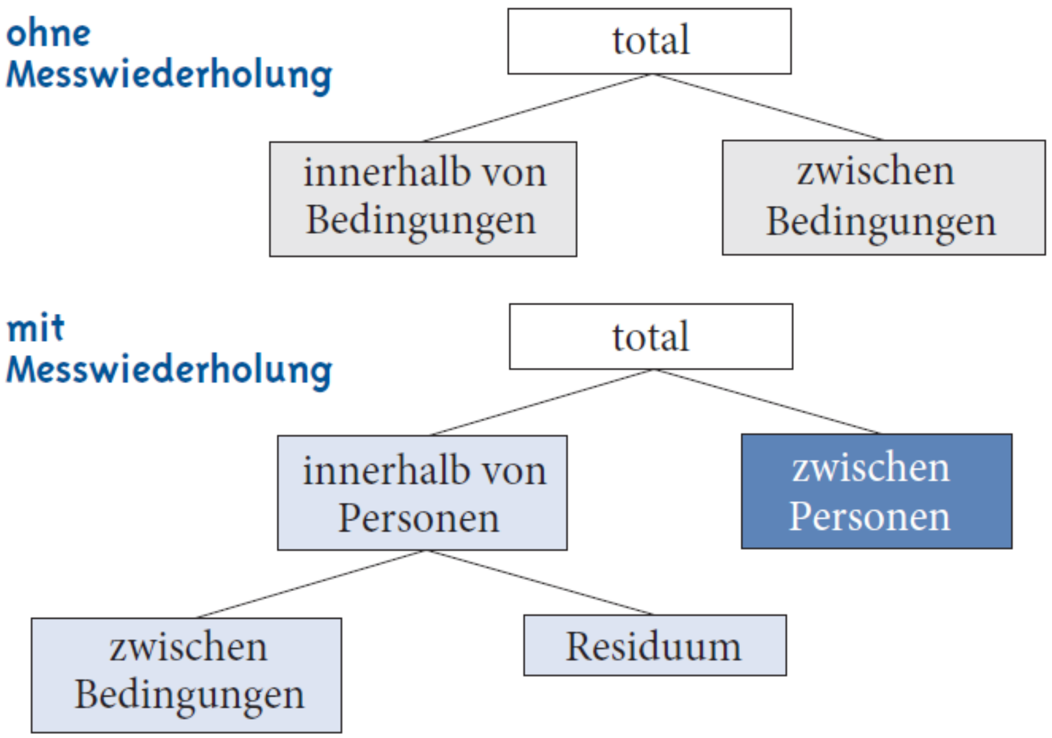

Abbildung 14.2 Quadratsummenzerlegung bei der einfaktoriellen Varianzanalyse mit und ohne Messwiederholung

$$x_{mj} = \bar{x} + t_j + p_m + e_{mj}$$

Quadratsummenzerlegung

! Additivität der Quadratsummen

Bei der einfaktoriellen Varianzanalyse mit Messwiederholung lässt sich die totale Quadratsumme QS_{tot} in drei Teile zerlegen:

- einen Teil, der die Variation zwischen Personen ausdrückt (»Haupteffekte« der Person; QS_{zwP}),
- einen Teil, der die Variation zwischen Bedingungen ausdrückt (Haupteffekte des Faktors A; QS_{zwA}), und
- einen unerklärten Teil (QS_{Res}):

$$QS_{tot} = QS_{zwP} + QS_{zwA} + QS_{Res} \qquad \text{(F 14.6)}$$

UNIVERSITÄT BERN

Quadratsumme Total

Person m	Stufe a_j des Faktors			Personmittelwert $\bar{x}_{m\bullet}$
	Belohnung (a_1)	Bestrafung (a_2)	Keine Konsequenz (a_3)	
1	57	18	36	37
2	45	15	27	29
3	49	13	43	35
4	69	37	29	45
5	70	37	55	54
Bedingungsmittelwert $\bar{x}_{\bullet j}$	58	24	38	$\bar{x} = 40$

$$QS_{tot} = \sum_{j=1}^{J} \sum_{m=1}^{n} \left(x_{mj} - \bar{x}\right)^2 = 17^2 + 5^2 + 9^2 + 29^2 + 30^2 + (-22)^2 + (-25)^2 + (-27)^2$$

$$+ (-3)^2 + (-3)^2 + (-4)^2 + (-13)^2 + 3^2 + (-11)^2 + 15^2$$

$$= 4532$$

UNIVERSITÄT BERN

Quadratsumme zwischen den Personen

Person m	Stufe a_j des Faktors			Personmittelwert $\bar{x}_{m\bullet}$
	Belohnung (a_1)	Bestrafung (a_2)	Keine Konsequenz (a_3)	
1	57	18	36	37
2	45	15	27	29
3	49	13	43	35
4	69	37	29	45
5	70	37	55	54
Bedingungsmittelwert $\bar{x}_{\bullet j}$	58	24	38	$\bar{x} = 40$

$$QS_{zwP} = \sum_{j=1}^{J} \sum_{m=1}^{n} \left(\bar{x}_{m\bullet} - \bar{x}\right)^2 = J \cdot \sum_{m=1}^{n} \left(\bar{x}_{m\bullet} - \bar{x}\right)^2$$

$$QS_{zwP} = 3 \cdot \left[(-3)^2 + (-11)^2 + (-5)^2 + 5^2 + 14^2 \right] = 1128$$

UNIVERSITÄT BERN

Quadratsumme zwischen den Bedingungen A

Person m	Stufe a_j des Faktors			Personmittelwert $\bar{x}_{m\bullet}$
	Belohnung (a_1)	Bestrafung (a_2)	Keine Konsequenz (a_3)	
1	57	18	36	37
2	45	15	27	29
3	49	13	43	35
4	69	37	29	45
5	70	37	55	54
Bedingungsmittelwert $\bar{x}_{\bullet j}$	58	24	38	$\bar{x} = 40$

$$QS_{zwA} = \sum_{m=1}^{n} \sum_{j=1}^{J} \left(\bar{x}_{\bullet j} - \bar{x}\right)^2 = n \cdot \sum_{j=1}^{J} \left(\bar{x}_{\bullet j} - \bar{x}\right)^2$$

$$QS_{zwA} = 5 \cdot \left[18^2 + (-16)^2 + (-2)^2\right] = 2920$$

📖 465

Quadratsumme Residuen

Person m	Stufe a_j des Faktors			Personmittelwert $\bar{x}_{m\bullet}$
	Belohnung (a_1)	Bestrafung (a_2)	Keine Konsequenz (a_3)	
1	57	18	36	37
2	45	15	27	29
3	49	13	43	35
4	69	37	29	45
5	70	37	55	54
Bedingungsmittelwert $\bar{x}_{\bullet j}$	58	24	38	$\bar{x} = 40$

$$QS_{Res} = \sum_{j=1}^{J} \sum_{m=1}^{n} \left(\left(x_{mj} - \bar{x} \right) - \left(\bar{x}_{\bullet j} - \bar{x} \right) - \left(\bar{x}_{m\bullet} - \bar{x} \right) \right)^2 = \sum_{j=1}^{J} \sum_{m=1}^{n} \left(x_{mj} - \bar{x}_{\bullet j} - \bar{x}_{m\bullet} + \bar{x} \right)^2$$

$$QS_{Res} = 2^2 + (-2)^2 + (-4)^2 + 6^2 + (-2)^2 + (-3)^2 + 2^2 + (-6)^2 + 8^2 + (-1)^2 + 1^2 + 0^2 + 10^2 + (-14)^2 + 3^2 = 484$$

Interaktion zwischen Person und Bedingung

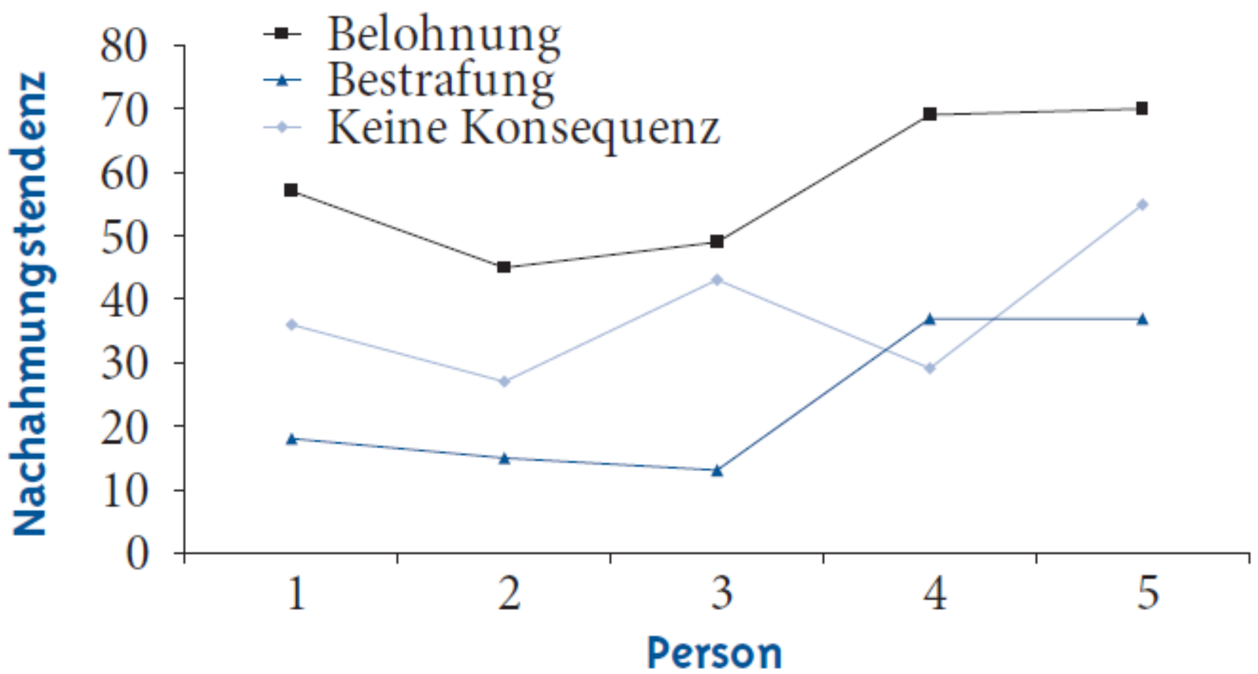

Abbildung 14.1 Graphische Darstellung der Interaktion zwischen Person und Bedingung (Datenbeispiel aus Tab. 14.1)

Zerlegung der Freiheitsgrade

$$df_{\text{tot}} = df_{zwP} + df_{zwA} + df_{\text{Res}}$$

$$df_{zwP} = n - 1 = 5 - 1 = 4$$

$$df_{zwA} = J - 1 = 3 - 1 = 2$$

$$df_{\text{Res}} = (n - 1) \cdot (J - 1) = (5 - 1) \cdot (3 - 1) = 8$$

$$df_{\text{tot}} = df_{zwP} + df_{zwA} + df_{\text{Res}} = 4 + 2 + 8 = 14 = n \cdot J - 1$$

UNIVERSITÄT BERN

Mittlere Quadratsummen

$$MQS_{zwP} = \frac{QS_{zwP}}{df_{zwP}} = \frac{J \cdot \sum_{m=1}^{n} \left(\bar{x}_{m\bullet} - \bar{x}\right)^2}{n-1} = \frac{1128}{4} = 282$$

$$MQS_{zwA} = \frac{QS_{zwA}}{df_{zwA}} = \frac{n \cdot \sum_{j=1}^{J} \left(\bar{x}_{\bullet j} - \bar{x}\right)^2}{J-1} = \frac{2920}{2} = 1460$$

$$MQS_{Res} = \frac{QS_{Res}}{df_{Res}} = \frac{\sum_{j=1}^{J} \sum_{m=1}^{n} \left(x_{mj} - \bar{x}_{\bullet j} - \bar{x}_{m\bullet} + \bar{x}\right)^2}{\left(n-1\right) \cdot \left(J-1\right)} = \frac{484}{8} = 60{,}5$$

F-Test

Empirischer F-Wert für den Bedingungseffekt A:

$$F_{df_{Zähler}=2;\, df_{Nenner}=8} = \frac{MQS_{zwA}}{MQS_{\text{Res}}} = \frac{1460}{60{,}5} = 24{,}13$$

Kritischer F-Wert für den Bedingungseffekt A:

$$F_{0{,}95;df_{Zähler}=2;\, df_{Nenner}=8} = 4{,}46$$

➔ $\boldsymbol{H_0}$ („Keine Mittelwertunterschiede zwischen den Bedingungen a_1, a_2 und a_3“) wird zugunsten der $\boldsymbol{H_1}$ („Die Mittelwerte mindestens zweier Bedingungen unterscheiden sich.“) **abgelehnt**.

UNIVERSITÄT BERN

Varianzanteile (Determinationskoeffizienten)

Varianzanteil des Bedingungseffekts:

$$\hat{\eta}^2 = \frac{QS_{zwA}}{QS_{tot}} = \frac{QS_{zwA}}{QS_{zwA} + QS_{zwP} + QS_{\text{Res}}}$$

$$\hat{\omega}^2 = \frac{df_{zwA} \cdot \left(MQS_{zwA} - MQS_{\text{Res}}\right)}{QS_{tot} + MQS_{zwP}}$$

Partieller Varianzanteil des Bedingungseffekts:

$$\hat{\eta}_p^2 = \frac{QS_{zwA}}{QS_{zwA} + QS_{\text{Res}}}$$

$$\hat{\omega}_p^2 = \frac{df_{zwA} \cdot \left(MQS_{zwA} - MQS_{\text{Res}}\right)}{df_{zwA} \cdot MQS_{zwA} + MQS_{\text{Res}} \cdot \left(n - df_{zwA}\right)}$$

📖 468, 477

UNIVERSITÄT BERN

Ergebnistabelle

Tabelle 14.2 Ergebnistabelle einer einfaktoriellen Varianzanalyse mit Messwiederholung (Datenbeispiel aus Tab. 14.1)

Quelle der Variation	*QS*	*df*	*MQS*	*F*	*p*	$\hat{\eta}^2$	$\hat{\eta}^2_p$
Faktor A	2920	2	1460	24,13	0,0004	0,64	0,86
Person	1128	4	282				
Residuum	484	8	60,5				
Total	4532	14	323,71				

Der signifikante Effekt des Bedingungs-Faktors *A* zeigt an, dass sich **mindestens zwei der Mittelwerte** der Bedingungen „Belohnung“ (a_1), „Bestrafung“ (a_2) und „Keine Konsequenz“ (a_3) **in der Population unterscheiden**, bzw. dass die Wahrscheinlichkeit, dass die gefundenen (oder noch extremere) Mittelwertunterschiede nur zufällig zustande gekommen sind, sehr niedrig ist $(0{,}04\ \%)$.

Welche der Mittelwerte unterscheiden sich signifikant? Dazu brauchen wir wieder **Einzelvergleiche** (z.B. mit Korrektur nach Bonferroni/Šidák/Holm/Tukey), siehe unten ab Folie 29.

b UNIVERSITÄT BERN

Spezielle Annahmen zur Varianz

Man kann zeigen, dass die Varianz von X_{mj} innerhalb einer Bedingung a_j definiert ist als:

$$Var(X_{mj}) = Var(\pi_m) + Var(\varepsilon_{mj}) + Cov(\pi_m, \varepsilon_{mj})$$

Drei zusätzliche Annahmen:

(1) Die zufälligen Personeffekte π_m sind unabhängig und identisch normalverteilt mit $N(0, \sigma_\pi^2)$.

(2) Die Residuen ε_{mj} sind unabhängig und identisch normalverteilt mit $N(0, \sigma_\varepsilon^2)$.

(3) Die Kovarianz der Personeffekte und der Residuen ist gleich 0: $Cov(\pi_m, \varepsilon_{mj}) = 0$.

Daraus folgt, dass die Varianz des Merkmals in allen Faktorstufen identisch sein muss:

$$\sigma_{X_j}^2 = \sigma_\pi^2 + \sigma_\varepsilon^2$$

UNIVERSITÄT BERN

Kovarianz der Faktorstufen

- Messwerte sind über die Faktorstufen hinweg nicht unabhängig voneinander, da sie von den gleichen Personen stammen

- Bei $J = 3$ Faktorstufen drei Kovarianzen: $Cov(X_1, X_2)$, $Cov(X_1, X_3)$, $Cov(X_2, X_3)$

- Varianz-Kovarianzmatrix:

$$\mathbf{\Sigma}_X = \begin{pmatrix} Var(X_1) & Cov(X_2, X_1) & Cov(X_3, X_1) \\ Cov(X_1, X_2) & Var(X_2) & Cov(X_3, X_2) \\ Cov(X_1, X_3) & Cov(X_2, X_3) & Var(X_3) \end{pmatrix}$$

Annahme der Gleichheit der Kovarianzen: Compound Symmetry (CS)

- Annahme unabhängiger Residuen der verschiedenen Bedingungen
  ➔ Kovarianz der Residuen = 0
- Daher nur ein Grund, warum die Messwerte über die Bedingungen hinweg kovariieren: stabile Personenunterschiede
- Da diese über alle Messzeitpunkte konstant sind, müssen alle Kovarianzen gleich sein und der Personvarianz σ_π^2 entsprechen:

Compound-Symmetry- (CS-) Matrix

$$\Sigma_X = \begin{pmatrix} \sigma_\pi^2 + \sigma_\varepsilon^2 & \sigma_\pi^2 & \sigma_\pi^2 \\ \sigma_\pi^2 & \sigma_\pi^2 + \sigma_\varepsilon^2 & \sigma_\pi^2 \\ \sigma_\pi^2 & \sigma_\pi^2 & \sigma_\pi^2 + \sigma_\varepsilon^2 \end{pmatrix}$$

Weniger starke Annahme: Sphärizität (Zirkularität)

> Compound-Symmetry-Annahme sehr streng, insbesondere wenn es sich bei der UV um den Faktor “Zeit” handelt und die Abstände zwischen den Messzeitpunkten unterschiedlich gross sind ➔ Kovarianz umso grösser, je näher die Messzeitpunkte

> Huyn & Feldt: “Sphärische” Varianz-Kovarianzmatrix ausreichend

- Sphärisch (oder zirkulär) = Gleichheit der Varianzen aller Differenzvariablen

  z.B. gibt es bei $J = 3$ Faktorstufen drei Differenzvariablen: $X_1 - X_2$, $X_1 - X_3$, $X_2 - X_3$
- Überprüfung der Sphärizität mit Hilfe des Mauchly-Tests (s.u. Analyse in **R**)
- Index ε_{Box}: Sphärizität gegeben wenn $\varepsilon_{Box} = 1$
- Bei Verletzung der Sphärizitätsannahme Korrektur der Freiheitsgrade des kritischen F-Werts durch Multiplikation mit ε_{Box}
- Je weiter Abweichung von Sphärizität, desto kleiner ε_{Box}, desto stärker also die Korrektur (F-Test wird durch kleinere Freiheitsgrade konservativer, da kritischer F-Wert dann grösser wird)
- Schätzmethoden für ε_{Box}: **Greenhouse-Geisser $\hat{\varepsilon}_{GG}$** und **Huyn-Feldt $\hat{\varepsilon}_{HF}$**
- beide Korrekturmethoden geeignet, $\hat{\varepsilon}_{GG}$ etwas kleiner (korrigiert stärker) als $\hat{\varepsilon}_{HF}$

  Empfehlung: wenn $\hat{\varepsilon}_{GG} > 0{,}75$ ➔ HF; wenn $\hat{\varepsilon}_{GG} < 0{,}75$ ➔ GG

Einfaktorielle Varianzanalyse mit MW in R – Datenstruktur

Daten sind dieselben wie im Beispiel für die Einfaktorielle ANOVA ohne Messwieder-holung.

<u>Einziger Unterschied:</u>

In **`ID`**-Variable jetzt Personen von 1 bis 5 mehrfach vorhanden (3 Messzeitpunkte/ Messbedingungen) pro Person

```
# A tibble: 15 × 3
   ID    aggression bedingung
   <fct>      <dbl> <fct>
 1 1             57 Belohnung
 2 2             45 Belohnung
 3 3             49 Belohnung
 4 4             69 Belohnung
 5 5             70 Belohnung
 6 1             18 Bestrafung
 7 2             15 Bestrafung
 8 3             13 Bestrafung
 9 4             37 Bestrafung
10 5             37 Bestrafung
11 1             36 KeineKonsequenz
12 2             27 KeineKonsequenz
13 3             43 KeineKonsequenz
14 4             29 KeineKonsequenz
15 5             55 KeineKonsequenz
```

UNIVERSITÄT BERN

Einfaktorielle Varianzanalyse mit MW in R – Berechnung und Output

```
library(afex)
anova1MW <- aov_4(aggression ~ 1 + (bedingung | ID), data = df)


summary(anova1MW)

Univariate Type III Repeated-Measures ANOVA Assuming Sphericity

            Sum Sq num Df Error SS den Df F value    Pr(>F)
(Intercept)  24000      1     1128      4  85.106 0.0007673 ***
bedingung     2920      2      484      8  24.132 0.0004087 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1


Mauchly Tests for Sphericity
          Test statistic  p-value
bedingung        0.16392 0.066368
```

Mauchly-Test signifikant ($\alpha = 0{,}10$) ➔ Sphärizität nicht gegeben, F-Test muss korrigiert werden

UNIVERSITÄT BERN

Einfaktorielle Varianzanalyse mit MW in R – Berechnung und Output (Forts.)

```
Greenhouse-Geisser and Huynh-Feldt Corrections
 for Departure from Sphericity

           GG eps Pr(>F[GG])
bedingung 0.54464   0.006082 **

           HF eps Pr(>F[HF])
bedingung 0.59202   0.004569 **
```

Da $\hat{\varepsilon}_{GG} = 0{,}54$ und damit $< 0{,}75$
➔ Greenhouse-Geisser-Korrektur verwenden
➔ Effekt von Bedingung weiterhin signifikant

```
anova1MW$anova_table

Anova Table (Type 3 tests)
Response: aggression
          num Df den Df    MSE      F     ges   Pr(>F)
bedingung 1.0893 4.3571 111.08 24.132 0.64431 0.006082 **
```

$df_{1(GG)} = df_1 \cdot \hat{\varepsilon}_{GG} = 2 \cdot 0{,}54464 = 1{,}0893$
$df_{2(GG)} = df_2 \cdot \hat{\varepsilon}_{GG} = 8 \cdot 0{,}54464 = 4{,}3571$

$\hat{\eta}^2 = QS_{zwA}/QS_{tot} = 2920/4532$

UNIVERSITÄT BERN

Post-hoc-Einzelvergleiche

Einzelvergleichstests entsprechen t-Tests für abhängige Stichproben:

$$t = \frac{\bar{x}_{\bullet j} - \bar{x}_{\bullet j\prime}}{\sqrt{\frac{\sum_{m=1}^{n}\left(\left(x_{mj} - x_{mj\prime}\right) - \left(\bar{x}_{\bullet j} - \bar{x}_{\bullet j\prime}\right)\right)^2}{(n-1)\cdot n}}}$$

④ ⇒ SE der MW-Differenz

② ⇒ Varianz der Differenzvariable

③ ⇒ Varianz der MW-Differenz

① Quadratsumme der Differenzvariable

Differenzvariable

Bestrafung (a_2)	Keine Konsequenz (a_3)	$x_{m2} - x_{m3}$
18	36	$18 - 36 = \mathbf{-18}$
15	27	$15 - 27 = \mathbf{-12}$
13	43	$13 - 43 = \mathbf{-30}$
37	29	$37 - 29 = \mathbf{8}$
37	55	$37 - 55 = \mathbf{-18}$
24	38	$\bar{x}_{\bullet 2} - \bar{x}_{\bullet 3} = \mathbf{-14}$

Beispiel: Bestrafung (a_2) vs. Keine Konsequenz (a_3)

$$t = \frac{\bar{x}_{\bullet 2} - \bar{x}_{\bullet 3}}{\sqrt{\frac{\sum_{m=1}^{n}\left(\left(x_{m2} - x_{m3}\right) - \left(\bar{x}_{\bullet 2} - \bar{x}_{\bullet 3}\right)\right)^2}{(5-1)\cdot 5}}} = \frac{24 - 38}{\sqrt{\frac{\left(-18-(-14)\right)^2 + \cdots + \left(-18-(-14)\right)^2}{4\cdot 5}}}$$

$$= \frac{-14}{\sqrt{\frac{16+4+256+484+16}{20}}} = \frac{-14}{6{,}229} = -2{,}248 \qquad df = n - 1 = 4$$

Kritische t-Werte (ohne α-Adjustierung):

$t_{(0{,}025;4)} = -2{,}7764$

$t_{(0{,}975;4)} = 2{,}7764$

Test nicht signifikant, da $t = -2{,}248$ nicht im kritischen Bereich

UNIVERSITÄT BERN

Einfaktorielle Varianzanalyse mit MW in R – Post-hoc-Einzelvergleiche

1. „Estimated Marginal Means"-Objekt erstellen mit **emmeans**

```
library(emmeans)

result1MW <- emmeans(object = anova1MW, specs = ~ bedingung)
```

2. Post-hoc-Einzelvergleiche für Bedingung (ohne/mit Tukey-Adjustierung)

```
pairs(x = result1MW, adjust = "none")
contrast                         estimate   SE df t.ratio p.value
Belohnung - Bestrafung                 34 1.58  4  21.503  <.0001
Belohnung - KeineKonsequenz            20 5.59  4   3.575  0.0233
Bestrafung - KeineKonsequenz          -14 6.23  4  -2.248  0.0879

pairs(x = result1MW, adjust = "tukey")
contrast                         estimate   SE df t.ratio p.value
Belohnung - Bestrafung                 34 1.58  4  21.503  0.0001
Belohnung - KeineKonsequenz            20 5.59  4   3.575  0.0495
Bestrafung - KeineKonsequenz          -14 6.23  4  -2.248  0.1760
```

UNIVERSITÄT BERN

Kontrastanalyse

Kontraste werden wie bei der einfaktoriellen Varianzanalyse ohne Messwiederholung als «massgeschneiderte MW-Vergleiche» spezifiziert

Populationsmodell:

$$\Lambda = \sum_{j=1}^{J} K_j \cdot \mu_{\bullet j}$$

Stichprobenmodell:

$$L = \sum_{j=1}^{J} K_j \cdot \bar{x}_{\bullet j}$$

t-Test der Kontrastanalyse wird über eine Verallgemeinerung der Formel für die Post-hoc-Einzelvergleiche berechnet:

$$t_{Kontrast} = \frac{\sum_{j=1}^{J} K_j \cdot \bar{x}_{\bullet j}}{\sqrt{\frac{\sum_{m=1}^{n}\left(\left(\sum_{j=1}^{J} K_j \cdot x_{mj}\right) - \left(\sum_{j=1}^{J} K_j \cdot \bar{x}_{\bullet j}\right)\right)^2}{(n-1) \cdot n}}}$$

Quadratsumme der Kontrastvariable ①

④ ⇒ SE des Kontrasts

② ⇒ Varianz der Kontrastvariable

⇒ Varianz des Kontrasts ③

$$df = n - 1$$

UNIVERSITÄT BERN

Polynomiale Trendkontraste

- Bei Modellen mit Messwiederholung besonders relevant
- Nur bei quantitativer Bedingungsvariable (z.B. Zeit) möglich
  - **Linearer Trend:** lineare Zunahme/Abnahme der Mittelwerte (über die Zeit)
  - **Quadratischer Trend:** Abschwächung der Zunahme/ Abnahme über die Zeit (U-förmiger und umgekehrt U-förmiger Verlauf)
  - **Kubischer Trend:** Zickzack-Verlauf
  - Polynomiale Trends höherer Ordnung: quartisch, quintisch etc.
    - ➔ müssen paarweise orthogonal sein und Summe der Kontrastkoeffizienten = 0
    - ➔ linearer Trend ab 2 Gruppen möglich, quadratischer Trend ab 3 Gruppen etc.

Stufen	Effekt	K_1	K_2	K_3	K_4
$J = 2$	linear	−1	+1		
$J = 3$	linear	−1	0	+1	
	quadratisch	+1	−2	+1	
$J = 4$	linear	−3	−1	+1	+3
	quadratisch	+1	−1	−1	+1
	kubisch	−1	+3	−3	+1

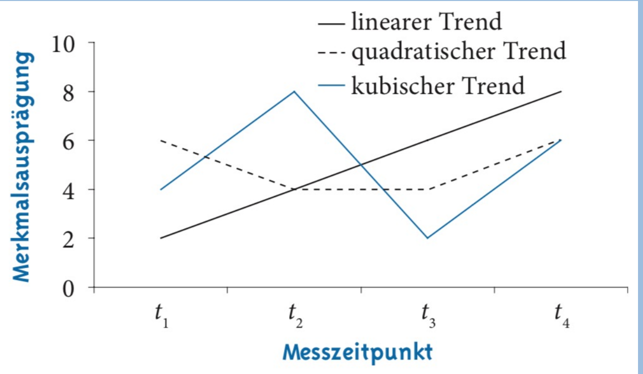

Abbildung 14.4 Set polynomialer Trends bei $J = 4$ Messzeitpunkten

Polynomiale Trendkontraste: Beispiel

Person m	t_1: Beginn des Schuljahres	t_2: 3 Monate später	t_3: 6 Monate später
1	18	15	15
2	15	16	14
3	17	16	17
4	16	14	15
5	16	19	17
6	19	14	15
7	15	12	13
8	14	15	13
Mittelwert $\bar{x}_{\bullet j}$	16,25	15,125	14,875

Linearer Kontrast (-1, 0, 1)	Quadrat. Kontrast (1, -2, 1)
$-18+0+15=-\mathbf{3}$	$18-30+15=\ \mathbf{3}$
$-15+0+14=-\mathbf{1}$	$15-32+14=-\mathbf{3}$
$-17+0+17=\ \mathbf{0}$	$17-32+17=\ \mathbf{2}$
$-16+0+15=-\mathbf{1}$	$16-28+15=\ \mathbf{3}$
$-16+0+17=\ \mathbf{1}$	$16-38+17=-\mathbf{5}$
$-19+0+15=-\mathbf{4}$	$19-28+15=\ \mathbf{6}$
$-15+0+13=-\mathbf{2}$	$15-24+13=\ \mathbf{4}$
$-14+0+13=-\mathbf{1}$	$14-30+13=-\mathbf{3}$
$L_{Lin}=-\mathbf{1{,}375}$	$L_{Quad}=\mathbf{0{,}875}$

$$t_{Lin}=\frac{(-1)\cdot\bar{x}_{\bullet 1}+0\cdot\bar{x}_{\bullet 2}+1\cdot\bar{x}_{\bullet 3}}{\sqrt{\frac{[-3-(-1{,}375)]^2+\ \dots+[-1-(-1{,}375)]^2}{7\cdot 8}}}=\frac{-16{,}25+14{,}875}{\sqrt{\frac{17{,}875}{56}}}=\frac{-1{,}375}{0{,}5650}=-2{,}434$$

$$t_{Quad}=\frac{1\cdot\bar{x}_{\bullet 1}+(-2)\cdot\bar{x}_{\bullet 2}+1\cdot\bar{x}_{\bullet 3}}{\sqrt{\frac{(3-0{,}875)^2+\ \dots+(-3-0{,}875)^2}{7\cdot 8}}}=\frac{16{,}25-30{,}25+14{,}875}{\sqrt{\frac{110{,}875}{56}}}=\frac{0{,}875}{1{,}4071}=0{,}622$$

Kritische t-Werte (ohne α-Adjustierung):

$t_{(0{,}025;7)}=-2{,}3646$

$t_{(0{,}975;7)}=2{,}3646$

➔ linearer Trend *sig.*

➔ quadr. Trend *ns*

Diese Formeln (auch die für Post-hoc-Einzelvergleiche) sind für den Fall, dass **keine Sphärizität gegeben** ist. Sie sind aber die Standardformeln in Statistikprogrammen, da Kontraste besonders sensitiv auf die Verletzung der Sphärizitätsannahme reagieren.

Bei (wirklich) **gegebener Sphärizität** können andere Tests angewendet werden, die in diesem Fall teststärker sind. Ausserdem gilt nur für diese (als F-Tests formulierte) Tests, dass die Summe der $QS_{Kontrast}$ eines Sets orthogonaler Kontraste die QS_{zwA} der RM-ANOVA ergibt. Für die polynomialen Trendkontraste gilt kann dann Formel F 14.52 (🕮 428) verwendet werden.

Polynomiale Trends zur RM-ANOVA in R – Datenstruktur

```
# A tibble: 24 × 3
   ID    lernmotivation zeit
   <fct>          <dbl> <fct>
 1 1                 18 Beginn
 2 2                 15 Beginn
 3 3                 17 Beginn
 4 4                 16 Beginn
 5 5                 16 Beginn
 6 6                 19 Beginn
 7 7                 15 Beginn
 8 8                 14 Beginn
 9 1                 15 Drei_Monate
10 2                 16 Drei_Monate
11 3                 16 Drei_Monate
12 4                 14 Drei_Monate
13 5                 19 Drei_Monate
14 6                 14 Drei_Monate
15 7                 12 Drei_Monate
16 8                 15 Drei_Monate
17 1                 15 Sechs_Monate
18 2                 14 Sechs_Monate
19 3                 17 Sechs_Monate
20 4                 15 Sechs_Monate
21 5                 17 Sechs_Monate
22 6                 15 Sechs_Monate
23 7                 13 Sechs_Monate
24 8                 13 Sechs_Monate
```

Polynomiale Trends zur RM-ANOVA in R – `aov_4() + emmeans() + contrast(method = "poly")`

```
lernenMW <- aov_4(lernmotivation ~ 1 + (zeit | ID), data = df)

lerntrend <- emmeans(object = lernenMW, specs = ~ zeit)

contrast(object = lerntrend, method = "poly", adjust = "none")

 contrast  estimate    SE df t.ratio p.value
 linear      -1.375 0.565  7  -2.434  0.0452
 quadratic    0.875 1.407  7   0.622  0.5537

contrast(object = lerntrend, method = "poly", adjust = "sidak")

 contrast  estimate    SE df t.ratio p.value
 linear      -1.375 0.565  7  -2.434  0.0883
 quadratic    0.875 1.407  7   0.622  0.8009

 P value adjustment: sidak method for 2 tests
```

ns nach Šidák-Korrektur