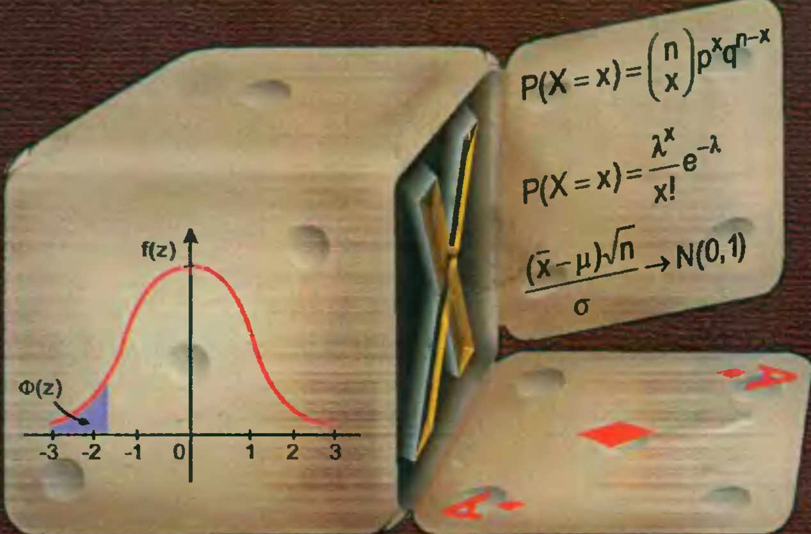
RUFINO MOYA C.
GREGORIO SARAVIA A.



PROBABILIDAD E INFERENCIA ESTADISTICA

PROBABILIDAD

E

INFERENCIA ESTADÍSTICA

SEGUNDA EDICIÓN

RUFINO MOYA C.
Facultad de Ciencias Naturales y Matemática.
Universidad Nacional del Callao, Perú.

GREGORIO SARAVIA A.
Departamento de Estadística.
Universidad Federal de Minas Gerais, Brasil.

PROBABILIDAD E INFERENCIA ESTADÍSTICA

Rufino Moya C.
Gregorio Saravia A.

Impreso en Perú — Printed in Peru

Hecho el depósito legal, Ley Nº 26905

Composición y Diagramación: Rufino Moya C.
Montaje: **Editorial San Marcos**
RUC: 11029221

PRÓLOGO A LA SEGUNDA EDICIÓN

El deseo de mejorar el contenido y la exposición pedagógica de la primera edición nos ha llevado a preparar ésta. Los consejos de algunos colegas y la experiencia con la primera edición ha permitido escribir este, que esperamos constituya un mejor texto. Asimismo esperamos que las adiciones e innovaciones contribuya a conseguir estos objetivos.

Esta versión presenta el mismo esquema de la primera edición. Así, por la diversidad de sus ejemplos y problemas propuestos este libro será de gran ayuda a estudiantes de Estadística, Ingeniería, Economía, Biología, Ciencias, etc. Y consta de 9 capítulos, los 6 primeros tratan el cálculo de probabilidades. Éstos abarcan la probabilidad, aquí se ha introducido nociones de la teoría de confiabilidad; las variables aleatorias; las distribuciones de probabilidad discretas y continuas. En las distribuciones discretas se consideran también la multinomial y una generalización de la hipergeométrica. Los capítulos 7, 8 y 9 abordan la inferencia estadística.

Muchas personas han colaborado para la existencia de este libro. Destacan: VALENTÍN R. VEGA SALAS gerente general de Editorial Ciencias por per-

mitirnos usar libremente su taller y brindado todas las facilidades; NANCY PEÑA HUERTA secretaria de Editorial Ciencias en el mecanografiado del original; AMÉRICO CULQUE CARRILLO estudiante de la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad Nacional del Callao en la difícil tarea de corrección del mecanografiado y el montaje; Lic. en matemática ARMANDO VENERO B. quien estuvo siempre dispuesto a colaborar desinteresadamente en las gráficas y con sus consejos; ANIBAL PAREDES GALVÁN por haber aceptado el reto de Editar este texto.

También expresamos nuestro agradecimiento a todos los colegas de las diferentes Universidades del país que nos han honrado al utilizar la primera Edición, especialmente a JUAN BAZAN BACA, SERGIO LEYVA HARO, RICARDO POMALAYA Y ROLANDO M. CANALES DEL MAR profesores de la Universidad Nacional del Callao. Finalmente, en cuanto a los errores hemos tratado de corregirlos todos, sin embargo suponemos que se nos ha pasado algunos, así que cuando los encuentre escríbenos a la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad arriba mencionada.

Rufino Moya C.
Gregorio Saravia A.

CONTENIDO

1

PROBABILIDAD

1.1 INTRODUCCION

Es difícil exagerar la importancia de la teoría de probabilidades; en muchos problemas de Ingeniería, Administración, Economía etc. necesitamos tomar decisiones frente a la incertidumbre. Para un Ingeniero posiblemente no tenga sentido el preguntarse: ¿Durante cuánto tiempo funcionará un determinado mecanismo?; pero si tendrá sentido el preguntarse y responder a la pregunta. ¿Cuál es la probabilidad que este mecanismo funcione más de 100 horas? o, ¿qué porcentaje de estos mecanismos funcionarán más de 100 horas?. Para un fabricante a gran escala tendrá sentido el preguntarse que porcentaje de sus productos serán aceptados en el mercado. A un candidato presidencial posiblemente no le interesa que Juan vote por él, pero si le interesará saber el porcentaje de electores que votarán por él.

En la mayoría de los problemas hay que tomar decisiones con base en experimentos. En este capítulo estudiaremos primero los experimentos aleatorios, luego a manera de pre-requisito recordar la teoría intuitiva de conjuntos, el análisis combinatorio; finalmente el concepto de probabilidad, sus propiedades y aplicaciones.

1.2 EXPERIMENTO ALEATORIO, ESPACIO MUESTRAL Y EVENTOS

1.2.1 EXPERIMENTO ALEATORIO

Los experimentos u operaciones reales o hipotéticos pueden dividirse - en dos clases: determinísticos y no determinísticos.

Un experimento es determinístico, si los resultados del experimento están completamente determinado y puede describirse por una ***fórmula matemática*** llamado tambien ***modelo determinístico***. Así, los siguientes ejemplos

(a) "Soltar una piedra en el aire"

(b) "Lanzar una pelota en un tanque de agua y ver si flota o se hunde". Son experimentos determinísticos, pues en el primer caso la piedra caerá,- aun más su movimiento se describe por las ecuaciones de caida libre, en el segundo caso la pelota flotará. También el siguiente experimento es determinístico .

(c) A un cuerpo de masa m en reposo, se somete a una fuerza constante F. El cuerpo se moverá con una aceleración constante

$$a = \frac{F}{m} \qquad \text{(segunda ley de Newton)}$$

Un experimento es no determinístico Si los resultados del experimento no puede predecirse con exactitud antes de realizar el experimento.

EJEMPLO 1

ε_1: Lanzar una moneda y observar la cara superior (C = cara , S = sello)

ε_2: Lanzar un dado y observar el número que aparece en la cara superior.

El lector habrá notado algunos aspectos comunes de los experimentos - descritos. Estos son :

(a) Cada experimento puede repetirse indefinidamente sin cambiar esencialmente las condiciones.

(b) Cada experimento es no determinístico.

(c) Cada experimento tiene varios resultados posibles que pueden describirse de antemano con precisión, por, ejemplo en ε_1 tal conjunto es $\{C,S\}$, en ε_2 es $\{1,2,3,4,5,6\}$.

EXPERIMENTOS ALEATORIOS Son experimentos que tienen las tres propiedades - (a), (b) y (c) antes mencionados.

EJEMPLO 2 Los experimentos ε_1 y ε_2 del ejemplo 1 y los siguientes, son experimentos aleatorios:

ε_3 : Extraer un artículo de un lote que contiene artículos defectuosos "D"- y no defectuosos "N".

ε_4 : Designar un delegado de un grupo de 50 personas.

ε_5 : Contar el número de automóviles que cruzan la intersección de dos calles, hasta, antes que ocurra un accidente.

ε_6 : Fabricar artículos, hasta producir 5 defectuosos y contar el número total de artículos fabricados.

ε_7 : Contar el número de vehículos que llegan a una estación de servicio en un día.

ε_8 : Elegir un punto del intervalo cerrado $[0,1]$

ε_9 : Observar el tiempo de vida de un artefacto eléctrico.

ε_{10} : De una urna que contiene bolas blancas y negras se escoge una y se anota su color.

ε_{11}: Verificar el estado de un transistor (0 = apagado, 1 = prendido)

1.2.2 ESPACIO MUESTRAL

Hemos dicho que cada experimento aleatorio tiene varios resultados posibles y que podemos describir con precisión el conjunto de estos resultados posibles. ***Llamaremos espacio muestral asociado a un experimento aleatorio*** ε***, al conjunto de todos los resultados posibles de dicho experimento aleatorio*** y lo denotaremos por Ω. Así, por ejemplo, los espacios muestrales asociados a los respectivos experimentos del ejemplo 2, son:

Experimento :	Conjunto de resultados posibles = Espacio muestral
ε_1 :	$\Omega_1 = \{C, S\}$, C = Cara y S = Sello .
ε_2 :	$\Omega_2 = \{1,2,3,4,5,6\}$.
ε_3 :	$\Omega_3 = \{D, N\}$.
ε_4 :	$\Omega_4 = \{A_1, A_2, \ldots , A_{50}\}$; A_i representa una persona: Pedro, Juan , Rosa , Alberto etc.
ε_5 :	$\Omega_5 = \{0,1,2,3,4,\ldots \}$
ε_6 :	$\Omega_6 = \{5,6,7,8,9,10,\ldots \}$.
ε_7 :	$\Omega_7 = \{0,1,2,\ldots\}$.
ε_8 :	$\Omega_8 = \{x \in \mathbb{R} / 0 \leqslant x \leqslant 1\}$.
ε_9 :	$\Omega_9 = \{t \in \mathbb{R} / t \geqslant 0\}$.
ε_{10}:	$\Omega_{10} = \{b , n\}$, b = blanca, n = negra.
ε_{11}:	$\Omega_{11} = \{0,1\}$.

El experimento simple del lanzamiento de un dado, una moneda o la extracción de una bola de una urna, son modelos que nos permitirán una mejor exposición, pero es claro que cada uno de estos modelos tiene diferentes versiones; por ejemplo en el caso de la urna; podemos concebir la elección de una persona entre un grupo de hombres y mujeres que están en una sala; la urna es reemplazada por la sala; o puede referirse a un almacén en el cual se encuentran artículos procedentes de una línea de producción, la cual arroja el 5% de defectuosos **D** (bolas blancas) y el 95% de no defectuosas **N** (bolas negras); en este caso evidentemente el papel de la urna es desempeñado por el almacén. Igualmente el lanzamiento de una moneda nos servirá de modelo para luego aplicarlo, por ejemplo, al lanzamiento de un cohete, el funcionamiento de la válvula de un motor, etc.

Cuando el experimento aleatorio es *simple* como en el caso de los experimentos dados en el ejemplo 2, mayormente no hay dificultad en determinar el espacio muestral, pero cuando el experimento es compuesto, en algunos casos es un poco complicado.

Un experimento se dice que es compuesto, si consiste de dos o más experimentos simples sucesivos o simultáneos.

Consideremos dos tipos básicos de experimentos compuestos: aquellos, en que los experimentos simples están unidos por la partícula gramatical "o" en el sentido excluyente y aquellos donde los experimentos simples están unidos por la partícula gramatical "y".

1.2.3 EXPERIMENTOS UNIDOS POR LA O EXCLUYENTE

Un experimento compuesto ε, se dice que es una *o-combinación* de los experimentos simples, ε_1 y ε_2 si, sólo si el experimento ε ocurre, cuando el experimento ε_1 ó ε_2 ocurre (pero no ambos).

EJEMPLO 3 Considere el experimento, que consiste en lanzar un dado o una moneda. Hallar el espacio muestra para este experimento.

SOLUCION Observe que el experimento ε consiste de dos experimentos simples unidos por la "o" excluyente. Sean:

ε_1 : "Lanzar un dado"; luego, $\Omega_1 = \{1,2,3,4,5,6\}$

ε_2 : "Lanzar una moneda"; entonces, $\Omega_2 = \{C,S\}$

y $\varepsilon = \varepsilon_1$ ó ε_2. Por lo tanto, el espacio muestral Ω asociado a ε es la unión de Ω_1 y Ω_2. Es decir, $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 = \{1,2,3,4,5,6,C,S\}$

1.2.4 EXPERIMENTOS UNIDOS POR LA Y

Un experimento compuesto ε, se dice que es una ***y-combinación*** de los experimentos simples ε_1 y ε_2, sí y solamente si, el experimento ε ocurre, cuando ambos experimentos ε_1 y ε_2 ocurren.

CONSECUENCIA Si el experimento compuesto ε es una y-combinación de los experimentos ε_1 y ε_2, el espacio muestral Ω asociado a ε es el producto cartesiano de los espacios muestrales Ω_1 y Ω_2 correspondientes a ε_1 y ε_2 respectivamente. Es decir $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$.

EJEMPLO 4 Se lanza una moneda tres veces. Hallar el espacio muestral asociado a este experimento.

SOLUCION Observe que el experimento ε consiste de tres experimentos simples unidos por la "y". En otras palabras el experimento ε ocurre, si los tres - experimentos simples ocurren. Sea ε_i, $i = 1,2,3$, el experimento: "el i-ésimo lanzamiento de la moneda".

ε_1 : el primer lanzamiento; $\Omega_1 = \{C,S\}$.
ε_2 : el segundo lanzamiento; $\Omega_2 = \{C,S\}$.
ε_3 : el tercer lanzamiento ; $\Omega_3 = \{C,S\}$.

Así, ε consiste en efectuar primero ε_1, seguido de ε_2 y finalmente ε_3. Por lo tanto, el espacio muestral Ω asociado a ε es igual al producto cartesiano de los Ω_i, $i = 1,2,3$. Es decir,

$$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \Omega_3 = \{(x,y,z) \ / \ x,\ y,\ z = C,S\}$$
$$= \{CCC, CCS, CSC, SCC, CSS, SCS, SSC, SSS\}$$

Si el experimento compuesto consta de dos experimentos simples, una ***Tabla con dos entradas*** es de gran ayuda para construir el espacio muestral como se muestra en los ejemplos 5 , 6 y 7.

EJEMPLO 5 Se lanzan dos monedas simultáneamente y se observan las secuencias de caras y sellos.

Una tabla de dos entradas es la siguiente,

Primera moneda \ Segunda moneda	C	S
C	CC	CS
S	SC	SS

Entonces, el espacio muestral es, $\Omega = \{CC, CS, SS, SC\}$

Observe que el espacio muestral del experimento puede escribirse, como un conjunto de pares ordenados así,

$$\Omega = \{(x,y) \ / \ x = C \text{ ó } S, \ \ y = C \text{ ó } S\}$$

Es decir, si $\Omega_1 = \{C,S\}$ y $\Omega_2 = \{C,S\}$. Entonces ,

$$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \quad \text{(Producto Cartesiano)}$$

EJEMPLO 6 Se lanzan una moneda y un dado simultáneamente y se observan las caras superiores .

La tabla de dos entradas es como sigue,

moneda \ dado	1	2	3	4	5	6
C	(C,1)	(C,2)	(C,3)	(C,4)	(C,5)	(C,6)
S	(S,1)	(S,2)	(S,3)	(S,4)	(S,5)	(S,6)

El espacio muestral de este experimento es,

$$\Omega = \{(C,1),(C,2),(C,3),(C,4),(C,5),(C,6),(S,1),(S,2),(S,3),(S,4),(S,5),(S,6)\}$$

EJEMPLO 7 Se lanzan dos dados simultáneamente y se observan las caras superiores.

La tabla siguiente presenta los resultados posibles del experimento.

Primer dado \ Segundo dado	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Entonces, el espacio muestral de este experimento es,

$$\Omega = \left\{\begin{array}{l}(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6)\\(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6)\\(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6)\\(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6)\\(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6)\\(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\end{array}\right\}$$

Observe, que Ω puede escribirse como un conjunto de pares ordenados, así

$$\Omega = \{(x,y) \ / \ x,y = 1,2,...,6\}$$

esto es, si $\Omega_1 = \{1,2,3,4,5,6\}$ y $\Omega_2 = \{1,2,3,4,5,6\}$. Entonces,

$$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2.$$

EJEMPLO 8 Se tiene una caja con 10 artículos diferentes. Se extraen 4 artículos, de uno en uno*, con reemplazamiento**. Describir el espacio muestral asociado a este experimento.

SOLUCION Sea $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{10}$ los diez artículos diferentes de la caja. Al hacer la primera extracción, puede,salir cualquiera de los 10 artículos. Es decir,

$$\Omega_1 = \{a_1, a_2, \ldots, a_{10}\}.$$

Al hacer la segunda extracción, puede salir otra vez cualquiera de los 10 artículos, ya que el primero fue devuelto a la caja. Entonces,

$$\Omega_2 = \{a_1, a_2, \ldots, a_{10}\}.$$

Así, sucesivamente, es claro que en la tercera extracción obtenemos,

$$\Omega_3 = \{a_1, a_2, \ldots, a_{10}\}.$$

y en la cuarta

$$\Omega_4 = \{a_1, a_2, \ldots, a_{10}\}.$$

Es decir, $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega_3 = \Omega_4$. Entonces,

$$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \Omega_3 \times \Omega_4 = \Omega_1^4$$

$$= \{(u,v,x,y) \ / \ u,v,x,y = a_1, a_2, \ldots, a_{10}\}.$$

* Se dice también que hemos extraído una muestra de tamaño 4. (En general si se extrae n artículos se dice que hemos extraído una muestra de tamaño n).

** Se dice que la extracción se hace con reemplazamiento (o que la muestra se extrae con reemplazamiento), si después de cada extracción se registra el artículo y se devuelve a la caja.

EJEMPLO 9 Hay tres tiendas de víveres en una pequeña ciudad (numeradas 1,2, 3). Cuatro damas que viven en el poblado seleccionan al azar, y en forma independiente, una tienda para hacer sus compras sin salir de la ciudad. Dar un espacio muestral para el experimento que consiste en seleccionar las tiendas.

SOLUCION Desde que las tiendas estan numeradas con 1,2,3 y cada dama escoge una de estas tiendas al azar y en forma independiente, entonces, la primera dama escogerá al azar uno de los elementos del conjunto {1,2,3}. La segunda dama escogerá al azar uno de los elementos del mismo conjunto {1,2,3}. La tercera dama escogerá al azar uno de los elementos también del mismo conjunto {1,2,3} y finalmente la cuarta dama también escogerá al azar uno de los elementos del conjunto {1,2,3}. Por lo tanto, la elección de una tienda por las cuatro damas tendrá como espacio muestral

$$\Omega = \{1,2,3\} \times \{1,2,3\} \times \{1,2,3\} \times \{1,2,3\} = \{1,2,3\}^4$$

ó $\Omega = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \,/\, x_i = 1,2,3,\ i = 1,2,3,4\}$.

EJEMPLO 10 Considere el experimento de verificar el estado (apagado, prendido) de cinco transistores iguales.

Utilizando los números 0 (cero) para "apagado" y 1 para "prendido", escribir los elementos del espacio muestral.

SOLUCION El resultado de verificar el primer transistor puede ser 0 ó 1;el resultado de verificar el segundo transistor también puede ser 0 ó 1; así sucesivamente. Entonces, el espacio muestral del experimento, verificar el estado de 5 transistores es

$$\Omega = \{0,1\}^5 = \{(x,y,z,w,v)/x,y,z,w,v = 0,1\}.$$

En muchos casos un diagrama, conocido con el nombre de ***diagrama del árbol***, es más sugerente para determinar el espacio muestral de un experimento aleatorio compuesto, por ejemplo construir el espacio muestral asociado al lanzamiento de una moneda cuatro veces y observar la secuencia de caras y sellos. El diagrama del árbol es como se muestra en la fig. 1.2.1.
Observe, que cada uno de los resultados posibles del experimento queda representado por una rama del árbol, así CCCC representa la primera rama,CCCS la segunda rama, así sucesivamente, SSSS la última rama. El espacio muestral es

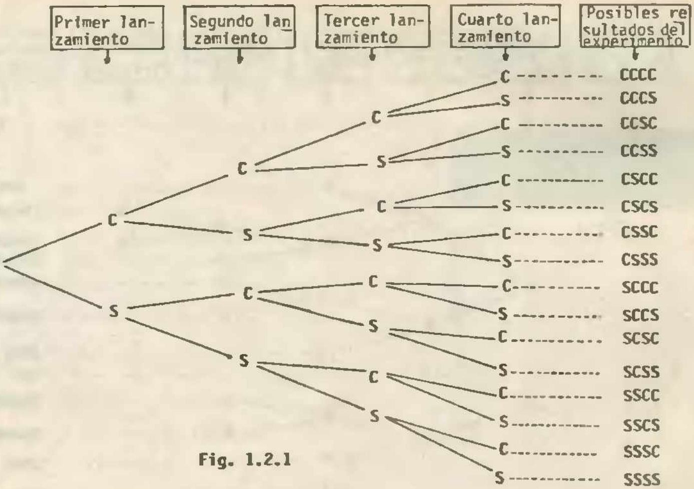


Fig. 1.2.1

$$\Omega = \begin{Bmatrix} CCCC\ ,\ CCCS\ ,\ CCSC\ ,\ CCSS\ ,\ CSCC\ ,\ CSCS\ ,\ CSSC\ ,\ CSSS \\ SCCC\ ,\ SCCS\ ,\ SCSC\ ,\ SCSS\ ,\ SSCC\ ,\ SSCS\ ,\ SSSC\ ,\ SSSS \end{Bmatrix}$$

o también

$$\Omega = \{(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)\ /\ x_1,\ x_2\ ,\ x_3\ ,\ x_4 = C \text{ ó } S\}$$

EJEMPLO 11 Los artículos provenientes de una línea de producción se clasifican en defectuosos "D" y no defectuosos "N", se observan los artículos y se anota su condición. Este proceso se continua hasta observar dos defectuosos consecutivos o hasta que se observen tres artículos no defectuosos. Describir el espacio muestral asociado a este experimento.

SOLUCION El diagrama del árbol que representa los diversos resultados posibles del experimento está representado en la fig. 1.2.2.

El espacio muestral, entonces es

$$\Omega = \{DD\ ,\ DNDD\ ,\ DNDNDD\ ,\ DNDNDN\ ,\ DNDNN\ ,\ DNNDD\ ,\ DNNDN\ ,\ DNNN\ ,\ NDD\ ,\ NDNDD\ ,\ NDNDN\ ,\ NDNN\ ,\ NNDD\ ,\ NNDN\ ,\ NNN\}$$

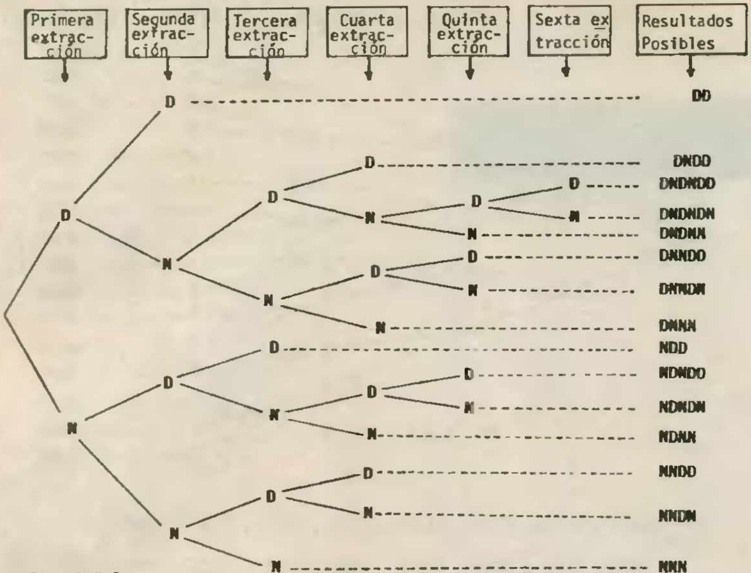


Fig. 1.2.2

EJEMPLO 12 Una línea de producción clasifica sus productos en defectuosos "D" y no defectuosos "N". De un almacén que guarda la producción diaria de esta línea se extraen artículos hasta observar dos defectuosos consecutivos o hasta que se hayan verificado cuatro artículos; construir el espacio muestral de este experimento.

SOLUCION El diagrama 1.2.3 muestra el diagrama del árbol que presenta los diversos resultados posibles del experimento.
El espacio muestral es

$$\Omega = \{DD , DNDD , DNDN , DNND , DNNN , NDD , NDND , NDNN , NNDD , NNDN , NNND , NNNN\}$$

Entre los espacios muestrales construídos para los experimentos dados en el ejemplos 2, podemos notar una diferencia entre $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Omega_4$ y $\Omega_5, \Omega_6, \Omega_7$ los primeros son finitos y los segundos no, más aún entre todos estos espacios muestrales y los conjuntos Ω_8 , Ω_9 que además de ser infinitos tienen - un número no numerable de elementos, es decir no podemos contar sus elementos. Estableceremos pues dos tipos de espacios muestrales: Discretos y Continuos.

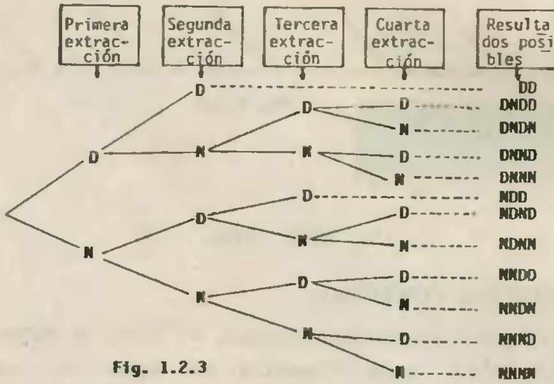


Fig. 1.2.3

1.2.5 ESPACIO MUESTRAL DISCRETO

Si tienen un número finito o infinito numerable de elementos.

(*i*) ***Espacios Muestrales Discretos Finitos*** Si el espacio muestral tiene un número finito de elementos por ejemplo Ω_1, Ω_2, Ω_3, Ω_4, Ω_{10}; los espacios muestrales dados por los ejemplos 3,4,5,6 y 7 también son espacios muestrales finitos. Otro ejemplo es el siguiente.

EJEMPLO 13 Un lote compuesto de n artículos provenientes de una línea de producción contiene m artículos defectuosos ($m \leq n$). Los artículos son extraídos uno por uno(sin reemplazamiento) hasta que el último artículo defectuoso sea extraido. Hallar el espacio muestral para este experimento.

SOLUCION El número de artículos extraídos será m o m+1 artículos, o m+2 etc. Entonces, el espacio muestral es

$$\Omega = \{m, m+1, m+2, \ldots, n\}.$$

(*ii*) ***Espacios Muestrales Discretos Infinitos*** Cuando puede establecerse una correspondencia uno a uno con el conjunto de los enteros positivos de modo que pueda ser enumerado como 1,2,3,... Por ejemplo Ω_5, Ω_6 y Ω_7. Otro ejemplo es el siguiente.

EJEMPLO 14 Lanzar una moneda hasta que ocurra cara.
El diagrama del árbol para este experimento da la figura 1.2.4.

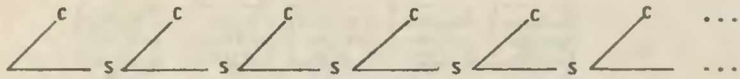


Fig. 1.2.4

Entonces, el espacio muestral es

$$\Omega = \{C, SC, SSC, SSSC, SSSSC, \ldots\}.$$

1.2.6 ESPACIO MUESTRAL CONTINUO

Un espacio muestral se dice que es continuo, si tiene un número no numerable de elementos. Es decir, cuyos elementos son todos los puntos de algún intervalo. Son espacios muestrales contínuos Ω_8 y Ω_9; también el ejemplo que sigue.

EJEMPLO 15 En un laboratorio químico, el volumen producido por día para un producto particular varía entre un valor mínimo, a, y un valor máximo, b, los cuales corresponden a la capacidad. Se escoge un día aleatoriamente y se observa la cantidad producida. Escribir el espacio muestral. El espacio muestral es entonces

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R} \ / \ a \leq x \leq b\}.$$

Debe observarse también que a un experimento aleatorio podemos asociar más de un espacio muestral; es decir, de acuerdo a la característica del fenómeno que deseamos estudiar, un experimento aleatorio puede tener diferentes espacios muestrales. Por ejemplo, en el experimento lanzar tres monedas simultáneamente, si estamos interesados en la secuencia de caras y sellos que aparecen, el espacio muestral es

$$\Omega = \{CCC, CCS, CSC, SCC, CSS, SCS, SSC, SSS\}.$$

en cambio si estamos interesados en el número de caras que sale, el espacio muestral es

$$\Omega = \{0, 1, 2, 3\}.$$

1.2.7 EVENTOS

Hemos definido el espacio muestral como el conjunto de todos los resultados posibles de un experimento aleatorio. Es decir, podemos concebir al espacio muestral como un conjunto universal. Hablaremos, entonces en él, de subconjuntos y elementos. ***Se llama Evento a Cualquier Subconjunto del Espacio Muestral*** y lo denotaremos por A,B,C,D,E,F. etc. Así, si A es un evento entonces $A \subset \Omega$. Y llamaremos ***suceso a todo elemento de un espacio muestral*** y lo designaremos por ω, x, y, etc. Esto es, si x es un suceso, entonces $x \in \Omega$. Un evento con un sólo elemento es un evento elemental, así $A = \{\omega\}$ es un evento elemental.

Obsérvese que el evento $\{\omega\}$ y el suceso ω no son los mismos, esto lo sabemos de la teoría de conjuntos. En otras palabras, evento es cualquier elemento de $\mathcal{P}(\Omega)$, (así ϕ y Ω son eventos).

EJEMPLO 16 Consideremos los experimentos del ejemplo 2.

En ε_2 ; A : "ocurre un número par". Entonces

$A = \{2,4,6\}$.

En ε_3 ; A : "se extrae un artículo defectuoso". Luego

$A = \{D\}$.

En ε_5 ; A : "ocurre un accidente antes que crucen 100 automóviles". Entonces

$A = \{0,1,2,3,\dots, 98\}$.

En ε_6 ; A : " se fabrican más de 1000 artículos". Entonces

$A = \{1001, 1002,\dots\}$.

En ε_8 ; A : "el punto se encuentra entre 0 y 1/2". Luego

$$A = \{x \in \mathbb{R} \;/\; 0 < x < \tfrac{1}{2}\}.$$

En ε_9 ; A : "el artefacto dura más de 2,000 horas". Entonces

$A = \{t \in \mathbb{R} \;/\; t > 2{,}000\}$.

EJEMPLO 17 En el experimento aleatorio lanzar cuatro monedas simultáneamente. Definimos los eventos siguientes:

A_1 : "Todas las monedas muestran el mismo lado".

A_2 : "Ocurren por lo menos dos caras".

A_3 : "Ocurre sello en el tercer lanzamiento". Entonces:

$A_1 = \{CCCC, SSSS\}$.

A_2 = {CCCC , CCCS , CCSC , CSCC , SCCC , CCSS , CSCS , CSSC , SCCS , SCSC , SSCC}.
A_3 = {CCSC , CSSC , CSSS , SCSC , SCSS , SSSS , CCSS , SSSC}.

EJEMPLO 18 Consideremos el experimento del ejemplo 7, y sea el evento A : "La suma total en los dados no excede a 6". Entonces

$$A = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(4,1),(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\}$$
$$= \{(x, y) \in \Omega \ / \ x + y \leqslant 6\}.$$

EJEMPLO 19 Consideremos el experimento aleatorio del ejemplo 15. Y sea A : "El volumen producido está entre c > a y b". Entonces,

$$A = \{x \in \mathbb{R} \ / \ a < c < x < b\}.$$

EJEMPLO 20 En el experimento aleatorio del ejemplo 14, sea A : "Se necesita más de cuatro lanzamientos". Entonces,

$$A = \{SSSSC , SSSSSC , SSSSSSC, \ldots\}.$$

Consideremos ahora los espacios muestrales del ejemplo 1. Asi tenemos que. en Ω_1 : $\omega_1 = C$, $\omega_2 = S$, son sucesos;
En Ω_2 : $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 2$, $\omega_3 = 3$, $\omega_4 = 4$, $\omega_5 = 5$, $\omega_6 = 6$ son sucesos.
Finalmente diremos que un suceso ω es favorable a un evento **A**, si $\omega \in A$. Así SSSSC es un suceso favorable al evento **A** del ejemplo 20, igualmente los sucesos SSSSSSC , SSSSSSSC; son favorables al evento A, en cambio no lo son C, SC , SSC.

EJEMPLO 21 Sea el experimento, ε : "lanzar una moneda tres veces", y sea el suceso ω_3 = SCS. Hallar los posibles eventos en los cuales ω_3 sea un suceso favorable.

SOLUCION La Selección de ω_3, implica la ocurrencia de los siguientes eventos (y de muchos más). Los eventos que a continuación se dan son eventos diferentes y no son representaciones diferentes del mismo evento.
A_1 : "ocurre exactamente dos sellos"; A_2 : "ocurre a lo más una cara" y
A_3 : "en el segundo lanzamiento sale una cara".

EJEMPLO 22 En el espacio muestral del ejemplo 9, describir los siguientes eventos:
A : "Todas las damas escogen la tienda 1 ó todas escogen la tienda 2".
B : "Dos escogen la tienda 1 y las otras dos la tienda 2".

SOLUCION

$A = \{(1,1,1,1),(2,2,2,2)\}$.

$B = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)\ /\ 2x_i \text{ son } 1,\ 2x_i \text{ son } 2\}$.

EJEMPLO 23 Considere el espacio muestral del ejemplo 10 y escriba los elementos de los siguientes eventos:

A : "Todos los transistores están apagados o todos están prendidos".

B : "Sólo el último transistor verificado está prendido".

SOLUCION

$A = \{(0,0,0,0,0),(1,1,1,1,1)\}$.

$B = \{(0,0,0,0,1)\}$.

PROBLEMAS 1.2

1. Dé un ejemplo de experimento aleatorio que es de interés para (a) un ingeniero electricista, (b) un economista, (c) el gerente de una compañía de automóviles, (d) un ingeniero de comunicaciones, (e) un médico, (f) - un especialista en genética, (g) un biólogo, (h) un gerente de ventas.
2. Construir el espacio muestral apropiado para los siguientes experimentos aleatorios.
   (a) Elegir una carta de una baraja de 52 cartas.
   (b) Verificar el estado de dos transistores (apagado o prendido).
   (c) Verificar el estado de 10 transistores iguales (apagado o prendido).
   (d) Se lanzan n monedas y se observa el número de caras.
   (e) Se pregunta a una persona por la fecha de su nacimiento (día del año).
   (f) Inspeccionar las medidas de seguridad contra accidentes de una fábrica.
   (g) Se pregunta a n personas por la fecha de su nacimiento (día del año).
   (h) Un dardo se lanza en un blanco circular de radio r .
   (i) Extraer una muestra de 5 bolas con reemplazamiento de una urna que contiene 12 bolas diferentes (esto es, las bolas se devuelve a la urna antes de extraer por segunda vez).
3. Un inversionista planea escoger dos de las cinco oportunidades de inversión que le han recomendado. Describa el espacio muestral que representa las opciones posibles.
4. Tres artículos son extraídos con reposición, de un lote de mercancías; - cada artículo ha de ser identificado como defectuosos "D" y no defectuo-

so "N". Describa todos los puntos posibles del espacio muestral para este experimento.

5. Dos personas A y B se distribuyen al azar en tres oficinas numerada 1, 2 y 3. Si las dos personas pueden estar en la misma oficina, defina un espacio muestral adecuado.
6. Tres personas A , B y C se distribuyen al azar en dos oficinas numeradas con 1 y 2. Describa un espacio muestral adecuado a este experimento, (a) si los tres pueden estar en una misma oficina; (b) sí sólo se puede asignar una persona a cada oficina.
7. Durante el día, una máquina produce tres artículos cuya calidad individual, definida como defectuoso o no defectuoso, se determina al final del día. Describa el espacio muestral generado por la producción diaria.
8. El ala de un avión se ensambla con un número grande de remaches. Se inspecciona una sola unidad y el factor de importancia es el número de remaches defectuosos. Describa el espacio muestral.
9. Suponga que la demanda diaria de gasolina en una estación de servicio está acotada por 1,000 galones, que se lleva a un registro diario de venta. Describa el espacio muestral.
10. Se desea medir la resistencia al corte de dos puntos de soldadura. Suponiendo que el límite superior está dado por U, describa el espacio muestral.
11. De un grupo de transistores producidos bajo condiciones similares, se escoge una sola unidad, se coloca bajo prueba en un ambiente similar a su uso diseñado y luego se prueba hasta que falla. Describir el espacio muestral
12. En el problema 11. (a) suponga que el experimento consiste en extraer dos transistores y se prueba hasta que fallan. Describir el espacio muestral (b) suponga que el experimento consiste en escoger 5 transistores y se prueba hasta que fallan. Describir el espacio muestral.
13. Una urna contiene cuatro fichas numeradas: 2,4,6, y 8; una segunda urna contiene cinco fichas numeradas: 1,3,5,7, y 9. Sea un experimento aleatorio que consiste en extraer una ficha de la primera urna y luego una ficha de la segunda urna, describir el espacio muestral.
14. Una urna contiene tres fichas numeradas: 1,2,3; un experimento consiste en lanzar un dado y luego extraer una ficha de la urna. Describir el es-

pacio muestral.

15. Una línea de producción clasifica sus productos en defectuosos "D" y no defectuosos "N". De un almacén donde guardan la producción diaria de esta línea, se extraen artículos hasta observar tres defectuosos consecutivos o hasta que se hayan verificado cinco artículos. Construir el espacio muestral.

16. Lanzar un dado hasta que ocurra el número 4. Hallar el espacio muestral asociado a este experimento.

17. Una moneda se lanza tres veces. Describa los siguientes eventos:
A : "ocurre por lo menos 2 caras".
B : "ocurre sello en el tercer lanzamiento".
C : "ocurre a lo más una cara".

18. En cierto sector de Lima, hay cuatro supermercados (numeradas 1,2,3,4). Seis damas que viven en ese sector seleccionan al azar y en forma independiente, un supermercado para hacer sus compras sin salir de su sector

(a) Dar un espacio muestral adecuado para este experimento.

(b) Describir los siguientes eventos:
A : "Todas las damas escogen uno de los tres primeros supermercados"
B : "Dos escogen el supermercado N° 2, dos el supermercado N° 3 y las otras dos el N° 4".
C : "Dos escogen el supermercado N° 2 y las otras diferentes supermercados".

19. Tres máquinas idénticas que funcionan independientemente se mantienen funcionando hasta darle de baja y se anota el tiempo que duran. Suponer que ninguno dura más de 10 años.

(a) Definir un espacio muestral adecuado para este experimento.

(b) Describir los siguientes eventos:
A : "Las tres máquinas duran más de 8 años".
B : "El menor tiempo de duración de los tres es de 7 años".
C : "Ninguna es dada de baja antes de los 9 años".
D : "El mayor tiempo de duración de los tres es de 9 años".

20. En el espacio muestral del problema 4, describe los siguientes eventos:
A : "Ocurre al menos 2 artículos no defectuosos".
B : "Ocurre exactamente 2 artículos no defectuosos".

21. En el problema 16, describir el evento, "se necesitan por lo menos 5 lanzamientos".

22. El gerente general de una firma comercial, entrevista a 10 aspirantes a un puesto. Cada uno de los aspirantes es calificado como: Deficiente, Regular, Bueno, Excelente.
(a) Dar un espacio muestral adecuado para este experimento .
(b) Describir los siguientes eventos.
A : "Todos los aspirantes son calificados como deficientes o excelentes".
B : "Sólo la última persona extrevistada es calificado como excelente".
23. Considere el experimento de contar el número de carros que pasan por un punto de una autopista. Describa los siguientes eventos:
A : "Pasan un número par de carros".
B : "El número de carros que pasan es múltiplo de 6".
C : "Pasan por lo menos 20 carros".
D : "Pasan a lo más 15 carros".
24. En el problema 12. Describir los siguientes eventos. (1) en la parte (a).
A : "Los dos transistores duran a lo más 2,000 horas".
B : "El primero dura más de 2,000 horas, el otro menos de 3,000 horas".
(2) En la parte (b).
A : "Los cinco duran por lo menos 1,000 horas pero menos de 2,000 horas".
B : "El primero dura más de 2,000 horas, los demás a lo más 2,500 horas".

1.3 ALGEBRA DE EVENTOS

Hemos identificado el espacio muestral con el conjunto universal de la teoría de conjuntos, y los eventos como subconjunto del espacio muestral. - Identificaremos también el conjunto vacio (ϕ) de la teoría de conjuntos con el evento imposible, esto es, un evento que no ocurre. Por ejemplo, en el - experimento lanzar dos dados simultáneamente, el evento A : "obtener suma - 14", es un evento imposible. Al espacio muestral se llama también evento seguro.

En lo que sigue haremos una breve exposición a manera de revisión de la teoría de conjuntos en el lenguaje de eventos. Es decir, desde que los eventos son conjuntos, las operaciones de intersección "$\cap$", unión "U", inclusión - "$\subset$" serán definidos para eventos; las leyes y propiedades de la teoría de conjuntos son válidas.

1.3.1 OPERACIONES CON EVENTOS

SUB-EVENTOS Dado dos eventos, A y B se dice que A está ***contenido*** en B o que A es sub-evento de B y denotado por "$A \subset B$", si todo suceso favorable a A, - es favorable a B. En otras palabras, si ocurre el evento A, entonces ocurre el evento B. (Ver fig. 1.3.1a). En simbolos

$$A \subset B, \text{ si } \omega \in A \Longrightarrow \omega \in B.$$

EJEMPLO 1 Consideremos el experimento, lanzar una moneda hasta que ocurra - cara y contar el número de lanzamientos de la moneda. Definimos los siguientes eventos.

A : "Se necesita por lo menos 20 lanzamientos".

B : "Se necesita más de 5 lanzamientos".

En este experimento el espacio muestral es

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}.$$

Entonces, $A = \{20, 21, 22, \ldots\}$

$B = \{6, 7, 8, 9, 10, \ldots\}$

es claro que $A \subset B$.

IGUALDAD DE EVENTOS Se dice que dos eventos A y B son ***iguales***, y se denota por "$A = B$", si $A \subset B$ y $B \subset A$.

EJEMPLO 2 En el experimento del ejemplo 1, consideremos los eventos,

A : "Se necesita a lo más 10 lanzamientos".

B : "Se necesita menos de 11 lanzamientos".

Entonces,

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ y

$B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

es claro que $A = B$.

UNION DE EVENTOS Dado dos eventos A y B, se llama ***unión de A con B*** y se designa por "$A \cup B$" al evento formado por los sucesos que pertenecen a A ó a B ó a ambos, es decir si ocurre el evento A ó B ó ambos. En símbolos (ver fig. 1.3.1a)

$$A \cup B = \{\omega \in \Omega \,/\, \omega \in A \ \vee \ \omega \in B\}$$

EJEMPLO 3 En el experimento del ejemplo 1, consideremos los siguientes eventos .

A : "Se necesita un número par de lanzamientos".

B : "Se necesita más de 10 lanzamientos".

Es decir,

$$A = \{2, 4, 6, 8, 10, \ldots\}$$
$$B = \{11, 12, 13, 14, \ldots\}$$

Entonces, es claro que $A \cup B = \{2, 4, 6, 8, 10, 11, 12, 13, 14, \ldots\}$.

En general, se dice que ocurre el evento $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$, sí y sólo sí ocurre al menos uno de los eventos A_i.

INTERSECCION Dado los eventos A y B, se llama ***intersección de A con B*** y se denota "$A \cap B$", ó "AB" al evento formado por todos los sucesos favorables a A y a B. Es decir, ambos eventos A y B ocurren (la ocurrencia conjunta de A y B). En símbolos (ver fig. 1.3.1c)

$$AB = A \cap B = \{\omega \in \Omega \ / \ \omega \in A \wedge \omega \in B\}$$

EJEMPLO 4 En los eventos A y B del ejemplo 3. Se tiene que

$$A \cap B = \{12, 14, 16, 18, \ldots\}$$

En general se dice que ocurre el evento $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$, si y sólo si ocurren todos los eventos A_i.

DIFERENCIA Dado los eventos A y B, se llama ***diferencia de A con B y*** se denota "A - B" al evento formado por los sucesos favorables a A que no son favorables a B. En símbolos (ver fig. 1.3.1d).

$$A - B = \{\omega \in \Omega \ / \ \omega \in A \wedge \omega \notin B\}$$

EJEMPLO 5 En los eventos A y B definidos en el ejemplo 3, se tiene que

$$A - B = \{2, 4, 6, 8, 10\} \quad y$$
$$B - A = \{11, 13, 15, 17, \ldots\}$$

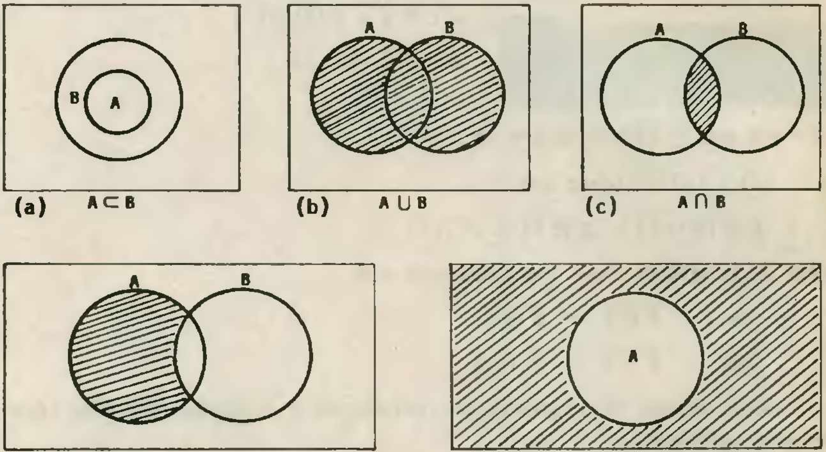
COMPLEMENTO Si A es un evento del espacio muestral Ω, se llama ***Complemento de A***, denotado por A' o $\bar{A}$ al evento formado por todos los sucesos que no pertenecen a A. Es decir, no ocurre el evento A. En símbolos. (Ver fig. 1.3.1e)

$$A' = \bar{A} = \Omega - A = \{\omega \in \Omega \ / \ \omega \notin A\}$$

EJEMPLO 6 Los complementos de los eventos definidos en el ejemplo 3, son - respectivamente:

$\bar{A} = \{1, 3, 5, 7, \ldots\} = \{\omega \in \Omega \ / \ \omega \text{ es impar}\}$

$\bar{B} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$



(a) $A \subset B$ (b) $A \cup B$ (c) $A \cap B$ (d) $A - B$ (e) $\bar{A}$

Fig. 1.3.1

LEYES DISTRIBUTIVAS Dado los eventos A , B y C, entonces

$(D_1) : A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$(D_2) : A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

A manera de ilustración presentaremos la demostración de D_1 dejando D_2 para el lector.

D_1 : Demostraremos que

$$A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C) \qquad (1)$$

y $$(A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C) \qquad (2)$$

Sea $\omega \in A \cap (B \cup C) \Longrightarrow \omega \in A$ y $(\omega \in B$ ó $\omega \in C)$

$\Longrightarrow (\omega \in A$ y $\omega \in B)$ ó $(\omega \in A$ y $\omega \in C)$

$\Longrightarrow (\omega \in A \cap B)$ ó $(\omega \in A \cap C)$

$\Longrightarrow \omega \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Lo cual implica que, $A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (3)

Sea ahora

$$\omega \in (A \cap B) \cup (A \cap C) \Longrightarrow (\omega \in A \text{ y } \omega \in B) \text{ ó } (\omega \in A \text{ y } \omega \in C)$$

$$\Longrightarrow \omega \in A \text{ y } (\omega \in B \text{ ó } \omega \in C)$$

$$\Longrightarrow \omega \in A \text{ y } \omega \in (B \cup C)$$

$$\Longrightarrow \omega \in A \cap (B \cup C)$$

lo cual implica que

$$(A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C) \qquad (4)$$

de (3) y (4) se tiene que

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

LEYES DE DE-MORGAN Sean los eventos A y B.

$$(DM_1) : \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

$$(DM_2) : \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

Demostraremos DM_1 a manera de ilustración y dejaremos DM_2 como ejercicio para el lector.

DM_1 : Ensayaremos una prueba más directa,

$$\omega \in \overline{A \cap B} \Longleftrightarrow \omega \notin A \cap B \Longleftrightarrow \omega \notin A \text{ ó } \omega \notin B \Longleftrightarrow \omega \in \bar{A} \quad \text{o}$$

$\omega \in \bar{B} \Longleftrightarrow \omega \in \bar{A} \cup \bar{B}$ y de este último concluímos que

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

PRODUCTO CARTESIANO Dado los eventos A y B, se llama ***producto Cartesiano*** de A con B, denotado "A x B", al conjunto de pares ordenados cuyos primeros elementos pertenecen a A y cuyos segundos elementos pertenecen a B, en símbolos

$$A \times B = \{(\omega_1, \omega_2) \ / \ \omega_1 \in A \text{ y } \omega_2 \in B\}$$

Usaremos el producto cartesiano para construir espacio muestral asociado a un experimento compuesto. Es decir un experimento que consiste en realizar un experimento simple seguido de otro experimento simple o de experimentos simples simultáneos, como en el caso del lanzamiento de una moneda, dos, tres, cuatro veces o el lanzamiento de dos, tres, cuatro monedas simultáneamente; también en el lanzamiento de dos dados, o un dado y una moneda etc. como hemos visto en 1.2.2. Para terminar con esta revisión de la teoría de conjuntos generalizaremos las leyes distributivas y de De-Morgan. Sean A, $A_1, A_2, \ldots, A_n$ eventos, entonces:

$(D_{1a})\ A \cap (A_1 \cup A_2 \cup \ \dots \ \cup A_n) = A \cap \left[\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right] = \bigcup_{i=1}^{n} (A \cap A_i)$

$(D_{2a})\ A \cup (A_1 \cap A_2 \cap \ \dots \ \cap A_n) = A \cup \left[\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right] = \bigcap_{i=1}^{n} (A \cup A_i)$

$(DM_{1a})\ \overline{A_1 \cap A_2 \cap \ \dots \ \cap A_n} = \overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \bar{A}_i = \bar{A}_1 \cup \bar{A}_2 \cup \dots \cup \bar{A}_n.$

$(DM_{2a})\ \overline{A_1 \cup A_2 \cup \ \dots \ \cup A_n} = \overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \bar{A}_i = \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \dots \cap \bar{A}_n.$

NOTA Hemos visto que un evento puede definirse verbalmente, de manera que - es importante expresarlo en términos de operaciónes entre eventos. Considere mos por ejemplo los eventos A y B, entonces:

El evento de que ocurra por lo menos uno de ellos (esto es, uno o más - de ellos), se puede escribir como $A \cup B$.

El evento de que ninguno de los dos ocurra, se escribe como $\bar{A}\ \bar{B}$.
El evento de que ocurra exactamente uno de los dos eventos puede escribirse - así, $A\bar{B} \cup \bar{A}B$ donde "o" está en el sentido de exclusión en este caso.

1.3.2 EVENTOS MUTUAMENTE EXCLUYENTES Y COLECTIVAMENTE EXHAUSTIVOS

DEFINICION 1.3.1 Dos eventos A y B definidos en el mismo espacio muestral,- se dice que son ***mutuamente excluyentes*** si no pueden ocurrir juntos. Es decir la ocurrencia de uno excluye la ocurrencia del otro. En símbolos, si $A \cap B = \phi$.

EJEMPLO 7 Se lanza un dado dos veces. Sean los eventos:
A : "La suma de los puntos obtenidos en los dos lanzamientos es 7".
B : "En los dos dados se obtiene el mismo número".
A y B son eventos mutuamente excluyentes, pues el evento A es el conjunto

$\{(3,4), (4,3), (1,6), (6,1), (5,2), (2,5)\}$ y B es el conjunto

$\{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\}$, por lo tanto, $A \cap B = \phi$.

EJEMPLO 8 Sea el experimento, contar el número de personas atendidas por un banco en un periodo de tiempo. Sean los eventos:

A : "Se han atendido a menos de 20 personas".

B : "Se ha atendido a exactamente 25 personas".

C : "Se ha atendido exactamente 15 personas".

Los eventos A y B son mutuamente excluyentes, pues se tiene que

$$A = \{0, 1, 2, \ldots, 19\} \quad y \quad B = \{25\}$$

por lo tanto, $A \cap B = \phi$.

En cambio los eventos A y C no son mutuamente excluyentes, pues

$$A \cap C = C = \{15\} \neq \phi$$

La definición anterior se puede generalizar a tres o más eventos.

DEFINICION 1.3.2 Una colección de eventos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ definidos sobre un mismo espacio muestral se dice que son mutuamente excluyentes, si la ocurrencia de uno de ellos excluye la ocurrencia de los otros. Es decir

$$A_i \cap A_j = \phi \;\forall\; i \neq j;\; i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

EJEMPLO 9 Los elementos de un espacio muestral (los sucesos) son mutuamente excluyentes. En efecto, la ocurrencia de un resultado individual excluye la posibilidad de ocurrencia simultánea de los demás. Pues ocurre uno y sólo un resultado individual.

DEFINICION 1.3.3 Se dice que una colección de n eventos $A_1, A_2, \ldots, A_n$, definidos sobre el mismo espacio muestral son *Colectivamente exhaustivos* si la unión es igual al espacio muestral. Es decir,

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$$

EJEMPLO 10 En el experimento, número de personas atendidas en un banco en un período determinado. Sean los eventos:

A : "menos de 11 personas han sido atendidas".

B : "de 11 a 20 personas han sido atendidas".

C : "más de 15 personas han sido atendidas".

Los eventos A , B y C son colectivamente exhaustivos, pues

$$A \cup B \cup C = \{0, 1, 2, \ldots\} = \Omega$$

EJEMPLO 11 Conteste justificando su respuesta cada una de las siguientes -

preguntas:

(a) Si A y B son eventos mutuamente excluyentes y colectivamente exhaustivos ¿son los eventos $\bar{A}$ y $\bar{B}$ mutuamente excluyente? ¿Son colectivamente exhaustivos?

(b) Si A y B son eventos mutuamente excluyentes pero no colectivamente exhaustivos, ¿son los eventos $\bar{A}$ y $\bar{B}$ colectivamente exhaustivos?

SOLUCION (a) Se tiene dos eventos A y B tales que $A \cap B = \phi$ y $A \cup B = \Omega$. Entonces, de la primera condición se obtiene

$\overline{A \cap B} = \bar{\phi} \Longrightarrow \bar{A} \cup \bar{B} = \Omega$, es decir $\bar{A}$ y $\bar{B}$ son colectivamente exhaustivos.

De la segunda condición se obtiene

$\overline{A \cup B} = \bar{\Omega} = \bar{A} \cap \bar{B} = \phi$, es decir $\bar{A}$ y $\bar{B}$ son mutuamente excluyentes.

(b) Se tiene dos eventos A y B tales que

$A \cap B = \phi$ y $A \cup B \neq \Omega$ ó $A \cup B \subset \Omega$. Entonces, existe un evento **C** - tal que $A \cup B \cup C = \Omega$ luego

$\bar{A} = B \cup C$ y $\bar{B} = A \cup C$. Por lo tanto

$\bar{A} \cup \bar{B} = (A \cup C) \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C = \Omega$ ó

$\bar{A} \cup \bar{B} = \Omega$. Es decir, $\bar{A}$ y $\bar{B}$ son colectivamente exhaustivos.

PROBLEMAS 1.3

1. Sean A, B y C tres eventos cualesquiera en el espacio muestral Ω. Exprese cada uno de los siguientes eventos compuestos en términos de operaciones entre A, B y C.

(a) Ocurren exactamente dos de los eventos.

(b) Ocurren por lo menos uno de los eventos.

(c) Ocurren a lo más dos de los eventos.

(d) Ocurren todos los eventos.

(e) No ocurre ninguno de los eventos.

(f) No ocurre **A**, o no ocurre **B** o no ocurre **C**.

(g) Ocurre exactamente uno de los eventos.

(h) No ocurre más de uno de los eventos.

(*i*) Ocurre por lo menos uno de los tres eventos.

2. Determine el complemento para cada uno de los siguientes eventos:

(a) En el problema 1.2.9:"la demanda en un día determinado fué más de 8,000 galones".

(b) En el problema 1.2.11: "El transistor duró menos de 2,000 horas".

(c) En el problema 1.2.12b: "El primer transistor duró menos de 1,000 horas; el segundo, menos de 1,500 horas; y todos los demás más de 1,600 horas".

3. Verificar que :

(a) $A(B \cup C) = AB \cup AC$; (b) $A \cup BC = (A \cup B)(A \cup C)$

(c) $AB - ABC = AB\overline{C}$.

4. ¿Cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderos para todos los eventos A,B,C y cuáles no?

(a) $(\bar{A} \cup \bar{B})C = \overline{AB} \cup C$; (b) $A \cap \overline{AC} = \phi$

(c) $(A - C)(B - C) = AB\bar{C}$; (d) $A(B - C) = AB - AC$

(e) $(\bar{A} \cup \bar{B}) \cap \overline{AB} = \phi$; (f) $(\bar{A} \cup \bar{B}) \subset \overline{AB}$

5. Sean A y B dos eventos de Ω, tales que no son mutuamente excluyentes:

(a) Exprese A(B) como la unión de dos eventos mutuamente excluyentes.

(b) Exprese $\bar{A}$ ($\bar{B}$) como la unión de dos eventos mutuamente excluyentes.

6. La tasa de desempleo para el siguiente período está pronosticado por un modelo económico. El pronóstico del modelo puede describirse como uno de los cinco eventos :

A_1 : "El desempleo será del 10% o más".

A_2 : "El desempleo será del 8% o más, pero menos del 10%".

A_3 : "El desempleo será del 6% o más, pero menos del 8%".

A_4 : "El desempleo será del 4% o más, pero menos del 6%".

A_5 : "El desempleo será menos del 4%".

Tome B_i para representar el desempleo actual de acuerdo a las mismas cinco clasificaciones (por ejemplo B_1 = El desempleo será del 10% o más).

(a) ¿Son mutuamente excluyentes los eventos $A_1,\dots,A_5$? ¿son colectivamente exhaustivos?

(b) ¿Qué indica los siguientes eventos, en palabras?

$$A_2 \cap B_3 ;\ A_3 \cup A_4 ;\ A_i \cap B_i ;\ A_i \cap B_j ;\ \text{donde } i > j$$

7. Un portafolio de acciones contiene cuatro acciones comunes. Durante un determinado día de negocios, tome:

A : "más de la mitad de las acciones subirán de precio".

B . "más de la mitad de las acciones bajarán de precio".

C : "más de la mitad de las acciones no cambiarán de precio".

(a) ¿Qué indican los siguientes eventos en palabras? $A \cup C$; $A \cap B$

(b) ¿Son los eventos A y B mutuamente excluyentes? ¿y A y C? ¿y B y C?

(c) ¿Son los eventos A,B y C colectivamente exhaustivos?

8. En la definición de los eventos A,B y C del problema 7, si se cambiara "más de la mitad" por la mitad o más, entonces:

(a) ¿Serían A y B mutuamente excluyentes? ¿A y C? ¿y B y C?

(b) ¿Son eventos A,B y C colectivamente exhaustivos?

9. Un blanco consiste de 10 círculos concéntricos de radio r_k, (k = 1,2,..., 10). El evento A_k significa acertar en el interior del círculo de radio r_k, (k = 1,2,..., 10). ¿Qué indica cada uno de los siguientes eventos?

(a) $B = \bigcup_{k=1}^{6} A_k$ (b) $C = \bigcap_{k=5}^{10} A_k$

10. Simplificar la expresión $A = (B \cup C) \cap (B \cup \bar{C}) \cap (\bar{B} \cup C)$

11. En que caso son verdaderas las siguientes igualdades:

(a) $A \cup B = \bar{A}$; (b) $AB = \bar{A}$; (c) $A \cup B = AB$

12. De la siguiente igualdad, hallar el evento X.

$$\overline{X \cup A} \cup \overline{X \cup \bar{A}} = B$$

13. ¿Son los eventos A, $\bar{A}$ B y $\overline{A \cup B}$ colectivamente exhaustivos.

14. Dos jugadores de ajedrez, juegan una partida. Sea A el evento, "el primer jugador gana" y B, "el segundo jugador gana". ¿Qué evento agregaría ud. a estos eventos para obtener una colección de eventos colectivamente exhaustivos?

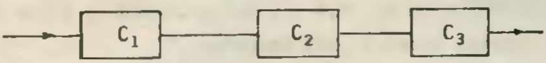
15. Una instalación consiste de dos calderos y un motor. Sea el evento A, "el motor está en buenas condiciones"; sea B_k (k = 1,2) el evento" el k-ésimo caldero está en buenas condiciones", y sea **C**, "la instalación puede funcionar, si el motor y al menos uno de los calderos estén en buenas condiciones". Exprese el evento C y C' en términos de A y B_k.

16. Considere el experimento de verificar la vida útil de dos tubos eléctricos iguales. Sea A_1, el evento "los dos tubos duran más de 10 años"; A_2 - el evento "el primer tubo observado dura más de 10 años y el segundo a lo más 15 años"; y A_3 el evento "ambos tubos duran a lo más 10 años"

(a) Escriba los elementos de Ω, A_1, A_2, A_3.

(b) ¿Cuáles de los sgtes. pares de eventos son mutuamente excluyentes A_1, A_2; A_1, A_3; A_2, A_3?

17. Considere el sistema en serie mostrado en la figura



Suponga que las componentes C_1, C_2 y C_3 pueden estar funcionando o - descompuesto. Verifique el estado de cada C_i, $i = 1,2,3$.

(a) Considerando 1 = "Funcionado" y 0 = "descompuesto". escriba el espacio muestral.

Defina los siguientes eventos :

E_1 : "todo el sistema está funcionando".

E_2 : "por lo menos dos delas componentes estan funcionando".

(b) ¿Son los eventos E_1 y E_2 mutuamente excluyentes?

(c) Interprete $\bar{E}_1$ y $\bar{E}_2$. (d) ¿Cuál es la relación entre $\bar{E}_1$ y $\bar{E}_2$?.

1.4 TECNICAS DE CONTEO

En muchas situaciones estaremos interesados sólo en el número de elementos que tiene un espacio muestral o un evento particular, en tales situaciones acudiremos a las técnicas de conteo, que serán de gran ayuda en estos casos.

1.4.1 PRINCIPIO DE MULTIPLICACION

El principio de multiplicación se enuncia como sigue:

TEOREMA 1.4.1 Si un experimento aleatorio (u operación) ε_1 ocurre de n_1 formas y si para cada una de estas, un experimento (u operación) ε_2 ocurre de n_2 formas, entonces los dos experimentos juntos ocurren de $n_1 n_2$ formas.

ACLARACION Para interpretar cabalmente el teorema anterior recuerde el concepto de experimento compuesto establecido en 1.2.2. Téngase tambien presente lo dicho en 1.2.4. Entonces, condición necesaria y suficiente para que se aplique el principio de multiplicación es que se realizan ambos experimentos (u operaciones) uno seguido del otro o simultaneamente.

EJEMPLO 1 ¿Cuántos elementos tiene el espacio muestral del experimento alea torio "lanzar una moneda y un dado simultaneamente"?

SOLUCION La moneda ocurre de 2 formas, es decir $n_1 = 2$, y para cada uno de estos, el dado ocurre de 6 formas, osea $n_2 = 6$. Por lo tanto, la moneda y el dado al ser lanzados simultaneamente ocurren de $n_1 n_2 = 2 \times 6 = 12$ formas diferentes. Es decir, el espacio muestral Ω tiene 12 elementos.

El espacio muestral asociado al experimento compuesto "lanzar una moneda y un dado a la vez", se construye a partir de los sub-espacios muestrales Ω_1, Ω_2 asociados a los experimentos "lanzar una moneda" y "lanzar un dado" respectivamente, como se ha visto en 1.2 . Así,

$$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 = \{(\omega_1 , \omega_2) \ / \ \omega_1 \in \Omega_1 \wedge \omega_2 \in \Omega_2\}$$

EJEMPLO 2 Una persona puede viajar de una ciudad A a otra ciudad B de 5 formas y de B a C de 6 formas. ¿De cuántas formas puede ir de A a C pasando por B? .

SOLUCION La persona puede ir de A a B de 5 formas, para cada una de estas, hay 6 maneras de viajar de B a C. Por lo tanto, hay $5 \times 6 = 30$ formas de ir de A a C pasando por B. El diagrama de la fig. 1.4.1, muestra los caminos a seguir.

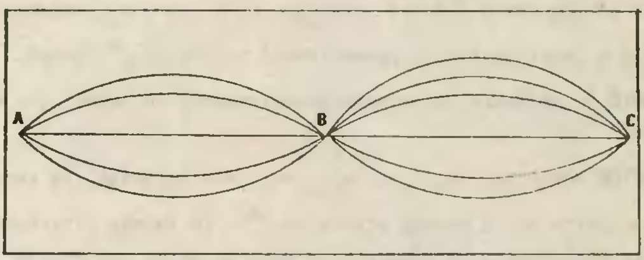


Fig. 1.4.1

La generalización del principio de multiplicación a cualquier número de experimentos u operaciones es como sigue.

TEOREMA 1.4 2 Si un experimento (u operación) ε_1 ocurre de n_1 formas, y para cada uno de éstos, un experimento (u operación) ε_2 ocurre n_2 formas, y para cada una de las dos primeras se puede efectuar un tercer experimento (u operación) ε_3 de n_3 formas y así sucesivamente, la secuencia de k experimentos (u operaciones) se realizará de $n_1 \, n_2 \, \ldots \, n_k$ formas diferentes.

EJEMPLO 3 Un producto se arma en tres etapas, para la primera etapa se tienen disponibles 5 líneas de armado, para la segunda 4 y para la tercera 6 líneas de armado. ¿De cuántas maneras puede moverse el producto en el proceso de armado?

SOLUCION En la primera etapa, el producto puede moverse de 5 formas, para cada una de éstas en la segunda etapa, el producto puede moverse de 4 maneras y para cada una de las dos anteriores, en la tercera etapa puede moverse de 6 formas. Por lo tanto, el producto puede moverse de $5 \times 4 \times 6 = 120$ formas diferentes en el proceso de armado.

EJEMPLO 4 ¿Cuántos números pares de 3 dígitos se pueden formar con los dígitos 1,2,5,6,7,8,9, si cada dígito puede emplearse una sola vez?.

SOLUCION Puesto que los números por formarse deben ser pares, sólo hay 3 casos posibles para las unidades (cualquiera de los dígitos 2,6 ú 8). Para cada uno de éstos 3 casos hay 6 elecciones posibles para las decenas y 5 para las centenas. Luego, se puede formar un total de $3 \times 6 \times 5 = 90$ números pares diferentes.

CONSECUENCIAS Los siguientes resultados son consecuencias obvias del principio de multiplicación.

1. En el teorema 1.4.2, si $n = n_1 = n_2 = \ldots = n_k$, entonces la secuencia de los k experimentos (u operaciones) ocurre de n^k formas.

EJEMPLO 5 Se lanza una moneda sucesivamente 6 veces, ¿de cuántas formas ocurre?

SOLUCION Aquí $n_1 = n_2 = \ldots = n_6 = 2$. Por lo tanto, la secuencia de los 6 lanzamientos de la moneda ocurre de $2^6 = 64$ formas diferentes.

2. Sea $N(A)$ denota el número de elementos de un conjunto A. Supongamos que $N(A) = m$ y $N(B) = n$. Entonces, el número de formas de seleccionar un elemento de A y un elemento de B es igual a mn. En símbolos

$$N(A \times B) = N(A) \times N(B) = mn.$$

3. En general se cumple $N(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_k) = N(A_1)N(A_2) \ldots N(A_k)$.

1.4.2 PRINCIPIO DE ADICION

El principio de adición se enuncia de la siguiente manera:

TEOREMA 1.4.3 Si un experimento (u operación) ε_1 puede ocurrir de n_1 formas y un segundo experimento (u operación) ε_2 de n_2 formas, entonces el experimento (u operación) ε, que consiste en realizar ε_1 ó ε_2 ("o" en el sentido de exclusión, es decir ε_1 y ε_2 no pueden ocurrir juntos) ocurre de $n_1 + n_2$ formas, siempre que los espacios muestrales Ω_1 y Ω_2 asociados a ε_1 y ε_2 respectivamente sean disjuntos .

NOTA Para interpretar cabalmente el principio de adición téngase presente lo dicho en 1.2.3.

EJEMPLO 6 Consideremos el experimento de lanzar una moneda o un dado. ¿ De cuántas formas ocurre?

SOLUCION El experimento dado ε es compuesto; sean

ε_1 : lanzar una moneda ; $n_1 = 2$

ε_2 : lanzar un dado ; $n_2 = 6$

Luego, el experimento ε : "lanzar una moneda o un dado", ocurre de $n = n_1 + n_2 = 2 + 6 = 8$ formas. Aquí evidentemente la partícula gramatical "o" está en el sentido de exclusión y $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \phi$.

EJEMPLO 7 Una persona puede viajar de A a B por vía aérea o por vía terrestre y tiene a su disposición 5 líneas aéreas, 6 líneas terrestres. ¿De cuántas formas puede hacer el viaje?

SOLUCION Aquí evidentemente, si la persona decide viajar por vía terrestre ya no viaja por vía aérea y viceversa. Luego, la partícula gramatical "o" está en el sentido de exclusión. Entonces, por el principio de adición se tiene que hay, $n_1 + n_2 = 5 + 6 = 11$ formas diferentes. La figura 1.4.2 da un diagrama de los caminos posibles.

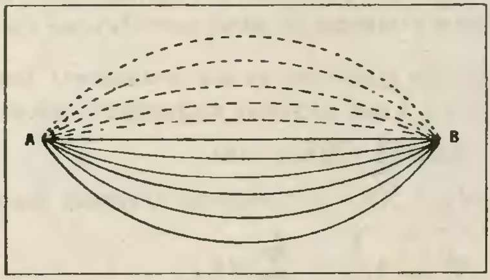


Fig. 1.4.2

La generalización del principio de adición es la siguiente:

TEOREMA 1.4.4 Si un experimento ε_1 ocurre de n_1 formas, ε_2 de n_2, ..., ε_k de n_k formas; entonces el experimento ε que consiste en realizar ε_1 ó ε_2, ó ... ó ε_k (la partícula ó, en el sentido excluyente. Es decir, los experimentos ε_1, ε_2 ; ..., ε_k no pueden realizarse juntos) ocurre de $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$ formas, siempre que los correspondientes espacios muestrales sean disjuntos dos a dos; es decir,

$$\Omega_i \cap \Omega_j = \phi \quad \text{para} \quad i \neq j = 1,2,\ldots,k\ .$$

EJEMPLO 8 Un producto se vende en 3 mercados; en el primer mercado se tienen disponibles 5 tiendas, en el segundo 4 y en el tercer mercado, 6 tiendas. ¿De cuántas maneras puede venderse el producto?

SOLUCION Por el principio de adición tenemos que $n = n_1 + n_2 + n_3 = 5 + 4 + 6 = 15$ maneras diferentes.

Con este ejemplo y el ejemplo 3 trataremos de hacer notar la diferencia entre las situaciones en que usamos cada principio; es claro que si ud. desea comprar uno de los productos y decide comprar en una de las tiendas del mercado N° 1, por ejemplo, ya no comprará ni en el mercado N° 2 ni en el mercado N° 3 ; mientras que en el ejemplo 3, una vez que el producto, siguiendo una de las líneas de armado de la primera etapa, tiene que seguir inmediatamente una de las líneas para la segunda etapa y finalmente una para la tercera etapa.

Algo similar ocurre en los dos ejemplos paralelos dados con respecto a los viajes de una persona. En el primer caso, es claro que al llegar a B por uno de los 5 caminos sigue su viaje hasta llegar a C, por uno de los 6 caminos disponibles; en cambio en el segundo caso, si decide viajar por vía aérea ya no viaja por vía terrestre y viceversa.

CONSECUENCIA El resultado siguiente, es una consecuencia inmediata del principio de adición. Si A y B son conjuntos disjuntos, entonces

$$N(A \cup B) = N(A) + N(B).$$

En general, si A_1, A_2, ..., A_k son conjuntos disjuntos dos a dos, entonces

$$N\left[\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right] = \sum_{i=1}^{k} N(A_i).$$

1.4.3 PERMUTACION

FACTORIAL DE UN NUMERO Sea n un número entero positivo, el *factorial* de n, se denota por "$n!$" o "$\underline{|n}$" y se define como el producto de todos los enteros consecutivos de 1 hasta n inclusive, es decir

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times (n - 1)\, n = n(n - 1) \times \ldots \times 2 \times 1.$$

Así,

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

$$10! = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 3628800$$

observe que, $n! = n(n - 1)!$

De este último, si $n = 1$, tenemos $1! = 1 \times 0!$. Luego definimos convencionalmente $0! = 1$.

Supongamos, ahora que estamos interesados sólo en el número de elementos que tiene un espacio muestral cuyos elementos son todas las ordenaciones (o arreglos) posibles de un conjunto de objetos. Por ejemplo, podemos estar interesados en saber, ¿de cuántas formas posibles pueden sentarse 8 personas alrededor de una mesa?, o podemos preguntarnos, ¿de cuántas formas pueden adjudicarse los lugares de partida a los 10 participantes de una carrera automovilística?. Los diferentes arreglos se llaman *permutaciones*.

DEFINICION 1.4.1 Una *permutación* es un arreglo de todos o parte de un conjunto de objetos.

Suponga que tenemos un conjunto de tres objetos, $A = \{a,b,c\}$ y estamos interesados en el número de arreglos (las posibles permutaciones) con los elementos del conjunto **A**. Las posibles permutaciones son:

abc, acb, bac, bca, cab y cba

vemos que hay 6 permutaciones distintas.

Se puede llegar a la misma respuesta sin tener que escribir todas las ordenaciones posibles, de la siguiente manera: los arreglos de los 3 objetos es equivalente a disponerlos en 3 celdas, asi

3	2	1

Hay 3 formas posibles de llenar la primera celda, con cualquiera de los tres objetos a, b y c; para la segunda celda hay 2 formas posibles, cualquiera de los dos objetos restantes después de haber llenado la primera y solamente queda una forma de llenar la tercera. Aplicando el principio de multiplicación da un total de 3 x 2 x 1 = 6 formas (o permutaciones).

En general, supongamos que tenemos un conjunto de n objetos, y estamos interesados en el número de permutaciones que se puede hacer con los n objetos, generalizando el proceso anterior tendremos, n casillas.

n	n - 1	n-2	n-3	.	.	.	.	3	2	1

La primera casilla se puede llenar de n maneras; la segunda de n - 1 maneras la tercera de n - 2, etc. la última de solo una manera. Aplicando el principio de multiplicación se tiene

$n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots 2 \times 1 = n!$ permutaciones, que se denota por

${}_nP_n$ o $P_{(n,n)}$ o P_n^n . Es decir $\quad {}_nP_n = P_{(n,n)} = P_n^n = n!$

la cual se lee así: "número de permutaciones de n objetos tomados de n a n" o simplemente número de permutaciones de n objetos diferentes. Para precisar mejor damos el siguiente teorema.

TEOREMA 1.4.5 *El número de permutaciones* de n objetos diferentes es

$$P_n^n = {}_nP_n = n!$$

EJEMPLO 9 Un inspector visita 6 máquinas diferentes durante el día. A fin de impedir a los operadores que sepan cuando inspeccionará, varía el orden de las visitas. ¿De cuántas maneras puede hacerlo?

SOLUCION Puesto que el inspector tiene que inspeccionar las 6 máquinas diferentes, el número de maneras, es el número de permutaciones de las 6 máquinas. Es decir

$${}_6P_6 = 6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720 \text{ formas.}$$

EJEMPLO 10 En una competencia automovilística intervienen 40 participantes. ¿De cuántas formas distintas se pueden adjudicar los lugares de largada a los 40 competidores de la competencia?

SOLUCION Se desea saber de cuántas formas posibles se pueden ordenar los 40 competidores. El número de tales ordenaciones posibles es

$${}_{40}P_{40} = 40!$$

EJEMPLO 11 ¿De cuántas maneras se pueden colocar 10 chicas en una fila, de manera que dos chicas, en particular, no queden juntas?

SOLUCION Separemos del grupo una de las chicas en cuestión, de manera que consideremos sólo 9. Estas se podrán ordenar de $9!$ formas. Para cada ordenación de 9, la chica separada puede ubicarse en 8 lugares sin estar junto a la otra chica en cuestión. Por lo tanto, de acuerdo con el principio de multiplicación, el número total de formas diferentes es $8 \times 9!$.

EJEMPLO 12 ¿De cuantas maneras se pueden colocar 12 niños en una fila, de manera que cuatro niños, en particular, queden juntos?

SOLUCION Separemos los cuatro niños en cuestión, de manera que consideremos solamente 8. Estos se podrán ordenar de $8!$ formas. Para cada ordenación de 8 los 4 niños en cuestión pueden ubicarse en 9 lugares. Para cada posición, de los 4 niños, estos pueden ordenarse de $4!$ formas. Por lo tanto, de acuerdo con el principio de multiplicación, el número total de formas diferentes es $4! \times 9 \times 8! = 4! \times 9!$.

Supongamos ahora que tenemos un conjunto con n objetos diferentes y deseamos permutar r de estos n objetos $0 < r < n$. Tendremos entonces r celdas. La primera celda se puede llenar de n formas, la segunda de $n - 1$ formas, etc. y la r-ésima celda de $n - (r - 1) = n - r + 1$ formas.

n	$n-1$	$n-2$	$n-3$	.	.	.	$n-r+1$

Aplicando el principio de multiplicación, el número de permutaciones de los n objetos diferentes tomados r a r es

$$n(n - 1)(n - 2)(n - 3) \; . \; . \; . \; (n - r + 1)$$

lo cual se puede escribir

Sucesión

$$n(n-1)(n-2)\ .\ .\ .\ (n-r+1)\ \frac{(n-r)!}{(n-r)!} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Que se denota por $P(n,r)$, $n P r$ o P_n^r. Usaremos P_n^r o nPr, indistintamente

TEOREMA 1.4.6 *El número de permutaciones de* n objetos diferentes tomados - r a r es

$$P_n^r = {}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

NOTA Hemos visto que una permutación es un arreglo de todos o parte de los - elementos de un conjunto que tiene objetos diferentes. Así, si A = {a, b, c} se vió que las diferentes permutaciones son:

abc, acb, bac, bca, cab, cba

Es decir, el orden de los elementos es importante.

Observe, que estos elementos son comparables con las ternas ordenadas - que se pueden formar con los elementos de dicho conjunto sin repetición de - sus elementos; (o sea no están las ternas (a,a,a),(b,b,b,) y (c,c,c)).

(a,b,c) , (a,c,b) , (b,a,c) , (b,c,a) , (c,a,b) , (c,b,a)

En general, si el conjunto tiene n elementos. Una permutación de los n elementos, *es una n-upla ordenada*; y el número de permutaciones de los n elementos es el número de n-uplas ordenadas que se forman con los n elementos - sin repetición.

Las permutaciones de los n-elementos tomados r a r, son *r-uplas ordenadas*, y el número de permutaciones de los n elementos tomados r a r, es el número de r-uplas ordenadas que se pueden formar con los n elementos sin repetición.

EJEMPLO 13 Un grupo está formado por 5 personas y desean formar una comisión integrada por presidente y secretario. ¿De cuántas maneras puede nombrarse esta comisión?

SOLUCION El cargo de presidente puede ser ocupada de 5 maneras diferentes ; y una vez ocupado el cargo de presidente, el cargo de secretario puede ser - ocupado de 4 maneras diferentes; entonces la elección de la comisión se puede hacer de 5 x 4 = 20 maneras diferentes o simplemente, número de permutaciones de 5 personas tomadas 2 a 2.

$$_5P_2 = \frac{5!}{(5-2)!} = 5 \times 4 = 20 \text{ maneras.}$$

NOTA El lector puede dar nombres a las personas, digamos A,B,C,D,E. Entonces, se busca todos los pares ordenados que se pueden formar con dichas letras, sin repetición .

(A , B) , (A , C) , (A , D) , (A , E)
(B , A) , (B , C) , (B , D) , (B , E)
(C , A) , (C , B) , (C , D) , (C , E)
(D , A) , (D , B) , (D , C) , (D , E)
(E , A) , (E , B) , (E , C) , (E , D)

Donde cada letra de la primera componente indica la persona que ocupa el cargo de presidente, y la segunda, indica la persona que ocupa el cargo de secretario. Así (C,B) indica que C resultó elegido presidente y B secretario. Y es sin repetición, ya que el par (A , A) no está en la permutación, pues si estuviera significaría que la persona **A** ocupa el cargo de presidente y secretario; lo cuál no puede ser.

EJEMPLO 14 Encontrar el número total de enteros positivos que pueden formarse utilizando los dígitos {1,2,3,4}, si ningún dígito ha de repetirse cuando se forma un número.

SOLUCION El número total de enteros positivos es

$$_4P_1 + {}_4P_2 + {}_4P_3 + {}_4P_4 = 4 + \frac{4!}{(4-2)!} + \frac{4!}{(4-3)!} + 4!$$

$$= 4 + 12 + 24 + 24 = 64 \text{ números diferentes.}$$

EJEMPLO 15 Se va a colorear un mapa de cuatro países, con colores diferentes para cada país. Si hay disponibles 6 colores diferentes. ¿De cuántas maneras puede colorear el mapa?

SOLUCION Se necesita permutaciones de cuatro de un conjunto de 6 elementos. Es decir,

$$_6P_4 = \frac{6!}{(6-4)!} = 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360 \text{ maneras.}$$

EJEMPLO 16 En un omnibus que posee 37 asientos (en ocho filas de cuatro asientos cada una con un pasillo en el medio, y al final 5 asientos juntos), se desea ubicar 25 pasajeros.

(a) ¿De cuántas formas se pueden ubicar?

(b) ¿De cuántas formas se pueden ubicar si deciden no ocupar los últimos 5 - asientos?

(c) ¿De cuántas formas se pueden ubicar si viajan cinco amigos que deciden , viajar juntos en los últimos asientos?

(d) ¿De cuántas formas se pueden ubicar si ocupan los 18 asientos que poseen ventanilla?

(e) ¿De cuántas formas se pueden ubicar si 10 de los pasajeros están enfermos y deben viajar en asientos que poseen ventanilla?

SOLUCION

(a) En este caso se debe calcular el número de grupos de 25 asientos que se pueden formar de entre los 37 asientos considerando el orden, ya que en los asientos elegidos los pasajeros se pueden distribuir de diferentes formas y cada grupo de 25 asientos nos indicará cuales son los asientos elegidos por los pasajeros. El número buscado es

$$_{37}P_{25} = \frac{37!}{(37-25)!} .$$

(b) En este caso se considera sólo 32 asientos. El razonamiento es el mismo que en el caso anterior. El número buscado es

$$_{32}P_{25} = \frac{32!}{(32-25)!} .$$

(c) Como los cinco amigos viajan juntos en el último asiento, entonces los - restantes 20 pasajeros se ubicarán en los 32 asientos que quedan disponibles Y razonando como antes, este número es

$$_{32}P_{20} = \frac{32!}{(32-20)!} .$$

Ahora bien para cada una de estas ubicaciones disponibles de los 20 pasajeros los 5 amigos se ubicarán de $_5P_5 = 5!$ formas distintas. Luego, el número buscado es

$$_{32}P_{20} \cdot {}_5P_5 = \frac{32!}{(32-20)!} \cdot 5! \quad .$$

(d) Primero veamos de cuántas formas pueden ocuparse los 18 asientos con ven tanilla. Se trata de hallar el número de grupos de 18 pasajeros que se pueden formar con los 25 y considerando el orden. El número es

$$_{25}P_{18} = \frac{25!}{(25-18)!} = \frac{25!}{7!}$$

Para cada una de estas formas de ocupar los asientos con ventanilla, ¿de cuántas formas se pueden ubicar los 7 pasajeros restantes en los 19 asientos aún libres?. Es claro que es de $_{19}P_7$ formas. Y el número buscado es

$$_{25}P_{18} \cdot {}_{19}P_7 = \frac{25!}{7!} \cdot \frac{19!}{12!}.$$

(e) Veamos antes de cuántas formas posibles se pueden ubicar los 10 pasajeros enfermos en los 18 asientos con ventanilla. Se trata de hallar grupos de 10 asientos que se pueden formar de entre los 18 asientos, dichas formas posibles son

$$_{18}P_{10} = \frac{18!}{(18-10)!}$$

Para cada una de estas ubicaciones de los pasajeros enfermos; ¿De cuántas formas se pueden ubicar los 15 pasajeros restantes en los 27 asientos aún libres?. Es evidente que es $_{27}P_{15}$ formas. Por lo tanto, el número buscado es

$$_{18}P_{10} \cdot {}_{27}P_{15} = \frac{18!}{8!} \cdot \frac{27!}{12!}.$$

Las permutaciones que ocurren por arreglos de objetos formando (o alrededor de un círculo) un círculo se llaman *permutaciones circulares*. En estas agrupaciones no hay primero ni último elemento, por hallarse todos en una línea cerrada. Para determinar el número de permutaciones circulares que pueden formarse con los **n** objetos distintos de un conjunto, basta observar que considerando fija la posición de uno cualquiera de ellos, los n - 1 restantes podrán cambiar de lugar, de (n - 1)! formas diferentes tomando todas las posiciones sobre la circunferencia relativa al primer punto. Si cambiamos ahora la posición de este, los de los demás respecto de él será seguro uno de los ya considerados. Por lo tanto, el número de permutaciones circulares será

$$(n-1)!$$

La permutación circular se denota por P_c^n

TEOREMA 1.4.7 El número de permutaciones de **n** objetos distintos alrededor de un círculo es

$$P_c^n = (n - 1)!$$

EJEMPLO 17 ¿De cuántas formas diferentes pudieron sentarse, en la última cena, alrededor de la mesa, jesucristo y los 12 apóstoles?

SOLUCION (a) Si la mesa fuera circular, tendremos la permutación circular. El número de formas es

$$P_c^{13} = (13 - 1)! = 12! .$$

(b) Si la mesa no es circular, se tendrá una permutación de las 13 personas. El número de formas es

$${}_{13}P_{13} = 13! .$$

1.4.4 PERMUTACION CON REPETICION

Hasta ahora hemos permutado objetos diferentes (esto, es,se pueden distiguir). Sin embargo, este no siempre es el caso. Supongamos por ejemplo, que estamos interesados en el número de permutaciones distinguibles uno de otro, que se pueden formar con las letras de la palabra 'AMAR".

Si usáramos la palabra "AMOR" en vez de "AMAR", la permutación estudiada es aplicable directamente y daría el número de permutaciones distinguibles ${}_4P_4 = 4! = 24$. Sin embargo esperamos que la respuesta al presente problema sea menor que 24, pués tenemos letras repetidas. Así, la permutación "MAOR" y "MOAR" corresponden a las permutaciones indistinguibles "MAAR" y "MAAR" en nuestro problema. Luego, a cada permutación de las letras de "AMAR" le corresponde ${}_2P_2$ permutaciones de "AMOR" que aparecen como permutaciones de las letras {A,O}, así

OMAR	AMOR	MAOR	MOAR	AOMR	OAMR	RAOM	ROAM
MROA	MRAO	MORA	MARO	ORMA	ARMO	AROM	ORAM
RMOA	RMAO	ROMA	RAMO	OMRA	AMRO	AORM	OARM

Reemplazando **A** por O vemos que cada uno de estos pares se vuelve indistinguible en el caso de la palabra "AMAR". Por lo tanto, hay

$$\frac{{}_4P_4}{{}_2P_2} = \frac{4!}{2!} = 12$$ permutaciones distinguibles que se pueden hacer con la palabra "AMAR".

Un ejemplo simple es el siguiente. Consideremos un conjunto con cuatro elementos diferentes $\{a,b,c,d\}$. Luego hay $4! = 24$ permutaciones distintas. Supongamos ahora que

$$a = b = x \quad y \quad c = d = y.$$

Entonces, se puede listar sólo las siguientes permutaciones distinguibles

XXYY , XYXY , YXXY , YXYX , XYYX , YYXX.

es decir, tenemos $\dfrac{{}_4P_4}{{}_2P_2\ {}_2P_2} = \dfrac{4!}{2!\ 2!} = 6$ permutaciones distinguibles.

Consideremos ahora el problema de contar el número de permutaciones de las 13 letras de la palabra "DIVISIBILIDAD". En este caso la letra I aparece 5 veces, la letra D aparece 3 veces, y cada una de las otras 5 aparecen exactamente una vez. ${}_{13}P_{13}$ es el número de permutaciones de los elementos de un conjunto que tiene 13 elementos tales como $\{D,A,V,E,S,I,B,O,L,U,T,N,R\}$. Denotemos por P el número (desconocido) de permutaciones diferentes de las letra de DIVISIBILIDAD. Correspondiendo a cada uno de estas permutaciones, hay ${}_5P_5 \cdot {}_3P_3$ permutaciones de las letras DAVESIBOLUTNR. Entonces

$$P \cdot {}_5P_5 \cdot {}_3P_3 = {}_{13}P_{13} \qquad ó \qquad P = \frac{{}_{13}P_{13}}{{}_5P_5 \cdot {}_3P_3} = \frac{13!}{5!3!} .$$

TEOREMA 1.4.8 El número de permutaciones distintas de n objetos de los cuales n_1 son de una clase, n_2 de una segunda clase, ..., n_k de una k-ésimo clase y todo los demás objetos de clase 1, se denota por $P_n^{n_1,n_2,\ldots,n_k}$ y está dado como

$$P_n^{n_1,n_2,\ldots,n_k} = \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}$$

EJEMPLO 18 Un estante de una librería tiene capacidad para 10 libros de Matemáticas que tiene pasta verde, 8 de Física de pasta roja y 7 de Química de pasta azúl. ¿De cuántas maneras pueden colocarse los libros según los colores?

SOLUCION Como interesa sólo los colores, entonces sea $n_1 = 10$, $n_2 = 8$, $n_3=7$. Luego, el número de permutaciones distinguibles es

$$P_{25}^{10,8,7} = \frac{25!}{10!\ 8!\ 7!} = 21,034,600 \ .$$

EJEMPLO 19 Suponga que un día oscuro nacen en cierto hospital cuatro pares de mellisos, idénticos, dos pares de mellizas, idénticas, nueve niños y once niñas. Se utiliza una tinta no indeleble para escribir sus nombres. El día siguiente (aún oscuro) la tinta desaparece. ¿De cuántas maneras es posible mezclar los niños?

SOLUCION Aquí $n_1 = 2$, $n_2 = 2$, $n_3 = 2$, $n_4 = 2$ para niños y $n_5 = 2$, $n_6 = 2$ para niñas. Y el total de niños es $n = 32$, luego

$$P_{32}^{2,2,2,2,2,2} = \frac{32!}{2!\ 2!\ 2!\ 2!\ 2!\ 2!} = \frac{32!}{(2!)^6} \ .$$

1.4.5 PARTICION DE UN CONJUNTO

A menudo se necesita contar el número de formas de particionar un conjunto de n objetos diferentes en r subconjunto llamados *celdas*. La partición se hace teniendo en cuenta los siguientes criterios:

1 Los r subconjuntos son disjuntos dos a dos.

2 La unión de todos los subconjuntos es igual al conjunto original.

3 El orden de los elementos dentro de cada celda no tiene importancia.

Empesaremos considerando un ejemplo simple. Sea el conjunto $\{a,b,c,d,e\}$. Las posibles particiones en dos celdas, en las que la primera contenga cuatro elementos y la segunda sólo un elemento, son:

$$\{\{a,b,c,d\}\ ,\ \{e\}\}\ ,\ \{\{a,b,c,e\}\ ,\ \{d\}\}\ ,\ \{\{a,b,d,e\}\ ,\ \{c\}\}$$
$$\{\{a,c,d,e\}\ ,\ \{b\}\}\ ,\ \{\{b,c,d,e\}\ ,\ \{a\}\}$$

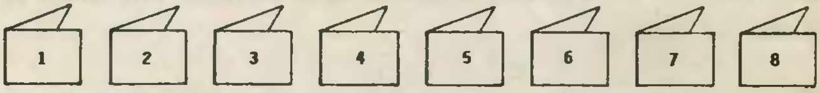
vemos que hay 5 formas distintas de hacer una partición de un conjunto de cinco elementos en dos celdas (o subconjuntos) que contenga cuatro elementos en la primera y uno en la segunda. El número de particiones para este ejemplo se puede escribir así,

$$\frac{5!}{4!\ 1!} = 5$$

Consideremos ahora el ejemplo siguiente

EJEMPLO 20 Suponga que un hombre tiene 8 bonos financieros diferentes de ocho compañías distintas, y que piensa regalarlos a sus hijos de la siguiente manera: a su hijo mayor, 3; a su segundo hijo, 3; y al menor, 2. ¿En cuántas formas puede repartir los bonos?

SOLUCION Una de las formas sería tomar los bonos, alineándolos y dar los tres primeros a su hijo mayor, los siguientes tres al segundo y los dos últimos al menor.



Como existen ${}_8P_8 = 8!$ formas de alinearlos en la mesa, también son $8!$, las formas en que pueden ser distribuídos. Sin embargo, no todas estas formas son diferentes. Hay $3!$ maneras de arreglar el orden de los bonos para su primer hijo, $3!$ para los de su segundo hijo, y $2!$ para los del tercero. Por lo tanto, los bonos pueden repartirse de

$$\frac{8!}{3!\ 3!\ 2!} = 560 \text{ formas} .$$

Este argumento puede generalizarse a un conjunto con n elementos y a r subconjuntos, tal que el primero tenga n_1 elementos, el segundo, n_2, y el r-ésimo subconjunto n_r elementos $(n_1 + n_2 + \ldots + n_r = n)$. El número de divisiones posibles está dado por

$$\frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_r!}$$

que se denota así $\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_r}$. Donde el número superior representa el número total de elementos del conjunto y los números inferiores representan al número de elementos asignados a cada celda.

TEOREMA 1.4.9 El número de formas posibles, que **n** objetos diferentes pueden dividirse en r grupos distinguibles conteniendo $n_1, n_2, \ldots, n_r$ objetos respectivamente donde $n_1 + n_2 + \ldots + n_r = n$, es

$$\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_r} = \frac{n!}{n_1!\, n_2!\ \ldots n_r!}$$

1.4.6 COMBINACION

En muchos casos estaremos interesado en el número de formas de seleccionar r objetos de n, sin importar el orden. Estas selecciones se llaman *Combinaciones*.

DEFINICION 1.4.2 Un subconjunto de r elementos de un conjunto que tiene n elementos diferentes, se llama una *combinación de los n elementos tomados r a r*.

Determinaremos ahora, el número de combinaciones de r elementos que se pueden formar con los n objetos diferentes de un conjunto. Este número se denota por

$$C_n^r \quad \text{o} \quad C(n,r)$$

Comenzaremos nuestra discusión considerando un conjunto de cuatro elementos diferentes $\{a,b,c,d\}$. Tenemos los siguientes subconjuntos no vacíos

$\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{d\}$

$\{a,b\}$, $\{a,c\}$, $\{a,d\}$, $\{b,c\}$, $\{b,d\}$, $\{c,d\}$

$\{a,b,c\}$, $\{a,b,d\}$, $\{a,c,d\}$, $\{b,c,d\}$

$\{a,b,c,d\}$

Existen cuatro subconjuntos de un elemento. Es decir el número de combinaciones de un elemento es 4, o $C_4^1 = 4$, uno por cada elemento. También hay seis subconjuntos de 2 elementos; por lo tanto el número de combinaciones de 4 elementos; tomados 2 a 2 es 6 o sea $C_4^2 = 6$. Así mismo hay cuatro subconjuntos de 3 elementos; es decir el número de combinaciones de 4 elementos tomados 3 a 3 es 4, o sea
$C_4^3 = 4$; y hay sólo un subconjunto de cuatro elementos, por lo tanto el número de combinaciones de 4 elementos tomados 4 a 4 es uno o sea $C_4^4 = 1$.

En general con un conjunto que tiene n elementos se formará:

(a) n combinaciones de un elemento (combinaciones de los n elementos tomados uno a uno); es decir $C_n^1 = n$

(b) n combinaciones de $n - 1$ elementos (combinaciones de los n elementos tomados de $n - 1$ a $n - 1$); es decir

$$C_n^{n-1} = n$$

(c) Una combinación de **n** elementos (combinaciónes de los n elementos tomados n a n); es decir

$$C_n^n = 1$$

Luego, el problema será, calcular el número de combinaciones de los **n** elementos tomados r a r, o sea C_n^r, con

$$r \neq 1,\ n-1,\ n.$$

En el ejemplo discutido hemos obtenido $C_4^2 = 6$. Además se puede observar, que hay una conección entre el problema planteado y el problema de permutaciones considerado en la sección anterior. Para esto escribimos todas las combinaciones de 4 elementos tomados 2 a 2 en una columna como muestra la siguiente tabla y a su derecha sus respectivas permutaciones.

$$C_4^2 \left\{ \begin{array}{c} \{a,b\} \\ \{a,c\} \\ \{a,d\} \\ \{b,c\} \\ \{b,d\} \\ \{c,d\} \end{array} \right. \left| \quad \overbrace{\begin{array}{cc} (a,b), & (b,a) \\ (a,c), & (c,a) \\ (a,d), & (d,a) \\ (b,c), & (c,b) \\ (b,d), & (d,b) \\ (c,d), & (d,c) \end{array}}^{P_2^2} \right. \longleftarrow P_4^2$$

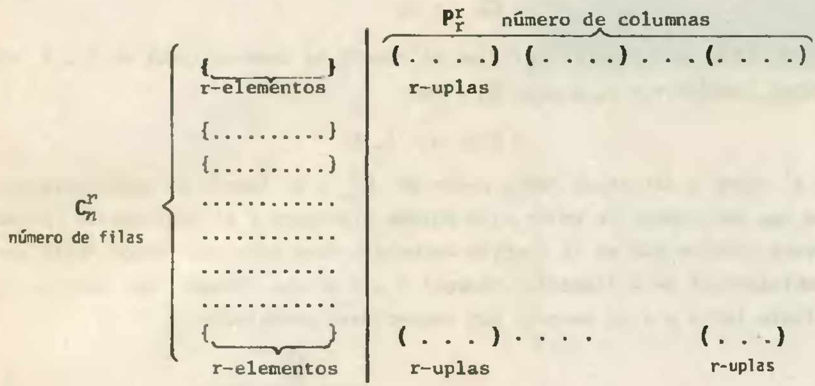
Note que, cada par ordenado de la derecha de la recta es una permutación de 2 a 2 del conjunto situado a la izquierda de la recta, en la misma fila. Para cada subconjunto de dos elementos hay, pues P_2^2 permutaciones.

Entonces, P_2^2 es el número de columnas a la derecha de la recta y C_4^2 es el número de filas. Además todos los elementos que están a la derecha de la recta es el número total de permutaciones de 2 a 2 que se puede formar con los elementos del conjunto $\{a,b,c,d\}$. Es decir, es P_4^2. Por lo tanto, se tiene que

$$C_4^2 \cdot P_2^2 = P_4^2$$

$$\text{ó} \quad C_4^2 = \frac{P_4^2}{P_2^2} = \frac{4!}{2!\,2!} = 6.$$

En general, consideremos ahora un conjunto con n elementos diferentes, C_n^r denotará el número (desconocido) de combinaciones de los n elementos tomados r a r. Imaginemos una tabla en la cual cada una de las combinaciones de r elementos determina una fila. En cada una de las filas escribiremos a su derecha las P_r^r, permutaciones de los r elementos del conjunto que identifica la fila.



El número total de permutaciones de n elementos diferentes tomados r a r que se pueden formar con los n elementos del conjunto es P_n^r. Es decir, el número total de elementos de la tabla. Luego,

$$C_n^r \cdot P_r^r = P_n^r$$

de donde,

$$C_n^r = \frac{P_n^r}{P_r^r} = \frac{\dfrac{n!}{(n-1)!}}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

$$\boxed{C_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!}}$$

Este número, en Matemática tiene un símbolo especial

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-1)!}$$

llamado *Coeficiente Binomial*, porque aparece como coeficiente en el desarrollo del binomio $(a + b)^n$.

NOTA Una combinación de n elementos distintos tomados de a r, en realidad es una partición del conjunto en dos subconjuntos (o celdas), donde una de ellas contiene r objetos y la otra las n - r restantes. Por lo tanto, el número de tales combinaciones será el número de particiones, es decir

$$\binom{n}{r, n-1} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = C_n^r$$

TEOREMA 1.4.10 El número de combinaciones de n objetos diferentes tomados - r a la vez, es

$$C_n^r = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

EJEMPLO 21 Se extraen dos cartas de una baraja de 52 cartas. ¿De cuántas maneras se puede hacer esto?

SOLUCION Se necesita sólo subconjuntos de dos cartas, sin importar el orden entonces, en número de forma de seleccionar estas dos cartas es

$$C_{52}^2 = \frac{52!}{2!50!} = \frac{52 \times 51}{2} = 26 \times 51 = 1326$$

EJEMPLO 22 Un estudiante tiene que contestar 8 de 10 preguntas en un examen.

(a) ¿De cuántas maneras puede el estudiante escoger las 8 preguntas?

(b) Si las tres primeras son obligatorias, ¿de cuántas maneras puede escoger las preguntas?

(c) Si tiene que contestar 4 de las 5 primeras. ¿De cuántas formas puede - hacerlo?

SOLUCION

(a) Como interesa subconjuntos de 8 preguntas de un conjunto de 10 preguntas sin importar el orden, esto sería de

$$C_{10}^8 = \frac{10!}{8!2!} = 45 \quad \text{formas.}$$

(b) Puesto que las tres primeras preguntas son obligatorias; las 5 restantes tendrá que escoger de las 7 preguntas sobrantes. Luego, esto se hace de

$$1 \cdot C_7^5 = \frac{7!}{5!2!} = 21 \quad \text{formas .}$$

(c) Si tiene que contestar 4 de las 5 primeras, lo haría de $C_5^4 = 5$ maneras. Y las 4 preguntas restantes seleccionará de las 5 preguntas finales, lo cual lo haría de $C_5^4 = 5$ formas. Entonces, las 8 preguntas se selecionará de

$$C_5^4 \, . \, C_5^4 = 5 \, . \, 5 = 25 \text{ formas.}$$

EJEMPLO 23 ¿De cuántas maneras puede seleccionarse una partida de 4 o más - personas, si hay 10 personas disponibles?

SOLUCION Nos interesa los subconjuntos de 4,5,6,7,8,9, y 10 personas que se pueden formar con las 10 personas disponibles. Esto se hará de

$$C_{10}^4 + C_{10}^5 + C_{10}^6 + C_{10}^7 + C_{10}^8 + C_{10}^9 + C_{10}^{10} =$$

$$\frac{10!}{4!6!} + \frac{10!}{5!5!} + \frac{10!}{6!4!} + \frac{10!}{7!3!} + \frac{10!}{8!2!} + \frac{10!}{9!1!} + \frac{10!}{10!0!} = 848$$

EJEMPLO 24 Suponga que queremos formar comisiones de cuatro miembros de un grupo de 4 hombres R,S,T,U y 5 mujeres V,W,X,Y,Z. Si además se especifica - que R y S no pueden estar en la misma comisión a menos que la comisión esté formado por lo menos por una mujer. ¿Cuál es el número de comisiones que se puede formar?

SOLUCION Los diferentes casos que se presentan en la solución del problema, se visualiza esquemáticamente en el siguiente diagrama

RS' ⟶ C_7^3. R está en la comisión y S no está, entonces de las 9 personas quedan 7, y de estos 7 deben salir las 3 restantes de la comisión.

R'S ⟶ C_7^3. Igual que el caso anterior, S está y R no está.

R'S' ⟶ C_7^4. Ni R ni S están en la comisión, entonces de los 7 deben salir los 4 de la comisión

RS

1 M ⟶ C_5^1 C_2^1 . R y S están en la comisión, entonces hay C_5^1 formas de escoger una mujer y C_2^1 es el número de formas de seleccionar el otro hombre de {T,U}

2 M ⟶ C_5^2. Igual R y S están en la comisión y hay dos mujeres en la comisión lo cual se - puede hacer de C_5^2 formas.

Luego, el número total de comisiones aceptable es

$$2\,C_7^3 + C_7^4 + C_5^1 . C_2^1 + C_5^2 = 125$$

Observe que el problema puede resolverse así: Hay C_9^4 = 126 comisiones que se pueden formar con los 4 hombres y 5 mujeres. Y hay una comisión conformada por los cuatro hombres R,S,T,U no eceptable. Luego, el número de comisiones aceptables es 126 - 1 = 125.

EJEMPLO 25 ¿Cuántas comisiones integradas por un chico y una chica pueden - formarse de cinco chicos y ocho chicas, si cierto chico rehusa trabajar con dos chicas?

SOLUCION Si llamamos R al chico que no quiere trabajar con dos chicas. Los diferentes casos se muestra en el diagrama siguiente

R $\longrightarrow$ C_6^1 . R está en la comisión, entonces de las 8 - chicas quedan solamente 6.

R' $\longrightarrow$ C_4^1 . C_8^1. R no está en la comisión, entonces de los 4 restantes chicos sale 1 y otro - de las 8 chicas

Por lo tanto, el número total de comisiones aceptables será

$$C_6^1 + C_4^1 \times C_8^1 = 6 + 32 = 38.$$

Observe, que el problema puede resolverse así: hay $C_8^1\,C_5^1$ = 40 comisiones, - en los cuales hay dos que no es aceptable. Luego, hay 40-2=38 comisiones aceptables.

EJEMPLO 26 El asta de bandera de un barco tiene tres posiciones en las que puede colocarse una bandera. Suponiendo que el barco lleva cuatro banderas - (diferentes) para hacer señales.

(a) ¿Cuántas señales diferentes pueden hacerse con una bandera? (se supone - que la misma bandera colocada en posiciones diferentes indica diferentes señales).

(b) ¿Cuántas señales diferentes pueden hacerse con dos banderas?

(c) ¿Cuántas señales diferentes pueden hacerse con las banderas?

SOLUCION (a) Veamos primero de cuántas formas puede seleccionarse una bandera, lo cual se puede hacer de C_4^1 formas. Puesto que la misma bandera, colocada en posiciones diferentes indica señales diferentes, entonces por cada - bandera seleccionada hay P_3^1 , señales diferentes. Por lo tanto, el número - total de señales que puede hacerse con una bandera es

$$C_4^1 \; . \; P_3^1 = 4 \times 3 = 12.$$

(b) En este caso el número de maneras de escoger 2 banderas de entre los cuatro que lleva el barco es C_4^2 y por cada uno de estos subconjuntos de dos - banderas hay P_3^2 señales diferentes que se pueden formar (es una permutación puesto que interesa la posición donde se pone cada bandera). Luego, el número de señales diferentes que pueden hacerse con 2 banderas es

$$C_4^2 \; . \; P_3^2 = \frac{4!}{2!2!} \; . \; \frac{3!}{(3-2)!} = 36.$$

(c) Puesto que se dispone sólo de 3 astas, entonces escogeremos subconjuntos de 3 banderas de las 4 existentes para señales. Esto se hace de C_4^3 formas ; y para cada uno de estas combinaciones hay P_3^3 señales diferentes que pueden hacerse. Entonces, el número de sañales diferentes que se pueden hacer con - todas las banderas es

$$C_4^3 \; . \; P_3^3 = \frac{4!}{3!1!} \; . \; 3! = 24 \; .$$

EJEMPLO 27 Una joven tiene 15 amigos .

(a) ¿De cuántas maneras puede invitar a una cena a 6 de ellos?

(b) Si entre las 15 personas hay dos matrimonios y cada pareja asisten juntos a cualquier reunión. ¿De cuántas maneras puede invitar a 6 amigos?

(c) Si entre las 15 personas hay 2 que no pueden estar en la misma reunión. ¿De cuántas formas puede invitar a 6 amigos?

SOLUCION En cada caso se debe extraer un conjunto de 6 personas, entonces - se trata de un problema de combinaciones.

(a) El número de maneras de elegir 6 personas de un grupo de 15 es

$$C_{15}^6 \; .$$

(b) Se puede presentar los siguientes casos:

(i) Ninguno de los dos matrimonios estan en la cena, entonces de los 11 restantes debe elegirse 6. El número de formas de elegir 6 de 11 es C_{11}^6

(*ii*) Uno de los matrimonios asiste a la reunión y los 4 restantes debe - elegirse de las otras 11 personas.
El número de formas de elegir un matrimonio de los dos es C_2^1 , y el número de maneras de escoger 4 personas de 11 es C_{11}^4.
Por lo tanto, el número de formas de elegir los 6, es $C_2^1 \times C_{11}^4$.

(*iii*) Los dos matrimonios asisten a la cena. El número de formas de elegir los dos matrimonios, es C_2^2 .
Las dos personas restantes se elige de los 11; y el número de maneras es C_{11}^2 . Por lo tanto, el número de formas de elegir los 6, es $C_2^2 \times C_{11}^2$.
Finalmente, el número de maneras de invitar a 6 amigos, es

$$C_{11}^6 + C_2^1 \times C_{11}^4 + C_2^2 \times C_{11}^2 .$$

(c) Se presentan los siguientes casos :

(*i*) Ninguna de las personas en cuestión están en la reunión, entonces - las 6 personas se eligen de las 13. El número de maneras de escoger 6 de 13 es

$$C_{13}^6 .$$

(*ii*) Una de las personas en cuestión está en la reunión, entonces las 5 personas restantes se eligen de las 13. El número de maneras de escoger una de las dos personas en cuestión de C_2^1 y el número de formas de elegir 5 de 13 es C_{13}^5 . Por lo tanto, el número de elegir las 6 personas, es $C_2^1 \times C_{13}^5$.
Finalmente el número de maneras de elegir 6 amigos en el caso (c), es

$$C_{13}^6 + C_2^1 \times C_{13}^5 .$$

1.4.7 NOTAS SOBRE MUESTREO CON Y SIN REEMPLAZO

Suponga un conjunto con n objetos. Considere el problema anterior de extraer **r** objetos de este conjunto. Puede no interesar el orden en que se extraen los objetos. También la extracción se puede hacer con o sin reemplazamiento. Sobre este último hemos dado una breve nota al pasar en 1.2. Aquí - formalizaremos estos conceptos.

DEFINICION 1.4.3 Si al extraer los r objetos del conjunto de n objetos, se considera el orden en que son seleccionados los objetos; el conjunto de los r objetos extraídos, se llama una *muestra ordenada de tamaño* r.

DEFINICION 1.4.4 Cuando un objeto se extrae y se reemplaza antes de extraer el siguiente objeto, se dice que el *muestreo es con reemplazamiento.*

Calculemos ahora, el número de formas de extraer una muestra ordenada de tamaño r de un conjunto de n objetos, si el muestreo es con reemplazamiento.

La primera extracción ocurre de n formas, uno por cada objeto; la segunda extracción también ocurre de n formas, ya que el muestreo es con reemplazamiento. Entonces, el número de formas de extraer dos objetos con reemplazamientos será $n.n = n^2$. Igualmente para la extracción de 3 objetos el número de formas es

$$n^2 . n = n^3$$

y para cualquier número r de extracciones, el número de formas será n^r.

DEFINICION 1.4.5 Si al extraer un objeto no se reemplaza, para extraer el siguiente, se dice que el *muestreo es sin reemplazamiento.*

El número de formas de extraer muestras ordenadas de tamaño r de un conjunto de n objetos, si el muestreo es sin reemplazamiento se obtiene así: la primera extracción ocurre de n formas, la segunda extracción ocurre de $n - 1$ formas. Entonces, el número de formas de extraer dos objetos sin reemplazamiento es $n(n - 1)$. Similarmente para la tercera extracción hay $n - 2$ formas Luego, el número de formas de extraer 3 objetos es $n(n - 1)(n - 2)$. Así sucesivamente, el número de formas de extraer una muestra de tamaño r, sin reemplazimiento es

$$n(n - 1)(n - 2)...(n - r + 1) = \frac{n!}{(n - r)!}$$

el cual es equivalente a P_n^r, número de permutaciones de n objetos tomados r a r. Si no interesa el orden en que se extraen los elementos de la muestra El número de maneras de escoger r objetos de los n, está dado por

$$C_n^r = \binom{n}{r}.$$

EJEMPLO 28 Considere las placas de automóviles que tiene tres letras seguidas de tres dígitos. Si pueden emplearse todas las combinaciones posibles, - ¿cuántas placas diferentes pueden formarse?.

SOLUCION Las placas forman 6-uplas ordenadas; donde las tres primeras son - letras y las tres siguientes dígitos. Como no hay restricciones respecto a - las letras y números que se usan; es decir puede usarse letras y números - iguales. Entonces, hay $(26)^3$ formas ordenadas de extraer las tres letras y - $(10)^3$ formas de extraer los tres números. Luego, el número de formas de formar placas con tres letras seguidas de tres dígitos es

$$(26)^3 \,.\, (10)^3 = 17576(10)^3$$

PROBLEMAS 1.4

1. ¿Cuántos números se pueden formar con los dígitos {1,2,3,4,5}. Suponiendo que no pueden repetirse estos?
2. ¿Cuántos números de tres cifras pueden formarse con los dígitos {0,1,2,3, 4}, si no pueden repetirse estos?
3. ¿Cuántos números de tres cifras distintos existen?
4. ¿De cuántas formas posibles pueden salir de una aula los 25 alumnos que - estan en ella?. (Se sobreentiende que salen de uno por uno).
5. En un salón de clase se quiere sentar a 6 jóvenes y 5 chicas en una sóla fila, de manera que las chicas ocupen los lugares pares. ¿De cuántas maneras se puede hacer?
6. (a) ¿Cuántos números de tres cifras pueden formarse con los dígitos 0,1, 2,3,4 y 5, si cada dígito se utiliza una sóla vez?
   (b) ¿Cuántos de ellos son impares?
   (c) ¿Cuántos de ellos son mayores de 330?
7. Hay dos obras de 3 volúmenes cada una y otras dos de dos volúmenes cada - una. ¿De cuántas maneras pueden colocarse los 10 libros en un estante, si deben quedar de tal manera que no se separen los volúmenes de la misma - obra?
8. ¿Cuántas palabras distinguibles se pueden hacer con las letras de la palabra MISSISSIPPI?
9. ¿Cuántos números diferentes de 12 cifras pueden formarse si se dispone de

los dígitos: 2,2,2,2,4,4,4,5,5,5,5,5?

10. Dada una caja con los siguientes focos: 2 de 25 vatios, 3 de 50 vatios y 4 de 100 vatios.
    (a) ¿De cuántas maneras pueden escogerse 3 de ellos?
    (b) ¿Cuántas de estas selecciones de tres incluirán a los 2 de 25 vatios? ¿Cuántos no contendrán los de 25 vatios?
    (c) ¿Cuántas selecciones de tres focos incluirán exactamente uno de cada uno de las potencias?

11. ¿Cuántas cantidades diferentes de dinero pueden formarse con las monedas, siguientes, 1 de 50 centavos, 1 de un sol, 1 de 5 soles, 1 de 10 soles, 1 de 50 soles y 1 de 100 soles?

12. ¿Cuántos equipos de fútbol pueden formarse con 12 hombres que puedan ocupar cualquier posición delantera y 10 hombres que puedan ocupar cualquiera de las demás posiciones?

13. En cada caso determine el valor de n. Si,
    (a) $C_n^2 = C_n^8$; (b) $C_n^{11} = C_n^7$; (c) $C_{18}^n = C_{18}^{n-2}$.

14. Si $C_{(18,4)} - C_{(18,n+2)} = 0$, determine el valor de C_n^5 .

15. ¿De cuántas formas diferentes pueden arreglarse tres focos rojos, cuatro amarillos y tres azules en una serie navideña que contiene diez portafocos?

16. Un estudiante del primer año debe llenar un programa que consiste en un curso de idioma extranjero, uno de ciencias naturales, uno de ciencias sosiales y uno de español. Si hay cuatro posibilidades para escojer el idioma extranjero, seis para el curso de ciencias naturales, tres para el curso de ciencias sociales y dos para el curso de español, ¿De cuántas maneras puede llenar su programa el estudiante?

17. En una Biblioteca hay 8 libros de geometría, 14 de álgebra, 10 de física y 5 de química. ¿De cuántas maneras puede un estudiante seleccionar cuatro libros, de manera que sea uno de cada curso mencionado?

18. Un club tiene 15 miembros, 10 hombres y 5 mujeres, ¿cuántos comités de 8 miembros se pueden formar:
    (a) Si cada uno de ellos debe contener por lo menos 3 mujeres?

(b) Si en cada uno de ellos debe estar el presidente y la secretaria del club?

19. En 10 tubos de prueba se cultivan tres tipos de bacterias, tres tubos contienen bacterias del primer tipo, cuatro contienen bacterias del segundo tipo y tres bacterias del tercer tipo. De cuántas maneras distintas pueden ponerse en un porta-tubos, teniendo en cuenta solamente el orden del tipo de bacterias.

20. Un caballero entra a una tienda que tiene en exhibición 12 corbatas diferentes, a saber: 5 de tipo italiano, 4 de tipo inglés y 3 de tipo nacional ¿Cuántas compras diferentes puede hacer, si desea llevar como mínimo una corbata del tipo italiano y una del tipo inglés?

21. Un grupo de 14 viajeros, de los cuales 6 son mujeres y 8 son varones, deben ser alojado en un hotel que posee 7 habitaciones tales que puedan ser instalados dos viajeros en cada una de ellas.

(a) ¿De cuántas formas posibles se pueden ubicar?

(b) ¿De cuántas formas posibles se pueden ubicar, si en cada habitación debe estar personas de igual sexo?. Si en el grupo hay dos matrimonios. ¿De cuántas formas se pueden ubicar, si se desea que cada matrimonio ocupe una habitación y el resto de las habitaciones no sea ocupado por personas de distinto sexo?

22. En una clínica trabajan 18 enfermeras.

(a) ¿Cuántas guardias diferentes de 3 enfermeras pueden formarse?

(b) ¿En cuántas guardias de las formadas en (a) estará una enfermera determinada?

23. ¿Cuántas manos de poker de cinco cartas consisten de :

(a) dos pares (dos cartas iguales)?

(b) cuatro de la misma clase (iguales)?

(c) full (3 cartas de la misma denominación y 2 de otra)?

24. Cinco amigos se encuentran en una fiesta. ¿Cuántos saludos de mano se intercambian si cada amigo estrecha la mano de todos los demás sólo una vez?

25. Un biólogo intenta clasificar 46,200 especies de insectos asignando a cada especie tres iniciales del alfabeto. ¿Será la clasificación completa? ¿sino, cuál es el número de iniciales que debería ser usado.

26. La mesa de sesiones del rectorado de cierta Universidad es rectangular; - en una sesión ordinaría, asiste el Rector, el secretario, nueve directores de programas académicos y dieciocho jefes de departamentos. El Rector y - el secretario ocupan permanentemente la cabecera y al frente de ellos están también permanentemente los dos directores más antiguos; el resto de los asistentes se sientan en las partes laterales de la mesa. Se pregunta ¿De cuántas maneras diferentes pueden sentarse en la mesa los asistentes (todos los asistentes) a la seción mencionada?

27. Para transmitir señales de día, se dispone de cuatro banderas triangulares distintas, y de tres juegos iguales, compuestos cada uno por nueve - banderas rectangulares, distintas entre si. Cada señal debe consistir en una bandera triangular, seguida de tres, dos, una o ninguna rectangular ; se desea saber que número de señales distintas pueden hacerse y qué sería mas perjudicial en cuanto a dicho número se refiere, si perder tres banderas rectangulares iguales o dos juegos de esta clase de banderas.

28. Para transmitir señales de una isla a la costa, se dispone de 6 luces - blancas y 6 rojas, colocados en los vértices de un exágono. En cada vértice no puede haber encendida más que una luz (blanca, roja) y el número mínimo de luces encendidas es tres. Hallar el número de señales distintas - que se pueden formar.

29. Una firma comercial tiene 10 vendedores. ¿De cuántas formas puede asignarse los vendedores en dos escritorios con cinco vendedores en cada escritorio? ¿Con siete en un escritorio y tres en la otra?.

30. Una firma comercial tiene diez vendedores. ¿De cuántas formas pueden los vendedores ser asignados a tres escritorios con tres en el primer escritorio, tres en el segundo y cuatro en el tercer escritorio?.

1.5 DEFINICION DE PROBABILIDAD

Aunque parece sorprendente, daremos aquí tres enfoques que dan lugar a tres definiciones diferentes de "probabilidad" lo cual puede ser chocante al que se inicia en estas cuestiones, al disponer de tres definiciones de probalidad, pues se preguntará, ¿Qué definición de probabilidad va a utilizar?. - Sin embargo, no lo es tanto ya que cualquiera que sea la definición de probabilidad que se utilice, *las reglas de probabilidad son las mismas* (Axiomas , Teoremas, etc); más aún las tres definiciones son complementarias y la definición adecuada de probabilidad que se use dependerá de la naturaleza del problema específico que se está tratando de resolver. Estas definiciones son

(1) Definición clásica o apriori.

(2) Definición de probabilidad por frecuencia relativa o aposteriori. Las definiciones (1) y (2) son probabilidades objetivas.

(3) Probabilidad subjetiva.

1.5.1 DEFINICION CLASICA

La definición clásica de probabilidad fue dada por Laplece en su obra "Teoría Analítica de las probabilidades" publicas en 1812. Esta definición se basa en el supuesto de que todos los resultados posibles de un experimento aleatorio son igualmente probables; es decir, cada uno de los elementos del espacio muestral tienen la misma posibilidad de salir. Así, por ejemplo, si lanzamos un dado no cargado (honesto), debe considerarse que hay igual posibilidad que salga cualquiera de los números del espacio muestral $\Omega = \{1, 2,3,4,5,6\}$, entonces la probabilidad que salga cualquier número será $\frac{1}{6}$.

En general si un experimento aleatorio tienen n resultados posibles, los n elementos del espacio muestral tendrán la misma posibilidad de salir. En consecuencia la probabilidad de que salga cualquiera de ellos es $\frac{1}{n}$. Las observaciones anteriores conducen a la definición clásica de probabilidad de un evento como la siguiente:

> La probabilidad de un evento es la razón entre el número de casos (sucesos) favorables y el número total de casos (sucesos) posibles, siempre que nada obligue a creer que algunos de estos sucesos debe tener preferencia a los demás, lo que hace que todos sean igualmente posibles.

En la definición anterior si, $N(\Omega) = n$, es el número de elementos del espacio muestral (número total de sucesos) y $N(A) = n_A$, es el número de elementos del evento A (o número de sucesos favorables); la probabilidad del evento A, denotado por "P[A]" es la razón de N(A) a N(Ω), o sea

$$\boxed{P[A] = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{n_A}{n} = \frac{\text{número de casos favorables al evento A}}{\text{número de casos posibles}}}$$

OBSERVACIONES

1. La probabilidad de un evento cualquiera A está comprendido entre 0 y 1. - En efecto: n_A y n son enteros positivos y $0 \leq n_A \leq n$, Dividiendo por n se tiene

$$\frac{0}{n} \leq \frac{n_A}{n} \leq \frac{n}{n}, \text{ ó } 0 \leq P[A] \leq 1$$

2. $P[A] = 0$, si A es un evento imposible.
En efecto: $A = \phi$, entonces $n_A = 0$, luego $P[A] = \frac{0}{n} = 0$

3. $P[A] = 1$, si A es el evento seguro.
En efecto: $A = \Omega$, entonces $n_A = n$, luego $P[A] = \frac{n}{n} = 1$.

4. Puesto que todos los elementos de $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$ son igualmente probables, se tiene $P[\{\omega_i\}] = \frac{1}{n}$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

$$y \quad P[\Omega] = \sum_{i=1}^{n} P[\{\omega_i\}] = 1 .$$

Si A es un evento en Ω, entonces

$$P[A] = \sum_{\omega_i \in A} P[\{\omega_i\}] .$$

EJEMPLO 1 Si se lanza una moneda tres veces. Calcular la probabilidad que Ocurran: (a) dos caras ; (b) al menos dos caras; (c) a lo más dos caras.
SOLUCION El experimento aleatorio es, "lanzar una moneda tres veces". El espacio muestral asociado a este experimento es

$\Omega = \{CCC, CCS, CSC, SCC, CSS, SCS, SSC, SSS\}$; luego $N(\Omega) = 8$

(a) Sea el evento A: "Ocurre dos caras".
Los sucesos favorables a A son $\{CCS, CSC, SCC\}$, o sea $N(A) = 3$
Por lo tanto, $P[A] = \frac{3}{8}$.
(b) Sea el evento B: "Ocurre al menos dos caras".
Los sucesos favorables al evento B son $\{CCS, CSC, SCC, CCC\}$, o sea $N(B) = 4$ .Por lo tanto, $P[B] = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$.
(c) Sea el evento C: "Ocurre a lo más dos caras".

Entonces, $C = \{SSS, SSC, SCS, CSS, CCS, CSC, SCC\}$ y $N(C) = 7$

Por lo tanto, $P[C] = \frac{7}{8}$.

Obsérvece, que decir ocurren dos caras no es lo mismo que decir ocurren al menos dos caras, pués en este último caso, 3 caras también es un suceso - favorable y si fuera posible la ocurrencia de 4,5, etc. caras también serían sucesos favorables. Algo similar ocurre cuando decimos ocurren a lo más 2 caras en cuyo caso; 0,1,2 caras son sucesos favorables. Aclararemos esto en - otros ejemplos posteriores.

EJEMPLO 2 Consideremos el lanzamiento de dos dados. Calcular la probabilidad de

(a) obtener suma 7 (b) obtener suma 6 ; (c) obtener suma mayor que 5; (d) que el resultado del primer dado sea mayor que el resultado del segundo.

SOLUCION El experimento aleatorio es, "lanzar dos dados".
El espacio muestral asociado a este experimento, es el conjunto de pares ordenados, en las que la primera componente es el resultado del primer dado y las segunda componente el resultado del segundo, como hemos visto en el ejemplo 7 de 1.2. y $N(\Omega) = 36$.

Sean los eventos siguientes :

$A = \{(\omega_1,\omega_2) \in \Omega \;/\; \omega_1 + \omega_2 = 7\}$ = obtener suma 7.

$B = \{(\omega_1,\omega_2) \in \Omega \;/\; \omega_1 + \omega_2 = 6\}$ = obtener suma 6.

$C = \{(\omega_1,\omega_2) \in \Omega \;/\; \omega_1 + \omega_2 > 5\}$ = obtener suma mayor que 5

$D = \{(\omega_1,\omega_2) \in \Omega \;/\; \omega_1 > \omega_2\}$ = el resultado del primer dado es mayor que del segundo.

$$\Omega = \left\{\begin{matrix} (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6) \\ (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6) \\ (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6) \\ (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6) \\ (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6) \\ (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6) \end{matrix}\right\}$$

Un simple conteo nos permite determinar $N(A) = 6$, $N(B) = 5$, $N(C) = 26$, $N(D) = 15$. Entonces :

(a) $P[A] = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$; (b) $P[B] = \frac{5}{36}$;

(c) $P[C] = \frac{26}{36} = \frac{13}{18}$; (d) $P[D] = \frac{15}{36} = \frac{2}{12}$.

El lector puede calcular la probabilidad de obtener suma 5, $\frac{4}{36}$; suma 4, $\frac{3}{36}$ etc. y si calcula la probabilidad de obtener suma 2,3,8,9,10,11,12, se dará cuenta porqué se apuesta a obtener suma 7.

Respecto a este mismo ejemplo, podemos concebir el resultado de nuestro experimento como la suma de los resultados individuales, (es decir, se lanza dos dados y se observa la suma obtenida de ambos), en este caso el espacio muestral sería $\Omega = \{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$. Es claro que ahora los sucesos no ocurren con la misma frecuencia, es decir no son igualmente posibles. Si suponemos que los sucesos son igualmente posibles tendríamos, por ejemplo que la probabilidad que ocurra 7 sería $\frac{1}{11}$, sin embargo hemos visto que esta probabilidad es $\frac{1}{6}$.

EJEMPLO 3 En una caja hay 20 bolas numeradas del 1 al 20. Se extrae al azar una bola. ¿Cuál es la probabilidad que el número de la bola extraída
(a) no exceda de 20? (b) sea el 32? (c) sea por lo menos 15?

SOLUCION El experimento aleatorio es "extraer una bola de la caja". Luego

$$\Omega = \{①, ②, \ldots, ⑳\} \quad \text{y} \quad N(\Omega) = 20$$

(a) Sea el evento A: "el número de la bola extraida no exceda de 20".
Como el número de cualquier bola que se halla en la caja no supera a 20, el evento A es igual al espacio muestral Ω, o sea $A = \Omega$, en este caso el evento A es el evento seguro. Por lo tanto.

$$N(A) = N(\Omega) = 20 \quad \text{y} \quad P[A] = 1 .$$

(b) Sea el evento B: "el número de la bola extraída es el 32".
Como en la caja no hay bola marcada con el número 32, B es el evento imposible, o sea $B = \phi$. Entonces

$$N(B) = 0, \quad \text{y} \quad P[B] = 0/20 = 0$$

(c) Sea el evento C: "el número de la bola extraída sea por lo menos 15".

$$C = \{⑮, ⑯, \ldots, ⑳\} , \quad N(C) = 6 \quad \text{y} \quad P[C] = 6/20 = 3/10.$$

EJEMPLO 4 Una lotería consta de 10000 billetes. Un billete se premia con 100 intis, cuatro billetes con 50 intis, diez billetes con 20 intis, veinte billetes con 10 intis, 165 billetes con 5 intis y 400 billetes con 1 inti cada uno. Los demás billetes no se premian. Se compra un billete, ¿cuál es la probabilidad de ganar

(a) por lo menos 10 intis? (b) a lo más 5 intis?

SOLUCION El experimento aleatorio es "elegir un billete".

$\Omega = \{B_1, B_2, \ldots, B_{10000}\}$ donde B_i representa el billete número i .

$N(\Omega) = 10000$

(a) Sea el evento A: "ganar almenos 10 intis".

Ganar almenos 10 intis significa que se puede ganar 10 intis, ó 20 intis ó 50 intis ó 100 intis. Es decir $N(A) = 20 + 10 + 4 + 1 = 35$, luego

$$P[A] = \frac{35}{10000} = 0.0035 \, .$$

(b) Sea el evento B : "ganar a lo más 5 intis".

Ganar a lo maś 5 intis significa que se puede ganar 1 inti ó 5 intis; o sea $N(B) = 400 + 165 = 565$. Luego

$$P[B] = \frac{565}{10000} = 0.0565 \, .$$

EJEMPLO 5 Se elige una carta aleatoriamente de una baraja de 52 cartas. ¿Cuál es la probabilidad que sea un palo negro (espadas o tréboles)?. ¿Cuál que sea un diez?. ¿Cuál que sea una figura (Rey, Reyna, Sota)?. ¿Cuál es la probabilidad que sea un cuatro o menos?.

SOLUCION El experimento aleatorio es, "extraer una carta de 52".

El espacio muestral Ω tiene 52 elementos. O sea $N(\Omega) = 52$.

(a) Sea el evento A: "obtener un palo negro".

A tiene 26 elementos (13 espadas + 13 tréboles). Luego,

$$P[A] = \frac{26}{52} = \frac{1}{2} \, .$$

(b) Sea el evento B: "obtener un diez".

B tiene 4 elementos (pues hay 4 dieces). Entonces,

$$P[B] = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}.$$

(c) Sea el evento C: "obtener una figura".

C tiene 12 elementos (4 Reyes + 4 Reinas y 4 Sotas). Luego,

$$P[C] = \frac{12}{52} = \frac{3}{13}.$$

(d) Sea al evento D: "obtener un cuatro o menos".

D tiene 16 elementos (4 Ases + 4 Dos + 4 tres + 4 Cuatros). Luego,

$$P[D] = \frac{16}{52} = \frac{4}{13}.$$

EJEMPLO 6 Dos personas A y B se distribuyen al azar en tres oficinas numeradas con 1,2, y 3 respectivamente, pudiendo estar ambos en una misma oficina. ¿Cuál es la probabilidad que

(a) la oficina 2 se quede vacía? (b) dos oficinas se queden vacias?

SOLUCION PRIMERA FORMA Definimos los siguientes eventos:

A_i : "la persona A está en la oficina i, ($i = 1,2,3$)".

B_j : "la persona B está en la oficina j, ($j = 1,2,3$)".

A_iB_j : "la persona A está en la oficina i y B en la oficina j,(i,j=1,2,3)".

E : "la oficina 2 se queda vacia".

F : "dos oficinas se quedan vacias".

El espacio muestral apropiado al experimento aleatorio "distribuir dos personas en tres oficinas", es

$$\Omega = \left\{ \begin{matrix} A_1 B_1 , A_1 B_2 , A_1 B_3 \\ A_2 B_1 , A_2 B_2 , A_2 B_3 \\ A_3 B_1 , A_3 B_2 , A_3 B_3 \end{matrix} \right\}, \text{ o sea } N(\Omega) = 9.$$

(a) Los sucesos favorables al evento E son $\{A_1B_1 , A_3B_1 , A_1B_3 , A_3B_3\}$, o sea - N(E) = 4, luego

$$P[E] = \frac{4}{9}.$$

(b) Los sucesos favorables al evento F son $\{A_1B_1 , A_2B_2 , A_3B_3\}$, osea N(F) = 3 entonces

$$P[F] = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} .$$

SEGUNDA FORMA El problema puede resolverse utilizando técnicas de conteo sin escribir el espacio muestral como sigue: Calculemos el número de elementos del espacio muestral. Ambas personas pueden estar en la misma oficina, entonces, la persona A puede distribuirse en cualquiera de las tres oficinas, lo que da 3 formas, la persona B puede también distribuirse en cualquiera de las tres oficinas; dando igualmente 3 formas. Por lo tanto, el número de formas de distribuir las dos personas es 3.3 = 9. Es decir $N(\Omega) = 9$.

(a) Hallaremos ahora el número de casos favorables al evento,
E : "la oficina 2 se queda vacía".

La oficina 2 se queda vacía es equivalente a que las dos personas se distribuyen en las dos oficinas restantes, y esto se puede hacer de $2^2 = 4$ formas Luego,

$$P[E] = \frac{4}{9} .$$

(b) Calculemos el número de casos favorables al evento,
F : "dos oficinas se quedan vacías".
Dos oficinas se quedan vacías es equivalente a que las 2 personas están en la misma oficina, y esto ocurre de 3 formas (la primera persona puede ubicarse en cualquiera de las 3 oficinas y la segunda de una sola forma, en la oficina del primero); entonces

$$P[F] = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} .$$

EJEMPLO 7 En una compañía hay 6 varones y 4 damas que aspiran a ser miembros de un comité. Si se deben escoger 2 al azar escribiendo los nombres en hojas de papel y sacándolos de una urna. ¿Cuál es la probabilidad que los dos sean hombres? ¿Cuál que sean un hombre y una mujer o dos mujeres?

SOLUCION El experimento aleatorio es "extraer 2 nombres de los 10".
El espacio muestral tiene la forma $\Omega = \{\{A,B\},\{A,C\}, \ldots\}$. Como cada suceso es un conjunto de dos personas el espacio muestral Ω tiene C_{10}^2 elementos.
(a) Sea el evento A: "los dos sean hombres"
A tiene C_6^2 elementos. Por lo tanto

$$P[A] = \frac{C_6^2}{C_{10}^2} = \frac{1}{3} .$$

(b) Sea el evento B: "Sean un hombre y una mujer o dos mujeres".
B es un evento compuesto. La primera parte "sea un hombre y una mujer" ocurre de 6 x 4 formas, por el principio de multiplicación , la segunda parte "sean dos mujeres" ocurre de C_4^2 formas. Por el principio de adición se tiene N(B) = 6 x 4 + C_4^2 , luego

$$P[B] = \frac{24 + C_4^2}{C_{10}^2} = \frac{30}{C_{10}^2} = \frac{2}{3} .$$

EJEMPLO 8 Sobre una mesa hay 10 monedas con 4 caras y 6 sellos a la vista. Se separan 6 monedas al azar. ¿Cuál es la probabilidad que resultan 3 caras y 3 sellos?.

SOLUCION El experimento aleatorio, es "separar 6 monedas de las 10 que hay" Entonces el espacio muestral consta de subconjuntos de 6 elementos, o sea

$$\Omega = \{\{ ©,©,Ⓢ,Ⓢ,Ⓢ,Ⓢ \} , \{.....\},...\}$$
$$N(\Omega) = C_{10}^6 .$$

Sea el evento A: "resultan 3 caras y 3 sellos".
El evento A es compuesto. La primera parte; con cuatro caras tomadas de tres en tres, se forman C_4^3 grupos diferentes.
La segunda parte: con seis sellos, tomados de tres en tres se forman C_6^3 grupos distintos.
Como cada uno de los C_4^3 grupos de 3 caras puede combinarse con cada uno de los C_6^3 grupos de 3 sellos, por el principio de multiplicación, se pueden formar $C_4^3\, C_6^3$ grupos diferentes de 3 caras y tres sellos cada uno. Es decir, $N(A) = C_4^3\, C_6^3$. Por lo tanto,

$$P[A] = \frac{C_4^3\, C_6^3}{C_{10}^6} = \frac{4.20}{210} = \frac{8}{21} .$$

EJEMPLO 9 De 20 personas que contrajeron cierta enfermedad al mismo tiempo y que fueron llevados a una misma sala de un hospital, 15 se recuperan completamente en 3 días; al cabo del cual, se escogen aleatoriamente 5 personas para un chequeo. ¿Cuál es la probabilidad que los 5 sean dados de alta? ¿Cuál es la probabilidad que exactamente 4 sean dados de alta? ¿Cuál es la probabilidad que ninguno sea dado de alta?

SOLUCION El experimento aleatorio es escoger 5 personas de los 20. Luego, el espacio muestral tiene la forma $\Omega = \{\{A, B, C, D, B\}, \{.....\}, ...\}$ por lo tanto, el espacio muestral Ω tiene $\binom{20}{5}$ elementos.

(a) Sea el evento A: "las 5 personas sean dado de alta".
(es decir, todos están sanos). Entonces, el evento **A** tiene $\binom{15}{5}$ elementos (ya que 15 de los 20 están sanos). Luego,

$$P[A] = \frac{\binom{15}{5}}{\binom{20}{5}} = \frac{\dfrac{15!}{5! \times 10!}}{\dfrac{20!}{5! \times 15!}} = \frac{15! \times 15!}{10! \times 20!} = \frac{1001}{5168}.$$

(b) Sea el evento B: "exactamente 4 personas están sanos".
B es un evento compuesto. La primera parte: con 15 personas sanos tomados de a 4 se forman $\binom{15}{4}$ grupos diferentes. La segunda parte: con 5 personas enfermas tomados de a 1 se forman $\binom{5}{1}$ grupos diferentes. Luego, el número de elementos de B es $\binom{15}{4}\binom{5}{1}$. Por lo tanto,

$$P[B] = \frac{\binom{15}{4}\binom{5}{1}}{\binom{20}{5}} = \frac{5005}{5168}.$$

(c) Sea el evento C: "ninguna persona esta sana".
C tiene $\binom{5}{5} = 1$ elemento. Luego, $P[C] = 1/\binom{20}{5}$.

EJEMPLO 10 Se tiene cuatro urnas numeradas de 1 a 4 y cuatro bolas también numeradas de 1 a 4. Se coloca al azar una bola en cada urna. ¿Cuál es la probabilidad que la bola i sea colocada en la urna i ($i = 1,2,3,4$)? ¿Cuál es la probabilidad que la bola 1 sea colocada en la urna 1 y la bola 2 en la urna 2?.

SOLUCION El experimento aleatorio es "colocar una bola en cada urna".
Puesto que cada bola se coloca en la urna al azar, entonces: la primera bola tendrá 4 formas de ser colocada en una urna; la segunda bola tendrá 3 formas de ser colocada en una de las urnas restantes. Por lo tanto, las dos primeras

bolas de colacan de 4 x 3 formas. La tercera bola se colocará de 2 formas - (en una de las 2 urnas restantes). Las tres primeras se colocarán de 4 x 3 x 2 formas. La última bola tendrá una sóla forma de ser colocada. Luego, el número de formas es 4 x 3 x 2 x 1 = 4!. Es decir

$$N(\Omega) = 4! = {}_4P_4$$

El espacio muestral tiene la forma $\Omega = \{\boxed{3}\boxed{2}\boxed{1}\boxed{4}, \boxed{1}\boxed{2}\boxed{4}\boxed{3}, \ldots\}$

Definimos los siguientes eventos :

B_i : "la bola i sea colocada en la urna i (i = 1,2,3,4)".

(a) $i = 1$; B_1: "la bola 1 sea colocada en la urna 1".

La bola 1 se colocará en la urna 1 de una sóla forma y las otras tres bolas se colocarán de 3! formas. O sea

$$N(B_1) = 1.\ 3! = 3!$$

En general, la bola i se colocará en la urna i de una sóla forma y las tres restantes se colocarán de 3! formas. O sea

$$N(B_i) = 1.\ 3! = 3! = {}_3P_3,\ (i = 1,2,3,4).$$

Entonces, $$P[B_i] = \frac{{}_3P_3}{{}_4P_4} = \frac{3!}{4!} = \frac{1}{4},\quad i = 1,2,3,4.$$

(b) Sea A: "la bola 1 sea colocada en la urna 1 y la bola 2 en la urna 2"

Note que $A = B_1$ y B_2 .

La bola 1 se colocará en la urna 1 de una sóla forma, la bola 2 lo mismo, y las dos bolas restantes se colocarán de 2! formas. Es decir

$$N(A) = 1 \times 1 \times 2! = {}_2P_2 .$$

Luego, $$P[A] = \frac{{}_2P_2}{{}_4P_4} = \frac{2!}{4!} = \frac{1}{12} .$$

EJEMPLO 11 Un experimento aleatorio consiste en disponer los dígitos 2,3,4, 5,6,7,8,9, uno a continuación del otro; calcular la probabilidad de:

(a) Que el 3 aparece junto al cuatro y en ese orden.

(b) El número formado sea par;

(c) El número formado sea mayor que 6×10^7 ;

(d) El número formado sea múltiplo de 4;

(e) El número formado sea múltiplo de 3.

SOLUCION El experimento aleatorio es disponer uno a continuación del otro los dígitos 2,3,4,5,6,7,8,9. Entonces, $\Omega = \{42698753, 72934856, \ldots\}$; es decir cada elemento del espacio muestral son arreglos de los 8 dígitos. Por lo tanto, tiene 8! elementos. O sea $N(\Omega) = 8! = {}_8P_8$

(a) Sea el evento A: "El 3 aparece junto al cuatro y en ese orden".

Es decir, en las diferentes ordenaciones el 3 y el 4 aparecen juntos, así 34 y en ese orden, luego puede considerarse como uno solo. Por lo tanto, quedan solamente 7 número por permutar. Entonces, el evento **A** tiene 7! elementos, es decir $N(A) = 7! = {}_7P_7$. Luego,

$$P[A] = \frac{{}_7P_7}{{}_8P_8} = \frac{7!}{8!} = \frac{1}{8} .$$

(b) Sea el evento B: "el número formado sea par".

Para que el número formado sea par, debe terminar en 2,4,6, u 8. Las cuales se pueden escoger de 4 formas y para cada uno de estas habrá 7! formas de ordenar los 7 dígitos restantes. Entonces, el evento B tiene 4 x 7! elementos.

Luego,
$$P[B] = \frac{4 \times 7!}{8!} = \frac{1}{2} .$$

(c) Sea el evento C: "el número formado sea mayor que 6×10^7".

Para que el número formado sea mayor que 6×10^7, tiene que empezar con los dígitos 6,7,8 ó 9; los cuales se pueden escoger de 4 formas y para cada uno de estos hay 7! formas de ordenar los 7 dígitos restantes. Es decir, el evento **C** tiene 4 x 7! elementos. Por lo tanto,

$$P[C] = \frac{4 \times 7!}{8!} = \frac{1}{2} .$$

(d) Sea D, el evento: "el número formado es múltiplo de 4".

Un número es múltiplo de 4 cuando lo es, las dos últimas cifras, y ese conjunto es

32	24	36	28
52	64	56	48
72	84	76	68
92		96	

Es decir, hay 14 posibles terminaciones, y para cada una de estas hay, 6! formas de ordenar los dígitos restantes. Entonces, el evento **D** tiene 14 x 6!

elementos. Luego,

$$P[D] = \frac{14 \times 6!}{8!} = \frac{2 \times 7!}{8!} = \frac{1}{4}.$$

(e) Sea E, el evento: "el número formado sea múltiplo de 3".
Un número es múltiplo de 3, si la suma de los valores de sus cifras es múltiplo de 3. Pero, 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 44. Entonces, cualquier número que se forme no será múltiplo de 3. Por lo tanto, el evento E tiene 0 elementos. Luego,

$$P[E] = \frac{0}{8!} = 0.$$

EJEMPLO 12 Diez libros se colocan aleatoriamente en un estante. Determinar la probabilidad que tres libros determinados, sean colocados juntos.

SOLUCION El experimento es "colocar 10 libros diferentes en un estante". Entonces, los elementos del espacio muestral son arreglos de los libros. Luego el número de elementos del espacio muestral Ω es 10! . Esto es,

$$n = N(\Omega) = 10!.$$

Sea el evento, **A**: "Tres libros determinados queden juntos".
Puesto que los 3 libros deben estar juntos, podemos considerar como si fuera uno sólo; luego, en vez de los diez habrá sólo 8 libros, los cuales pueden colocarse de 8! formas. Pero, los tres libros también pueden cambiar de posición entre ellas, la cual se hace de 3! formas. Por lo tanto, el evento **A** tiene 8! .3! elementos. Luego,

$$P[A] = \frac{8!.3!}{10!} = \frac{1}{15}.$$

EJEMPLO 13 Si se revuelven las 11 letras de la palabra "MISSISSIPPI" y se dispone en un orden arbitrario. ¿Cuál es la probabilidad que

(a) en la ordenación resultante las cuatro ies sean letras consecutivas?

(b) las cuatro ies sean consecutivas supuesto que la ordenación empieza por "M" y termina en "S"?

(c) las cuatro ies sean consecutivas, supuesto que la ordenación termina con las cuatro eses consecutivas?

SOLUCION (a) El experimento aleatorio es, disponer en orden arbitrario las letras de la palabra MISSISSIPPI. Luego, el espacio muestral Ω tiene $P_{11}^{1,4,4,2}$ elementos, que es una permutación de las 11 letras con repetición, de los -

cuales 2 letras "S" e "I" se repiten cuatro veces, la "P" dos veces y la "M" una vez.

Sea A, el evento: "en la ordenación resulta las cuatro ies consecutivas", - Una forma sería, por ejemplo

$$\uparrow M \; IIII \; S \uparrow P \uparrow S \uparrow S \uparrow P \uparrow S$$
$$\uparrow$$
$$2$$

Para las cuatro ies hay 8 posiciones diferentes, y para cada uno de estas - las 7 letras restantes pueden ordenarse de $P_7^{1,4,2}$ maneras. Entonces, el evento **A** tiene $8 \times P_7^{1,4,2}$ elementos. Por lo tanto,

$$P[A] = \frac{8 \times P_7^{1,4,2}}{P_{11}^{1,4,4,2}} = \frac{\dfrac{8 \times 7!}{4!\,2!}}{\dfrac{11!}{4!\,4!\,2!}} = \frac{8 \times 7!4!}{11!} = \frac{4}{165} .$$

(b) Sea B, el evento: "los cuatro ies resultan consecutivas".

Supuesto que la ordenación empieza con "M" y termina en una "S".

Entonces, el espacio muestral en este caso se reduce a la variación de 9 letras ya que hay dos fijas. Es decir el nuevo espacio muestral Ω_1 tiene $P_9^{4,3,2}$ elementos; 4 ies y 3 eses y 2 pees.

Uno de los elementos del evento **B** tiene, por ejemplo, la siguiente forma

$$\begin{array}{cccccccc} M & S & IIII & P & S & S & P & S \\ \uparrow & & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \\ 1 & & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \end{array} .$$

Es decir, para las cuatro ies hay 6 posiciones, y para cada uno de estas, - las 5 letras restantes pueden ordenarse de $P_5^{3,2} = \binom{5}{2}$ formas. Luego, el - evento **B** tiene $6\binom{5}{2}$ elementos. Por lo tanto,

$$P[B] = \frac{6\binom{5}{2}}{P_9^{4,3,2}} = \frac{\dfrac{6 \times 5!}{3!2!}}{\dfrac{9!}{4!3!2!}} = \frac{6 \times 5! \times 4!}{9!} = \frac{1}{21} .$$

(c) En este caso la ordenación termina en las cuatro eses. Entonces, quedan sólo 7 letras que varían. Por lo tanto, el espacio muestral Ω_2 tiene $P_7^{4,2,1}$

elementos.

Sea C, el evento: "las cuatro ies resultan consecutivas".

Un elemento del evento C tiene, por ejemplo la siguiente forma

$$\begin{array}{cccc} M & P & IIII & P\ \ SSSS \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{array}$$

Hay cuatro posiciones para las cuatro ies, y para una de estas posiciones - las 3 letras restantes pueden ordenar de $P_3^{2,1} = \binom{3}{1}$ maneras. Por lo tanto, el evento C tienen $4\binom{3}{1}$ elementos. Luego

$$P[C] = \frac{4\binom{3}{1}}{P_7^{4,2,1}} = \frac{\dfrac{4 \times 3!}{2!}}{\dfrac{7!}{4!2!1!}} = \frac{4 \times 3!4!}{7!} = \frac{4}{35} .$$

EJEMPLO 14 De una baraja de 52 cartas se extraen al azar 6 cartas. Determinar la probabilidad que tres de ellas sean de oro y dos de copas.

SOLUCION El experimento aleatorio es, "extraer 6 cartas de la baraja de 52". Entonces, los elementos del espacio muestral Ω son subconjuntos de seis cartas cada uno. Por lo tanto tiene C_{52}^{6} elementos. Es decir,

$$n = N(\Omega) = C_{52}^{6} = \binom{52}{6} .$$

Definimos el evento A de la siguiente manera:

A : "tres cartas sean de oro, dos de copas y uno diferente de oro y copa".

El número de formas de extraer 3 cartas de oro, de un total de 13, es

$$C_{13}^{3} = \binom{13}{3} .$$

El número de formas de extraer 2 cartas de copas, de un total de 13, es

$$C_{13}^{2} = \binom{13}{2} .$$

El número de formas de extraer una carta (que no sea oro ni copa), de las 26 cartas restantes, es

$$C_{26}^{1} = \binom{26}{1} .$$

Por lo tanto, el número de elementos del evento **A**, es $n_A = \binom{13}{3}\binom{13}{2}\binom{26}{1}$

Luego, $$P[A] = \frac{n_A}{n} = \frac{\binom{13}{3}\binom{13}{2}\binom{26}{1}}{\binom{52}{6}}$$

EJEMPLO 15 Se extraen 5 cartas al azar de una baraja de 52 cartas. ¿Cuál es la probabilidad de

(a) extraer exactamente 2 parejas (dos cuatros y dos 10 dieces, por ejemplo y uno diferente)?

(b) Extraer "full" (3 cartas iguales y 2 de otra también iguales)?

(c) Extraer "flor" (5 cartas del mismo color)?

(d) una corrida (5 cartas, comenzando por el as, o dos, o tres, ..., o con - el diez)?

SOLUCION El experimento aleatorio es, extraer 5 cartas de las 52. Entonces, el espacio muestral Ω tiene $\binom{52}{5}$ elementos.

(a) Sea **A**, el evento: "extraer dos parejas y uno diferente".
Un juego de naipes de 52 cartas contiene 13 grupos de números iguales así,

[A,A,A,A], [2,2,2,2], [3,3,3,3], ...,[Q,Q,Q,Q], [K,K,K,K]

Se necesita 2 grupos de cuatro de los 13 que hay, y esto se puede extraer de $\binom{13}{2}$ formas. Y de cada uno de estos grupos de cuatro, hay $\binom{4}{2}$ formas de extraer una pareja. Además de uno de los 11 grupos restantes debe extraerse una carta, esto se hace de $11 \times \binom{4}{1}$ formas (o también de las 44 cartas - restantes debe escogerse una y esto se hace de $\binom{44}{1}$ formas). Entonces, el - evento A tiene $\binom{13}{2}\binom{4}{2}\binom{4}{2}\binom{44}{1}$ elementos. Por lo tanto,

$$P[A] = \frac{\binom{13}{2}\binom{4}{2}^2\binom{44}{1}}{\binom{52}{5}} \quad \text{ó} \quad P[A] = \frac{\binom{13}{2}\binom{4}{2}^2 \times 11 \times \binom{4}{1}}{\binom{52}{5}}$$

(b) Sea B, el evento: "extraer full".

Hay 13 formas de extraer un grupo de 4 y de este grupo hay $\binom{4}{3}$ formas de extraer 3 cartas iguales. Existen 12 formas de escoger el segundo grupo de cuatro y de este hay $\binom{4}{2}$ formas de extraer 2 iguales. Entonces, el evento B tiene $13 \times 12 \times \binom{4}{3} \times \binom{4}{2}$ elementos. Por lo tanto,

$$P[B] = \frac{13 \times 12 \times \binom{4}{3}\binom{4}{2}}{\binom{52}{5}} .$$

(c) Sea C, el evento: "obtener flor".

En una baraja de 52 cartas, hay 4 grupos de 13 cartas cada uno de un mismo color. Entonces hay 4 formas de extraer uno de estos grupos de 13 cartas, y de este grupo hay $\binom{13}{5}$ formas de extraer 5 cartas del mismo color. Entonces, el evento C tiene $4\binom{13}{5}$ elementos. Luego,

$$P[C] = \frac{4\binom{13}{5}}{\binom{52}{5}} .$$

(d) Sea D, el evento: "obtener una corrida".

Hay $\binom{4}{1}$ formas de extraer un "as", también un dos, un tres, un 4 y un 5. Es decir hay $\binom{4}{1}^5$ formas de extraer una corrida que comienza con as.

También $\binom{4}{1}^5$ formas de extraer una corrida que comienza con dos y así sucesivamente, hay $\binom{4}{1}^5$ formas de extraer una corrida que comienza con 10 Luego, el evento D tiene $10 . \binom{4}{1}^5$ elementos. Por lo tanto,

$$P[D] = \frac{10\binom{4}{1}^5}{\binom{52}{5}} .$$

EJEMPLO 16 De una urna que contiene doce bolas, de las cuales ocho son blancas y 4 negras, se extrae una muestra de tamaño 4 con reemplazo (sin reemplazo). Hallar la probabilidad que la muestra contenga exactamente tres bolas blancas.

SOLUCION (a) Si la muestra se extrae con reemplazo, se tiene

$$n = N(\Omega) = (12)^4.$$

Sea A, el evento: "la muestra contiene exactamente tres bolas blancas". Los elementos de **A** tiene la forma

$$A = \{\underbrace{bbbn}, \ldots \}, \text{ el orden interesa.}$$

$$P_4^{3,1} = \binom{4}{3}$$

la bola blanca sale de 8 formas en cada extracción (cuatro extracciones de las cuales 3 son blancas, lo que da 8^3 formas) y la negra de 4 formas. Luego el número de casos favorables es $N(A) = \binom{4}{3} 8^3.4$. Por lo tanto,

$$P[A] = \frac{\binom{4}{3} \cdot 8^3.4}{(12)^4} = \frac{32}{81}$$

(b) Si la muestra se extrae sin reemplazo, entonces el número de elementos del espacio muestral es

$\binom{12}{4}$, sin considerar el orden .

P_{12}^4, considerando el orden.

Sea B, el evento: "la muestra contiene exactamente tres bolas blancas". Entonces, $n_B = \binom{8}{3}\binom{4}{1}$ Sin considerar el orden.

Considerando el orden los elementos de B tiene la forma

$$B = \{\underbrace{bbbn}, \ldots \}$$

$$P_4^{3,1} = \binom{4}{3}$$

las bolas blancas pueden salir de $8 \times 7 \times 6 = \frac{8!}{5!} = P_8^3$ formas y la negra de 4 formas, luego

$$n_B = \binom{4}{3} P_8^3 \cdot 4 .$$

Por lo tanto, hay dos formas de determinar, la probabilidad del evento B.

(*i*) considerando el orden, $P[B] = \dfrac{\binom{4}{3} P_8^3 \cdot 4}{P_{12}^4}$.

(*ii*) Sin considerar el orden, $P[B] = \dfrac{\binom{8}{3}\binom{4}{1}}{\binom{12}{4}}$.

El lector puede verificar la igualdad de ambas soluciones.

EJEMPLO 17 Se distribuye al azar 6 bolas diferentes entre 3 cajas, ¿Cuál es la probabilidad que la primera caja contenga 3 bolas? ¿Cuál que hayan 2 bolas en cada caja?.

SOLUCION El experimento es "distribuir 6 bolas en tres cajas al azar"

$\Omega = \{$  $, \ldots\}$

El número de elementos del espacio muestral, se calcula así: la primera bola tiene 3 formas de distribuirse (cualquiera de las tres cajas). La segunda bola también puede distribuirse de 3 formas. Luego las dos bolas se distribuye de $3.3 = 3^2$ formas. La tercera bola, igualmente se distribuye de 3 formas. Por lo tanto las 3 bolas se distribuirán de $3^2.3 = 3^3$ formas. Así, sucesivamente, las 6 bolas se distribuirán de 3^6 formas. Por lo tanto

$$n = N(\Omega) = 3^6$$

(a) Sea A, el evento: "la primera caja contiene 3 bolas".

La primera caja contiene 3 bolas es equivalente a que las 3 bolas restantes se distribuye en las 2 cajas que quedan. El número de formas que se distribuye las 3 bolas en 2 cajas es 2^3. Y el número de formas de escoger grupos de 3 elementos es $\binom{6}{3}$. Por lo tanto, el número de casos favorables al evento **A** es

$$n_A = \binom{6}{3} 2^3$$

y

$$P[A] = \frac{\binom{6}{3} 2^3}{3^6} = \frac{5.2^5}{3^6} = 0.219 \ .$$

(b) B: "hayan 2 bolas en cada caja"

El número de formas que ocurra el evento B, es el número de particiones - de las 6 bolas en 3 subconjuntos con 2 bolas en cada uno. Es decir,

$$N(B) = \binom{6}{2,2,2}$$

Luego, $$P[B] = \frac{\binom{6}{2,2,2}}{3^6} = \frac{6!}{(2!)^3 3^6}$$

EJEMPLO 18 Seis amigos desean viajar en el tren electrico suburbano compuesto por 3 vagones. Si cada uno escoge su vagón al azar (es decir todos tienen igual posibilidad de viajar en cualquiera de los vagones), ¿cuál es la probabilidad que

(a) todos viajan en un mismo vagón?

(b) esten distribuidos en los tres vagones?

SOLUCION El número de elementos del espacio muestral es $3^6 = N(\Omega)$.

(a) Sea el evento B: "los 6 amigos viajan en el mismo bagón"

$$N(B) = 3$$

En efecto: la primera persona se puede ubicar de 3 formas. Una vez ubicado - el primero, el segundo tiene una sola forma (el vagón donde se ubicó el primero), así sucesivamente los restantes tienen una sola forma de ubicarse. - Por lo tanto, los seis se ubicarán de

$$3 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 = 3 \quad \text{formas}$$

Osea $$P[A] = \frac{3}{3^6} = \frac{1}{3^5} .$$

(b) B: "los seis amigos están distribuidos en los 3 vagones"

Esto se hace particionando las 6 personas en 3 grupos. Las diferentes particiones de los seis en tres grupos son:

1. Haya 2 personas en cada grupo, esto ocurre de $\binom{6}{2,2,2}$ formas. Esta partición, se ubica de una sóla forma en los vagones. Osea el número de formas de ubicar las 6 personas con 2 en cada vagón es $\binom{6}{2,2,2}$.

2. Haya 4 personas en un grupo y uno en cada grupo restante. Esto se hace de $\binom{6}{4,1,1}$ formas. Esta partición, se ubica en los vagones de $P_3^{2,1} = 3$ for-

diferentes. Es decir, el número total de formas de ubicar a las personas en esta condición es $3\binom{6}{4,1,1}$

3. Haya 1,2 y 3 en cada vagón respectivamente, lo cual se hace de $\binom{6}{1,2,3}$ formas. Esta partición, se ubica en los vagones de ${}_3P_3 = 3!$ formas diferentes. Por lo tanto, el número total de formas de ubicar a las 6 personas cumpliendo esta condición es $3!\binom{6}{1,2,3}$.

De (1), (2) y (3) el número de elementos del evento B es

$$N(B) = \binom{6}{2,2,2} + 3\binom{6}{4,1,1} + 3!\binom{6}{1,2,3}$$

luego,

$$P[B] = \frac{\binom{6}{2,2,2} + 3\binom{6}{4,1,1} + 3!\binom{6}{1,2,3}}{3^6}$$

1.5.2 DEFINICION POR FRECUENCIA RELATIVA

Planteamos antes las siguientes preguntas:

1. ¿Cuál es la probabilidad que un dado (lanzado sobre una superficie plana y liza) se pare sobre su borde?
2. ¿Cuál es la probabilidad que un vendedor de televisores en blanco y negro y a color vende uno a color en su próxima venta?
3. ¿Cuál es la probabilidad que la mitad o más de los alumnos que llevan el curso de estadística obtenga una nota aprobatoria en el curso?

El experimento hipotético empleado en la definición clásica de probabilidad, no nos ayuda a contestar estas preguntas. Para contestar cualquiera de estas preguntas necesitamos más información. Así, pués en el primer caso, enumerar los resultados posibles de un sólo lanzamiento del dado no nos ayudará a determinar realmente la probabilidad que se quede parado sobre su borde. En el segundo caso; "vende un televisor a color", "vende un televisor en blanco y negro" y "vende uno a color y otro en blanco y negro" son tres eventos que no son mutuamente excluyentes por lo tanto ¿qué probabilidad se asigna a cada uno de estos eventos?. Finalmente en la tercera pregunta "la mitad o más obtendrán nota aprobatoria" y "menos de la mitad no aprobarán" son dos eventos mutuamente excluyentes que dan todo el espacio muestral. Pero ¿Está ud. seguro al utilizar el principio de que todos los resultados posibles tienen la misma posibilidad de salir, para asignar una probabilidad de 1/2 a cada evento?.

Es decir, estas preguntas no se pueden responder utilizando la definición clásica de probabilidad. Sin embargo son preguntas razonables que una persona puede plantearse. Por lo tanto, son razones claras para fundamentar otra definición de probabilidad.

Lo expuesto anteriormente nos conduce a la siguiente interpretación de probabilidad en términos de frecuencia relativa.

> Si un experimento bien definido se repite n veces (n grande); sea $n_A < n$ el número de veces que el evento A ocurre en los n ensayos, entonces la frecuencia relativa de veces que ocurre el evento A "$\frac{n_A}{n}$", es la estimación de la probabilidad que ocurra el evento A, o sea
>
> $$P[A] = \frac{n_A}{n}$$

Además en la última parte del párrafo anterior, la estimación de la probabilidad por frecuencia relativa de un evento A, $\frac{n_A}{n}$ se acerca a la verdadera probabilidad de un evento, cuando n aumenta indefinidamente, es decir

$$P[A] = \lim_{n \to \infty} \frac{n_A}{n}$$

Naturalmente, en la práctica esto no es posible, sólo podemos buscar una estimación máxima de P[A] basada en n grande.

OBSERVACIONES

1. La frecuencia relativa de un evento, está comprendido entre 0 y 1. Por lo tanto $0 \leq P[A] \leq 1$.
   En efecto: Desde que $0 \leq n_A \leq n$, $\frac{0}{n} \leq \frac{n_A}{n} \leq 1$, se tiene que

   $0 \leq \frac{n_A}{n} \leq 1$. Luego, $0 \leq P[A] \leq 1$.

2. $\frac{n_A}{n} = 0$, si sólo si, en las n repeticiones del experimento el evento A -

no ocurre.

En efecto: si **A** no ocurre $n_A = 0$, $\frac{n_A}{n} = \frac{0}{n} = 0$, inversamente si $\frac{n_A}{n} = 0$, entonces $n_A = 0$.

Por lo tanto **P[A]** $= 0$ si, sólo si **A** no ocurre en las n repeticiones del experimento.

3. $\frac{n_A}{n} = 1$, si, sólo si el evento A ocurre en las n repeticiones del experimento. En particular $\frac{n_\Omega}{n} = 1$.

En efecto: Si **A** ocurre en las n veces que se repite el experimento, entonces

$n_A = n$; así $\frac{n_A}{n} = \frac{n}{n} = 1$. Inversamente, $\frac{n_A}{n} = 1$, si

$n_A = n$, lo que significa que el evento A ha ocurrido en las n repeticiones del experimento.

Por lo tanto P[A] $= 1$, si, sólo si **A** ocurre en todas las repeticiones del experimento.

EJEMPLO 19 Una muestra aleatoria de 10 fábricas que emplean un total de 10,000 personas, demostró que ocurriron 500 accidentes de trabajo durante un período reciente de 12 meses. Hallar la probabilidad de un accidente de trabajo en una industria determinada.

SOLUCION n = 10,000, número de veces que se repite el experimento.

Sea el evento A: "un accidente de trabajo en la industria determinada". Entonces N(A) = 500 y

$$P[A] = \frac{500}{10,000} = 0.05$$

Por definición de frecuencia relativa, ya que este valor de la probabilidad, se basa en una muestra, por lo tanto es una estimación del valor real desconocido. Observe, aquí se supone implícitamente que las formas de seguridad no han cambiado desde que se realizó el muestreo.

EJEMPLO 20 La distribución de los miembros de los partidos políticos es

Partido	A	B	C	D	E	F
Número Total de Militantes	105	100	70	45	40	15
Militantes Mujeres	15	20	5	10	3	2

¿Cuál es la probabilidad que un miembro seleccionado aleatoriamente,

(a) Sea una mujer?

(b) pertenece al partido B?

(c) Sea un hombre miembro del partido C?

SOLUCION n = total de socios = 105 + 100 + 70 + 45 + 40 + 15 = 375

(a) Sea A, el evento: "el socio seleccionando sea una mujer".

n_A = número de socios mujeres = 15 + 20 + 5 + 10 + 3 + 2 = 55.

Luego,

$$P[A] = \frac{55}{375}.$$

(b) Sea B, el evento: "el miembro seleccionado pertenece al partido B".

n_B = total de miembros del partido B = 100.

Entonces,

$$P[B] = \frac{100}{375}.$$

(c) Sea C, el evento: "la persona seleccionada es hombre y pertenece al partido C".

Y n_C = total de hombres que pertenecen al partido

$$n_C = 70 - 5 = 65$$

Luego,

$$P[A] = \frac{65}{375}$$

EJEMPLO 21 En una serie de observaciones sobre la longitud de vida de ratas machos, un biólogo ha encontrado que el 98 % sobrevive aun 200 días después de nacer; 83 % sobrevive 400 días; 40 % sobreviven 600 días; 8 % sobreviven 800 días; y no sobreviven después de 1000 días.

Estime las probabilidades de los eventos:

(a) "se mueren dentro los primeros 200 días";

(b) "muere entre 200 y 400 días" ; (c) "sobreviven a lo más 400 días" ;
(d) "mueren dentro los 1000 días" ;

SOLUCION Como no se conoce el número exacto de ratas; asumimos que hay 100x ratas. O sea $n = 100x$

(a) Si A, el evento: "la rata se muere dentro los primeros 200 días".
Como 98% de las ratas viven después de los 200 días de nacer, entonces - $\frac{98 \cdot 100x}{100} = 98x$ ratas viven 200 días después de nacer, luego hay - $100x - 98x = 2x$ ratas muertas. Por lo tanto,

$$P[A] = \frac{2x}{100x} = 0.02 .$$

(b) Sea B, el evento: "una rata se muere entre 200 y 400 días".
El número de ratas muertas entre 200 y 400 días es

$$98x - 83x = 15x$$

luego,

$$P[B] = \frac{15x}{100x} = 0.15 .$$

(c) Sea C, el evento: "una rata sobreviva a lo más 400 días".
Desde que 83x sobrevivan 400 días, tenemos

$$P[C] = \frac{83x}{100x} = 0.83 .$$

(d) Desde que todas las ratas mueren dentro de los 1000 días tenemos que la probabilidad pedida es 1.

1.5.3 PROBABILIDAD SUBJETIVA

Existen muchas situaciones donde el concepto de probabilidad basada en resultados igualmente posibles (definición clásica) y el de frecuencia relativa carece de significado. Por, ejemplo planteamos las siguientes preguntas ¿Cuál es la probabilidad que el presidente de la República vete cierta legislación? ¿Cuál es la probabilidad que una expedición desembarque en el planeta Marte en la próxima década? ¿Cuál es la probabilidad que en el próximo examen de estadística obtenga 15 de notas? Son eventos únicos, que no ha ocurrido antes. No hay forma que se pueda interpretar tales probabilidades como una frecuencia relativa o como una probabilidad clásica. *El enfoque sub*

jetivo de la probabilidad es pues adecuado en casos en que hay sólo una oportunidad de ocurrencia del evento y ocurrirá o no ocurrirá esa sola vez. La probabilidad subjetiva se define así:

> Dado un experimento determinado, la probabilidad de un evento **A** es el - ***grado de creencia*** asignado a la ocurrencia de este evento por un individuo particular, basado en toda la evidencia a su disposición, con las siguientes exigencias:
>
> (1) $P[A] = 0$, representa la certeza que el evento A, no ocurrirá.
>
> (2) $P[A] = 1$, representa la certeza que el evento A, si ocurrirá.
>
> (3) $0 < P[A] < 1$, representa el grado de certeza que el evento A, ocurrirá.

Desde que, la probabilidad subjetiva de la ocurrencia de un evento A, - es un número asignado por un individuo de acuerdo a la evidencia que dispone Otra persona con otras evidencias, podría asignar a la ocurrencia del mismo evento A otra probabilidad diferente (un número diferente al anterior).

1.5.4 PROBABILIDAD FRENTE A APUESTAS

Haremos un estudio breve de la relación entre las ***apuestas*** a favor de - un evento y su probabilidad. Cuando se dice, por ejemplo, que las apuestas - son 3 a 1 que el boxeador A ganará la proxima pelea, significa que hay, 3 posibilidades en 4, que A, ganará la pelea. Las apuestas 3 a 1, se escribe : 3:1, se lee: "las apuestas son de 3 a 1 a favor de A", la cual se convierte - en una probabilidad, así

$$\frac{3}{3+1} = \frac{3}{4} = P[\text{ de que A ganará }]$$

DEFINICION Sea **A** un evento cualquiera, si las ***apuestas*** son a:b a favor del evento **A**, entonces la probabilidad que ocurra dicho evento es

$$\boxed{P[A] = \frac{a}{a+b}}$$

Además, decir que las apuestas son a:b a favor del evento **A** es lo mismo decir que las apuestas son b:a en contra del evento A. Entonces, la probabilidad que no ocurra A es

$$P[A] = \frac{b}{a+b}.$$

Puede también la probabilidad de un evento A convertirse en apuestas a favor de la ocurrencia del evento A; así, si P[A] es la probabilidad que ocurra el evento A; las apuestas a favor de la ocurrencia de A son

$$P[A] : [1 - P[A]]$$

Y las apuestas en contra de él son $[1 - P[A]]: P[A]$.

EJEMPLO 22 En una carrera de caballos, el caballo "claudio" tiene las apuestas 5:1 en su contra, mientras que el caballo "Royal" las tiene 9:1 en su contra. ¿Cuál es la probabilidad que cualquiera de estos caballos gane?

SOLUCION Sean los eventos:

C : "el caballo claudio gane la carrera",

R : "el caballo royal gane la carrera".

Entonces, $P[C] = \frac{1}{5+1} = \frac{1}{6}$, $\quad P[R] = \frac{1}{9+1} = \frac{1}{10}$

Luego, $P[C \cup R] = P[C] + P[R] = \frac{1}{6} + \frac{1}{10} = \frac{4}{15}$

ya que C y R son eventos mutuamente excluyentes.

1.5.5 PROBABILIDAD EN ESPACIOS MUESTRALES FINITOS

Otro método para asignar probabilidades, en espacios muestrales finitos (es decir $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$), es como sigue: se asigna la probabilidad p_i a cada resultado ω_i, o sea $p_i = P[\{\omega_i\}]$ tal que

(1) $\quad p_i > 0, \quad i = 1,2,3,\ldots, n$

(2) $\quad \sum_{i=1}^{n} p_i = \sum_{i=1}^{n} P[\{\omega_i\}] = 1$

La suma de las probabilidades asignados a los puntos del espacio muestral es la unidad. (Teniendo en cuenta que los posibles resultados $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ son mutuamente excluyentes y colectivamente exahustivos).

La probabilidad de un evento A es la suma de las probabilidades asignadas de los puntos muestrales pertenecientes al evento A; esto es

$$P[A] = \sum_{i/\omega_i \in A} p_i = \sum_{\omega_i \in A} P[\{\omega_i\}] .$$

EJEMPLO 23 Ocho amigos juegan boliche una vez a la semana. Este grupo está formado por 2 parejas de casados, 3 jóvenes y una joven. Antes del juego cada uno coloca I/.100. en una bolsa cuyo contenido ganará el que obtenga mayor puntuación Si las mujeres tienen la mitad de la habilidad que los varones poseen para el juego. ¿Cuál es la probabilidad que un soltero gane?. ¿Cuál es la probabilidad que - gane una mujer?. ¿Cuál es la probabilidad que gane un hombre casado?.

SOLUCION El espacio muestral Ω tiene 8 elementos, 5 hombres que tienen igual habilidad en el juego y 3 mujeres que tienen la mitad de habilidad que los hombres. - Por lo tanto si p es la probabilidad de ganar de un hombre, entonces $\frac{1}{2}\,p$ es la - probabilidad de ganar de una mujer.

Luego, se debe tener que $5p + \frac{3}{2}\,p = 1$, de donde

$$p = \frac{2}{13} \quad y \quad \frac{1}{2}\,p = \frac{1}{13} .$$

(a) Sea **A**, el evento: "gane un hombre soltero"

El evento **A** tiene 3 elementos con igual habilidad, por lo tanto

$$P[A] = 3\left(\frac{2}{13}\right) = \frac{6}{13}$$

(b) Sea **B**, el evento: "gane una mujer"

El evento **B** tiene 3 elementos con igual habilidad, es decir

$$P[B] = 3\left(\frac{1}{13}\right) = \frac{3}{13} .$$

(c) Sea **C**, el evento: "gane un hombre casado"

El evento **C** tiene 2 elementos con igual habilidad. Luego,

$$P[C] = 2\left(\frac{2}{13}\right) = \frac{4}{13} .$$

EJEMPLO 24 Un dado está cargado de tal modo que la probabilidad de obtener 1,2,3,4,5 ó 6 es proporcional a los números 1,2,3,4,5 y 6, respectivamente.. Si se lanza este dado, calcular la probabilidad del evento: "el resultado es un número par".

SOLUCION Como $P[\{k\}]$ es proporcional a **k**, para todo

$k = 1,2,3,4,5,6$, se tiene que

$$P[\{k\}] = rk,$$ donde r es la constante de proporcionalidad.

Por lo tanto, se debe tener que

$$\sum_{k=1}^{6} P[\{k\}] = r + 2r + 3r + 4r + 5r + 6r = 21r = 1$$

de donde $r = \frac{1}{21}$. Luego, $P[\{k\}] = \frac{1}{21} k$

Y si A, es el evento: "obtener un número par". Es decir $A = \{2,4,6\}$, tenemos

$$P[A] = \sum_{k \in A} P[\{k\}] = \sum_{k \in A} \frac{1}{21} k = 2(\frac{1}{21}) + 4(\frac{1}{21}) + 6(\frac{1}{21}) = \frac{12}{21} = \frac{4}{7}.$$

NOTA Cuando los resultados elementales son igualmente posibles, se tiene

$$p_1 = p_2 = \dots = p_n, \quad y$$

$$P[A] = \frac{n_A}{n}$$

donde n_A representa el número de resultados contenidos en el evento A.

PROBLEMAS 1.5

1. Para cada una de las siguientes situaciones, indique ¿Cuál de los enfoques de probabilidad, sería más útil para determinar el valor de la probabilidad.
   (a) La probabilidad que se obtenga un "as" o un diez de "oro" en una sola extracción de una baraja de 52 cartas.
   (b) La probabilidad que una persona escogida aleatoriamente de entre las que entran a una tienda comercial haga una compra en dicha tienda.
   (c) La probabilidad que haya huelga de profesores en el próximo ciclo académico.
   (d) La probabilidad que un producto escogido aleatoriamente de una producción grande sea defectuoso.
   (e) La probabilidad que haya legislatura extraordinaria del congreso, después de la próxima legislatura.

2. Para cada uno de los siguientes experimentos aleatorios defina un espacio muestral adecuado, decir si son o no sus elementos igualmente posibles y

decir, si, se puede aplicar la definición clásica de probabilidad.

(a) Contar el número de pasas en un panetón hecho con pasas y frutillas.

(b) Contar el número de ases al extraer cinco cartas al azar de una baraja ordinaria de 52 cartas.

(c) Se lanzan 2 monedas y contar el número de caras obtenidas.

(d) Contar el número de niños nacidos en un día en cierto hospital.

(e) Una moneda correcta es lanzada hasta que aparece el mismo resultado dos veces sucesivas, contar el número de lanzamientos.

3. En cada uno de los casos siguientes, especificar un espacio muestral apropiado, asignar probabilidades a los sucesos (elementos de Ω) para luego hallar las probabilidades requeridas:

(a) Hallar la probabilidad que una caja quede vacia al distribuir al azar dos objetos distinguibles en dos cajas.

(b) Hallar la probabilidad de encontrar una familia sin niños (varones) entre las familias con tres hijos (ordenar empezando por el mayor).

(c) Calcular la probabilidad de obtener una figura, al extraer una carta aleatoriamente de una baraja de 52 cartas.

4. Clasifique los siguientes estimados de probabilidad por su tipo (clásica, frecuencia relativa, o subjetiva)

(a) La probabilidad que un consumidor demande a una compañia distribuidora de drogas es 0.005.

(b) La probabilidad de enviar por correo terrestre un despacho de Lima a Trujillo en 24 horas es 0.30.

(c) La probabilidad que las ventas en Diciembre sean mayores que en Julio es 0.75.

(d) La probabilidad de sacar una orden de pedido de un grupo de 10 sin mirar es 0.2.

5. El Instituto Nacional del Cancer está planteando mandar por correo un cuestionario sobre el cancer del seno. De experiencias pasadas con estos cuestionarios, el instituto sabe que sólo un 12% de las personas que reciben los cuestionarios los responden. Sin embargo, tambien saben que el 1% de los cuestionarios despachados tienen errores en la dirección y por lo tanto nunca serán puestos al correo, que un 3% se perderan o destruirán en la oficina de correos, que un 22% será remitido a personas que

han cambiado de residencia y que sólo un 52% de las personas que cambian de residencia dejan la nueva.

(a) ¿Los porcentajes dados en el problema representan estimados de probabilidad clásica, de frecuencia relativa o subjetiva?.

(b) ¿Cuál es la probabilidad que el instituto reciba la respuesta de - un cuestionario?.

6. Se extraen 3 cartas, aleatoriamente, de una baraja de 52 cartas. ¿Cuál es la probabilidad que estas cartas sean; un tres, un siete y un as?

7. ¿Cuál es la probabilidad de obtener 2 caras y 2 sellos al lanzar una moneda cuatro veces?

8. ¿Cuál es la probabilidad que de 6 cartas tomadas de una baraja de 52, 3 - sean rojas y 3 negras?

9. Se extraen 3 cartas, aleatoriamente, de una baraja de 36 cartas. Determinar la probabilidad que la suma de los puntos de estas cartas sea 21. Si la sota se cuenta como 2 puntos, el caballo como 3 puntos, el rey como 4 puntos, el as como 11 puntos y el resto como 6,7,8,9 y 10 puntos.

10. Una caja contiene nueve tikets numerados del 1 al 9. Se extraen 3 tikets al azar de la caja uno a uno sin reposición. Determinar la probabilidad que

(a) Sean alternativamente impar, par, impar ó par, impar, par.

(b) Los tres sean pares o impares.

11. Se colocan 6 bolas, aleatoriamente, en tres cajas inicialmente vacías. - ¿Cuál es la probabilidad que la primera caja contenga exactamente 2 bolas?

12. Se lanzan 5 bolas en 4 cajas numeradas, de modo que cada bola tenga que - caer en una de las cajas y tales que, todas tengan la misma probabilidad de caer en cualesquiera de las cajas. Determinar la probabilidad que - en la primera caja caigan 2 bolas y 1 en la segunda.

13. Doce personas desean viajar en un tren que tiene 6 carretas. Cada pasajero selecciona con igual probabilidad cada uno de las carretas. Determinar la probabilidad que:

(a) hayan dos pasajeros en cada carreta.

(b) hayan; una carreta sin pasajeros, una con un pasajero, dos con dos pa sajeros cada uno y los dos restantes con tres y cuatro pasajeros, respectivamente.

14. Se colocan, aleatoriamente, 8 libros en un estante. Entre ellos hay una obra en cuatro tomos y otra en 3.
¿Cuál es la probabilidad que los tomos de cada obra esten juntos?.

15. De una baraja de 52 cartas se extraen, aleatoriamente, 5 cartas. ¿Cuál es la probabilidad que 3 sean de un mismo palo y los otros dos de palos diferentes?

16. Un dado está cargado de tal forma que los números pares tienen la misma probabilidad de salir, los números impares tienen la misma probabilidad de salir, y cada número par tiene probabilidad doble de salir que la de un número impar. Determinar la probabilidad que:
(a) Salga un número par.
(b) Salga un número mayor que 4.

17. Se colocan en un estante 10 obras al azar, entre las cuales hay una en 4 tomos, otra en 3 tomos y los restantes de un sólo tomo. ¿Cuál es la probabilidad que los tomos de cada obra estén juntos?

18. Se extraen tres bolas de tres urnas que contienen cada una nueve bolas numeradas del 1 al 9. Se forma un número cuyas unidades, decenas y centenas se sacan respectivamente, de la 1ra, 2da, y 3ra urna. ¿Cuál es la probabilidad que el número así formado sea múltiplo de 18?

19. Un experimento aleatorio consiste en disponer los dígitos: 1,2,3,4,5,6,7,8; uno a continuación del otro. Calcular la probabilidad que:
(a) El 4 aparezca junto al 5 en ese orden; (b) El número formado sea par;
(c) El número formado sea mayor que 6×10^7 ;
(d) El número formado sea múltiplo de 4;
(e) El número formado sea múltiplo de 3.

20. Un experimento aleatorio consiste en disponer los dígitos: 1,2,3,4,5,6,7,8,9; uno a continuación del otro. Calcular la probabilidad que:
(a) El 5 aparezca junto al 6 en ese orden (b) El 5 aparezca junto al 6;
(c) El 5,6 y 7 aparezca juntos y en ese orden;
(d) El 5 aparezca antes que el 6; (e) El número formado sea impar;
(f) El número formado sea menor que 5×10^8;

(g) El número formado sea múltiplo de 25;
(h) El número formado sea múltiplo de 6.

21. Se extraen seis cartas de una baraja ordinaria de 52 cartas, ¿Cuál es la probabilidad de:
(a) extraer una pareja (dos, cuatros por ejemplo) y cuatro que no forman pareja?
(b) extraer dos parejas y dos que no forman pareja?

22. Se distribuye al azar 12 bolas diferentes entre tres cajas. ¿Cuál es la probabilidad que la primera caja contenga 3 bolas?.

23. Se distribuye aleatoriamente n bolas diferentes entre N celdas. ¿Cuál es la probabilidad que una celda determinada contenga r bolas?.

24. Dada n celdas en las que se distribuye aleatoriamente n bolas, determinar la probabilidad que una celda quede vacía.

25. ¿Cuál es la probabilidad que una mano de cartas contenga 2 ó más ases?

26. Dado cinco segmentos de longitudes 1,3,5,7 y 9 unidades, hallar la probabilidad que tres segmentos seleccionados aleatoriamente de los cinco formen un triángulo.

27. De una urna que contiene 12 bolas, de las cuales 8 son blancas y 4 negras, se extraé una muestra de tamaño 4 con reemplazo (sin reemplazo) ¿Cuál es la probabilidad que la muestra contenga exactamente tres bolas blancas?

28. Nueve pasajeros abordan un tren de tres carretas. Cada pasajero escoge aleatoriamente el carruaje para sentarse. ¿Cuál es la probabilidad que:
(a) haya tres personas en el primer carruaje?
(b) haya tres personas en cada carruaje?
(c) haya dos personas en un carro, tres en el otro, y cuatro en el carro restante?

29. El evento C tiene el doble de posibilidad que el evento A; el evento B tiene igual posibilidad que la suma de posibilidades de A y C. Los eventos son mutuamente excluyentes y uno de ellos debe ocurrir. Hallar la probabilidad de cada uno de los eventos.

30. Un grupo de personas está formado por 6 hombres y 8 mujeres. Se desea for

mar una comisión integrada por cuatro delegados con igual representatividad; calcular.

(a) La probabilidad que la comisión sea mixta.

(b) La probabilidad que la comisión esté integrada por 3 hombres y una mujer.

31. Suponga que se ha cargado un dado de manera que la probabilidad que ocurra un número determinado es proporcional al mismo. Calcular la probabilidad que ocurra un número mayor que 4.

32. Suponga que se tiene un dado cargado de tal forma que la probabilidad del número que salga sea inversamente proporcional al mismo. Calcular la probabilidad de la ocurrencia (a) un número par (b) un número mayor que 4.

33. Suponga que ocho jugadores que tienen la misma capacidad participan en un torneo de eliminación sencilla (no se permiten los empates). ¿Cuál es la probabilidad de que cada uno sea el ganador del torneo?. ¿Cuál es la probabilidad que el jugador 1 gane sus primeros dos fuegos y pierde la final?

34. En la sección de control de calidad de una compañía, se encontró 5 artículos defectuosos, en una partida de 100 artículos tomados aleatoriamente de la producción de un día. Estime la probabilidad de producir un artículo defectuoso.

35. Cierto tipo de motor eléctrico falla por obstrucción de los cojinetes, por combustión del embobinado o por desgaste de las escobillas. Suponga que la probabilidad de obstrucción es el doble de la de combustión, la cual es cuatro veces más probable que la inutilización de las escobillas, ¿Cuál es la probabilidad que la falla sea por cada uno de los tres mecanismos?

36. En una zona de parqueo hay 10 lugares en fila. Una persona deja estacionado su carro en uno de estos lugares, que no es ninguno de los estremos. Al regresar encuentra que hay 4 carros estacionados (incluyendo el suyo). Calcular la probabilidad que los dos lugares vecinos al que ocupa su carro estén desocupados.

37. Cada uno de los coeficientes de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ se determina por medio de una tirada de un dado prodinario. Calcular la probabili-

dad que la ecuación tenga (a) raíces reales, (b) raíces racionales.

38. Una urna contiene 5 bolas blancas, 4 rojas y 3 negras. Otra contiene 5 - blancas, 6 rojas y 7 negras. Se elige una bola de cada urna. ¿Cuál es la probabilidad que todas sean del mismo color?

39. Ocho ejecutivos de una empresa llegan a su oficina diariamente en su automóvil y lo aparcan en uno de los tres aparcamientos. Si estos son escogidos al azar, ¿cuál es la probabilidad que en un día determinado se tenga 5 de los 8 automóviles en un aparcamiento, 2 en otro y 1 en otro?

40. Un fabricante de cereales desea cambiar el diseño de la caja de uno de sus productos, por lo que se muestra individualmente a cada una de 6 personas la caja anterior y la nueva, y se le pide que indique su preferencia. Suponiendo que cada uno de las personas no tenga verdadera preferencia por ninguna, ¿Cuál es la probabilidad que por lo menos 5 de las 6 personas prefieran el nuevo diseño?

41. Supongase que una persona está ubicada en el origen de un sistema de coordenadas cartesianas en el plano. Lanza una moneda.En cada lanzamiento, si obtiene cara avanza una unidad hacia arriba; si obtiene sello avanza una unidad hacia la derecha. Determine ud. la probabilidad que al cabo de 4 lanzamientos se encuentre en el punto (2,2).

42. Jaimito tiene 8 bolas blancas y 2 negras, las alinea al azar. ¿Cuál es la probabilidad que las 2 negras queden juntas? ¿De que las 2 negras ocupen posiciones de los extremos?

43. Se ordenan aleatoriamente 4 personas en un círculo, ¿Cuál es la probabilidad que 2 personas dadas estén contiguas?

44. Cuatro objetos se distribuyen al azar entre seis recipientes. ¿Cuál es la probabilidad que

(a) todos los objetos esten en el mismo recipientes?

(b) no haya dos objetos en un mismo recipiente?

45. El gerente regional de mercadeo de **ELECTRONIC CALCULATORS** está tratando de estimar su proyección de venta para el próximo año. El ha limitado sus estimados a 200,000, 250,000, 300,000, 350,000 ó 400,000 calculadoras. - Más adelante estableció que estaba completamente indeciso entre la venta de 350,000 y 300,000 y que no podía decidir cuál era más probable. Sin em

bargo, cree que unas ventas de 350,000 son dos veces más probables que - 400,000 y que unas ventas de 300,000 son cuatro veces más probables que 200,000. Finalmente decidió que unas ventas de 250,000 son sólo un 50 % - más probables que las de 350,000.

(a) ¿Cuál es la probabilidad de vender 300,000 ó 350,000 calculadoras?

(b) ¿Cuál es la probabilidad de vender más de 400,000 o menos de 200,000 calculadoras?

46. Durante un período específico, el 80 % de las acciones ordinarias de una industria que incluye sólo 10 compañías han aumentado en valor comercial. Si un inversionista escoge aleatoriamente tres de esas acciones. Determine la probabilidad que

(a) Sólo una de las tres acciones aumente su cotización.

(b) Sólo dos acciones aumenten su cotización.

(c) Por lo menos dos acciones aumenten su cotización.

47. A es uno de los 6 caballos que van ha competir en una carrera, y lo va ha montar uno de los Jockeys B ó C. Hay 2 a 1 de que B monte a A, en cuyo caso todos los caballos tienen iguales probabilidades de ganar; si C monta a A su probabilidad de ganar se triplica. ¿Cuales son las apuestas en contra de la victoria de A?

48. En una urna hay 2 bolas azules, una blanca y 3 rojas. Se van a extraer al azar 2 bolas. Calcule ud. la probabilidad que las dos bolas sean rojas o una blanca y la otra azul.

49. Ocho personas compiten por un puesto público. Los cuatro primeros candidatos tienen la misma oportunidad de ganar, el quinto candidato tiene el doble oportunidad que los candidatos anteriores y los tres últimos tienen - el triple de oportunidad que el quinto candidato. ¿Cuál es la probabilidad que gane el quinto candidato?

50. Un edificio consta de 7 pisos con 4 departementos por piso. Determine la - probabilidad que dos jefes de familia, elegidos al azar, pertenescan a departamentos que por lo menos estén separados por 2 pisos.

51. Se lanzan 9 bolas en tres cajas inicialmente vacías. Cada una de las bolas tienen la misma probabilidad de caer en cualquiera de las cajas. Determinar la probabilidad que:

(a) hayan tres bolas en cada caja.

(b) hayan cuatro bolas en la primera caja, tres en la segunda, y dos en la tercera.

52. Un muchacho parado en una esquina lanza una moneda. Si cae cara, camina una cuadra al Este; si cae sello, camina una cuadra al Oeste. En cada esquina repite la operación. ¿Cuál es la probabilidad que después de 6 lanzamientos esté:

(a) en el punto de partida? (b) a dos cuadras del punto de partida?
(c) a cuatro cuadras del punto de partida?

53. De una baraja de 52 cartas, se extraen aleatoriamente 3 cartas, ¿Cuál es la probabilidad que sean del mismo palo?

1.6 AXIOMAS DE PROBABILIDAD Y PROPIEDADES

Independientemente de la forma como definimos probabilidad, esta cumple los axiomas siguientes, que son consecuencia inmediata de la definición (ver observaciones a la definición clásica y por frecuencia relativa)

Ax.1 $0 \leq P[A] \leq 1$, para cada evento A en (Ω)

Ax.2 $P[\Omega] = 1$

Ax.3 Para cualquier número finito k de eventos mutuamente excluyentes en Ω es

$$P\left[\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right] = \sum_{i=1}^{k} P[A_i]$$

Una consecuencia inmediata de Ax.3 es, si A y B son dos eventos mutuamente excluyentes en Ω, entonces

$$P[A \cup B] = P[A] + P[B]$$

Como todo axioma, Ax.1, Ax.2 y Ax.3 no se demuestran, sin embargo el lector habrá notado que estos son acordes con la definición de probabilidad como hemos hecho notar en las notas, después de cada definición.

En teoría más avanzada de probabilidad, en vez del tercer axioma se usa el siguiente

(A'x3) Si $A_1, A_2, A_3, \ldots$

es una secuencia numerable de eventos mutuamente excluyentes definidos en Ω, entonces

$$P[A_1 \cup A_2 \cup \ldots] = P[A_1] + P[A_2] + \ldots \quad ó$$

$$P\left[\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right] = \sum_{i=1}^{\infty} P[A_i]$$

Debido a que la definición de probabilidad cumple los axiomas Ax.1, Ax.2 y Ax.3, se da una definición de probabilidad conocida como probabilidad axiomática o abstracta.

DEFINICION 1.6.1 Sea Ω un espacio muestral asociado a un experimento ε. La probabilidad P, es una función que asigna a cada evento $A(A \in \mathcal{P}(\Omega))$, un número $P[A]$, llamado la *probabilidad del evento* A, tal que cumple los axiomas : Ax.1, Ax.2, Ax.3 .

NOTA En teoría mas avanzada de probabilidad, se considera una clase de subconjuntos de Ω, (no necesariamente todo $\mathcal{P}(\Omega)$), que cumplen ciertos axiomas, llamados σ-algebra
Los teoremas siguientes son consecuencia inmediata de los axiomas.

TEOREMA 1.6.1 Si ϕ es el evento imposible, entonces $P[\phi] = 0$

DEMOSTRACION Nóte que $\Omega = \Omega \cup \phi$

Ω y ϕ son mutuamente excluyentes, por lo tanto

$P[\Omega] = P[\Omega] + P[\phi]$, por Ax.3
$1 = 1 + P[\phi]$ por Ax.2

de donde $P[\phi] = 0$.

TEOREMA 1.6.2 Para cada evento A, se cumple que

$$P[\bar{A}] = 1 - P[A] \quad \text{ó} \quad P[A] = 1 - P[\bar{A}]$$

DEMOSTRACION Tenemos que $\Omega = A \cup \bar{A}$ y $A \cap \bar{A} = \phi$, es decir los eventos A y $\bar{A}$ son mutuamente excluyentes. Luego

$P[\Omega] = P[A] + P[\bar{A}]$, por Ax.3
$1 = P[A] + P[\bar{A}]$ por Ax.2

por lo tanto $P[\bar{A}] = 1 - P[A]$ ó $P[A] = 1 - P[\bar{A}]$.

TEOREMA 1.6.3 Si A y B son eventos tales que $A \subset B$, entonces

$$P[A] \leq P[B]$$

DEMOSTRACION Nótese que $B = A \cup (B \cap \bar{A})$ (ver figura 1.6.1) y $A \cap (B \cap \bar{A}) = \phi$, es decir los eventos A y $B \cap \bar{A}$ son mutuamente excluyentes. Luego,

$P[B] = P[A] + P[B \cap \bar{A}]$ por Ax.3

Desde que $P[B \cap A] \geq 0$, se tiene que

$$P[B] \geq P[\bar{A}]$$

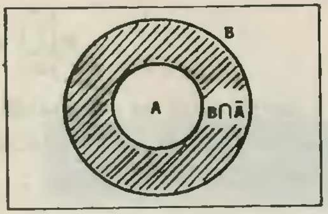


Fig. 1.6.1

TEOREMA 1.6.4 Si A y B son dos eventos cualesquiera en Ω entonces

$$P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B]$$

DEMOSTRACION El evento $A \cup B$ puede representarse como la unión de los eventos A y $\bar{A} \cap B$, mutuamente excluyentes (ver fig. 1.6.2)

$$A \cup B = A \cup (\bar{A} \cap B)$$

Luego, $P[A \cup B] = P[A] + P[\bar{A} \cap B]$ por Ax.3 (1)

El evento B tambien puede escribirse como la unión de los eventos mutuamente excluyentes $A \cap B$ y $\bar{A} \cap B$

$B = (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B)$ y

$P[B] = P[A \cap B] + P[\bar{A} \cap B]$ por Ax.3

ó $P[\bar{A} \cap B] = P[B] - P[A \cap B]$

Sustituyendo este resultado en la ecuación (1), obtenemos

$$P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B].$$

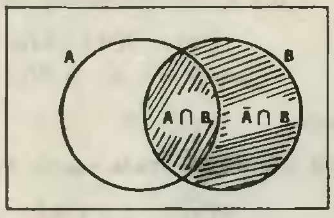


Fig. 1.6.2

CONSECUENCIA Una consecuencia importante del teorema 4, es la siguiente

$$P[A \cup B] \leq P[A] + P[B] , \quad \text{ya que} \quad P[A \cap B] \geq 0$$

OBSERVACION En la demostración del teorema 4 se ha probado que

$$P[B] = P[AB] + P[\bar{A}B] \text{ y } P[B - A] = P[\bar{A}B] = P[B] - P[AB]$$

TEOREMA 1.6.5 Si A, B y C son tres eventos cualesquiera en Ω, entonces

$$P[A \cup B \cup C] = P[A] + P[B] + P[C] - P[A \cap B] - P[A \cap C] - P[C \cap B] + P[A \cap B \cap C]$$

DEMOSTRACION Podemos escribir $A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C$ y aplicar el teorema 1.6.4, desde que $A \cup B$ es un evento.

TEOREMA 1.6.6 Si $A_1, A_2, \ldots, A_k$ es una colección de eventos cualesquiera en Ω, entonces

$$P[A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k] = \sum_{i=1}^{k} P[A_i] - \sum_{i<j=2}^{k} P[A_i \cap A_j] + \sum_{i<j<r=3}^{k} P[A_i \cap A_j \cap A_r]$$

$$+ \ldots + (-1)^{k+1} P[A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k]$$

NOTA El lector puede probar por inducción.

EJEMPLO 1 La probabilidad que llueva en Huancayo el 12 de Octubre es 0.10 de que truene es 0.05 y que llueve y truene es 0.03. ¿Cuál es la probabilidad que llueve o truene ese día?

SOLUCION Definimos los siguientes eventos:

A : "llueva en Huancayo el 12 de Octubre"

B : "truene el 12 de Octubre" C : "llueva o truene ese día"

Entonces $P[A] = 0.10$, $P[B] = 0.05$ y $P[A \cap B] = 0.03$

El evento **C** se escribe $C = A \cup B$, y

$$P[C] = P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B] \quad \text{teorema 1.6.4}$$

$$= 0.10 + 0.05 - 0.03 = 0.12.$$

EJEMPLO 2 La probabilidad que la señora hablantina reciba a lo más 5 llamadas telefónicas en un día es 0.20; y por lo menos 9 llamadas en un día es 0.50. ¿Cuál es la probabilidad que la señora hablantina reciba 6,7 u 8 - llamadas en un día?

SOLUCION El espacio muestral Ω es $\{0,1,2,3, \ldots\}$ llamadas telefónicas en un día.

Sean los eventos:

A : "reciba a lo más 5 llamadas". Es decir **A** consta de 0,1,2,3,4,5 llamadas telefónicas en un día.

B : "Reciba por lo menos 9 llamadas". Es decir, **B** consta de 9,10,11,12, ... llamadas.

C : "reciba 6,7 u 8 llamadas". Es decir , $C = \{6,7,8\}$.

Además $P[A] = 0.20$, $P[B] = 0.50$

Los eventos A,B y C son mutuamente excluyentes y colectivamente exaustivos, entonces $\Omega = A \cup B \cup C$, y

$$P[\Omega] = P[A \cup B \cup C]$$

$$1 = P[A] + P[B] + P[C] , \quad \text{por Ax.3.}$$

$$= 0.20 + 0.50 + P[C]$$

De donde $P[C] = 0.30$.

EJEMPLO 3 Una caja contiene 100 tubos de televisión. La probabilidad que haya al menos un tubo defectuoso es 0.05 y de que haya al menos dos tubos defectuosos es 0.01. ¿Cuál es la probabilidad que la caja contenga,
(a) ningún tubo defectuoso? (b) exactamente un tubo defectuoso?
(c) a lo más un tubo defectuoso?

SOLUCION El espacio muestral Ω es $\{0,1,2, \ldots ,100\}$ tubos defectuosos.
Sean los eventos:
A : "haya al menos un tubo defectuoso ". Es decir,

$$A = \{1,2, \ldots , 100\}$$

B : "haya al menos dos tubos defectuosos". Es decir,

$$B = \{2,3, \ldots , 100\}$$

C : "ninguno de los tubos es defectuoso". Es decir

$$C = \{0\}$$

E : "exactamente 1 tubo defectuoso contiene la caja".

$$E = \{1\}$$

F : "hay a lo más un tubo defectuoso"

$$F = \{0,1\}$$

Ademas sabemos, $P[A] = 0.05$ y $P[B] = 0.01$

(a) Los eventos A y C son mutuamente excluyentes y colectivamente exhaustivo. Es decir $\Omega = A \cup C$. Por lo tanto,

$$P[C] = 1 - P[A] = 1 - 0.05 = 0.95 \text{ , por teorema 1.6.2}$$

(b) El evento **A** se puede escribir así, $A = E \cup B$, además E y B son eventos mutuamente excluyentes, entonces

$$P[E] = P[A] - P[B] = 0.05 - 0.01 = 0.04 .$$

(c) El evento $F = C \cup E$, y además C y E son mutuamente excluyentes, entonces

$$P[F] = P[C] + P[E] = 0.95 + 0.04 = 0.99.$$

EJEMPLO 4 Una cadena de supermercados opera con 250 tiendas en toda la nación. Estas tiendas están ubicadas en ciudades de diferentes poblaciones como se indica en la tabla 2.2. Una tienda se selecciona aleatoriamente para hacer una encuesta sobre un producto nuevo importante. ¿Cuál es la probabilidad que la tienda esté ubicada en una ciudad con población que excede a los 200,000 personas? ¿Cuál es la probabilidad que la tienda esté ubicada en una ciudad con una población de 200,000 ó menos habitantes? ¿Cuál es la probabilidad que la tienda seleccionada aleatoriamente es una tienda de clase A o está ubicada en una ciudad con una población sobre los 350,000 habitantes?

Tabla 2.2 Tiendas propiedad de la cadena de supermercados ubicación y clases de tiendas.

Población de la ciudad de la cual está ubicado la tienda	*Clases de Tiendas* Clase A	Clase B	*Número Total de Tiendas*
debajo de 50,000	37	35	72
50,000 a 100,000	44	20	64
100,001 a 200,000	30	24	54
200,001 a 350,000	24	16	40
sobre los 350,000	15	5	20
Número Total de tiendas	150	100	250

SOLUCION Sean los siguientes sucesos:

ω_1 : "la tienda está ubicada en una ciudad con población debajo de 50,000 habitantes".

ω_2 : "la tienda está ubicada en una ciudad con población de 50,000 a 100,000".

ω_3 : "la tienda está ubicada en una ciudad con población de 100,001 a 200,000".

ω_4 : "la tienda está ubicada en una ciudad con población de 200,001 a 350,000".

ω_5 : "la tienda está ubicada en una ciudad con población sobre los 350,000 habitantes".

(a) Sea A, el evento: "la tienda está ubicada en una ciudad con una población que excede a los 200,000", entonces

$$A = \{\omega_4 , \omega_5\} \qquad y$$

$$P[A] = P[\{\omega_4\}] + P[\{\omega_5\}] = \frac{40}{250} + \frac{20}{250} = \frac{60}{250} = \frac{6}{25} .$$

(b) Sea B, el evento: "la tienda está ubicada en una ciudad con una población de 200,000 o menos", entonces

$$B = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\} \qquad y$$

$$P[B] = P[\{\omega_1\}] + P[\{\omega_2\}] + P[\{\omega_3\}] = \frac{72}{250} + \frac{64}{250} + \frac{54}{250} = \frac{190}{250} = \frac{19}{25}$$

(c) Sea C, el evento: "la tienda es de clase A", entonces

$$P[C] = \frac{150}{250} = \frac{15}{25} .$$

Sea D, el evento: "la tienda está ubicada en una ciudad con población por encima de los 350,000 habitantes". Entonces

$$P[D] = \frac{20}{250} = \frac{2}{25} .$$

Se pide calcular

$$P[C \text{ o } D] = P[C \cup D] = P[C] + P[D] - P[C \cap D]$$

pués C y D no son mutuamente excluyentes. Y $P[C \cap D] = \frac{15}{250}$

por lo tanto $P[C \cup D] = \frac{150}{250} + \frac{20}{250} - \frac{15}{250} = \frac{155}{250} = \frac{31}{50}$.

EJEMPLO 5 De un grupo de personas, el 30% práctica fútbol y el 40% juega ajedrez. De los futbolístas el 50% juega ejedrez. Si se elige aleatoriamente una persona. ¿Cuál es la probabilidad que

(a) juega fútbol o ajedrez?

(b) practica sólo uno de estos deportes?

(c) no practique ni fútbol ni ajedrez?

SOLUCION (a) definimos los eventos:

A: "la persona elegida es fútbolista".

B: "la persona elegida juega ajedrez".

La probabilidad pedida es la de $A \cup B$. Antes recordemos una observación respecto a la probabilidad y porcentaje; que están relacionados por una factor 100; es decir, por, ejemplo el hecho de que el 30% de las personas practican fútbol, entonces al elegir una persona de este grupo, la probabilidad de que sea futbolista es 0.3, además como el 50% de los futbolistas, o sea el 15% del total juega fútbol y ajedrez, tenemos

$$P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B] = 0.3 + 0.4 - 0.15 = 0.55$$

(b) Sea C, el evento: "la persona elegida practica sólo uno de estos deportes".

El evento C se puede escribir así,

$$C = (A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A})$$

Los eventos $A \cap \bar{B}$ y $B \cap \bar{A}$ son mutuamente excluyentes, entonces

$$P[C] = P[A \cap \bar{B}] + P[B \cap \bar{A}] \quad \text{por } Ax.3$$

$$= 0.15 + 0.25 = 0.40.$$

Nótese que $C = A \Delta B$

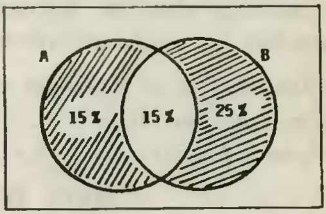


Fig. 1.6.3

(c) Sea D, el evento: "la persona elegida no practica ni fútbol ni ajedrez".
El evento D se escribe $D = \overline{A \cup B}$.
Luego

$$P[D] = P\left[\overline{A \cup B}\right]$$

$$= 1 - P[A \cup B] \qquad \text{teorema 1.6.2}$$

$$= 1 - 0.55 = 0.45$$

EJEMPLO 6 Sean A y B dos eventos que no son mutuamente excluyentes tal que

$$P[A] = 0.20 \ , \quad P[B] = 0.30 \quad y \quad P[A \cap B] = 0.10 \ .$$

Calcular: (a) $P[\bar{A} \cap \bar{B}]$; (b) $P[\bar{A} B]$; (c) $P[\bar{B} A]$; (d) $P[\bar{A} \cup B]$

SOLUCION

(a) $P[\bar{A} \cap \bar{B}] = P[\overline{A \cup B}]$, ley de De Morgan

$= 1 - P[A \cup B]$, teorema 1.6.2

$= 1 - [P[A] + P[B] - P[A \cap B]]$, teorema 1.6.4

$= 1 - 0.20 + 0.30 - 0.10 = 0.60.$

(b) $P[\bar{A} B] = P[B] - P[AB]$ Consecuencia de teorema 1.6.4

$= 0.30 - 0.10 = 0.20$

(c) $P[A\bar{B}] = P[A] - P[AB]$ Consecuencia del teorema 1.6.4

$= 0.20 - 0.10 = 0.10$.

(d) $P[\bar{A} \cup B] = P[\bar{A}] + P[B] - P[\bar{A}B]$ teorema 1.6.4

$= 0.80 + 0.30 - 0.20 = 0.90$.

EJEMPLO 7 De una urna que contiene 3 bolas blancas, 4 bolas rojas y 3 bolas verdes, se extraen al azar 2 bolas. ¿Cuál es la probabilidad de que ninguna sea verde o sean de distinto color?

SOLUCION El experimento aleatorio es "extraer dos bolas al azar"
El número de elementos del espacio muestral es $C_{10}^{2} = 45$
Definimos los siguientes eventos:

A: "de las 2 bolas extraídas ninguna sea verde o sean de distinto color".
B: "ninguna sea verde". C: "sean de distinto color".
El evento **A** se escribe $A = B \cup C$, y $B \cap C \neq \phi$. Luego

$$P[A] = P[B] + P[C] - P[B \cap C]$$

Cálculo de $P[B]$.

$$N(B) = C_{7}^{2} = 21$$

$$P[B] = \frac{21}{45} = \frac{7}{15} \qquad (1)$$

Cálculo de $P[C]$ El evento C se puede escribir así $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$, donde:
C_1: "una es blanca y la otra roja". C_2: "una es blanca y la otra verde".
C_3: "una es roja y la otra verde".
C_1, C_2, C_3 son mutuamente excluyentes dos a dos, entonces

$$P[C] = P[C_1] + P[C_2] + P[C_3]$$

$N(C_1) = 3 \times 4 = 12$, luego $P[C_1] = \frac{12}{45} = \frac{4}{15}$;

$N(C_2) = 3 \times 3 = 9$, luego $P[C_2] = \frac{9}{45} = \frac{3}{15}$;

$N(C_3) = 4 \times 3 = 12$, luego $P[C_3] = \frac{12}{45} = \frac{4}{15}$.

Por lo tanto,

$$P[C] = \frac{4}{15} + \frac{3}{15} + \frac{4}{15} = \frac{11}{15} . \qquad (2)$$

Calculemos ahora $P[B \cap C]$

Obseve que $B \cap C = C_1$, luego $P[B \cap C] = P[C_1] = \frac{4}{15}$ (3)

Finalmente, de (1) , (2) y (3) se tiene

$$P[A] = P[B] + P[C] - P[B \cap C]$$

$$= \frac{7}{15} + \frac{11}{15} - \frac{4}{15} = \frac{14}{15} .$$

Otra forma de resolver el problema anterior.

$A = B \cup C$, entonces $\bar{A} = \overline{B \cup C} = \bar{B}\,\bar{C}$, es decir

$\bar{A}$: "alguna sea verde y sean de igual color"

$$N(\bar{A}) = C_3^2 = 3$$

$$P[\bar{A}] = \frac{3}{45} = \frac{1}{15}$$

Por lo tanto ,

$$P[A] = 1 - P[\bar{A}] = 1 - \frac{1}{15} = \frac{14}{15} .$$

EJEMPLO 8 Se tiene en una caja 5 tikets de 100 intis cada uno, 3 tikets de 300 intis cada uno, y 2 tikets que valen 500 intis cada uno. Se escoge aleatoriamente 3 tikets. Determinar la probabilidad que:

(a) Al menos dos de ellas tenga el mismo precio.

(b) La suma de los precios de los tres tikets sea de 700 intis.

SOLUCION El experimento aleatorio es, escoger 3 tikets de los 10 que se tiene en la caja; entonces al espacio muestral C_{10}^3 elementos.

Sean los iguientes eventos:

A: "al menos dos de los tikets escogidos tengan el mismo precio".

B: "la suma de los precios de los tres tikets sea de 700 intis

(a) Calcularemos primero la probabilidad del evento $\bar{A}$, donde

$\bar{A}$: "tengan precio diferentes".

entonces, el número de elementos de $\bar{A}$, es $C_5^1\, C_3^1\, C_2^1$. Luego,

$$P[\bar{A}] = \frac{C_5^1\, C_3^1\, C_2^1}{C_{10}^3}$$

y $$P[A] = 1 - \frac{C_5^1\, C_3^1\, C_2^1}{C_{10}^3} = 0.75\,.$$

(b) Sea los siguientes eventos:

B_1 : "un tikets de 500 intis y 2 de 100 intis".

B_2 : "2 tikets de 300 intis y 1 de 100 intis".

Entonces, el evento **B** se escribe $B = B_1 \cup B_2$, donde B_1 y B_2 son mutuamente excluyentes; por lo tanto,

$$P[B] = P[B_1] + P[B_2]\,.$$

El evento B_1 ocurre de $C_2^1\ C_5^2$ formas; luego ,

$$P[B_1] = \frac{C_2^1\, C_5^2}{C_{10}^3}$$

El evento B_2 ocurre de $C_3^2\ C_5^1$ formas, luego

$$P[B_2] = \frac{C_3^2\, C_5^1}{C_{10}^3}\,.$$

Finalmente,

$$P[B] = \frac{C_2^1\, C_5^1}{C_{10}^3} + \frac{C_3^2\, C_5^1}{C_{10}^3} = \frac{C_2^1\, C_5^2 + C_3^2\, C_5^1}{C_{10}^3} = \frac{7}{24}\,.$$

EJEMPLO 9 En una encuesta pública se determina que la probabilidad que - una persona consuma el producto **A** es 0.50, que consuma el producto **B** es 0.37 que consuma el producto **C** es 0.30, que consuma A y B es 0.12, que consuma solamente A y C es 0.0B, que consuma solamente B y C es 0.05 y que consuma solemente **C** es 0.15. Calcular la probabilidad que una persona consuma:

(a) A ó B pero no **C**.

(b) Solamente **A**.

SOLUCION Los datos del problema son los siguientes:

$P[A] = 0.50; \quad P[B] = 0.37; \quad P[C] = 0.30; \quad P[AB] = 0.12$.

El evento solamente A y C, se escribe $AC\bar{B}$;

luego $P[AC\bar{B}] = 0.08$.

El evento solamente B y C, se escribe $\bar{A}\,BC$;

luego $P[\bar{A}\,BC] = 0.05$.

Y el evento solamente **C**, se escribe $\bar{A}\,\bar{B}\,C$;

luego $P[\bar{A}\,\bar{B}\,C] = 0.15$.

(a) Se pide calcular la probabilidad del evento $(A \cup B)\bar{C}$.
Observe que

$$P[(A \cup B)\bar{C}] = 1 - P[\bar{A}\,\bar{B} \cup C] . \qquad (1)$$

Por otro lado,

$$P[\bar{A}\,\bar{B} \cup C] = P[\bar{A}\,\bar{B}] + P[C] - P[\bar{A}\,\bar{B}\,C] . \qquad (2)$$

Cálculo de $P[\bar{A}\,\bar{B}]$

$$P[\bar{A}\,\bar{B}] = P[\overline{A \cup B}] = 1 - P[A \cup B] \qquad (3)$$

pero, $P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[AB]$

$$= 0.50 + 0.37 - 0.12$$

$$= 0.75 .$$

Reemplazando este valor en (3), obtenemos

$$P[\bar{A}\,\bar{B}] = 1 - 0.75 = 0.25$$

Reemplazando este último valor en (2), obtenemos

$$P[\bar{A}\,\bar{B} \cup C] = 0.25 + 0.30 - 0.15 = 0.40$$

Finalmente reemplazando este valor en (1) obtenemos la probabilidad pedida

$$P[(A \cup B)\bar{C}] = 1 - 0.40 = 0.60$$

(b) El evento solamente **A**, se escribe $A\,\bar{B}\,\bar{C}$. Note que el evento **A** puede escribirse

$A = AB \cup AC\bar{B} \cup A\bar{B}\,\bar{C}$, mutuamente excluyentes. Luego,

$$P[A] = P[AB] + P[AC\bar{B}] + P[A\bar{B}\,\bar{C}] ,$$

de donde

$$P[A\bar{B}\,\bar{C}] = P[A] - P[AB] - P[AC\bar{B}]$$
$$= 0.50 - 0.12 - 0.08$$
$$= 0.30 .$$

NOTA Una forma práctica de resolver este problema es llevando los datos a un diagrama de Venn, como se observa en la fig. 1.6.4. Además, observe que las probabilidades indicadas en el diagrama corresponden a eventos mutuamente excluyentes. Luego,

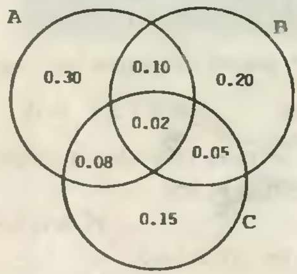


Fig. 1.6.4

(a) $P[(A \cup B)\bar{C}] = 0.30 + 0.10 + 0.20 = 0.60$

(b) $P[A\bar{B}\,\bar{C}] = 0.3$

EJEMPLO 10 El cuadro siguiente contiene la clasificación de 321 obreros de un sindicato respecto a dos características:

1. El número de años de pertenencia de cada uno al sindicato ;
2. Su respuesta a la pregunta: "Desea ud. ir a la huelga para obtener un aumento de salarios".

Respuesta a la pregunta	Número de años en el sindicato				Total
	menos de 1	de 1 a 3	de 4 a 10	más de 10	
Si	27	54	137	28	246
No	14	18	34	3	69
No sé	3	2	1	0	6
Total	44	74	172	31	321 \ 321

Sean los eventos :

S : "obreros que contestaron si".
N : "obreros que contestaron no".
A : " obreros que pertenecen al sindicato menos de 1 año".
B : "obreros con 1 a 3 años en el sindicato".
C : "obreros con 4 a 10 años en el sindicato".

(a) Encuentre la probabilidad de cada uno de los siguientes eventos:

$$S \cap B; \quad S \cup B, \quad \overline{S \cup N} \cap A; \quad \overline{N \cap C}.$$

(b) Evalué la probabilidad de los siguientes eventos:

i) "Obreros que contestaron si y pertenecen por lo menos cuatro años al sindicato".

ii) "Obreros que contestaron si o no sé, y tienen más de 10 años en la empresa".

SOLUCION El espacio muestral tiene 321 elementos.

(a) i) El número de casos favorables al evento $S \cap B$ se obtiene de la tabla y es el número que aparece en la intersección de la fila que contestaron si, con la columna de obreros con 1 a 3 años en el sindicato. Este número es 54, luego,

$$P[S \cap B] = \frac{54}{321} = \frac{18}{107}.$$

ii) $P[S \cup B] = P[S] + P[B] - P[S \cap B]$ Teorema 1.6.4

$$= \frac{246}{321} + \frac{74}{321} - \frac{54}{321} = \frac{266}{321}.$$

iii) $P[\overline{S \cup N} \cap A] = P[\overline{S} \cap \overline{N} \cap A] = \dfrac{3}{321}.$

iv) $P[\overline{N \cap C}] = 1 - P[N \cap C] = 1 - \dfrac{34}{321} = \dfrac{287}{321}.$

(b) Definimos los siguientes eventos:

D: "obreros con más de 10 años en el sindicato".

E: "obreros que contestaron no sé".

i) Sea F: "obreros que contestaron si y pertenecen por lo menos cuatro años al sindicato".

Entonces $F = S \cap (C \cup D) = SC \cup SD)$;

los eventos SC y SD son mutuamente excluyentes, luego

$$P[F] = P[SC] + P[SD] = \frac{137}{321} + \frac{28}{321} = \frac{165}{321}.$$

ii) Sea G: "Obreros que contestaron si o no sé y tienen más de 10 años en el sindicato".

Entonces $G = (S \cup E) \cap D) = SD \cup ED$,

los eventos SD y ED son mutuamente excluyentes, luego

$$P[G] = P[SD] + P[ED] = \frac{28}{321} + \frac{0}{321} = \frac{28}{321} .$$

EJEMPLO 11 Una compañía que concierta citas por computadoras tiene en sus archivos los nombres y direcciones de 200 chicas. De estas 200, un total de 35 miden 1.65 mts. o menos de estatura; 60 son rubias; 12 de las rubias miden 1.65 mts. o menos. Pedro Carrillo envía su solicitud por correo, ¿Cuál es la probabilidad que

(a) reciba el nombre de una rubia?

(b) reciba el nombre de una chica rubia y estatura mayor de 1.65 mts?

(c) reciba el nombre de una rubia o estatura menor de 1.65 mts?

(d) reciba el nombre de una que no es rubia o estatura menor de 1.65 mts?

SOLUCION Construimos una tabla de dos entradas con los datos del problema.

Estatura / Color del cabello	1.65 mts o menos	más de 1.65 mts.	Total
Rubia	12	48	60
no es Rubia	23	117	140
Total	35	165	200

Definimos los eventos:

R: "Recibe el nombre de una rubia".

E: "Estatura 1.65 mts o menos"

(a) $P[R] = \frac{60}{200} = \frac{3}{10}$.

(b) $$P[R\bar{E}] = \frac{48}{200} .$$

(c) $$P[R \cup E] = P[R] + P[E] - P[RE]$$

$$= \frac{60}{200} + \frac{35}{200} - \frac{12}{200} = \frac{83}{200} .$$

(d) $$P[\bar{R} \cup E] = P[\bar{R}] + P[E] - P[\bar{R}\, E]$$

$$= \frac{140}{200} + \frac{35}{200} - \frac{23}{200} = \frac{152}{200} .$$

PROBLEMAS 1.6

1. Sean A y B dos eventos en Ω tales que $P[A] = 0.2$, $P[\bar{B}] = 0.4$ y $P[\bar{A}\,\bar{B}] = 0.3$. Calcular

(a) $P[A \cup B]$; (b) $P[AB]$; (c) $P[A\bar{B}]$; (d) $P[\bar{A}B]$; (e) $P[\bar{A} \cup B]$

2. Dado $P[A] = 0.5$ y $P[A \cup B] = 0.6$. Determinar $P[B]$, si A y B son mutuamente excluyentes.

3. Si $P[A] = 0.4$, $P[B] = 0.5$, $P[C] = 0.7$, $P[AB] = 0.2$, $P[AC] = 0.2$, $P[BC] = 0.4$ y $P[ABC] = 0.1$. Hallar :

   (a) $P[A \cup B \cup C]$; (b) $P[A \cup B \cup \bar{C}]$

4. Si $P[A] = 0.4$, $P[B] = 0.5$ y $P[AB] = 0.3$. Hallar:

   $P[A \cup B]$, $P[A\bar{B}]$, $P[\bar{A}\bar{B}]$.

5. Si $P[A] = 0.2$, $P[\bar{A}B] = 0.4$, $P[\bar{A}C] = 0.2$, $P[\bar{A}BC] = 0.1$ y $P[BC] = 0.1$. Hallar :

   (a) $P[\bar{A}\bar{B}\bar{C}]$; (b) $P[A \cup B \cup C]$

6. Si los eventos A_j , $j = 1,2,3$ son tales que $A_1 \subset A_2 \subset A_3$ y $P[A_1] = 1/4$; $P[A_2] = 5/12$ y $P[A_3] = 7/12$. Determinar la probabilidad de los siguientes eventos

   $\bar{A}_1 \cap A_2$; $\bar{A}_1 \cap A_3$; $\bar{A}_2 \cap A_3$; $A_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3$ y $\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3$.

7. Si $P[A] = \frac{1}{4}$ y $P[\bar{B}] = \frac{1}{5}$, ¿Son los eventos A y B mutuamente excluyentes? justifique su respuesta

8. ¿Si $P[A] = 1/3$ y $P[\bar{B}] = 1/4$, entonces A y B son mutuamente excluyentes?. Justifique su respuesta.

9. ¿Si $P[A] = P[\bar{B}]$, entonces $A = \bar{B}$? Justifique su respuesta.

10. ¿Cuáles de los siguientes representan tres eventos que son (1) colectivamente exhaustivos, (2) pares mutuamente excluyentes:

    (a) $P[A] = 0.6$, $P[B] = 0.2$, $P[C] = 0.1$ y $P[AB] = 0$

    (b) $P[A] = 0.1$, $P[B] = 0.4$, $P[C] = 0.5$, $P[A \cup B] = P[C]$,

    $P[A \cup C] = 0.6$ y $P[BC] = 0$

    (c) $P[A] = P[B] = 0.2$, $P[C] = 0.6$, $P[AB] = 0$ y

$P[A \cup C] = P[B \cup C] = 0.8$

(d) $P[A] = P[B] = P[C] = 0.35$ y $P[AB] = P[AC] = 0$

11. Demostrar que para cualquier par de eventos A y B en un espacio muestral se tiene que

$$P[A\bar{B} \cup B\bar{A}] = P[A] + P[B] - 2P[AB] \qquad (1)$$

donde el evento $A\bar{B} \cup B\bar{A}$ es el evento que ocurre exactamente uno de los eventos A y B. Compare (1) con la fórmula del teorema 1.6.4, de la cual podría decirse que es la fórmula de la probabilidad que ocurra por lo menos uno de los eventos.

12. Dado que $P[A] = 0.7$, $P[B] = 0.5$, $P[A\bar{B}] = 0.3$ y $P[A\bar{B}\,\bar{C}] = 0.1$.
Hallar :
(a) $P[\overline{A \cup \bar{A}\, B}]$; (b) $P[\bar{A} \cup \bar{B}\, C]$; (c) $P[\overline{AB \cup A \cup \bar{A}\,\bar{B}}]$.

13. Si $P[B] = 0.1$, $P[C] = 0.2$, $P[B\,C] = 0.1$ y $P[A\bar{B}\,C] = 0.1$.
Hallar :
(a) $P[\bar{B}\ \overline{AC}]$; (b) $P[\bar{A}\,\bar{B}\,C \cup B\bar{C}]$.

14. Si $P[A] = 0.5$, $P[A \cup \overline{\bar{B}\,\bar{C}}] = 0.8$. Determinar $P[\bar{A}\,(B \cup C)]$.

15. Sean A,B, y C tres eventos en un espacio muestral. Exprese en términos de $P[A]$, $P[B]$, $P[C]$, $P[AB]$, $P[AC]$, $P[ABC]$, para $k = 0,1,2,3$ la probabilidad que :
(a) ocurran exactamente k de los eventos A,B,C;
(b) ocurran por lo menos k de los eventos A,B,C;
(c) ocurran cuando menos k de los eventos A,B,C.

16. A y B son dos eventos de un mismo espacio muestral. Las probabilidades $P[A]$, $P[B]$, y $P[AB]$ se dan. Encuéntrese una expresión en términos de estas probabilidades para las probabilidades de los siguientes eventos
(a) $\bar{A} \cup \bar{B}$; (b) $\bar{A}\,\bar{B}$; (c) $\bar{A} \cup B$, (d) $\bar{A}\,B$;
(e) $\overline{A \cup B}$; (f) $\overline{AB}$; (g) $\bar{A}\,(A \cup B)$; (h) $A \cup \bar{A}\,B$.

17. Se elige al azar un número entre los 200 primeros números enteros positivos. ¿Cúal es la probabilidad que el número elegido, sea divisible por 6 ó por 8?

18. Jaimito se presenta a dos universidades A y B. El estima la probabilidad que sea admitido en la universidad A en 0.8; a la universidad B en -

0.75, en al menos una de ellas en 0.95. ¿Cuál es la probabilidad que ingrese a ambas universidades.

19. Por cada 10,000 automóviles asegurados se roban 8,000 al año, se descomponen 2,500, y 6,300 de los autos robados resultan averiados. ¿Cuál es la probabilidad que un automóvil nuevo asegurado se pierda en el primer año? ¿Cuál es la probabilidad que lo roban o lo averien?

20. Un joyero produce 50,000 dijes en forma de corazón con motivos del "día de la madre". De los 50,000 dijes, 720 no están bien moldeados; 397 presentar rayaduras; 534 no tienen broche; 180 están rayadas y tienen defectos de moldura y 70 además de rayadas carecen de broche. ¿Cuál es la probabilidad de extraer un dije defectuoso de la caja en que están depositados todos?

21. Una caja contiene diez estampillas de 20 centavos, cinco estampillas de 15 centavos, y dos estampillas de 10 centavos. Se extrae aleatoriamente 6 estampillas; ¿Cuál es la probabilidad que su suma no exceda a 100 centavos?

22. En una urna hay 2 bolas azules, 1 blanca y 3 rojas. Se van a extraer al azar 2 bolas. Calcule ud. la probabilidad que las dos bolas sean rojas o una blanca y la otra azúl.

23. Un dado tiene 3 caras negras numeradas con 1,2,3; y las otras caras son blancas numeradas con: 4,5,6. Si se lanza este dado, ¿Cuál es la probabilidad de que aparezca un número par o una cara blanca?.

24. En una ciudad se publican tres revistas: A,B,C. Realizada una encuesta, se estima que de la población adulta: el 20% lee A, 30% lee B, 25% lee C; 10% lee A y B, 8% lee A y C y 12% lee B y C; además el 3% lee las tres revistas. Se elige aleatoriamente una persona adulta, calcular la probabilidad que lea al menos una de estas revistas.

25. Un banco tiene 50 cuentas de crédito, 8 de las cuales estan atrazadas en sus pagos. Si se selecciona al azar 5 cuentas de las 50, ¿Cuál es la probabilidad que por lo menos una cuenta de las cuentas escogidas corresponda a un cliente atrasado en sus pagos?

26. Se extrae una carta de una baraja de 52 cartas. Se gana I/. 10.00, si el resultado es par o divivible por 3. ¿Cuál es la probabilidad de ganar?

27. Un vendedor está tratando de vender artefacto a tres clientes. Sea A, B, C los eventos de hacer una venta al primero, segundo y tercer cliente respectivamente. La probabilidad que el primer cliente o el segundo, pero no el tercero comprarían es 0.65. La probabilidad que el primero y el segundo cliente comprarían es 0.20. La probabilidad de que haga primera venta pero no la tercera es 0.25, la probabilidad que ni el primer, ni el segundo cliente comprarían es 0.25. La probabilidad que el segundo no compra pero el tercero si es 0.30. ¿Cuál es la probabilidad que sólo uno de los dos primeros, compran pero no el tercero?.

28. En una urna existen 3 bolas rojas; 6 blancas; 4 verdes y 2 negras. Determine ud. la probabilidad que al elegir 3 bolas al azar:
(a) Ellas no resultan del mismo color.
(b) Ellas resultan de colores diferentes.

29. En cierta ciudad, la probabilidad que una familia tenga televisor es 0.85, un refrigerador es 0.60 y que tengan ambos es 0.50. ¿Cuál es la probabilidad que una familia tenga al menos uno de estos artefactos?.

30. Una compañía comercial tiene 130 sucursales localizadas en las tres regiones del país y se dedican a la venta de diversos artículos tal como aparece en el cuadro.

Regiones	Carros	Repuestos	Art. eléctricos	Total
Costa	50	20	30	100
Sierra	10	5	10	25
Selva	1	0	4	5
Total	61	25	44	130

Se selecciona, al azar, una sucursal para colocar en el mercado un nuevo producto que pueda ser vendido por cualquiera de las sucursales. Determine la probabilidad que:
(a) la sucursal seleccionada no esté localizada en la selva o venda repuestos.
(b) no venda carros o artefactos eléctricos y esté localizada en la costa o en la selva.

31. De una baraja de 52 cartas, se extrae al azar una de ellas. Determinar la

probabilidad que:

(a) Sea figura o copa; (b) Sea figura; pero no espada.

32. En una ciudad se publican tres revistas: A, B y C. El 30 % de la población lee A, el 20 % lee B, el 15 % lee C, el 12 % lee A y B, el 9 % A y C, el 6 % B y C, y el 3 % leen A, B y C. Determinar el porcentaje de personas - que:

(a) leen al menos uno de las tres revistas. (b) lee solamente **A**.

(c) leen B o C; pero no **A**. (d) leen **A** o no lee **B** ni **C**.

33. El gerente de una planta química situada en el puerto del callao sabe que en un pleito que se le avecina en la corte, la compañía puede ser culpable de contaminar el mar. Mas aún, él sabe que si la encuentran culpable, la compañía tendrá que instalar un sistema de purificación del agua, pagar una multa, o ambos. Hasta ahora, solo un 10 % de las compañías en casos similares han tenido que pagar la multa e instalar un sistema de purificación. Adicionalmente, cuando la decisión de la corte no obliga a las dos penas, una compañía ha tenido tres veces más la probabilidad de ser - multada que de ser requerida para instalar el sistema de purificación. Si el 28 % de las compañías han sido culpables. ¿Cuál es la probabilidad de - que esta compañía sea requerida para instalar un sistema de purificación?

34. Los 500 clientes de crédito de creditos S.A., estan categorizados según - el número de años que han tenido cuenta de crédito con Créditos S.A. , y por su promedio de saldo de crédito. De estos clientes, 210 han tenido - saldos menores a I/. 1000; otros 260 han tenido cuenta de Crédito cuando menos cinco años, y 80 han tenido saldos mayores de I/. 1000 y cuenta de crédito por menos de cinco años. Si se selecciona al azar un cliente, - ¿cuál es la probabilidad que tenga

(a) un saldo de crédito mayor a I/. 1000 ?

(b) un saldo de crédito menor a I/. 1000 o haya tenido cuenta de crédito por lo menos cinco años?

(c) un saldo de crédito menor a I/. 1000 y haya tenido cuenta de crédito por lo menos cinco años?

35. De los 250 empleados de una compañía, 130 fuman cigarrillos. Hay 150 hombres que trabajan en esta compañía, de los cuales 85 fuman cigarrillos . ¿Cuál es la probabilidad que un empleado seleccionado al azar,

(a) no fume cigarrillos? (b) sea mujer y fume cigarrilos?

(c) sea hombre o fume cigarrillos?

1.7 PROBABILIDAD CONDICIONAL, REGLA DE MULTIPLICACION

La definición de probabilidad, en sus diversas formas discutidas en las secciones anteriores, relaciona todo el espacio muestral Ω y hemos utilizado el símbolo P[A] para denotar la probabilidad de estos eventos; podríamos haber usado el símbolo P[A|Ω], que se lee: "la probabilidad del evento A dado que ha ocurrido Ω". Frecuentemente estaremos interesados en obtener la probabilidad de un evento, donde dicho evento está *condicionado* a la ocurrencia de un subconjunto del espacio muestral. Es decir, se da que el evento B ha ocurrido, y se quiere saber la probabilidad que ocurra el evento A. Evidentemente, la probabilidad de un evento A es diferente cuando tenemos la información que ha ocurrido ya un subconjunto B de Ω.

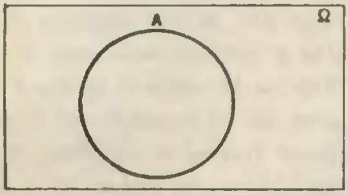


Fig. 1.7.1

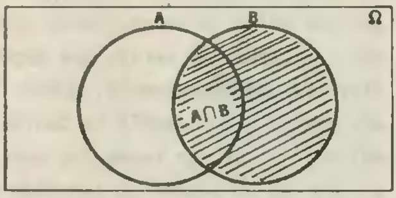


Fig. 1.7.2

Se dice que ya ha ocurrido B, entonces, se tiene que el espacio muestral Ω se ha restringido al subconjunto B. Pués se sabe que no ha ocurrido todo suceso ω que pertenece a $\bar{B}$. Por lo tanto, sería razonable definir la *probabilidad del evento A dado que ha ocurrido B*, denotado por P[A|B], tal como sugiere la figura 1.7.2 (parte sombreada), igual a la razón del área A ∩ B al área B visualizados como probabilidades

$$P[A \mid B] = \frac{P[A \cap B]}{P[B]}, \quad \text{si} \quad P[B] > 0$$

Así, P[A | Ω] se puede escribir ahora,

$$P[A \mid \Omega] = \frac{P[A \cap \Omega]}{P[\Omega]} = P[A]$$

Daremos algunas ilustraciones para aclarar mejor esta idea intuitiva. Consideremos el "lanzamiento de un dado y observar el número que resulta en la cara superior". El espacio muestral es Ω = {1,2,3,4,5,6}, sea los siguientes eventos:

A: "Se observa un número impar". B: "Se observa un número mayor que 3".

Desde que $A = \{1,3,5\}$, $B = \{4,5,6\}$ se tiene $A \cap B = \{5\}$

entonces, $P[A \cap B] = \frac{1}{6}$ y $P[B] = \frac{3}{6}$. Por lo tanto, la probabilidad de que el evento A ocurra, dado que el evento B ha ocurrido es

$$P[A \mid B] = \frac{1/6}{3/6} = \frac{1}{3}.$$

Note que $N(A \cap B) = 1$

y $N(B) = 3$, entonces

$$P[A \mid B] = \frac{N(A \cap B)}{N(B)} = \frac{1}{3}.$$

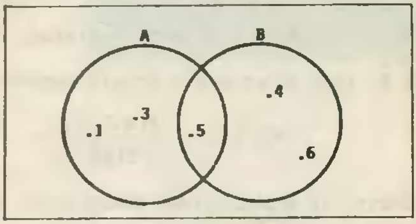


Fig. 1.7.3

consideremos ahora el lanzamiento de un par de dados. Y suponiendo que se nos informa haber obtenido suma mayor que 6. ¿Cuál es la probabilidad de obtener suma 7?

Obsérvese que la información proporcionada descarta, por ejemplo, la ocurrencia del par (2,3) y descarta la ocurrencia de todos los sucesos fuera del "trapecio" de la figura 1.7.4. Entonces si, **A**, es el evento: "obtener suma 7" y B : "se obtubo suma mayor que 6". Se tiene $N(A \cap B) = 6$ y - $N(B) = 21$. Luego,

$$P[A \mid B] = \frac{N(A \cap B)}{N(B)} = \frac{6}{21}$$

(1 , 1)	(1 , 2)	(1 , 3)	(1 , 4)	(1 , 5)	(1 , 6)
(2 , 1)	(2 , 2)	(2 , 3)	(2 , 4)	(2 , 5)	(1 , 6)
(3 , 1)	(3 , 2)	(3 , 3)	(3 , 4)	(3 , 5)	(3 , 6)
(4 , 1)	(4 , 2)	(4 , 3)	(4 , 4)	(4 , 5)	(4 , 6)
(5 , 1)	(5 , 2)	(5 , 3)	(5 , 4)	(5 , 5)	(5 , 6)
(6 , 1)	(6 , 2)	(6 , 3)	(6 , 4)	(6 , 5)	(6 , 6)

Fig. 1.7.4

o aplicando nuestra definición intuitiva, tenemos

$$P[A \mid B] = \frac{P[A \cap B]}{P[B]} = \frac{6/36}{21/36} = \frac{6}{21}.$$

Formalizaremos ahora la definición de probabilidad condicional.

DEFINICION 1.7.1 Sea un evento B con $P[B] > 0$, la probabilidad *condicional* de que ocurra el evento A, dado que ha ocurrido B, denotado $P[A \mid B]$ se define como sigue

$$P[A \mid B] = \frac{P[A \cap B]}{P[B]} .$$

NOTA 1 $P[A \mid B]$ no está definida, si $P[B] = 0$

NOTA 2 Como hemos visto intuitivamente en los dos ejemplos dados.

$$P[A \mid B] = \frac{P[A \cap B]}{P[B]} = \frac{N(A \cap B)/n}{N(B)/n} = \frac{N(A \cap B)}{N(B)}$$

Es decir, la probabilidad condicional es una probabilidad calculada en un espacio muestral reducido, B; pués a partir de la información sabemos con probabilidad 1 que el evento B ya ocurrió. En la práctica podemos resolver el problema usando la definición, esto es calculado $P[A \cap B]$ y $P[B]$ con respecto al espacio muestral original o considerando la probabilidad del evento A con respecto al espacio muestral reducido B (como indica la nota 2 y los ejemplos que hemos dado).

La definición de probabilidad condicional $P[\,.\mid .\,]$ dado como resultado de la noción intuitiva presentada en la discusión de la definición, es una probabilidad definida en un espacio muestral reducido y es de esperar que puedan establecerse los axiomas y resultados establecidos para $P[\,.\,]$. Es decir, si B es un evento tal que $P[B] > 0$, $P[\,.\mid B]$ satisface los tres axiomas

Ax1. $0 \leq P[A \mid B] \leq 1$

Ax2. $P[\Omega \mid B] = 1$

Ax3. $P[A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \mid B] = P[A_1 \mid B] + P[A_2 \mid B] + \ldots + P[A_n \mid B]$

ó $$P\Big[\bigcup_{i=1}^{n} A_i \mid B\Big] = \sum_{i=1}^{n} P[A_i \mid B]$$

para una secuencia de n eventos $A_1, A_2, \ldots, A_n$, mutuamente excluyentes ($A_i \cap A_j = \phi \;\forall\; i \neq j$).

En general, para una secuencia numerable de eventos $A_1, A_2, \ldots$ mutuamente excluyentes, se tiene

$$P\Big[\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \mid B\Big] = \sum_{i=1}^{\infty} P[A_i \mid B]$$

De los axiomas Ax1, Ax2, Ax3 de la probabilidad condicional, se demuestra que los teoremas dados en 1.6 siguen siendo válidos para la probabilidad condicional. Es decir, si B es un evento tal que $P[B] > 0$, $P[\,.\mid B]$ tiene las siguientes propiedades:

TEOREMA 1.7.1 $P[\phi \mid B] = 0$

TEOREMA 1.7.2 $P[\bar{A} \mid B] = 1 - P[A \mid B]$ o $P[A \mid B] = 1 - P[\bar{A} \mid B]$

TEOREMA 1.7.3 Si $A \subset C$ entonces $P[A \mid B] < P[C \mid B]$

TEOREMA 1.7.4 $P[A \cup C \mid B] = P[A \mid B] + P[C \mid B] - P[A \cap C \mid B]$

EJEMPLO 1 En Lima, Perú la probabilidad que llueva el día primero de Julio es 0.50 y la probabilidad que llueva los dos primeros dias de Julio es 0.40. Dado que llovió el día primero, ¿cuál es la probabilidad que llueva el día siguiente?

SOLUCION Definimos los siguientes eventos

A: "llovió el primer día de Julio" B: "llueve el segundo día de Julio"

Entonces $P[A] = 0.50$ y $P[A \cap B] = 0.40$.

Usando la definición de probabilidad condicional se tiene

$$P[B \mid A] = \frac{P[A \cap B]}{P[A]} = \frac{0.40}{0.50} = 0.80.$$

EJEMPLO 2 En el ejemplo 11 de 1.6 suponga que él llama a la chica y concierta una cita. Convienen en encontrarse en el café AMARGO. Cuando llega, ella esta sentada en la barra y ve que tiene el pelo rubio. ¿Cuál es la probabilidad que su estatura sea mayor que 1.65 mts.? ¿Cuál de que sea menor que 1.65 mts?

SOLUCION Por la definición de probabilidad condicional se tiene

$$P[\bar{E} \mid R] = \frac{P[\bar{E}\ R]}{P[R]} = \frac{48/200}{60/200} = \frac{4}{5}$$

por el teorema 1.7.2 se obtiene

$$P[E \mid R] = 1 - P[\bar{E} \mid R] = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}\ .$$

EJEMPLO 3 En una Universidad de 10000 estudiantes y 1000 profesores, el 10% de los profesores son de izquierda y 90% de derecha, mientras que en los estudiantes este porcentaje es al contrario. Se selecciona al azar un miembro de la Universidad y se encuentra que es de derecha, ¿cuál es la probabilidad que se haya seleccionado un estudiante? ¿un profesor?

SOLUCION Note que el espacio muestral es la comunidad Universitaria con $10000 + 1000 = 11000$ integrantes. Es decir $N(\Omega) = 11000$.

Definimos los siguientes eventos:

D: "un integrante de derecha"

E: "el integrante es un estudiante"

(a) Debemos calcular $P[E \mid D] = \dfrac{P[ED]}{P[D]}$

$$N(ED) = 1000 \quad \text{y} \quad N(D) = 1900$$

Luego, $$P[E \mid D] = \frac{1000/_{11000}}{1900/_{11000}} = \frac{10}{19}.$$

(b) $$P[\bar{E} \mid D] = \frac{P[\bar{E}D]}{P[D]}$$

$N(\bar{E}D) = 900$. Entonces

$$P[\bar{E} \mid D] = \frac{900/_{11000}}{1900/_{11000}} = \frac{9}{19}.$$

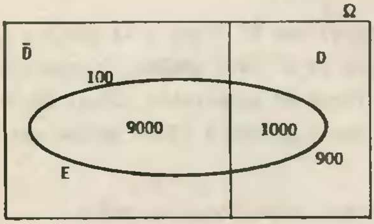


Fig. 1.7.5 Diagrama de Venn para el ejemplo 3.

o tambien usando el teorema 1.7.2

$$P[E \mid D] = 1 - P[E \mid D] =$$

$$1 - \frac{10}{19} = \frac{9}{19}.$$

EJEMPLO 4 Cierta universidad en formación en su primer año de funcionamiento tiene tres curricula: Ciencia, Administración e Ingeniería. La clasificación de los alumnos por su sexo, es como sigue

	Ciencia	Administración	Ingeniería	Total
Hombres	250	350	200	800
Mujeres	100	50	50	200
Total	350	400	250	1,000

Tabla 1.7.1

Se selecciona un estudiante aleatoriamente del grupo. Si se sabe que el estudiante es hombre. ¿Cuál es la probabilidad que esté en Ciencias? ¿Cuál que esté en Ingeniería? ¿Cuál que el estudiante está matriculado en Administración?. Si el estudiante es una mujer. ¿Cuál que esté en Ciencias? ¿Cuál que esté matriculado en Ingeniería? ¿Cuál que esté en Administración?

SOLUCION Definimos los siguientes eventos :

B_1: "El estudiante seleccionado es hombre".

B_2: "El estudiante seleccionado es mujer".

A_1: "El estudiante sigue ciencias".

A_2: "El estudiante está matriculado en Administración"

A_3: "El estudiante está matriculado en Ingeniría".

$$P[B_1] = \frac{800}{1000} = 0.80 \ ; \qquad P[B_2] = \frac{200}{1000} = 0.20,$$

estas probabilidades se llaman algunas veces ***Probabilidades marginales***. De la misma manera :

$$P[A_1] = \frac{350}{1000} = 0.35 \ ; \qquad P[A_2] = \frac{400}{1000} = 0.40$$

$$P[A_3] = \frac{250}{1000} = 0.25, \quad \text{son probabilidades marginales.}$$

$P[B_i \cap A_j]$, $i = 1,2;$ $j = 1,2,3.$ Se llaman también ***probabilidades conjuntas***, están dadas en la tabla 1.7.2

	A_1	A_2	A_3	Total
B_1	0.25	0.35	0.20	0.80
B_2	0.10	0.05	0.05	0.20
Total	0.35	0.40	0.25	1.00

Tabla 1.7.2

donde, por ejemplo $P[B_1 \cap A_1] = \dfrac{250}{1000} = 0.25$.

Cálculo de las probabilidades pedidas. Es decir

$$P[A_j \mid B_i] = \frac{P[A_j \cap B_i]}{P[B_i]}, \quad i = 1,2; \quad j = 1,2,3.$$

por ejemplo :

$$P[A_1 \mid B_1] = \frac{250}{800} = \frac{0.25}{0.80} - 0.3125 .$$

$$P[A_1 \mid B_2] = \frac{100}{200} = \frac{0.10}{0.20} = 0.5 .$$

$$P[A_2 \mid B_1] = \frac{350}{800} = \frac{0.35}{0.80} = 0.4375 .$$

$$P[A_2 \mid B_2] = \frac{50}{200} = \frac{0.05}{0.20} = 0.25 .$$

$$P[A_3 \mid B_1] = \frac{200}{800} = \frac{0.20}{0.80} = 0.25 .$$

$$P[A_3 \mid B_2] = \frac{50}{200} = \frac{0.05}{0.20} = 0.25 .$$

EJEMPLO 5 En una universidad el 70 % de los estudiantes son de Ciencias y el 30 % de letras; de los estudiantes de Ciencias - el 60 % son varones y los de letras son varones el 40 % . Si se elige aleatoriamente un estudiante, calcular la probabilidad que:

(a) sea un estudiante varón.

(b) Sea un estudiante varón, si es de Ciencias.

(c) Sea un estudiante de Ciencias, si es varón.

(d) Sea un estudiante de Ciencias y varón.

SOLUCION La información contenida en el enunciado, la resumimos en la tabla 1.7.3 con dos entradas. Es claro que el 42 % de los estudiantes son varones y estudian ciencias, este porcentaje lo obtenemos a partir del hecho de que el 60 % de los de Ciencias son varones; es decir el 60 % del 70 % - del total. En forma análoga se obtuvieron los otros porcentajes. Definimos ahora los eventos:

A: "El estudiante elegido es de Ciencias".

B: "El estudiante elegido es varón".

Esp. \ Sexo	Varones	Mujeres	Total
Ciencias	42 %	28 %	70 %
Letras	12 %	18 %	30 %
Total	54 %	46 %	100 %

Tabla 1.7.3

(a) $P[B] = 0.54$.

(b) $P[B \mid A] = \dfrac{P[A \cap B]}{P[A]} = \dfrac{0.42}{0.70} = 0.6$.

(c) $P[A \mid B] = \dfrac{P[A \cap B]}{P[B]} = \dfrac{0.42}{0.54} = 0.778.$

(d) $P[A \cap B] = 0.42$.

EJEMPLO 6 Cinco cartas, numeradas de 1 a 5, son puestas en una caja y revoleadas completamente. Se selecciona tres cartas aleatoriamente y sin restitución, y se ponen en una mesa mostrando el número. Sea A_i el evento el número i $(1 \leqslant i \leqslant 5)$ está entre estos seleccionados (Así, $A_1 = (1,2,4)$, ó $(1,3,5)$ etc).Suponga que cada combinación de tres cartas son igualmente probables. Calcular $P[A_i \mid A_j]$.

SOLUCION El número total de combinaciones de tres cartas seleccionadas de las cinco de la caja es

$$N(\Omega) = C(5,3) = 10 .$$

El número total de combinaciones que tienen un número especifico i es

$$N(A_i) = C(4,2) = 6. \quad \text{Entonces}$$

$$P[A_i] = \frac{C(4,2)}{C(5,3)} = \frac{6}{10} ; \quad i = 1,2,3,4,5 .$$

El número total de combinaciones con los números especificados i, y j, $i \neq j$ es $C(3,1) = 3 = N(A_i \cap A_j)$. Entonces

$$P[A_i \cap A_j] = \frac{3}{10} .$$

Luego, por la definición de probabilidad condicional

$$P[A_i \mid A_j] = \frac{P[A_i \cap A_j]}{P[A_j]} = \frac{3/10}{6/10} = \frac{1}{2} .$$

EJEMPLO 7 Demostremos que $P[A \mid B] + P[\bar{A} \mid B] = 1.$ Si $P[B] > 0$

DEMOSTRACION Por la definición de probabilidad condicional

$$P[A \mid B] + P[\bar{A} \mid B] = \frac{P[A \cap B]}{P[B]} + \frac{P[\bar{A} \cap B]}{P[B]} = \frac{1}{P[B]} P[A \cap B] +$$

$$+ P[\bar{A} \cap B] = \frac{P[B]}{P[B]} = 1.$$

EJEMPLO 8 Demostrar que $P[A \mid \bar{B}] + P[\bar{A} \mid \bar{B}] = 1.$

DEMOSTRACION $\bar{B} = (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{B} \cap \bar{A})$

$$P[\bar{B}] = P[A \cap \bar{B}] + P[\bar{A} \cap \bar{B}]$$

ya que $A \cap \bar{B}$ y $\bar{A} \cap \bar{B}$ son eventos mutuamente excluyentes.
Luego,

$$1 = \frac{P[A \cap \bar{B}]}{P[\bar{B}]} + \frac{P[\bar{A} \cap \bar{B}]}{P[\bar{B}]}$$

$$1 = P[A \mid \bar{B}] + P[\bar{A} \mid \bar{B}] .$$

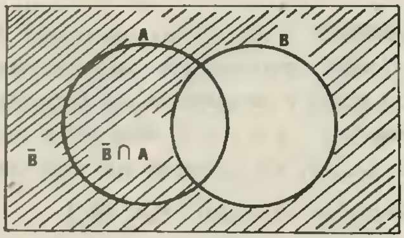


Fig. 1.7.6

EJEMPLO 9 Un hombre tiene dos carros viejos, *a* y *b*; ellos tienen problemas para arrancar en las mañanas frías. La probabilidad que ambos arrancan es 0.1; la probabilidad que arranca **b** y **a** no es 0.2; la probabilidad que ninguno de ellos arranca es 0.4. Hallar la probabilidad que

(**a**) el carro **a** arranca.

(**b**) arranca a, dado que arrancó **b**.

(**c**) arranca **b**, dado que a no arrancó .

SOLUCION Sean los siguientes eventos:

A: "El carro **a** arranca". B: "El carro b arranca" .

Entonces, según el enunciado se tiene

$P[A \cap B] = 0.1, \quad P[\bar{A} \cap B] = 0.2, \quad P[\bar{A} \cap \bar{B}] = 0.4$

(a) $\bar{A} = (\bar{A} \cap B) \cup (\bar{A} \cap \bar{B})$

$P[\bar{A}] = P[(\bar{A} \cap B) \cup (\bar{A} \cap \bar{B})]$

$= P[\bar{A} \cap B] + P[\bar{A} \cap \bar{B}]$

$= 0.2 + 0.4 = 0.6$.

Ya que los eventos $\bar{A} \cap B$ y $\bar{A} \cap \bar{B}$ son mutuamente excluyentes. Luego,

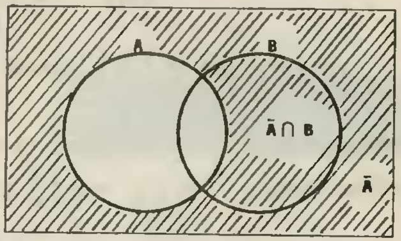


Fig. 1.7.7

$$P[A] = 1 - P[\bar{A}] = 1 - 0.6 = 0.4$$

(b) Debemos calcular antes $P[B]$. Observe que $B = (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B)$

$P[B] = P[(A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B)] = P[A \cap B] + P[\bar{A} \cap B] = 0.1 + 0.2 = 0.3$
ya que los eventos $A \cap B$ y $\bar{A} \cap B$ son mutuamente excluyentes. Entonces,

$$P[A \mid B] = \frac{P[A \cap B]}{P[B]} = \frac{0.1}{0.3} = \frac{1}{3} .$$

(c) $$P[B \mid \bar{A}] = \frac{P[\bar{A} \cap B]}{P[\bar{A}]} = \frac{0.2}{0.6} = \frac{1}{3} .$$

EJEMPLO 10 De una urna que contiene 12 bolas, de las cuales ocho son blancas, se extrae una muestra de tamaño 4, con reemplazo (sin reemplazo). Encuentre la probabilidad que la bola observada en la tercera extracción haya sido blanca, dado que la muestra contiene exactamente tres bolas blancas.

SOLUCION Sean los eventos :

A: "la muestra contiene exactamente tres bolas blancas".

B: "la bola extraída en la tercera extracción haya sido blanca".

El problema consiste en calcular

$$P[B \mid A] = \frac{P[A \cap B]}{P[A]}$$

(a) En el caso de muestreo con reemplazo .

$n = N(\Omega) = (12)^4$ y $n_A = \binom{4}{3} \times 8^3 \times 4$, entonces

$$P[A] = \frac{\binom{4}{3} 8^3 \times 4}{(12)^4} .$$

Los elementos de $A \cap B$ son de la forma $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{fijo}}}{b}\, b\, b\, b'$,

entonces varían las 2 blancas y la de diferente color que ocurre de $\binom{3}{2}$ - formas. Luego, $n_{A \cap B} = \binom{3}{2} 8^3 \times 4$, entonces

$$P[A \cap B] = \frac{\binom{3}{2} \times B^3 \times 4}{(12)^4} .$$

Por lo tanto, $P[B \mid A] = \dfrac{P[A \cap B]}{P[A]} = \dfrac{\dfrac{\binom{3}{2} \times 8^3 \times 4}{(12)^4}}{\dfrac{\binom{4}{3} 8^3 \times 4}{(12)^4}} = \dfrac{\binom{3}{2}}{\binom{4}{3}} = \dfrac{3}{4}$

(b) En el caso del muestreo sin reemplazo.

$n = N(\Omega) = P^4_{12}$, $n_A = \binom{4}{3} P^3_8 \times 4$, entonces

$$P[A] = \frac{\binom{4}{3} P^3_8 \times 4}{P^4_{12}} .$$

Los elementos de $A \cap B$, tienen la forma $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{fijo}}}{b}\, b\, b\, b'$, es decir $\binom{3}{2}$

formas de variar. Es decir $n_{A \cap B} = \binom{3}{2} P^3_8 \times 4$

Luego, $P[A \cap B] = \dfrac{\binom{3}{2} P^3_8 \times 4}{P^4_{12}}$.

por lo tanto, $P[B \mid A] = \dfrac{\dfrac{\binom{3}{2} P^3_8 \times 4}{P^4_{12}}}{\dfrac{\binom{4}{3} P^3_8 \times 4}{P^4_{12}}} = \dfrac{\binom{3}{2}}{\binom{4}{3}} = \dfrac{3}{4}$.

Compare con la respuesta anterior, explique

EJEMPLO 11 La probabilidad que la construcción de un edificio termine a tiempo es 17/20, la probabilidad que no haya huelga es 3/4, y la probabilidad que la construcción se termine a tiempo dado que no hubo huelga es 14/15; la probabilidad que haya huelga y no se termine la construcción a tiempo es 1/10. ¿Cuál es la probabilidad que

(a) la construcción se termina a tiempo y no haya huelga?

(b) No haya huelga dado que la construcción se terminó a tiempo?

(c) la construcción no se termina a tiempo si hubo huelga?

(d) la construcción no se termina a tiempo si no hubo huelga?

SOLUCION Definimos los siguientes eventos :

A: "La construcción se termina a tiempo".

B: "No haya huelga".

del enunciado del problema tenemos :

$$P[A] = \frac{17}{20}, \quad P[B] = \frac{3}{4}, \quad P[A \mid B] = \frac{14}{15}, \quad P[\bar{A} \cap \bar{B}] = \frac{1}{10}$$

(a) $P[A \cap B] = ?$

Sabemos que $P[A \mid B] = \dfrac{P[A \cap B]}{P[B]}$, de donde $\dfrac{14}{15} = \dfrac{P[A \cap B]}{3/4}$

luego, $P[A \cap B] = \dfrac{3}{4} \times \dfrac{14}{15} = \dfrac{7}{10} = 0.7$.

(b) $$P[B \mid A] = \frac{P[A \cap B]}{P[A]} = \frac{7/10}{17/20} = \frac{14}{17}.$$

(c) $$P[\bar{A} \mid \bar{B}] = \frac{P[\bar{A} \cap \bar{B}]}{P[\bar{B}]} = \frac{1/10}{1 - \frac{3}{4}} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}.$$

(d) $$P[\bar{A} \mid B] = \frac{P[\bar{A} \cap B]}{P[B]} = \frac{P[B] - P[A \cap B]}{P[B]} = 1 - \frac{P[A \cap B]}{P[B]}$$

$$= 1 - P[A \mid B] = 1 - \frac{14}{15} = \frac{1}{15}.$$

De paso el lector habrá notado que hemos "demostrado" el teorema 1.7.2 .

$$P[\bar{A} \mid B] = 1 - P[A \mid B] .$$

EJEMPLO 12 Se retira una carta roja de una baraja de 52 cartas (26 rojas y 26 negras); se extraen 13 cartas. Calcular la probabilidad que si todas son de un mismo color, ellas son negras.

SOLUCION Como se retira una carta roja, entonces queda 51 cartas, (25 rojas y 26 negras) por lo tanto, el espacio tiene $\binom{51}{13}$ elementos.

Definimos los siguientes eventos:

R: "obtener las 13 cartas rojas".

N: "obtener las 13 cartas negras".

E: "las 13 cartas son del mismo color".

Observe que $E = R \cup N$, Se pide calcular

$$P[N \mid E] = \frac{P[E \cap N]}{P[E]} = \frac{P[N \cap (R \cup N)]}{P[E]} = \frac{P[N]}{P[E]}$$

además $P[N] = \dfrac{\binom{26}{13}}{\binom{51}{13}}$, entonces

$$P[E] = P[R] + P[N] = \frac{\binom{25}{13}}{\binom{51}{13}} + \frac{\binom{26}{13}}{\binom{51}{13}} = \frac{\binom{25}{13}+\binom{26}{13}}{\binom{51}{13}} .$$

Luego,

$$P[N \mid E] = \frac{\dfrac{\binom{26}{13}}{\binom{51}{13}}}{\dfrac{\binom{25}{13}+\binom{26}{13}}{\binom{51}{13}}} = \frac{\binom{26}{13}}{\binom{25}{13}+\binom{26}{13}} = \frac{\dfrac{26!}{13!\,13!}}{\dfrac{25!}{13!\,12!} + \dfrac{26!}{13!\,13!}}$$

$$= \frac{\dfrac{26!}{13!\,13!}}{\dfrac{25!\,13! + 26!\,12!}{13!\,13!\,12!}} = \frac{26}{13 + 26} = \frac{2}{3} .$$

1.7.1 REGLA DE MULTIPLICACION

De la definición de probabilidad condicional, obtenemos una fórmula - para hallar la probabilidad de la intersección (o producto) de los eventos A y B, esto es, de

$$P[A \mid B] = \frac{P[A \cap B]}{P[B]} , \quad P[B] > 0 \qquad (1)$$

$$P[B \mid A] = \frac{P[A \cap B]}{P[A]} , \quad P[A] > 0 \qquad (2)$$

Multiplicando ambos miembros de la expresión (1) por $P[B]$ y por - $P[A]$ la expresión (2), obtenemos las ecuaciones

$$P[A \cap B] = P[B]\,P[A \mid B] = P[AB] \quad y$$

$$P[A \cap B] = P[A]\,P[B \mid A] = P[AB] ,$$

este resultado, en teoría de probabilidad, se denomina ***REGLA DE MULTIPLICACION*** o probabilidad de la intersección, (también probabilidad conjunta); expresa la probabilidad de que ocurra los eventos A y B es igual a la probabilidad de la ocurrencia de uno de ellos multiplicado por la probabilidad condicional que ocurra el segundo, dado que el primero ha ocurrido.

EJEMPLO 13 Una urna contiene 5 bolas blancas y 6 negras; se extrae al azar sucesivamente y sin reposición (con reposición) dos bolas, ¿cuál es la probabilidad que las dos resultan blancas?

SOLUCION (a) Sin reposición .

PRIMERA FORMA Sean los eventos:

A_1: "La primera bola resultó blanca".

A_2: "La segunda bola resultó blanca".

E : "Las dos bolas resultan blancas".

Es claro que la probabilidad pedida es la del evento

$$E = A_1 \cap A_2 = A_1A_2$$

Es decir, E es la intersección de los dos eventos y la ocurrencia de A_1 - influye en la de A_2. O sea

$$P[E] = P[A_1A_2] = P[A_1]\,P[A_2 \mid A_1]$$

En la urna hay 11 bolas de los cuales 5 son blancas, entonces

$$P[A_1] = \frac{5}{11}$$

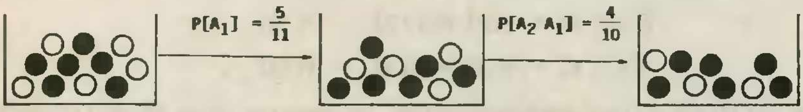
Después de la ocurrencia del evento A_1, queda 10 bolas de las cuales 4 son blancas, luego

$$P[A_2 \mid A_1] = \frac{4}{10} .$$

Por lo tanto

$$P[E] = P[A_1] P[A_2 \mid A_1] = \frac{5}{11} \times \frac{4}{10} = \frac{2}{11} .$$

Un esquema que ayuda a visualizar la solución de este problema es



SEGUNDA FORMA El problema se puede enfocar de otra manera: Como existe - 5 + 6 = 11 bolas, el número de formas de seleccionar dos de ellas esta dado por $\binom{11}{2}$ y cada una de estas formas tienen igual probabilidad de ocurrir. El número de sucesos favorables al evento E, la obtenemos de la siguiente manera: como existen 5 bolas blancas, podemos eligir dos de ellas de $\binom{5}{2}$ formas diferentes, luego aplicando la definición clásica es

$$P[E] = \frac{\binom{5}{2}}{\binom{11}{2}} = \frac{\frac{5!}{2!3!}}{\frac{11!}{2!9!}} = \frac{2}{11} .$$

(b) Con reemplazo. En este caso también el evento E se escribe como la intersección de los eventos A_1 y A_2 . O sea $E = A_1A_2$. Y la ocurrencia - de A_1 no afecta a la ocurrencia de A_2. En efecto:

$$P[A_1] = \frac{5}{11}$$

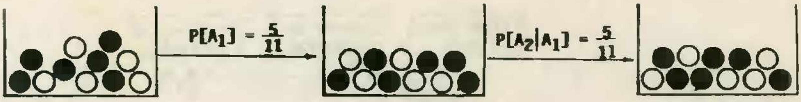
Puesto que después de la ocurrencia de A_1 se devuelve la bola a la urna, - también

$$P[A_2 \mid A_1] = \frac{5}{11}$$

Por lo tanto,

$$P[A_1A_2] = P[A_1]\, P[A_2 \mid A_1] = \frac{5}{11} \times \frac{5}{11} = \frac{25}{121} .$$

El esquema siguiente ayuda a visualizar la solución del problema



EJEMPLO 14 En el ejemplo 13. ¿Cuál es la probabilidad de obtener una bola de cada color?

SOLUCION (a) Sin restitución.

PRIMERA FORMA Sean los siguientes eventos:

A_1: "La primera bola resultó blanca".

A_2: "La segunda bola resultó blanca".

B_1 "La primera bola resultó negra".

B_2 "La segunda bola resultó negra".

E : "obtener una bola de cada color".

En este caso la probabilidad pedida, es, la del evento E formado por la unión de los eventos A_1B_2 y B_1A_2, es decir, $E = A_1B_2 \cup B_1A_2$ y como dichos eventos son mutuamente excluyentes, tenemos

$$P[E] = P[A_1B_2] + P[B_1A_2]$$

$$= P[A_1]\,P[B_2 \mid A_1] + P[B_1]\,P[A_2 \mid B_1] \qquad (1)$$

La ocurrencia del primer evento influye en la ocurrencia del segundo. Puesto que en la urna hay 11 bolas de las cuales 5 son blancas, se tiene

$$P[A_1] = \frac{5}{11}$$

Similarmente $P[B_1] = 6/11$

Después de la ocurrencia de A_1, queda 10 bolas de las cuales 6 son negras, entonces

$$P[B_2 \mid A_1] = 6/10$$

Similarmente $P[A_2 \mid B_1] = 5/10$. Por lo tanto, reemplazando estos resultados en (1) se obtiene

$$P[E] = \frac{5}{11} \times \frac{6}{10} + \frac{6}{11} \times \frac{5}{10} = \frac{6}{11}.$$

Un diagrama que ayuda a visualizar estos problemas es el llamado "*ARBOL DE PROBABILIDAD PARA EXPERIMENTOS SUCESIVOS*" y es como indica la figura 1.7.8.

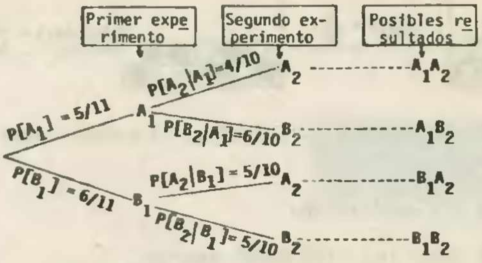


Fig. 1.7.8

Cada rama completa del diagrama del arból, se llama una *trayectoria* y representa un posible resultado del experimento. En cada segmento que une la secuencia de experimentos se pone sus respectivas probabilidades.

SEGUNDA FORMA El número de formas de extraer dos bolas de 11 es $\binom{11}{2}$. Cada uno de estos son igualmente posibles.

Número de sucesos favorables al evento E : Existen $\binom{5}{1}$ formas de elegir una bola blanca y $\binom{6}{1}$ formas de eligir una bola negra, entonces aplicando el principio de multiplicación, el número de sucesos favorables a E está dado $\binom{5}{1}\binom{6}{1}$ = 5 x 6, y aplicando la definición clásica es

$$P[E] = \frac{\binom{5}{1}\binom{6}{1}}{\binom{11}{2}} = \frac{5 \times 6}{\frac{11!}{2!9!}} = \frac{5 \times 6}{11 \times 5} = \frac{6}{11} .$$

(b) Con restitución. Como en el caso anterior se pide calcular la probabilidad del evento $E = A_1B_2 \cup B_1A_2$. Es evidente que

$$\begin{aligned} P[E] &= P[A_1B_2] + P[B_1A_2] \\ &= P[A_1]\,P[B_2 \mid A_1] + P[B_1]\,P[A_2 \mid B_1] \\ &= \frac{5}{11} \times \frac{6}{11} + \frac{6}{11} \times \frac{5}{11} = \frac{60}{121} . \end{aligned}$$

EJEMPLO 15 En un sistema de alarma, la probabilidad que se produzca un peligro es 0.10. Si éste se produce, la probabilidad que la alarma funcione es de 0.95. La probabilidad que funcione la alarma sin haber habido peligro es 0.03. Determinar la probabilidad que haya un peligro y la alarma no funcione.

SOLUCION Definimos los siguientes eventos:

P : "hay peligro",

F : "la alarma funciona". Entonces, $\bar{F}$: "la alarma no funciona".

Luego, debemos determinar la probabilidad del evento:

$P\bar{F}$: "haya peligro y la alarma no funciona"

$$P[P\bar{F}] = P[P]\, P[\bar{F} \mid P]$$

$P[P] = 0.10$. Si ocurre el evento P, $P[F \mid P] = 0.95$ pero

$P[\bar{F} \mid P] = 1 - P[F \mid P] = 1 - 0.95 = 0.05$. (teorema 1.7.2)

Por lo tanto, $P[P\bar{F}] = (0.10)\,(0.05) = 0.005$.

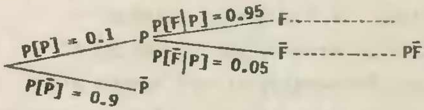


Fig. 1.7.9 Arbol de probabilidades para el problema 15.

TEOREMA 1.7.5 Si A, B y C son eventos de Ω, tales que $P[A] \neq 0$ y $P[A \cap B] \neq 0$, entonces

$$P[A \cap B \cap C] = P[A]\, P[B \mid A]\, P[C \mid A \cap B]$$

DEMOSTRACION Consideremos dos eventos $A \cap B$ y C; de la definición de probabilidad condicional

$$P[C \mid A \cap B] = \frac{P[C \cap A \cap B]}{P[A \cap B]} \quad y \quad P[B \mid A] = \frac{P[A \cap B]}{P[A]}$$

tenemos

$$P[A]\, P[B \mid A]\, P[C \mid A \cap B] = P[A]\, \frac{P[A \cap B]}{P[A]} \times \frac{P[A \cap B \cap C]}{P[A \cap B]}$$

$$= P[A \cap B \cap C].$$

El siguiente teorema es una generalización del teorema anterior.

TEOREMA 1.7.6 Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son eventos de un espacio muestral finito y $P[A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}] \neq 0$, entonces

$$P[A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n] = P[A_1]\, P[A_2 \mid A_1]\, P[A_3 \mid A_1 \cap A_2] \ldots$$
$$P[A_n \mid A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}]$$

la demostración queda como ejercicio para el lector interesado.

EJEMPLO 16 Dos establos A y B tienen 1,000 cabezas de vacuno cada uno. Existe una epidemia que afecta a los cascos y la boca del ganado. La proporción de ganados afectados con $\frac{1}{5}$ y $\frac{1}{4}$ respectivamente (por establo). Se escoge un ganado al azar.

(a) ¿Cuál es la probabilidad que el ganado escogido viene del rancho A y tiene afección a los cascos y la boca?.

(b) Si el 70% de los ganados afectados tienen edad menor que un año, ¿cuál es la probabilidad que el ganado escogido venga del rancho B, tiene afección y es mayor que un año de edad?

SOLUCION Definimos los siguientes eventos:

A: "el ganado escogido es del rancho A"

B: "el ganado escogido es del rancho B"

E: "el ganado tiene afección al casco y la boca".

(a) Debemos calcular

$$P[A \cap E] = P[A]\, P[E \mid A] = \frac{1000}{2000} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{10}\,.$$

(b) Definimos el evento F: la vaca escogida tenga edad mayor que un año. - Entonces,

$$P[B \cap E \cap F] = P[B]\, P[E \mid B]\, P[F \mid (B \cap E)]$$

$$= \frac{1000}{2000} \times \frac{1}{4} \times \frac{75}{250} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{10} = \frac{3}{80}\,.$$

ya que en el rancho B hay 250 ganados afectados y de estos el 30% son mamayores que un año de edad.

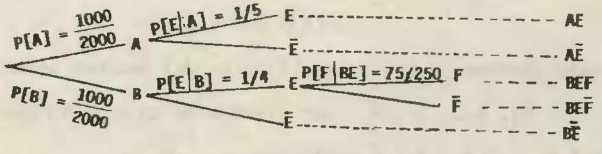


Fig. 1.7.10 Arbol de probabilidad para el problema 16

EJEMPLO 17 Un lote de 100 fusibles contiene 2 fusibles defectuosos. Si se prueban los fusibles uno por uno, ¿cuál es la probabilidad que el último fusible defectuoso sea detectado en la tercera prueba?

SOLUCION Definimos los siguientes eventos:

D_{ij} : "el i-ésimo defectuoso se obtuvo en la j-ésima extracción,
$i = 1,2$; $j = 1,2,3$".

B_{ij} : "el i-ésimo bueno se obtuvo en la j-ésima extracción $i = 1,2,$;
$j = 1,2,3$".

E : "el último fusible defectuoso es detectado en la tercera prueba"

En el diagrama del árbol de probabilidades, podemos seguir sólo por las ramas que cumplen las condiciones requeridas por el evento cuya probabilidad se quiere calcular (en nuestro caso el evento E) y llegar solamente a los resultados favorables a dicho evento. Para el problena en cuestión, siguiendo este proceso se obtiene el árbol de probabilidades de la fig. 1.7.12. - De donde el evento E se escribe

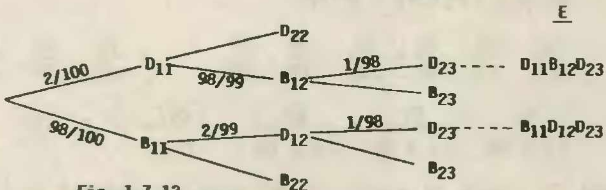


Fig. 1.7.12

$$E = D_{11}\ B_{12}\ D_{23} \cup B_{11}\ D_{12}\ D_{23}$$

Luego,
$$\begin{aligned} P[E] &= P[D_{11}\ B_{12}\ D_{23}] + P[B_{11}\ D_{12}\ D_{23}] \\ &= P[D_{11}]\ P[B_{12} \mid D_{11}]\ P[D_{23} \mid D_{11}B_{12}] + P[B_{11}] \\ &\quad P[D_{12} \mid B_{11}]\ P[D_{23} \mid B_{11}D_{12}] \\ &= \frac{2}{100} \cdot \frac{98}{99} \cdot \frac{1}{98} + \frac{98}{100} \cdot \frac{2}{99} \cdot \frac{1}{98} \\ &= \frac{2}{9900} + \frac{2}{9900} = \frac{1}{2475} . \end{aligned}$$

EJEMPLO 18 Un lote de 100 lámparas contiene 10 piezas defectuosas. Si se selecciona 3 lámparas aleatoriamente, ¿cuál es la probabilidad que sólo una sea defectuosa?

PRIMER METODO Definimos los siguientes eventos:

D : "se selecciona una lámpara defectuosa".

N : "se selecciona una lámpara no defectuosa".

A : "sólo una sea defectuosa de las tres extraidas"

Siguiendo el mismo proceso del ejemplo anterior se obtiene el diagrama del árbol de probabilidades de la fig. 1.7.13. De donde

$$A = NND \cup NDN \cup DNN$$

Eventos Favorables a A

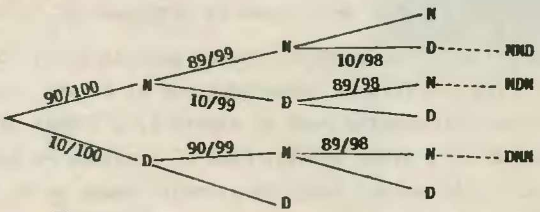


Fig. 1.7.13

$$P[A] = P[NND] + P[NDN] + P[DNN]$$

$$= \frac{90}{100}\cdot\frac{89}{99}\cdot\frac{10}{98} + \frac{90}{100}\cdot\frac{10}{99}\cdot\frac{89}{98} + \frac{10}{100}\cdot\frac{90}{99}\cdot\frac{89}{98}$$

$$= \frac{89}{11 \times 98} + \frac{89}{11 \times 98} + \frac{89}{11 \times 98} = \frac{267}{1078} = 0.2476 .$$

SEGUNDO METODO El número de elementos del espacio muestral es $\binom{100}{3}$. Como el evento **A** contiene 1 defectuoso y 2 no defectuoso, entonces **A** tiene $\binom{10}{1}\binom{90}{2}$ elementos. Luego, por la definición clásica es

$$P[A] = \frac{\binom{10}{1}\binom{90}{2}}{\binom{100}{3}} = \frac{10 \times \frac{90!}{88!\,2!}}{\frac{100!}{97!\ 3!}} = \frac{3 \times 89}{11 \times 98} = \frac{267}{1078} = 0.2476 .$$

EJEMPLO 19 Un grupo que consta de 5 hombres y 10 mujeres se divide al azar en cinco grupos de tres personas cada uno. Calcular la probabilidad que en cada grupo haya un hombre.

SOLUCION Definimos los siguientes eventos:

A_i : "en el grupo i haya un hombre (i = 1,2,3,4,5)".

A : "en cada grupo de 3 personas haya un hombre".

El evento **A** se escribe así, $A = A_1A_2A_3A_4A_5$. Luego,

$$P[A] = P[A_1]\,P[A_2 \mid A_1]\,P[A_3 \mid A_1A_2]\,P[A_4 \mid A_1A_2A_3]\,P[A_5 \mid A_1A_2A_3A_4]$$

$$= \frac{\binom{5}{1}\binom{10}{2}}{\binom{15}{3}} \cdot \frac{\binom{4}{1}\binom{8}{2}}{\binom{12}{3}} \cdot \frac{\binom{3}{1}\binom{6}{2}}{\binom{9}{3}} \cdot \frac{\binom{2}{1}\binom{4}{2}}{\binom{6}{3}} \cdot \frac{1}{1}$$

$$= \frac{\frac{5!}{4!} \times \frac{10!}{8!2!}}{\frac{15!}{3!12!}} \times \frac{\frac{4!}{3!} \times \frac{8!}{2!6!}}{\frac{12!}{3!9!}} \times \frac{\frac{3!}{2!} \times \frac{6!}{2!4!}}{\frac{9!}{3!6!}} \times \frac{2! \times \frac{4!}{2!2!}}{\frac{6!}{3!3!}} \times 1$$

$$= \frac{5!10!3^5}{15!} = 0.081$$

EJEMPLO 20 En un cajón hay 80 tubos buenos y 20 malos; en un segundo cajón el 30% son malos y en un tercer cajón, el 25% son malos. Se sabe que el número de tubos del tercer cajón es el triple de los que hay en el segundo y en total hay 260 tubos. Se mezclan los tubos de las tres cajas.

(a) Al extraer, al azar, un tubo; calcule la probabilidad que sea malo, si se sabe que pertenece al segundo cajón.

(b) Al extraer, al azar, 2 tubos; calcule la probabilidad que el primero y el segundo sean malos.

SOLUCION Sea x el número de tubos en el segundo cajón, o sea

$$100 + x + 3x = 260 ,$$

de donde $x = 40$, y $3x = 120$.

Entonces, en la primera caja hay 100 tubos de los cuales 80 son buenos y 20 malos; en el segundo cajón hay 40 tubos de los cuales 28 son buenos y 12 malos; y en el tercer cajón hay 120 tubos de los cuales 90 son buenos y 30 malos.

(a) Sea D, el evento: "obtener un tubo defectuoso" y C : "el tubo pertenece al segundo cajón".

Luego,

$$P[D \mid C] = \frac{P[AC]}{P[C]} = \frac{12/260}{40/260} = \frac{12}{40} = 0.3 .$$

(b) Sea D, el evento: "obtener el primer y el segundo tubo defectuoso." Entonces,

$$D = D_1 D_2$$

$$P[D] = P[D_1]\, P[D_2 \mid D_1] = \frac{62}{260} \times \frac{61}{259} = \frac{3782}{67340} = 0.056 .$$

EJEMPLO 21 Una caja contiene 7 tarjetas marcadas "sin premio" y 5 con "premio mayor". En un concurso, dos personas A y B, extraen tarjetas de la caja en forma alternada hasta que una de ellas saca una marcada con el "premio mayor". Si A selecciona la tarjeta en primer lugar, ¿cuál es la probabilidad que extraiga una con "premio mayor"?

SOLUCION Definimos los siguientes eventos:

A_i : "el jugador A obtiene la tarjeta con premio mayor en su i-ésima jugada".

B_j : "el jugador B obtiene la tarjeta con premio mayor en su j-ésima jugada".

A_p : "el jugador A extrae una tarjeta con premio mayor".

El evento A_p se escribe, $A_p = A_1 \cup \bar{A}_1\bar{B}_1A_2 \cup \bar{A}_1\bar{B}_1\bar{A}_2\bar{B}_2A_3 \cup \bar{A}_1\bar{B}_1\bar{A}_2\bar{B}_2\bar{A}_3\bar{B}_3A_4$

Luego,

$$P[A_p] = P[A_1] + P[\bar{A}_1\bar{B}_1A_2] + P[\bar{A}_1\bar{B}_1\bar{A}_2\bar{B}_2A_3] + P[\bar{A}_1\bar{B}_1\bar{A}_2\bar{B}_2\bar{A}_3\bar{B}_3A_4]$$

$$= \frac{5}{12} + \frac{7}{12}\cdot\frac{6}{11}\cdot\frac{5}{10} + \frac{7}{12}\cdot\frac{6}{11}\cdot\frac{5}{10}\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{5}{8} + \frac{7}{12}\cdot\frac{6}{11}\cdot\frac{5}{10}\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{8}$$

$$\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{5}{6} = \frac{248}{12\times11\times3} = \frac{62}{99} = 0.63\ .$$

El diagrama del árbol de probabilidad para este problema se muestra en la fig. 1.7.14 .

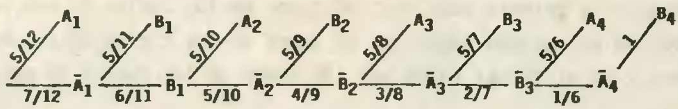


Fig. 1.7.14

EJEMPLO 22 Una urna contiene 10 bolas, 5 marcadas con la letra A y 5 bolas marcadas con la letra B, Dos jugadores, A y B juegan de la siguiente forma: comienza el jugador A extrayendo una bola y a continuación B realiza también una extracción, y asi alternadamente. Las extracciones se hacen sin reposición. Gana el primer jugador que extraiga una bola con su letra (A una bola A y B una bola B).

(a) ¿Cuál es la probabilidad que gane el jugador A? ¿Cuál de B?

(b) ¿Cuál es la probabilidad que no gane ninguno de los dos?

SOLUCION Definimos los siguientes eventos;

G_A "gana el jugador A"

G_B "gana el jugador B"

G_N "no gana ninguno de los jugadores"

A_K (K = 1,2,...): "En la K-ésima extracción se obtiene una bola marcada con A"

B_K (K = 1,2,...): "En la K-ésima extracción se obtiene una bola marcada con B"

Consideremos el diagrama del árbol de probabilidad de la fig. 1.7.15

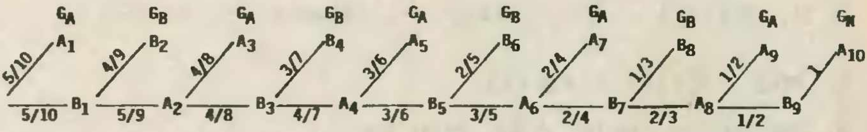


Fig. 1.7.15

(a) De este diagrama obtenemos,

$$P[G_A] = \frac{5}{10} + \frac{5}{10} \times \frac{5}{9} \times \frac{4}{8} + \frac{5}{10} \times \frac{5}{9} \times \frac{4}{8} \times \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} + \frac{5}{10} \times \frac{5}{9} \times \frac{4}{8} \times \frac{4}{7} \times \frac{3}{6}$$

$$\times \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} + \frac{5}{10} \times \frac{5}{9} \times \frac{4}{8} \times \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{175}{252}.$$

$$P[G_B] = \frac{5}{10} \times \frac{4}{9} + \frac{5}{10} \times \frac{5}{9} \times \frac{4}{8} \times \frac{3}{7} + \frac{5}{10} \times \frac{5}{9} \times \frac{4}{8} \times \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} \times \frac{2}{5} + \frac{5}{10} \times \frac{5}{9} \times \frac{4}{8} \times \frac{4}{7}$$

$$\frac{3}{6} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{76}{252}.$$

(b) No gana ninguno de los jugadores, cuando A saque todas las bolas marcadas con B y B todas las bolas marcadas con A, o sea

$$P[G_N] = \frac{5}{10} \times \frac{5}{9} \times \frac{4}{8} \times \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{252}.$$

PROBLEMAS 1.7

1. Dado, $P[A] = 0.5$ y $P[A \cup B] = 0.7$. Hallar $P[B]$, si $P[A \mid B] = 0.5$.

2. Si $P[B] = P[A \mid B] = P[C \mid AB] = \frac{1}{2}$. Hallar, $P[ABC]$.

3. Si, $P[A] = \frac{1}{2}$, $P[B] = \frac{1}{3}$, $P[AB] = \frac{1}{4}$. Hallar: $P[A \cup B]$, $P[A \mid B]$, $P[B \mid A]$, $P[A \cup B \mid B]$.

4. Si, $P[A \cup B] = \frac{11}{12}$, $P[A] = \frac{3}{4}$, $P[AB] = \frac{1}{2}$; hallar : $P[B]$, $P[A \mid B]$, $P[B \mid A]$.

5. Considere dos eventos A y B, tales que :

$$P[A] = \frac{1}{4}, \quad P[B \mid A] = \frac{1}{2}, \quad P[A \mid B] = \frac{1}{4}.$$ Diga, si cada uno de los incisos son verdaderos o falsos:

(a) Los eventos A y B son mutuamente excluyentes.

(b) A es subevento de B.

(c) $P[\bar{A} \mid \bar{B}] = \frac{3}{4}$

(d) $P[A \mid B] + P[A \mid \bar{B}] = 1$

6. Sea B un evento con probabilidad mayor que cero. Demostrar que para cualquier evento A.

(a) $A \subset B$ implica $P[A \mid B] = \dfrac{P[A]}{P[B]}$

(b) $B \subset A$ implica $P[A \mid B] = 1$

7. El evento A puede suceder, sólo si uno de dos eventos mutuamente excluyentes B_1 ó B_2 ocurre; esto es $A \subset B_1 \cup B_2$. Demuestre que $A = AB_1 \cup AB_2$ y exprese $P[A]$.

8. Si $P[A] > 0$ y $P[B] > 0$ ¿Son verdaderas las siguientes proposiciones? justifique su respuesta.

(a) Si $P[A] = P[B]$, entonces $P[A \mid B] = P[B \mid A]$

(b) Si $P[A \mid B] = P[B \mid A]$, entonces $P[A] = P[B]$.

9. Un aparato electrónico consta de dos partes. La probabilidad que falle la primera es 0.20, que fallen las dos partes es 0.15 y de que falle sólo la segunda parte es 0.45. Calcular la probabilidad que:
   (a) falle sólo la primera parte .
   (b) falle la primera parte cuando se sabe que falló la segunda.

10. Una urna contiene 7 bolas rojas y 3 blancas. Se extrae aleatoriamente tres bolas de la urna, sucesivamente sin reposición. Determinar la probabilidad que las dos primeras sean rojas y la tercera blanca.

11. En un lote de 20 televisores se sabe que hay 5 defectuosos. Se extrae al azar una muestra de tres televisores sin reposición. Hallar la probabilidad que la muestra contenga:
   (a) 0 defectuosos ; (b) 1 defectuoso
   (c) 2 defectuosos ; (d) 3 defectuosos .

12. Suponga que dos artefactos eléctricos defectuosos han sido incluidos en un embarque de seis artefactos eléctricos. El departamento de recepción de la compañía compradora empieza a probar los seis artefactos uno a uno. ¿Cuál es la probabilidad que:
   (a) el último artefacto defectuoso sea encontrado en la cuarta prueba?
   (b) a lo más, cuatro artefactos necesitan probarse para localizar los dos defectuosos?

13. Una caja contiene 5 fichas negras y 5 blancas. Si se extrae 5 fichas sin reposición. ¿Cuál es la probabilidad que la tercera ficha sea negra?

14. Se tienen 10 cartas numeradas de 1 a 10, las que se ponen en una caja. Se selecciona cuatro cartas aleatoriamente, sin reposición y se colocan en una mesa mostrando el número. Sea A_i el evento: "el número i $(1 < i < 10)$ está entre estos seleccionados" (por ejemplo, A_1 {1,2,4,5} , {3,1,6,8}). Calcular $P[A_i \mid A_j]$.

15. Un cazador trata de matar un oso. La probabilidad que aparezca un oso en un radio menor que R_1 es de 0.1, en un radio entre R_1 y R_2 es de 0.3, y un radio mayor que R_2 es 0.2. Si aparece un oso en un radio menor que R_1, el cazador será capaz de matarlo con una probabilidad de

0.7; con una probabilidad de 0.5 si aparece en un radio entre R_1 y R_2 ; con una probabilidad de 0.2, si el radio es mayor de R_2. ¿Cuál es la probabilidad que el cazador mate un oso?

16. Se mezclan dos válvulas defectuosas con dos buenas. Se comienza a probar las válvulas una a una hasta que se descubren las defectuosas; ¿Cuál es la probabilidad que la segunda válvula defectuosa sea la segunda, la tercera, la cuarta probada?

17. Cuando se acerque el tren, un operador de la estación apretará un botón con una probabilidad de 0.95; si aprieta el botón, el interruptor opera con una probabilidad de 0.99; si el interruptor opera, sonará una alarma con una probabilidad de 0.9. ¿Cuál es la probabilidad que la alarma suene?

18. Considere tres urnas; la urna **I** contiene dos bolas blancas y cuatro rojas, la **II** contiene ocho bolas blancas y cuatro rojas, y la **III** contiene una bola blanca y tres rojas. Se selecciona una bola de cada urna. ¿Cuál es la probabilidad que la bola seleccionada de la urna **II** sea blanca, dado que la muestra contiene exactamente dos bolas blancas?

19. Suponga que cierta factoría produce tres productos designados por **A**, **B** y C. ¿Cuál es la probabilidad de seleccionar un producto defectuoso **A**, si se sabe que el 30% de los productos producidos en la factoría son productos **A** y 5% de los productos **A** son defectuosos?

20. Suponga que tiene tres colecciones de eventos

$\{A_1, A_2, \dots, A_k\}$, $\{B_1, B_2, \dots, B_\ell\}$, $\{C_1, C_2, \dots, C_m\}$, tales que los eventos $A_1, A_2, \dots, A_k$, son mutuamente excluyentes y colectivamente exhaustivos.

Los eventos $B_1, B_2, \dots, B_\ell$, son mutuamente excluyentes y colectivamente exhaustivos.

Los eventos $C_1, C_2, \dots, C_m$. son mutuamente excluyentes y $\bigcup_{i=1}^{m} C_i \neq \Omega$ (es decir no son colectivamente exhaustivos).

Evalúe numéricamente cada una de las siguientes cantidades. Si no puede evaluar numéricamente especifique una cota superior e inferior numéricamente.

(a) $\sum_{i=1}^{m} P[C_i]$; (b) $\sum_{i=1}^{k} P[A_2 \mid A_j]$

(c) $\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} P[A_i \cap A_j]$; (d) $\sum_{j=1}^{k} P[C_2 \mid A_j C_2]$

(e) $\sum_{j=1}^{k} P[\bar{A}_j]$; (f) $\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{\ell} P[A_i] P[B_j \mid A_i]$

21. Un experimento consiste en lanzar dos dados uno o dos veces. Un jugador gana si consigue la suma 7 en el primer lanzamiento; pierde si saca 2 ó 12; si consigue otras sumas no pierde nada, en este último caso tiene opción para un segundo lanzamiento y si este segundo lanzamiento consigue la suma 7 pierde, en caso contrario gana y termina el juego. Cuál es la probabilidad que el jugador pierda?

22. Un jugador gana si saca 7 u 11 en el primer lanzamiento de un par de dados buenos, pierde si saca 2, 3, ó 12 en el primer lanzamiento. Sin embargo, si en el primer lanzamiento saca un 4,5,6,8,9 ó 10 continúa tirando el dado hasta obtener el número que obtuvo en el primer lanzamiento o hasta obtener un 7 . Si obtiene su primer número antes de obtener un 7, gana; en otro caso pierde. Calcular la probabilidad que el jugador gana en dos o menos lanzamientos.

23. En una ciudad, el 70% de los adultos escuchan radio; el 40% lee el periódico y el 10% ve televisión, entre los que escuchan radio el 30% lee los periódicos y el 4% ve T.V. El 90% de los que ven T.V. lee el periódico, y sólo el 2% de la población total lee el periódico, ve televisión y escucha radio. Si se elige una persona al azar, calcule ud. la probabilidad.
(a) de que lea el periódico; escuche radio o vea televisión.
(b) sabiendo que lee el periódico, de que vea televisión.

24. En una urna hay 8 bolas numeradas de 1 a 8, se extraen al azar y sucesivamente 3 bolas.
(a) ¿Cuál es la probabilidad que sean las tres pares?
(b) ¿Cuál es la probabilidad que sean tres números consecutivos?

25. Una urna contiene 3 bolas blancas y 5 bolas negras. Se extraen al azar y sucesivamente dos bolas. Sabiendo que la primera bola extraída es - blanca; ¿cuál es la probabilidad que la segunda bola estraída también sea blanca?

26. Una urna contiene 4 bolas marcadas con la letra A y 4 bolas marcadas con la letra B. Dos jugadores, A y B juegan de la siguiente forma: comienza A extrayendo una bola continúa B realizando dos extracciones de a una - por vez y así alternativamente (A una extracción, B dos extracciones) - hasta agotar las bolas de la urna. Gana el primer jugador que extraiga una bola con su letra (A una bola A; B una bola B).
   (a) ¿Cuál es la probabilidad que gane el jugador B?
   (b) ¿Cuál es la probabilidad que gane el jugador A?

27. Se tiene cinco urnas numeradas de 1 a 5 y cinco bolas numeradas de 1 a 5. Se coloca al azar una bolilla en cada urna. ¿Cuál es la probabilidad de que.
   (a) al menos una bola sea colocado en la urna que tiene su número?
   (b) Exactamente una bola sea colocado en la urna que tiene su mismo número?.

28. Tres jugadores A, B y C extraen (en ese orden) bolas de una urna, en - donde hay 10 bolas blancas y 10 negras, tomando una cada vez. El primero que obtiene una bola blanca gana el juego. Hallar la probabilidad de ganar de cada uno de los jugadores.

29. Al tirar tres dados, sucesivamente, determine la probabilidad que - aparezca una sucesión creciente de números consecutivos.

30. Con referencia al problema 34 de 1.6. Suponga que se sabe que el cliente ha tenido cuenta de crédito cuando menos cinco años, ¿cuál es la probabilidad que tenga un saldo inferior a I/.1000?

31. En el problema 35 de 1.6. Suponga que se encuentra con una empleada de la compañía, ¿cuál es la probabilidad que no fume cigarrillos?

32. Tres jugadores A, B y C extraen aleatoriamente cada uno una bola de una urna que contiene doce, de las cuales ocho son negras y cuatro son blancas, hasta que uno de ellos (que será el ganador) saque la primera bola blanca. Hallar la probabilidad de ganar de cada jugador, sabiendo que -

empieza **A**, que los otros siguen en el orden indicado y que la extracción es sin reposición.

33. El departamento de crédito de la Cooperativa la Tacaña sabe por experiencia que la probabilidad de que un acreedor deje de pagar un préstamo es de 0.04. También se encontró que dado un incumplimiento de pago de préstamo hay una probabilidad de 0.40 de que se pidiera el préstamo para salir de vacaciones. Además, la Cooperativa sabe que la probabilidad de incumplimiento es la misma para empleados estatales que para el resto de la población.
   (a) ¿Cuál es la probabilidad que un prestatario pida prestado para financiar sus vacaciones y luego no cumpla?
   (b) Si la probabilidad de que se haga un préstamo a un empleado es de 0.02, ¿cuál es la probabilidad que un prestatario sea empleado estatal y no cumpla con el pago?

34. En el otoño, la probabilidad que un día lluvioso seguirá a otro día lluvioso es 0.80 y la probabilidad que un día soleado seguirá a otro día soleado es 0.40. Suponer que cada día es clasificado como lluvioso o soleado y que el tiempo de cualquier día depende sólo del tiempo del día anterior, encontrar la probabilidad que un día lluvioso es seguido por tres días lluviosos, después por dos días soleados y, finalmente por otro día lluvioso.

1.8 TEOREMA DE BAYES

Estableceremos en esta sección, el teorema más importante de este capítulo y el camino para llegar a él exige la definición de partición de un espacio muestral y el teorema de probabilidad total.

1.8.1 PARTICION DE UN ESPACIO MUESTRAL

DEFINICION 1.8.1 Se dice que la colección de eventos $B_1, B_2, \ldots, B_k$ del espacio muestral Ω representa una partición del espacio muestral Ω, si cumple las siguientes condiciones:

(a) los eventos $B_1, B_2, \ldots, B_k$ son mutuamente excluyentes.

En símbolos $B_i \cap B_j = \phi, \quad i \neq j, \quad i,j = 1,2,3, \ldots, k$

(b) los eventos $B_1, B_2, \ldots, B_k$ son colectivamente exhaustivos. En símbolo

$$\bigcup_{i=1}^{k} B_i = \Omega$$

(c) $P[B_i] > 0$,

$i = 1,2, \ldots , k$

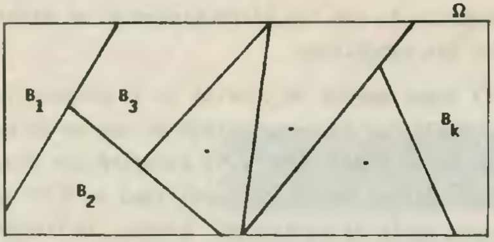


Fig. 1.8.1. Partición del espacio muestral

EJEMPLO 1 En el lanzamiento de un dado, $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ Si $B_1 = \{1,2\}$, $B_2 = \{3,4,5\}$, $B_3 = \{6\}$

B_1, B_2, B_3 representa una partición del espacio muestral Ω.

En cambio, si :

$$E_1 = \{1,2\}, \quad E_2 = \{4\}, \quad E_3 = \{3,6\}$$

$E_1 \cup E_2 \cup E_3 \neq \Omega$, por lo tanto E_1, E_2 y E_3 no representan una partición de Ω .

1.8.2 TEOREMA DE PROBABILIDAD TOTAL

TEOREMA 1.8.1 Sea $B_1, B_2, \ldots, B_k$ una partición del espacio muestral Ω, entonces para cualquier evento **A** en Ω , se cumple

$$P[A] = \sum_{i=1}^{k} P[B_i]P[A \mid B_i] = P[B_1]\, P[A \mid B_1] + P[B_2]P[A \mid B_2] + \ldots + P[B_k]P[A \mid B_k] .$$

DEMOSTRACION 1 Sabemos que

$\Omega = B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_k$, hipotesis

2. Para cualquier evento **A** en Ω se tiene

$A = A \cap \Omega$

$A = A \cap (B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_k)$ (ver fig. 1.8.2)

$A = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \ldots \cup (A \cap B_k)$

3. Los eventos, $A \cap B_i$ y $A \cap B_j$, $i \neq j$ son mutuamente excluyentes, - pués

$$(A \cap B_i) \cap (A \cap B_j) = A \cap (B_i \cap B_j) = \phi, \; i \neq j, \; i, j = 1,2, \ldots, k$$

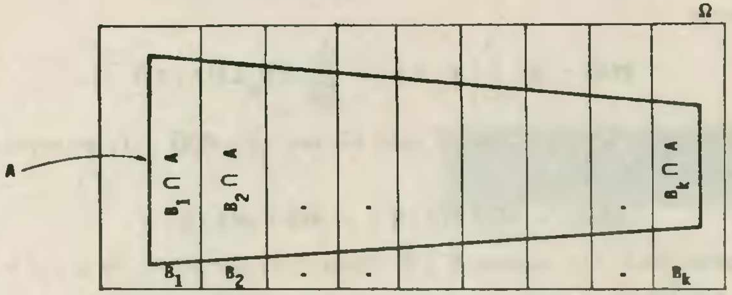


Fig. 1.8.2. Relación entre el evento A en Ω y la partición de Ω .

4. Tomando probabilidades a ambos miembros de la igualdad del paso (2) tenemos,

$$P[A] = P[A \cap B_1] + P[A \cap B_2] + \ldots + P[A \cap B_k]$$

$$= P[B_1]\ P[A \mid B_1] + P[B_2]\ P[A \mid B_2] + \ldots + P[B_k]\ P[A \mid B_k]$$

$$P[A] = \sum_{i=1}^{k} P[B_i]\ P[A \mid B_i] \ .$$

El diagrama del árbol de probabilidad de la fig. 1.8.3 para experimentos sucesivos da una visión esquemática del teorema de probabilidad total.

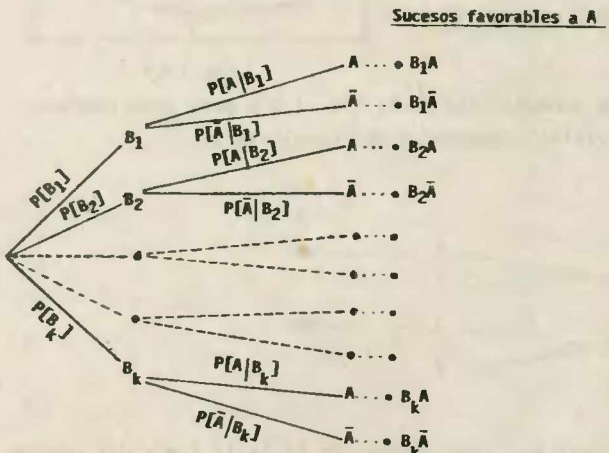


Fig. 1.8.3

de donde

$$P[A] = P[\bigcup_{i=1}^{k} B_i A] = \sum_{i=1}^{k} P[B_i] P[A \mid B_i] .$$

COROLARIO 1 Si **B** es un evento en Ω tal que $0 < P[B] < 1$, entonces para cualquier evento **A** en Ω

$$P[A] = P[B] P[A \mid B] + P[\bar{B}] P[A \mid \bar{B}]$$

DEMOSTRACION 1 Los eventos **B** y $\bar{B}$ forman una portación de Ω y $\Omega = B \cup \bar{B}$ (por hipótesis)

2. Para cualquier evento A en Ω se tiene

$$A = A \cap \Omega = A\Omega$$

ó $\quad A = A[B \cup \bar{B}] = AB \cup A\bar{B}$ (ver fig. 1.8.4)

3. $AB \cap A\bar{B} = A(B \cap \bar{B}) = \phi$. Es decir, los eventos A B y $A\bar{B}$ son mutuamente excluyentes.

4. Aplicando probabilidad a ambos miembros de la igualdad obtenida en el paso (2) se tiene

$$P[A] = P[AB \cup A\bar{B}]$$
$$= P[AB] + P[A\bar{B}]$$
$$= P[B] P[A \mid B] + P[\bar{B}] P[A \mid \bar{B}]$$

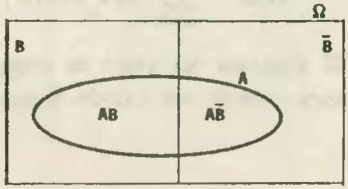


Fig. 1.8.4

El diagrama del árbol de probabilidad de la fig. 1.8.5 para experimentos sucesivos, muestra una visión esquemática del corolario 1.

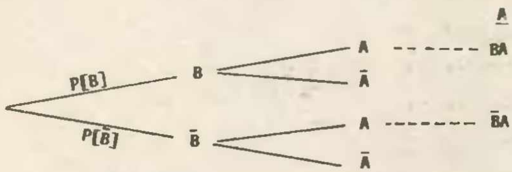


Fig. 1.8.5

EJEMPLO 2 En un laboratorio hay tres jaulas. En la jaula I hay dos conejos pardos y tres blancos, la jaula II tiene 4 conejos pardos y dos blancos y la jaula III contiene 5 conejos pardos y 5 blancos. Se selecciona al azar una jaula y se saca un conejo al azar de esta jaula. ¿Cuál es la probabilidad que el conejo escogido sea blanco?

SOLUCION 1 Definimos los siguientes eventos:

I: "la jaula I es seleccionada"

II: "la jaula II es seleccionada"

III: "la jaula III es seleccionada"

A: "el conejo escogido es blanco".

2. El espacio muestral está constituida por los conejos de las tres jaulas y estas formas una partición del espacio muestral, es decir

$$\Omega = I \cup II \cup III$$

3. $A \subset \Omega$ y se escribe $A = IA \cup IIA \cup IIIA$. Luego, por el teorema - probabilidad total

$$P[A] = P[I]\,P[A|I] + P[II]\,P[A\,|\,II] + P[III]\,P[A\,|\,III]$$

4. Puesto que, se escoge una jaula al azar, las tres son igualmente posibles, o sea

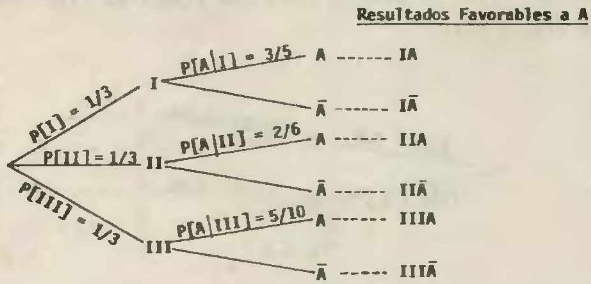


Fig. 1.8.6 Diagrama del árbol de probabilidad para experimentos sucesivos del ejemplo 2.

$$P[I] = P[II] = P[III] = \frac{1}{3}$$

5. Si se selecciona la jaula I, $P[A\,|\,I] = \frac{3}{5}$. Si se sáca la jaula II, $P[A\,|\,II] = \frac{2}{6}$. Finalmente si se selecciona la jaula III, $P[A\,|\,III] - = \frac{5}{10}$. Reemplazando estos valores en el paso (3) se tiene

$$P[A] = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5} + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{6} + \frac{1}{3}\cdot\frac{5}{10}$$

$$= \frac{1}{5} + \frac{1}{9} + \frac{5}{30} = \frac{43}{90} .$$

EJEMPLO 3 Del record pasado, se conoce que cierta máquina que produce tornillos trabaja correctamente el 90 % del tiempo. Si la máquina no está trabajando correctamente, el 5 % de los tornillos producidos son defectuosos. Cuando está trabajando bien solamente el 0.5 % de los tornillos son defectuosos. Si se escoge un tornillo aleatoriamente, ¿cuál es la probabilidad que sea defectuoso?

SOLUCION Sean los siguientes eventos:

D: "el tornillo es defectuoso".

M: "la máquina está trabajando correctamente".

$$\Omega = M \cup \bar{M} \qquad y \qquad D = MD \cup \bar{M}D$$

Aplicando el corolario del teorema de probabilidad total

$$P[D] = P[M]\,P[D \mid M] + P[\bar{M}]\,P[D \mid \bar{M}]$$

$$= (0.9)(0.005) + (0.01)(0.05) = 0.0095.$$

El esquema del árbol de probabilidad que visualiza este problema se muestra en la fig. 1.8.7 .

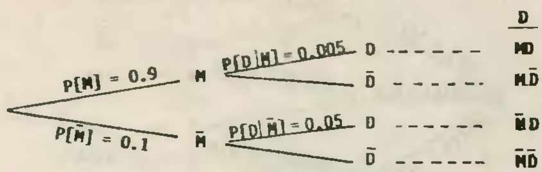


Fig. 1.8.7

EJEMPLO 4 Una urna contiene 3 bolas rojas y x blancas. Se extrae una bola de la urna y se reemplaza por una del otro color. Se saca de la urna una segunda bola. Sabiendo que la probabilidad de que la segunda bola sea roja es $\frac{17}{50}$. Determinar el número de bolas blancas .

SOLUCION Sean los siguientes eventos

R: "la segunda bola es roja"

r: "la bola extraída es roja"

b: "la bola extraída es blanca"

Los experimentos sucesivos del problema se lleva a un diagrama del árbol - de probabilidad obtenida la fig. 1.8.8, donde vemos que el evento R se escribe $R = rr \cup br$, por lo tanto

$$P[R] = P[r] \times P[r \mid r] + P[b] \times P[r \mid b]$$

$$= \frac{3}{x+3} \times \frac{2}{x+3} + \frac{x}{x+3} \times \frac{4}{x+3} = \frac{4x+6}{(x+3)^2} = \frac{17}{50}$$

de donde se obtiene la ecuación de segundo grado

$$17x^2 - 98x - 147 = 0$$

resolviendo la ecuación se obtiene $x = 7$ bolas blancas.

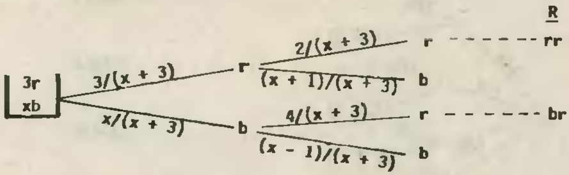


Fig. 1.8.8

EJEMPLO 5 Juan escoge al azar uno de los enteros 1,2,3 y luego lanza un - dado tantas veces como indica el número que escogió. Calcular la probabilidad que el puntaje total obtenido en los lanzamientos sea igual a 5.

SOLUCION PRIMER METODO Llevando directamente los experimentos sucesivos - del enunciado del problema al diagrama del árbol de probabilidades se obtiene la fig. 1.8.9

Definimos los siguientes eventos

i : obtener el entero i , $i = 1,2,3$". $P[\{i\}] = \frac{1}{3}$, $i = 1,2,3.$

A : "Obtener la suma 5 al lanzar el dado".

El evento **A** se escribe como la unión de las intersecciones de los i con suma 5.

Luego, por el teorema de probabilidad total se obtiene

$$P[A] = \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{36} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{36} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{36} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{36} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{6^3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{6^3}$$

$$+ \frac{1}{3} \times \frac{1}{6^3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{6^3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{6^3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{6^3}$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{6}{36} + \frac{1}{3} \times \frac{4}{36} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{36} = \frac{11}{108}.$$

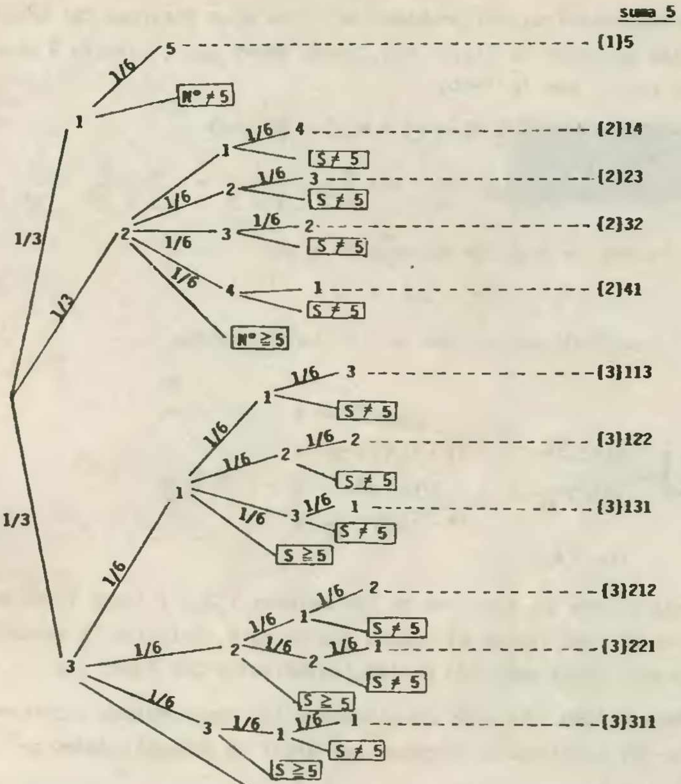


Fig. 1.8.9

SEGUNDO METODO Observe que estamos frente a un experimento ε que consiste en realizar ε_1 ó ε_2 ó ε_3 en el sentido excluyente, donde ε_i consiste en lanzar i dados (i = 1,2,3). El espacio muestral asociado a ε es como sigue

$$\Omega = \left\{ [1,2,3,4,5,6], \begin{bmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 & 26 \\ 31 & 32 & 33 & 34 & 35 & 36 \\ 41 & 42 & 43 & 44 & 45 & 46 \\ 51 & 52 & 53 & 54 & 55 & 56 \\ 61 & 62 & 63 & 64 & 65 & 66 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 111 & 112 & 121 & 122 & 113 \\ 211 & 221 & 212 & \ldots & 266 \\ 311 & 131 & 321 & \ldots & \ldots \\ . & & & & \\ . & & & & \\ . & . & . & . & 666 \end{bmatrix} \right\}$$

Los tres bloques definen los eventos E_1, E_2, E_3 que representan una partición de Ω. Definimos el evento,

A : "obtener suma 5 con el dado".

Observe que $A = E_1A \cup E_2A \cup E_3A$. Luego, por el teorema de probabilidad total

$$P[A] = P[E_1]\,P[A \mid E_1] + P[E_2]\,P[A \mid E_2] + P[E_3]\,P[A \mid E_3]$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \times \frac{4}{36} + \frac{1}{3} \times \frac{6}{216}$$

$$= \frac{6}{108} + \frac{4}{108} + \frac{1}{108} = \frac{11}{108}.$$

EJEMPLO 6 Se tiene una caja con doce tarros de conserva de las cuales ocho son de durazno. Se extrae una muestra con reemplazo (sin reemplazo) de tamaño 4. Después se selecciona una conserva de la muestra. Determine la probabilidad que sea de durazno.

SOLUCION Definimos los siguientes eventos :

M_i : "la muestra contiene i tarros de conserva de duraznos $i = 0,1,2,3,4$".

D : "la conserva es de durazno"

Para que pueda obtenerse de la muestra un tarro de durazno, está debe contar por lo menos una conserva de durazno. Entonces, el evento D se escribe

$$D = \bigcup_{i=1}^{4} M_iD \quad . \quad \text{Luego}$$

$$P[D] = \sum_{i=1}^{4} P[M_i]\,P[D \mid M_i] \qquad (*)$$

(a) Extracción con reemplazamiento

De las 12 conservas se extrae una a una con reemplazo 4 tarros, entonces $N(\Omega) = 12^4$.

Cálculo de $P[M_i]$ y $P[D \mid M_i]$, $i = 1,2,3,4$.

1. M_1 : "la muestra contiene 1 tarro de durazno"

Los elementos de M_1 tienen la forma $\underbrace{D\ \bar{D}\ \bar{D}\ \bar{D}}_{P_4^{3,1}}$

D ocurre de 8 formas y para cada uno de estos, los tres $\bar{D}$ ocurren de 4^3 formas, luego $N(M_1) = P_4^{3,1} \times 8 \times 4^3$. Por lo tanto

$$P[M_1] = \frac{P_4^{3,1} \cdot 8 \times 4^3}{12^4} .$$

Si ocurrió M_1, $P[D \mid M_1] = \frac{1}{4}$

2. M_2: "la muestra contiene 2 tarros de durazno".
Los elementos de M_2 tienen la forma $\underbrace{D\ D\ \bar{D}\ \bar{D}}_{P_4^{2,2}}$

Las dos D ocurren de 8^2 formas y para cada una de estas, las dos $\bar{D}$ - ocurren de 4^2 formas, es decir $N(M_2) = P_4^{2,2} \times 8^2 \times 4^2$, por lo tanto

$$P[M_2] = \frac{P_4^{2,2} \times 8^2 \times 4^2}{12^4}$$

Ahora, si ocurrió M_2, $P[D \mid M_2] = \frac{1}{2}$.

3. M_3: "la muestra contiene 3 tarros de durazno"
Los elementos de M_2 tienen la forma $\underbrace{D\ D\ D\ \bar{D}}_{P_4^{3,1}}$

Las tres D ocurren de 8^3 formas y para cada una de estas, la $\bar{D}$ ocurre de 4 formas, osea $N(M_3) = P_4^{3,1} \times 8^3 \times 4$. Luego

$$P[M_3] = \frac{P_4^{3,1} \times 8^3 \times 4}{12^4}$$

Si ocurrió M_3 , $P[D \mid M_3] = \frac{3}{4}$.

4. M_4: "la muestra contiene 4 tarros de durazno". Es decir, los cuatro elementos de la muestra son tarros de durazno (D D D D).
Estas cuatro D ocurren de 8^4 formas. Osea $N(M_4) = 8^4$. Por lo tanto

$$P[M_4] = \frac{8^4}{12^4}$$

Si ocurrió M_4, $P[D \mid M_4] = 1$.
El digrama del árbol de probabilidades que resume los pases (1), (2), (3), y (4) se muestra en la fig. 1.8.10.

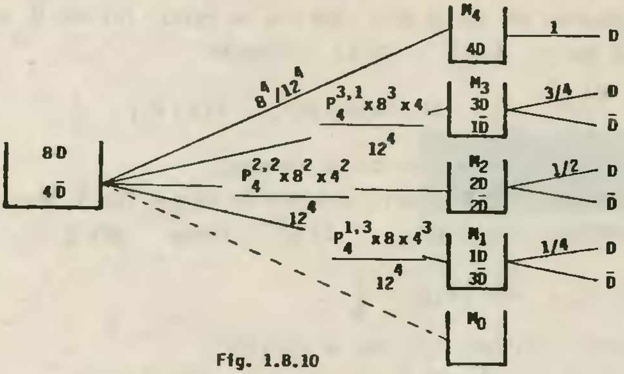


Fig. 1.8.10

Reemplazando (1), (2), (3) y (4) en (*) obtenemos

$$P[D] = \frac{P_4^{1,3} \times 8 \times 4^3}{12^4} \times \frac{1}{4} + \frac{P_4^{2,2} \times 8^2 \times 4^2}{12^4} \times \frac{1}{2} + \frac{P_4^{3,1} \times 8^3 \times 4}{12^4} \times \frac{3}{4} + \frac{8^4}{12^4} \times 1$$

$$= \frac{8^3}{12^4} + \frac{6 \times 8^3}{12^4} + \frac{12 \times 8^3}{12^4} + \frac{8^4}{12^4}$$

$$= \frac{8^3}{12^4} [1 + 6 + 12 + 8] = (\frac{8}{12})^3 \times \frac{27}{12}$$

$$= \frac{2}{3} .$$

(b) **Extracción sin reemplazamiento.**

De las 12 conservas de la caja se extrae una muestra sin reemplazo de 4 tarros, entonces $N(\Omega) = C_{12}^4$.

Cálculo de $P[M_i]$ y $P[D \mid M_i]$. $i = 1,2,3,4$.

1. M_1: "la muestra contiene 1 tarro de durazno".

Una D ocurre de $C_8^1 = 8$ formas y para cada una de éstas, las tres $\bar{D}$ ocurren de C_4^3 . Osea $N(M_1) = C_8^1 C_4^3$. Por lo tanto

$$P[M_1] = \frac{C_8^1 C_4^3}{C_{12}^4}$$

Si ocurrió M_1, $P[D \mid M_1] = \frac{1}{4}$.

2. M_2: "la muestra contiene 2 tarros de durazno".

Las dos D ocurren de C_8^2 y para cada una de éstas, las dos $\bar{D}$ ocurren de de C_4^2. Es decir $N(M_2) = C_8^2 C_4^2$. Entonces

$P[M_2] = \dfrac{C_8^2 C_4^2}{C_{12}^4}$. Si ocurrió M_2, $P[D \mid M_2] = \dfrac{1}{2}$.

3. M_3: "la muestra contiene 3 tarros de durazno"

Las tres D ocurren de C_8^3 y para cada una de éstas, las $\bar{D}$ ocurre de - $C_4^1 = 4$ formas. Osea $N(M_3) = C_8^3 C_4^1$. Luego $P[M_3] = \dfrac{C_8^3 C_4^1}{C_{12}^4}$

Si ocurrió M_3, $P[D \mid M_3] = \dfrac{3}{4}$.

4. M_4: "la muestra contiene 3 tarros de durazno".

Las cuatro D ocurren de C_8^4 formas. Es decir $N(M_4) = C_8^4$.

Por lo tanto

$$P[M_4] = \frac{C_{12}^4}{C_{12}^4}$$

Si ocurrió M_4, $P[D \mid M_4] = 1$.

Reemplazando (1), (2), (3) y (4) en (*) obtenemos,

$$P[D] = \frac{C_8^1 C_4^3}{C_{12}^4} \times \frac{1}{4} + \frac{C_8^2 C_4^2}{C_{12}^4} \times \frac{1}{2} + \frac{C_8^3 C_4^1}{C_{12}^4} \times \frac{3}{4} + \frac{C_8^4}{C_{12}^4}$$

$$= \frac{70 + 168 + 84 + 8}{495} = \frac{330}{945} = \frac{2}{3}.$$

El diagrama del árbol de probabilidad que resume los pasos (1),(2),(3) y (4) se muestra en la fig. 1.8.11.

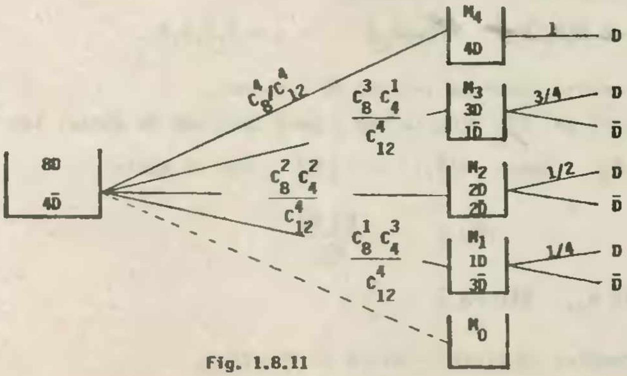


Fig. 1.8.11

EJEMPLO 7 En el bolsillo derecho de su casaca Ud. tiene 3 monedas de 100 Intis y cuatro de 50 intis; en el bolsillo izquierdo tiene 6 monedas de 100 intis y 3 de 50 intis. Tome aleatoriamente 5 monedas del bolsillo derecho y pase al izquierdo. Luego extraiga al azar una moneda del bolsillo izquierdo. - Determinar la probabilidad que sea de 100 intis.

SOLUCION El primer experimento que se realiza es extraer 5 monedas del bolsillo derecho, la cual se hace de C_7^5 formas.

Definimos ahora los siguientes eventos:

B_i: "Se pasan i (i = 1,2,3) monedas de 100 del bolsillo derecho al izquierdo".

M: "Obtener una moneda de 100 intis al extraer una del bolsillo izquierdo".

Entonces el evento M se escribe

$$M = B_1M \cup B_2M \cup B_3M$$

por lo tanto

$$P[M] = P[B_1]\,P[M\,|\,B_1] + P[B_2]\,P[M\,|\,B_2] + P[B_3]\,P[M\,|\,B_3]$$

Calculemos ahora $P[B_i]$ y $P[M\,|\,B_i]$ i = 1,2,3 .

B_1: "se pasan 1 moneda de 100 intis y 4 de 50" ,
entonces el número de elemento de B_1 es $C_3^1\,C_4^4 = C_3^1$ y

$$P[B_1] = \frac{C_3^1}{C_7^5} .$$

B_2: "se pasan 2 monedas de 100 intis y 3 de 50" ,

entonces el número de elementos de B_2, es $C_3^2\,C_4^3$; y

$$P[B_2] = \frac{C_3^2\,C_4^3}{C_7^5}$$

B_3: "se pasan 3 monedas de 100 intis y 2 de 50"

luego, el número de elementos de B_3, es $C_3^3\,C_4^2 = C_4^2$ y

$$P[B_3] = \frac{C_4^2}{C_7^5} .$$

Si ocurre B_1, en el bolsillo izquierdo hay 7 monedas de 100 intis y 7 de 50 entonces,

$$P[M \mid B_1] = \frac{7}{14} .$$

Si ocurre B_2, en el bolsillo izquierdo hay, 8 monedas de 100 y 6 de 50, - entonces,

$$P[M \mid B_2] = \frac{8}{14} .$$

si ocurre B_3, en el bolsillo izquierdo hay, 9 monedas de 100 y 5 de 50, luego,

$$P[M \mid B_3] = \frac{9}{14} .$$

Por lo tanto,

$$P[M] = \frac{C_3^1}{C_7^5} \times \frac{7}{14} + \frac{C_3^2\, C_4^3}{C_7^5} \times \frac{8}{14} + \frac{C_4^2}{C_7^5} \times \frac{9}{14}$$

$$= \frac{1}{14\, C_7^5} [\, 7\, C_3^1 + 8\, C_3^2 C_4^3 + 9\, C_4^2 \,]$$

$$= 0.58 .$$

Un esquema que ayuda a visualizar, la solución de este problema, es el diagrama del árbol de probabilidad de la fig. 1.8.12

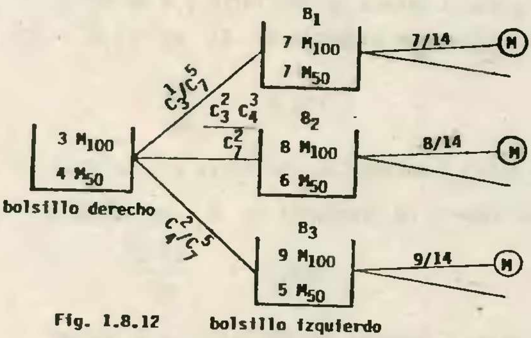


Fig. 1.8.12

EJEMPLO B Una urna contiene 10 bolas rojas y 8 blancas. Se lanza un dado y se extrae de la urna tantas bolas como indica el número obtenido en el dado. Calcular la probabilidad que todas las bolas sean blancas.

SOLUCION Definimos los siguientes eventos

B_i: "obtener el número i en el dado $(i = 1,2, \dots , 6)$"

A : "todas las bolas extraídas son blancas" .

El evento A se escribe, $A = \bigcup_{i=1}^{6} B_i A$. Por el teorema de probabilidad total se tiene

$$P[A] = \sum_{i=1}^{6} P[B_i]\, P[A \mid B_i] = \sum_{i=1}^{6} \frac{1}{6}\, P[A \mid B_i] = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{6} P[A \mid B_i] ,$$

Pues, $P[B_i] = \frac{1}{6}$, $i = 1,2, \dots, 6$.

Cálculo de $P[A \mid B_i]$ $i = 1, \dots, 6$

$$P[A \mid B_1] = \frac{\binom{8}{1}\binom{10}{0}}{\binom{18}{1}} = \frac{8}{18} .$$

$$P[A \mid B_2] = \frac{\binom{8}{2}\binom{10}{0}}{\binom{18}{2}} = \frac{8}{18} \times \frac{7}{17} .$$

$$P[A \mid B_3] = \frac{\binom{8}{3}\binom{10}{0}}{\binom{18}{3}} = \frac{8}{18} \times \frac{7}{17} \times \frac{6}{16} .$$

$$P[A \mid B_4] = \frac{\binom{8}{4}\binom{10}{0}}{\binom{18}{4}} = \frac{8}{18} \times \frac{7}{17} \times \frac{6}{16} \times \frac{5}{15} .$$

$$P[A \mid B_5] = \frac{\binom{8}{5}}{\binom{18}{5}} = \frac{8}{18} \times \frac{7}{17} \times \frac{6}{16} \times \frac{5}{15} \times \frac{4}{14} .$$

$$P[A \mid B_6] = \frac{\binom{8}{6}}{\binom{10}{6}} = \frac{8}{18} \times \frac{7}{17} \times \frac{6}{16} \times \frac{5}{15} \times \frac{4}{14} \times \frac{3}{13} .$$

Luego,

$$P[A] = \frac{1}{6} \times \frac{8}{18} \Big[1 + \frac{7}{17} + \frac{7}{17} \times \frac{6}{15} + \frac{7}{17} \times \frac{6}{16} \times \frac{5}{15} + \frac{7}{17} \times \frac{6}{16} \times \frac{5}{15} \times \frac{4}{14} + \frac{7}{17} \times$$

$$\times \frac{6}{16} \times \frac{5}{15} \times \frac{4}{14} \times \frac{3}{13}\Big]$$

$$= \frac{2}{3 \times 9}\left[1 + \frac{7}{17}\left[1 + \frac{4}{8} + \frac{1}{28} + \frac{3}{28 \times 13}\right]\right]$$

$$= \frac{2}{27}\left[1 + \frac{7}{17}\left[\frac{3}{2} + \frac{1}{28} \times \frac{16}{13}\right]\right]$$

$$= \frac{2}{27}\left[1 + \frac{7}{17} \times \frac{251}{2 \times 7 \times 13}\right] = \frac{2}{27} \times \frac{693}{2 \times 17 \times 13}$$

$$= \frac{77}{221 \times 3} = \frac{77}{663} = 0.116 \, .$$

EJEMPLO 9 Una compania, por experiencias anteriores sabe que de un determinado número de lotes adquiridos, el 60% de ellos no tiene defectuosos, el 25% tiene sólo un defectuoso, el 10% tiene 2 defectuosos y el 5% tiene 3 defectuosos. Dicha campañía realiza un plan de muestreo de aceptación de lotes, que consiste en extraer una muestra de 3 artículos (uno después de otro) de cada lote que desea inspeccionar, se acepta dicho lote si a lo más encuentra un defectuoso en la muestra. Cada lote contiene 50 artículos. ¿Cuál es la probabilidad de aceptar el lote?.

SOLUCION Sea los siguientes eventos:

d : "artículo defectuoso".

b : "artículo no defectuoso".

B_0: "El lote no tiene artículos defectuosos".

B_1: "El lote tiene un artículo defectuoso".

B_2: "El lote tiene 2 artículos defectuosos".

B_3: "El lote tiene 3 artículos defectuosos".

A: "aceptar el lote".

$$P[A] = 1 - P[\bar{A}]$$

$$= 1 - P[B_2ddb \cup B_2dbd \cup B_2bdd \cup B_3ddd \cup B_3ddb \cup B_3dbd \cup B_3bdd]$$

$$= 1 - \left[(0.1)(3)\frac{2}{50 \times 49} + (0.05)\left(\frac{1}{50 \times 49 \times 8} + \frac{3 \times 47}{50 \times 49 \times 8}\right)\right]$$

$$= 1 - \frac{1}{50 \times 49}\left[\frac{6}{10} + \frac{142 \times 5}{8 \times 100}\right]$$

$$= 1 - \frac{595}{50 \times 49 \times 400} = 1 - \frac{17}{28000} = 1 - 0.0006 = 0.9994 \, .$$

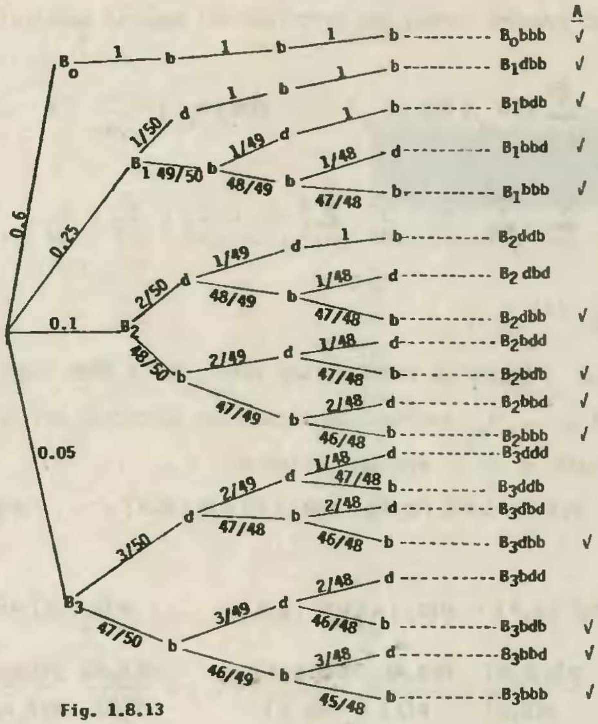


Fig. 1.8.13

EJEMPLO 10 Se lanza un dado 2 veces. El número que muestra la primera vez es el número de bolas blancas que se colocan en una urna, y el número obtenido en la segunda vez indica el número de bolas negras que se colocarán en la misma urna. Luego de la urna, se extraerá al azar una bola. Determinar la probabilidad que ésta sea blanca.

SOLUCION Sean los siguientes eventos:

A_{ij} : "en la urna hay i bolas blancas y j-negras", con i, j = 1,2,3,4,5,6 (Así, por ejemplo: "A_{25} es el evento en la urna hay 2 bolas blancas y 5 negras").

B: "la bola obtenida es blanca".

Los eventos A_{ij} son mutuamente excluyentes, también

$$\sum_{i=1}^{6} \sum_{j=1}^{6} A_{ij} = \Omega, \quad y \quad P[A_{ij}] = \frac{1}{36} > 0$$

Luego, dichos eventos forman una partición del espacio muestral. Por lo tanto,

$$P[B] = \sum_{i=1}^{6} \sum_{j=1}^{6} P[A_{ij}]\, P[B \mid A_{ij}] \ ; \quad y \quad P[B \mid A_{ij}] = \frac{i}{i+j}\ , \ \forall \ i,j = 1,2,3,4,5,6$$

$$= \frac{1}{36} \sum_{i=1}^{6} \sum_{j=1}^{6} \frac{i}{i+j} = \frac{1}{36} \sum_{i=1}^{6} \left[\frac{i}{i+1} + \frac{i}{i+2} + \frac{i}{i+3} + \frac{i}{i+4} + \frac{i}{i+5} + \frac{i}{i+6} \right]$$

$$= \frac{1}{36}(18) = \frac{1}{2}\ .$$

TEOREMA 1.8.2 TEOREMA DE PROBABILIDAD TOTAL, DE LA PROB. COND

Sean B_1, B_2, ..., B_k eventos que forman una partición del espacio muestral Ω, y sean A y E eventos, entonces

$$P[E \mid A] = P[B_1 \mid A]\, P[E \mid B_1A] + P[B_2 \mid A]\, P[E \mid B_2A] + \ldots + P[B_k \mid A]\, P[E \mid B_kA]$$

PRUEBA

$$P[B_1 \mid A]\, P[E \mid B_1A] + P[B_2 \mid A]\, P[E \mid B_2A] + \ldots + P[B_k \mid A]\, P[E \mid B_kA]$$

$$= \frac{P[B_1A]}{P[A]} \frac{P[EB_1A]}{P[B_1A]} + \frac{P[B_2A]}{P[A]} \frac{P[EB_2A]}{P[B_2A]} + \ldots + \frac{P[B_kA]}{P[A]} \frac{P[EB_kA]}{P[B_kA]}$$

$$= \frac{P[EB_1A]}{P[A]} + \frac{P[EB_2A]}{P[A]} + \ldots + \frac{P[EB_kA]}{P[A]}$$

$$= \frac{P[EB_1A] + P[EB_2A] + \ldots + P[EB_kA]}{P[A]}$$

$$= \frac{P[EA(B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_k)]}{P[A]} = \frac{P[EA\Omega]}{P[A]} = \frac{P[EA]}{P[A]} = P[E \mid A]$$

De donde

$$\boxed{P[E \mid A] = \sum_{k=1}^{k} P[B_i \mid A]\, P[E \mid AB_i]}$$

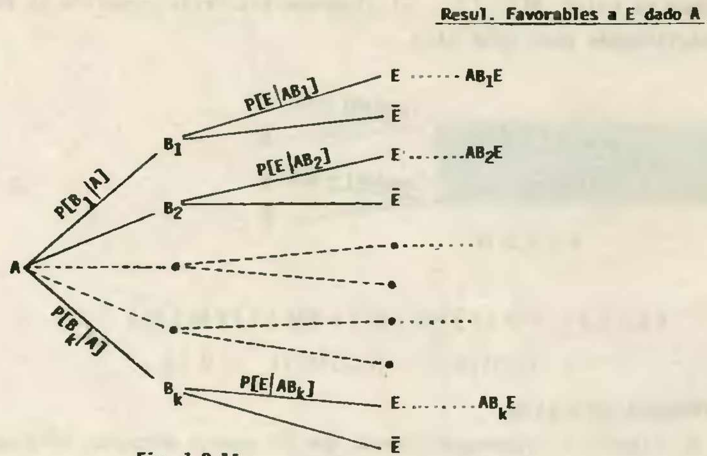


Fig. 1.8.14

EJEMPLO 11 Todos los miembros de un club son médicos o abogados, 40 % de los miembros son médicos mientras que el 30 % de las mujeres son médicos. El 50 % de los médicos y el 30 % de los abogados ganan más de \$ 60,000 por año. Sin embargo solamente el 20 % de las mujeres médicos y el 10 % de las mujeres abogados ganan más de \$ 60,000, por año.

(a) Si se escoge aleatoriamente un miembro del club. ¿cuál es la probabilidad que gane más de \$ 60,000 por año?

(b) Si se escoge aleatoriamente una mujer. ¿Cuál es la probabilidad que ella gane más de \$ 60,000 por año?

SOLUCION Sean los siguientes eventos:

M: "El miembro del club es un médico".

A: "El miembro del club es un abogado".

F: "El miembro del club es femenino".

G: "El miembro del club gana más de \$ 60,000 por año".

(a) Debemos calcular $P[G]$.

$\Omega = A \cup M$. Los eventos A y M forman una partición del espacio muestral Ω (el club). Además $G \subset \Omega$.

Aplicando el teorema de probabilidad total tenemos,

$$P[G] = P[A]\,P[G \mid A] + P[M]\,P[G \mid M]$$

$$= (0.6)(0.3) + (0.4)(0.5) = 0.38 .$$

(b) Se debe calcular $P[G \mid F]$. El diagrama siguiente, muestra el árbol de probabilidades para este caso.

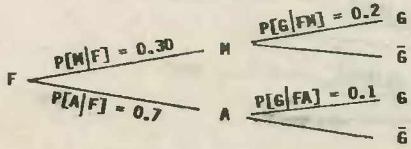


Fig. 1.8.15

Luego,

$$P[G \mid F] = P[M \mid F]\,P[G \mid FM] + P[A \mid F]\,P[G \mid FA]$$

$$= (0.3)(0.2) + (0.7)(0.1) = 0.13 .$$

1.8.3 TEOREMA DE BAYES

En el ejemplo 2. Supongamos ahora que el conejo escogido aleatoriamente se ve que es blanco. ¿Cuál es la probabilidad que provenga de la jaula I?

Usando la notación del ejemplo 2, debemos calcular $P[I \mid A]$. Por la definición de probabilidad condicional y el teorema de multiplicación tenemos

$$P[I \mid A] = \frac{P[IA]}{P[A]} = \frac{P[I]P[I \mid A]}{P[A]}$$

$P[A]$ se ha calculado por el teorema de probabilidad total y es $\frac{43}{90}$. Luego,

$$P[I \mid A] = \frac{1/3 \times 3/5}{\frac{43}{90}} = \frac{90}{43 \times 5} = \frac{18}{43} .$$

Este ejemplo se generaliza por el siguiente teorema.

TEOREMA 1.8.3 TEOREMA DE BAYES Si los eventos $B_1, B_2, \ldots, B_k$ forman una partición del espacio muestral Ω y A es un evento cualquiera de Ω, entonces

$$P[B_r \mid A] = \frac{P[B_r]\,P[A \mid B_r]}{\sum_{i=1}^{k} P[B_i]\,P[A \mid B_i]}$$

$$= \frac{P[B_r]\,P[A \mid B_r]}{P[B_1]\,P[A \mid B_1] + P[B_2]\,P[A \mid B_2] + \ldots + P[B_k]\,P[A \mid B_k]}$$

para $r = 1, 2, \ldots, k$.

Este teorema resulta como consecuencia inmediata del teorema de probabilidad total. En efecto

$$P[B_r \mid A] = \frac{P[B_r A]}{P[A]} = \frac{P[B_r]\,P[A \mid B_r]}{\sum_{i=1}^{k} P[B_i]\,P[A \mid B_i]}$$

El numerador resulta del teorema de multiplicación y el denominador del teorema de probabilidad total.

COROLARIO 2 Si **A** y **B** son eventos en Ω tales que $P[A] > 0$ y $0 < P[B] < 1$ entonces

$$P[B \mid A] = \frac{P[B]\,P[A \mid B]}{P[B]\,P[A \mid B] + P[\bar{B}]\,P[A \mid \bar{B}]}$$

Este corolario es una consecuencia inmediata del corolario 1. En efecto:

$$P[B \mid A] = \frac{P[B\,A]}{P[A]} = \frac{P[B]\,P[A \mid B]}{P[B]\,P[A \mid B] + P[\bar{B}]\,P[A \mid \bar{B}]}$$

EJEMPLO 12 Una compañía de desarrollo urbano está considerando la posibilidad de construir un centro comercial en un sector de Lima metropolitana, Perú. Un elemento vital en esta consideración es un proyecto de una autopista que une este sector con el centro de la ciudad. Si el consejo municipal aprueba esta autopista, hay una probabilidad de 0.90 de que la compañía construya el centro comercial en tanto que si la autopista no es aprobada la probabilidad es de sólo 0.20. Basándose en la información disponible, el presidente de la compañía estima que hay una probabilidad de 0.60 que la autopista sea aprobada.

(a) ¿Cuál es la probabilidad que la compañía construya el centro comercial?

(b) Dado que el centro comercial fué construido. ¿Cuál es la probabilidad de que la autopista haya sido aprobada?.

SOLUCION Definimos los eventos:

A: "la autopista es aprobada".

B: "el centro comercial es construído".

(a) Debemos calcular **P[B]** , aplicando el corolario del teorema de probabilidad total. El evento B se escribe $B = AB \cup \bar{A}B$ y

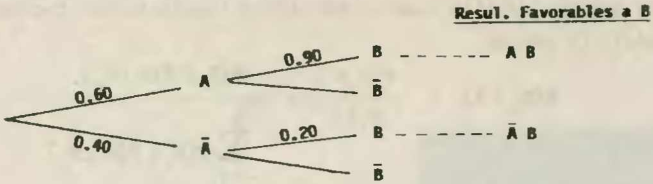


Fig. 1.8.16

$$P[B] = P[AB] + P[\bar{A}B] = P[A]\,P[B \mid A] + P[\bar{A}]\,P[B \mid \bar{A}]$$

$$= (0.60)(0.90) + (0.40)(0.20) = 0.54 + 0.08$$

$$= 0.62\ .$$

(b) Por el corolario del teorema de Bayes tenemos

$$P[A \mid B] = \frac{P[A]\,P[B \mid A]}{P[B]} = \frac{(0.60)(0.90)}{0.62} = \frac{54}{62} = 0.87\ .$$

EJEMPLO 13 En una línea de producción hay dos procesos, **A** y **B**. En el proceso **A** hay un 20 % de defectuosos y en **B** hay 25 %. En una muestra de 300 productos hay 200 del proceso **A** y 100 del **B**.

(a) Si se extrae un producto al azar, hallar la probabilidad que sea defectuoso.

(b) Si al extraer el producto resultó defectuoso, halle la probabilidad de que sea del proceso **A**.

SOLUCION Sean los siguientes eventos:

A: "el producto es del proceso **A**".

B: "el producto es del proceso **B**".

D: "el producto es defectuoso".

$\bar{D}$: "el producto es no defectuoso".

$\Omega = A \cup B$. Es decir, **A** y **B** forman una partición de Ω .

(a) Debemos calcular $P[D]$. Este evento se escribe $D = AD \cup BD$ y por el teorema de probabilidad total es

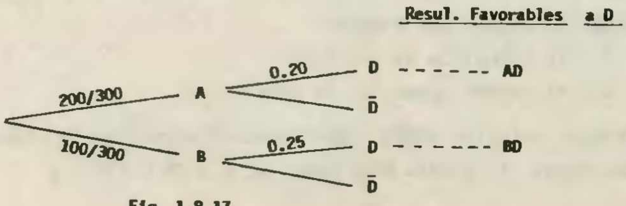


Fig. 1.8.17

$$P[D] = P[AD] + P[BD] = P[A]\,P[D\mid A] + P[B]\,P[D\mid B]$$

$$= \frac{2}{3}(0.20) + \frac{1}{3}(0.25) = \frac{65}{300}.$$

(b) Por el teorema de Bayes se tiene

$$P[A\mid D] = \frac{P[A]\,P[D|A]}{P[D]} = \frac{(2/3)(0.20)}{65/300} = 0.615$$

EJEMPLO 14 La compañía ensambladora de automóviles CAR-PERU, se ha presentado a una licitación, para ensamblar un nuevo modelo de automóvil. La probabilidad que CAR-PERU gane la licitación es de 0.90 si una firma competidora MOTOR ANDINO no se presente a ella en tanto que es de sólo 0.20 Sí MOTOR-ANDINO se presenta. El gerente general de CAR-PERU estima que hay una probabidad de 0.80 que MOTOR-ANDINO se presente.

(a) ¿Cuál es la probabilidad que CAR-PERU gane la licitación?.

(b) Dado que CAR-PERU ganó la licitación, ¿cuál es la probabilidad que MOTOR-ANDINO se haya presentado a ella?

SOLUCION Sean los siguientes eventos:

E: "la compañía MOTOR-ANDINO se presenta a la licitación".

G: "la compañía CAR-PERU gana la licitación".

El evento G se escribe $G = EG \cup \bar{E}G$ y por el corolario del teorema de probabilidad total es

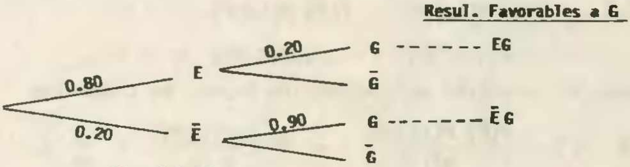


Fig. 1.8.18

$$P[G] = P[EG] + P[\bar{E}G]$$

$$P[G] = P[E]\,P[G\mid E] + P[\bar{E}]\,P[G\mid \bar{E}]$$

$$= (0.80)(0.20) + (0.20)(0.90) = 0.34.$$

(b) Aplicando el corolario del teorema de Bayes, se tiene

$$P[E\mid G] = \frac{P[E]\,P[G|E]}{P[G]} = \frac{(0.80)(0.20)}{0.34} = \frac{8}{17}$$

EJEMPLO 15 La compañía "compre ahora" efectúa una encuesta del mercado pa ra evaluar la lucratividad de cada uno de sus nuevos productos. Encuestas anteriores indican que el 90% de los nuevos productos debieran resultar lucrativos; sin embargo, un análisis posterior de la confiabilidad de las encuestas ha demostrado que sólo el 70% de los productos que se pronosticaban como lucrativos, lo fueron efectivamente. En contraste, de los productos pronosticados como no lucrativos por las encuestas, el 20% resultó ser lucrativo. La compañía ha comercializado un nuevo producto llamado X. Dado que X resultó lucrativo. ¿Cuál es la probabilidad que la encuesta haya pronosticado a X como no lucrativo?.

SOLUCION Sean los eventos:

P: "El producto X fue pronosticado como lucrativo".

L: "El producto X resulto lucrativo".

Observe que $\Omega = P \cup \bar{P}$. Es decir, P y $\bar{P}$ forman una partición de Ω.

Se pregunta $P[\bar{P} \mid L]$. El evento $L \subset \Omega$, se escribe $L = PL \cup \bar{P}L$. Luego,

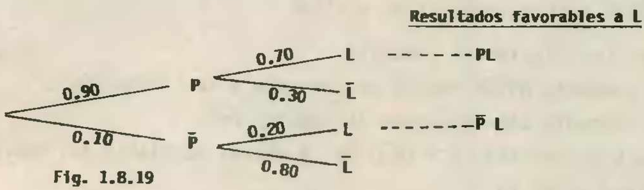


Fig. 1.8.19

$$P[L] = P[P]\,P[L \mid P] + P[\bar{P}]\,P[L \mid \bar{P}]$$

$$= (0.90)(0.70) + (0.10)(0.20) = 0.65\,.$$

Entonces, según el corolario del teorema de Bayes, se tiene que

$$P[\bar{P} \mid L] = \frac{P[\bar{P}]\,P[L \mid \bar{P}]}{P[L]} = \frac{(0.10)(0.20)}{0.65} = \frac{2}{65}\,.$$

EJEMPLO 16 Una vacuna produce inmunidad contra el sarampión en un 95% de los casos, supongamos que en una población, el 30% de las personas se ha vacunado. Supongamos además que una persona vacunada sin inmunidad tiene la misma probabilidad de contraer sarampión que la persona que no está vacunada ¿Cuál es la probabilidad que una persona que contrajo sarampión esté vacunada?.

SOLUCION 1 Definimos los eventos :

V: "la persona está vacunada".

$\bar{V}$: "la persona no está vacunada".

S: "persona con sarampión".

2. El espacio muestral Ω, toda la población, se compone de personas vacunadas y no vacunadas, $\Omega = V \cup \bar{V}$. Osea V y $\bar{V}$ forman una partición de Ω

3. Debemos calcular $P[V \mid S]$, la probabilidad que la persona esté vacunada dado que contrajo sarampión.

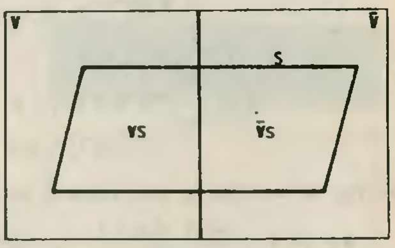


Fig. 1.8.20

4. El evento $S \subset \Omega$, se escribe - $S = VS \cup \bar{V}S$. Luego

$P[S] = P[V]\, P[S \mid V] + P[\bar{V}]\, P[S \mid \bar{V}]$

Teorema de probabilidad total.

$$P[S] = \frac{30}{100} \times \frac{\frac{30 \times 5}{100}}{30} + \frac{70}{100} \times 1 = 0.015 + 0.7 = 0.715.$$

Por lo tanto, según el corolario del teorema de Bayes

$$P[V \mid S] = \frac{P[V]\, P[S \mid V]}{P[S]} = \frac{0.015}{0.715} = \frac{3}{143} .$$

EJEMPLO 17 Supongamos que la ciencia médica ha desarrollado una prueba, para el diagnóstico del cáncer, que tiene el 95% de exactitud tanto en los que tienen cáncer como entre los que no tienen. Si 0.005 de la población realmente tiene cáncer, calcular la probabilidad que determinado individuo tenga cáncer, si la prueba dice que tiene.

SOLUCION 1 Definimos los eventos siguientes:

C: "la persona examinada realmente tenga cáncer".

D: "el diagnostico dice la persona examinada tiene cáncer".

2. Ω: "Todas las personas", se escribe $\Omega = C \cup \bar{C}$. Es decir C y $\bar{C}$ forman una partición del espacio muestral.

3. Del enunciado: $P[C] = 0.005$, $P[D \mid C] = 0.95$, $P[\bar{D} \mid \bar{C}] = 0.95$. Y debemos calcular $P[C \mid D]$.

4. El evento D se escribe $D = CD \cup \bar{C}D$ y por el corolario del teorema de - probabilidad total

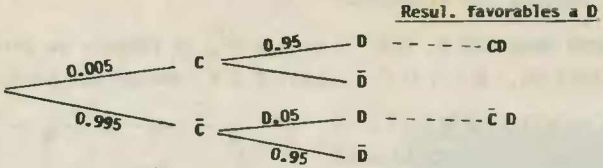


Fig. 1.8.21

$$P[D] = P[C]\,P[D \mid C] + P[\bar{C}]\,P[D \mid \bar{C}]$$

$$= (0.005)(0.95) + (0.995)(0.05) = 0.0545 .$$

5. Por el corolario del teorema de Bayes se obtiene

$$P[C \mid D] = \frac{P[C]\,P[D|C]}{P[D]} = \frac{(0.005)(0.95)}{0.05450} = \frac{475}{5450} = 0.087 .$$

EJEMPLO 18 Dos proveedores, A Y B, entregan la misma pieza a un fabricante, que guarda las existencias de esta pieza en un mismo lugar. Los antecedentes demuestran que 5 % de las piezas entregadas por A son defectuosas, y que 9 % de las piezas entregadas por B también son defectuosas. Además A entrega cuatro veces más piezas que B. Si se extrae al azar una pieza y se encuentra que no es defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que haya fabricado **A**?.

SOLUCION Sean los siguientes eventos:

A: "extraer una pieza entregada por A".

B: "extraer una pieza entregada por B".

N: "extraer una pieza no defectuosa".

Debemos calcular $P[A \mid N]$. $\Omega = A \cup B$, o sea A y B forman una partición de Ω. Puesto que $N \subset \Omega$, se escribe $N = AN \cup BN$.

Del enunciado $P[A] = \frac{4}{5}$ y $P[B] = \frac{1}{5}$ ¿por qué?.

Luego, por el teorema de probabilidad total es

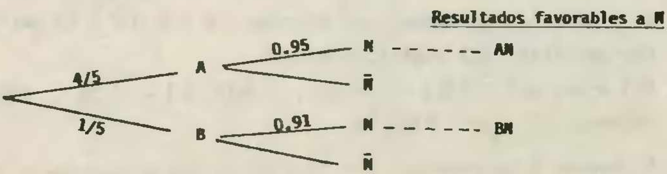


Fig. 1.8.22

$$P[N] = P[A]\,P[N \mid A] + P[B]\,P[N \mid B]$$

$$= \frac{4}{5}\,(0.95) + \frac{1}{5}\,(0.91) = \frac{471}{500}\,.$$

Y según el teorema de Bayes. Se tiene

$$P[A\mid N] = \frac{P[A]\;P[N\mid A]}{P[A]} = \frac{4/5\ (0.95)}{47/500} = \frac{380/500}{471/500} = 0.807\ .$$

EJEMPLO 19 El gerente general de una cadena sudamericana de supermercados - estima la proporción de sus establecimientos que alcanzarán la meta de una - venta anual equivalente a doce millones de dólares en la forma siguiente:

PROPORCION DE ESTABLECIMIENTOS (π)	PROBABILIDAD P (π)
π_1 = 0.60	$P(\pi_1)$ = 0.20
π_2 = 0.70	$P(\pi_2)$ = 0.50
π_3 = 0.80	$P(\pi_3)$ = 0.30

Es decir, el gerente general, bazándose en experiencias anteriores estima que hay una probabilidad de 0.20 de que 60 % de las tiendas alcanzarán - los doce millones de venta anual; una probabilidad de 0.50 que alcancen el - 70 % y finalmente una probabilidad de 0.30 de que 80 % alcancen la meta. Se - selecciona al azar uno de los negocios.

(a) ¿Cuál es la probabilidad que este haya alcanzado la meta considerada?

(b) Dado que este negocio alcanzó la meta, ¿cuál es la probabilidad que - el 80 % de los negocios haya vendido doce millones de dólares?

SOLUCION Sea el evento A: "obtener un negocio que alcanza la meta considerada".

Las formas diferentes de obtener un negocio que alcanza la meta fijada, se - observa en el diagrama del árbol de probabilidades.

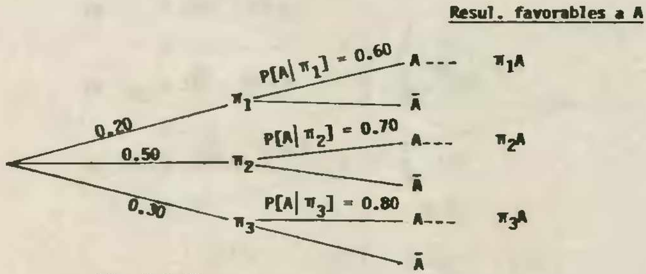


Fig. 1.8.23

(a) El evento se escribe, $A = \bigcup_{i=1}^{3} \pi_i A$, y por el teorema de probabilidad - total es

$$P[A] = P[\pi_1]\, P[A \mid \pi_1] + P[\pi_2]\, P[A \mid \pi_2] + P[\pi_3]\, P[A \mid \pi_3]$$

$$= (0.20)(0.60) + (0.50)(0.70) + (0.30)(0.80)$$

$$= 0.12 + 0.35 + 0.24 = 0.71 .$$

(b) De acuerdo con el teorema de Bayes se tiene

$$P[\pi_3 \mid A] = \frac{P[\pi_3]\, P[A \mid \pi_3]}{P[A]} = \frac{(0.30)(0.80)}{0.71} = \frac{0.24}{0.71} = 0.338$$

EJEMPLO 20 En el almacén de una firma comercial distribuidora de fusibles - se encuentra 80 cajas con 100 fusibles cada una. 20 cajas contienen fusibles producidos por una empresa A, 30 cajas contienen fusibles producidos por una empresa B, el resto de cajas contienen fusibles producidos por una compañía C. A produce el 3 % de artículos defectuosos, B el 5 % y C el 4 % de artículos defectuosos. Si se selecciona una de estas cajas al azar, se toma una de sus fusibles y se encuentra que es defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de - que haya sido producido por B?

SOLUCION Definimos los siguientes eventos:

A: "Elegir una caja de fusibles producidos por la empresa A".

B: "Elegir una caja de fusibles producidos por la empresa B".

C: "Elegir una caja de fusibles producidos por la empresa C".

D: "obtener un artículo defectuoso".

Debemos calcular $P[B \mid D]$.

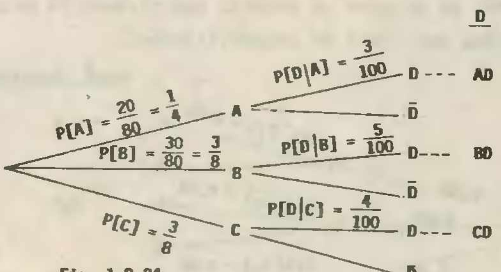


Fig. 1.8.24

$$P[D] = P[AD] + P[BD] + P[CD]$$

$$= P[A]\,P[D\mid A] + P[B]\,P[D\mid B] + P[C]\,P[D\mid C]$$

$$= \frac{2}{8}\times\frac{3}{100} + \frac{3}{8}\times\frac{5}{100} + \frac{3}{8}\times\frac{4}{100} = \frac{33}{800}.$$

Según el teorema de Bayes tenemos

$$P[B\mid D] = \frac{P[B]\,P[D\mid B]}{P[D]} = \frac{3/8\times 5/100}{33/800} = \frac{5}{11} = 0.45$$

EJEMPLO 21 Considere 18 tiradores clasificados en 4 grupos. En el primer grupo hay 5 tiradores con probabilidades 0.8 de dar en el blanco, en el segundo hay 7 con probabilidad 0.7, en el tercero hay 4 con probabilidad de 0.6 y en el último 2 con probabilidad 0.5 de dar en el blanco. Se elige aleatoriamente un tirador, dispara y no da en el blanco. ¿A qué grupo es más probable que pertenezca?

SOLUCION Definimos los siguientes eventos :

E_i : "el tirador elegido pertenece al grupo i ($i = 1,2,3,4$)"

F: "al disparar no da en el blanco";

por lo tanto, el evento F podemos escribir como sigue,

$$F = \bigcup_{i=1}^{4} E_i F$$

$$P[F] = \sum_{i=1}^{4} P[E_i]\,P[F\mid E_i]\,, \quad \text{(Teor. de prob. total)}$$

las probabilidades de los eventos E_i son :

$$P[E_1] = \frac{5}{18},\; P[E_2] = \frac{7}{18},\; P[E_3] = \frac{4}{18},\; P[E_4] = \frac{2}{18}$$

Si ocurre E_1, $P[F\mid E_1] = 0.2$

Si ocurre E_2, $P[F\mid E_2] = 0.3$

Si ocurre E_3, $P[F\mid E_3] = 0.4$

Si ocurre E_4, $P[F\mid E_4] = 0.5$

luego, $$P[F] = \frac{5}{18}(0.2) + \frac{7}{18}(0.3) + \frac{4}{18}(0.4) + \frac{2}{18}(0.5)$$

$$= \frac{1}{18}\left[1 + 2.1 + 1.6 + 1\right] = \frac{5.7}{18}.$$

Calcularemos ahora $P[E_i \mid F]$ $(i = 1,2,3,4)$, según teorema de Bayes

$$P[E_1 \mid F] = \frac{P[E_1]\,P[F \mid E_1]}{P[F]} \quad \frac{\frac{5}{18}(0.2)}{\frac{5.7}{18}} = \frac{1}{5.7} \;;$$

$$P[E_2 \mid F] = \frac{P[E_2]\,P[F \mid E_2]}{P[F]} = \frac{\frac{7}{18}(0.3)}{\frac{5.7}{18}} = \frac{2.1}{5.7} \;;$$

$$P[E_3 \mid F] = \frac{P[E_3]\,P[F \mid E_3]}{P[F]} = \frac{\frac{4}{18}(0.4)}{\frac{5.7}{18}} = \frac{1.6}{5.7} \;;$$

$$P[E_4 \mid F] = \frac{P[E_4]\,P[F \mid E_4]}{P[F]} = \frac{\frac{2}{18}(0.5)}{\frac{5.7}{18}} = \frac{1}{5.7}$$

por lo tanto, el jugador elegido, es más probable que pertenezca al segundo grupo.

El diagrama del árbol de probabilidad de la fig.1.8.25 da una visión esquemática de la solución de este problema.

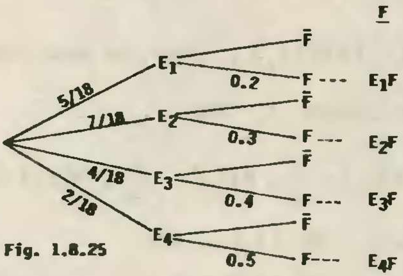


Fig. 1.8.25

EJEMPLO 22 Consideremos una muestra de tamaño 3, extraída de la siguiente manera. Se empieza con un grupo de 12 cartas: 7 espadas y 5 diamantes. En cada ensayo se extrae una carta, se ve el palo y se devuelve, juntos con otra carta adicional del mismo palo. ¿Cuál es la probabilidad que el número de espadas en el grupo de cartas antes de la tercera extracción sea 8, dado que - la muestra contiene 2 espadas y un diamante?.

SOLUCION Sean los siguientes eventos :

E: "espada" ; D: "diamante".

A: "La muestra contiene 2 espadas y 1 diamante".

B: "El número de espadas antes de la tercera extracción es 8".

Se pide determinar $P[B \mid A]$.

El diagrama del árbol de probabilidades que da una visión esquemática del problema es

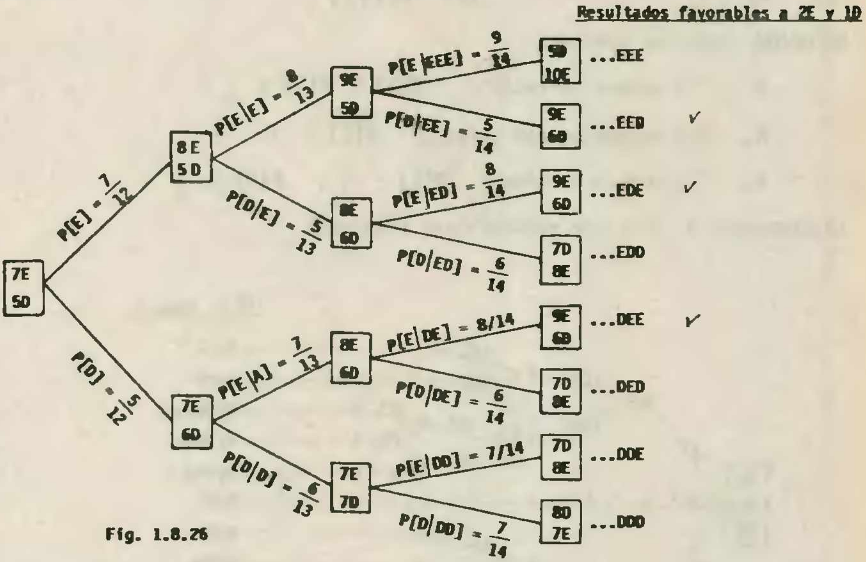


Fig. 1.8.26

El evento **A** se escribe $A = EED \cup EDE \cup DEE$ y por el teorema de probabilidad total se tiene

$$P[A] = P[E]\,P[E|E]\,P[D|EE] + P[E]\,P[D|E]\,P[E|ED] + P[D]\,P[E|D]\,P[E|DE]$$

$$= \frac{7}{12} \times \frac{8}{13} \times \frac{5}{14} + \frac{7}{12} \times \frac{5}{13} \times \frac{8}{14} + \frac{5}{12} \times \frac{7}{13} \times \frac{8}{14} = \frac{15}{39}$$

y por el teorema de Bayes tenemos,

$$P[B \mid A] = \frac{\frac{7}{12} \times \frac{5}{13} \times \frac{8}{14} + \frac{5}{12} \times \frac{7}{13} \times \frac{8}{14}}{\frac{15}{39}} = \frac{\frac{10}{39}}{\frac{15}{39}} = \frac{2}{3} .$$

EJEMPLO 23 Una caja contiene 3 monedas: una corriente, otra de dos caras, y la tercera cargada tal que la probabilidad que se obtenga cara al lanzarla es 2/3. Se escoge una moneda al azar y se lanza. Si aparece cara se lanza la moneda de nuevo. Si aparece sello se escoge otra moneda entre las dos que quedan y se lanza.

Sea C el evento: "se escoge la moneda cargada".
Sea X el evento: "sale primero sello y después cara".
Se pide calcular:

(a) $P[C \mid X]$; (b) $P[\bar{X} \mid C]$.

SOLUCION Sean los eventos:

M_1 : "La moneda correcta"; $P[C] = P[S] = \frac{1}{2}$

M_2 : "La moneda de dos caras", $P[C] = 1$

M_3 : "La moneda cargada"; $P[C] = \frac{2}{3}$, $P[S] = \frac{1}{3}$

Consideremos el árbol de probabilidad siguiente

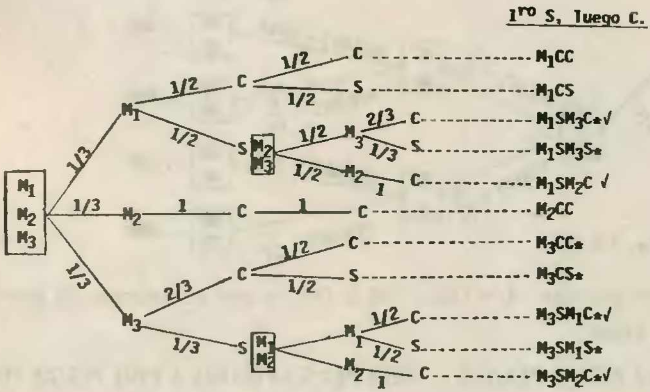


Fig. 1.8.27

Entonces se tiene que, los sucesos favorables al evento C son los que están marcados con * , ya que la moneda cargada puede escogerse la primera vez o la segunda.

Los sucesos favorables al evento X son los que están marcados con √ . Y los sucesos favorables al evento $C \cap X$ con los que tienen ambas marcas *√ . - Por lo tanto:

(a) $$P[X] = \frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times 1+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 1$$

$$= \frac{2}{36}+\frac{3}{36}+\frac{1}{36}+\frac{2}{36} = \frac{2}{9}.$$

y $$P[C \mid X] = \frac{P[C \cap X]}{P[X]}$$

$$= \frac{\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 1}{2/9}$$

$$= \frac{5/56}{2/9} = \frac{5}{8}.$$

(b) $$P[C] = \frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 1+2\left[\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right]+\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$$

$$\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}$$

$$= \frac{2}{36}+\frac{2}{36}+\frac{4}{27}+\frac{2}{27}+\frac{2}{36}+\frac{1}{36} = \frac{5}{12}.$$

y $P[\bar{X} \mid C] = 1 - P[X \mid C]$ prop. de probab. condicional.

$$= 1 - \frac{P[X \cap C]}{P[C]} = 1 - \frac{5/36}{5/12} = \frac{2}{3}.$$

EJEMPLO 24 En una caja hay 4 bolas, las que han sido colocados lanzando una moneda 4 veces. Si salió cara se colocó una bola blanca y si salió sello se colocó una bola roja. De la caja se extrae una bola y resultó ser blanca. - ¿Cuál es la probabilidad que en la caja queden al menos 2 bolas blancas?

SOLUCION Definimos los siguientes eventos:

B_i : "en la caja hay i bolas blancas (i = 0,1,2,3,4)".

B : "obtener una bola blanca al extraer una de la caja".

A : "en la caja quedan al menos dos bolas blancas"

El evento B se escribe así,

$$B = \bigcup_{i=1}^{4} B_i B$$

de donde, $P[B] = \sum_{i=1}^{4} P[B_i] P[B \mid B_i]$

y $A = B_3 \cup B_4$

debemos calcular $P[A \mid B] = \dfrac{P[B_3]\, P[B \mid B_3] + P[B_4]\, P[B \mid B_4]}{P[B]}$

Cálculo de $P[B_i]$ $i = 1,2,3,4$ y $P[B \mid B_i]$

B_1 : "en la caja hay 1 bola blanca y 3 rojas"

$P[B_1]$ = P[obtener en los lanzamientos de la moneda 1C y 3S] $= \dfrac{P_4^{1,3}}{2^4} = \dfrac{4}{2^4}$

B_2 : " en la caja hay 2 bolas blancas y 2 rojas"

$P[B_2]$ = P[obtener en los lanzamientos de la moneda 2C y 2S] $= \dfrac{P_4^{2,2}}{2^4} = \dfrac{6}{2^4}$

B_3 : " en la caja hay 3 bolas blancas y una roja"

$P[B_3]$ = P[obtener en los lanzamientos de la moneda 3C y 1S] $= \dfrac{P_4^{3,1}}{2^4} = \dfrac{4}{2^4}$

B_4 : "en la caja hay 4 bolas blancas"

$P[B_4]$ = P[obtener en los lanzamientos de la moneda 4C] $= \dfrac{1}{2^4}$.

Si ocurre B_1, $P[B \mid B_1] = \dfrac{1}{4}$;

Si ocurre B_2, $P[B \mid B_2] = \dfrac{1}{2}$;

Si ocurre B_3, $P[B \mid B_3] = \dfrac{3}{4}$;

Si ocurre B_4, $P[B \mid B_4] = 1$.

Luego, $P[B] = \dfrac{4}{2^4}\times\dfrac{1}{4}+\dfrac{6}{2^4}\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{4}{2^4}\times\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{2^4}\times 1=\dfrac{1}{2}$

por lo tanto, $$P[A \mid B] = \frac{\frac{4}{2^4}\times\frac{3}{4}+\frac{1}{2^4}\times 1}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$, teorema de Bayes

La fig. 1.8.28 es el diagrama del árbol de probabilidades que ilustra la solución de este problema.

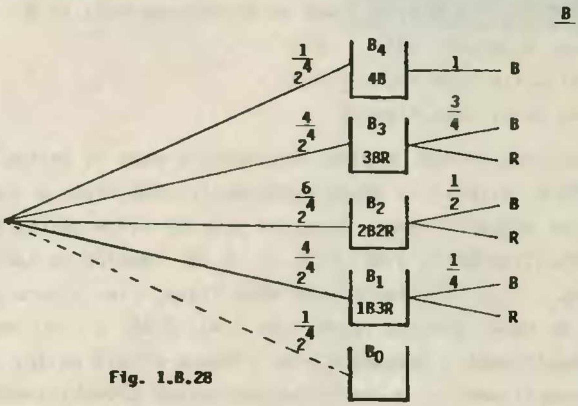


Fig. 1.8.28

PROBLEMAS 1.8

1. Una urna contiene 5 bolas blancas y 7 bolas negras. Se extrae una bola al azar; se pone fuera de la urna y su color no es visto; después se extrae otra bola aleatoriamente. ¿Cuál es la probabilidad que esta última sea - blanca?.

2. De un conjunto de fotos una persona A escoge 3 fotos de hombre y 2 de mujer. Otra persona B escoge 2 fotos de hombre y una de mujer. La persona A extrae de su grupo, al azar, 2 fotografías, que sin verlas, las hecha al grupo que tiene la persona B. Si de este nuevo grupo que ahora tiene la - persona B, se extrae al azar, una fotografía, determinar la probabilidad de que :
   (a) ésta sea una mujer.
   (b) éste sea un hombre.

3. Se tiene 5 urnas idénticas; dos de ellas de igual contenido, con 3 bolas blancas y 5 negras, y las otras tres teniendo cada una, 4 blancas y 3 negras. Se elige una urna aleatoriamente. De la urna elegida se extrae al azar una bola, ¿cuál es la probabilidad que sea blanca?.

4. Una urna contiene 3 bolas blancas, 4 negras y 5 rojas. Se extraen 3 bolas sin reposición. ¿Cuál es la probabilidad que sean del mismo color?

5. Se tiene 2 urnas A y B, con 5 bolas rojas, 3 blancas y una roja, 2 blancas respectivamente. Se lanza un dado, si se obtiene 3 ó 6, se pasa una bola de B a A, y luego se extrae una bola de A. En cualquier otro caso se pasa una bola de A a B, y luego se extrae una bola de B.
Determinar la probabilidad que:
(a) ambas bolas sean rojas.
(b) ambas bolas sean blancas.

6. Un restaurante ofrece, a elección, menús a base de carne, de pollo o de jamón. Si el cliente lo desea puede pedir vino tinto o vino blanco. Se sabe que las probabilidades que un cliente elija carne, pollo o jamón son, respectivamente, 0.60, 0.30 y 0.10. También se sabe que: las probabilidades que un cliente pida vino tinto, vino blanco o ningún vino, después de haber elegido carne, son 0.40, 0.10 y 0.50 respectivamente; las probabilidades, después que el cliente eligió pollo, son 0.05, 0.25 y 0.70 respectivamente; y las correspondientes probabilidades, después que el cliente eligió jamón, son 0.15, 0.20 y 0.65. Por último se sabe que la probabilidad que un cliente deje una buena propina es: 0.80 sí a pedido carne o vino tinto, 0.30 si ha pedido carne y vino blanco, 0.60 si ha pedido carne sin vino; 0.40 si ha pedido pollo y vino tinto, 0.80 si ha pedido pollo y vino blanco, 0.70 si ha pedido pollo pero no vino; o 0.70 si ha pedido jamón y vino tinto, 0.70 si ha pedido jamón y vino blanco, 0.50 si ha pedido jamón pero no vino. ¿Cuál es la probabilidad que un cliente deje una buena propina?

7. Tres urnas contienen respectivamente una bola blanca, dos negras; 2 blancas, una bola negra; 2 blancas y 2 bolas negras. De la primera urna se transfiere una bola a la segunda; después se transfiere una a la tercera urna y en seguida se extrae una bola de la tercera urna. ¿Cuál es la probabilidad que este sea blanca?

8. La urna U_1 contiene seis bolas blancas y cuatro negras. La urna U_2 contiene dos blancas y dos negras. Se transfieren dos bolas de la urna U_1 a la urna U_2. A continuación, se extrae sin reemplazo una muestra de tamaño 2 de la urna U_2. ¿Cuál es la probabilidad que la muestra contenga exactamente una bola blanca?

9. Considere una urna con 10 bolas de las cuales 5 son negras. Se elige al azar un entero n del conjunto {1,2,3,4,5,6}, luego se selecciona una muestra de tamaño n sin reemplazamiento de la urna Determinar la probabilidad que todas las bolas de la muestra sean negras.

10. Ud. escoge al azar uno de los números enteros del conjunto {1,2,3,4}. Luego lanza un tetraedro regular cuyas caras estan marcadas con los números 1,2,3,4, tantas veces indica el número que escogió.
Calcular la probabilidad que el puntaje total obtenido en los lanzamientos sea igual a 4.

11. En una sociedad hay 15 miembros, 5 mujeres y 10 hombres. A una reunión asistieron 13 miembros para elegir un presidente. ¿Cuál es la probabilidad de que sea una mujer la elegida?

12. Una urna contiene 5 bolas negras y x blancas. Si al sacar dos bolas, la probabilidad que ambas sean negras es 5/14, calcule x.

13. Se tiene 5 fusiles que, cuando son apuntados apropidamente y disparados, tienen probabilidades de dar en el blanco respectivamente como sigue: 0.5 0.6, 0.7, 0.8 y 0.9. Se escoge aleatoriamente uno de los fusiles, se apunta y dispara. ¿Cuál es la probabilidad de dar en el blanco?

14. Una compañía que fabrica tornillos, tiene tres factorías, F_1, F_2 y F_3. Las factorías F_2 y F_3 producen el mismo número de tornillos, mientras que F_1 produce el doble de las de F_2. Por experiencia pasada se sabe, que el 2% de los tornillos producidos por F_1 y F_2 respectivamente son defectuosos, en tanto que el 4% de los fabricados por F_3 son defectuosos. Los tornillos producidos por las tres factorías se guardan en un mismo almacén. Si se escoge aleatoriamente un tornillo del almacén. ¿Cuál es la probabilidad que sea defectuosa?

15. Una caja contiene 3 monedas, dos normales y una con dos caras. Se elige una moneda al azar y se efectúa una tirada. Si sale cara se tira otra vez Si sale sello, entonces se elige una de las otras dos de la caja y se tira.
    (a) Determinar la probabilidad que salgan dos caras
    (b) Si se tira la misma moneda las dos veces, hallar la probabilidad de que sea la moneda con dos caras.

(c) Hallar la probabilidad que aparezca sello las dos veces.

16. Suponga que B_1, B_2 y B_3 son eventos mutuamente excluyentes. Si

$$P[B_j] = \frac{1}{3} \quad y \quad P[A \mid B_j] = \frac{j}{6}, \; j = 1,2,3. \text{ Hallar } P[A]$$

17. Una urna I contiene dos bolas blancas y tres azules, una segunda urna II contiene tres bolas blancas y cuatro azules, se extrae aleatoriamente una bola de la urna I y se coloca en la segunda, luego se extrae aleatoriamente una bola de esta; calcular la probabilidad que ésta última sea blanca.

18. Una caja contiene 5 monedas; cuatro de ellas son normales y la quinta con cara en ambos lados. Se elige aleatoriamente una moneda y luego se lanza dos veces. ¿Cuál es la probabilidad de obtener dos caras?.

19. Por la noche dos coches se aproximan uno al otro en una autopista. Si ninguno de los dos choferes esta borracho, ambos pasarán a salvo con una probabilidad de 0.999. Cada uno puede estar borracho con una probabilidad de 0.1, la probabilidad que ambos están borrachos es de 0.01. Si sólo el chofer A está borracho, pasarán a salvo con una probabilidad de 0.7. Si sólo el chofer B está borracho, pasarán a salvo con una probabilidad de 0.8. Si ambos están borrachos, pasarán sin peligro con una probabilidad de 0.4. ¿Cuál es la probabilidad que pasen a salvo?

20. En una urna A, hay 5 bolillas rojas y 5 negras; en otra urna B, hay 3 bolillas rojas y 6 negras, y en una C, hay 4 bolillas rojas y 2 negras. Se extrae una bolilla de A y se coloca en B, y de esta se extrae una bolilla que se coloca en C. De C se extrae una bolilla. Calcular la probabilidad de sacar una bolilla negra de C.

21. Se ha lanzado un dado 2 veces. El número obtenido en la primera vez es el número de bolas blancas colocadas en la urna y el número obtenido en la segunda vez, es el número de bolas negras colocadas en la misma urna. Se sabe también que el número total de bolas en la urna es 8.
¿Cuál es la probabilidad que la urna contenga exactamente 5 bolas blancas?

22. En una caja hay 3 monedas correctas y una no correcta tal que: $P[C] = 1/3$ $P[S] = 2/3$. Una persona elige al azar dos monedas de la caja y las coloca en otra caja; luego extrae al azar una moneda de esta segunda caja y la arroja, resultándoles sello. Determinar la probabilidad que esta moneda sea la no correcta.

23. Una moneda es tal que: $P[C] = 2/3$ y $P[S] = 1/3$. Se lanza dicha moneda Si aparece, cara se selecciona al azar un número del 1 al 9; si sale sello, se selecciona al azar un número del 1 al 5. Determinar:
(a) la probabilidad de obtener un número par.
(b) Si se selecciona un número par, ¿cuál es la probabilidad que haya salido sello?

24. Tres máquinas I, II y III manufacturan el 30%, 30% y 40% de la producción total de un cierto artículo. Las máquinas producen 4%, 3% y 2% de productos defectuosos, respectivamente. Se toma un artículo al azar, se prueba y resulta ser defectuoso. ¿Cuál es la probabilidad que haya sido manufacturado por la máquina I? ¿La máquina II? ¿y la III?.

25. De los alumnos del primer año de un determinado programa académico, se sabe que el 40% asistió a centros secundarios privados y el 60% asistió a centros estatales. El registro de matrícula señala que al final del curso alcanzaron una nota media A el 30% de los alumnos que asistieron a centros secundarios privados y sólo el 20% de los que asistieron a centros estatales. Al final del ciclo, se elige al azar un alumno de dicho curso y tiene nota media A. ¿Cuál es la probabilidad que el alumno hubiera asistido a un centro estatal?

26. (Problema de Bertrand). Se dan tres cajas cada una con dos cajones. Cada uno de los cajones de una caja contiene una moneda de oro; cada uno de los de la otra, una moneda de plata. En cuanto a los de la tercera caja, uno de sus cajones contiene una moneda de plata y el otro una moneda de oro. Escogemos una caja al azar, abrimos un cajón, y la moneda que en él encontramos es de oro. ¿Cuál es la probabilidad que la moneda en el otro cajón de esa caja sea de plata?

27. Una urna contiene dos bolas. La urna se llenó lanzando al aire una moneda dos veces y poniendo en la urna una bola blanca por cada cara y una bola negra por cada sello. Sacamos una de las dos bolas de la urna y nos encontramos que es blanca. Encuéntrese la probabilidad que la otra bola sea también blanca.

28. Una estación meteorológica suele acertar el 60% de las veces que pronostico día lluvioso, también la probabilidad de acertar en su pronóstico dado que indica tiempo no lluvioso es de 0.8. Se sabe que la probabilidad -

que llueva en un día cualquiera es de 0.25.

(a) ¿Cuál es la probabilidad que la estación dé un pronóstico correcto en un día cualquiera?

(b) ¿Cuál es la probabilidad que llueva dado que se sabe que el pronóstico está correcto?

29. La caja A contiene nueve cartas numeradas de 1 a 9. La caja B contiene cinco cartas numeradas de 1 a 5. Se elige una caja al azar y de ella se extrae una carta. Si la carta extraída es par. Calcular la probabilidad de que la carta provenga de la caja A.

30. La urna U_1 contiene una bola blanca y una negra. La urna U_2 sólo contiene bolas blancas. Se elige una urna al azar de la que se saca una primera bola que se repone, y se saca luego otra bola. Ambas resultan blancas.

(a) ¿Cuál es la probabilidad que ambas bolas fueron extraídas de la urna U_2 ?

(b) Si de la urna elegida de hacen tres extracciones con reposición. ¿Cuál es la probabilidad que las tres bolas fueron extraídas de la urna U_1 ?

31. La urna I tiene 3 bolas blancas y 7 negras. La urna II tiene 20 bolas de las cuales algunas son blancas y las demás son negras. Se escoge una urna al azar y de ella se extrae una bola, encontrándose que es blanca. Si la probabilidad que esta bola blanca provenga de la urna I es igual a 1/3 determinar el número de bolas blancas que existían originalmente en la urna II.

32. Una caja contiene 6 monedas de las cuales 4 son normales y las dos restantes con cara en ambos lados. Se elige aleatoriamente una moneda y luego se lanza dos veces. ¿Cuál es la probabilidad que se haya elegido una moneda normal, si se obtuvieron dos caras en los lanzamientos?

33. Un fabricante recibe el 60% de sus materias primas del distribuidor A y el resto del B. Por experiencia sabe que el 92% de los costales de materia prima llegan en buenas condiciones. ¿Cuál es la probabilidad que un costal dañado sea del distribuidor A? ¿Que sea del B?. Un estudio posterior revela que el 95% de los costales del distribuidor A llega en buen estado, mientras que sólo el 87.5% de B es de buena calidad. Con esta información, ¿cuál es la probabilidad que un costal dañado proceda de A?

34. Un fabricante recibe el 45% de su material para un transistor, de la compañía A, el 35% de la compañía B y el resto de la compañía C. Sabe por experiencia que el 1% del material de la compañía A será defectuoso, y que el 2% del material de la compañía B y C estará en malas condiciones también... En un lote que contenga material de las tres compañías hay mil transistores. ¿Cuál es la probabilidad que un transistor esté defectuoso?. ¿Cuál es la probabilidad que si un transistor estuviese defectuoso contase con material de la compañía B?

35. Un aparato especial para medir el contenido alcohólico en la sangre de una persona arrojó el siguiente resultado: de 500 voluntarios, 240 estaban borrachos (el nivel de alcohol en la sangre era de 0.0015 o más). Los mismos 500 voluntarios se sometieron a una prueba sanguínea inmediatamente después, encontrándose 280 personas con un nivel de 0.0015 o más. Después se determinó que 180 personas resultaron estar borrachos en ambas pruebas ¿Qué porcentaje de personas resultaron estar ebrios sin que lo indicara el aparato?. Supóngase que una persona realmente estuviera borracha y que pasara la prueba en el aparato. Según la información dada anteriormente, ¿cuál es la probabilidad que la prueba resultara positiva?.

36. Una urna contiene inicialmente una bola blanca y una bola negra. Una bola es extraída al azar y es reemplazada por dos bolas de su mismo color. Luego una de las tres bolas que ahora hay en la urna es axtraida al azar y es reemplazada por dos de su mismo color. Después una de las cuatro bolas que ahora hay en la urna es extraída al azar y es reemplazada por dos de su mismo color, etc. ¿Cuál es la probabilidad que:

(a) Las tres primeras bolas son blancas?

(b) La tercera bola es blanca?

(c) Hay 3 bolas blancas en las cuatro primeras extracciones?.

37. Todas las noches, el señor Pérez llega tarde a su casa. La señora Pérez que es una buena esposa, le deja encendida la luz de la entrada a la casa La probabilidad que el señor Pérez llegue borracho es 0.60. Si llega borracho, hay una probabilidad de 0.90 que olvide apagar la luz en tanto que ésta es sólo de 0.05 si llega sobrio.

(a) ¿Cuál es la probabilidad que el señor Pérez apague la luz en una nocne cualquiera?

(b) Dado que el señor Pérez apagó la luz una cierta noche. ¿Cuál es la probabilidad que haya llegado borracho?

38. El profesor López dicta un curso de Estadística y quiere tomar una prueba en cada clase. Sabedor que a veces se olvida de ir a hacer su clase, ha dado instrucciones a su jefe de prácticas que se haga cargo de la clase cuando él está ausente. Si el profesor López hace la clase, la probabilidad es 0.70 que tome la prueba en tanto que si el jefe de práctica hace la clase, ésta probabilidad es de sólo 0.10. Si el profesor López falta el 80% de la clases.
(a) ¿Cuál es la probabilidad que haya una prueba en una clase dada?
(b) Suponiendo que hubo prueba en una clase determinada, ¿Cuál es la probabilidad que el profesor López haya estado ausente?.

39. La compañía COMPUT-PERU está considerado comercializar una calculadora electrónica. De acuerdo con una investigación hecha en el mercado, la probabilidad que el producto tenga éxito es 0.80 si una firma competidora no introduce un producto similar en el mercado, en tanto que la probabilidad de éxito es 0.30 si la firma competidora comercializa el producto similar. Además, la compañía estima que hay una probabilidad de 0.40 que la firma competidora comercialice el producto. Dado que el producto de la compañía COMPUT-PERU tuvo éxito, ¿Cuál es la probabilidad que la firma competidora haya comercializado su producto?

40. Uno de dos peritos mercantiles verifica el estandar de un artículo. La probabilidad que el artículo caiga en manos del primer perito es igual a 0.55 y al segundo, 0.45. La probabilidad que el artículo estandarizado sea reconocido como tal por el primer perito es igual a 0.9, y por el segundo, 0.98. Durante la verificación el artículo fue reconocido como estandarizado. Hallar la probabilidad que el artículo lo haya examinado el segundo perito.

41. Juan tiene dos bolsas; la bolsa I, con tres bolas rojas y dos blancas; la bolsa II, con una bola roja y cuatro blancas. Juan escogió una bola de la bolsa I al azar y lo coloca en la bolsa II, luego escoge una bola de la bolsa II y encuentra que es roja, ¿Cuál es la probabilidad de que la bola transferida de la bolsa I a la II haya sido roja?.

42. Una persona tiene tres bolsas azules y dos verdes. Cada bolsa azul contiene

bolas rojas y blancas en una razón de 4 a 1, y cada bolsa verde contiene bolas rojas y blancas en una razón de 1 a 4. Tal persona escoge una bolsa al azar, y también al azar una bola de la bolsa elegida, y ve que es blanca, ¿Cuál es la probabilidad que haya sacado una bolsa verde?.

43. En el problema 17. Se sabe que de la urna II se extrajo una bola blanca, ¿Cuál es la probabilidad que de la urna I se halla pasado una bola azul?

44. En el ejemplo 8 de 1.8. Si se sabe que todas las bolas que se extrajeron fueron blancas. ¿Cuál es la probabilidad de haber obtenido 2 en el dado?.

45. La probabilidad que un accidente aéreo, el cual es debido a fallas estructurales, sea diagnosticada correctamente es 0.85 y la probabilidad que un accidente aéreo el cual no es debido a fallas estructurales sea diagnosticado incorrectamente como debido a fallas estructurales es 0.35. Si el 30 % de todos los accidentes aéreos son debidos a fallas estructurales, - encontrar la probabilidad, que un accidente aéreo es debido a fallas estructurales, dado que ha sido diagnosticado como debido a fallas estructurales.

46. Una compañía de petróleo, debe decidir, si taladra o no, un lugar determinado, que la compañía tiene bajo contrato. Por investigaciones geológicas practicadas, se sabe que existe una probabilidad de 0.45 que una formación tipo I se extiende debajo del lugar prefijado para taladrar: 0.30 de probabilidad que exista una formación de tipo II y de 0.25 de tipo III. Estudios anteriores indican que el petróleo se encuentra en un 30 % de las veces en las formaciones de tipo I y un 40 % en las del tipo II y 20 % en - las de tipo III. Determinar la probabilidad que si no se encontro petróleo, la perforación fue hecha en la formación de tipo I.

47. Se sabe que la probabilidad que una persona tuberculosa sometida a un examen radiológico se le diagnostique como tal es 0.95 y que la probabilidad que una persona no tuberculosa sometida a un examen radiológico se le diagnostique erróneamente como tuberculoso es 0.002. Se sabe, además, que el 0.1 % de los adultos residentes en cierta ciudad son tuberculosos. Si a uno de los residentes, seleccionado al azar, se le diagnostica tuberculosis. ¿Cuál es la probabilidad que realmente sea tuberculoso?

48. Se tienen dos urnas U_1 y U_2. La primera tiene 2 bolas blancas y 3 negras la segunda 2 bolas blancas y 3 rojas. Se extrae al azar una bola de U_1 y se pasa a U_2. Luego se extrae una bola de U_2 y se pasa a U_1. Finalmente se extrae al azar 2 bolas de U_1 y resultan ser blanca y negra. Determinar la probabilidad que U_1 no tenga ninguna bola roja.

49. Una fábrica de unidades de aire acondicionado recibe 70% de sus termostatos de la compañía A, 20% de la compañía B y el resto de sus termostatos de la compañía C. Por experiencia pasado se sabe que la compañía A produce 1/2% de termostatos defectuosos; la compañía B, 1% y la compañía C, 1.5%. Se selecciona al azar una unidad de aire acondicionado de la línea de producción y resulta defectuosa. ¿Cuál es la probabilidad que el termostato haya sido producido por la compañía B?

50. Se sabe que una empresa industrial utiliza cuatro máquinas en la fabricación de cierto producto y que la producción diaria de cada una de ellas es, respectivamente 1000, 1200, 1800 y 2000 piezas. Se sabe además que en promedio, el 1% de la producción de la primera máquina es "defectuosa", el 1/2% de la producción de la segunda es defectuosa, el 1/2% de la producción de la tercera es defectuosa y el 1% de la producción de la cuarta es defectuosa. Si de la producción de cierto día se extrae, al azar, una pieza que resulta ser defectuosa. ¿Cuál es la probabilidad que dicha pieza proceda: de la cuarta máquina? ¿de la tercera máquina? ¿de la segunda máquina? ¿de la primera máquina?

51. Se lanza al aire una moneda. Si sale cara se introduce una bola blanca en una urna; si sale sello, la bola que se introduce será negra. Esto se hace cuatro veces. Finalmente se extrae dos bolas y resultan ser blancas, ¿Cuál es la probabilidad que las otros dos bolas sean blanca y negra?

52. De una urna que contiene seis bolas blancas y cuatro negras, se transfieren cinco de ellas a una segunda urna que se encuentra vacía. Se toman de ella tres bolas y se ponen en una caja vacía. Se extrae una bola de la caja y resulta ser blanca. ¿Cuál es la probabilidad que exactamente cuatro de las bolas transferidas de la primera urna a la segunda hayan sido blancas?

53. La probabilidad que un accidente de aviación debido a fallas mecánicas sea diagnosticado correctamente es 0.72 y la probabilidad que un accidente de aviación que no se debe a fallas mecánicas sea diagnosticado in-

correctamente como que se debió a fallas mecánicas es 0.12. Si 40% de todos los accidentes de aviación se deben a fallas mecánicas, ¿cuál es la probabilidad que un accidente de aviación que se diagnosticó como debido a fallas mecánicas sea realmente a esta causa?

54. Tres empaquetadoras se emplearon en una juguetería durante el período de Navidades. María, que empaqueta 40% de todos los juguetes, se olvida de quitar la etiqueta con el precio 1 vez en 50; Juana, que empaqueta el 30% de todos los juguetes, se olvida de quétar la etiqueta con el precio una vez en 10, y Elena, que empaqueta el resto de los juguetes, se olvida de quitar la etiqueta con el precio 1 vez en 20. Dado que un cliente se quejó de que una etiqueta con el precio no fue quitada de un regalo antes de haber sido empaquetado, ¿cuál es la probabilidad que María cometiera el error?

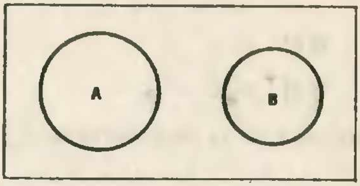
1.9 EVENTOS INDEPENDIENTES Y SECUENCIA DE EXPERIMENTOS INDEPENDIENTES

Hemos visto que, si los eventos A y B son mutuamente excluyentes como indica la figura 1.9.1; O sea $AB = \phi$, y si $P[A] > 0$, $P[B] > 0$, se tiene

$$P[A \mid B] = \frac{P[A \cap B]}{P[B]} = 0 \qquad y \qquad P[B \mid A] = \frac{P[A \cap B]}{P[A]} = 0$$

por otro lado tenemos, si $B \subset A$ como muestra la figura 1.9.2, entonces

$$P[A \mid B] = \frac{P[A \cap B]}{P[B]} = \frac{P[B]}{P[B]} = 1$$



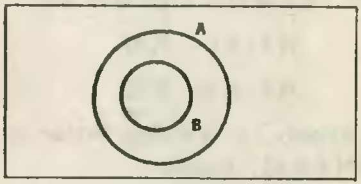


Fig. 1.9.1. Eventos mutuamente excluyentes **Fig. 1.9.2. evento B subconjunto de A**

En el primer caso, los eventos A y B no pueden ocurrir simultáneamente, así que el conocimiento de la ocurrencaa de B nos dice que A no ocurre (o viciversa). En el segundo caso si ocurre B, debe ocurrir A. Y en general hemos visto al definir probabilidad condicional que la ocurrencia de un evento con diciona la probabilidad de la ocurrencia de un segundo evento. Sin embargo hay muchos casos donde los eventos están totalmente sin conexión, y la ocurrencia de uno de ellos no cambia la probabilidad de la ocurrencia del otro, en este caso se dice que son *EVENTOS INDEPENDIENTES*. No obstante antes de dar la definición formal de independencia, consideraremos algunos ejemplos.

Consideraremos por ejemplo, el experimento de lanzar una moneda dos veces y observar la secuencia de caras y sellos. Entonces el espacio muestral es

$$\Omega = \{CC, CS, SC, SS\}$$

Consideremos los siguientes eventos:

A : "El primer resultado una cara".

B : "El segundo lanzamiento resulta una cara".

Entonces, $A = \{CC, CS\}$ y $B = \{CC, SC\}$. Por lo tanto

$$P[A] = \frac{1}{2}, \qquad P[B] = \frac{1}{2}$$

Supongamos ahora que ha ocurrido el evento B, entonces

$$P[A \mid B] = \frac{P[A \cap B]}{P[B]} = \frac{1/4}{1/2} = \frac{1}{2} = P[A]$$

Es decir, la ocurrencia del evento B no afecta la probabilidad de la ocurrencia de A. Es decir, la probabilidad de A no depende del conocimiento de la ocurrencia o no ocurrencia del evento B.

Así informalmente hablando, dos eventos A y B son *independientes*, si la ocurrencia de uno de ellos np efecta la probabilidad de la ocurrencia del otro. En símbolos significa que:

$$P[A \mid B] = P[A] \qquad \text{Si} \qquad P[B] > 0 \qquad (1)$$

$$P[B \mid A] = P[B] \qquad \text{si} \qquad P[A] > 0 \qquad (2)$$

Por ejemplo, si queremos hallar la probabilidad de la ocurrencia de A y B, esto es $P[A \cap B]$, tenemos

$$P[A \cap B] = P[B]\,P[A \mid B] = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

En general, de la primera igualdad y la regla de la multiplicación se tiene

$$P[A \cap B] = P[B]\,P[A \mid B] = P[B]\,P[A]$$

y de la segunda igualdad y la regla de la multiplicación se tiene el mismo resultado.

$$P[A \cap B] = P[A]\,P[B \mid A] = P[A]\,P[B]$$

Esto nos lleva a la siguiente definición.

DEFINICION 1.9.1 Los eventos A y B en Ω son ***independientes*** si, y solamente si se cumple una de las siguientes condiciones

(*i*) $P[A \cap B] = P[A]P[B]$

(*ii*) $P[A \mid B] = P[A]$, si $P[B] > 0$. (*iii*) $P[B \mid A] = P[B]$, si $P[A] > 0$

En otro caso se dice que los eventos A y B ***son dependientes***. Los eventos independientes son llamados algunas veces, ***Estadísticamente independientes, estocásticamente independientes o independientes en el sentido probabilístico***

EJEMPLO 1 Considere el lanzamiento simultáneo de una moneda y un dado. Sean los eventos; A: "Se obtiene cara en la moneda" , y B: "en el dado sale 6". Verificar que A y B son independientes.

SOLUCION

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{llll} (C,1) & (C,2) & \ldots & (C,6) \\ (S,1) & (S,2) & \ldots & (S,6) \end{array} \right\}$$

entonces, $A = \{(C,1), (C,2) \ldots (C,6)\}$

$B = \{(C,6), (S,6)\}$

$$A \cap B = \{C,6\}, \quad \text{luego} \quad P[A \cap B] = \frac{1}{12} \qquad (1)$$

$$P[A] = \frac{1}{2}, \quad P[B] = \frac{1}{6}, \quad \text{por lo tanto}$$

$$P[A]\,P[B] = \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{12} \qquad (2)$$

de (1) y (2), $P[A \cap B] = P[A]\,P[B]$

lo que indica que dichos eventos son independientes.

EJEMPLO 2 En un estudio de una enfermedad al pulmón se examinan 10000 personas mayores de 60 años. Se halla que 4,000 personas de este grupo son fumadores. Entre los fumadores 1800 padecen de desórdenes pulmonares. Entre los que no fuman 1500 tienen desórdenes pulmonares. ¿Son los eventos "fumadores" y "desórdenes pulmonares" independientes?

SOLUCION Sea los eventos :

A: "la persona elegida al azar es fumador".

B: "la persona tiene desórdenes pulmonares".

Entonces,

$$P[A] = \frac{4000}{10000} = 0.4 \quad y \quad P[B] = \frac{3300}{10000} = 0.33$$

La probabilidad condicional de fumadores dado un desorden pulmonar es,

$$P[A \mid B] = \frac{P[A \cap B]}{P[B]} = \frac{\frac{1800}{10000}}{\frac{3300}{10000}} = \frac{1800}{3300} = 0.55 \neq P[A]$$

por lo tanto, los eventos A y B no son independientes.

Una consecuencia inmediata de la definición es el teorema siguiente.

TEOREMA 1.9.1 Si A y B en Ω son eventos independientes, entonces

(*i*) A y $\bar{B}$ son independientes;

(*ii*) $\bar{A}$ y B son independientes;

(*iii*) $\bar{A}$ y $\bar{B}$ son independientes.

DEMOSTRACION (*i*)

$$\begin{aligned} P[A \cap \bar{B}] &= P[A]\, P[\bar{B} \mid A] \\ &= P[A]\,[1 - P[B \mid A]] && \text{teorema 1.7.2} \\ &= P[A]\,[1 - P[B]] && \text{Hipotesis} \\ &= P[A]\, P[\bar{B}] \ . \end{aligned}$$

Lo que demuestra que A y $\bar{B}$ son independientes.

(*ii*) se demuestra similarmente.

(*iii*)

$$\begin{aligned} P[\bar{A}\,\bar{B}] &= P[\bar{A}]\, P[\bar{B} \mid \bar{A}] = P[\bar{A}]\,[1 - P[B \mid \bar{A}]] && \text{teorema 1.7.2} \\ &= P[\bar{A}]\,[1 - P[B]] = P[\bar{A}]\, P[\bar{B}] && \text{por (ii)} \end{aligned}$$

EJEMPLO 3 Sean A y B dos eventos independientes, tales que la probabilidad que ocurran simultáneamente es de 1/6 y la probabilidad que ninguno ocurra es de $\frac{1}{3}$. Encuentre $P[A]$ y $P[B]$

SOLUCION Del enunciado se tiene

1. $P[AB] = \frac{1}{6}$, $P[\bar{A}\,\bar{B}] = \frac{1}{3}$

2. A y B eventos independientes; entonces

$$P[A\,B] = P[A]\,P[B] = \frac{1}{6}$$

3. A y B independientes, entonces $\bar{A}$ y $\bar{B}$ independientes, teorema - 1.9.1 (*iii*) . O sea

$$\frac{1}{3} = P[\bar{A}\,\bar{B}] = P[\bar{A}]\,P[\bar{B}] = [\,1 - P[A]][1 - P[B]] \quad \text{teorema 1.6.2}$$

$$= 1 - P[A] - P[B] + P[A]\,P[B]$$

$$= 1 - P[A] - P[B] + \frac{1}{6} \qquad \text{por paso 1}$$

de donde $P[A] + P[B] = \frac{5}{6}$ ó $P[B] = \frac{5}{6} - P[A]$

4. Reemplazando (3) en (2) obtenemos

$$P[A]\left[\frac{5}{6} - P[A]\right] = \frac{1}{6}$$

$$\left[P[A]\right]^2 - \frac{5}{6}\,P[A] + \frac{1}{6} = 0 .$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado se obtiene

$$P[A] = \frac{1}{2}\,, \qquad y \qquad P[A] = \frac{1}{3}$$

5. El conjunto solución será $\{\,P[A] = \frac{1}{2},\ P[B] = \frac{1}{3}\,\}$

o $\{\,P[A] = \frac{1}{3},\ P[B] = \frac{1}{2}\,\}$

NOTA En la práctica existen muchas situaciones donde no se puede con facilidad determinar si dos eventos son independientes; sin embargo en muchos casos los requerimientos puede justificarse intuitivamente de la consideración física del experimento, como veremos en ejemplos posteriores. Por ejemplo, l falla de uno de los motores de un avión de cuatro motores es independiente d la falla de los otros; en un concurso de tiro al blanco, la probabilidad de acertar por uno de los competidores es independiente de que acierten o no los otros concursantes, etc.

EJEMPLO 4 Para señalar las emergencias que pueden presentarse por la avería de alguno de los equipos en una sala de operaciones, se han instalado dos - instrumentos indicadores que funcionan independientemente. La probabilidad - de que el indicador accione durante la avería es igual a 0.95 para el primero de ellos y 0.9 para el segundo. Hallar la probabilidad que durante una avería accione sólo un indicador.

SOLUCION 1 Sea los siguientes eventos:

A: " el primer indicador acciona".

B: "el segundo indicador acciona".

$E = A\bar{B}$: "sólo acciona el indicador A"

$F = \bar{A}B$: "sólo acciona el indicador B".

2. Para hallar la probabilidad que accione sólo un indicador, debemos calcular la probabilidad de E o F. Es decir, $P(E \cup F)$.

3. Puesto que E y F son eventos mutuamente excluyentes

$$P[E \cup F] = P[E] + P[F]$$

$$P[E \cup F] = P[A\bar{B}] + P[\bar{A}B]$$

4. Los eventos A Y B son independientes, entonces por el teorema 1.9.1 partes (*i*) y (*ii*) los eventos A y $\bar{B}$, así acomo $\bar{A}$ y B son independientes respectivamente. Luego

$$\begin{aligned} P[E \cup F] &= P[A]\,P[\bar{B}] + P[\bar{A}]\,P[B] \\ &= (0.95)(0.1) + (0.05)(0.9) \\ &= 0.095 + 0.045 = 0.14. \end{aligned}$$

CONSECUENCIA 1 Si A y B son eventos cualesquiera en Ω independientes, el teorema 1.6.4 , se escribe

$$P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A]\,P[B] .$$

TEOREMA 1.9.2 Si A y B son eventos cualesquiera en Ω independientes, entonces

$$P[A \cup B] = 1 - P[\bar{A}]\,P[\bar{B}] = 1 - [1 - P[A]]\,[1 - P[B]]$$

DEMOSTRACION

$$\begin{aligned} P[A \cup B] &= 1 - P[\overline{A \cup B}] && \text{teorema 1.6.2;} \\ &= 1 - P[\bar{A}\,\bar{B}] && \text{ley de DE-Morgan ;} \\ &= 1 - P[\bar{A}]\,P[\bar{B}] && \text{teorema 1.9.1 } (iii) \\ &= 1 - [1 - P[A]][1 - P[B]] && \text{teorema 1.6.2.} \end{aligned}$$

EJEMPLO 5 Un tirador acierta el 80 % de sus disparos y otro (en las mismas condiciones de tiro), el 70 % . ¿Cuál es la probabilidad de dar en el blanco cuando ambos tiradores disparan sobre el simultaneamente? Se considera que se ha dado en el blanco cuando por lo menos, una de las dos balas ha hecho -

impacto en el .

SOLUCION Definimos los siguientes eventos

B_i : "el tirador i acierta en el blanco, $i = 1,2$"

$P[B_1] = 0.80$, $P[B_2] = 0.70$

PRIMERA FORMA observe que los eventos B_1 y B_2 son independientes,

$$\begin{aligned} P[B_1 \cup B_2] &= P[B_1] + P[B_2] - P[B_1 B_2] \\ &= P[B_1] + P[B_2] - P[B_1] P[B_2] \text{ , Consecuencia 1} \\ &= 0.80 + 0.70 - (0.80)(0.70) \\ &= 0.94 . \end{aligned}$$

SEGUNDA FORMA

$$\begin{aligned} P[B_1 \cup B_2] &= 1 - [1 - P[B_1]][1 - P[B_2]] \quad \text{Teorema 1.9.2} \\ &= 1 - [1 - 0.80][1 - 0.70] \\ &= 0.94 . \end{aligned}$$

El concepto de eventos independientes puede extenderse a más de dos eventos .

DEFINICION 1.9.2 Tres eventos A, B y C en Ω se dice que son mutuamente independientes si y solamente si, cumplen las siguientes condiciones

(i) Ellos son independientes por pares. Es decir :

$$P[A B] = P[A] P[B] \quad ; \quad P[A C] = P[A] P[C] \text{ y}$$

$$P[B C] = P[B] P[C] .$$

(ii) $P[A B C] = P[A] P[B] P[C]$

DEFINICION 1.9.3 Los eventos $A_1, A_2, \ldots , A_n$ en Ω son independientes - si sólo si

$$P[A_i A_j] = P[A_i] P[A_j] \ , \quad i \neq j$$

$$P[A_i A_j A_k] = P[A_i] P[A_j] P[A_k] \ , \quad i \neq j \ , \ j \neq k \ , \ i \neq k$$

$$\vdots$$

$$P\left[\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right] = \prod_{i=1}^{n} P[A_i] .$$

EJEMPLO 6 Se lanza una moneda tres veces. Sean los eventos,

A_i : "se obtiene cara en el i-ésimo lanzamiento". El espacio muestral es

$$\Omega = \{CCC, CCS, CSC, SCC, CSS, SSC, SCS, SSS\}$$

Así, A_1 : "cara en el primer lanzamiento".

A_2 : "Cara en el segundo lanzamiento".

A_3 : "Cara en el tercer lanzamiento".

Es decir

$A_1 = \{CCC, CCS, CSC, CSS\}$

$A_2 = \{CCC, CCS, SCC, SCS\}$

$A_3 = \{CCC, CSC, SCC, SSC\}$

Entonces, $P[A_i] = \frac{1}{2}, \quad i = 1,2,3$

$$P[A_i \cap A_j] = \frac{1}{4}, \quad i \neq j \tag{1}$$

también $$P[A_i]P[A_j] = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}, \quad i \neq j \tag{2}$$

De (1) y (2) $$P[A_i \cap A_j] = P[A_i]\,P[A_j], \quad i \neq j \tag{3}$$

Por otro lado se tiene

$$P[A_1 \cap A_2 \cap A_3] = \frac{1}{8} \quad \text{y} \tag{4}$$

$$P[A_1]\,P[A_2]\,P[A_3] = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8} \tag{5}$$

De (4) y (5) $$P[A_1 \cap A_2 \cap A_3] = P[A_1]\,P[A_2]\,P[A_3] \tag{6}$$

De (3) y (6); los eventos A_1, A_2 y A_3 son mutuamente independientes.

EJEMPLO 7 Dado el espacio muestral Ω (generado por algún fenómeno aleatorio)

$\Omega = \{(1,1,1), (1,1,0), (1,0,1), (0,1,1), (0,0,0)\}$. Sea

$\omega = (x, y, z) \in \Omega$ tal que $P[\{\omega\}]$ está dada por la siguiente tabla

ω	(1 , 1 , 1)	(1 , 1 , 0)	(1 , 0 , 1)	(0 , 1 , 1)	(0 , 0 , 0)
$P[\{\omega\}]$	1/8	3/16	3/16	3/16	5/16

Considere los eventos asociados a las proposiciones que se indican :

A_1 : "La primera coordenada es 1".

A_2 : "La segunda coordenada es 1".

A_3 : "La tercera coordenada es 1".

(a) Calcular $P[(A_1 \cup A_2) \mid (A_2 \cap A_3)]$

(b) ¿Son A_1, A_2, A_3 eventos mutuamente independientes? justifique su respuesta.

SOLUCION (a) $A_1 = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,1)\}$

$A_2 \quad \{(1,1,1),(1,1,0),(0,1,1)\}$ y

$A_3 = \{(1,1,1),(1,0,1),(0,1,1)\}$

Luego, $A_1 \cup A_2 = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$ y

$A_2 \cap A_3 = \{(1,1,1),(0,1,1)\}$

Observe que $A_2 \cap A_3 \subset A_1 \cup A_2$, por lo tanto

$$P[(A_1 \cup A_2) \mid (A_2 \cap A_3)] = \frac{P[A_2 \cap A_3]}{P[A_2 \cap A_3]} = 1 .$$

(b) $$P[A_1] = \frac{1}{8} + \frac{3}{16} + \frac{3}{16} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2} . \qquad (1)$$

$$P[A_2] = \frac{1}{8} + \frac{3}{16} + \frac{3}{16} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2} . \qquad (2)$$

$$P[A_3] = \frac{1}{8} + \frac{3}{16} + \frac{3}{16} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2} . \qquad (3)$$

De (1) y (2), $$P[A_1]\,P[A_2] = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} . \qquad (4)$$

Por otro lado $A_1 \cap A_2 = \{(1,1,1),(1,1,0)\}$, luego

$$P[A_1 \cap A_2] = \frac{1}{8} + \frac{3}{16} = \frac{5}{6} . \qquad (5)$$

De (4) y (5) se observa que

$$P[A_1 \cap A_2] \neq P[A_1]\,P[A_2]$$

lo cual es suficiente para decir que A_1, A_2 y A_3 no son mutuamente independiente.

EJEMPLO 8 En tres establos A , B y C hay una epidemia que afecta a los cascos y a la boca del ganado, la proporción de ganados afectados : $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{3}$ respectivamente. Se escoge aleatoriamente una cabeza de ganado de cada establo .

(a) ¿Cuál es la probabilidad que exactamente uno de estos esté afectado por la epidemia?

(b) Si exactamente uno de estos está afectado, ¿cuál es la probabilidad de que venga del establo A?

SOLUCION Definimos los eventos siguientes:

A: "El ganado que proviene del establo A está afectado".

B: "El ganado que proviene del establo B está afectado".

C: "El ganado que proviene del establo C está afectado".

E: "Exactamente uno de los tres está afectado por la epidemia".

$A\bar{B}\bar{C}$: "sólo el ganado que proviene del establo A está afectado".

$\bar{A}B\bar{C}$: "sólo el ganado que proviene del establo B está afectado".

$\bar{A}\bar{B}C$: "sólo el ganado que proviene del establo C está afectado".

Luego, $E = A\bar{B}\bar{C} \cup \bar{A}B\bar{C} \cup \bar{A}\bar{B}C$.

Los eventos $A\bar{B}\bar{C}$, $\bar{A}B\bar{C}$ y $\bar{A}\bar{B}C$ son mutuamente excluyentes. También los eventos A, B y C son mutuamente independientes, entonces también son los eventos $A, \bar{B}$ y $\bar{C}$; $\bar{A}$, B y $\bar{C}$; $\bar{A}$, $\bar{B}$ y C .

(a) $P[E] = P[A\bar{B}\bar{C}] + P[\bar{A}B\bar{C}] + P[\bar{A}\bar{B}C]$

$$= P[A]\,P[\bar{B}]\,P[\bar{C}] + P[\bar{A}]\,P[B]\,P[\bar{C}] + P[\bar{A}]\,P[\bar{B}]\,P[C]$$

$$= \frac{1}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3} + \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3} + \frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3} = \frac{31}{72}$$

(b) Según el teorema de Bayes tenemos

$$P[A \mid E] = \frac{P[A \cap E]}{P[E]} = \frac{P[A \cap A\bar{B}\bar{C}]}{P[E]} = \frac{P[A\bar{B}\bar{C}]}{P[E]} = \frac{6/72}{31/72} = \frac{6}{31}$$

EJEMPLO 9 En el ejemplo 19 de 1.8. Supongamos que se seleccionan dos negocios al azar.

(a) ¿Cuál es la probabilidad que ambos negocios hayan alcanzado la meta considerada?

(b) Dado que ambos negocios alcanzaron la meta. ¿Cuál es la probabilidad de que el 80% de los negocios haya vendido doce millones de dólares?

SOLUCION Definimos los eventos siguientes:

A_1: "el primer negocio alcanzó la meta".

A_2: "el segundo negocio alcanzó la meta".

E : "ambos negocios alcanzaron la meta".

(a) Debemos calcular $P[E] = P[A_1A_2]$. Además A_1 y A_2 son eventos independientes. En el diagrama del árbol de probabilidad tenemos

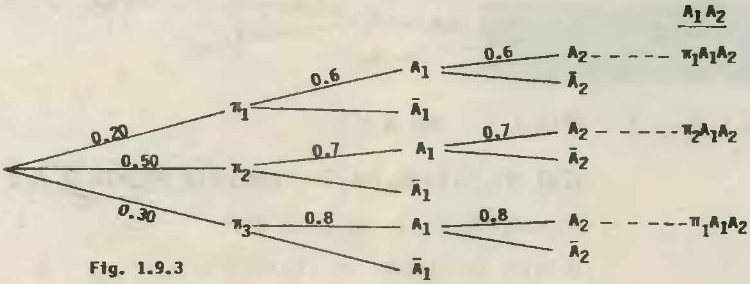


Fig. 1.9.3

$$P[E] = P[A_1A_2] = P[\pi_1A_1A_2] + P[\pi_2A_1A_2] + P[\pi_3A_1A_2]$$

$$= P[\pi_1]\ P[A_1 \mid \pi_1]\ P[A_2 \mid \pi_1A_1] + P[\pi_2]\ P[A_1 \mid \pi_2]\ P[A_2 \mid \pi_2A_1]$$

$$+ P[\pi_3]\ P[A_1 \mid \pi_3]\ P[A_2 \mid \pi_3A_1]$$

$$= (0.20)(0.60)^2 + (0.50)(0.70)^2 + (0.30)(0.80)^2$$

$$= 0.072 + 0.245 + 0.192 = 0.509$$

(b) Según el teorema de Bayes tenemos

$$P[\pi_3 \mid A_1A_2] = \frac{P[\pi_3]\ P[A_1|\pi_3]\ P[A_2|\pi_3A_1]}{P[A_1A_2]} = \frac{0.192}{0.509} = \frac{192}{509}.$$

EJEMPLO 10 Cuando una máquina que produce engranajes está trabajando apropiadamente, el 92 % de las piezas satisfacen las especificaciones. Cuando la máquina no trabaja bien sólo el 60 % de los engranajes satisfacen los requerimientos. La máquina está en buen estado el 90 % del tiempo. Se seleccionan dos engranajes y ambos resultan de calidad aceptable. ¿Cuál es la probabilidad que la máquina no haya estado trabajando bien?

SOLUCION Sean los eventos siguientes:

A_1: "el primer engranaje satisface las especificaciones".

A_2: "el segundo engranaje satisface las especificaciones".

8 : "la máquina está trabajando apropiadamente".

Debemos calcular $P[\bar{8} \mid A_1A_2]$. Además, A_1 y A_2 son eventos independientes.

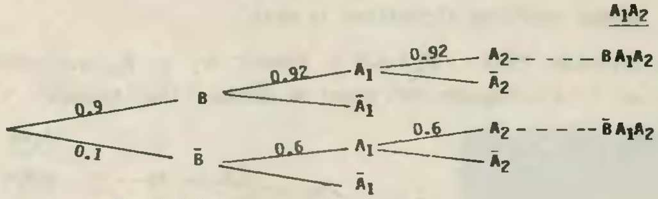


Fig. 1.9.4

Entonces, $P[A_1A_2] = P[BA_1A_2] + P[\bar{B}\ A_1A_2]$

$$= P[B]\ P[A_1|B]\ P[A_2|BA_1] + P[\bar{B}]\ P[A_1|\bar{B}]\ P[A_2|\bar{B}\ A_1]$$

$$= (0.90)(0.92)^2 + (0.10)(0.60)^2$$

$$= 0.76176 + 0.036 = 0.79776.$$

y según el teorema de Bayes tenemos

$$P[\bar{B} \mid A_1A_2] = \frac{P[\bar{B}\ A_1A_2]}{P[A_1A_2]} = \frac{(0.1)(0.60)^2}{0.79776} = \frac{3600}{79776} = 0.045 .$$

EJEMPLO 11 Un gerente está a la espera de las llamadas telefónicas de sus clientes para efectuar un negocio, la probabilidad de que lo llame cualquiera de sus clientes es de 0.2. (Las llamadas de los clientes son eventos independientes). La probabilidad de efectuar el negocio es de 0.10 si recibe la llamada de un cliente; es de 0.3 si recibe la llamada de dos clientes y de 0.7 si recibe la llamada de tres clientes. Si no recibe llamada no realiza negocio. ¿Cuántas llamadas de clientes es más probable que haya recibido el gerente sabiendo que se realizó el negocio?

SOLUCION Definimos los eventos siguientes:

N : "se realizó el negocio".

C_i: "llama i-clientes , $i = 0,1,2,3$".

Así , C_1: "llama un cliente", C_2: "llama 2 clientes". etc. y

$$P[C_1] = 0.2 \ ; \quad P[C_2] = (0.2)^2 \ ; \quad P[C_3] = (0.2)^3$$

Tenemos que calcular $P[C_i \mid N]$, $i = 1,2,3$. La mayor de estas probabilidades será la probabilidad pedida.

El diagrama del árbol de probabilidades se muestra en la fig. 1.9.5

$$P[N] = P[C_1N] + P[C_2N] + P[C_3N]$$

$$= P[C_1]\,P[N|C_1] + P[C_2]\,P[N|C_2] + P[C_3]\,P[N|C_3]$$

$$= (0.2)(0.1) + (0.04)(0.3) + (0.003)(0.7)$$

$$= 0.0376\ .$$

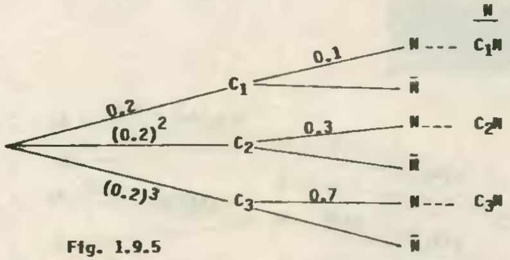


Fig. 1.9.5

Aplicando el teorema de Bayes en cada caso tenemos :

$$P[C_1|N] = \frac{P[C_1]\,P[N\,|\,C_1]}{P[N]} = \frac{(0.2)(0.1)}{0.0376} = \frac{200}{376}\ . \qquad (1)$$

$$P[C_2|N] = \frac{P[C_2]\,P[N\,|\,C_2]}{P[N]} = \frac{(0.04)(0.3)}{0.0376} = \frac{120}{376}\ . \qquad (2)$$

$$P[C_3|N] = \frac{P[C_3]\,P[N\,|\,C_3]}{P[N]} = \frac{(0.008)(0.7)}{0.0376} = \frac{56}{376}\ . \qquad (3)$$

de (1) , (2) y (3), es más probable que el gerente haya recibido la llamada de un cliente.

EJEMPLO 12 Se tiene 10 urnas : $A_1, A_2, \ldots , A_{10}$ con bolillas.

Sea B el evento: "bolilla blanca" y $P[B\,|\,A_i] = \frac{i}{10}$, $i = 1,2, \ldots 10.$

Se elige aleatoriamente una urna de la que se extraen 2 bolillas una a una, con reposición. Sabiendo que resultaron blancas, hallar la probabilidad de que la urna elegida fuese A_{10}.

SOLUCION 1 Sean los eventos B_i: "la i-ésima bola es blanca, $i = 1,2$".

2. Del diagrama del árbol de probabilidades y teniendo en cuenta que los eventos B_1 y B_2 son independientes ¿por qué?, tenemos

$$P[B_1B_2] = \sum_{i=1}^{10} P[A_i]\,P[B\,|\,A_i]^2$$

$$= \frac{1}{10}\left(\frac{1}{10}\right)^2 + \frac{1}{10}\left(\frac{2}{10}\right)^2 + \frac{1}{10}\left(\frac{3}{10}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{10}\left(\frac{10}{10}\right)^2$$

$$= \frac{1}{10}\left[\frac{1}{10^2} + \frac{4}{10^2} + \frac{9}{10^2} + \frac{16}{10^2} + \frac{25}{10^2} + \frac{36}{10^2} + \frac{49}{10^2} + \frac{64}{10^2} + \frac{81}{10^2} + 1\right]$$

$$P[B_1B_2] = \frac{1}{10}\left[\frac{385}{100}\right],$$

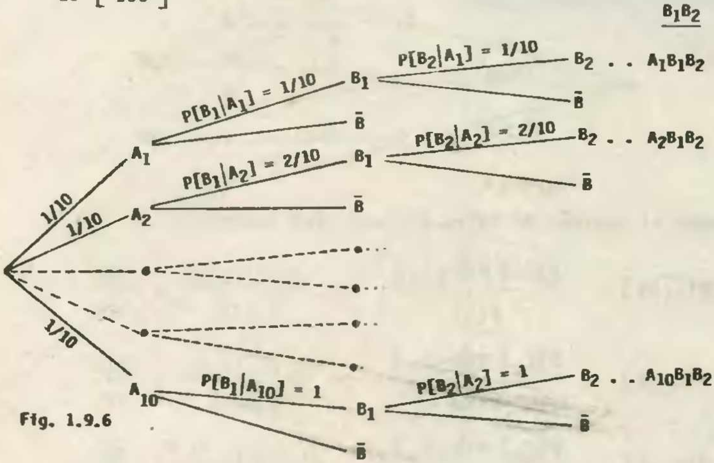


Fig. 1.9.6

y según el teorema de Bayes se tiene

$$P[A_{10} \mid B_1B_2] = \frac{P[A_{10}\, B_1B_2]}{P[B_1B_2]} = \frac{1/10 \times 1^2}{385/1000} = \frac{100}{385}.$$

EJEMPLO 13 El dado **A** tiene 4 caras rojas y 2 blancas, y el dado B tiene 2 - caras rojas y 4 blancas. Se elige uno de estos dados al azar, se lanza n veces, y en todas ellas sale roja. En estas condiciones, la probabilidad de que se haya lanzado el dado A es 32/33. ¿Cuántas veces se lanzó el dado?.

SOLUCION Del enunciado , se tiene :

Dado A, tiene $\begin{cases} \text{4 caras rojas} & (4r) \\ \text{2 caras blancas} & (2b) \end{cases}$

Dado B, tiene $\begin{cases} \text{2 caras rojas} & (2r) \\ \text{4 caras blancas} & (4b) \end{cases}$

El diagrama del árbol de probabilidades que visualiza el problema, de la fig. 1.9.7 .

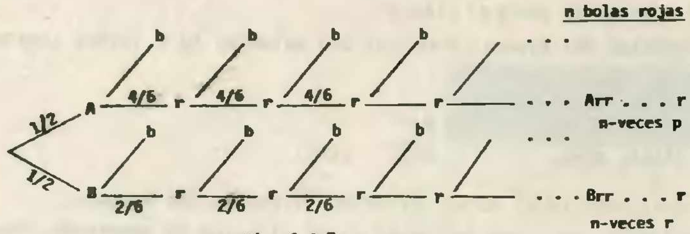


Fig. 1.9.7

Si R es el evento: "los n lanzamientos resultan rojas". Entonces,

R = Arr ... r $\cup$ Brr ... r , y

$$P[R] = P[Arr\ldots r] + P[Brr\ldots r]$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{4}{6}\right)^n + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{6}\right)^n = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n\right]$$

Luego ,

$$P[A \mid R] = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n}{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n\right]} = \frac{32}{33}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{33}{32}\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{33}{32}\left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{1}{32}\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$2^n = 32, \text{ de donde } n = 5.$$

Por lo tanto, se lanzó el dado cinco veces.

EJEMPLO 14 Un sólo misil de cierta variedad tiene una probabilidad de $\frac{1}{4}$ de derribar un bombardero a reacción, una probabilidad de $\frac{1}{4}$ de dañarlo y una probabilidad de $\frac{1}{2}$ de errar el blanco. Igualmente, dos disparos que produzcan daños derribarán el avión. Si se lanzan cuatro de tales misiles, ¿cuál es la probabilidad de derribar un bombardero?

SOLUCION Sean los eventos :

D: "derribar un bombardero".

A: "un misíl derriba el bombardero".

B: "un misíl daña el bombardero".

E: "un misíl yerra el blanco".

Los elementos del espacio muestral son palabras de 4 letras tomadas del conjunto {A, B, E}. O sea ,

$$\Omega = \{AAAA, \overbrace{AAAB}^{P_4^{3,1}}, \ldots, \overbrace{BEEE}^{P_4^{3,1}}, EEEE\}$$

Es claro que el bombardero no es derribado si ocurre los sucesos, {BEEE , EEEE} = $\bar{D}$, en todos los demás casos el avión es derribado. Por lo tanto,

$$P[D] = 1 - P[\bar{D}] = 1 - [\, P_4^{3,1}\, P[BEEE] + P[EEEE]\,]$$

$$= 1 - [\binom{4}{3}(\tfrac{1}{4})(\tfrac{1}{2})^3 + (\tfrac{1}{2})^4]$$

$$= 1 - [\,(\tfrac{1}{2})^3 + (\tfrac{1}{2})^4\,] = 1 - \frac{3}{16} = \frac{13}{16} = 0.8125 \,.$$

CONSECUENCIA 2 Si A, B y C son eventos cualesquiera en Ω independientes,- entoces el teorema 1.6.5 se escribe

$$P[A \cup B \cup C] = P[A] + P[B] + P[C] - P[A]P[B] - P[B]P[C] - P[A]P[C]$$
$$+ P[A]P[B]P[C]$$

TEOREMA 1.9.3 Si A_1 , A_2 , ... , A_n son n eventos en Ω independientes, entonces

$$P[\bigcup_{i=1}^{n} A_i] = 1 - \prod_{i=1}^{n} P[\bar{A}_i]$$

$$= 1 - [1 - P[A_1]]\,[1 - P[A_2]] \ldots [1 - P[A_n]].$$

EJEMPLO 15 Durante el primer año de uso un amplificador de radio puede requerir tres tipos de reparaciones y las probabilidades correspondientes son: 0.05 , 0.04 y 0.12. ¿Cuál es la probabilidad que un amplificador seleccionado al azar requiera reparacion durante su primer año de uso? Cada tipo de reparación es independiente de los otros dos.

SOLUCION 1 Definimos los siguientes eventos :

E_i: "el amplificador seleccionado requiere reparación del tipo

i (i = 1,2,3)".

E : "el amplificador seleccionado requiere reparación".

2. El evento E se escribe $E = \bigcup_{i=1}^{3} E_i$

PRIMERA FORMA Usando la consecuencia 2

$$P[\bigcup_{i=1}^{3} E_i] = P[E_1] + P[E_2] + P[E_3] - P[E_1]\,P[E_2] - P[E_2]\,P[E_3] - P[E_1]\,P[E_3] + P[E_1]\,P[E_2]\,P[E_3]$$

$$= 0.05 + 0.04 + 0.02 - (0.05)(0.04) - (0.04)(0.02) - (0.05)(0.02) + (0.05)(0.04)(0.02)$$

$$= 0.10624.$$

SEGUNDA FORMA Usando el teorema 3

$$P[\bigcup_{i=1}^{3} E_i] = 1 - [1 - P[E_1]]\,[1 - P[E_2]][1 - P[E_3]]$$

$$= 1 - (1 - 0.05)\,(1 - 0.04)\,(1 - 0.02)$$

$$= 0.10624\ .$$

EJEMPLO 16 Un cazador dispara 7 balas a un león enfurecido. Si la probabilidad de que una bala acierte es 0.6. ¿Cuál es la probabilidad que el cazador esté todavía vivo?

SOLUCION 1 Definimos los eventos siguientes:

V : "el cazador esta vivo".

E_i: "en el i-ésimo tiro acierte , i = 1,2, ..., 7".

2. Los eventos E_i , i = 1,2,..., 7, son mutuamente independientes, y

$$P[E_i] = 0.6, \quad P[\bar{E}_i] = 0.4 = 1 - P[E_i]\ , \quad i = 1,2,\ldots,7\ .$$

3. El cazador estará vivo, si el león ha muerto, es decir, si al menos uno de los 7 disparos ha acertado en el blanco. Entonces, el evento V se escribe así

$$V = \bigcup_{i=1}^{7} E_i\ .$$

$$P[V] = P[\bigcup_{i=1}^{7} E_i] = 1 - [1 - P[E_1]]\,[1 - P[E_2]]\ldots[1 - P[E_7]], \text{teor. } 1.9.3$$

$$= 1 - (0.4)^7 = 1 - 0.0016384 = 0.9983616.$$

El problema podría ser abordado de la siguiente manera. El cazador está - muerto si el león está vivo y esto sucede si los 7 disparos fueron errados Es decir,

$$\bar{V} = \bar{E}_1\bar{E}_2 \ldots \bar{E}_7 .$$

Luego, $P[V] = 1 - P[\bar{V}] = 1 - P[\bar{E}_1] \ldots P[\bar{E}_7]$

EJEMPLO 17 El gerente de la compañía ABC viaja en un avión de 6 motores para asistir a una reunión importante en Brasil. La probabilidad que un motor falle es 0.10 y cada uno funciona independientemente de los otros. Si se necesita al menos un motor en cada lado del avión. ¿Cuál es la probabilidad que el gerente esté ausente de la reunión a causa de un accidente de su - avión?.

SOLUCION 1 Definimos los siguientes eventos :

M_i: "El motor i-ésimo funciona perfectamente, ($i = 1,2, \ldots, 6$)".

A : "El gerente esté ausente de la reunión a causa de un accidente".

$\bar{A}$: "El gerente no esté ausente de la reunión".

$$P[M_i] = 0.9 \quad , \quad i = 1,2, \ldots, 6.$$

2. $P[A] = 1 - P[\bar{A}]$

3. Supongamos que los motores M_1, M_2 y M_3 esten a un lado y los motores M_4, M_5 y M_6 al otro lado. Además los M_i son independientes.

4. El evento $\bar{A}$ es equivalente a la ocurrencia conjunta de los eventos,

E : "al menos uno de los motores M_i funcionan perfectamente, $i = 1,2,3$"

F : "al menos uno de los motores M_i funcionan perfectamente, $i = 4,5,6$".

o sea $E = \bigcup_{i=1}^{3} M_i$ y $F = \bigcup_{i=4}^{6} M_i$. Por lo tanto $\bar{A} = EF$.

5. Los eventos E y F son independientes. Entonces

$$P[\bar{A}] = P[E]\,P[F] = P[\bigcup_{i=1}^{3} M_i]\; P[\bigcup_{i=4}^{6} M_i]$$

$$= \{1 - [1 - P[M_1]][1 - P[M_2]][1 - P[M_3]]\}\{1 - [1 - P[M_3]][1 - P[M_5]]$$
$$[1 - P[M_6]]\}$$

$$= [1 - (0.1)^3]^2 = [1 - 0.001]^2 = (0.999)^2 = 0.998001.$$

Reemplazando en (2) este resultado obtenemos

$$P[A] = 1 - 0.998001 = 0.001999 .$$

EJEMPLO 18 La probabilidad que falle un motor en un avión es 0.10. ¿Con cuántos motores debe estar equipado un avión para tener una seguridad de 0.999 de que el avión vuele? (supóngase que es suficiente que un motor funcione para que el avión se mantenga en vuelo).

SOLUCION 1 Definimos los siguientes eventos:

M_i: "el motor i funciona perfectamente, ($i = 1,2, \ldots , n$)"

A : " el avión se mantiene en vuelo"

2. Los eventos M_i son independientes, $i = 1,2, \ldots, n$; y $P[M_i] = 0.9$, $i = 1,2, \ldots , n$

3. El avión se mantiene en vuelo si al menos uno de los motores funciona. Es decir,

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} M_i \quad . \text{ Luego}$$

$$0.999 = P[A] = P[\bigcup_{i=1}^{n} M_i] = 1 - [1 - P[M_1]][1 - P[M_2]] \ldots [1 - P[M_n]] \text{ teor. 1.9.3}$$

$$= 1 - (0.1)^n$$

de donde $(0.1)^n = 0.001$

4. Tomando logaritmo a ambos miembros de la expresión anterior

$$n \log (0.1) = \log (0.001)$$

$$n [- \log 10] = - \log 10^3$$

$$- n = - 3 \quad \text{osea} \quad n = 3.$$

El avión debe estar equipado con 3 motores.

EJEMPLO 19 El sistema de números binarios tiene un papel muy importante en la operación de los computadoras electrónicas. Este sistema implica el uso de dos dígitos únicamente, 0 y 1. Si la probabilidad que aparezca un dígito incorrecto es p, y los errores en los dígitos se presentan en forma independiente uno de otros, ¿cuál es la probabilidad de que un número de n-dígitos sea incorrecto?

SOLUCION 1 Definimos los siguientes eventos :

O_i: "el dígito i-aparesca incorrecto, ($i = 1,2,\ldots, n$)"

D : "el número de n-dígitos es incorrecto"

2. Los eventos D_i son independientes $i = 1,2, \ldots, n$; y $P[D_i] = p$

3. El número de n-dígitos es incorrecto si, al menos uno de los dígitos aparece incorrecto; es decir $D = \bigcup_{i=1}^{n} D_i$. Luego ,

$$P[D] = P[\bigcup_{i=1}^{n} D_i] = 1 - [1 - P[D_1]][1 - P[D_2]] \ldots [1 - P[D_n]]$$

$$= 1 - (1 - p)^n .$$

EJEMPLO 20 Un generador tiene 6 componentes disipadores de corriente eléctrica. La probabilidad que ocurra una avería que desconecte el primer disipador es 0.6; para el segundo, 0.2; y 0.3 para cada uno de los cuatro restantes. Determinar la probabilidad que el generador esté completamente desconectado, si:

(a) Todos los disipadores están conectados en serie.

(b) Los disipadores están conectados en serie-paralelo, como se observa en la fig. 1.9.8

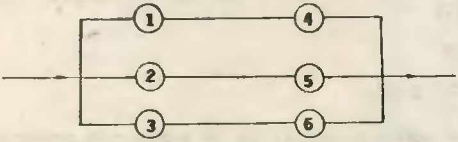


Fig. 1.9.8

SOLUCION Definimos los siguientes eventos :

D_i: "el disipador i ($i = 1,2,3,4,5,6$) está desconectado"

$\bar{D}_i$: "el disipador i ($i = 1,2,3,4,5,6$) está conectado:

D : "el generador está desconectado"

$\bar{D}$: "el generador está conectado" .

Sus respectivas probabilidades son :

$$P[D_1] = 0.6 \ , \quad P[D_2] = 0.2 \ , \quad P[D_i] = 0.3 \ , \ i = 3,4,5,6$$

(a) $P[D] = 1 - P[\bar{D}]$

$P[\bar{D}] = P[\bar{D}_1\bar{D}_2\bar{D}_3\bar{D}_4\bar{D}_5\bar{D}_6]$

$= P[\bar{D}_1]\, P[\bar{D}_2]\, P[\bar{D}_3]\, P[\bar{D}_4]\, P[\bar{D}_5]\, P[\bar{D}_6]$ (suponiendo que los -

$\bar{D}_i$ son independientes, $i = 1,2,3,4,5,6$)

$= (0.4)(0.8)(0.7)^4$

$\simeq 0.077.$

Luego, $P[D] = 1 - 0.077 = 0.923.$

(b) El generador está desconectado, si cada uno de las conecciones en paralelo están desconectados; es decir, si :

F_i: "la conección i en paralelo ($i = 1,2,3$) está desconectado".

$\bar{F}_i$: "la conección i en paralelo ($i = 1,2,3$) esta conectado"; entonces,

$D = F_1F_2F_3$. Por lo tanto

$$P[D] = P[F_1F_2F_3]$$

$$= P[F_1]\,P[F_2]\,P[F_3] \quad \text{(Los } F_i \text{ independientes)}$$

pero, $P[F_1] = 1 - P[\bar{F}_1]$, donde $\bar{F}_1 = \bar{D}_1\bar{D}_2$ entonces,

$$P[F_1] = 1 - P[\bar{D}_1]\,P[\bar{D}_2]$$

$$= 1 - (0.3)(0.8) \qquad (1)$$

$P[F_2] = 1 - P[\bar{F}_2]$, donde $\bar{F}_2 = \bar{D}_3\bar{D}_4$;

entonces, $P[F_2] = 1 - P[\bar{D}_3]\,P[\bar{D}_4]$

$$= 1 - (0.7)^2 \qquad (2)$$

$P[F_3] = 1 - P[\bar{F}_3]$, donde $\bar{F}_3 = \bar{D}_5\bar{D}_6$;

entonces, $P[F_3] = 1 - P[\bar{D}_5]\,P[\bar{D}_6]$

$$= 1 - (0.7)^2 \qquad (3)$$

De (1) , (2) y (3) obtenemos,

$$P[D] = [1 - (0.3)(0.8)] \times [1 - (0.7)^2]^2$$

$$\simeq 0.1977.$$

EJEMPLO 21 En la figura 1.9.9, suponga que la probabilidad que cada relé esté cerrado es p y cada relé se abre o se cierra independientemente de cualquier otro. Encontrar la probabilidad que la corriente pase de R a S.

SOLUCION 1 Sean los eventos :

E : "la corriente pasa por I"

F : "la corriente pasa por II".

G : "la corriente pasa por III".

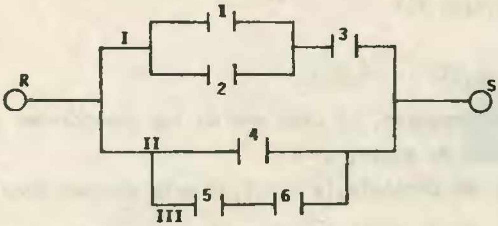


Fig. 1.9.9

2. Si E_1, E_2, E_3 y G_5, G_6 indican que la corriente pasa por 1,2,3,5 y 6 respectivamente, se tiene que

$$E = (E_1 \cup E_2) \cap E_3 \qquad y$$

$$G = G_5 \cap G_6 .$$

3. Cálculo de las probabilidades de los eventos E , G y F respectivamente

$$P[E] = P[E_1 \cup E_2]P[E_3] = \left[P[E_1] + P[E_2] - P[E_1E_2]\right]P[E_3]$$

$$= [P[E_1] + P[E_2] - P[E_1]P[E_2]]P[E_3]$$

$$= (p + p - p^2)p = 2p^2 - p^3 .$$

$$P[G] = P[G_5 \cap G_6] = P[G_5]P[G_6] = p^2 .$$

$$P[F] = p .$$

4. La corriente pasará de R a S si pasa por I, II ó III ; es decir, si ocurre E ó F ó G ; entonces

$$P[E \cup F \cup G] = P[E] + P[F] + P[G] - P[E \cap F] - P[E \cap G] - P[F \cap G] +$$
$$+ P[E \cap F \cap G]$$
$$= 2p^2 - p^3 + p + p^2 - (2p^2 - p^3)p - (2p^2 - p^3)p^2 - pp^2$$
$$+ (2p^2 - p^3)pp^2$$
$$= p + 3p^2 - 4p^3 - p^4 + 3p^5 - p^6 .$$

CONFIABILIDAD La confiabilidad de un sistema " C_s " se define como la probabilidad que el sistema funciona satisfactoriamente para un intervalo de tiempo especificado en las mismas condiciones.

(a) Para un sistema en serie, tal como se muestra en la fig. 1.9.10. consideremos los siguientes eventos

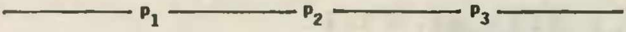


Fig. 1.9.10. Sistema en serie

E : "El sistema funciona satisfactoriamente".

E_i: "la componente p_i del sistema funciona satisfactoriamente, i = 1,2,3".

Entonces el evento E es la intersección de los eventos E_1, E_2 y E_3. - Osea la confiabilidad del sistema en serie de la fig. 1.9.10 es

$$C_s = P[E] = P[E_1 \cap E_2 \cap E_3],$$

Asumimos que el funcionamiento satisfactorio o insatisfactorio de cada componente es independiente del funcionamiento de las otras componentes es decir,

$$C_s = P[E] = P[E_1]\,P[E_2]\,P[E_3].$$

Si C_i representa la confiabilidad de la respectiva componente p_i, - i = 1,2,3. Entonces

$$C_s = P[E_1]\,P[E_2]\,P[E_3] = C_1C_2C_3 .$$

El lector puede obtener la confiabilidad de un sistema con n componentes

(b) En un sistema en paralelo, tal como se muestra en la fig. 1.9.11, la confiabilidad C_s puede calcularse de dos maneras.

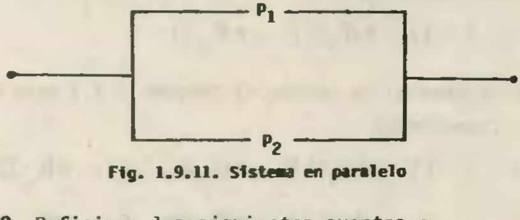


Fig. 1.9.11. Sistema en paralelo

PRIMER METODO Definimos los siguientes eventos :

E : "el sistema funciona satisfactoriamente".

E_i: "la componente p_i del sistema funciona satisfactoriamente, i = 1,2"

El sistema funciona correctamente, si al menos una de las componentes funciona correctamente, entonces el evento E, es la unión de los eventos E_1 y E_2 . Es decir, la confiabilidad C_s del sistema en paralelo de la fig. 1.10.11 es

$$C_s = P[E] = P[E_1 \cup E_2]$$
$$= P[E_1] + P[E_2] - P[E_1 \cap E_2] \text{ , por teorema 1.6.4}$$

Asumiendo que el funcionamiento correcto o incorrecto de cada componente es independiente del funcionamiento del otro, tenemos

$$C_s = P[E_1] + P[E_2] - P[E_1]P[E_2] .$$

SEGUNDO METODO Un segundo método para calcular C_s es, usando el teorema 1.9.2

$$C_s = P[E_1 \cup E_2] = 1 - [1 - P[E_1]][1 - P[E_2]] = 1 - P[\bar{E}_1]P[\bar{E}_2]$$

también se llega a la mismo considerando:

1. Los siguientes eventos :

   F : "El sistema no funciona satisfactoriamente" ;

   F_i: "la componente p_i del sistema no funciona satisfactoriamente, $i = 1,2$"

   $\bar{F}$: "El sistema funciona satisfactoriamente"

2. $C_s = P[\bar{F}] = 1 - P[F]$ por teorema 1.6.2

3. El sistema falla, si los dos componentes fallan. Es decir $F = F_1F_2$. Esto es

$$P[F] = P[F_1]P[F_2]$$
$$= [1 - P[\bar{F}_1]][1 - P[\bar{F}_2]] \quad \text{por teorema 1.6.2}$$

4. Sustituyendo el resultado anterior en el paso (2) se obtiene

$$C_s = 1 - [1 - P[\bar{F}_1]][1 - P[\bar{F}_2]]$$

El segundo método se generaliza usando el teorema 1.9.3 para un sistema en paralelo de n componentes

$$C_s = 1 - [1 - P[E_1]][1 - P[E_2]]\ldots[1 - P[E_n]].$$
$$= 1 - [1 - P[\bar{F}_1]][1 - P[\bar{F}_2]]\ldots[1 - P[\bar{F}_n]]$$

EJEMPLO 22 Una máquina presenta un sistema de dos componentes A Y B dispuestos en serie, las confiabilidades de que las componentes trabajan correctamente son 0.70 y 0.80, respectivamente. Suponga que A y B funcionan independientemente, y ambas componentes del sistema deben funcionar correctamente para que la máquina lo haga. Para incrementar la confiabilidad del sistema se emplea una componente similar, en paralelo, a fin de formar el sistema S que se observa en la fig. 1.9.12. La máquina funcionará siempre que, por lo menos uno de las componentes (sub-sistemas) trabajen correctamente, Calcular la confiabilidad del sistema S.

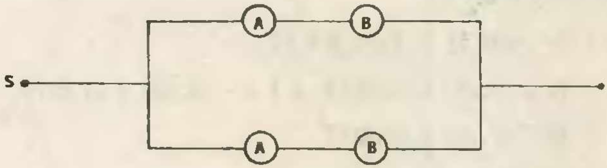


Fig. 1.9.12

SOLUCION PRIMER METODO Definimos los siguientes eventos:

E_1: "la componente A funciona correctamente",
E_2: "la componente B funciona correctamente",
E : "el sistema S funciona correctamente",
C_S: "confiabilidad del sistema".

El evento E se escribe, $E = E_1E_2 \cup E_1E_2$: entonces,

$$
\begin{aligned}
C_S = P[E] &= P[E_1E_2 \cup E_1E_2] \\
&= P[E_1E_2] + P[E_1E_2] - P[E_1E_2E_1E_2] \quad \text{, teorema 1.6.4} \\
&= 2P[E_1E_2] - [P[E_1E_2]]^2 \\
&= P[E_1E_2][2 - P[E_1E_2]] \\
&= P[E_1]\, P[E_2][2 - P[E_1]\, P[E_2]] \quad \text{, } E_1 \text{ y } E_2 \text{ independientes} \\
&= (0.70)(0.80)\left[2 - (0.70)(0.80)\right] \\
&= 0.8064 .
\end{aligned}
$$

SEGUNDO METODO Definimos los siguientes eventos

F : "el sistema S no funciona correctamente" , entonces,
$\bar{F}$: "el sistema S funciona correctamente" ; luego,

$$C_S = P[\bar{F}] = 1 - P[F] .$$

El sistema S falla, si las dos componentes en paralelo fallan; es decir, si

F_1: "falla la primera componente AB en serie" ,

F_2: "falla la segunda componente AB en serie" ;

entonces, $F = F_1F_2$. Luego

$$\begin{aligned} P[F] &= P[F_1]\,P[F_2] \\ &= [1 - P[\bar{F}_1]] \times [1 - P[\bar{F}_2]] \\ &= [1 - (0.70) \times (0.80)] \times [1 - (0.70) \times (0.80)] \\ &= [1 - (0.70) \times (0.80)]^2 \\ &= 0.1936 . \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$C_S = P[\bar{F}] = 1 - 0.1936 = 0.8064 .$$

1.9.1 EXPERIMENTOS INDEPENDIENTES

Para terminar esta sección introduciremos el concepto de experimentos independientes, para hacer más plausible la aceptación de la solución intuitiva que se ha dado a algunos ejemplos anteriores de esta sección.

DEFINICION 1.9.4 Sea ε un experimento que consiste de una secuencia de n ensayos, $\varepsilon_1 , \varepsilon_2, \ldots , \varepsilon_n$. *Los ensayos son independientes* si el resultado de cualquier ensayo no afecta la probabilidad de los resultados de los otros ensayos . Además si los A_i , $i = 1 , \ldots, n$ son eventos cualesquiera de Ω_i , $i = 1,2, \ldots , n$, respectivamente, donde los Ω_i son los espacios muestrales asociados a los experimentos ε_i respectivos. La probabilidad de la ocurrencia de los n eventos es

$$P[A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n] = P[A_1]\,P[A_2] \ldots P[A_n]$$

Los ensayos que no son independientes se dice que son dependientes.

Consideremos el experimento de lanzar una moneda y un dado. Sea A el evento: "obtener una cara y un seis".

$$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \text{ , donde : } \Omega_1 = \{C , S\}, \quad \Omega_2 = \{1,2,3,4,5,6\}$$

$$A = A_1 \cap A_2 = A_1A_2, \text{ donde } A_1 = \{C\}, A_2 = \{6\}$$

Entonces,

$$P[A] = P[A_1]\,P[A_2] = \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{12}.$$

EJEMPLO 23 Se lanza una moneda hasta que aparezca la primera cara. ¿Cuál es la probabilidad que la primera cara aparezca

(a) en el segundo lanzamiento?

(b) en el tercer lanzamiento?

SOLUCION **PRIMERA FORMA** El espacio muestral es

$$\Omega = \{C, SC, SSC, \ldots\}$$

(a) $A = \{SC\}, \quad A_1 = \{S\}, \quad A_2 = \{C\},$

$$P[A] = P[A_1]\,P[A_2] = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

(b) $P[SSC] = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

pues el resultado del segundo lanzamiento no es afectado por lo que ocurrió en el primer lanzamiento y el resultado del tercer lanzamiento no es afectado por lo que ocurrió en el segundo.

SEGUNDA FORMA

(a) El evento $A = \{SC\}$ se considera como un resultado del lanzamiento de dos monedas y $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 = \{CC, CS, SC, SS\}$.

Luego, $P[A] = \frac{1}{4}$.

(b) También podemos considerar el evento SSC como un resultado de lanzamiento de 3 monedas. Entonces el espacio muestral es

$$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \Omega_3 = \{CCC, CCS, CSC, SCC, CSS, SCS, SSC, SSS\}.$$

Luego, $P[SSC] = \frac{1}{8}$.

EJEMPLO 24 Un dado sesgado es tal que la probabilidad de obtener cada número par es 2/9 y la probabilidad de obtener cada número impar es 1/9. Suponga que el dado se lanza 3 veces. Si Ud. gana cada vez que aparece un 2 ó un 4. ¿Cuál es la probabilidad que Ud. gane

(a) Todas las veces?.

(b) exactamente 2 veces?.

SOLUCION Sean los siguientes eventos:

A: "ganar todas las veces".

B: "ganar exactamente 2 veces".

C: "aparece un 2 ó un 4".

F: "aparece un número diferente de 2 y 4".

y $P[C] = P[\{2,4\}] = P[\{2\}] + P[\{4\}] = \frac{2}{9} + \frac{2}{9} = \frac{4}{9}$

(a) El evento $A = CCC$, por lo tanto

$$P[A] = P[C]\,P[C]\,P[C] = \left(\frac{4}{9}\right)^3$$, ya que son independientes.

(b) El evento, $B = CCF \cup CFC \cup FCC$, por lo tanto

$$P[B] = 3\left(\frac{4}{9}\right)^2 \left(\frac{5}{9}\right)$$

pues ,

$$P[F] = P[\{1,3,5,6\}] = P[\{1\}] + P[\{3\}] + P[\{5\}] + P[\{6\}] = \frac{5}{9}.$$

PROBLEMAS 1.9

1. Si $P[A] = \frac{1}{6}$, $P[AB] = \frac{1}{18}$, $P[B] = \frac{1}{3}$

   ¿Son A y B independientes?.

2. Una urna contiene 4 bolas blancas y 5 negras. Se extraen sucesivamente y sin reposición dos bolas, sean los eventos.

   A: "la primera bola extraída es negra".

   B: "la segunda bola extraída es blanca".

   ¿Son los eventos A y B independientes?

3. De una baraja ordinaria de 52 cartas se extraen sucesivamente dos cartas, - restituyendo la primera antes de extraer la segunda. Sea A el evento (suceso) "la primera carta es una pica", B el evento "la segunda carta es - as o rey" y C el evento "la primera carta es as o rey. De los tres pares de eventos: A y B; A y C; B y C, determine cuales (si los hay) son - independientes.

4. Si A y B son independientes, $P[A] = 1/3$ y $P[B] = 1/4$.
   Hallar, $P[A \cup B]$.

5. Si A y B son independientes, y $P[A] = P[B] = 1/2$. Calcular $P[A\bar{B} \cup \bar{A}B]$.

6. Dado $P[A] = 0.5$ y $P[A \cup B] = 0.7$. Hallar $P[B]$, si A y B son independientes.

7. Si A y B son independientes, y $P[A] = P[B | A] = 1/2$. Hallar $P[A \cup B]$.

8. Si A y B son eventos independientes con $P[A] = 0.2$, $P[B] = 0.3$. ¿Cuál es la probabilidad que
(a) al menos uno ocurra ; (b) exactamente uno ocurra ,
(c) ninguno ocurra ; (d) ambos ocurran?

9. Sean A y B dos eventos independientes, se sabe que la probabilidad de que ocurra al menos uno de dichos eventos es 0.6 y que la probabilidad de que ocurra A es 0.4. Calcular la probabilidad que ocurra B.

10. Si un conejo es inyectado con una droga A la probabilidad que muera dentro de las 24 horas siguientes es de 0.63 y si es inyectado con una droga B dicha probabilidad es de 0.45. ¿Cuál es la probabilidad que un conejo sobreviva más de 24 horas después de haber sido inyectado simultáneamente con las drogas A y B, si se supone que la acción de las mismas son independientes?

11. Cierto insecticida mata en la primera aplicación al 90% de los mosquitos pero desarrolla cierta resistencia entre los que sobreviven, de manera que el porcentaje que muere en una aplicación posterior del insecticida es la tercera parte del porcentaje que muere en la aplicación inmediatamente anterior. ¿Cuál es la probabilidad que un mosquito sobreviva:

(a) tres aplicaciones de insecticida?
(b) tres aplicaciones de insecticida, sabiendo que sobrevivió las dos primeras? .

12. Las probabilidades que tres tiradores den en el blanco son, respectivamente, iguales a 4/5, 3/4 y 2/3. Si en un disparo simultáneo por los tres tiradores, exactamente dos dan en el blanco; hallar la probabilidad de que el tercer tirador haya fallado.

13. Obtener la probabilidad que en 6 lanzamientos independientes de un da-

do correcto, aparezca el número 3 almenos una vez.

14. La probabilidad que un misil disparado contra una blanco no sea interceptado es 2/3. Dado que el misil no ha sido interceptado su probabilidad de dar en el blanco es 3/4. Si se dispara 4 misiles, independientemente, ¿cuál es la probabilidad que
(a) todos den en el blanco?
(b) al menos uno de en el blanco?
¿Cuántos misiles deben dispararse para que,
(c) al menos uno, no sea interceptado con probabilidad 0.95?

15. Cuatro hombres lanzan cada uno un dado. ¿Cuál es la probabilidad que:
(a) cada uno obtenga un 4 ;
(b) cada uno obtenga un número par de puntos ;
(c) todos obtengan el mismo número ?

16. Cada uno de n individuos lanzan una moneda al aire. Exprese en términos de n, la probabilidad que:
(a) ninguno obtenga cara;
(b) todos obtengan cara ;
(c) al menos uno obtenga una cara.

17. Ocho boletos numeradas, 111, 121, 122, 122, 211, 212, 212,221 estan colocados en una bolsa, revueltas. Se va a escoger uno al azar. Se definen los siguientes eventos:
A: "el primer dígito del boleto escogido es 1"
B: "el segundo dígito en el boleto escogido es 1"
C: "el tercer dígito del boleto escogido es 1"
(a) ¿Son los eventos A, B y C mutuamente independientes?
(b) Calcular $P[A \cup B \mid B \cap C]$

18. Suponga que un misil tiene la probabilidad 1/2 de destruir su blanco y la probabilidad de 1/2 de errarlo. Suponiendo que los lanzamientos de los misiles forman pruebas independientes, determínese el número de misiles que deben lanzarse para conseguir que la probabilidad de destruir el blanco sea por lo menos 0.99.

19. ¿Cuántas personas deben escoger una carta, cada una de diferente baraja para tener una probabilidad mínima de 0.9 de que por lo menos se escoja un as?

20. Se dispara cada uno de los fusiles A, B y C, la probabilidad de dar en el blanco es 0.15, 0.25 y 0.35, respectivamente. Calcular la probabilidad.
(a) De que al menos uno de los tres dé en el blanco
(b) de que acierte uno solo.

21. En un club el 60 % de las personas fuman; 10 personas son seleccionadas sucesivamente al azar con reemplazamiento; ¿Cuál es la probabilidad del evento: "de las 10 personas seleccionadas 3 fuman"? ¿Y la del evento: "de las 10 personas seleccionadas 3 fuman", ¿y la del evento: "de las 10 personas seleccionadas por lo menos 3 fuman"?.

22. Un teatro tiene sólo un proyector. La bombilla del proyector funciona; la probabilidad que se queme antes de terminar la película es 0.40. De las 20 lámparas de reserva, una tiene un defecto no-visible. De las restantes lámparas de reserva, la probabilidad que se quemen es 0.20 antes de terminar la película.
(a) ¿Cuál es la probabilidad que se queme la lámpara en funcionamiento y seleccionado al azar un extra, se escoja la lámpara defectuosa?
(b) ¿Cuál es la probabilidad que se queme la lámpara es funcionamiento y seleccionada una perfecta para reemplazarla, se queme a su vez, antes de terminar la película?.

23. La probabilidad de que un hombre viva 10 años es 1/4, y la probabilidad de que su esposa viva 10 años es 1/3. Suponiendo que estos eventos son independientes, hallar la probabilidad que:
(a) Por lo menos uno de ellos esté vivo entre los 10 años,
(b) ninguno esté vivo entre los 10 años
(c) solamente la esposa esté viva entre los 10 años
(d) solamente el esposo esté vivo entre los 10 años

24. Una persona que tiene 35 años de edad, padece de cierta enfermedad; consultados los médicos las opiniones están en la relación 9 a 7 en contra de que la persona viva hasta los 40 años. Otra persona tiene 45 años y las opiniones están en la relación 3 a 2 en contra de que viva hasta los 50 años. Hallar la probabilidad que cuando menos una de estas personas viva 5 años más.

25. En una urna hay 15 bolas, de las cuales 5 son blancas. Se extraen al azar cinco bolas con reemplazamiento. ¿Cuál es la probabilidad que se selec

cionen x bolas blancas con $x = 0,1,2,3,4,5$.

26. Una pieza de equipo electrónico tiene 3 partes esenciales. Anteriormente, la parte A ha fallado el 20% del tiempo; la parte B, 40% del tiempo y - parte C, 30% del tiempo. La parte A opera independientemente de las partes B y C. Las partes B y C están interconectadas de tal manera que la falla de cualquiera afecta a la otra, por eso, cuando falla la parte C dos de - cada 3 veces puede fallar también la parte B.
Suponiendo que por lo menos dos de las 3 partes deben operar para permitir el funcionamiento del equipo. ¿Cuál es la probabilidad que el equipo - funcione?.

27. Un sistema consiste de 4 componentes: A, B, C_1, C_2. La probabilidad de falla es 0.01 para A, 0.02 para B, 0.10 para C_1 y 0.10 para C_2. Si para el funcionamiento del sistema son necesarios los componentes A y B y al menos uno de los C, ¿Cuál es la probabilidad de que el sistema funcione?

28. La probabilidad de que un cazador dé en el blanco con un tiro es 0.40.
   (a) ¿Cuál es la probabilidad que falle 4 tiros consecutivos?
   (b) ¿Cuál es la probabilidad que dé en el blanco por lo menos una vez en 4 tiros consecutivos?
   (c) ¿Cuántos tiros debe disparar para tener una seguridad aproximadamente de 0.96 de dar en el blanco por lo menos una vez?

29. Considere tres urnas; la urna I contiene una bola blanca y dos negras, la urna II contiene tres bolas blancas y dos negras y la urna III contiene dos bolas blancas y tres negras. Se extrae una bola de cada una. ¿Cuál es la probabilidad de que entre las bolas extraídas haya
   (*i*) una blanca y dos negras; (*ii*) por lo menos dos negras;
   (*iii*) más negras que blancas.?

30. Una urna contiene 12 bolas, de las cuales 5 son blancas y 7 negras se sacan dos bolas y se vuelven a la urna. Se saca otra vez dos bolas y se - vuelven a la urna, y así continúa hasta hacer 5 etracciones.
   (a) ¿Cuál es la probabilidad de sacar dos bolas negras en cada uno de los tres primeros experimentos y una pareja de una blanca y una negra en cada una de las otras dos extracciones.?
   (b) ¿Cuál es la probabilidad de sacar dos bolas negras tres veces y las - otras dos veces, dos blancas?

31. La producción diaria de una máquina que produce una pieza muy complicada de las siguientes probabilidades para el número de piezas producidas:

$$P[\{1\}] = 0.10 \ , \qquad P[\{2\}] = 0.30 \ , \qquad P[\{3\}] = 0.60$$

Además, la probabilidad de producir piezas defectuosas es 0.03. Las defectuosas aparecen independientemente. Hallar la probabilidad de no producir piezas defectuosas en un día.

32. Se lanza 6 dados. ¿Cuál es la probabilidad que aparezcan cada uno de los números posibles?

33. Se lanzan 7 dados. ¿Cuál es la probabilidad que aparezcan cada uno de los números posibles?

34. Si una máquina que produce engranajes está trabajando correctamente, el 92 % de las piezas satisfacen las especificaciones. Si la máquina no trabaja bien, sólo el 60 % de los engranajes producidos satisfacen las especificaciones. La máquina trabaja correctamente el 90 % del tiempo. Se seleccionan cuatro engranajes y todos satisfacen los requerimientos. ¿Cuál es la probabilidad que la máquina no haya estado trabajando bien?

35. Un fabricante está considerando comprar un lote grande de piezas de un proveedor. El fabricante estima la proporción de piezas defectuosas en el lote en la forma siguiente:

Proporción de piezas defectuosas (π)	Probabilidad de la proporción $P(\pi)$
$\pi_1 = 0.10$	$P(\pi_1) = 0.20$
$\pi_2 = 0.15$	$P(\pi_2) = 0.30$
$\pi_3 = 0.25$	$P(\pi_3) = 0.50$

Suponga que se elige 3 piezas al azar del lote:

(a) ¿Cuál es la probabilidad que los tres sean de calidad aceptable?

(b) Si las tres piezas resultaron de calidad aceptable. ¿Cuál es la probabilidad de que el lote contenga 10 % de piezas defectuosas?

36. En el ejemplo 24 de 1.9. Suponga que el dado se lanza 5 veces. ¿Cuál es la probabilidad de ganar por lo menos 4 veces?

37. De tres sucesos A_1, A_2 y A_3 se sabe que son mutuamente independientes, -

que la probabilidad del primero es el doble de la del segundo, que la probabilidad de la ocurrencia simultánea de los 2 primeros sucesos es 0.02 y que la probabilidad de que ocurra al menos uno de ellos es 0.64. Calcular la probabilidad de cada uno de los eventos.

38. Un aparato tiene 4 válvulas que funcionan independientemente, sus probabilidades de falla son: 0.1, 0.2, 0.3, 0.4 respectivamente, para la primera, segunda, tercera y cuarta válvula. Dos de estas válvulas han fallado. Hallar la probabilidad de que hayan fallado la primera y segunda.

39. Un circuito eléctrico consta de 4 interruptores en serie. Suponga que el funcionamiento de los interruptores son estadisticamente independientes. Si la probabilidad de falla (esto es, que quede abierto) de cada interruptor es de 0.2. ¿Cuál es la probabilidad de falla del circuito?.

40. Resuelva el problema anterior cuando el circuito consta de 4 interruptores en paralelo.

41. Las probabilidades de que tres tubos se quemen son respectivamente, 0.1, 0.2 y 0.3. Las probabilidades de que un proyector se pare; si uno, dos o tres tubos se queman son: 0.25, 0.6 y 0.9, respectivamente. Hallar la probabilidad de que el proyector se pare.

42. La compañía constructora "La amiga" debe tener cuando menos dos obras dentro de una semana para mantener el empleo de su personal básico. La compañía ha sometido proyectos para cada una de las licitaciones de tres obras de tipo A y dos obras de tipo B. Las firmas ganadoras serán comunicadas - dentro de la semana crucial. Suponga que la compañía tiene probabilidad - 1/2 de que se le otorgue una obra de tipo A y probabilidad 3/4 de que se le otorgue una obra de tipo B. Si las decisiones serán hechas independientemente, ¿Cuál es la probabilidad de que dicha firma esté en condiciones de continuar el empleo de su personal básico?

43. Dos de tres elementos de una calculadora, que funcionan independientemente, fallaron. Hallar la probabilidad que hayan fallado los elementos - primero y segundo; si las probabilidades de falla de los elementos primero, segundo y tercero son respectivamente iguales a $p_1 = 0.2$; $p_2 = 0.4$; $p_3 = 0.3$.

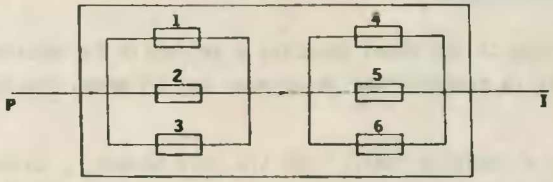
44. Las probabilidades de que tres tiradores A, B y C den en el blanco son - respectivamente, 1/3, 1/4, y 1/5. Cada uno dispara una vez al blanco, se

pide:

(*i*) ¿Cuál es la probabilidad que hayan sido B y C?, si exactamente dos dan en el blanco.

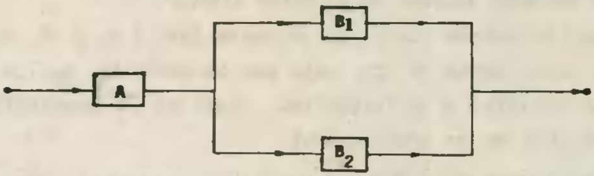
(*ii*) ¿Cuál es la probabilidad que hayan sido B ó C?, si se ha dado en el blanco.

45. Se tiene el siguiente circuito del diagrama.



Halle la probabilidad que el circuito falle (no pase la corriente de P a I); siendo 0.3, la probabiliadd de falla de cualquiera de los 6 componentes del circuito.

46. Para que funcione adecuadamente, un equipo electrónico debe tener las dos componentes conectadas que aparecen en el diagrama en correcto funcionamiento. El diagrama muestra que A debe funcionar y lo mismo alguno de los dos B. Suponga que las componentes B funcionan independientemente de A e independientemente una de otra, y que la confiabilidad de A es 0.9 y la de B_1 y B_2 es 0.8. Calcular la confiabilidad del equipo.



47. Una componente juega un papel esencial en el funcionamiento de un determinado equipo. Si en lugar de instalar un componente, se utiliza un sistema identico con varios en paralelo, aumenta la confiabilidad del equipo ya que seguirá funcionando siempre y cuando uno de los componentes esté funcionando. El correcto funcionamiento de una nave espacial depende de un mecanismo cuya confiabilidad es de 95 % . ¿Cuántos de estos mecanismos deben incorporarse al sistema para que la seguridad que el mecanismo funcione en forma satisfactoria sea (a) 99 % ; (b) 99.9 % ; (c) 99.99 % ?

48. Las series mundiales de béisbol termina cuando uno de los equipos gana su cuarto juego. Suponga que los dos equipos tienen igual habilidad. ¿Cuál es la probabilidad que la serie termina al final del cuarto juego? ¿Al quinto juego? ¿Al sexto juego?

49. Se lanzan dos dados simultaneamente y se repite tres veces el experimento ¿Cuál es la probabilidad que salgan por lo menos una vez la suma 7 y la suma 9?.

50. Se lanzan simultaneamente dos dados honestos y se repite la experiencia tres veces. ¿Cuál es la probabilidad de obtener por lo menos una vez la suma 7 y 11?

51. Dos personas juegan a "cara" o "sello" con una sola moneda, y convienen en continuar el juego, hasta que tanto las caras como los sellos hayan aparecido cuando menos dos veces. Hállese la probabilidad que el juego no termine cuando se ha lanzado la moneda cinco veces.

52. Cada uno de tres tiradores hace un disparo contra tres blancos fugaces, escogiendo un blanco al azar e independientes de los demás tiradores. La probabilidad es p_1, p_2 y p_3 respectivamente. Determine las probabilidades de los eventos siguientes:

    A: "Exactamente en uno de los blancos no habrá ningún agujero".

    B: "En cada uno de los blancos habrá al menos un agujero".

    C: "Los tres agujeros aparece en el mismo blanco".

53. La probabilidad de obtener cría con un huevo fértil es 0.95. Se sacan para incubar, tres huevos de una caja que contenía 12, de los cuales 4 huevos eran fértiles y 8 infértiles. ¿Cuál es la probabilidad de obtener alguna cría de los tres huevos?

1.10 PROBABILIDAD EN ESPACIO MUESTRAL INFINITO NUMERABLE Y CONTINUO

Aunque no lo hemos mencionado, el lector habrá notado que todos los ejemplos anteriores de probabilidad han sido referidos a espacios muestrales finitos. Así, la definición clásica de probabilidad se ha definido para espacios muestrales finitos, pues cuando se habla *de espacios muestrales infinitos*, no tienen sentido hablar del cociente n_A/n, ya que el espacio muestral tiene infinitos elementos. Sin embargo la definición de probabilidad en un espacio muestral finito dado en 1.5.5, puede ser modificado, asignando proba bilidades p_i a todos los posibles sucesos ω_i, $i = 1,2, \ldots$; es decir $p_i = P[\{\omega_i\}]$, tal que:

(1) $p_i > 0$, $i = 1,2, \ldots$

(2) $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$

Luego, definimos la probabilidad de un evento A en Ω de la siguiente manera

$$P[A] = \sum_{\omega_i \in A} P[\{\omega_i\}] = \sum_{i/\omega_i \in A} p_i$$

Obsérvese que la sumatoria está tomada sobre todos los sucesos favorables a A.

EJEMPLO 1 Se lanza una moneda hasta que ocurra cara. Calcular la probabilidad de lanzarla a lo maś 3 veces.

SOLUCION El espacio muestral es

$$\Omega = \{C, SC, SSC, SSSC, \ldots\}$$

es claro que los sucesos no tienen la misma probabilidad así

$$P[\{\omega_1\}] = P[C] = \frac{1}{2}$$

$$P[\{\omega_2\}] = P[SC] = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2^2}$$ como ya hemos visto.

Y así sucesivamente, en general obtenemos

$$P[\{\omega_i\}] = \frac{1}{2^i}, \quad i = 1,2,3, \ldots$$

Ahora, sea E el evento: "lanzarla a lo más 3 veces".
Entonces,

$$E = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\} = \{C, SC, SSC\} \quad \text{y}$$

$$P[E] = P[\{\omega_1\}] + P[\{\omega_2\}] + P[\{\omega_3\}]$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}.$$

EJEMPLO 2 Se lanza un dado hasta que ocurra un 4; calcular la probabilidad de lanzar

(a) 3 veces. (b) A lo más 3 veces.

SOLUCION El espacio muestral se puede escribir así,

$$\Omega = \{4, {}_{*}4, {}_{**}4, {}_{***}4, \ldots\} = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots\}$$

donde cada * representa un resultado diferente de 4.

$$P[\{\omega_1\}] = \frac{1}{6}\ ; \qquad P[\{\omega_2\}] = \frac{5}{6} \times \frac{1}{6}\ ; \qquad P[\{\omega_3\}] = (\frac{5}{6})^2\ \frac{1}{6}$$

en general

$$P[\{\omega_i\}] = (\frac{5}{6})^{i-1} . \frac{1}{6}\ , \qquad i = 1,2, \ldots$$

Entonces,

(a) $P[\{\omega_3\}] = P[\{** 4\}] = (\frac{5}{6})^2\ \frac{1}{6} = \frac{25}{216}$

(b) Si **A**, es el evento: "lanzar a lo más 3 veces".

$$A = \{4,\ * 4,\ ** 4\} = \{\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3\}$$

$$P[A] = \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} + (\frac{5}{36})^2\ \frac{1}{6} = \frac{91}{216}\ .$$

El diagrama del árbol de probabilidades que ilustra este ejemplo es

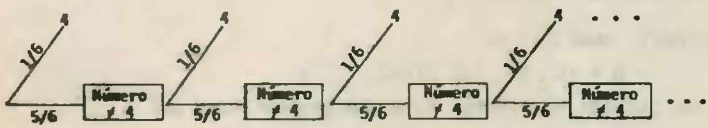


Fig. 1.10.1

EJEMPLO 3 Ud. lanza alternativamente un dado y una moneda hasta obtener 6 - en el dado o cara en la moneda; en el primer caso gana y en el segundo pierde. Calcular la probabilidad de ganar.

SOLUCION Este es un típico ejemplo de experimentos "truncados" obsérvese que la ocurrencia de 6 en el dado, cara en la moneda detiene el experimento. Enumeremos a continuación los resultados.

$\omega_1 = 6$

$\omega_2 = * C$

$\omega_3 = * S6$

$\omega_4 = * S * C$

$\omega_5 = * S * S\ 6$

....

....

Entonces, $\Omega = \{6,\ C,\ * S6,\ * S * C,\ *S *S6, * S * S * C,\ \ldots\}$ donde cada * representa un número diferente de 6 con probabilidad 5/6 y la probabilidad que salga 6 es 1/6. Sea G el evento: "ganar". Los sucesos en los cuales se gana son

$$G = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5, \omega_7, \omega_9, \ldots\}.$$

$$P[G] = P[\{\omega_1\}] + P[\{\omega_3\}] + P[\{\omega_5\}] + P[\{\omega_7\}] + \ldots$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\frac{1}{6} + \ldots$$

$$= \frac{1}{6}\left[1 + \frac{5}{12} + \left(\frac{5}{12}\right)^2 + \left(\frac{5}{12}\right)^3 + \ldots\right]$$

$$= \frac{1}{6}\left[\frac{1}{1-\frac{5}{12}}\right] = \frac{1}{6}\cdot\frac{12}{7} = \frac{2}{7}.$$

NOTA Para el lector no familiarizado con sumas de infinitos términos.

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^k = \frac{1}{1-r}, \qquad \text{si } |r| < 1$$

Una forma no muy rigurosa, pero conveniente de demostrar esto es la siguiente

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^k = 1 + r + r^2 + r^3 + \ldots \tag{1}$$

$$r\sum_{k=0}^{\infty} r^k = r + r^2 + r^3 + r^4 + \ldots \tag{2}$$

restando (2) de (1)

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^k - r\sum_{k=0}^{\infty} r^k = 1$$

Factorizando

$\sum_{k=0}^{\infty} r^k (1 - r) = 1$, y a partir de esto obtenemos finalmente

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^k = 1 + r + r^2 + r^3 + \ldots = \frac{1}{1-r}$$

en el ejemplo 3, $r = \frac{5}{12}$

EJEMPLO 4 Se dispara un rifle hasta acertar en el blanco. Suponer que la probabilidad que se acierte es de 0.9 para cada tiro y que los tiros son independientes. Calcular la probabilidad

(a) de que se necesitan más de dos disparos.

(b) de que el número de disparos requeridos sea múltiplo de 3.

SOLUCION Sea el evento A: "acertar en el blanco", entonces

$$\Omega = \{A, \bar{A}A, \bar{A}\bar{A}A, \bar{A}\bar{A}\bar{A}A, \bar{A}\bar{A}\bar{A}\bar{A}A, \ldots\}$$

(a) Sea E, el evento: "se necesita más de dos tiros", entonces $\bar{E}$; es el evento: "se necesita a lo más dos tiros". Luego,

$$P[E] = 1 - P[\bar{E}] = 1 - [P[A] + P[\bar{A}A]]$$

$$= 1 - [(0.9 + (0.1)(0.9)] = 1 - 0.99 = 0.01$$

(b) Sea F el evento: "se necesita un número múltiplo de 3".

Entonces, $F = \{\bar{A}\bar{A}A, \bar{A}\bar{A}\bar{A}\bar{A}\bar{A}A, \ldots\}$. Luego,

$$P[F] = (0.1)^2(0.9) + (0.1)^5(0.9) + (0.1)^8(0.9) + \ldots$$

$$= (0.1)^2(0.9)[1 + (0.1)^3 + (0.1)^6 + \ldots]$$

$$= \frac{1}{100} \times \frac{9}{10}\left[\frac{1}{1 - \frac{1}{1000}}\right] = \frac{9}{10^3}\ \frac{10^3}{999} = \frac{1}{111}\ .$$

EJEMPLO 5 Tres jugadores A, B y C arrojan al aire una moneda en ese orden, hasta que aparezca una "cara" (gana quien la obtiene primero). ¿Cuáles son las respectivas probabilidades de ganar?

SOLUCION Sean los eventos :

G_A : "gana el jugador A".

G_B : "gana el jugador B".

G_C : "gana el jugador C".

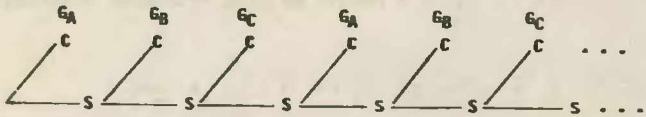


Fig. 1.10.2

El espacio muestral es

$$\Omega = \{C, SC, SSC, SSSC, SSSSC, SSSSSC, \ldots\}$$

Los sucesos favorables a cada evento son respectivamente,

$$G_A = \{C, SSSC, SSSSSSC, \ldots\}$$

$$G_B = \{SC, SSSSC, SSSSSSSC, \ldots\}$$

$$G_C = \{SSC, SSSSSC, SSSSSSSSC, \ldots\}$$

$$P[G_A] = \frac{1}{2} + (\frac{1}{2})^4 + (\frac{1}{2})^7 + (\frac{1}{2})^{10} + \ldots$$

$$= \frac{1}{2}\left[1 + (\frac{1}{2})^3 + (\frac{1}{2})^6 + (\frac{1}{2})^9 + \ldots\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-\frac{1}{8}}\right] = \frac{1}{2}\cdot\frac{8}{7} = \frac{4}{7}.$$

$$P[G_B] = (\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^5 + (\frac{1}{2})^8 + (\frac{1}{2})^{11} + \ldots$$

$$= (\frac{1}{2})^2\left[1 + (\frac{1}{2})^3 + (\frac{1}{2})^6 + (\frac{1}{2})^9 + \ldots\right]$$

$$= \frac{1}{4} \times \frac{8}{7} = \frac{2}{7}.$$

$$P[G_C] = (\frac{1}{2})^3 + (\frac{1}{2})^6 + (\frac{1}{2})^9 + (\frac{1}{2})^{12} + \ldots$$

$$= (\frac{1}{2})^3\left[1 + (\frac{1}{2})^3 + (\frac{1}{2})^6 + (\frac{1}{2})^9 + \ldots\right]$$

$$= \frac{1}{8} \times \frac{8}{7} = \frac{1}{7}.$$

EJEMPLO 6 Una persona lanza repetidas veces dos dados y gana si obtiene 8 - puntos antes de obtener 7. Calcular la probabilidad de ganar.

SOLUCION Los sucesos posibles en los cuales la persona gana es

$$\omega_1 = 8$$

$$\omega_2 = \star\, 8$$

$$\omega_3 = \star\star\, 8$$

$$\omega_4 = \star\star\star 8$$

$$\omega_5 = \star\star\star\star 8$$

....

....

donde cada $\star$ representa un resultado diferente de 7, 8 y tiene una probabili_ dad igual a

$$1 - P[\{7\}] - P[\{8\}] = 1 - \frac{6}{36} - \frac{5}{36} = \frac{25}{36}$$

Se considera diferente de 8 pues en caso contrario termina el juego y diferente de 7 pues en caso contrario pierde. Es decir,

$$\Omega = \{8,\ 7,\ *\ 8,\ *\ 7,\ **\ 8,\ **7,\ .\ .\ .\}$$

Sea G el evento: "ganar el juego".

$$P[G] = P[\{\omega_1\}] + P[\{\omega_2\}] + P[\{\omega_3\}] + \ldots$$

$$= \frac{5}{36} + \frac{25}{36} \cdot \frac{5}{36} + \left(\frac{25}{36}\right)^2 \cdot \frac{5}{36} + \left(\frac{25}{36}\right)^3 \cdot \frac{5}{36} + \ldots$$

$$= \frac{5}{36}\left[1 + \frac{25}{36} + \left(\frac{25}{36}\right)^2 + \left(\frac{25}{36}\right)^3 + \ldots\right]$$

$$= \frac{5}{36}\left[\frac{1}{1 - \frac{25}{36}}\right] = \frac{5}{36} \cdot \frac{36}{11} = \frac{5}{11} .$$

EJEMPLO 7 Tres personas participan en un juego llamado disparejo, en el cual cada uno lanza al aire simultáneamente una moneda; si uno de los resultados es diferente a los otros dos, la persona que obtiene el resultado diferente pierde.

(a) ¿Cuál es la probabilidad que uno de ellos pierda, en una tirada, si las tres monedas no estan cargadas?

(b) Si ninguno pierde en la primera vuelta, se lanza al aire las monedas nuevamente, hasta que alguno pierda.
¿Cuál es la probabilidad que se necesite un número par de tiradas para que alguien pierda?

SOLUCION (a) Sea E, el evento: "perder en una jugada". Entonces, los sucesos favorables a E son,

$$E = \{\underbrace{CCS}_{P_3^{2,1}},\ \underbrace{SSC}_{P_3^{2,1}}\} = \{CCS,\ CSC,\ SCC,\ SSC,\ SCS,\ CSS\}.$$

Luego,

$$P[E] = \binom{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \binom{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^3 = 6\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{3}{4} .$$

(b) Sea F, el evento: "se necesita un número par de lanzamientos para que alguien pierda".

El lector puede escribir el espacio muestral y verificar que se obtiene

$$P[F] = 12 \times \frac{1}{8} \times \frac{1}{8} + 48 \times \frac{1}{8} \times \frac{1}{8} \times \frac{1}{8} \times \frac{1}{8} + 192 \times \frac{1}{8} \times \frac{1}{8} \times \frac{1}{8} \times \frac{1}{8} \times \frac{1}{8} \times \frac{1}{8} + \ldots$$

$$= \frac{12}{8^2} + \frac{48}{8^4} + \frac{192}{8^6} + \ldots$$

$$= \frac{12}{8^2}\left[1 + \frac{4}{8^2} + \frac{16}{8^4} + \ldots\right] = \frac{12}{8^2}\left[\frac{1}{1 - \frac{4}{8^2}}\right] = \frac{1}{5} .$$

EJEMPLO 8 Tres jugadores A, B y C, extraen (en ese orden) una carta con reposición de una baraja de 52 cartas. El primero que obtiene corazón gana. Calcular la probabilidad que gane A .

SOLUCION Sean los siguientes eventos :

G_A: "gana el jugador A".

C : "carta corazón", y $\bar{C}$: "carta diferente de corazón".

$$P[C] = \frac{1}{4} \quad \text{y} \quad P[\bar{C}] = \frac{3}{4}$$

Construimos el árbol de probabilidades siguiente

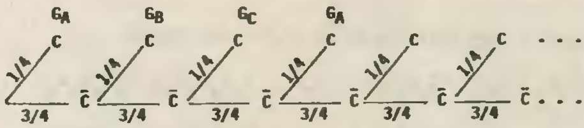


Fig. 1.10.3.

$$\Omega = \{C,\ \bar{C}\,C,\ \bar{C}\,\bar{C}\,C,\ \bar{C}\,\bar{C}\,\bar{C}\,C,\ \bar{C}\,\bar{C}\,\bar{C}\,\bar{C}\,C,\ \bar{C}\,\bar{C}\,\bar{C}\,\bar{C}\,\bar{C}\,C,\ \ldots\}$$

$$G_A = \{C,\ \bar{C}\,\bar{C}\,\bar{C}\,C,\ \bar{C}\,\bar{C}\,\bar{C}\,\bar{C}\,\bar{C}\,\bar{C}\,C,\ \bar{C}\,\bar{C}\,\bar{C}\,\bar{C}\,\bar{C}\,\bar{C}\,\bar{C}\,\bar{C}\,\bar{C}\,C,\ \ldots\}$$

Por lo tanto,

$$P[G_A] = \frac{1}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^3 \frac{1}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^6 \frac{1}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^9 \frac{1}{4} + \ldots$$

$$= \frac{1}{4}\left[1 + \left(\frac{3}{4}\right)^3 + \left(\frac{3}{4}\right)^6 + \left(\frac{3}{4}\right)^9 + \ldots\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{1 - \frac{27}{64}}\right] = \frac{1}{4} \cdot \frac{64}{37} = \frac{16}{37} .$$

EJEMPLO 9 Dos jugadores que tienen la misma habilidad juegan una secuencia de partidas, hasta que uno de ellos gane dos juegos consecutivos. Determinar

(a) la probabilidad que se necesiten un número par de jugadas para terminar el juego.

(b) la probabilidad que se necesite un número impar de jugadas para terminar el juego;

(c) la probabilidad de ganar de cada jugador.

SOLUCION Llamaremos A y B a los jugadores, y G_A, G_B los eventos, que gana una partida el jugador A y B respectivamente.

Entonces algunos de los resultados posibles de las partidas se observan en el diagrama de la fig. 1.10.4 .

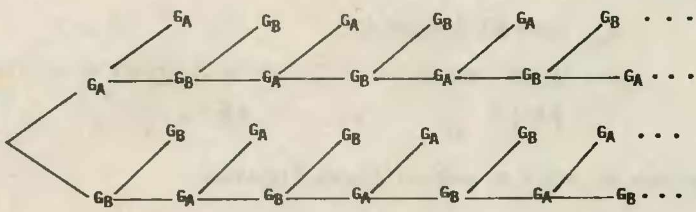


Fig. 1.10.4

Es decir, el espacio muestral tiene la siguiente forma

$$\Omega = \{G_AG_A,\ G_BG_B,\ G_AG_BG_B,\ G_BG_AG_A,\ G_AG_BG_AG_A,\ G_BG_AG_BG_B,\ \ldots\}$$

puesto que ambos jugadores tienen la misma habilidad, entonces

$$P[G_A] = P[G_B] = \frac{1}{2}\ .$$

Además los eventos G_A y G_B son independientes.

(a) Sea E: "se necesita un número par de jugadas para terminar el juego". Entonces, los elementos del evento E son,

$$E = \{G_AG_A,\ G_BG_B,\ G_AG_BG_AG_A,\ G_BG_AG_BG_B,\ \ldots\}$$

Luego

$$P[E] = \underbrace{(\tfrac{1}{2})^2 + (\tfrac{1}{2})^2}_{(\frac{1}{2})} + \underbrace{(\tfrac{1}{2})^4 + (\tfrac{1}{2})^4}_{(\frac{1}{2})^3} + \underbrace{(\tfrac{1}{2})^6 + (\tfrac{1}{2})^6}_{(\frac{1}{2})^5} + \ldots$$

$$P[E] = \frac{1}{2} + (\frac{1}{2})^3 + (\frac{1}{2})^5 + \ldots$$

$$= \frac{1}{2}\left[1 + (\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^4 + \ldots\right]$$

La expresión dentro del corchete, es una serie geométrica de razón $(1/2)^2$. - Por lo tanto

$$P[E] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-(\frac{1}{2})^2}\right] = \frac{2}{3} .$$

(b) Sea F: "se necesita un número impar de jugadas para terminar el juego". Los elementos del evento F son,

$$F = \{G_AG_BG_B,\ G_BG_AG_A,\ G_AG_BG_AG_BG_B,\ G_BG_AG_BG_AG_A,\ \ldots\}$$

$$P[F] = \underbrace{(\frac{1}{2})^3 + (\frac{1}{2})^3}_{(\frac{1}{2})^2} + \underbrace{(\frac{1}{2})^5 + (\frac{1}{2})^5}_{(\frac{1}{2})^4} + \underbrace{(\frac{1}{2})^7 + (\frac{1}{2})^7}_{(\frac{1}{2})^6} + \ldots$$

$$= (\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^4 + (\frac{1}{2})^6 + \ldots$$

$$= (\frac{1}{2})^2\left[1 + (\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^4 + \ldots\right]$$

$$= (\frac{1}{2})^2\left[\frac{1}{1-(\frac{1}{2})^2}\right] = \frac{1}{3} .$$

(c) Sea A : "gana el juego el jugador A"

$$A = \{G_AG_A,\ G_BG_AG_A,\ G_AG_BG_AG_A,\ \ldots\}$$

$$P[A] = (\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^3 + (\frac{1}{2})^4 + (\frac{1}{2})^5 + \ldots\}$$

$$= (\frac{1}{2})^2\left[1 + (\frac{1}{2}) + (\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^3 + \ldots\right]$$

$$= (\frac{1}{2})^2\left[\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\right] = \frac{1}{2} .$$

Sea B : "gana el juego el jugador B"

En forma completamente similar para el caso del jugador A, se obtiene

$$P[B] = \frac{1}{2} \ .$$

1.10.1 ESPACIO MUESTRAL CONTINUO

El último tipo de espacios muestrales considerando, es el del tipo continuo. Ninguno de las definiciones dadas de probabilidad es aplicable es este caso. También se presenta otra dificultad. En los espacios muestrales discretos, todos los subconjuntos se llaman eventos y se les puede asignar probabilidades. Pero pueden construirse subconjuntos de un espacio muestral continuo que no son eventos por lo tanto cualquier asignación de probabilidad que se les haga es inconsistente con los axiomas de probabilidad. Sin embargo en los problemas prácticos que se estudien en este libro, los subconjuntos de Ω serán eventos. Y por ahora estudiaremos el tipo de espacio muestral continuo que tiene sus elementos de la misma verosimilitud, esto significa que la probabilidad que un punto ocurre en un subconjunto de Ω es proporcional a la longitud del subintervalo. Así definimos la probabilidad en un espacio muestral contínuo: como la razón entre la longitud del evento "ℓ_A" y la longitud del espacio muestral "ℓ_Ω" o "$\ell(\Omega)$"

$$P[A] = \frac{\ell_A}{\ell_\Omega}$$

Aquí el concepto de longitud representa un concepto más amplio; según el caso puede ser: longitud misma, área, volumen, etc; más apropiadamente se puede hablar de medida del evento $m(\Omega)$ y $m(A)$, luego

$$P[A] = \frac{m(A)}{m(\Omega)}$$

EJEMPLO 10 Se elige aleatoriamente un punto dentro del segmento determinado por el intervalo $[2, 10]$. ¿Calcular la probabilidad que pertenezca al segmento $[3, 5]$?.

SOLUCION

$$\Omega = \{x \mid x \in [2, 10]\} \quad y \quad \ell_\Omega = 10 - 2 = 8,$$

$$A = \{x \mid x \in [3, 5]\} \quad y \quad \ell_A = 5 - 3 = 2 \ .$$

Luego, $$P[A] = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \ .$$

EJEMPLO 11 El espacio muestral asociado a un experimento aleatorio es el conjunto

$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x^2 + y^2 \leq 10\}$. Calcular la probabilidad del evento

$$E = \{(x, y) \in \Omega \ / \ x^2 + y^2 \leq 5\}$$

SOLUCION Es claro que Ω es un círculo de radio $R = 10$ y el evento E es un círculo de radio $r = 5$. Luego,

$$P[E] = \frac{A_E}{A_\Omega} = \frac{\pi r^2}{\pi R^2} = \frac{25\pi}{100\pi} = \frac{1}{4}.$$

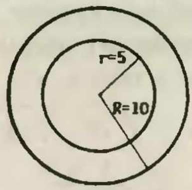


Fig. 1.10.5

donde A_E = área del círculo radio 5

A_Ω = área del círculo de radio 10.

EJEMPLO 12 Se elige un punto del cuadrado con vértices opuestos (0,0) y (1 , 1) ; sea **E** el evento la suma de las coordenadas del punto es menor que 3/4. Hallar la probabilidad de E.

SOLUCION El experimento aleatorio es "elegir un punto del cuadrado con vértice opuestos (0, 1) y (1, 1)". Entonces

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 0 \leq x \leq 1, \ 0 \leq y \leq 1\}$$

Sea el evento E : " la suma de las coordenadas del punto elegido es menor que 3/4" .

$$E = \{(x, y) \in \Omega \ / \ x + y < \frac{3}{4}\}$$

A_Ω = Area del cuadrado = 1

A_E = Area del triángulo sombreado.

$$P[E] = \frac{A_E}{A_\Omega} = \frac{(3/4)(3/4) \ / \ 2}{1}$$

$$= \frac{9}{32}.$$

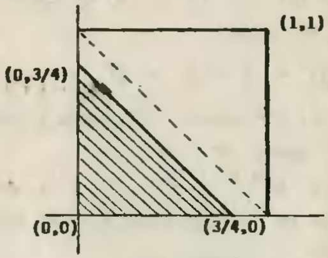


Fig. 1.10.6

EJEMPLO 13 Sea el intervalo $[-r, r]$ la base de un semicírculo, si se elige un punto aleatoriamente de este intervalo, calcular la probabilidad de que la longitud del segmento perpendicular de este punto al semicírculo es menor que $r/2$.

SOLUCION El experimento aleatorio es "elegir un punto en el intervalo $[-r,r]$

$$\Omega = \{x \ / \ x \in [-r, r]\}$$

$$\ell_\Omega = 2r$$

Sea **A**, el evento: "la longitud del segmento perpendicular del punto elegido al semi-círculo es menor que $r/2$" .

$\bar{A}$: "longitud del segmento perpendicular del punto elegido al semicírculo es mayor o igual a $r/2$ "

$$d = 2\sqrt{r^2 - (r/2)^2}$$

$$= 2\sqrt{3r^2/4} = \sqrt{3}r$$

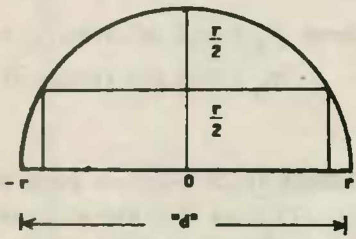


Fig. 1.10.7

Entonces,

$$P[\bar{A}] = \frac{\ell_{\bar{A}}}{\ell_\Omega} = \frac{d}{2r} = \frac{\sqrt{3}r}{2r} = \frac{\sqrt{3}}{2} .$$

Por lo tanto, $P[A] = 1 - P[\bar{A}] = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$.

EJEMPLO 14 En un segmento AB de longitud "ℓ" se escoge al azar dos puntos L y M Calcular la probabilidad que el punto L esté más cercano a M que a A.

SOLUCION El experimento aleatorio es "elegir dos puntos del segmento AB"

Sea $x = AL$ e $y = AM$, entonces

$$\Omega = \{(x, y) \ / \ 0 \leq x \leq \ell, \ 0 \leq y \leq \ell\}$$

Por lo tanto

$$m(\Omega) = \ell \times \ell = \ell^2$$

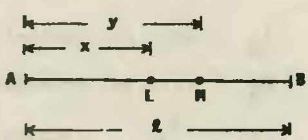


Fig. 1.10.8

Sea C, el evento: "el punto L está más cercano a M que a A".

$LM < AL = |y - x| < x \Longleftrightarrow 0 < y < 2x$, estos puntos están dados en la fig: 1.10.9, cuya área da los casos favorables al evento C. Es decir

$$C = \{(x, y) \ / \ 0 < y < 2x\}$$

$$m(C) = \frac{3\ell^2}{4}$$

luego, $\quad P[C] = \frac{3\ell^2/4}{\ell^2} = \frac{3}{4}$.

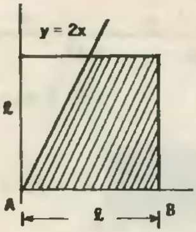


Fig. 1.10.9

EJEMPLO 15 La luz de un semáforo aparece cada 4 minutos y dura un minuto para luego cambiar a verde (por lo tanto es verde durante 3 minutos, roja 1 minuto, etc). Cada hora en punto, la luz del semáforo cambia a roja primeramente.

(a) Si se llega al semáforo en un instante al azar entre las 7.55 y las 8.05 a.m., ¿Cuál es la probabilidad que usted tenga que detenerse ante el semáforo?.

(b) Si se llega al semáforo en un instante al azar entre las 7.54 y las 8.04 a.m., ¿Cuál es la probabilidad que usted debe detenerse ante el semáforo?.

SOLUCION 1 (Ud. va en automóvil) $\Omega = \{t/t \in [7.55, 8.05]\}$

(a) Sea el evento A: "ud. tenga que detenerse ante el semáforo si llega entre las 7.55 y 8.05".

R: " Tiempo que dura la luz roja" = 1 minuto.

V: "Tiempo que dura la luz verde" = 3 minutos.

Según el diagrama de la fig. 1.10.10, se tiene

Fig. 1.10.10

$$\ell_\Omega = 8.05 - 7.55 = 10 \text{ mint.}$$

$$\ell_A = 3R = 3 \text{ mint.}$$

Por lo tanto, $\quad P[A] = \frac{\ell(A)}{\ell(\Omega)} = \frac{3}{10}$

(b) Sea el evento B: "Ud tenga que detenerse, si llega al semáforo entre - 7.54 y 8.04"; de la fig. 1.10.11

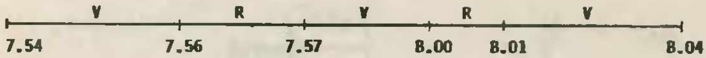


Fig. 1.10.11

$$\ell_{\Omega} = 8.04 - 7.54 = 10 \text{ mint.}$$

$$\ell_{B} = 2R = 2 \text{ mint.}$$

Luego, $P[B] = \dfrac{2}{10} = \dfrac{1}{5}$.

2. (Ud. va a pie). Queda como ejercicio para el lector.

PROBLEMAS 1.10

1. Dos jugadores lanzan alternativamente una moneda. El primero que obtiene cara gana. Hallar la probabilidad de ganar de cada jugador.

2. Dos jugadores A y B lanzan dos dados; A comienza el juego. Gana el jugador A, si obtiene 6 puntos, antes de que B obtenga 7 puntos, y gana B si saca 7 puntos antes de que A saque 6 puntos. ¿Cuál es la probabilidad de ganar de cada jugador?

3. Al lanzar un par de dados Ud. gana, si obtiene 8 ó 10 puntos antes de obtener 7 ó 9; calcular la probabilidad de ganar.

4. Tres monedas se lanzan simultáneamente hasta que las tres muestren los mismos resultados. ¿Calcular la probabilidad de
   (a) Realizar 3 lanzamientos;
   (b) Realizar 3 ó más lanzamientos;
   (c) Realizar 3 ó menos lanzamientos;
   (d) Realizar un número par de lanzamientos;
   (e) que el número de lanzamientos sea múltiplo de 3?

5. Cuatro personas juegan disparejos, para el cual cada una lanza al aire simultáneamente una moneda; si una cara es diferente de las otras tres, la persona que obtiene la cara diferente pierde.
   (a) ¿Cuál es la probabilidad que uno de ellos pierda en la primera tirada?
   (b) Si ninguno pierde en la primera tirada, se lanzan al aire las monedas nuevamente, hasta que alguno pierda.
   ¿Cuál es la probabilidad que se necesite un número par de tiradas

para que alguien pierda?

6. Se aplican alternativamente una dosis de veneno a un ratón blanco y luego a un ratón negro. La probabilidad que un ratón blanco muera por efectos del veneno es 2/5 y la probabilidad que un ratón negro muera por efectos del veneno es de 3/4. ¿Cuál es la probabilidad que muera primero un ratón blanco?

7. Un jugador arroja dos dados. Si en su primera jugada hace un total de 7 ó 11 puntos, gana el juego. Si en su primera jugada hace un total de 2,3 ó 12, punto pierde el juego. Si en su primera jugada hace un total de 4,5,6 8,9 ó 10, puntos, contínua arrojando los dados hasta que obtenga el puntaje que obtuvo en la primera tirada o hace 7. En el primer caso, gana; en el segundo pierde. ¿Cuál es la probabilidad que gane?

8. Jaime se presenta a un examen de manejo varias veces hasta que lo aprueba Suponga que la probabilidad que lo pruebe en cualquier examen sea de 0.1 y que las pruebas son independientes. Calcular la probabilidad que (a) le tome más de 4 intentos; (b) le tome más de 10 intentos.

9. Dos jugadores A y B extraen (en ese orden) alternativamente una carta con reposición, de una baraja de 52, hasta obtener un as que es la carta ganadora. Determinar la probabilidad de ganar de cada jugador.

10. La probabilidad que un estudiante de aviación apruebe el examen escrito para obtener su licencia de piloto es 0.7. Calcular la probabilidad de que un estudiante apruebe el examen,
(a) antes del cuarto intento
(b) después del segundo intento
(c) en un número par de intentos.

11. Tres jugadores A, B y C, de igual habilidad en el juego, juegan de la siguiente manera; juegan A y B mientras que C descansa, el ganador de este partido se enfrenta a C mientras descansa el perdedor. El juego continúa hasta que un jugador gane dos partidos consecutivas. Determinar la probabilidad de ganar el juego cada jugador. ¿Cuál es la probabilidad que se necesita un número par de jugadas para terminar el juego?

12. Dos jugadores A y B juegan un match. Sus probabilidades respectivas de ganar una partida son entre si como 2 : 3. Determinar la probabilidad de ganar el match de cada jugador, si para ganarlo hay que ganar dos partidas

seguidas.

13. Tres jugadores A, B y C extraen aleatoriamente cada uno, una bola de una urna que contiene 12, de las cuales ocho son negras y cuatro blancas, hasta que uno de ellos saque la primera bola blanca que será el ganador. Determinar la probabilidades de ganar de cada jugador, sabiendo que empieza A, los otros siguen en el orden indicado, y que la extracción se hace con reposición.

14. En el problema 2. Suponga que los jugadores acuerdan realizar n lanzamientos. Determinar:
(a) la probabilidad de ganar de cada jugador;
(b) la probabilidad de que queden empates.

15. Un amigo y ud. hacen turno para tirar un dado hasta que uno de ustedes llegue a obtener un tres o un cuatro. Si su amigo tiro primero, ¿cuál es la probabilidad que lo obtenga ud.?

16. Tres inspectores hacen turno comprobando los componentes electrónicos tal y como salen de una cadena de montaje. Si el 10 por 100 de todos los componentes producidos en la cadena de montaje son defectuosos, ¿cuál es la probabilidad de que el inspector que compruebe el primer componente sea el mismo que encuentre el primer componente defectuoso?

17. Una regla de longitud de 20 cm. se rompe al azar en dos partes. ¿Cuál es la probabilidad que la longitud de la parte más larga sea al menos el doble de la más corta?

18. Se escoje al azar un punto entre el 0 y el 1 en el eje de las X del plano XY. A continuación se dibuja un círculo con centro en el origen, y radio determinado por el punto escogido. Calcular la probabilidad que el área del círculo sea menor que $\pi/2$.

19. Sobre el segmento AB, se toma al azar dos puntos X_1, X_2. ¿Cuál es la probabilidad que AX_1, X_1X_2, X_2B formen un triángulo?

20. El punto medio del segmento AB es M. Se elige al azar un punto X en dicho segmento. ¿Calcular la probabilidad de que pueda formarse un triángulo con los segmentos AX, BX y AM.?

21. Calcular la probabilidad de que, elegido un punto al azar en el interior de un cuadrado, ninguno de los segmentos que lo unen a los cuatro vértices sea mayor que el lado del cuadrado.

2

VARIABLES ALEATORIAS

2.1 DEFINICION Y EJEMPLOS

El lector habrá notado en el capítulo anterior, que no todo espacio muestral Ω asociado a un experimento aleatorio está constituído por elementos numéricos, si no que en muchos casos son entes abstractos; así, al hablar del lanzamiento de una o más monedas teníamos resultados tales como: C, CS, CSS, etc. Al hablar de la prueba de dos resistencias los elementos del espacio muestral son {BB, BD, DB, DD}. (B bueno, D defectuoso).

También habrá notado que muchas veces no es fácil describir el espacio muestral, Ω, asociado a un experimento aleatorio, cuando sus elementos no son números. Por otro lado la probabilidad **P** es una función cuyo dominio es $\mathcal{P}(\Omega)$ y rango el intervalo de números reales $[0, 1]$. (Es decir, $P:\mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$), y si los elementos de $\mathcal{P}(\Omega)$ son entes abstractos, no podemos aplicar el cálculo metemático; por lo tanto es conveniente, que el dominio de la función **P** sea también un conjunto de números reales. El objeto de la presente sección es justamente asignar un valor numérico $x \in \mathbb{R}$ a cada suceso $\omega \in \Omega$ (si no lo es), es decir "cuantificar" los sucesos. Comenzaremos nuestra discusión con un ejemplo simple.

Consideremos, el experimento aleatorio de "lanzar una moneda tres veces". El espacio muestral Ω es el conjunto formado por los siguientes 8 puntos,

Ω = {CCC, CCS, CSC, SCC, CSS, SCS, SSC, SSS}

Suponga ahora que sólo nos interesa el número de caras que salen, de manera que los sucesos CCS, CSC, SCC pueden considerarse equivalentes, también los sucesos, CSS, SCS, SSC se consideran equivalentes, podemos introducir una función **X** definida sobre Ω de tal manera que:

$$X(CCC) = 3,$$
$$X(CCS) = X(CSC) = X(SCC) = 2$$
$$X(CSS) = X(SCS) = X(SSC) = 1 \quad \text{y}$$
$$X(SSS) = 0$$

Es decir, la función **X** en Ω definida por $X(\omega)$ = "número de caras obtenidas al lanzar una moneda tres veces" es una función a valores reales, que tiene como dominio el espacio muestral Ω y el subconjunto de números reales, $R_X = \{x/x = 0,1,2,3\}$ como rango. En símbolos

$$X: \Omega \longrightarrow \{0,1,2,3\}$$
$$\omega \rightarrow X(\omega)$$

La fig. 2.1.1 da una idea intuitiva de lo expresado en el párrafo anterior.

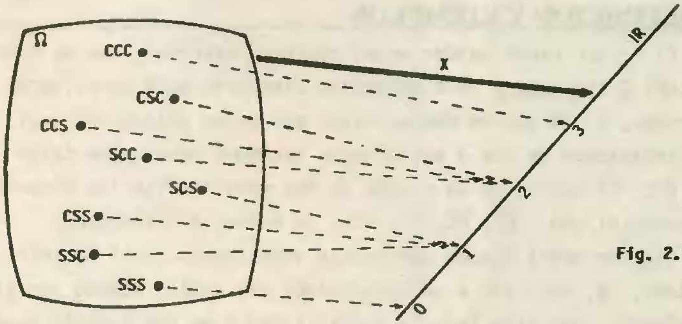


Fig. 2.1.1

tenemos así, un nuevo conjunto {0,1,2,3}, ahora formado por números reales, a cada uno de los cuales le corresponde una probabilidad de la siguiente manera:

$$P[\{3\}] = P[CCC] = \frac{1}{8}$$

$$P[\{2\}] = P[CCS] + P[CSC] + P[SCC] = \frac{3}{8}$$

$$P[\{1\}] = P[SSC] + P[SCS] + P[CSS] = \frac{3}{8} \qquad (*)$$

$$P[\{0\}] = P[SSS] = \frac{1}{8}$$

Vemos pues, que la función X hace corresponder a cada elemento ω de Ω un número real x, y además, el conjunto de elementos de Ω, cuya imagen es uno de estos números reales, es un elemento de $\mathcal{P}(\Omega)$, o sea un evento, y tiene por lo - tanto, una determinada probabilidad. La función X que cumplen estas condiciones se *llama variables aleatorias*.

DEFINICION 2.1.1 Dado un experimento aleatorio ε y Ω el espacio muestral - asociado a ε. Una función X que asigna a cada elemento ω en Ω uno y solamente un número real $x = X(\omega)$, se llama *variable aleatoria*. Es decir, X es una función real , $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$

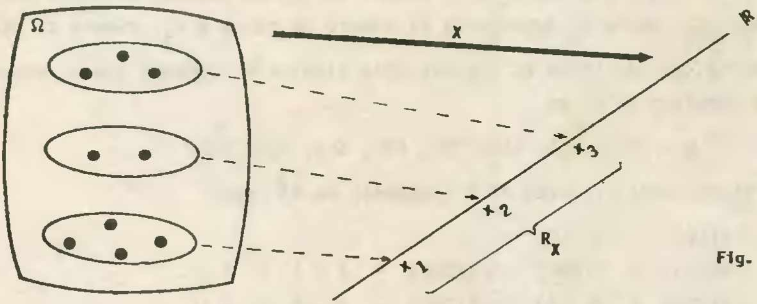


Fig. 2.1.2

El dominio de la variable aleatoria X es Ω y el rango es un subconjunto de - $\mathbb{R}$ que lo denotaremos por "R_X". Rigurosamente, al hablar de función asociamos a ella el conjunto de partida y el conjunto de llegada, mas en nuestro caso vamos a trabajar siempre con Ω como dominio que a su vez lo vamos a tomar como conjunto de partida. El rango R_X de la variable aleatoria X está dado por el siguiente conjunto de números reales.

$$R_X = \{x \in \mathbb{R} \ / \ X(\omega) = x, \ \omega \in \Omega\} = X(\Omega)$$

Cuando hubiera cierta duda sobre el rango de una variable aleatoria, vamos a tomar como $\mathbb{R}$, o, como un conjunto que razonablemente contenga a R_X (ver. - ejemplo 2).

EJEMPLO 2 Pensemos en los estudiantes de una universidad A, cada estudiante vamos a concebirlo como un suceso, a este suceso vamos a asignarle su altura así diremos que Juan mide 1.72 mts, Pedro mide 1.66 mts. Es decir, estamos - cuantificado a los estudiantes X(Juan) = 1.72 mts, X(Pedro) = 1.66 mts. Aho ra el lector se estará preguntando, ¿y el rango de la variable aleatoria X?; en principio podemos decir que $\mathbb{R}$ contiene todo número que define la altura de un estudiante; luego podemos decir que el conjunto $R = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x > 0\}$ - contiene a R_X. Después de razonar un poco en este problema podemos decir sin temor a equivocarnos que el conjunto $[0.5, 3]$ contiene a R_X; y llegamos a esta conclusión, pues con probabilidad cero vamos a encontrar un estudiante con altura mayor de 3 metros o menor que 0.5 metros (¿Ud. ya vió alguno?).

Es oportuno, antes de pasar a otro ejemplo, hacer, un comentario respecto al ejemplo anterior; este es típico en estadística y revela toda la libertad que tiene un estadístico al empezar un trabajo, más esta libertad tiene un precio, "ser cuidadoso".

EJEMPLO 3 Se lanza una moneda tres veces, sea X una función definida por - $X(\omega) = n_C - n_S$, donde n_C representa el número de caras y n_S, número de sellos obtenidos; X, así definido es una variable aleatoria. Sabemos que el espacio muestral (dominio de X) es

$$\Omega = \{CCC, CCS, CSC, SCC, CSS, SCS, SSC, SSS\}$$

Los correspondientes valores de X (imágenes de X) son:

$$X(CCC) = 3 - 0 = 3$$
$$X(CCS) = X(CSC) = X(SCC) = 2 - 1 = 1$$
$$X(SSC) = X(SCS) = X(CSS) = 1 - 2 = -1$$
$$X(SSS) = 0 - 3 = -3$$

Luego, es claro que R_X está exactamente definido por el conjunto,

$$R_X = \{-3, -1, 1, 3\} .$$

EJEMPLO 4 Un lote de artículos grande contiene artículos defectuosos D, y - no defectuosos N. Se extrae sucesivamente 4 artículos. Definimos X como número de artículos defectuosos obtenidos. La X, así definida es una variable - aleatoria; su dominio es

$$\Omega = \{DDDD, NDDD, DNDD, DDND, DDDN, DDNN, DNDN, DNND, NDND, NNDD, NDDN, DNNN, NDNN, NNDN, NNND, NNNN\}$$

Los valores de X son:

$$X(DDDD) = 4$$
$$X(NDDD) = X(DNDD) = X(DDND) = X(DDDN) = 3$$
$$X(DDNN) = X(DNDN) = X(DNND) = X(NDND) = X(NNDD) = X(NDDN) = 2$$

$X(NNND) = X(NNDN) = X(NDNN) = X(DNNN) = 1$

$X(NNNN) = 0$

Luego, $R_X = \{0,1,2,3,4\}$.

EJEMPLO 5 Bajo la misma suposición del ejemplo anterior, consideremos la extracción de artículos hasta lograr un artículo defectuoso y definimos X como el número necesario de extracciones. El dominio de X es

$$\Omega = \{D, ND, NND, NNND, \ldots\}$$

Las imágenes de X son :

$$X(D) = 1, \quad X(ND) = 2, \quad X(NND) = 3, \quad X(NNND) = 4, \ldots$$

Luego, $R_X = \{1,2,3,4, \ldots\}$.

EJEMPLO 6 Sea X una variable aleatoria que se considera como el beneficio de un jugador, en un juego en el que se tira un dado y el jugador gana 100 soles, si sale los números 1 ó 3, no gana ni pierde si sale los números 2 ó 5, pierde 100 soles si sale 4 ó 6.

El dominio de X es $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$.

La imágenes de X son :

$$X(1) = X(3) = 100; \quad X(2) = X(5) = 0; \quad X(4) = X(6) = -100$$

Luego; $R_X = \{-100, 0, 100\}$.

Hemos visto que cada elemento del rango R_X de la variable aleatoria X tiene una probabilidad que han sido inducidas por las probabilidades asignadas a los posibles resultados del espacio muestral Ω a través de la función X, ver (*). Esto nos indica que podemos usar nuestra teoría de probabilidades desarrollada en el capítulo anterior, para calcular probabilidades en R_X; entonces así, como hablábamos de eventos, como subconjuntos de Ω, en R_X también hablaremos de eventos como subconjuntos de él. Y usaremos paréntesis para denotar eventos en R_X, así $(X(\omega) = x)$ o $[X(\omega) = x]$ o simplemente $[X = x]$ que se lee, "la variable aleatoria toma el valor x" y $P[X = x]$, denotará la probabilidad que la variable aleatoria toma el valor x. Formalizaremos esto con las siguientes definiciones.

DEFINICION 2.1.2 EVENTOS EQUIVALENTES Sea Ω un espacio muestral asociado a un experimento aleatorio ε, y X una variable aleatoria con rango R_X definida sobre Ω. Un evento A en Ω y un evento E_X en R_X se dice que son ***eventos equivalentes***, Si,

$$A = \{\omega \in \Omega \ / \ X(\omega) \in E_X\}$$

La figura 2.1.3, ilustra este concepto.

Fig. 2.1.3

Simplemente, si A es un evento en Ω que consiste de todos los resultados posibles para el cual $X(\omega) \in E_X$, entonces A y E_X son equivalentes. Ahora, es claro que la ocurrencia de A implica la ocurrencia de E_X y viceversa, la ocurrencia de E_X implica la ocurrencia de A. Entonces, es natural definir la probabilidad de E_X como la probabilidad de A. Antes de formalizar esto daremos algunas notaciones.

NOTA 1 Nótese que A y E_X son eventos asociados a diferentes espacios.

Si A es un evento en Ω tal que $A = \{\omega \in \Omega \ / \ X(\omega) = a\}$ su evento equivalente en R_X es $E_X = \{a\}$, lo cual se denota por $[X = a]$. O sea, el evento $[X = a]$ es el conjunto de puntos en el espacio Ω que son aplicados en el número real a por la función X. Por ejemplo, en el experimento aleatorio "lanzar una moneda tres veces", y $X(\omega)$ = números de caras obtenidas.

Sea $A = \{\omega \in \Omega \ / \ X(\omega) = 2\} = \{CCS, CSC, SCC\} \equiv [X = 2]$, por otro lado si $E_X = \{1,0\}$, tenemos que,

$A = \{CSS, SCS, SSC, SSS\}$ ya que $X(CSS) = X(SCS) = X(SSC) = 1$ y $X(SSS)=0$.

Luego,

$A = \{\omega \in \Omega \ / \ X(\omega) = 1,0\} = \{CSS, SCS, SSC, SSS\}$ lo denotaremos por $[X = 1 \text{ ó } 0]$.

En general si,

$A = \{\omega \in \Omega \ / \ X(\omega) = a \text{ ó } b\}$ se denotará por $[X = a, b]$ Similarmente, Si $A = \{\omega \in \Omega \ / \ a < X(\omega) < b\}$, se denotará por $[a < X < b]$.

Ahora si queremos hallar la probabilidad de los eventos asociados a R_X

tales como $[X = a]$, $[X = a, b]$, $[a < X < b]$ etc. usaremos las probabilidades de estos eventos en el espacio original Ω, es decir, pondremos,

$$P[X = a] = P[\{\omega \in \Omega / X(\omega) = a\}] = P[A]$$

que se lee: "la probabilidad que la variable aleatoria toma el valor a".

$$P[X = a, b] = P[\{\omega \in \Omega / X(\omega) = a \text{ ó } b\}] = P[A]$$

la probabilidad que la variable aleatoria toma el valor a ó b.

$$P[a < X < b] = P[\{\omega \in \Omega / a < X(\omega) < b\}] = P[A]$$

la probabilidad que la variable aleatoria toma valores entre a y b. También se puede considerar eventos de la forma

$$[a \leq X \leq b] \quad ; \quad [a < X \leq b] \quad ; \quad \text{etc.}$$

DEFINICION 2.1.3 Si A es un evento en el espacio muestral Ω y E_X un evento en el rango R_X de la variable aleatoria X, entonces definimos la probabilidad E_X como

$$\boxed{P[E_X] = P[A], \quad \text{donde} \quad A = \{\omega \in \Omega / X(\omega) \in E_X\}}$$

EJEMPLO 7 En el ejemplo 3 consideremos.

(a) $E_X = \{3\}$, entonces el evento A en Ω equivalente a E_X es, $A = \{CCC\}$.

$$A = \{\omega \in \Omega / X(\omega) = 3\} = \{CCC\} \equiv [X = 3].$$

Luego, $P[E_X] = P[X = 3] = \frac{1}{8}$

(b) $E_X = \{1\}$, aquí el evento equivalente es,

$$A = \{\omega \in \Omega / X(\omega) = 1\} = \{CCS, CSC, SCC\} = [X = 1]$$

Luego, $P[E_X] = P[X = 1] = P[A] = \frac{3}{8}$

(c) Consideremos el evento $E_X = \{2\}$. En este caso el evento equivalente a $\{2\}$ es ϕ, por lo tanto :

$$P[\{2\}] = P[X = 2] = P[\phi] = 0$$

(d) Consideremos el evento $E_X = \{-1, -3\}$. El evento equivalente es,

$$A = \{\omega \in \Omega / X(\omega) = -1, -3\} = \{SSC, SCS, CSS, SSS\} = [X = -1, -3]$$

Luego, $P[X = -1, -3] = P[A] = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

(e) Consideremos $E_X = \{1,2\}$. El evento equivalente es,

$$A = \{\omega \in \Omega \ / \ X(\omega) = 1,2\} = \{CCS,\ CSC,\ SCC,\ \phi\} \equiv [\,X = 1,2\,]$$

Por lo tanto,

$$P[X = 1,2\,] = P[A] = \frac{3}{8}, \quad \text{(ver parte c)}$$

EJEMPLO 8 Referimos al ejemplo 5, consideremos un lote grande de artículos que contiene el $100p\%$ de artículos defectuosos, calcular la probabilidad de extraer más de 3 artículos hasta obtener el primer defectuoso.

En este caso, $E_X = \{4,5,6,\ .\ .\ .\}$ y el evento equivalente en Ω es,

$$A = \{NNND,\ NNNND,\ NNNNND,\ .\ .\ .\ \}$$

Luego,

$$\begin{aligned} P[E_X] &= P[X > 3\,] = P[A] \\ &= 1 - P[\bar{A}\,] = 1 - P[X \leqslant 3\,] \\ &= 1 - [\,P[D] + P[ND] + P[NND]] \\ &= 1 - [\,p + (1 - p)p + (1 - p)^2 p\,] = 1 - p - p + p^2 - p \\ &\quad + 2p^2 - p^3 \\ &= (1 - p)^3\,. \end{aligned}$$

PROBLEMAS 2.1

1. Una urna contiene 12 bolas numeradas de 1 a 12. Se saca una bola y defina la variable aleatoria X tal que $X(\omega)$ = número de divisores del número obtenido. Hallar :
   (a) el dominio de X; (b) evaluar $X(\omega)$ para cada $\omega \in \Omega$;
   (c) escriba el rango de X ;
   (d) el evento equivalente en R_X a cada uno de los siguientes eventos en Ω

   $$A = \{2,3,5,7,11\}\ , \quad B = \{4,9\}\ , \quad C = \{6,8,10\}\ , \quad D = \{1,12\}\ .$$

2. Se lanzan dos dados y sean i,j los números obtenidos (i,j = 1,2,3,4,5,6), se define la variable aleatoria $X(\omega) = m.c.d\ (i.j)$. Hallar :
   (a) el dominio de X ; (b) evaluar $X(\omega)$ para cada $\omega \in \Omega$;
   (c) el rango de la variable aleatoria X
   (d) el evento equivalente en Ω a cada uno de los siguientes eventos en R_X

   $$E_X = \{2\}, \quad F_X = \{2,4,5\}, \quad G_X = \{1,3,6\}$$

   (e) La probabilidad de los eventos E_X, F_X y G_X

3. Una factoría produce 10 paracaídas diario. Sea X, el número de paracaídas defectuosas.
   (a) ¿Es X una variable aleatoria?
   (b) Si su respuesta en (a) es, Sí. Halle el dominio y rango de la variable aleatoria X.

4. Una urna contiene 5 bolas numeradas de 1 a 5. Se extraen dos bolas sin reemplazamiento. Se define X como la suma de los números obtenidos. Determinar :
   (a) el dominio de X
   (b) el rango de la variable aleatoria X ;
   (c) $P[X = 3]$, $P[X = 5]$, $P[6 \leq X \leq 8]$.

5. Una caja contiene 5 transistores de radio, de las cuales dos son defectuosos. Los transistores se prueban uno a uno hasta encontrar el segundo transistor defectuoso. Sea X el número de pruebas efectuadas.
   (a) Describa el dominio de X ;
   (b) Describa el rango de la variable aleatoria X ;
   (c) ¿Cuál es el evento equivalente en Ω al evento $[X = 4]$?
   (d) ¿Cuál es el evento equivalente en Ω al evento $[X = 3]$?

6. Se venden 1,000 números para un sorteo en el que hay un premio mayor de I/. 500.00 , cuatro premios de I/. 100.00 y cinco premios de I/. 10.00 . El número cuesta I/. 1.00. Si X es el beneficio neto al comprar un número Hallar ;
   (a) el dominio de X ; (b) el rango de X ;
   (c) la probabilidad de cada uno de los elementos del rango de X.

2.2 VARIABLES ALEATORIAS DISCRETAS

DEFINICION 2.2.1 Si el rango de la variable aleatoria X, es un conjunto finito o infinito numerable, se llama *variable aleatoria discreta*. En este caso

$$R_X = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$$

EJEMPLO 1 Suponga que el número de días de trabajo en un año particular es 280 y los records de los empleados se marcan cada día que ellos están ausente del trabajo. Se selecciona aleatoriamente un records y se observa los días marcados. La variable aleatoria X se define como el número de días ausentes del trabajo, entonces $R_X = \{0,1,2, \ldots , 280\}$. Luego, X es una variable -

aleatoria discreta con un número finito de posibles valores.

EJEMPLO 2 La variable aleatoria definida en el ejemplo 5 de 2.1, es una variable aleatoria discreta con un número infinito numerable de posibles valores.

2.2.1 FUNCION O LEY DE PROBABILIDAD

DEFINICION 2.2.2 Sea X una variable aleatoria discreta con rango R_X. Una función definida por

$$p(x) = P[X = x] = \sum_{\{\omega \in \Omega / X(\omega) = x\}} P[\{\omega\}]$$

donde la suma es sobre los sucesos $\omega \in \Omega$ tal que $X(\omega) = x$ y satisface las siguientes condiciones

1. $p(x) > 0$, $\forall\, x \in R_X$; 2. $\sum_{x \in R_X} p(x) = \sum_{x \in R_X} P[X = x] = 1$

se llama *función de probabilidad o ley de probabilidad* (también llamada función de cuantía) de la variable aleatoria X.

La colección de pares $[(x, p(x)),\ \forall\, x \in R_X]$ se llama *distribución de probabilidad de* X.

Si $x \notin R_X$, $[X = x]$ es un evento imposible, por lo tanto $p(x) =$ $P[X = x] = 0$. Por esta razón cuando definimos una función de probabilidad $p(x)$, para $x \in R_X$, no diremos nada sobre la probabilidad en las $x \notin R_X$, pués entenderemos tácitamente que la función $p(x)$ está bién definida para todo $x \in R_X$ y asumiendo para los eventos imposibles $p(x) = 0$.

Con lo expresado en el párrafo anterior el dominio de la función p puede considerarse como el conjunto de los números, reales y su rango el conjunto $\langle 0, 1] \cup \{0\}$. Es decir,

$$p:\ \mathbb{R} \longrightarrow [0,1].$$

La distribución de probabilidad se representa usualmente en una tabla, ver tabla 2.2.1. También se representa gráficamente como muestra la fig. 2.2.1

Representación tabular de la distribución de probabilidad

Tabla 2.2.1

x	x_1	x_2	x_3	.	.	.
$p(x) = P[X = x]$	$p(x_1)$	$p(x_2)$	$p(x_3)$	.	.	.

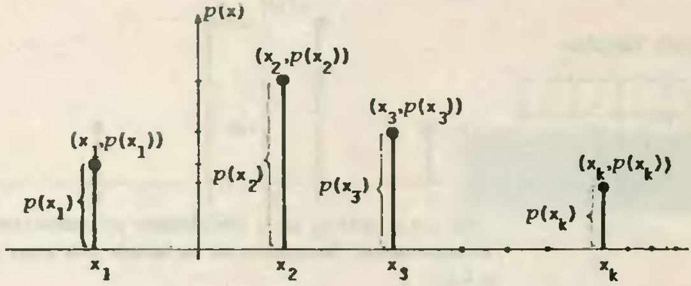


Fig. 2.2.1. Representación Gráfica de la distribución de probabilidad

Hemos denotado a los eventos en R_X por E_X, pero no habrá confusión alguna si se conviene en representar a estos eventos por A, B, C etc. Y la probabilidad de un evento A con R_X, se define de la siguiente manera

$$\boxed{P[A] = \sum_{x \in A} p(x) = \sum_{x \in A} P[X = x]} \qquad \text{(I)}$$

EJEMPLO 3 En el ejemplo 3 de 2.1, hemos considerado el lanzamiento de una moneda tres veces y definimos $X(\omega) = n_C - n_S$. Hallar la distribución de probabilidad en forma tabular y gráfica.

SOLUCION Recordamos que $R_X = \{-3, -1, 1, 3\}$, pués el espacio muestral es

$$\Omega = \{CCC, CCS, CSC, SCC, CSS, SCS, SSC, SSS\}$$

La distribución de probabilidad se obtiene, calculando $p(x)$ para cada $x \in R_X$

$$p(3) = P[X = 3] = P[CCC] = \frac{1}{8}$$

$$p(1) = P[X = 1] = P[CCS] + P[CSC] + P[SCC] = \frac{3}{8}$$

$$p(-1) = P[X = -1] = P[SSC] + P[SCS] + P[CSS] = \frac{3}{8}$$

$$p(-3) = P[X = -3] = P[SSS] = \frac{1}{8}$$

Luego, cada x con su respectiva $p(x)$ se lleva a una tabla similar a la tabla 2.2.1

Representación Tabular

x	-3	-1	1	3
$p(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

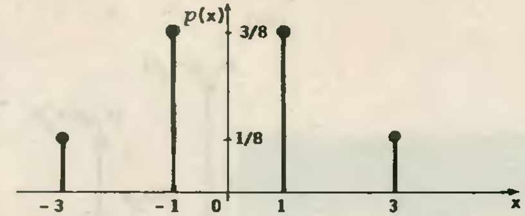


Fig. 2.2.2. Gráfico de la distribución de probabilidad para el experimento, lanzamiento de una moneda tres veces y $X = n_C - n_S$.

Es claro que .

1. $p(x) > 0, \quad \forall\ x \in R_X$; 2. $\sum_{x \in R_X} p(x) = 1$

Pero para $x = -2$, tenemos $p(-2) = P[X = -2] = 0$, pues es imposible que la diferencia $n_C - n_S$ sea -2 en tres lanzamientos; similarmente, por ejemplo,

$$p(\tfrac{1}{2}) = P[X = \tfrac{1}{2}] = 0. \quad \text{En general si,}$$

$$x \notin \{-3, -1, 1, 3\} \quad \text{es} \quad p(x) = P[X = x] = 0 .$$

EJEMPLO 4 Para cada uno de las siguientes funciones, determíne la constante k para que $f(x)$ sea una función de probabilidad de una variable aleatoria X .

(a) $f(x) = xk, \quad x = 1,2,3, \ldots, 10$

(b) $f(x) = k(\frac{1}{3})^x, \quad x = 1,2,3, \ldots$

SOLUCION (a) para que $f(x)$ sea una función de probabilidad debe cumplir la definición de ésta

1. $f(x) = k\,x > 0, \quad \forall\ x = 1,2, \ldots, 10$, si, solo si $k > 0$

2. $\displaystyle\sum_{x=1}^{10} kx = k\,[\,1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10\,] = 1$

de donde $k = 1/55$. Entonces,

$$f(x) = \frac{x}{55}, \qquad x = 1,2, \ldots, 10$$

es una función de probabilidad .

(b) 1. $f(x) = k(\frac{1}{3})^x > 0, \ \forall\ x = 1,2, \ldots$, si, sólo si $k > 0$.

2. $$\sum_{x=1}^{\infty} k(\tfrac{1}{3})^x = \frac{k}{3}\left[1 + \frac{1}{3} + (\tfrac{1}{3})^2 + \ldots\right]$$

$$= \frac{k}{3}\left[\frac{1}{1 - \frac{1}{3}}\right] = k(\tfrac{1}{3})(\tfrac{3}{2}) = 1$$

de donde, $k = 2$. Luego ,

$$f(x) = 2(\tfrac{1}{3})^x, \quad x = 1,2,3, \ldots$$

es una función de probabilidad .

EJEMPLO 5 En un lote de 10 artículos, hay 3 artículos defectuosos. Del lote se toma al azar una muestra de cuatro artículos sin reposición. Sea **X** la variable aleatoria que representa el número de artículos defectuosos en la muestra.

(a) Describir el dominio de **X** .

(b) Evaluar $X(\omega)$ para cada $\omega \in \Omega$.

(c) Evaluar la función de probabilidad, la representación tabular y gráfica de la distribución de probabilidad.

SOLUCION La variable aleatoria **X** está definida por $X(\omega)$ = número de artículos defectuosos en la muestra de tamaño 4.

(a) Ω = {NNNN, NNND, NNDN, NDNN, DNNN, NNDD, NDND, NDDN, DNDN, DDNN, DNND, NDDD, DNDD, DDND, DDDN}

(b) $X(NNNN) = 0$

$X(NNND) = X(NNND) = X(NNDN) = X(NDNN) = X(DNNN) = 1$

$X(NNDD) = \cdot \quad \cdot \quad \cdot = X(DNND) = 2$

$X(NDDD) = \cdot \quad \cdot \quad \cdot = X(DDDN) = 3$

$R_X = \{0,1,2,3\}$

(c) La función de probabilidad se obtiene calculando $p(x)$ para cada $x \in R_X$

$$p(0) = P[X = 0] = \frac{\binom{3}{0}\binom{7}{4-0}}{\binom{10}{4}}$$

$$p(1) = P[X = 1] = \frac{\binom{3}{1}\binom{7}{4-1}}{\binom{10}{4}}$$

Representación Tabular

x	0	1	2	3
$p(x)$	$\frac{5}{30}$	$\frac{15}{30}$	$\frac{9}{30}$	$\frac{1}{30}$

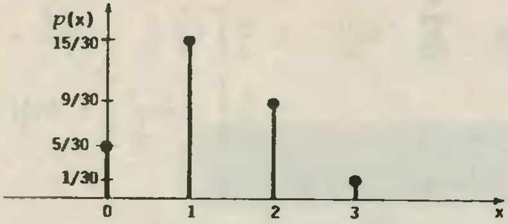


Fig. 2.2.3. Gráfico de la distribución de probabilidad para la muestra sin reposición de tamaño 4.

En general, la función de probabilidad de X es ,

$$p(x) = P[X = x] = \frac{\binom{3}{x}\binom{7}{4-x}}{\binom{10}{4}}, \quad x = 0,1,2,3.$$

Es claro que :

1. $p(x) > 0 , \quad \forall\ x \in R_X$

2. $\sum_{x \in R_X} p(x) = \frac{5}{30} + \frac{15}{30} + \frac{9}{30} + \frac{1}{30} = 1$

Este ejemplo se puede generalizar de la siguiente manera.

EJEMPLO 6 Supóngase que se tiene n artículos (n finito) de los cuales r son defectuosos. Se extrae una muestra aleatorio de tamaño m sin reemplazamiento. Sea X el número de artículos defectuosos en la muestra. Hallar la función de probabilidad de la variable aleatoria X.

SOLUCION La variable aleatoria X está definida por

$X(\omega)$ = número de artículos defectuosos en la muestra de tamaño m

$$R_X = \{0,1,2,3, \ . \ . \ . \ , \min(m, r)\}$$

$$p(x) = P[X = x] = \frac{\binom{r}{x}\binom{n-r}{m-x}}{\binom{n}{m}}, \quad x = 0,1,2, \ldots, \min(m,r)$$

es la función de probabilidad de X. Esta distribución se conoce como la ***distribución hipergeométrica.***

EJEMPLO 7 Se pone un ratoncito en un laberinto. Hay cinco caminos posibles, de los cuales sólo uno lleva fuera del laberinto. Supongamos que el ratoncito escoge un camino aleatoriamente hasta escoger el camino correcto; supongamos además que un camino incorrecto no se escoge dos veces. Sea **X** definido como el número de caminos incorrectos. Hallar :

(a) El dominio de **X** .

(b) El rango de la variable aleatoria **X**.

(c) La función de probabilidad asociado a **X** y su gráfica.

SOLUCION $X(\omega)$ = número de caminos incorrectos hasta encontrar el correcto.

Sea E = "Se escoge un camino correcto"

F = "Se escoge un camino incorrecto"

(a) El espacio muestral es

$$\Omega = \{E, FE, FFE, FFFE, FFFFE\}$$

(b) $R_X = \{0,1,2,3,4\}$.

(c) $p(0) = P[X = 0] = P[E] = \frac{1}{5}$

$$p(1) = P[X = 1] = P[FE] = P[F]\,P[E \mid F] = \frac{4}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{5}$$

$$p(2) = P[X = 2] = P[FFE] = P[F]\,P[F \mid F]\,P[E|FF] = \frac{4}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{5}$$

$$p(3) = P[X = 3] = P[FFFE] = P[F]\,P[F|F]\,P[F|FF]\,P[E|FFF] = \frac{4}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{5}$$

$$p(4) = P[X = 4] = P[FFFFE] = P[F]\,P[F|F]\,P[F|FF]\,P[F|FFF]\,P[E|FFFF] = \frac{4}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{5}$$

Luego, $p(x) = \frac{1}{5}$, $x = 0,1,2,3,4$.

es la función de probabilidad, llamado *distribución uniforme*

Representación Tabular

x	0	1	2	3	4
$p(x)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

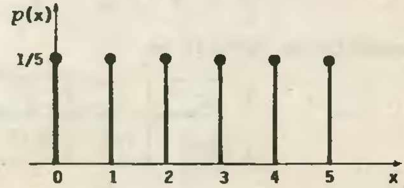


Fig. 2.2.4. Gráfico de la distribución de probabilidad para el experimento del ratoncito.

EJEMPLO 8 Se tiene 6 cajas numeradas 1,2,3,4,5 y 6; se tiene también 6 cartas numeradas 1,2,3,4,5 y 6. Se coloca al azar, (aleatoriamente) una carta en cada caja. Sea X la variable aleatoria que indica el lugar que ocupa la primera carta con número par. Determine Ud. la distribución de probabilidad de X. Represente sus respuestas en una tabla de la siguiente forma

x	$p(x)$

SOLUCION La variable aleatoria X está definida por

$X(\omega)$ = número de la caja que indica el lugar que ocupa la primera carta con número par.

Cartas $\{1,2,3,4,5,6\}$ y $\{2,4,6\}$ son pares.

$R_X = \{1,2,3,4\}$ $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{4}$ $\boxed{5}$ $\boxed{6}$

Sea F_i el suceso : "en la caja i se colocó una carta impar, $i = 1,2,3$"

E_i el suceso : "en la caja i se colocó una carta par, $i = 1,2,3,4$".

Entonces el dominio de X es

$$\Omega = \{E_1,\ F_1E_2,\ F_1F_2E_3,\ F_1F_2F_3E_4\}.$$

$$p(1) = P[X = 1] = P[E_1] = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$p(2) = P[X = 2] = P[F_1E_2] = P[F_1]\,P[E_2|F_1] = \frac{3}{6} \times \frac{3}{5} = \frac{3}{10}$$

$$p(3) = P[X = 3] = P[F_1F_2F_3] = P[F_1]\,P[F_2|F_1]\,P[E_3|F_1F_2]$$

$$= \frac{3}{6} \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{20}$$

$$p(4) = P[X = 4] = P[F_1F_2F_3E_4] = P[F_1]\,P[F_2|F_1]\,P[F_3|F_1F_2]\,P[E_4|F_1F_2F_3]$$

$$= \frac{3}{6} \times \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{3} = \frac{1}{20}$$

La representación tabular es,

x	1	2	3	4
p(x)	1/2	3/10	3/20	1/20

EJEMPLO 9 Hallar la función de probabilidad de la variable aleatoria **X**, definida como el máximo de los números anotados en dos bolas extraídas con - reemplazo (sin reemplazo) de una urna que contiene seis bolas numeradas del 1 al 6.

SOLUCION (a) Experimento con reemplazo, X está definida por

X(ω) = El máximo de los números anotados en dos bolas extraídas de la urna.

$$R_X = \{1,2,3,4,5,6\}$$

Como las extracciones es con reemplazo, entonces Ω tiene 6 x 6 = 36 elementos. Luego,

$$p(1) = \mathbf{P}[X = 1] = \frac{1}{36}$$

$$p(2) = \mathbf{P}[X = 2] = \frac{3}{36}$$

$$p(3) = \mathbf{P}[X = 3] = \frac{5}{36}$$

....

	1	2	3	4	5	6
1	11	12	13	14	15	16
2	21	22	23	24	25	26
3	31	32	33	34	35	36
4	41	42	43	44	45	46
5	51	52	53	54	55	56
6	61	62	63	64	65	66

En general

$$p(x) = \mathbf{P}[X = x] = \frac{2x - 1}{36}, \qquad x = 1,2,3,4,5,6$$

es la función de probabilidad de la variable aleatoria **X**.

(b) Sin reemplazamiento . Es decir, la variable aleatoria está definida

X(ω) = el máximo de los números anotados en dos bolas extraídas de la - urna sin reemplazo.

$$R_X = \{2,3,4,5,6\}$$

En este caso Ω tiene 6 x 5 = 30 elementos. Luego,

$$p(2) = \mathbf{P}[X = 2] = \frac{2}{30} = \frac{2(2 - 1)}{30} = \frac{2 - 1}{15}$$

$$p(3) = \mathbf{P}[X = 3] = \frac{4}{30} = \frac{2(3 - 1)}{30} = \frac{3 - 1}{15}$$

$$p(4) = \mathbf{P}[X = 4] = \frac{6}{30} = \frac{2(4 - 1)}{30} = \frac{4 - 1}{15}$$

....

En general se tiene que

$$p(x) = \mathbf{P}[X = x] = \frac{x - 1}{15}, \qquad x = 2,3,4,5,6$$

es la función de probabilidad de la variable aleatoria X .

EJEMPLO 10 Se lanza un dado hasta que ocurra un número mayor que 2, encontrar la función de probabilidad del número necesario de lanzamientos.

SOLUCION Aquí la variable aleatoria X está definida por

$X(\omega)$ = el número necesario de lanzamientos hasta obtener un número mayor que 2.

$$R_X = \{1,2,3,4,5, \ldots\}$$

Ahora si E es el evento: "obtener un número mayor que 2 en un lanzamiento". El espacio muestral sería

$\Omega = \{E, \bar{E}\ E, \bar{E}\ \bar{E}\ E, \bar{E}\ \bar{E}\ \bar{E}\ E, \ldots\}$. Y $P[E] = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$, pues

$$E = \{3,4,5,6\}$$

$$p(1) = P[X = 1] = P[E] = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$p(2) = P[X = 2] = P[\bar{E}\ E] = \left(\frac{2}{6}\right)\left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$p(3) = P[X = 3] = P[\bar{E}\ \bar{E}\ E] = \left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)$$

En general

$$p(x) = P[X = x] = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}\left(\frac{2}{3}\right), \qquad x = 1,2,3,4, \ldots$$

la cual define la función de probabilidad de la variable aleatoria X; pues es evidente que:

(1) $$p(x) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} > 0 \qquad \forall\, x \in R_X$$

(2) $$\sum_{x=1}^{\infty} \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} = \frac{2}{3}\sum_{x=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} = \frac{2}{3}\sum_{x=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{x}$$

$$= \frac{2}{3}\left[1 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \ldots\right]$$

$$= \frac{2}{3}\left[\frac{1}{1-\frac{1}{3}}\right] = \frac{2}{3} \times \frac{3}{2} = 1 .$$

EJEMPLO 11 Dos bombarderos lanzan alternativamente bombas al blanco hasta el primer impacto. La probabilidad de impacto en el blanco por el primer bombardero es igual a 0.7, y la del segundo, 0.8. La primera bomba la lanza el primer bombardero. Hallar la función de probabilidad de la variable aleatoria X, número de bombas lanzadas por ambos bombarderos.

SOLUCION $X(\omega)$ = número de bombas lanzadas por ambos bombarderos.

$R_X = \{1,2,3,4,...\}$. Sean los sucesos:

B_1 : "La bomba lanzada por el primer bombardero da en el blanco"

B_2 : la bomba lanzada por el segundo bombardero da en el blanco".

El espacio muestral Ω es

$$\Omega = \{B_1, \bar{B}_1 B_2, \bar{B}_1 \bar{B}_2 B_1, \bar{B}_1\bar{B}_2\bar{B}_1B_2, \bar{B}_1\bar{B}_2\bar{B}_1\bar{B}_2B_1, \bar{B}_1\bar{B}_2\bar{B}_1\bar{B}_2\bar{B}_1B_2, ...\}$$

donde : $P[B_1] = 0.7$, $P[\bar{B}_1] = 0.3$

$P[B_2] = 0.8$, $P[\bar{B}_2] = 0.2$

$$p(1) = P[X = 1] = 0.7$$

$$p(2) = P[X = 2] = P[\bar{B}_1B_2] = (0.3)(0.8)$$

$$p(3) = P[X = 3] = P[\bar{B}_1\bar{B}_2B_1] = (0.3)(0.2)(0.7)$$

$$p(4) = P[X = 4] = P[\bar{B}_1\bar{B}_2\bar{B}_1B_2] = (0.3)^2(0.2)(0.8)$$

$$p(5) = P[X = 5] = P[\bar{B}_1\bar{B}_2\bar{B}_1\bar{B}_2B_1] = (0.3)^2(0.2)^2(0.7)$$

$$p(6) = P[X = 6] = P[\bar{B}_1\bar{B}_2\bar{B}_1\bar{B}_2\bar{B}_1B_2] = (0.3)^3(0.2)^2(0.8)$$

$$p(7) = P[X = 7] = P[\bar{B}_1\bar{B}_2\bar{B}_1\bar{B}_2\bar{B}_1\bar{B}_2B_1] = (0.3)^3(0.2)^3(0.7)$$

....

En general

$$p(x) = P[X = x] = \begin{cases} (0.3)^{\frac{x-1}{2}} (0.2)^{\frac{x-1}{2}} (0.7), & x = 1,3,5,7,... \\ (0.3)^{\frac{x}{2}} (0.2)^{\frac{x}{2}-1} (0.8), & x = 2,4,6,8,... \end{cases}$$

es la función de probabilidad de la variable aleatoria **X**.

EJEMPLO 12 Hallar la función de probabilidad de la variable aleatoria X, número de cartas extraídas sin reemplazo, de una baraja de 52 cartas, hasta que (a) aparezca un trébol (b) aparezca un as.

SOLUCION (a) $X(\omega)$ = número de cartas extraídas sin reemplazo de una baraja de 52 hasta obtener un trébol.

$R_X = \{1,2,3,4, ..., 40\}$

Obtención de la función de probabilidad de **X**.

$$p(1) = P[X = 1] = \frac{13}{52} = \frac{\binom{39}{0}\binom{13}{1}}{\binom{52}{1}}$$

$$p(2) = P[X = 2] = \frac{39}{52}\cdot\frac{13}{51} = \frac{\binom{39}{2-1}\binom{13}{1}}{52 \times 51} = \frac{\binom{39}{2-1}}{\binom{52}{2-1}}\cdot\frac{13}{52-(2-1)}$$

$$p(3) = P[X = 3] = \frac{39}{52}\cdot\frac{38}{51}\cdot\frac{13}{50} = \frac{\binom{39}{3-1}}{\binom{52}{3-1}}\cdot\frac{13}{52-(3-1)}$$

$$p(4) = P[X = 4] = \frac{39}{52}\cdot\frac{38}{51}\cdot\frac{37}{50}\cdot\frac{13}{49} = \frac{\binom{39}{4-1}}{\binom{52}{4-1}}\cdot\frac{13}{52-(4-1)}$$

En general

$$p(x) = P[X = x] = \frac{\binom{39}{x-1}}{\binom{52}{x-1}}\left[\frac{13}{52-(x-1)}\right] \;;\quad x = 1,2,3,\ldots,40.$$

es la función de probabilidad de la variable aleatoria **X**.

(b) $X(\omega)$ = número de cartas extraídas, hasta que aparezca un as.

$$R_X = \{1,2,3,4,\ldots,49\}.$$

Calculemos ahora la función de probabilidad de la variable aleatoria **X** .

$$p(1) = P[X = 1] = \frac{\binom{48}{0}}{\binom{52}{0}}\cdot\frac{4}{52}$$

$$p(2) = P[X = 2] = \frac{\binom{48}{2-1}}{\binom{52}{2-1}}\cdot\frac{4}{52-(2-1)}$$

$$p(3) = P[X = 3] = \frac{\binom{48}{3-1}}{\binom{52}{3-1}}\cdot\frac{4}{52-(3-1)}$$

En general

$$p(x) = P[X = x] = \frac{\binom{48}{x-1}}{\binom{52}{x-1}} \cdot \frac{4}{52-(x-1)} \quad ; \; x = 1,2,3,4,\ldots,49$$

es la probabilidad de la variable aleatoria X .

EJEMPLO 13 La variable aleatoria X toma los valores 0,1,2,3, ... con probabilidad .

$$P[X = x_i] = \frac{c}{3^{x_i}} \quad ; \quad x_i = 0,1,2,3,\ldots$$

(a) Calcular el valor de la constante c .

(b) Cálcular la probabilidad que X tome un valor impar .

SOLUCION (a) por la segunda condición de la definición de función de probabilidad

$$\sum_{x_i=0}^{\infty} \frac{c}{3^{x_i}} = c\left[1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \ldots\right] = c\left[\frac{1}{1-\frac{1}{3}}\right] = 1$$

de donde $c = \frac{2}{3}$.

(b) Sea A, el evento: "la variable aleatoria X toma un valor impar".
La probabilidad del evento A se determina por la fórmula (I) .

$$P[A] = \sum_{x_i \text{ es impar}} P[X = x_i] = \frac{2}{3}\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^5} + \frac{1}{3^7} + \ldots\right]$$

$$= \frac{2}{9}\left[1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{3^6} + \ldots\right]$$

$$= \frac{2}{9}\left[\frac{1}{1-\frac{1}{9}}\right] = \frac{1}{4} .$$

EJEMPLO 14 Una urna contiene 8 bolas blancas y 12 negras. Se extraen las bolas una a una, sin reposición, hasta que hayan aparecido 5 blancas. Hallar - función de probabilidad del número de extracciones.

SOLUCION Definimos la variable aleatoria X por

$X(\omega)$ = número de extracciones hasta obtener 5 blancas.

$$R_X = \{5,6,7,8,9,10,11, \ldots, 17\}$$

un esboso del espacio muestral es el siguiente

$$\Omega = \{BBBBB,\ \underbrace{BBBBN}_{P_5^{4,1}}\underbrace{B}_{\text{fijo}},\ \underbrace{BBBBNN}_{P_6^{4,2}}\underbrace{B}_{\text{fijo}},\ \ldots\}$$

$$p(5) = P[X = 5] = P[BBBBB] = \frac{\binom{8}{5}}{\binom{20}{5}}$$

$p(6) = P[X = 6] = P[4B$ en las 5 primeras extracciones y la última una B $] = P[4B$ en las 5 primeras extracciones $]\ P[$una B en la sexta dado - 4B$]$

$$= \frac{\binom{8}{4}\binom{12}{1}}{\binom{20}{5}} \cdot \frac{4}{15} = \frac{\binom{8}{4}\binom{12}{(6-1)-4}}{\binom{20}{6-1}} \cdot \frac{4}{20-(6-1)}$$

$p(7) = P[X = 7] = P[4B$ en las 6 primeras extracciones y la última - una B$] = P[4B$ en los 6 primeras extracciones$]\ P[$una B en la septima dado 4B$]$

$$= \frac{\binom{8}{4}\binom{12}{2}}{\binom{20}{6}} \cdot \frac{4}{14} = \frac{\binom{8}{4}\binom{12}{(7-1)-4}}{\binom{20}{7-1}} \cdot \frac{4}{20-(7-1)}$$

En general se tiene que,

$p(x) = P[X = x] = P[4B$ en las x-1 primeras extracciones, las demás negras y la última una B $] = P[4B$ en las x-1 primeras extracciones, las demás negras$]\ P[$x-ésima una B dado que se tienen 4B$]$.

$$p(x) = P[X = x] = \frac{\binom{8}{4}\binom{12}{(x-1)-4}}{\binom{20}{x-1}} \left[\frac{4}{20-(x-1)}\right], \quad x = 5,6,\ldots,17$$

es la función de probabilidad de la variable aleatoria X .

EJEMPLO 15 Hallar la función de probabilidad de la variable aleatoria **X**, el número de veces que se lanza una moneda hasta obtener cara:

(i) por primera vez.

(ii) por segunda vez.

SOLUCION En cada caso la variable aleatoria X se define respectivamente por

(*i*) $X(\omega)$ = número de veces que se lanza una moneda hasta obtener una cara.

$$R_X = \{1,2,3,\ldots\}, \qquad \Omega = \{C, SC, SSC, \ldots\}$$

Obtención de la función de probabilidad de X .

$$p(1) = P[X = 1] = \frac{1}{2}$$

$$p(2) = P[X = 2] = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = (\tfrac{1}{2})^2$$

$$p(3) = P[X = 3] = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = (\tfrac{1}{2})^3$$

En general

$$p(x) = P[X = x] = (\tfrac{1}{2})^x , \quad x = 1,2,3, \ldots$$

es la función de probabilidad de X .

(*ii*) $X(\omega)$ = número de veces que se lanza una moneda hasta obtener 2 caras.

$$R_X = \{2,3,4,5, \ldots\}$$

$$\Omega = \{CC, \underbrace{SC}_{P_2^{1,1}} \underset{\text{fijo}}{\overset{}{C}}, \underbrace{SSC}_{P_3^{2,1}} \underset{\text{fijo}}{C}, \underbrace{SSSC}_{P_4^{3,1}} \underset{\text{fijo}}{C}, \ldots\}$$

Obtendremos ahora la función de probabilidad de X .

$$p(2) = P[X = 2] = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = (\tfrac{1}{2})^2 = \binom{1}{1}(\tfrac{1}{2})^2$$

$$p(3) = P[X = 3] = \binom{2}{1}(\tfrac{1}{2})^3$$

$$p(4) = P[X = 4] = \binom{3}{1}(\tfrac{1}{2})^4 \qquad \text{recuerde que } \binom{3}{1} = \binom{3}{2}$$

$$p(5) = P[X = 5] = \binom{4}{1}(\tfrac{1}{2})^5 \qquad \text{y en general } \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1}$$

por lo tanto, en general se tiene

$$p(x) = P[X = x] = \binom{x-1}{1}(\tfrac{1}{2})^x , \qquad x = 2,3,4, \ldots$$

es la función de probabilidad de X .

2.2.2 FUNCION DE DISTRIBUCION DE UNA VARIABLE ALEATORIA DISCRETA

Otro concepto importante en el desarrollo de los siguientes capítulos - es el de *función de distribución, o función de distribución acumulativa*, como se conoce algunas veces, debido a que se considera eventos de la forma:

$[X \leq x]$ y su probabilidad inducida $P[X \leq x]$.

DEFINICION 2.2.3 Sea X una variable aleatoria discreta con rango $R_X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ y función de probabilidad, $p(x_i) = P[X = x_i]$, sea x un número real cualquiera, *la Función de Distribución* de X se denota por - "F(x)" y se define como

$$F(x) = P[X \leq x] = \sum_{x_i \leq x} p(x_i) = \sum_{x_i \leq x} P[X = x_i]$$

EJEMPLO 16 En el ejemplo 3. El lanzamiento de una moneda tres veces y - $X(\omega) = n_c - n_s$. Hemos calculado la distribución de probabilidad.

$$p(-3) = \frac{1}{8}, \quad p(-1) = \frac{3}{8}, \quad p(1) = \frac{3}{8} \quad \text{y} \quad p(3) = \frac{1}{8}$$

Calculemos ahora la función de distribución para esta variable aleatoria. En efecto, desde que F(x) está definida para todo $x \in \mathbb{R}$, consideremos los siguientes casos :

1. Si $x < -3$, es claro que

$$F(x) = P[X \leq x] = \sum_{x_i \leq x} p(x_i) = 0 .$$

2. Si $x = -3$, $F(-3) = P[X \leq -3] = \sum_{x_i \leq -3} p(x_i) = p(-3) = \frac{1}{8}$.

3. Si $x \in [-3, -1\rangle$, $F(x) = P[X \leq x] = \sum_{x_i \leq x} p(x_i) = p(-3) = \frac{1}{8}$

4. Si $x = -1$, $F(-1) = P[X \leq -1] = \sum_{x_i \leq -1} p(x_i)$

$$= p(-3) + p(-1) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{4}{8} .$$

5. Si $x \in [-1, 1\rangle$, $F(x) = P[X \leq x] = \sum_{x_i \leq x} p(x_i) = p(-3) + p(-1) = \frac{4}{8}$

6. Si x=1, $F(1) = P[X \leqslant 1] = \sum_{x_i \leqslant 1} p(x_i) = p(-3) + p(-1) + p(1) = \frac{4}{8} + \frac{3}{8} = \frac{7}{8}$.

7. Si $x \in [1,3\rangle$, $F(x) = P[X \leqslant x] = \sum_{x_i \leqslant x} p(x_i) = p(-3) + p(-1) + p(1) = \frac{7}{8}$.

8. Si x = 3, $F(3) = P[X \leqslant 3] = \sum_{x_i \leqslant 3} p(x_i) = p(-3) + p(-1) + p(1) + p(3)$

$$= \frac{7}{8} + \frac{1}{8} = 1 .$$

9. Si x > 3, $F(x) = P[X \leqslant x] = \sum_{x_i \leqslant x} p(x_i) = p(-3) + p(-1) + p(1) + p(3) = 1.$

NOTA 1 El lector habrá observado, que si $x \in [-3,-1\rangle$, entonces $F(x) = F(-3)$; Si $x \in [-1, 1\rangle$, $F(x) = F(-1)$. etc. En general, si

$$x \in [x_k, x_{k+1}\rangle$$

se verifica que $F(x) = F(x_k)$, donde x_k, y x_{k+1} son elementos del rango de **X**. (ver 2.2.3).

Luego, la función de distribución podemos escribir así,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ Si } \quad x < -3 \\ 1/8 & , \text{ Si } \quad -3 \leqslant x < -1 \\ 4/8 & , \text{ Si } \quad -1 \leqslant x < 1 \\ 7/8 & , \text{ Si } \quad 1 \leqslant x < 3 \\ 1 & , \text{ Si } \quad x \geqslant 3 \end{cases}$$

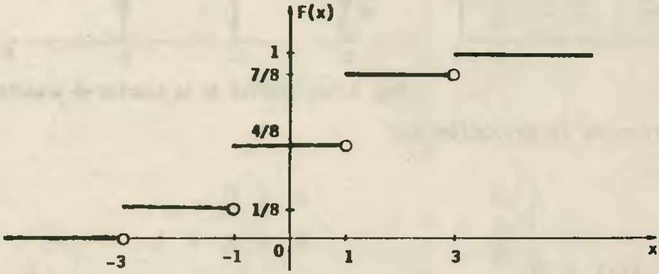


Fig. 2.2.5. Gráfica de la función de distribución del experimento lanzan una moneda tres veces, $X = n_C - n_S$

La función de distribución se representa también en una tabla como la siguiente,

Representación Tabular

x	- 3	- 1	1	3
$p(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$
$F(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{7}{8}$	1

EJEMPLO 17 En un lote de 8 artículos hay dos defectuosos. Del lote se toma al azar una muestra (sin restitución) de cuatro artículos. Sea **X** el número - de artículos defectuosos en la muestra.

(a) Determine la función de probabilidad de **X**, construya su gráfica.

(b) Determine la función de distribución y construya su gráfica.

SOLUCION (a) X = número de artículos defectuosos en la muestra de 4.

$$R_X = \{0,1,2\} .$$

El espacio muestral tiene $\binom{8}{4}$ elementos . Por lo tanto

$$p(x) = \frac{\binom{2}{x}\binom{6}{4-x}}{\binom{8}{4}} , \quad x = 0,1,2 .$$

Representación Tabular

x	0	1	2
$p(x)$	$\frac{15}{70}$	$\frac{40}{70}$	$\frac{15}{70}$

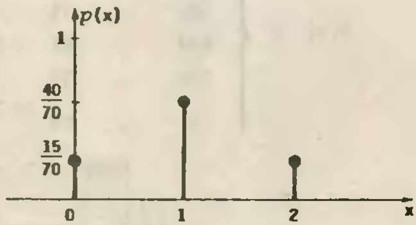


Fig. 2.2.6. Gráfica de la función de probabilidades.

(b) La función de distribución es,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ \frac{15}{70} & , \quad 0 \leq x < 1 \\ \frac{55}{70} & , \quad 1 \leq x < 2 \\ 1 & , \quad 2 \geq x \end{cases}$$

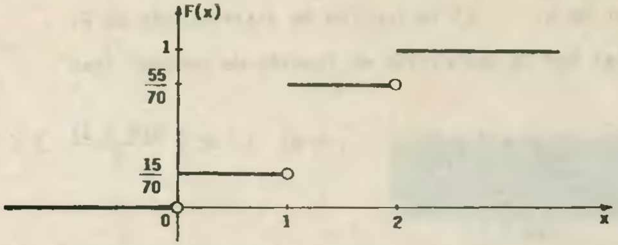


Fig. 2.2.7. Gráfica de la función de distribución

EJEMPLO 18 Sea $p(x) = P[X = x] = \frac{2}{3}(\frac{1}{3})^{x-1}$, $x = 1,2,3, \ldots$

Hallar la función de distribución F(x) .

SOLUCION

1. Si $x < 1$, es claro que $F(x) = 0$.

2. Si x es un número real mayor o igual que uno $(x \geq 1)$

$$F(x) = P[X \leq x] = \sum_{k=1}^{[\![x]\!]} \frac{2}{3}(\frac{1}{3})^{k-1}$$

$$= \frac{2}{3}\left[1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \ldots + (\frac{1}{3})^{[\![x]\!]-1}\right]$$

$$= \frac{2}{3}\left[\frac{1 - (\frac{1}{3})^{[\![x]\!]-1}(\frac{1}{3})}{1 - \frac{1}{3}}\right]$$

$$= \frac{2}{3}\left[\frac{1 - (\frac{1}{3})^{[\![x]\!]}}{\frac{2}{3}}\right] = 1 - (\frac{1}{3})^{[\![x]\!]}$$

De (1) y (2) Se tiene que la función de distribución es,

$$F(x) = \begin{cases} 1 - (\frac{1}{3})^{[\![x]\!]} & , \quad x \geq 1 \\ 0 & , \quad x < 1 \end{cases}$$

EJEMPLO 19 Dada la función de probabilidad de la variable aleatoria X ; $p(x) = 2kx$, donde k es una constante y $x = 1,2,3, \ldots, n$. Hallar :

(a) el valor de k; (b) la función de distribución de **X**.

SOLUCION (a) Por la definición de función de probabilidad

$$\sum_{x=1}^{n} 2kx = 2k(1+2+3+\ldots+n) = 2k\left[\frac{n(n+1)}{2}\right] = 1$$

de donde $k = \dfrac{1}{n(n+1)}$

Por lo tanto, la función de probabilidad de **X** es

$$p(x) = \frac{2x}{n(n+1)} \quad , \quad x = 1,2,3,\ldots,n.$$

(b) Desde que $F(x)$ está definida para todo $x \in \mathbb{R}$, consideremos :

1. Si $x < 1$, es claro que $F(x) = 0$.
2. Si $1 \leq x < n$, entonces

$$F(x) = P[X \leq x] = \sum_{x_i \leq x < n} p(x_i)$$

$$= \sum_{x_i=1}^{[\![x]\!]} \frac{2x_i}{n(n+1)} = \frac{2}{n(n+1)}\left[1+2+\ldots+[\![x]\!]\right]$$

$$= \frac{2}{n(n+1)} \cdot \frac{[\![x]\!]\,([\![x]\!]+1)}{2} = \frac{[\![x]\!]\,([\![x]\!]+1)}{n(n+1)} .$$

3. Si $x \geq n$, es claro que $F(x) = 1$.

De (1), (2) y (3) obtenemos ,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 1 \\ \dfrac{[\![x]\!]\,([\![x]\!]+1)}{n(n+1)} & , \quad 1 \leq x < n \\ 1 & , \quad x \geq n \end{cases}$$

EJEMPLO 20 Se lanza un dado dos veces, llamamos x al resultado del primer - lanzamiento e y del 2do lanzamiento. Definimos la variable aleatoria **X** de la siguiente forma :

$$X(x,y) = \begin{cases} x - y & \text{Si} \quad x \geq y \\ x + y & \text{Si} \quad x < y \end{cases}$$

Determinar el rango de la variable aleatoria, las probabilidades asociadas, y la función de distribución asociada.

SOLUCION Para hallar el rango de la variable aleatoria, por facilidad construimos una tabla de doble entrada como sigue. El espacio muestral del experimento "lanzar un dado dos veces" es

$$\Omega = \{(x, y) \;/\; x, y = 1,2 \dots , 6\}$$

La variable aleatoria

$$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

esta definida por

$$X(x,y) = \begin{cases} x - y \;, & x \geq y \\ x + y \;, & x < y \end{cases}$$

y \ x	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	3	4	5
2	3	0	1	2	3	4
3	4	5	0	1	2	3
4	5	6	7	0	1	2
5	6	7	8	9	0	1
6	7	8	9	10	11	0

Luego,

$$X(1, 1) = 1 - 1 = 0$$
$$X(1,2) = 1 + 2 = 3$$

etc.

De la tabla vemos que $R_X = X(\Omega) = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11\}$.
El espacio muestral del experimento tiene 6 x 6 = 36 elementos. Entonces la probabilidad asociada a cada valor de X se obtiene contando los casos favorables en la tabla y dividiendo por 36. Los probabilidades asociadas y la fundición de distribución para cada uno de estos valores se da en la tabla siguiente

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$P[X = x]$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
$F_X(x)$	$\frac{6}{36}$	$\frac{11}{36}$	$\frac{15}{36}$	$\frac{19}{36}$	$\frac{22}{36}$	$\frac{25}{36}$	$\frac{27}{36}$	$\frac{30}{36}$	$\frac{32}{36}$	$\frac{34}{36}$	$\frac{35}{36}$	$\frac{36}{36}$

EJEMPLO 21 Se tiene una urna con 2 bolas negras, 3 bolas blancas y 4 rojas. Se extrae sucesivamente una bola sin reposición hasta que salga una roja. Hallar la distribución (función de cuantía), del número de extracciones que hay que realizar y la función de distribución (función de probabilidad acumulada) correspondiente. Graficarlas.

SOLUCION La variable aleatoria **X** está definida por

$X(\omega)$ = número de extracciones hasta obtener una bola roja.

$$R_X = \{1,2,3,4,5,6\}$$

El espacio muestral asociado al experimento es

$$\Omega = \{R, \bar{R}\,R, \bar{R}\,\bar{R}\,R, \bar{R}\,\bar{R}\,\bar{R}\,R, \bar{R}\,\bar{R}\,\bar{R}\,\bar{R}\,R, \bar{R}\,\bar{R}\,\bar{R}\,\bar{R}\,\bar{R}\,R\}$$

Entonces;

$$p(1) = P[X = 1] = P[R] = \frac{4}{9}$$

$$p(2) = P[X = 2] = P[\bar{R}\,R] = \frac{5}{9}\cdot\frac{4}{8} = \frac{5}{18}$$

$$p(3) = P[X = 3] = P[\bar{R}\,\bar{R}\,R] = \frac{5}{9}\cdot\frac{4}{8}\cdot\frac{4}{7} = \frac{10}{63}$$

$$p(4) = P[X = 4] = P[\bar{R}\,\bar{R}\,\bar{R}\,R] = \frac{5}{9}\cdot\frac{4}{8}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{4}{6} = \frac{5}{63}$$

$$p(5) = P[X = 5] = P[\bar{R}\,\bar{R}\,\bar{R}\,\bar{R}\,R] = \frac{5}{9}\cdot\frac{4}{8}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{4}{5} = \frac{2}{63}$$

$$p(6) = P[X = 6] = P[\bar{R}\,\bar{R}\,\bar{R}\,\bar{R}\,\bar{R}\,R] = \frac{5}{9}\cdot\frac{4}{8}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{5}\cdot 1 = \frac{1}{126}$$

La representación Tabular de la función de cuantía y la función de distribución es

x	1	2	3	4	5	6
$p(x)$	$\frac{4}{9}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{10}{63}$	$\frac{5}{63}$	$\frac{2}{63}$	$\frac{1}{126}$
$F(x)$	$\frac{4}{9}$	$\frac{13}{18}$	$\frac{111}{126}$	$\frac{121}{126}$	$\frac{125}{126}$	1

F(x) se escribe también

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 1 \\ 4/9 & , \quad 1 \le x < 2 \\ 13/18 & , \quad 2 \le x < 3 \\ 111/126 & , \quad 3 \le x < 4 \\ 121/126 & , \quad 4 \le x < 5 \\ 125/126 & , \quad 5 \le x < 6 \\ 1 & , \quad x \ge 6 \end{cases}$$

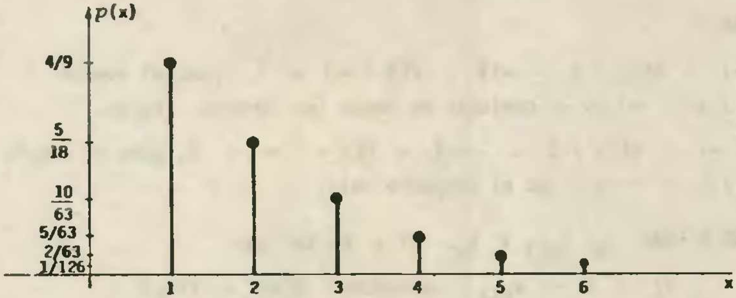


Fig. 2.2.8

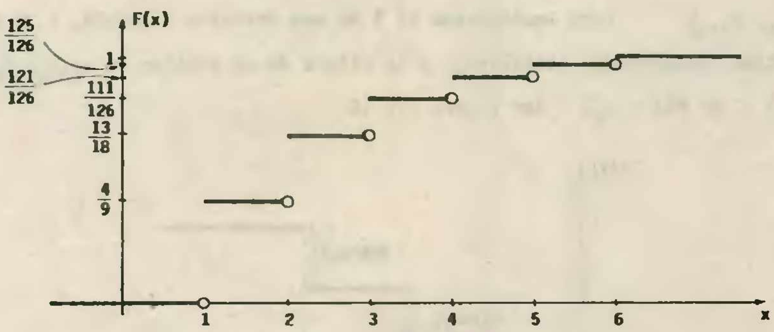


Fig. 2.2.9

2.2.3 PROPIEDADES DE LA FUNCION DE DISTRIBUCION

NOTACION Usaremos las siguientes notaciones :

$$F(\infty) \text{ en vez de } \lim_{x \to \infty} F(x) \quad \text{y} \quad F(-\infty) \text{ en vez de } \lim_{x \to -\infty} F(x)$$

PROPIEDAD 1 $0 \le F(x) \le 1$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, pués F(x) es una probabilidad para cualquier x real y las probabilidades están limitadas por 0 y 1.

PROPIEDAD 2 $F(x)$ es una función no decreciente.

En efecto, sean $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tales que $x_1 \leq x_2$, entonces se tiene

$$\{x \,/\, X \leq x_1\} \subset \{x \,/\, X \leq x_2\}$$

Aplicando probabilidades a ambos eventos, por el teorema 1.6.3

$$F(x_1) = P[X \leq x_1] \leq P[X \leq x_2] = F(x_2)$$

obtenemos

$$F(x_1) \leq F(x_2)$$

PROPIEDAD 3

(a) $F(\infty) = P[\{x \,/\, X < \infty\}] = P[X < \infty] = 1$, pués el evento $\{x \,/\, x < \infty\}$ es el conjunto de todos los números reales.

(b) $F(-\infty) = P[\{x \,/\, X < -\infty\}] = P[X < -\infty] = 0$, pués el evento $\{x \,/\, X < -\infty\}$, es el conjunto nulo.

PROPIEDAD 4 Sea $x_k, x_{k+1} \in R_X$, si x es tal que

$$x_k \leq x < x_{k+1}, \text{ entonces } F(x) = F(x_k)$$

Es decir, la función $F(x)$ es constante e igual a $F(x_k)$ para todo $x \in [x_k, x_{k+1}\rangle$. Esto implica,que si X es una variable discreta, $F(x)$ es una función "escalonada" (escalera), y la altura de un escalón en $x_k (x_k \in R_X)$ es igual a la $P[X = x_k]$ Ver figura 2.2.10.

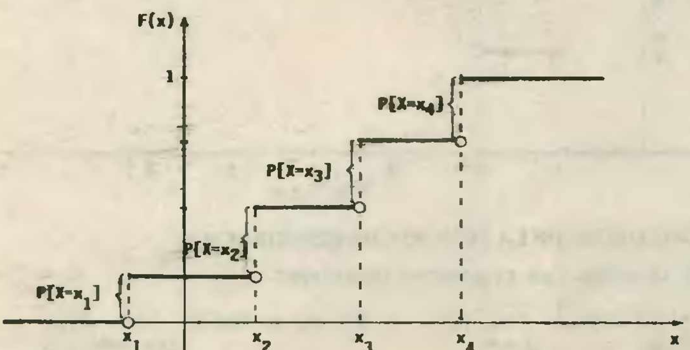


Fig. 2.2.10. Función de distribución

NOTA 2 (a) La función de distribución dá directamente

$$P[X \leq a] = F(a)$$

(b) $P[X \geq a] = 1 - P[X < a] = 1 - F(a - 1)$, Si a es entero y

$= 1 - F(\llbracket a \rrbracket)$, si a no es entero

(c) La función de distribución $F(x)$ se puede usar para determinar probabilidades de cualquier clase con relación a X; en particular consideremos el evento

$$(a < X \leq b), \quad a,b \in \mathbb{R} \text{ y } a < b$$

consideremos los siguientes eventos :

$$A = \{\omega \in \Omega \,/\, X(\omega) \leq a\} = (X \leq a) \quad \ldots\ldots. \quad (1)$$

$$B = \{\omega \in \Omega \,/\, a < X(\omega) \leq b\} = (a < X \leq b)$$

desde que a y b son dos números reales cualesquiera tales, que $a < b$, entonces es claro que $A \cap B = \phi$.

Luego, $P[A \cup B] = P[A] + P[B]$ (2)

pero , $A \cup B = (X \leq a \text{ ó } a < X \leq b) = (X \leq b)$

por lo tanto (2) , se escribe

$$P[X \leq b] = P[X \leq a] + P[a < x \leq b] \quad \text{por (1)}$$

$$F(b) = F(a) + P[a < X \leq b]$$

de donde $\boxed{P[a < X \leq b] = F(b) - F(a)}$ (I)

También podemos calcular $P[a \leq X \leq b]$

$P[a \leq X \leq b] = P[X = a \text{ ó } a < X \leq b]$, Si $a \in R_X$.

desde que los eventos $(X = a)$ y $(a < X \leq b)$ son excluyentes, se tiene

$$P[a \leq X \leq b] = P[X = a] + P[a < x \leq b]$$

$$= P[X = a] + F(b) - F(a) \quad \text{por (I)}$$

por lo tanto,

$\boxed{P[a \leq X \leq b] = F(b) - F(a) + P[X = a]}$ (II)

Supongamos que estamos interesados en $P[a < X < b]$.

En efecto,

$$P[a < X < b] = P[a < X < b] - P[X = b], \quad \text{si } b \in R_X$$
$$= F(b) - F(a) - P[X = b]$$

Luego,

$$\boxed{P[a < X < b] = F(b) - F(a) - P[X = b]} \qquad \text{(III)}$$

También

$$\boxed{p(x_i) = P[X = x_i] = F(x_i) - F(x_i - 1)}$$

El lector puede fácilmente calcular la $P[a \leq X < b]$.

EJEMPLO 22 En el ejemplo 19. Calcular

(a) $P[9 \leq X \leq 20]$; (b) $P[X > 10.8]$.

SOLUCION

(a) $$P[9 \leq X \leq 20] = P[9 < X \leq 20] + P[X = 9]$$
$$= F(20) - F(9) + P[X = 9]$$
$$= \frac{20(21)}{n(n+1)} - \frac{9(10)}{n(n+1)} + \frac{2 \times 9}{n(n+1)}$$
$$= \frac{348}{n(n+1)} .$$

(b) $$P[X > 10.8] = 1 - P[X \leq 10.8] = 1 - F(10.8)$$
$$= 1 - \frac{[\![10.8]\!]([\![10.8]\!] + 1)}{n(n+1)}$$
$$= 1 - \frac{(10)(11)}{n(n+1)} = \frac{n(n+1) - 110}{n(n+1)} .$$

EJEMPLO 23 La variable aleatoria X tiene la siguiente función de distribución acumulativa

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1/8 & 0 \leq x < 1 \\ 1/2 & 1 \leq x < 2 \\ 5/8 & 2 \leq x < 3 \\ 1 & x \geq 3 \end{cases}$$

Calcular : (a) $P[X(\omega) < 0.5] + P[X(\omega) \geq 2]$.

(b) la distribución de probabilidad de X .

SOLUCION

(a) $P[X(\omega) < 0.5] + P[X(\omega) \geq 2] = F(0.5) + 1 - P[X(\omega) < 2]$

$$= \frac{1}{8} + [1 - P[X(\omega) \leq 1]] = \frac{1}{8} + [1 - F(1)]$$

$$= \frac{1}{8} + [1 - \frac{1}{2}] = \frac{1}{8} + \frac{1}{2} = \frac{5}{8} .$$

(b) Teniendo en cuenta la propiedad 4 de la función de distribución, se tiene que el rango de la variable aleatoria X es el conjunto {0,1,2,3} y la distribución de probabilidad es

x	0	1	2	3
$p(x)$	1/8	3/8	1/8	3/8

PROBLEMAS 2.2

1. Para cada uno de las siguientes funciones, determine la constante k para que $p(x)$ satisfaga las condiciones de una función de probabilidad para una variable aleatoria X

(a) $p(x) = \frac{x}{k}$, $x = 1,2,3,4$;

(b) $p(x) = xk$, $x = 1,2,3, \ldots , 10,11,12$;

(c) $p(x) = k(\frac{1}{5})^x$, $x = 0,1,2,3, \ldots$;

(d) $p(x) = k(x+1)^2$, $x = 1,2,3.$

2. Consideremos el experimento de escoger un entero de 1 a 20 aleatoriamente Definimos la variable aleatoria X por: $X(\omega) = 0$ Si el entero escogido es divisible por 2, $X(\omega) = 1$. Si es divisible por 3 pero no por 2 y $X(\omega) = 5$ en otros casos. Determinar :

(a) la función de probabilidad asociado a la variable aleatoria X y su gráfica.

(b) la función de distribución asociado a X y su gráfica

(c) la probabilidad de que $X \geq 3$ y $X > 0$

3. La variable aleatoria X representa el número de bolas blancas de una muestra de tamaño 2, extraída, sucesivamente y sin reposición de una urna que contiene 6 bolas de las cuales 4 son blancas.
(a) Describir el dominio de X .
(b) Evaluar $X(\omega)$ para cada $\omega \in \Omega$.
(c) Evaluar y graficar la función de cuantía de X .
(d) Evaluar y graficar la función de distribución de X.

4. En un lote de ocho artículos hay dos defectuosos. Del lote se toma al azar una muestra (sin restitución) de cuatro artículos. Sea X el número de artículos defectuosos de la muestra. Determinar :
(a) el dominio de rango de X.
(b) La función probabilidad de X y su gráfica.
(c) La función de distribución de X y su gráfica.

5. Sea X, la variable aleatoria que describe el lanzamiento de un dado cargado. La distribución de probabilidad de X está dado por :

$$p(1) = p(2) = \frac{1}{6} \; ; \quad p(3) = \frac{1}{12} \; ; \quad p(4) = p(5) = \frac{1}{4} \; ; \quad p(6) = d$$

(a) Determine el valor de d .
(b) Calcule la función de distribución en $x = 3.6$, o sea $F(3.6)$
(c) Hallar $P[3 \leq X < 5]$.

6. Determine la distribución de probabilidad de la variable aleatoria X, definida en el problema 2.1.6 .

7. Durante el curso de un día, una máquina produce tres artículos, cuya calidad individual, definida como defectuosos o no defectuoso, se determina al final del día. Sea X la variable aleatoria que representa al número de unidades defectuosos. Suponga que cada punto del espacio muestral tiene igual probabilidad. Determinar :
(a) el dominio de X .
(b) la distribución de probabilidad de X y su gráfica.
(c) la función de distribución de X y su gráfica.

8. En el problema anterior (7), suponga que un artículo defectuoso representa una pérdida de $, 250.00. Sea X la variable aleatoria que representa la utilidad total diaria. Suponiendo que cada punto del espacio muestral tiene igual probabilidad, hallar la distribución la probabilidad para X . Un artículo no defectuoso representa una ganancia de $ 1000.

9. Una urna contiene 10 bolas numeradas 1,2,3, . . . , 10 respectivamente. - Sea X el número que se obtiene al extraer al azar una bola de la urna. Hallar :
(a) la función de probabilidad de X y su gráfica
(b) la función de distribución de X y su gráfica
(c) generalice el problema a una urna con n bolas numeradas de 1,2,...,n.

10. Sea la urna definida en el problema 9. Se extraen dos bolas sin reemplazamiento, y sea X la suma de los números que se obtienen. Hallar la distribución de probabilidad de X. Bosquejar su gráfica. La función de distribución - de X.

11. Suponer que en el problema 10, se extraen las bolas con reemplazo y define - la variable aleatoria X como la suma de los números que se obtienen. Hallar la función de probabilidad de X y bosquejar su gráfica.

12. Se tiene una urna con 3 fichas negras y 2 rojas. Se extraen sucesivamente una ficha sin reposición hasta que salga una roja. Sea X el número de extracciónes que hay que realizar. Determinar :
(a) Los valores que puede tomar la variable y sus probabilidades asociadas
(b) la función de distribución acumulativa y diseñar su gráfica.

13. Hay 10 estudiantes inscritas en una clase de estadística, de entre los - cuales 3 tiene 19 años, 4 tienen 20, 1 tiene 21, 1 tiene 24 y 1 tiene 26 años. De esta clase se seleccionan dos estudiantes al azar sin reemplazamiento. Sea X la edad promedio de los 2 estudiantes seleccionados. Hallar la distribución de probabilidad de X y su función de distribución.

14. Un hombre tiene cuatro llaves en su llavero. Como está oscuro, no puede - ver cuál es la llave de la puerta de su casa, por lo que prueba cada uno, hasta encontrar la correcta. Sea X el número de llaves que se prueba (incluyendo la correcta) para abrir la puerta. ¿Cuál es la distribución de - probabilidad de X? ¿Cuál es la función de distribución de X? .

15. Se tiene una urna con 3 fichas, numeradas de 1 a 3. Se extrae al azar una ficha, luego se lanza una moneda tantas veces como indica el número de la ficha obtenida. Si X representa el número de caras, Determinar:
(a) el dominio de X
(b) el rango y las probabilidades asociadas.
(c) la distribución de probabilidad y su gráfica.
(d) la función de distribución y su gráfica.

16. Una urna contiene 8 bolas númeradas de 1 a 8. Se extrae dos bolas sucesivamente y con reposición, X representa el mínimo entre los dos números anotados en las bolas extraídas. Determinar :
(a) el dominio de X
(b) el rango y la función de cuantía de X.
(c) la función de distribución de X.
(d) los elementos de los eventos $[X \leq 2.5]$, $[X \leq 5.75]$, $[X > 6.90]$
(e) $P[X \leq 5.75]$, $P[1.75 \leq X \leq 6.75]$

17. En determinada ciudad 1/3 de las familias no tienen automóvil, 1/3 tiene uno, 1/6 tiene dos, 1/12 tiene tres y 1/12 tiene cuatro automóviles. Cada automóvil tiene 5 llantas. Sea X la variable aleatoria que representa el número de llantas por familia. ¿Cuál es
(a) el dominio de X ?
(b) el rango de X ?
(c) la distribución de probabilidad de X ? gráficar
(d) la función de distribución de X ? gráficar

18. Suponga que al pasar un neutrón a través del plutonio pueda con igual probabilidad dejar libre 1,2 ó 3 neutrones y que esta segunda generación de neutrones pueda a su vez, con igual probabilidad dejar libre 1,2,ó 3 neutrones de la tercera generación. ¿Cuál es la función de probabilidad del número de neutrones de la tercera generación?

19. La variable aleatoria X tiene función de probabilidad definida por

$$P[X = x] = \frac{k}{5^x} , \quad x = 0,1,2, . . .$$

(a) Calcular el valor de la constante k
(b) calcular la probabilidad que X tome un valor par.

20. Se reparten cinco naipes de una baraja de 52 cartas. Sea X el número de - naipes de color rojo repartidos. Determinar :
(a) La función de probabilidad de X .
(b) la función de distribución para X.

21. Determine la función de probabilidad de la variable aleatoria X, el número de ases en una mano de 13 cartas extraídas sin reemplazo de una baraja de 52 cartas.

22. Hallar la función de probabilidad de la variable aleatoria X definida co-

mo el máximo de los números anotados en dos bolas extraídas con reemplazo (sin reemplazo) de una urna que contiene 8 bolas numeradas de 1 al 8.

23. En un lote grande de artículos, el 10% son defectuosos. Se escogen al azar 4 artículos. Escribir la función de probabilidad de la variable aleatoria X, número de artículos defectuosos entre los cuatro escogidos y construir su gráfica.

24. Dos cañones tiran al blanco alternativamente hasta el primer impacto por uno de los cañones. La probabilidad de impacto en el blanco por el primer cañón es igual a 0.30, y por el segundo, 0.70. Comienza a tirar el primer cañón. Hallar la función de probabilidad de la variable aleatoria X e Y, números de proyectiles lanzados por los cañones, primero y segundo respectivamente.

25. Se lanza una serie de cohetes hasta que el primer lanzamiento exitoso tiene lugar. Si esto no ocurre en 5 ensayos, el experimento se detiene y se inspecciona el equipo. Supóngase que hay una probabilidad constante de 0.80 de tener un lanzamiento exitoso y que los ensayos son independientes Además, el costo del primer lanzamiento es k dólares, mientras que los lanzamientos que siguen cuestan $k/3$ dólares. Cada vez que hay un lanzamiento exitoso, se obtiene cierta cantidad de información que puede expresarse como una ganancia financiera de C dólares. Si X es costoso neto del experimento, hallar la distribución de probabilidad de X.

26. La urna I contiene 1 ficha blanca y 2 negras, la urna II contiene 3 fichas blancas y 2 negras, la urna III contiene 2 fichas blancas y 3 negras Extraemos una ficha de cada urna y llamamos X a la variable aleatoria que representa el número de fichas blancas extraídas. Determinar la función de cuantía de la variable aleatoria X(los valores que toma y las probabilidades asociadas).

27. En una caja hay 8 fusibles buenos y 15 defectuosos. Se necesitan 5 fusibles buenos. Se extraen los fusibles uno a uno sin reposición y se va probando, hasta que se obtenga los 5 fusibles buenos. Determinar la función de probabilidad del número de extracciones.

28. En el problema 1c, Calcular la probabilidad que la variable aleatoria tome un valor impar.

29. La variable aleatoria X tiene la siguiente función de distribución acumulada

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 10 \\ 1/4 \ , & 10 \le x < 15 \\ 3/4 \ , & 15 \le x < 20 \\ 1 \ , & x \ge 20 \end{cases}$$

1. (a) Calcular $P[X \le 10.5] + P[X \ge 15.5]$.

(b) Calcular $P[10.2 \le X \le 15.5]$.

(c) Calcular la distribución de probabilidad de la variable aleatoria.

30. La función de distribución de la variable aleatoria X ésta dado por

$$F(x) = \begin{cases} 0 \ , & x < -1 \\ 0.5 \ , & -1 \le x < 0 \\ 0.8 \ , & 0 \le x < 2 \\ 1 \ , & x \ge 2 \end{cases}$$

Determinar :

(a) $P[X \le -0.5] + P[X \ge 1.5]$

(b) la distribución de probabilidad (función de cuantia) de X .

31. Hallar la función de probabilidad de la variable aleatoria X, número de - veces que se lanza una moneda hasta obtener cara por tercera vez.

32. Un jugador que tiene I/. 70, juega con un dado, con la siguiente regla: - En la primera tirada, apuesta I/. 10 a los números pares y desiste si gana. Si pierde, apuesta I/. 20 a los números pares en la segunda tirada y desiste si gana. Si pierde de nuevo, apuesta sus I/. 40 finales a los números pares en la tercera tirada. El juego con un dado duplica la apuesta al ganador. Hallar la distribución de probabilidad de la ganancia neta del jugador.

2.3 VARIABLES ALEATORIAS CONTINUAS

DEFINICION 2.3.1 Si el rango R_X, de una variable aleatoria X es un intervalos sobre la recta de los números reales, se llama ***variable aleatoria continua***.

EJEMPLO 1 La variable aleatoria definida en el ejemplo 2 de 2.1 es una variable aleatoria continua, pues toma todos los valores de un intervalo, por ejemplo [0.5,3] .

EJEMPLO 2 Sea X la variable aleatoria que representa el número de kilogramos que pierde una persona al seguir una dieta específica durante cierto período. Es una variable aleatoria contínua, pues su rango (los valores que puede tomar)son todos los puntos de un intervalo, por ejemplo [1,3] .

2.3.1 FUNCION DE DENSIDAD DE PROBABILIDAD

DEFINICION 2.3.2 Sea X una variable aleatoria contínua con rango R_X. ***La función de densidad de probabilidad*** asociado a la variable aleatoria, es una función $f(x)$ integrable que satisface las siguientes condiciones :

1. $f(x) \geq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$ (o $f(x) > 0$, $x \in R_X$)

2. $$\int_{R_X} f(x)dx = 1 \qquad \left(\text{ó} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1\right)$$

Esta definición indica, la existencia de una función real f definida sobre R_X. La condición (1) establece que la gráfica de la función de densidad está "arriba" del eje X. La condición (2) indica que el área acotada por la curva $f(x)$, el eje X y las rectas verticales que pasan por los puntos extremos de R_X es 1, como se indica en la figura 2.3.1 .

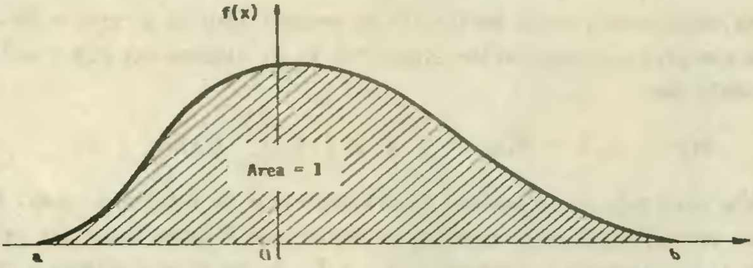


Fig. 2.3.1

Supongamos ahora que estamos interesados en calcular la probabilidad de que la variable aleatoria tome los valores entre a y b, donde el intervalo $[a,b] \subset R_X$. Es decir, queremos calcular la $P[a \leq X \leq b]$; puesto que todo área vale 1, bien podemos definir esta probabilidad como el área acotado por la gráfica de f, las rectas $x = a$, $x = b$ y el eje X. Por lo tanto, la probabilidad del evento

$$A = \{x \mid a \leq X \leq b\}$$

se define como sigue,

$$\boxed{P[A] = P[a \leq X \leq b] = \int_a^b f(x)dx} \qquad (*)$$

Este concepto está ilustrado en la figura 2.3.2.

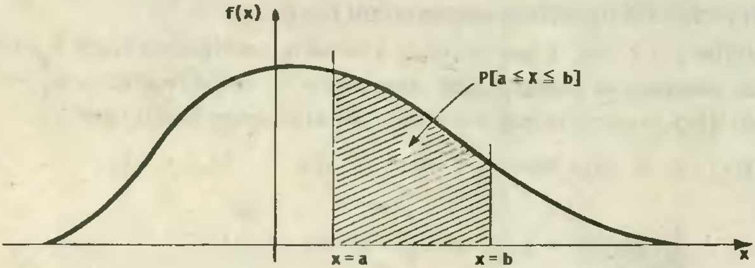


Fig. 2.3.2

OBSERVACIONES

1. Es importante darse cuenta que $f(x)$ no representa la probabilidad de algo y que solamente cuando la función se integra entre dos puntos produce una probabilidad.

2. Una consecuencia de la definición de probabilidad de un evento (ecuación $*$) es que para cualquier valor específico de X, digamos x_o, $P[X = x_o] = 0$, - puesto que

$$P[X = x_o] = P[x_o < X \leq x_o] = \int_{x_o}^{x_o} f(x)dx = 0.$$

Este resultado puede parecer contradictorio a la intuición, pués, si **X** es una variable aleatoria contínua se admite que X asume todos los valores - de algún intervalo, entonces $P[X = x_o] = 0$ no es equivalente a decir - que el evento $[X = x_o]$ en R_X es imposible. Recordemos que si $A = \phi$, entonces $P[A] = 0$, sin embargo el hecho que $P[X = x_o] = 0$ y que el - evento $A = \{x \mid X = x_o\}$ no es vacío indica que la inversa no es verdadera.

3. Una consecuencia inmediata de (2) es el siguiente resultado,

$$P[a \leq X \leq b] = P[a < X \leq b] = P[a < X < b] = P[a \leq X < b]$$

cuando **X** es una variable aleatoria contínua.

EJEMPLO 3 Sea **X** una variable aleatoria con función de densidad·

$$f(x) = \begin{cases} a(3x - x^2) & , \quad \text{si } 0 \leq x \leq 3 \\ 0 & , \quad \text{en otros casos} \end{cases}$$

(a) Hallar el coeficiente a ;

(b) construir la gráfica de la función de densidad de probabilidad ;

(c) Calcular la probabilidad que **X** se encuentre en el intervalo $[1,2]$.

(d) Hallar la probabilidad que **X** se encuentre en el intervalo $\langle -1\,,\,\frac{3}{2}\rangle$

SOLUCION (a) Como todos los valores de variable aleatoria **X** se hallan comprendidos en el intervalo $[\,0,3\,]$. Es decir $R_X = [\,0,3]$. Entonces, por la condición (2) de la definición de función de densidad

$$\int_0^3 a(3x - x^2)dx = a\left[\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^3 = a(\frac{27}{2} - 9) = 1$$

de donde $\quad a = \dfrac{2}{9}$.

(b) La gráfica de la función $f(x)$ en el intervalo $[\,0,3\,]$ es la parábola

$y = \dfrac{2}{3}x - \dfrac{2}{9}x^2$ y fuera de éste intervalo, el gráfico es el propio eje de las abscisas

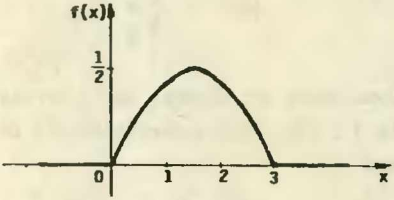


Fig. 2.3.3

(c) La probabilidad que la variable **X** se encuentre en el intervalo $[1,2\,]$ se determina por la ecuación $(*)$.

$$P[1 \leq X \leq 2\,] = \int_1^2 (\frac{2}{3}x - \frac{2}{9}x^2)\,dx = \left[\frac{x^2}{3} - \frac{2x^3}{27}\right]_1^2$$

$$= \frac{4}{3} - \frac{16}{27} - \frac{1}{3} + \frac{2}{27} = \frac{13}{27} .$$

(d) Por la ecuación $(*)$

$$P[-1 < X < \frac{3}{2}\,] = \int_{-1}^{0} 0\,dx + \int_0^{3/2} (\frac{2}{3}x - \frac{2}{9}x^2)dx$$

$$= 0 + \left[\frac{x^2}{3} - \frac{2x^3}{27} \right]_0^{3/2} = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2} .$$

EJEMPLO 4 Sea

$$f(x) = \begin{cases} kx^2 & , \quad \text{Si} \quad |x - 2| \leq 1 \\ 0 & , \quad \text{Si} \quad |x - 2| > 1 \end{cases}$$

(a) Hallar el valor de k tal que f sea una función de densidad de una variable aleatoria continua X ;

(b) Calcular la probabilidad que la variable aleatoria X se encuentre en el intervalo $\langle 2,3 \rangle$

SOLUCION Por la propiedad de valor absoluto

$|x - 2| \leq 1$, si sólo si $-1 \leq x - 2 \leq 1$, de donde $1 \leq x \leq 3$.

$|x - 2| > 1$, si sólo si $x - 2 > 1 \vee x - 2 < -1$ o sea $x > 3 \vee x < 1$

Por lo tanto la función $f(x)$ se escribe

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ k\,x^2 & , \quad 1 \leq x \leq 3 \\ 0 & , \quad x > 3 \end{cases}$$

(a) Como todos los valores de la variable aleatoria se hallan en el intervalo $[1,3]$. Por la condición (2) de la definición de función de densidad

$$\int_1^3 kx^2 dx = k \frac{x^3}{3} \Big|_1^3 = k[9 - \frac{1}{3}] = k \frac{26}{3} = 1$$

de donde $k = \dfrac{3}{26}$.

(b) Por la ecuación (*)

$$P[2 < X < 3] = \int_2^3 \frac{3x^2}{26} dx = \frac{x^3}{26} \Big|_2^3 = \frac{27}{26} - \frac{8}{26} = \frac{19}{26} .$$

EJEMPLO 5 La longitud de vida de una especie de plantas en cierto medio ambiente es una variable aleatoria continua. Supongamos que la función de densidad de X es

$$f(x) = \frac{1}{120} e^{-x/120} , \quad x \geq 0$$

(a) ¿Qué proporción de plantas de esta especie mueren antes de los 100 días.

(b) Si una planta individual vive durante 100 días, ¿Cuál es la probabilidad que viva otros 100 días más?

SOLUCION El rango de la variable aleatoria es

$$R_X = \{x \;/\; 0 \leq x < \infty\}$$

(a) La proporción de plantas que mueren antes de los 100 días está dado por $P[X < 100]$. Aplicando la fórmula de la ecuación (*)

$$P[X < 100] = \int_0^{100} \frac{1}{120} e^{-\frac{x}{120}} dx = - e^{-\frac{x}{120}} \Big|_0^{100} = 1 - e^{-\frac{5}{6}} .$$

(b) Aplicando el concepto de probabilidad condicional dado en el capítulo 1

$$P[X > 200 \mid x > 100] = \frac{P[(X > 200) \cap (X > 100)]}{P[X > 100]}$$

$$= \frac{P[X > 200]}{P[X > 100]} = \frac{e^{-20/12}}{e^{-10/12}} =$$

$$= e^{-10/12} = e^{-5/6} .$$

EJEMPLO 6 Para qué valor de k la función

$$f(x) = \frac{k}{(1 + |x|)^2} , \quad -\infty < x < \infty$$

es una función de densidad de probabilidad.

SOLUCION

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{k\,dx}{(1 + |x|)^2} = \int_{-\infty}^{0} \frac{k\,dx}{(1 - x)^2} + \int_0^{\infty} \frac{k\,dx}{(1 + x)^2}$$

$$= \lim_{t \to -\infty} \frac{k}{1 - x} \Big|_t^0 + \lim_{t \to \infty} - \frac{k}{1 + x} \Big|_0^t = 1$$

de donde $\quad k = \dfrac{1}{2}$.

EJEMPLO 7 La gráfica de la función de densidad de una variable aleatoria continua **X**, es como se muestra en la fig. 2.3.4 . Determinar el número *m* tal que

$$P[X > m] = \frac{1}{2}.$$

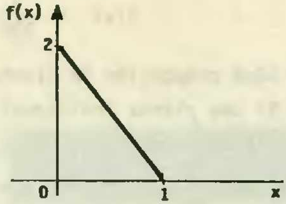


Fig. 2.3.4

SOLUCION De la figura observamos que la recta pasa por los puntos (1,0) y (0,2). Sea $y = ax + b$ la ecuación de la recta, entonces

Si $x = 1$, se tiene $0 = a + b$ (1)

Si $x = 0$, se tiene $2 = 0 + b$ (2)

de (1) y (2) $a = -2$ y $b = 2$

Es decir $y = 2(1 - x)$

Por lo tanto, la función de densidad de la variable aleatoria **X**, es

$$f(x) = \begin{cases} 2(1-x) & , \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & , \quad \text{en otros casos} \end{cases}$$

Cálculo de *m* . Por la ecuación (*)

$$P[X > m] = \int_m^{\infty} f(x)\,dx = \int_m^1 2(1-x)dx + \int_1^{\infty} 0dx = (m-1)^2 = \frac{1}{2}$$

de donde $m = 1 \pm \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

De las dos soluciones escogemos el que se encuentra en el intervalo [0,1]

o se $m = 1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{2 - \sqrt{2}}{2}$

EJEMPLO 8 Un agricultor encuentra que el peso en kilogramos de una papaya es una variable aleatoria **X** con función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{32}(4x - x^2) & , \quad 0 \leq x \leq 4 \\ 0 & , \quad \text{en otros casos} \end{cases}$$

(a) ¿Cuál es la probabilidad que una papaya pese menos de un kilogramo?

(b) Si el agricultor cosecha 20,000 papayas, ¿cuántas de ellas pesa menos -

de un kilogramo?

(c) El agricultor escoge al azar cuatro papayas para regalar a un amigo, ¿cuál es la probabilidad que las cuatro pesen menos de un kilogramo?

SOLUCION La variable aletoria **X** está definido por

$$X(\omega) = \text{peso de una papaya (en kg.)}$$

(a) $$P[X < 1] = \int_0^1 \frac{3}{32}(4x - x^2)dx = \frac{3}{32}(2x^2 - \frac{x^3}{3}) \Big|_0^1 = \frac{3}{32}(2 - \frac{1}{3}) = \frac{5}{32}$$

(b) El número de papayas que pesan menos de un kilogramo es igual a

$$20000\ P[X < 1] = 20000 \times \frac{5}{32} = 3{,}125 \text{ papayas}$$

(c) Sean X_1, X_2, X_3 y X_4 los pesos de las papayas escogidas, entonces se tiene

$$P[X_1 < 1, X_2 < 1, X_3 < 1, X_4 < 1] = (P[X < 1])^4 = (\frac{5}{32})^4$$, pués los X_i son independientes .

EJEMPLO 9 La variable aleatoria **Y**. tiene por función de densidad

$$f(y) = \begin{cases} 1/5 & , \quad 0 \le y \le 5 \\ 0 & , \quad \text{en otro lugar} \end{cases}$$

Calcular la probabilidad que sean reales las raíces de la ecuación

$$4x^2 + 4xy + (y + 2) = 0$$

SOLUCION La solución de la ecuación dada es

$$x = \frac{-4y \pm \sqrt{16y^2 - 4(4)(y+2)}}{8} = \frac{-y \pm \sqrt{y^2 - y - 2}}{2}$$

Las raíces serán reales, esto es $x \in \mathbb{R}$ sólo, si $y^2 - y - 2 \ge 0$

$$y^2 - y - 2 = (y-2)(y+1) \ge 0 \iff \begin{cases} y - 2 \ge 0 \wedge y + 1 \ge 0 \\ \vee \\ y - 2 \le 0 \wedge y + 1 \le 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y \ge 2 \wedge y \ge -1 & (1) \\ \vee \\ y \le 2 \wedge y \le -1 & (2) \end{cases}$$

Luego, la solución a la desigualdad es el intervalo $[2, \infty\rangle \cup \langle -\infty, -1]$ y como el rango de la variable aleatoria es $[0,5]$. Por lo tanto, los valores de y que hacen que la solución de la ecuación sean reales son las $y \in$

$[0,5] \cap ([2, \infty\rangle \cup \langle -\infty, -1])$, es decir $y \in [2,5]$. Luego, la probabilidad que las raíces de la ecuación sean reales es equivalente a calcular

$$P[2 \leq Y \leq 5] = \int_2^5 \frac{1}{5}\,dy = \frac{1}{5}[5-2] = \frac{3}{5}.$$

EJEMPLO 10 La duración (en horas) de cierto transistor de televisor es una variable aleatoria contínua **X**, cuya función de densidad es

$$f(x) = \begin{cases} 150/x^2 & , \quad x > 150 \\ 0 & , \quad \text{en otros casos} \end{cases}$$

(a) Si un transistor determinado todavía funciona después de 200 horas. - ¿Cuál es la probabilidad de que dicho transistor dure a lo más 300 horas?

(b) Se instalan 3 de tales transistores en un televisor. ¿Cuál es la probabilidad de que ninguno tenga que ser sustituído en las primeras 200 horas de uso? ¿Cuál es la probabilidad de que los tres transistores tengan que ser sustituído durante las 200 prìmeras horas? ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente 1 tenga que ser sustituída en las 200 primeras horas de uso?

SOLUCION (a) Por la definición de probabilidad condicional

$$P[X \leq 300 \mid X > 200] = \frac{P[200 < X < 300]}{P[X > 200]}$$

$$= \frac{\int_{200}^{300} 150/x^2 dx}{\int_{200}^{\infty} 150/x^2\,dx} = \frac{-\frac{150}{x}\Big|_{200}^{300}}{\lim\limits_{t\to\infty} -\frac{150}{x}\Big|_{200}^{t}} = \frac{1}{3}$$

(b_1) Sea **A**, el evento: "ninguna tenga que ser sustituída en las primeras 200 horas de uso".

Luego, $P[A] = [P[X > 200]]^3$

Pero $\quad P[X > 200] = \int_{200}^{\infty} \frac{150}{x^2}\,dx = \frac{3}{4}$.

por lo tanto,

$$P[A] = (\tfrac{3}{4})^3 = \frac{27}{64} .$$

(b_2) Sea B, el evento: " los tres transistores tengan que ser sustituída en las primeras 200 horas de uso".

Entonces, $\quad P[B] = [P[X \le 200]]^3$

Pero $\quad P[X \le 200] = \int_{150}^{200} \frac{150}{x^2}\,dx = \frac{1}{4}$.

Luego, $\quad P[B] = (\tfrac{1}{4})^3 = \frac{1}{64}$.

(b_3) Sea C, el evento: "exactamente 1 tenga que ser sustituído en las primeras 200 horas de uso".

Entonces,

$$P[C] = 3[P[X > 200]]^2 \; P[X \le 200] = 3(\tfrac{3}{4})^2 (\tfrac{1}{4}) = \frac{27}{64} .$$

2.3.2 FUNCION DE DISTRIBUCION DE UNA VARIABLE ALEATORIA CONTINUA

DEFINICION 2.3.3 Sea **X** una variable aleatoria contínua con función de densidad $f(x)$. ***La función de distribución*** (*o* ***función de distribución acumulada***) de la variable aleatoria **X**, denotado por "F(x)", se define por

$$\boxed{F(x) = P[X \le x] = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt, \quad \forall\; x \in \mathbb{R}}$$

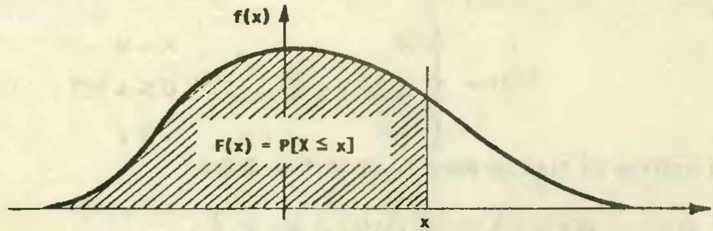


Fig. 2.3.5 El área sombreada es $F(x) = P[X \le x]$

EJEMPLO 11 Sea **X** una variable aleatoria con función de densidad definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3x}{4}(2 - x) & , \quad 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & , \quad \text{en otros casos} \end{cases}$$

(a) Hallar la función de distribución de X y su gráfica.

(b) F(1) .

SOLUCION La función de distribución $F(x)$ está definida para todo $x \in \mathbb{R}$, - entonces consideremos los siguientes casos:

1. Si $x < 0$, $\quad F(x) = P[X \leq x] = \int_{-\infty}^{x} 0dt = 0$.

2. Si $0 \leq x \leq 2$, $\quad F(x) = P[X \leq x] = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dx = \int_{-\infty}^{0} 0\,dt +$

$$+ \int_{0}^{x} \frac{3}{4}\, t(2 - t)\,dt$$

$$= 0 + \frac{3}{4}\left(t^2 - \frac{t^3}{3}\right)\Big|_{0}^{x} = \frac{3}{4}\, x^2 \left(1 - \frac{x}{3}\right) .$$

3. Si $x > 2$, $\quad F(x) = P[X \leq x] = \int_{\infty}^{x} f(t)\,dt = 0 +$

$$+ \int_{0}^{2} \frac{3}{4}\, t\,(2 - t)dt + \int_{2}^{x} 0\,dt = 1 .$$

4. De (1), (2) y (3) la función de distribución de la variable aleatoria X es

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ \frac{3}{4}\, x^2\left(1 - \frac{x}{3}\right) & , \quad 0 \leq x < 2 \\ 1 & , \quad x \geq 2 \end{cases}$$

La gráfica de $F(x)$ se muestra en la fig. 2.3.6

(b) $\quad F(1) = P[X \leq 1] = \frac{3}{4}\,(1)^2\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}$.

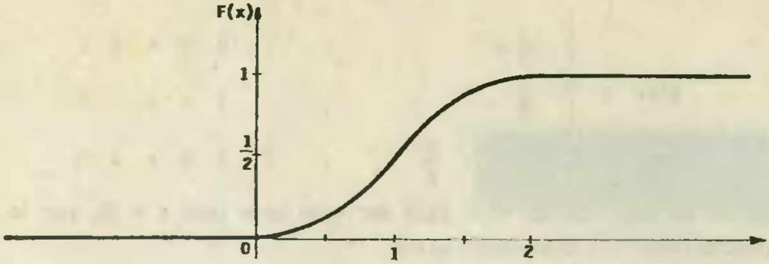


Fig. 2.3.6

EJEMPLO 12 Sea X una variable aleatoria cuya función de densidad está dada por la figura 2.3.7

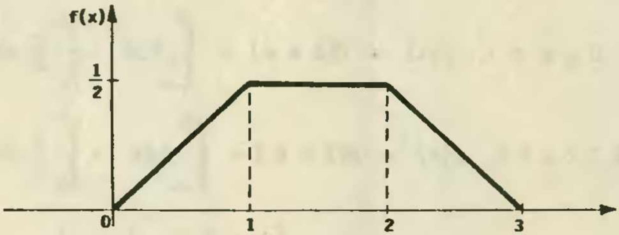


Fig. 2.3.7

(a) Hallar la función de distribución y su gráfica;

(b) Calcular $P[X \le \frac{3}{4}]$, $P[X < \frac{3}{2}]$, $P[X \le 2.4]$.

SOLUCION

1. De la figura, para $0 \le x \le 1$, la función de densidad de la variable aleatoria es una recta que pasa por los puntos $(0,0)$ y $(1, \frac{1}{2})$. Es decir, la ecuación de dicha recta es $\frac{1}{2}x$ para todo $0 \le x \le 1$.
2. Cuando $1 < x \le 2$, la función es constante e igual a $\frac{1}{2}$.
3. Para $2 \le x \le 3$, la función de densidad es una recta de pendiente negativa, pasa por los puntos $(2, \frac{1}{2})$ y $(3,0)$; por lo tanto, la ecuación es

$$- \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} .$$

4. De (1), (2) y (3) la función de densidad de la variable aleatoria está dado por

$$
f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & , \quad 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{2} & , \quad 1 < x < 2 \\ -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} & , \quad 2 \leq x \leq 3 \end{cases}
$$

La función de distribución F(x) está definido para todo $x \in \mathbb{R}$, por lo tanto, consideremos los siguientes casos :

(*i*) Si $x < 0$, $F(x) = P[X \leq x] = \int_{-\infty}^{x} 0dt = 0$

(*ii*) Si $0 \leq x \leq 1$, $F(x) = P[X \leq x] = \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_{0}^{x} \frac{1}{2} tdt = \frac{x^2}{4}$.

(*iii*) Si $1 < x < 2$, $F(x) = P[X \leq x] = \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_{0}^{1} \frac{1}{2} tdt + \int_{1}^{x} \frac{1}{2} dt$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} .$$

(*iv*) Si $2 \leq x \leq 3$, $F(x) = P[X \leq x] = \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_{0}^{1} \frac{1}{2} tdt + \int_{1}^{2} \frac{1}{2} dt +$

$$+ \int_{2}^{x} (-\frac{1}{2}t + \frac{3}{2})dt$$

$$= 1 - \frac{1}{4} + \frac{3}{2}x - \frac{1}{4}x^2 - 3 + 1$$

$$= \frac{3}{2}x - \frac{x^2}{4} - \frac{5}{4} .$$

(*v*) Si $x > 3$, $F(x) = P[X \leq x] = \int_{-\infty}^{2} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_{0}^{3} f(t)\,dt +$

$$+ \int_{0}^{x} 0\,dt = 1$$

Luego, la función de distribución está dado por

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ \frac{1}{4}x^2 & , \quad 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} & , \quad 1 \leq x < 2 \\ \frac{3}{2}x - \frac{x^2}{4} - \frac{5}{4} & , \quad 2 \leq x < 3 \\ 1 & , \quad x \geq 3 \end{cases}$$

La gráfica de F(x) se indica en la fig. 2.3.8

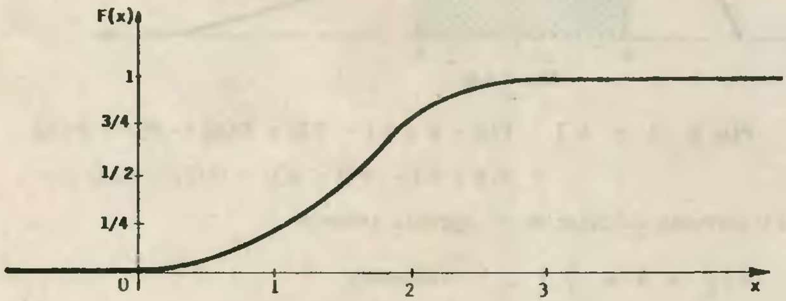


Fig. 2.3.8

(b$_1$) $F(\frac{3}{4}) = P[X \leq \frac{3}{4}] = \frac{1}{4}(\frac{3}{4})^2 = \frac{9}{64}$;

(b$_2$) $F(\frac{3}{2}) = P[X < \frac{3}{2}] = \frac{1}{2}(\frac{3}{2}) - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$;

(b$_3$) $F(2.4) = F(\frac{12}{5}) = P[X \leq \frac{12}{5}] = \frac{3}{2}(\frac{12}{5}) - \frac{\frac{144}{25}}{4} - \frac{5}{4}$

$$= \frac{36}{10} - \frac{36}{25} - \frac{5}{4} = \frac{91}{100} = 0.91 .$$

Por definición, la función de distribución F(x), da la probabilidad de eventos de la forma : $(X \leq a)$, $(X < a)$, $(X > a)$, etc. Es decir,

$$P[X \leq a] = P[X < a] = F(x) = \int_{-\infty}^{a} f(t)\,dt \qquad y$$

$$P[X > a] = 1 - P[X \leq a] = 1 - F(a)$$

La función de distribución también se puede utilizar, para determinar proba bilidades de eventos de la forma :

$$(a \leq X \leq b), \quad (a < X \leq b), \quad (a < X < b) \text{ etc.}$$

En efecto: Sean $a, b \in \mathbb{R}$, tales que $a < b$, entonces

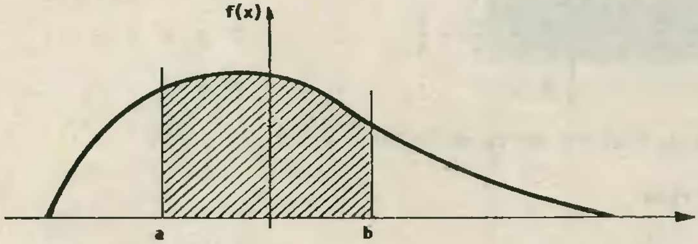


Fig. 2.3.9

$$P[a \leq X \leq b] = P[a < X \leq b] = P[a \leq X \leq b] = P[a < X < b]$$

$$= P[X \leq b] - P[X \leq a] = F(b) - F(a) .$$

Así, si queremos calcular en el ejemplo anterior

$$P[\tfrac{3}{4} \leq X \leq \tfrac{5}{2}] , \quad \text{tendremos}$$

$$P[\tfrac{1}{4} \leq X \leq \tfrac{5}{2}] = F(\tfrac{5}{2}) - F(\tfrac{1}{4})$$

$$= \frac{3}{2}(\frac{5}{2}) - \frac{1}{4}(\frac{5}{2})^2 - \frac{5}{4} - \frac{1}{4}(\frac{3}{4})^2 = \frac{51}{64} .$$

2.3.3 PROPIEDADES DE LA FUNCION DE DISTRIBUCION

Las tres primeras propiedades son los mismos que el caso discreto.

1. $0 \leq F(x) \leq 1 , \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

2. $$F(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} F(x) = \lim_{x \to -\infty} \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt = 0 ;$$

$$F(\infty) = \lim_{x \to \infty} F(x) = \lim_{x \to \infty} \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt = 1 .$$

3. La función de distribución es no decreciente, esto es si $a \leq b$, entonces

$$F(a) \leq F(b)$$

4. $\lim_{h \to 0} F(x + h) = F(x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, con $h > 0$; osea F es continua por la derecha, en todos los puntos.

5. Del segundo teorema fundamental del cálculo se tiene que si F(x) es una función derivable, entonces

$$\boxed{f(x) = \frac{d}{dx} F(x)}$$

EJEMPLO 13 Definida una función F(x) como sigue

$$F(x) = \begin{cases} 1 - ke^{-\frac{x}{2}} & , \quad x \geq 0 \\ 0 & , \quad x < 0 \end{cases}$$

(a) para qué valor de k, F(x) es una función de distribución de una variable aleatoria contínua **X** ;

(b) Determinar, $P[X \geq 2]$, $P[2 \leq X \leq 4]$, $P[X \geq -1]$.

SOLUCION (a) De la definición de la función, F(x), el rango de la variable aleatoria es, $0 \leq x < \infty$, entonces, se debe tener que

$$F(\infty) - F(0) = 1$$

$$1 - 0 - (1 - ke^{o}) = 1$$

de donde $k = 1$

por lo tanto, la función F(x) definida por

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x/2} & , \quad x \geq 0 \\ 0 & , \quad x < 0 \end{cases}$$

es una función de distribución de una variable aleatoria **X** con rango $R_X = [0, \infty\rangle$ y función de densidad

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{-x/2} & , \quad x \geq 0 \\ 0 & , \quad \text{en otros casos} \end{cases}$$

(b_1) $\quad P[X \geq 2] = 1 - P[X < 2] = 1 - F(2)$

$$= 1 - [1 - e^{-1}] = e^{-1}.$$

(b_2) $\quad P[2 \leq X \leq 4] = F(4) - F(2)$

$$= 1 - e^{-2} - (1 - e^{-1}) = \frac{1}{e} - \frac{1}{e^2}.$$

(b_3) $\quad P[X \geq -1] = 1 - P[X < -1] = 1 - F(1) = 1 - 0 = 1.$

EJEMPLO 14 Se selecciona al azar un punto del interior de un triángulo equilátero cuyo lado mide 6 cm. Sea **X** la distancia del punto a la base, determinar la función de distribución y la función de densidad de **X**.

SOLUCION La variable aleatoria **X** está definida por

$X(\omega)$ = la distancia del punto elegido a la base del triángulo es claro que X es una variable aleatoria contínua con rango

$$R_X = \{x \in \mathbb{R} \ / \ 0 < x \leq 3\sqrt{3}\}$$

donde $3\sqrt{3}$ es la altura del triángulo equilátero. Es decir,

$$h = \sqrt{6^2 - 3^2} = 3\sqrt{3}.$$

(a) para $x \leq 0$, la función de distribución $F(x) = 0$.

(b) para $0 < x < 3\sqrt{3}$, se tiene que

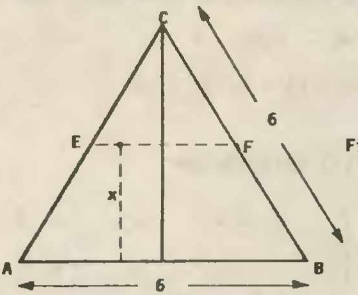


Fig. 3.3.10

$$F(x) = P[X \leq x] = \frac{\text{Area del Trapecio ABEF}}{\text{Area del Triángulo ABC}} = \frac{A_{\triangle\!\!\!-}}{A_\Delta} \qquad (1)$$

$$A_\Delta = \frac{(6)(3\sqrt{3})}{2} = 9\sqrt{3} \qquad (2)$$

$$A_{\triangle\!\!\!-} = \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{EF})x$$

donde X es la altura del Trapecio = distancia del punto elegido a la base.

y $\overline{AB} = 6$

Cálculo de $\overline{EF}$. En los triángulos semejantes de la figura 3.3.10 se tiene

$$\frac{\frac{\overline{EF}}{2}}{3} = \frac{3\sqrt{3} - x}{3\sqrt{3}}, \quad \text{de donde} \quad \overline{EF} = \frac{2(3\sqrt{3} - x)}{\sqrt{3}} .$$

Luego,

$$A_{\triangle} = \frac{1}{2}\left[6 + \frac{2(3\sqrt{3} - x)}{\sqrt{3}}\right] x = \frac{(6\sqrt{3} - x)x}{\sqrt{3}} \qquad (3)$$

reemplazando (2) y (3) en (1) obtenemos,

$$F(x) = P[X \le x] = \frac{\frac{(6\sqrt{3} - x)x}{\sqrt{3}}}{9\sqrt{3}} = \frac{(6\sqrt{3} - x)x}{27} .$$

(c) para los $x > 3\sqrt{3}$, la función $F(x) = 1$.

De (*a*), (*b*) y (*c*) se tiene la función de distribución,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ \dfrac{(6\sqrt{3} - x)x}{27}, & 0 < x < 3\sqrt{3} \\ 1, & x \ge 3\sqrt{3} \end{cases}$$

y la función de densidad de la variable aleatoria X es,

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} \dfrac{6\sqrt{3} - 2x}{27}, & 0 < x \le 3\sqrt{3} \\ 0, & \text{en otros casos} \end{cases}$$

EJEMPLO 15 Una estación de servicio es provisionado de gasolina una vez semanal. El volumen X de la posible venta semanal en miles de galones tiene - la siguiente función de distribución acumulada.

$$F(x) = 1 - (1 - x)^4, \quad 0 < x < 1$$

(a) ¿Cuál debe ser la capacidad de su tanque para que la probabilidad que - su provisión se agota en una semana sea sólo de 0.01?

(b) ¿Cuál es la probabilidad de que la venta semanal este entre 800 y 900 - galones?

SOLUCION (a) Sea C la capacidad del tanque. Por lo tanto, se quiere determinar el valor de C, tal que,

$$0.01 = P[X \geq C]$$
$$= 1 - P[X \leq C]$$
$$= 1 - [1 - (1 - C)^4]$$
$$= (1 - C)^4$$

de donde, $C = 1 - \sqrt{0.1}$.

(b) $P[0.8 < X < 0.9] = F(0.9) - F(0.8) = 1 - (1 - 0.9)^4 - [1-(1-0.8)^4]$

$$= (0.2)^4 - (0.1)^4 = 0.0015 .$$

EJEMPLO 16 La función de distribución de la variable aleatoria contínua X, es

$$F(x) = a + b \text{ arctg } (\tfrac{x}{2}) \quad , \quad x \in \langle -\infty , \infty \rangle$$

Determinar :

(a) las constantes a y b ;

(b) la función de densidad de la variable aleatoria X ;

(c) Calcular $P[2 < X < 2\sqrt{3}]$.

SOLUCION (a) Cálculo de las constantes a y b .

1. $F(-\infty) = a + b \text{ arctg } (-\infty) = 0$, propiedad de F(x) ó $a + b(-\frac{\pi}{2}) = 0$

de donde, $a = \frac{b\pi}{2}$

2. $F(-\infty) = a + b \text{ arctg}(\infty) = 1$, propiedad de F(x) ó $a + b(\frac{\pi}{2}) = 1$

de donde, $a = 1 - \frac{b\pi}{2}$

3. De las ecuaciones (1) y (2) obtenemos, $b = \frac{1}{\pi}$ y $a = \frac{1}{2}$.

por lo tanto, la función de distribución de X es,

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \text{ arctg}(\tfrac{x}{2}) \quad , \quad -\infty < x < \infty$$

(b) Cálculo de la función de densidad de X

$$f(x) = F'(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1/2}{1 + (\frac{x}{2})^2}$$

$$f(x) = \frac{2}{\pi(4 + x^2)} \quad , \quad -\infty < x < \infty$$

(c) $P[2 < x < 2\sqrt{3}] = F(2\sqrt{3}) - F(2)$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}(\sqrt{3}) - [\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}(1)]$$

$$= \frac{1}{12} .$$

PROBLEMAS 2.3

1. ¿Cuales de las siguientes funciones representan, función de densidad de una variable aleatoria contínua X?. Grafique las que sean función de densidad de probabilidad. Determine su rango en cada caso y la función de distribución acumulada.

(a) $$f(x) = \begin{cases} e^x & , \quad -\infty < x < 0 \\ 0 & , \quad x > 0 \end{cases}$$

(b) $$f(x) = \begin{cases} 1 & , \quad -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 0 & , \quad \text{en otros casos} \end{cases}$$

(c) $$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}(1 - x^2) & , \quad -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & , \quad \text{en otros casos} \end{cases}$$

(d) $$f(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|} \quad , \quad -\infty < x < \infty$$

(e) $$f(x) = 1 - |1 - x| \quad , \quad 0 < x < 2$$

(f) $$f(x) = |x| \qquad |x| \leq 1$$

2. Para qué valor de a, la función,

$$f(x) = \frac{2a}{1 + x^2} \quad , \quad -\infty < x < \infty$$

es la función densidad de probabilidad de una variable aleatoria X

3. Sea X una variable aleatoria con función de densidad

$$
f(x) = \begin{cases} a/\sqrt{a^2 - x^2} & , \text{ Si } |x| < a \\ 0 & , \text{ Si } |x| \geq a \end{cases}
$$

Hallar : (a) el coeficiente a ; (b) la probabilidad de que la variable aleatoria X se encuentre en el intervalo $\langle a/2 \, , a \rangle$;

(c) construir la gráfica de la función de densidad de X.

4. Se le da función de densidad de probabilidad de la variable aleatoria X

$$
f(x) = \begin{cases} a \text{ sen } x & , \text{ Si } 0 \leq x \leq \pi \\ 0 & , \text{ en otros casos} \end{cases}
$$

Determinar : (a) la constante a ; (b) la función de distribución.

5. Se da la función

$$
f(x) = \begin{cases} a\,x^2 & , \text{ si } 0 \leq x < 1 \\ a(2 - x)^2 & , \text{ si } 1 \leq x < 2 \\ 0 & , \text{ en otros casos} \end{cases}
$$

(a) Para qué valor de a la función $f(x)$ es la densidad de probabilidad de - una variable aleatoria X.
(b) Hallar $F(x)$.

6. El tiempo de llegada X de camiones (en minutos) a un depósito. Se comporta de acuerdo a la siguiente función de densidad

$$
f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & , \text{ si } x > 1 \\ 0 & , \text{ en otros casos} \end{cases}
$$

Se desea elegir una muestra al azar de 4 camiones. Determinar un número C tal que la probabilidad de que al menos uno de los cuatro camiones extraidas tenga un tiempo de llegada que excede a C sea 0.9375.

7. La duración en minutos de un disco de 33-rpm grabados por la compañía - Disquera Andina S.A. es una variable aleatoria X con una función de densidad

$$
f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{3}\,x - \dfrac{x^2}{36} - \dfrac{3}{4} & , \text{ si } 3 \leq x \leq 9 \\ 0 & , \text{ en otros casos} \end{cases}
$$

(a) ¿Cuál es la probabilidad que la duración de un disco exceda a 6 minutos?

(b) Si la compañía graba 1000 discos, ¿Cuántos de ellos tiene una duración superior a 6 minutos?

8. Un agricultor encuentra que el peso en kilogramos de un melón es una variable aleatoria X con función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{3} - \frac{1}{12}x^3 & , \quad 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & , \quad \text{en otros casos} \end{cases}$$

(a) ¿Cuál es la probabilidad que un melón pesa menos de un kilogramo?

(b) Si el agricultor cosecha 24,000 melones, ¿cuántos de ellos pesará menos de un kilogramo?

9. Para cierto negocio por correspondencia la proporción de los pedidos procesados en 24 horas tiene la función de densidad de probabilidad

$$f(x) = 20x^3(1 - x) , \quad 0 \leq x \leq 1$$

¿Cuál es la probabilidad que sobre un periodo relativamente largo

(a) al menos 80 % de los pedidos sean procesados dentro de las 24 horas?

(b) menos del 30 % de todos los pedidos sean procesados dentro de las 24 horas ?

(c) entre el 50, 60 % de todos los pedidos sean procesados dentro de las 24 horas ?

10. En cierto país, el ingreso familiar tiene la función de densidad de probabilidad

$$f(x) = 2x/(1 + x^2)^2 \quad , \quad x \geq 0$$

donde x esta en miles de dolares. ¿que proporción de las familias

(a) tiene ingresos menores que \$ 6000 ?

(b) tiene ingresos entre \$ 2000 y 8000 ?

(c) tienen ingresos sobre \$ 1000 ?

11. En una tienda grande que vende al por mayor, el volumen de ventas de juguetes en el mes de Diciembre tiene la función de densidad

$$f(x) = \frac{1}{4} x \, e^{-x/2} \quad , \quad x > 0$$

donde x está en miles de docenas. Calcular la probabilidad de que se vendan

(a) menos de 10,000 docenas ;
(b) entre 600 y 12000 docenas ;
(c) al menos 15000 docenas .

12. Para un médico, el tiempo en horas que dedica a un paciente en su visita al consultorio tiene una función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{4}{3(1+x)^2} & , \quad 0 \leq x \leq 3 \\ 0 & , \quad \text{en otros casos} \end{cases}$$

Para un paciente elegido al azar, ¿cuál es la probabilidad de que el tiempo dedicado por el médico es por lo menos una hora?

13. Un agricultor encuentra que el peso en kilogramos de una piña es una variable aleatoria X con función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{39}(x^2 - 10x + 25) & , \quad 0 \leq x \leq 3 \\ 0 & , \quad \text{en otros casos} \end{cases}$$

(a) para una piña elegida al azar, ¿cuál es la probabilidad que pese menos de 2 kilogramos?
(b) Si el agricultor cosecha 23,400 piñas, ¿cuántas de estas pesará menos de dos kilogramos?
(c) Se escoge al azar 3 piñas, ¿cuál es la probabilidad que al menos dos pesen menos de 2 kilogramos?

14. Considere la siguiente función

$$f(x) = \begin{cases} kx & , \quad 0 \leq x < 2 \\ k(4-x) & , \quad 2 \leq x \leq 4 \\ 0 & , \quad \text{en otros casos} \end{cases}$$

(a) Hallar el valor de k para que f sea una función de densidad.
(b) Hallar la función de distribución.

15. Sea X una variable aleatoria cuya función de densidad está dada por,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{a} & , \quad -5 \leq x \leq 5 \\ 0 & , \quad \text{en otros casos} \end{cases}$$

(a) Encontrar el valor de a .

(b) Hallar $F(x)$ y su gráfica.

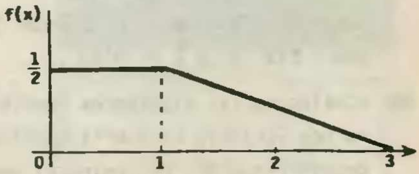
16. Suponga que **X** es una variable aleatoria cuya función de densidad está representada por la figura

(a) Si $P[\frac{1}{3} \leq X \leq a] = \frac{1}{2}$

determinar el valor de a .

(b) Calcular $P[\frac{1}{2} \leq X \leq 2]$.

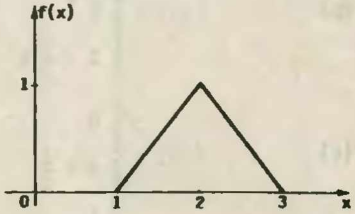
(c) Hallar $F(x)$.



17. Una estación gasolinera recibe provisión semanalmente. Las estadísticas anteriores sugieren que la función de densidad de probabilidad de las ventas semanales **X**, medidas en miles de galones, se aproxima a la función cuya gráfica se muestra en la figura.

(a) Hallar la función de densidad de **X**.

(b) la función de distribución de **X** .



18. Sea **X** una variable aleatoria cuya función de densidad está dado por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 10 \\ e^{-(x - 10)} & , \quad x \geq 10 \end{cases}$$

(a) Hallar el número c tal que **X** sea igualmente probable de ser mayor o menor que c.

(b) Encuentre el número d tal que la probabilidad que **X** sea mayor que d es igual a 0.05.

19. La función de densidad de la variable aleatoria **X**, la resistencia al corte de ensayos de punto de soldadura, está dada por,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{250{,}000} & , \quad 0 \le x \le 500 \\ \dfrac{1{,}000 - x}{250{,}000} & , \quad 500 \le x \le 1{,}000 \\ 0 & , \quad \text{en otros casos} \end{cases}$$

Determinar el número a tal que $P[X < a] = 0.50$ y el número b tal - que $P[X < b] = 0.90$.

20. ¿Cuáles de las siguientes funciones presenta la función de distribución de una variable aleatoria contínua. Grafique cada una de las funciones - de distribución. Determine el rango y la función de densidad de la variable aleatoria.

(a) $$F(x) = \begin{cases} e^x & , \quad x \le 0 \\ 1 & , \quad x > 0 \end{cases}$$

(b) $$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^x & , \quad x \le 0 \\ 1 - \frac{1}{2} e^{-x} & , \quad x > 0 \end{cases}$$

(c) $$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \le -\frac{1}{2} \\ x + \frac{1}{2} & , \quad -\frac{1}{2} < \quad < \frac{1}{2} \\ 1 & , \quad x \ge \frac{1}{2} \end{cases}$$

Determine también $P[0 \le X \le 2]$ en cada caso.

21 Sea X la variable aleatoria que designa la vida (en horas) de una bombilla eléctrica. La función de distribución acumulativa está dado por

$$F(x) = \begin{cases} -\dfrac{1 - k}{x} & , \quad x \ge 1{,}000 \\ 0 & , \quad x < 1{,}000 \end{cases}$$

(a) Determinar el valor de k.
(b) ¿Cuál es la función de densidad para la variable aleatoria X?
(c) ¿Cuál es la probabilidad que una bombilla dure más de 1,500 horas?
(d) ¿Cuál es la probabilidad que una bombilla dure menos de 2,000 horas, si se sabe que la bombilla todavía funcionaba después de 1,500 horas?.

22. Si la función $f(x)$es una función de densidad de una variable aleatoria X

$$f(x) = \begin{cases} 2x & , \quad 0 < x < 1 \\ 0 & , \quad \text{en otros casos} \end{cases}$$

Determinar un número n tal que, $P[X \geq n] = P[X \leq n]$

23. La función de densidad de una variable aleatoria contínua X es,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\text{sen } x}{2} & , \quad 0 \leq x \leq \pi \\ 0 & , \quad \text{en otros casos} \end{cases}$$

Calcular el valor de m tal que, $P[X < m] = P[X > m] = \frac{1}{2}$

24. La función de densidad de una variable aleatoria X está dado por,

$$f(x) = \begin{cases} 4x^3 & , \quad 0 < x < 1 \\ 0 & , \quad \text{en otros casos} \end{cases}$$

(a) Determinar el número c tal que la probabilidad que X exceda a c - sea igual a 0.05.

25. La función de densidad de la variable aleatoria X es,

$$f(x) = \begin{cases} x/2 & , \quad 0 < x < 2 \\ 0 & , \quad \text{en otros casos} \end{cases}$$

(a) Si se obtienen dos valores de X. ¿Cuál es la probabilidad que ambos sean mayores que 1?.
(b) Si se obtienen 3 valores de X. ¿Cuál es la probabilidad que precisamente dos de ellos sean mayores que 1?

26. Una variable aleatoria X tiene como función de densidad,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , \quad 0 < x < 1 \\ 0 & , \quad \text{en otros casos} \end{cases}$$

Determinar el número a tal que sea 0.90 la probabilidad que al menos uno de cuatro valores de X estraídos al azar exceda a a.

27. La longitud de vida de una especie de planta en cierto medio ambiente es una variable aleatoria contínua X?

$$f(x) = \begin{cases} 120/x^2 & , \quad x > a \\ 0 & , \quad \text{en otros casos} \end{cases}$$

(a) Determinar el valor de a.

(b) Si una planta particular todavía vive después de 120 días, ¿cuál es la probabilidad que dicha planta viva más de 150 días?

(c) Si se observan 3 plantas de esta especie, ¿cuál es la probabilidad de que las tres vivan más de 150 días? ¿Cuál es la probabilidad que ninguna vive más de 150 días?

(d) ¿Cuál es la probabilidad que exactamente 2 viven más de 150 días?

(e) Determinar la función de distribución de X y su gráfica.

(f) ¿Cuál es la probabilidad que al menos uno de las tres plantas viven más de 150 días?

28. Una estación de suministro recibe gasolina una vez por semana. Si su volumen de ventas, en miles de galones, se distribuye con una función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} 5(1 - x)^4 & , \quad 0 < x < 1 \\ 0 & , \quad \text{en otros casos} \end{cases}$$

¿Cuál deberá ser la capacidad de su depósito a fin de que la probabilidad que se agote en una semana adeterminada sea 0.01?

29. Dada la función de densidad de una variable aleatoria contínua **X**,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \quad \text{para} \quad x \le \frac{\pi}{6} \\ 3 \text{ sen } 3x & , \quad \text{para} \quad \frac{\pi}{6} < x \le \frac{\pi}{3} \\ 0 & , \quad \text{para} \quad x > \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

Determinar :

(a) la función de distribución acumulativa de probabilidad de **X**.

(b) la probabilidad que **X** tome valores entre $\left[\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{4}\right]$.

30. Sea **X** una variable aleatoria con función de distribución acumulada.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ (\frac{x}{a})^2 & , \quad 0 \le x \le a \\ 1 & \quad x > a \end{cases}$$

donde a es una constante no especifica.

(a) ¿Qué valor (es) de a hace (n) de $F(x)$ una función de distribución.

(b) Calcular la $P[X > 1]$, $P[\frac{1}{2} < X < \frac{3}{2}]$.

31. Sea X una variable aleatoria que tiene una función de distribución se - muestra en la figura adjunta. Determinar de la gráfica.

(a) $F(x)$

(b) $P[X < 0.5]$

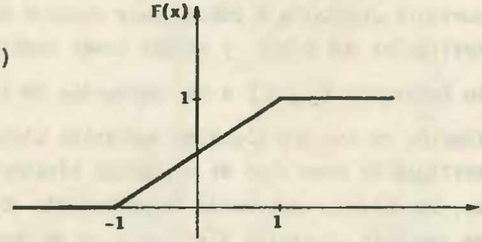
(c) $P(-0.2 < X < 0.8)$

(d) $P[X > 0.1]$

(e) $P[X < 3]$

(f) $P[X < -2]$

(g) $P[|X - 0.4| < 0.3]$



32. Sea $F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ 1 - \frac{3}{4} e^{x} & , \quad x \geq 0 \end{cases}$

¿es su gráfica la que se muestra en la figura adjunta?

Calcular :

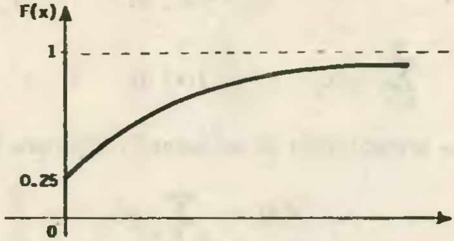
(a) $P[X > 2]$

(b) $P[X < 0]$

(c) $P[X = 0]$

(d) $P[X = 2]$

(e) $P[|X - 1| < 2]$



33. Supongamos que la vida (en horas) de cierto tipo de tubo de radio tenga una función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} 100/x^2 & , \quad x > a \\ 0 & , \quad \text{en otros casos} \end{cases}$$

(a) Determinar el valor de a.

(b) Se toma una muestra aleatoria de tamaño 4 de tales tubos y se coloca en una caja. Si se selecciona aleatoriamente un tubo de la caja, ¿Cu ál es la probabilidad que el tubo seleccionado tenga una duración mayor que 150 horas?

(c) ¿Cuál es el número máximo de tubos que se pueden formar en un aparato similar al de su uso, de modo que haya una probabilidad de 0.50 de que después de 150 horas de uso todavía funcionen?

2.4 DISTRIBUCIONES MIXTAS

En las secciones anteriores hemos presentado las variables aleatorias restringidas a discretas o contínuas, sin embargo hay aplicaciones en las cuales una variable aleatoria X puede tomar valores discretas, x_1, x_2, . . . con probabilidades positivas, y además tomar también todos los valores de un cierto intervalo $[a, b]$ o una colección de intervalos. Es decir, X es una combinación de los dos tipos de variables aleatorias. La distribución de probabilidad de este tipo de variables aleatorias, se llaman ***distribuciones mixtas***, se obtiene combinando la definición de distribución de probabilidad de una variable aleatoria discreta y la de función de densidad de una variable aleatoria contínua de la siguiente manera :

1. A cada uno de los valores x_i se le asigna un número $p(x_i) > 0$, y se define una función f tal que $f(x) > 0$, $\forall x \in [a, b]$ pués el rango (los valores que toma) de X es

$$R_X = \{x_1, x_2, . . ., x_n\} \cup [a, b]$$

2. $$\sum_{x=1}^{n} p(x_i) + \int_a^b f(x)\,dx = 1$$

La probabilidad de un evento cualquiera A se define así,

$$P[A] = \sum_{x_j \in A} p(x_j) + \int_{E \subset A} f(x)\,dx$$

EJEMPLO 1 Dada la función

$$h(x) = \begin{cases} 2^{-(x+2)} & , \quad \text{para} \quad x = 0,1,2,3, . . . \\ \frac{1}{2}(1 - x) & , \quad \text{para} \quad 0 < x < 1 \\ \frac{3}{4}(1 - x)^2 & , \quad \text{para} \quad 1 < x < 2 \\ 0 & , \quad \text{en otros casos} \end{cases}$$

(a) verificar que cumple las condiciones de una función de probabilidad de una variable aleatoria X.

(b) Hallar la probabilidad de que X tome valores entre $\frac{1}{2}$ y 2 inclusive.

SOLUCION (a) Observe que el rango de la variable aleatoria es

$$R_X = \{0,1,2,\ldots\} \cup \langle 0,1\rangle \cup \langle 1,2\rangle \;.$$

La función $h(x)$, para ser función de proababilidad debe cumplir

1. $h(x) = 2^{-(x+2)} > 0 \;,\quad \forall\, x = 0,1,2,3,\ldots$

   y $\quad h(x) > 0 \;,\quad \forall\, x \in \langle 0,1\rangle \cup \langle 1,2\rangle$

2. $$\sum_{x=0}^{\infty} 2^{-(x+2)} + \int_0^1 \frac{1-x}{2}\,dx + \int_1^2 \frac{3}{4}(1-x)^2\,dx = 2^{-2}\sum_{x=0}^{\infty} 2^{-x} +$$

$$+ \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}\left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots\right] + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\right] + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1\;.$$

de (1) y (2) obtenemos que la función $h(x)$ cumple las condiciones de una función de probabilidad de una variable aleatoria X.

(b) $$P\left[\frac{1}{2} < X \leq 2\right] = \sum_{x=1}^{2} 2^{-(x+2)} + \int_{1/2}^{1} \frac{1-x}{2}\,dx + \int_1^2 \frac{3}{4}(1-x)^2\,dx$$

$$= \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{4} = \frac{5}{8}\;.$$

PROBLEMAS 2.4

1. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} 3^{-(x+1)} & , \quad x = 0,1,2,\ldots \\ kx & , \quad 1 < x < 2 \\ k(4-x) & , \quad 2 < x < 3 \\ 0 & , \quad \text{en otros casos} \end{cases}$$

(a) Determinar k de manera que f sea una función de probabilidad de una variable aleatoria X.

(b) Calcular $\quad P\left[\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{3}{2}\right]$

2. Sea X una variable aleatoria con función de distribución

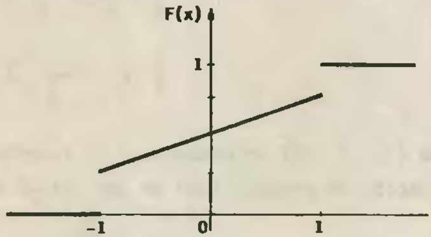
$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ \frac{x^2}{4} & , \quad 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{2} & , \quad 1 \leq x < 2 \\ \frac{x}{3} & , \quad 2 \leq x < 3 \\ 1 & , \quad x \geq 3 \end{cases}$$

Calcular :

(a) $P[0 < X \leq 1]$, (b) $P[1 \leq X \leq 2]$

(c) Hallar la función de densidad de probabilidad.

3. De la gráfica de la función de distribución



Determinar :

(a) $P[X < 1]$;

(b) $P[-1 \leq X < \frac{1}{2}]$;

(c) la función de densidad de probabilidad de X.

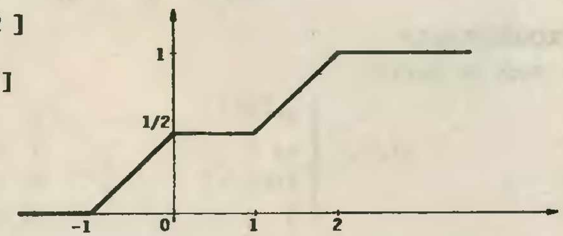
4. Una variable aleatoria X tiene función de distribución cuyo gráfico se muestra en la figura adjunta. Determinar :

(a) $P[-\frac{1}{2} < x < 2]$

(b) $P[|X - 1| < 1]$

(c) $P[X > 1]$

(d) $P[X = -\frac{1}{2}]$



3

ESPERANZA MATEMATICA

3.1 FUNCION DE UNA VARIABLE ALEATORIA

En muchos problemas de ingeniería, administración, etc, frecuentemente se está interesado en el comportamiento de una función, digamos H, de una variable aleatoria **X**, $Y = H(X)$; y cada valor de **Y** (esto es $y = H(x)$), se determina conociendo los valores de **X**. Desde que **X** es una variable aleatoria, **Y** también es una variable aleatoria, y la distribución de $Y = H(X)$ se determina conociendo la distribución de probabilidad de **X**. Antes, daremos un ejemplo simple con el objeto de hacer más comprensible la formalización .

EJEMPLO 1 Sea **X** una variable aleatoria discreta con función de probabilidad $p(x)$ como se indica en la siguiente tabla.

x	- 1	0	1	2
$p(x) = P[X = x]$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Determinar :

(a) El rango de la variable aleatoria $Y = X^2$,

(b) La función de probabilidad de la variable aleatoria $Y = X^2$.

(c) Lo mismo que en (*a*) y (*b*) para la variable aleatoria $Y = 3X - 1$.

SOLUCION

(a) Según lo expresado en el párrafo anterior, los valores de la variable aleatoria Y se determina reemplazando los valores de X en la función H(X) (y = H(x)). Así, cuando la variable aleatoria X asume el valor $x = -1$, $Y = X^2$ toma el valor $y = H(-1) = (-1)^2 = 1$.

Si X toma el valor $x = 0$; $Y = X^2$, asume el valor

$y = H(0) = (0)^2 = 0$

Si X toma el valor $x = 1$; $Y = X^2$, asume el valor

$y = H(1) = 1^2 = 1$ y

Si X asume el valor $x = 2$; $Y = X^2$, toma el valor

$y = H(2) = 2^2 = 4$

por lo tanto, el rango para la variable aleatoria Y es $R_Y = \{0,1,4\}$

(b) La función de probabilidad se calcula como sigue :

$$p_Y(0) = P[Y = 0] = P[X = 0] = p(0) = \frac{3}{8}$$

$$p_Y(1) = P[Y = 1] = P[X = -1] + P[X = 1] = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{1}{2}$$

$$p_Y(4) = P[Y = 4] = P[X = 2] = p(2) = \frac{1}{8}$$

Así, la distribución de probabilidad de $Y = X^2$ representando en una tabla es,

y	0	1	4
$p_Y(y)$	$\frac{3}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{1}{8}$

(c) En este caso $Y = H(X) = 3X - 1$. Los valores de Y se determinan de manera análoga al caso anterior.

Si la variable aleatoria X toma el valor $x = -1$, entonces, la variable aleatoria Y toma el valor :

$$y = H(-1) = 3(-1) - 1 = -4$$

Cuando $x = 0$, $y = H(0) = 3(0) - 1 = -1$

Si $x = 1$, $y = H(1) = 3(1) - 1 = 2$ y

Si $x = 2$, $y = H(2) = 3(2) - 1 = 5$

por lo tanto, $R_Y = \{-4, -1, 2, 5\}$.

La función de probabilidad se calcula de la siguiente manera :

$$p_Y(-4) = P[Y = -4] = P[X = -1] = p(-1) = \frac{1}{8}$$

$$p_Y(-1) = P[Y = -1] = P[X = 0] = p(0) = \frac{3}{8}$$

$$p_Y(2) = P[Y = 2] = P[X = 1] = p(1) = \frac{3}{8}$$

$$p_Y(5) = P[Y = 5] = P[X = 2] = p(2) = \frac{1}{8}$$

Luego, la distribución de probabilidad está dado en la tabla

y	-4	-1	2	5
$p_Y(y)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Presentaremos ahora una formulación más precisa de los conceptos anteriores.

3.1.1 EVENTOS EQUIVALENTES

Consideremos un experimento aleatorio ε con espacio muestral Ω. Sea X la variable aleatoria definida en Ω, con rango R_X. Si $Y = H(X)$ está definida de manera que los valores $y = H(x)$ en R_y (el rango de Y) son números reales, entonces Y es una variable aleatoria puesto que para cualquier suceso $\omega \in \Omega$, se determina un valor y de la función $Y = H(X)$; es decir $y = H(X(\omega))$. El diagrama de la figura 3.1.1 ilustra esto.

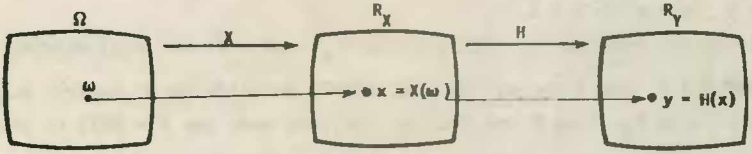


Fig. 3.1.1. Una función de una variable aleatoria $y = H(x) = H(X(\omega))$

En el capítulo anterior hemos definido eventos equivalentes en Ω y en R_X. Extenderemos ahora este concepto de la siguiente manera natural.

DEFINICION 3.1.1 Sea E_X un evento en $R_X (E_X \subset R_X)$, y F_Y un evento en R_Y $(F_Y \subset R_Y)$. E_X y F_Y son eventos equivalentes si

$$E_X = \{x \in R_X \ / \ H(x) \in F_Y\}$$

Informalmente hablando, los eventos E_X y F_Y son equivalentes si la ocurrencia de uno implica la ocurrencia del otro, es decir cuando ocurre E_X ocurre F_Y y recíprocamente. Supongamos ahora que A es un evento en Ω, el cual es equivalente a un evento E_X en R_X, entonces A y F_Y en R_Y son equivalentes.

NOTA Es importante notar que cuando hablamos de eventos equivalentes (en el sentido anterior) estos eventos están asociados a espacios diferentes.

EJEMPLO 2 Supongamos que $Y = H(X) = X^2$, donde X es una variable aleatoria definida como en el ejemplo 1. Entonces, los eventos $E_X = \{-1,1\}$ y $F_Y = \{1\}$ son equivalentes.

EJEMPLO 3 Sea X una variable aleatoria con función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & , \quad x > 0 \\ 0 & \quad x \leq 0 \end{cases}$$

Sea $Y = H(X) = 3X + 2$ una función de la variable aleatoria X. Por lo tanto $R_X = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x > 0\}$; el rango de Y, se calcula así,

$y = H(x) = 3x + 2$, observe que cuando x tome valores mayores que cero, y toma valores mayores que 2; es decir

$$R_Y = \{y \in R_Y \ / \ y > 2\}$$

Supongamos ahora el evento $F_Y = (Y \geq 8)$, se tiene que $y \geq 8$ si, sólo sí $3x + 2 \geq 8$, lo que da $x \geq 2$.
Por lo tanto los eventos $F_Y = (Y \geq 8)$ y $E_X = (X \geq 2)$ son equivalentes.

DEFINICION 3.1.2 Sea X una variable aleatoria definida en el espacio muestral Ω con rango R_X. Sea H una función real, de modo que $Y = H(X)$ es una variable aleatoria con rango R_Y, entonces para cualquier evento $F_Y \subset R_Y$, definimos $P[F_Y]$ como sigue

$$P[F_Y] = P[\{x \in R_X \ / \ H(x) \in F_Y\}] = P[E_X]$$

En palabras: la probabilidad de un evento en el rango de Y está definida como la probabilidad del evento equivalente en R_X. Observe que esta probabilidad relaciona probabilidades en el espacio muestral Ω. Esto es

$$P[F_Y] = P[\{\omega \in \Omega \ / \ H[X(\omega)] \in F_Y\}]$$

La definición de probabilidad da el método a usarse en la solución de los problemas; para el cual se debe hallar el evento E_X en R_X que es equivalente el evento F_Y en R_Y, y luego se halla la probabilidad del evento E_X.

EJEMPLO 4 Sea X una variable aleatoria cuya función de probabilidad es

$$p(x) = \frac{e^{-a}\,a^{x}}{a!} \quad , \quad x = 0,1,2,\ldots$$
$$= 0 \quad , \quad \text{en otros casos}$$

Si $Y = H(X) = 2X + 2$. Calcular $P[Y < 5]$, $P[Y > 4]$

SOLUCION

(a) Debemos calcular $P[Y \leq 5]$; para lo cual calcularemos el evento equivalente en R_X.

$y \leq 5$ se cumple sí, sólo sí $2x + 2 \leq 5$ ó $x \leq 3/2$ por lo tanto, el evento equivalente en R_X es, $(X \leq 3/2)$

Luego,

$$P[Y \leq 5] = P[2X + 2 \leq 5] = P[X \leq 3/2]$$
$$= p(0) + p(1) = e^{-a} + \frac{e^{-a}a}{1!} = e^{-a}[1 + a]$$

Obsérvese que el conjunto $\{x \in R_X \,/\, x \leq \frac{3}{2}\}$ está en el rango de la variable aleatoria X. y la función p está definida en R_X.

(b) En este caso el evento equivalente a $y > 4$ es $2x + 2 > 4$, o sea $x > 1$. Luego,

$$P[Y > 4] = P[2X + 2 > 4] = P[X > 1] = 1 - P[X \leq 1]$$
$$= 1 - e^{-a}[1 + a]$$

EJEMPLO 5 Sea X una variable aleatoria que tiene la siguiente función de densidad.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{8} & , \quad 0 \leq x \leq 4 \\ 0 & , \quad \text{en otros casos} \end{cases}$$

Si $Y = 2X + 10$. Calcular $P[12 \leq y \leq 16]$

SOLUCION Tenemos que el evento en R_Y es

$$\{y \in R_Y \,/\, 12 \leq y \leq 16\}$$

(el rango de Y es $R_Y = \{y \ / \ 10 \leq y \leq 18\}$)

El evento equivalente en R_X se calcula así;

$12 \leq y \leq 16$ sí sólo sí $12 \leq 2X + 10 \leq 16$

de donde $1 \leq x \leq 3$

y el conjunto $\{x \in R_X \ / \ 1 \leq x \leq 3\}$ está en el rango de X, y la función de densidad $f(x)$ está definida en este conjunto. Luego,

$$P[12 \leq Y \leq 16] = P[12 \leq 2X + 10 \leq 16] = P[1 \leq X \leq 3]$$
$$= \int_1^3 \frac{x}{8}\,dx = \frac{x^2}{16}\Big|_1^3 = \frac{9}{16} - \frac{1}{16} = \frac{1}{2} .$$

3.1.2 FUNCIONES DISCRETAS DE UNA VARIABLE ALEATORIA

PRIMER CASO Sean X e Y variables aleatorias discretas tal que

$R_X = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ y $p_X(x_i) = P[X = x_i]$

la función de probabilidad de X. Supongamos que $x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}, \ldots$ representa los valores de X tal que $H(x_{i_j}) = y_i$ para algún conjunto de índices $J = \{j \ / \ j = 1,2,3,\ldots, S_i\}$. La distribución de probabilidad para Y se denota por $p_Y(y_i)$ y está dado por

$$p_Y(y_i) = P[Y = y_i] = \sum_{y \in J} p_X(x_i)$$

por ejemplo, en la figura 3.1.2. $S_i = 4$, la probabilidad de y_i es

$$p_Y(y_i) = p_X(X_{i_1}) + p_X(X_{i_2}) + p_X(X_{i_3}) + p_X(X_{i_4})$$

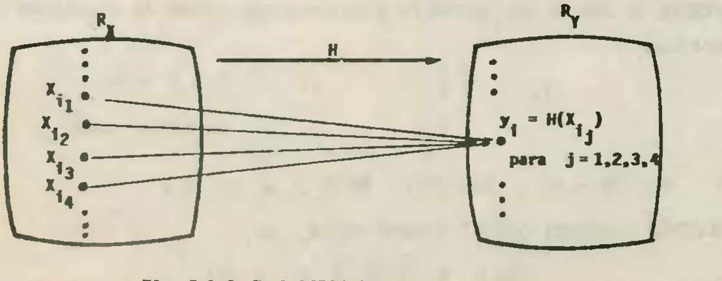


Fig. 3.1.2. Probabilidades en R_Y.

En el caso especial donde H es una función tal que para cada valor de y le hace corresponder exactamente un valor x, entonces la distribución de probabilidades de Y es

$$p_Y(Y_i) = p_X(x_i), \text{ donde } \quad y_i = H(x_i), \quad i = 1,2,\ldots$$

EJEMPLO 6 Consideremos el experimento de lanzar una moneda tres veces. Sea **X** el número de caras que se obtiene. Si, $Y = 2X + 1$. Calcular la distribución de probabilidad de la variable aleatoria Y.

SOLUCION X = número de caras.

$R_X = \{0,1,2,3\}$, con probabilidades $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{3}{8}$ y $\frac{1}{8}$ respectivamente.

Si $x = 0$, $y = 2(0) + 1 = 1$

$x = 1$, $y = 2(1) + 1 = 3$

$x = 2$, $y = 2(2) + 1 = 5$

Si $x = 3$, $y = 2(3) + 1 = 7$

por lo tanto, $R_Y = \{1,3,5,7\}$; como indica la figura 3.1.3

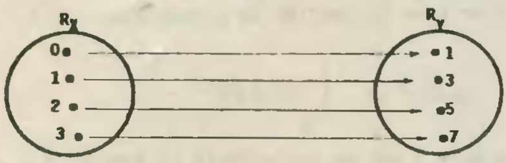


Fig. 3.1.3

En este caso la probabilidad en cada punto del rango de R_Y, es :

$$p_Y(1) = p_X(0) = \frac{1}{8} \quad ; \quad p_Y(5) = p_X(2) = \frac{3}{8}$$

$$p_Y(3) = p_X(1) = \frac{3}{8} \quad ; \quad p_Y(7) = p_X(3) = \frac{1}{8}$$

Luego, la distribución de probabilidad de Y es

y	1	3	5	7
$p_Y(y)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

EJEMPLO 7 En el ejemplo anterior, supongamos que $Y = |X - 2|$. Calcular la distribución de probabilidad de Y.

SOLUCION Los valores de **Y**, ahora están dados por la ecuación $y = |x - 2|$. Es decir, los posibles valores de **Y** son 0,1,2. Como indicamos en la figura 3.1.4.

y $\quad p_Y(0) = p_X(2) = \frac{3}{8}$

$$p_Y(1) = p_X(1) + p_X(3) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{4}{8}$$

$$p_Y(2) = p_X(0) = \frac{1}{8}$$

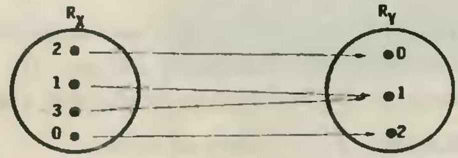


Fig. 3.1.4

entonces la distribución de probabilidad para **Y** es,

y	0	1	2
$p_Y(y)$	$\frac{3}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{1}{8}$

SEGUNDO CASO Cuando la variable aleatoria **X** es continua, pero **Y** = H(**X**) es discreta, la formulación para la función de probabilidad de **Y**, $p_Y(y_i)$ está dado como sigue,

$$p_Y(y_i) = \int_{E_X} f(x)\,dx$$

donde E_X es el evento en R_X, que es equivalente al evento $(Y = y_i)$ en R_Y y $f(x)$ es la función de densidad de probabilidad asociada a la variable aleatoria **X**.

EJEMPLO 8 Supongamos que **X** es una variable aleatoria que tiene una función de densidad dada por :

$$f(x) = \begin{cases} a e^{-ax} & , \quad x \geq 0 \\ 0 & , \quad \text{en otros casos} \end{cases}$$

Sea **Y** = H(**X**), definida de la siguiente manera

$$Y = \begin{cases} 0 & , \quad x \leq 1/a \\ 1 & , \quad x > 1/a \end{cases}$$

Calcular la función de probabilidad de **Y** .

SOLUCION Se tiene que $R_Y = \{0,1\}$ Vemos que $y = 0$, sí, sólo sí - $x \le 1/a$ por lo que el evento $E_X = \{x \,/\, X \le 1/a\}$ es equivalente al evento $(Y = 0)$ en R_Y. Por lo tanto

$$p_Y(0) = P[X \le 1/a\,] = \int_0^{1/a} ae^{-ax}dx = -\,e^{-ax}\Big|_0^{1/a} = 1 - e^{-1}.$$

También el evento $E_X = \{x \,/\, X > 1/a\}$ es equivalente al evento $(Y = 1)$ en R_Y. Luego

$$p_Y(1) = P[X > 1/a\,] = \int_{1/a}^{\infty} ae^{-ax}dx = -\,e^{-ax}\Big|_{1/a}^{\infty} = e^{-1}.$$

3.1.3 FUNCIONES CONTINUAS DE UNA VARIABLE ALEATORIA CONTINUA

Si X es una variable aleatoria contínua con función de densidad f, y H una función contínua; entonces $Y = H(X)$ es una variable aleatoria contínua La función de densidad de probabilidad de la variable aleatoria Y denotado por g, se obtiene siguiendo el siguiente procedimiento :

(1) Se obtiene la función de distribución G de Y, es decir

$$G(y) = P[Y \le y\,]$$

Encontrando el evento E_X en R_X, equivalente al evento $(Y \le y)$ en R_Y.

(2) Derivando $G(y)$ con respecto a y se obtiene $g(y)$.

(3) Se halla el rango de la nueva variable aleatoria con la condición que - $g(y) > 0$.

Ilustraremos estos tres pasos en los siguientes ejemplos.

EJEMPLO 9 Supóngase que X es una variable aleatoria con función de densidad .

$$f(x) = \begin{cases} x/10 & , \quad 0 \le x \le 2\sqrt{5} \\ 0 & , \quad \text{en otros casos.} \end{cases}$$

Si $Y = H(X) = 2X + 6$. Calcular la función de densidad g de Y.

SOLUCION El procedimiento dado en el párrafo anterior es,

(1) $$G(y) = P[Y \le y\,] = P[2X + 6 \le y] = P[X \le \frac{y-6}{2}\,]$$

$$= \int_0^{\frac{y-6}{2}} \frac{x}{10}\,dx = \frac{x^2}{20}\Bigg|_0^{\frac{y-6}{2}} = \frac{1}{80}(y^2 - 12y + 36)$$

donde los eventos $(Y \leq y)$ en R_Y y $\left[X \leq \left(\frac{y-6}{2}\right)\right]$ en R_X son equivalentes.

(2) $g(y) = \frac{d}{dy} G(y) = \frac{y}{40} - \frac{3}{20}$.

(3) $0 \leq x \leq 2\sqrt{5}$, Entonces: $6 \leq 2x + 6 \leq 4\sqrt{5} + 6$, ó $6 \leq y \leq 4\sqrt{5} + 6$

por lo tanto la función de densidad de Y es :

$$g(y) = \begin{cases} \frac{y}{40} - \frac{3}{20} & , \quad 6 \leq y \leq 4\sqrt{5} + 6 \\ 0 & , \quad \text{en otros casos} \end{cases}$$

EJEMPLO 10 Consideremos la variable aleatoria **X** definida en el ejemplo 5, y supongamos que $Y = H(X) = (X - 2)^2$. Hallar la función de densidad de **Y**.

SOLUCION Procediendo como en el ejemplo anterior obtenemos :

(1) $G(y) = P[Y \leq y] = P[(X-2)^2 \leq y] = P[-\sqrt{y} \leq X - 2 \leq \sqrt{y}]$

$$= P[2 - \sqrt{y} \leq X \leq 2 + \sqrt{y}]$$

$$= \int_{2-\sqrt{y}}^{2+\sqrt{y}} \frac{x}{8}\,dx = \frac{x^2}{16}\Bigg|_{2-\sqrt{y}}^{2+\sqrt{y}}$$

$$= \frac{1}{16}[(4 + 4\sqrt{y} + y) - (4 - 4\sqrt{y} + y)] = \frac{1}{2}\sqrt{y}$$

donde los eventos $(Y < y)$ en R_Y y $(2 - \sqrt{y} \leq X \leq 2 + \sqrt{y})$ en R_X son equivalentes.

(2) $g(y) = G'(y) = \frac{1}{4\sqrt{y}}$

(3) $0 \leq x \leq 4$, entonces, Si $x = 2$, $y = 0$ y
Si $x = 0$ ó $x = 4$, $y = 4$

Como quiera que g, no está definida en $y = 0$, se tiene que el rango de, Y es, $0 < y \leq 4$, por lo tanto la función de densidad de **Y** es,

$$g(y) = \begin{cases} \frac{1}{4\sqrt{y}} & , \quad 0 < y \leq 4 \\ 0 & , \quad \text{en otros casos.} \end{cases}$$

TEOREMA 3.1.1 Sea X una variable aleatoria contínua con función de densidad f que satisface $f(x) > 0$ para $a < x < b$, e $y = H(x)$ es una función contínua de x, estrictamente creciente o estrictamente decreciente, entonces la variable aleatoria $Y = H(X)$ tiene una función de densidad g dada por,

$$g(y) = f(x) \left| \frac{dx}{dy} \right|$$

Con $x = H^{-1}(y)$ expresado en función de y. Si H es creciente, $g(y) > 0$ si $H(a) < y < H(b)$; y si H es decreciente, $g(y) > 0$ si $H(b) < y < H(a)$.

DEMOSTRACION Daremos solamente para cuando H es estrictamente creciente. - similarmente se demuestra cuando H es decreciente.

(1) $G(y) = P[Y \leq y] = P[H(X) \leq y]$

$= P[X < H^{-1}(y)]$, H^{-1} existe, pués H es estrictamente creciente.

$= F[H^{-1}(y)]$

(2) $g(y) = G'(y) = \frac{dF(x)}{dx} \cdot \frac{dx}{dy}$ por la regla de la cadena

$= f(x) \cdot \frac{dx}{dy}$, donde $x = H^{-1}(y)$

Similarmente cuando H es estrictamente decreciente.

$$g(y) = G'(y) = - f(x) \frac{dx}{dy}$$

por lo tanto $g(y) = f(x) \left| \frac{dx}{dy} \right|$

EJEMPLO 11 En el ejemplo 9, donde X es una variable aleatoria con función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} x/10 & , \quad 0 \leq x \leq 2\sqrt{5} \\ 0 & , \quad \text{en otros casos} \end{cases}$$

y $H(x) = 2x + 6$ es una función estrictamente creciente.

Luego, usando el teorema 3.1.1, tenemos

$$g(y) = f(x) \left|\frac{dx}{dy}\right| = \left(\frac{y-6}{20}\right) \left(\frac{1}{2}\right)$$

ya que $x = \frac{y-6}{2}$, $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{2}$, $f(x) = f\left(\frac{y-6}{2}\right) = \frac{y-6}{20}$

$H(0) = 6$, $H(2\sqrt{5}) = 4\sqrt{5} + 6$; entonces

$$f(y) = \begin{cases} \dfrac{y}{40} - \dfrac{3}{20} & , \quad 6 < y < 4\sqrt{5} + 6 \\ 0 & , \quad \text{en otros casos} \end{cases}$$

PROBLEMAS 3.1

1. Una variable aleatoria **X** tiene la siguiente distribución de probabilidad

x	- 1	0	1
$p(x)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{2}$

Determinar :

(a) la distribución de probabilidad de la variable aleatoria $Y = 2X + 1$.

(b) la distribución de probabilidad de la variable aleatoria $Y = X^2 - 1$.

(c) la distribución de probabilidad de la variable aleatoria $Y = (X - 1)^2$.

2. Suponga que la demanda diaria de gasolina en una estación de servicio está acotado por 1,000 galones, que se lleva a un registro diario de venta Cada galón vendido produce una utilidad de 60 soles mientras que cada galón no vendido produce una pérdida de 5 soles (debido a costo de almacenamiento). Si **X** designa la variable aleatoria que representa la demanda e **Y** la variable aleatoria utilidad, describa **Y** en función de **X**.

3. Un puerto tiene capacidad de acomodar 4 naves de cierto tipo durante la noche. Las tarifas del puerto producen una utilidad de 1,000 dólares por nave atracada. Si **X** es la variable aleatoria que representa el número de naves buscando atracadero por noche; y suponiendo que

$$g(x) = \frac{1}{6} , \quad \text{para} \quad x = 0,1,2,3,4,5$$

(a) Si **Y** es la variable aleatoria que representa las utilidades nocturnas, describa la variable aleatoria **Y** en términos de la variable aleatoria **X**.

(b) Determinar la distribución de probabilidad para **Y**.

4. La cantidad de magnesio en una mezcla es una variable aleatoria, la función de densidad de probabilidad está dado por

$$f(x) = \begin{cases} x/18 & , \quad 0 \leq x \leq C \\ 0 & , \quad \text{en otros casos} \end{cases}$$

El beneficio obtenido de esta mezcla es $P = 10 + 2x$ Hallar la función de densidad de P.

5. Suponga que X es una variable aleatoria con función de densidad.

$$f(x) = \begin{cases} 2x & , \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & , \quad \text{en otro caso} \end{cases}$$

(a) Hallar la función de densidad de $Y = H(X) = 5x + 3$

(b) la función de densidad de $Y = H(X) = X^2$

6. Una variable X tiene la distribución de probabilidad siguiente

$$\begin{cases} \frac{x}{6} & , \quad x = 1,2,3 \\ 0 & , \quad \text{en otro caso} \end{cases}$$

Si $Y = H(X) = (X - 2)^2$. Hallar la distribución de probabilidad de Y.

7. El número de días requeridos para la terminación de un proyecto de construcción se denota por X y se considera como una variable aleatoria con la distribución siguiente

x	10	11	12	13	14
$p(x)$	0.2	0.3	0.3	0.1	0.1

y $p(x) = 0$ en otros casos.

El beneficio de la contratistas es $Y = 1000(12 - X)$ intis.

Hallar la distribución de probabilidad de Y.

3.2 CARACTERISTICA DE UNA VARIABLE ALEATORIA

Si bien la variable aleatoria está completamente determinado por la distribución de probabilidad $[(x_i, p(x_i)) \; ; \; i = 1,2,3, \ldots]$ Si es discreta, y por la función de densidad $f(x)$ si es continua, muchas veces es conveniente trabajar con algunas características descriptivas de la variable aleatoria. Introduciremos aquí las medidas descriptivas mas usadas; además una expresión general para otras medidas similares. El primero de estos es el primer momento alrededor del origen; llamado *el valor esperado o la media de la variable aleatoria* (*También Esperanza Matemática*). El segundo momento alrededor de la media, llamado *varianza* de la variable aleatoria. Finalmete la *moda* y la *mediana*.

3.2.1 VALOR ESPERADO DE UNA VARIABLE ALEATORIA

Antes de dar la definición del valor esperado de una variable aleatoria daremos un ejemplo simple para captar la idea intuitiva.

Consideremos por ejemplo el experimento de lanzar 3 monedas 20 veces y sea X el número de caras que ocurren por lanzamiento; entonces, X toma los siguientes valores, 0,1,2,3. Es decir $R_X = \{0,1,2,3\}$. Supongamos ahora que en los 20 lanzamientos de las tres monedas obtenemos 0 caras, 1 cara, 2 caras y 3 caras, un total de 4,6,7, y 3 veces respectivamente. El promedio del número de caras por lanzamiento de las 3 monedas es entonces

$$\frac{0\,(4) + 1\,(6) + 2\,(7) + 3\,(3)}{20} = 0(\tfrac{4}{20}) + 1(\tfrac{6}{20}) + 2(\tfrac{7}{20}) + 3(\tfrac{3}{20})$$
$$= 1.45$$

este es un valor promedio y no necesariamente un posible resultado del experimento (ver figura 3.2.1). Los números $\frac{4}{20}$, $\frac{6}{20}$, $\frac{7}{20}$ y $\frac{3}{20}$ son las frecuencias relativas para los diferentes resultados posibles.

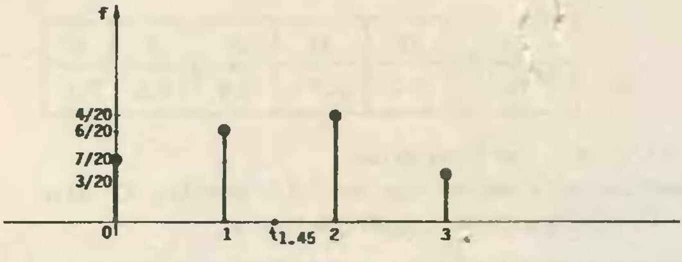


Fig. 3.2.1.

Consideremos ahora el problema de calcular el número de caras por lanzamiento que podemos esperar a la larga (esto es cuando el experimento se repite indefinidamente). De la definición de probabilidad por frecuencia relativa, sabemos que a la larga aparecerá cara 1/8 de las veces ($P[X = 0] = P[\{SSS\}] = 1/8$) ; 1 cara 3/8 de veces ($P[X = 1] = P[\{CSS\}] + P[\{SCS\}] + P[\{SSC\}] = 3/8$); 2 caras 3/8, y 3 caras 1/8 de veces por lo tanto el número de caras esperado por lanzamiento a la larga *denotado por* $E(X) = \mu$

es ,

$$\mu = 0\ (\tfrac{1}{8}) + 1\ (\tfrac{3}{8}) + 2\ (\tfrac{3}{8}) + 3\ (\tfrac{1}{8}) = 1.5$$

Como se indica en la figura 3.2.2 .

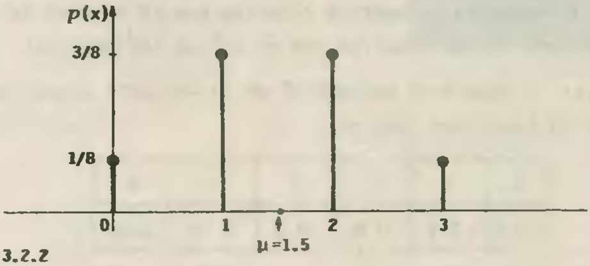


Fig. 3.2.2

La ilustración anterior sugiere que el promedio o valor esperado de cualquier variable aleatoria puede obtenerse multiplicando cada valor de la variable por sus correspondientes probabilidades y sumándoles.

DEFINICION 3.2.1 Sea **X** una variable aleatoria con rango R_X y función de probabilidad $p(x)$ si es discreta o función de densidad $f(x)$ si es continua. ***El valor esperado o esperanza matemática de* X**, se denota por "E(**X**)" y se define

$$E(X) = \sum_{x \in R_X} x\, p(x)\ , \quad \text{Si } X \text{ es una variable aleatoria discreta.} \qquad (*)$$

$$E(X) = \int_{R_X} x\, f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x) dx, \text{ si } X \text{ es una variable aleatoria continua} \qquad (**)$$

Siempre que $\sum_{x \in R_X} x\, p(x)$ sea absolutamente convergente. Es decir $\sum_{x \in R_X} |x| p(x)$- finita. y $\int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x) dx$ finita respectivamente.

La esperanza matemática de **X**, se llama también, ***media de la variable aleatoria***, y se denota por μ, o sea

$$\mu = E(X) .$$

INTERPRETACION GEOMETRICA la esperanza matemática, tanto de una variable aleatoria discreta como continua, es igual a la abscisa del centro de gravedad del área acotada por la curva o el polígono de distribución de probabilidad y el eje de abscisas. Por eso cuando la curva o el polígono de distribución de probabilidad es simétrica respecto a cierta recta paralela al eje de ordenadas, la esperanza matemática coincide con la abscisa del punto de intersección de este eje de simetría con el eje de las obscisas.

EJEMPLO 1 Hallar la esperanza matemática de la variable aleatoria **X** con distribución de probabilidad dado por,

x	0	1	2	3	4
$p(x)$	0.2	0.4	0.3	0.08	0.02

SOLUCION Por la fórmula (*) encontramos la esperanza matemática

$$E(X) = 0(0.2) + 1(0.4) + 2(0.3) + 3(0.08) + 4(0.02) = 1.32 .$$

EJEMPLO 2 Sea **X** una variable aleatoria cuya función de densidad está definida por,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}x(2-x) & , \quad 0 \le x \le 2 \\ 0 & , \quad \text{en otro caso .} \end{cases}$$

Calcular la esperanza de **X** .

SOLUCION por la fórmula (**) encontramos la esperanza matemática

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{3}{4} x^2(2-x)\,dx = \int_0^2 \frac{3}{4} x^2(2-x)\,dx$$

$$= \frac{3}{4}\left[\frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^2 = 1 .$$

EJEMPLO 3 La función de distribución de una variable aleatoria **X** es,

$$F(x) = c\,[\frac{x^3}{3} + \frac{1}{3}] , \qquad -1 \le x \le 1$$

Calcular, $E(X)$.

SOLUCION Se tiene $F(1) = c\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right] = 1$, propiedad de $F(x)$. De donde

$c = \frac{3}{2}$; por lo tanto, $f(x) = \frac{3}{2}x^2$, $-1 \leq x \leq 1$. Luego

$$E(X) = \int_{-1}^{1} x(\frac{3}{2}x^2)\,dx = \frac{3}{2}\left.\frac{x^4}{4}\right|_{-1}^{1} = 0 .$$

EJEMPLO 4 Una fábrica ensambladora de televisores a colores recibe los transistores en lotes de 20. El departamento de recepción utiliza la siguiente regla de inspección : Se prueban 2 transistores de cada lote. Si ninguno es defectuoso, no se continúa probando los demás transistores. Si al menos uno de los transistores resulta defectuoso, se prueba el lote completo. ¿Cuál es el número esperado de transistores probados por lote si se sabe por experiencia que cada lote contiene exactamente el 25 % de defectuosos?

SOLUCION Definimos la variable aleatoria **X** por

$X(\omega)$ = Número de transistores probados.

$R_X = \{2,20\}$

Definimos los eventos :

D_i : "el i-ésimo transistor verificado es defectuoso, $i = 1,2$"

$\bar{D}_i$: "el i-ésimo transistor verificado es no defectuoso , $i = 1,2$"

Cada lote de 20 transistores, consta de 15 buenos y 5 defectuosos.

Cálculo de la distribución de probabilidad de **X** .

$$p(2) = P[X = 2] = P[\bar{D}_1\bar{D}_2] = P[\bar{D}_1]\; P[\bar{D}_2 \mid \bar{D}_1]$$

$$= \frac{15}{20} \times \frac{14}{19} = \frac{21}{38}$$

Puesto que en todos los otros casos se examina todo el lote se tiene que,

$$p(20) = P[X = 20] = 1 - P[X = 2] = 1 - P[\bar{D}_1\bar{D}_2]$$

$$= 1 - \frac{21}{38} = \frac{17}{38} .$$

Por lo tanto, la distribución de probabilidad de la variable aleatoria **X** es

x	2	20
$p(x)$	$\frac{21}{38}$	$\frac{17}{38}$

El número esperado de transistores probados por lote, es

$$\mu = E(X) = 2(\frac{21}{38}) + 20(\frac{17}{38}) = \frac{382}{38} = 10.05 .$$

EJEMPLO 5 Una urna contiene cuatro fichas numeradas; 1,2,3,4, y de ellas se extraen dos fichas sin reposición. Si **X** es la variable aleatoria que representa la suma de los cuadrados de los dos números obtenidos, calcular E(X).

SOLUCION La variable aleatoria **X** esta definida por

$X(\omega)$ = Suma de los cuadrados de los dos números obtenidos

$R_X = \{5,10,13,17,20,25\}$

Cálculo de la distribución de probabilidad de **X** .

$$p(5) = P[X = 5] = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

$$p(10) = P[X = 10] = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

$$p(13) = P[X = 13] = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

	1	2	3	4
1	~~11~~	12	13	14
2	21	~~22~~	23	24
3	31	32	~~33~~	34
4	41	42	43	~~44~~

por lo tanto,

$$p(x) = \frac{1}{6} \quad , \quad x = 5,10,13,17,20,25$$

es la función de probabilidad de la variable aleatoria **X**. Luego

$$E(X) = 5\ (\frac{1}{6}) + 10\ (\frac{1}{6}) + 13\ (\frac{1}{6}) + 17\ (\frac{1}{6}) + 20\ (\frac{1}{6}) + 25\ (\frac{1}{6})$$

$$= \frac{5 + 10 + 13 + 17 + 20 + 25}{6} = \frac{90}{6} = 15$$

EJEMPLO 6 Consideremos el experimento que consiste en lanzar un dado. Si el dado muestra 1 ó 2 se selecciona un número al azar del conjunto {0,1}. Si el dado muestra 3,4,5 ó 6 se selecciona un número al azar del conjunto {2,3,4} .

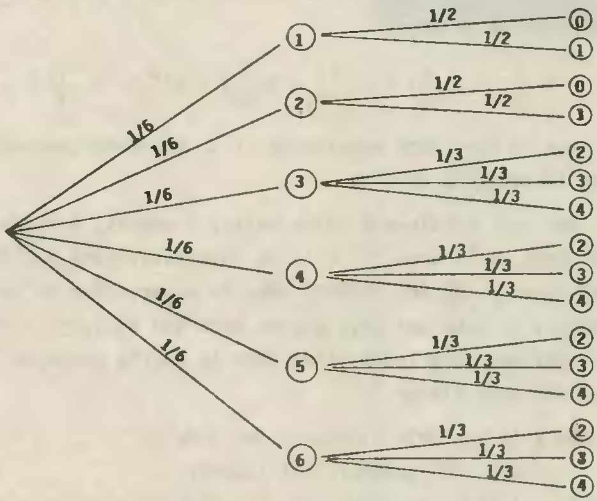
(a) Determinar la función de distribución de X.

(b) Hallar E(X). Donde X es la variable aleatoria que representa el número seleccionado.

SOLUCION Desde que X es el número seleccionado. Entonces,

$$R_X = \{0,1,2,3,4\}$$

Para determinar las probabilidades en cada punto, nos valemos del diagrama de probabilidades siguiente,



Del diagrama :

$$p(0) = P[X = 0] = \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6} = \frac{3}{18}$$

$$p(1) = P[X = 1] = \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6} = \frac{3}{18}$$

$$p(2) = P[X = 2] = \frac{1}{6} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{3} = \frac{4}{18}.$$

$$p(3) = P[X = 3] = \frac{1}{6} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{3} = \frac{4}{18}$$

$$p(4) = P[X = 4] = \frac{1}{6} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{3} = \frac{4}{18}$$

(a) por lo tanto, la distribución de probabilidad de X se da en la tabla siguiente, donde se observa también la función de distribución de X.

x	0	1	2	3	4
p(x)	$\frac{3}{18}$	$\frac{3}{18}$	$\frac{4}{18}$	$\frac{4}{18}$	$\frac{4}{18}$
F(x)	$\frac{3}{18}$	$\frac{6}{18}$	$\frac{10}{18}$	$\frac{14}{18}$	1

(b) La esperanza de **X** es,

$$E(X) = 0(\frac{3}{18}) + 1(\frac{3}{18}) + 2(\frac{4}{18}) + 3(\frac{4}{18}) + 4(\frac{4}{18}) = \frac{13}{6} = 2.17 .$$

NOTA Un juego se considera *equitativo* si la esperanza matemática o valor esperado de la ganancia es cero.

EJEMPLO 7 Una urna contiene 4 bolas rojas, 6 negras, 8 verdes y 2 blancas. Se saca una bola de la urna. Si ésta es roja usted gana I/. 30.00 y si es negra usted gana I/. 20.00. ¿Cuánto debería pagar usted si saca una bola verde y cuanto, si saca una bola blanca para que el juego fuera equitativo? Además, si saca una bola verde usted paga la cuarta parte de lo que paga cuando saca una bola blanca.

SOLUCION Sea **X** la variable aleatoria definida por

$$X(\omega) = \text{ganancia del jugador} .$$

designemos las pérdidas asociados con la extracción de una bola verde, y una bola blanca por L_1 y L_2 respectivamente. Entonces,

$$R_X = \{30, 20, L_1, L_2\} , \quad \text{donde,} \quad 4L_1 = L_2$$

por lo tanto, la distribución de probabilidad de la variable aleatoria **X** es

x	30	20	L_1	L_2
p(x)	$\frac{4}{20}$	$\frac{6}{20}$	$\frac{8}{20}$	$\frac{2}{20}$

Luego,

$$E(X) = 30\,(\frac{4}{20}) + 20\,(\frac{6}{20}) + L_1\,(\frac{8}{20}) + L_2\,(\frac{2}{20})$$

$$= \frac{420}{20} + \frac{120}{20} + \frac{8L_1}{20} + \frac{2L_2}{20} = \frac{240}{20} + \frac{4L_2}{20} = 0$$

de donde, $L_2 = -\frac{240}{4} = -60$ y $L_1 = -15$.

Entonces, si usted paga I/. 15.00 , cuando la bola extraído es verde y - I/. 60.00 cuando es blanca, el valor esperado del juego es cero y éste es - equitativo.

EJEMPLO 8 En una lotería se ofrece cinco premios de la siguiente manera: un primer premio de I/. 25.00 , un segundo premio de I/. 10.00 y tres premios de I/. 5.00 cada uno. ¿Cuál debe ser el precio justo de los boletos si se - venderán 100,000? ¿Cuál si se vendiera 1 millón?

SOLUCION Definimos la variable aleatoria X por

$X(\omega)$ = ganancia neta al comprar un boleto.

Sea c el costo de un boleto en intis. Entonces

$$R_X = \{-c,\ 5-c,\ 10-c,\ 25-c\}$$

La distribución de probabilidad de X si se venden 100,000 boletos es

x	$-c$	$5-c$	$10-c$	$25-c$
$p(x)$	$\frac{99,995}{100,000}$	$\frac{3}{100,000}$	$\frac{1}{100,000}$	$\frac{1}{100,000}$

$$E(X) = \frac{-99,995c + 15 - 3c + 10 - c + 25 - c}{100,000} = \frac{50 - 100,000c}{100,000} = 0$$

de donde $c = \dfrac{5}{10000} = 0.0005$

El precio justo de cada boleto debe ser 0.0005 Intis.
La distribución de probabilidad de X si se vende 1'000,000 boletos es

x	$-c$	$5-c$	$10-c$	$25-c$
$p(x)$	$\frac{99995}{1'000,000}$	$\frac{3}{1'000,000}$	$\frac{1}{1'000,000}$	$\frac{1}{1'000,000}$

$$E(X) = \frac{-999,995c + 15 - 3c + 10 - c + 25 - c}{1'000,000} = \frac{50-1'000,000c}{1'000,000} = 0$$

de donde $c = \dfrac{5}{100,000} = 0.00005$

En este caso, el precio justo de cada boleto debe ser I/. 0.00005 .

EJEMPLO 9 (a) Calcule el peso medio de una papaya cosechada por el agricultor del ejemplo 8 de 2.3.

(b) Estime el peso total de la cosecha del agricultor.

SOLUCION

(a) por la fórmula (* *) el peso medio de una papaya es

$$\mu = \int_0^4 \frac{3x}{32}(4x - x^2)dx = \frac{3}{32}\left(\frac{4x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^4 = \frac{3}{32}\left(\frac{256}{3} - \frac{256}{4}\right) = 2$$

(b) Si N es el número total de papayas cosechadas, el peso total estimado - de la cosecha del agricultor es

$$\mu N = 2(20000) = 40000 \text{ kg.}$$

EJEMPLO 10 Una florista estima su venta diaria de rosas en la forma siguiente,

Venta estimada diaria en docenas	Probabilidad de la venta estimada
12	0.5
13	0.4
14	0.1

La florista debe ordenar las rosas con un día de anticipación. Las rosas - que no se venden en un día se pierden. Si el costo de las rosas es de - \$ 100.00 por docena y su precio de venta es de \$ 300.00 por docena, ¿Cuántas docenas debe ordenar la florista para maximizar su ganancia diaria esperada?

SOLUCION La florista puede ordenar 12, 13 ó 14 docenas por día. La ganancia para cada "orden" posible depende del número de docenas que venda. Se - puede considerar entonces tres variables aleatorias **X**, **Y** y **Z** donde :

X = ganancia neta (utilidad) de la florista al ordenar 12 docenas.
Y = ganancia neta (utilidad) de la florista al ordenar 13 docenas.
Z = ganancia neta (utilidad) de la florista al ordenar 14 docenas.

El rango de cada variable aleatonia (utilidad para cada orden posible), se calcula así,

utilidad = ingneso total - costo total

Cálculo del rango de X .

(1) Si vende 12 docenas

utilidad = 12 x 300.00 - 12 x 100.00 = 240,000

(2) Si vende 13 docenas .

El segundo valor del rango de X es también \$ 240,000, porqué la florista ordenó sólo 12 docenas aunque habría podido vender 13 docenas.

(3) Si vende 14 docenas.

De manera similar que en (2) aquí también la utilidad es de \$ 240,000.

Luego,

$$R_X = \{2,400,\ 2,400,\ 2,400\}$$

Cálculo del rango de Y

(1) si vende 12 docenas

utilidad = 12 x 300.00 - 13 x 100.00 = 2300.00

(2) si vende 13 docenas.

utilidad = 13 x 300.00 - 13 x 100.00 = 2,600.

(3) si vende 14 docenas.

Se obtiene también \$ 2,600, porque la florista ordenó sólo 13 docenas aunque podía haber vendido 14 docenas.

$$R_Y = \{2,300,\ 2,600,\ 2,600\}$$

Rango de Z .

Se obtiene de manera completamente análogo a los casos anteriores.

$$R_Z = \{2,200,\ 2,500,\ 2,800\}$$

Los resultados se resumen en la tabla siguiente :

Niveles posibles de utilidad

Probabilidad	X: ganan al ordenar 12 doc. R_X	Y: ganan al ordenar 13 doc. R_Y	Z: utilidad, al ordenar 14 doc. R_Z
0.5	\$ 2400	\$ 2,300	\$ 2,200
0.4	\$ 2400	\$ 2,600	\$ 2,500
0.1	\$ 2400	\$ 2,600	\$ 2,800

La utilidad (ganancia) esperada para cada una de las variables aleatorias - (niveles de orden) se indica en el siguiente cuadro,

X: utilidad al ordenar 12 docenas	Y: utilidad al ordenar 13 docenas	Z: utilidad al ordenar 14 docenas
2400 x 0.5 = 1200	2300 x 0.5 = 1150	2200 x 0.5 = 1100
2400 x 0.4 = 960	2600 x 0.4 = 1040	2500 x 0.4 = 1000
2400 x 0.1 = 240	2600 x 0.1 = 260	2800 x 0.1 = 280
E(X) = 2400	E(Y) = 2450	E(Z) = 2380

por lo tanto, la utilidad esperada es máxima, si la florista ordena 13 docenas por día.

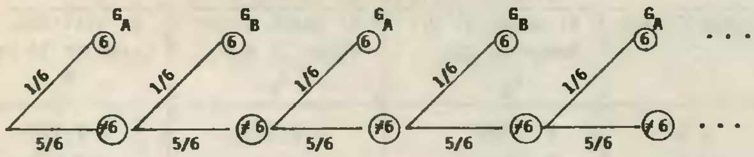
EJEMPLO 11 A y B lanzan alternativamente un dado común. El primero que saca un 6 gana. Si A lanza primero, determine usted cuál es su ganancia esperada si el premio es I/. 220 .

SOLUCION Sea **X** la variable aleatoria definida por

$$X(\omega) = \text{ganancia del jugador A.}$$

$$R_X = \{220, 0\}$$

Determinaremos ahora la distribución de probabilidad de **X**. Del diagrama de probabilidades siguiente, se obtiene



$$P[X = 220] = P[G_A] = \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^2 \times \left(\frac{1}{6}\right) + \left(\frac{5}{6}\right)^4 \left(\frac{1}{6}\right) + \ldots$$

$$= \frac{1}{6}\left[1 + \left(\frac{5}{6}\right)^2 + \left(\frac{5}{6}\right)^4 + \ldots\right]$$

$$= \frac{1}{6}\left[\frac{1}{1 - \frac{25}{36}}\right] = \frac{6}{11} .$$

$$P[X = 0] = P[G_B] = \frac{5}{11} \quad \text{(de manera análoga que el anterior).}$$

por lo tanto, la distribución de probabilidad de X es,

x	0	220
$p(x)$	$\frac{5}{11}$	$\frac{6}{11}$

Luego, $E(X) = 0\left(\frac{5}{11}\right) + 220\left(\frac{6}{11}\right) = 120$.

La ganancia esperada del jugador A es de I/. 120.

3.2.2 PROPIEDADES DE LA ESPERANZA MATEMATICA

Daremos aquí algunas leyes útiles que simplificarán el cálculo de la esperanza matemática. Estas leyes o teoremas nos permitirán calcular esperanzas en términos de otras conocidas o esperanzas que son fáciles de calcular.

El siguiente teorema generaliza la definición de esperanza matemática a la de una función de la variable aleatoria $Y = H(X)$.

TEOREMA 3.2.1 Sea X una variable aleatoria, e $Y = H(X)$ una función de X El valor esperado de la función $H(X)$, denotado por "$E[H(X)]$", se define por

(*i*) $E[H(X)] = \sum_{x \in R_X} H(x)\, p(x)$, si X es discreta.

siempre que esta serie sea absolutamente convergente .

(*ii*) $E[H(X)] = \int_{R_X} H(x) f(x) dx$, si X es continua.

siempre que $\int_{R_X} |H(x)|\, f(x) < \infty$.

Hemos visto que si X es contínua, $H(X)$ puede ser discreta o contínua, en este caso restringiremos H a que $Y = H(X)$ sea una variable aleatoria contínua.

Como habra observado el lector en esta propiedad para evaluar $E[H(X)]$ no se necesita calcular la distribución de probabilidad de $Y = H(X)$ pués es sufi ciente el conocimiento de la distribución de probabilidades de X.

NOTA La media de la variable aleatoria X, presentado anteriormente es un caso especial de la definición anterior, pués si

$$H(X) = X \text{ vemos que, } E(H(X)) = E(X) = \mu .$$

TEOREMA 3.2.2 Si X es una variable aleatoria, a y b constantes. Entonces

(i) $E(a) = a$,

(ii) $E[aH(X)] = aE[H(X)]$

(iii) $E[aH(X) + bG(X)] = aE[H(X)] + bE[G(X)]$

DEMOSTRACION Daremos la demostración para el caso discreto. La demostración para el caso continuo es similar sólo se cambia la sumatoria por la integral

Asumimos que X es discreta con función de probabilidad $p(x)$.

(i) Tomamos $H(X) = a$, entonces

$$E[H(X)] = E(a) = \sum_{x \in R_X} ap(x) = a \sum_{x \in R_X} p(x) = a;$$ pués la suma de la derecha es 1.

(ii) $$E[aH(X)] = \sum_{x \in R_X} aH(x)p(x) = a \sum_{x \in R_X} H(x)p(x) = aE[H(X)].$$

(iii)
$$\begin{aligned} E[aH(X) + bG(X)] &= \sum_{x \in R_X} [aH(x) + bG(x)]p(x) \\ &= a \sum_{x \in R_X} H(x)\, p(x) + b \sum_{x \in R_X} G(x)\, p(x) \\ &= aE[H(X)] + bE[G(X)] \end{aligned}$$

El teorema siguiente es un caso especial del teorema 3.2.2 (iii). Es una función lineal de X .

TEOREMA 3.2.3 Sea X una variable aleatoria y si a y b son constantes, entonces

$$E[aX \pm b] = aE(X) \pm b$$

DEMOSTRACION Demostraremos para el caso discreto, para el continuo la demostración es similar.

Asumimos que X es una variable aleatoria discreta con función de probabilidad $p(x)$, entonces

$$E[aX \pm b] = \sum_{x \in R_X} (ax \pm b)\,p(x)$$

$$= a \sum_{x \in R_X} x\,p(x) \pm b \sum_{x \in R_X} p(x)$$

$$= a\,E(X) \pm b.$$

CONSECUENCIA DEL TEOREMA 3.2.3 Si $b = 0$, entonces $E(aX) = a\,E(X)$. Es decir, la esperanza de una constante por una variable aleatoria, es la constante por la esperanza de la variable aleatoria.

TEOREMA 3.3.4 Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$, n variables aleatorias y a_i ($i = 0,1, \ldots, n$) constantes, entonces

$$E\left[a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right] = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i\,E(X_i)$$

CONSECUENCIA DEL TEOREMA 3.2.4 Si X e Y son variables aleatorias y a,b constantes, entonces

$$E[aX + bY] = a\,E(X) + b\,E(Y)$$

En efecto: asumimos que X e Y son discretas con función de probabilidad - $p(x)$, entonces

$$E[aX + bY] = \sum_{x \in R_X} (ax + by)\,p(x)$$

$$= a \sum_{x \in R_X} x\,p(x) + b \sum_{x \in R_X} y\,p(x)$$

$$= a\,E(X) + b\,E(Y)$$

EJEMPLO 12 Sea X una variable aleatoria cuya distribución de probabilidad está dada por .
Calcular:

(a) $E(2X + 1)$; (b) $E(4X - 2)$

(c) $E(2X^2 + 3)$; (d) $E(4X^2 + X + 3)$

(e) $E(3X^2 + 4X - 5)$; (f) $E(X^3)$

x	0	1	2	3
p(x)	1/8	3/8	3/8	1/8

SOLUCION (a) Cálculo de E(X). Por la fórmula (*) se obtiene

$$E(X) = 0 \times \frac{1}{8} + 1 \times \frac{3}{8} + 2 \times \frac{3}{8} + 3 \times \frac{1}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2} .$$

$$E(2X + 1) = 2E(X) + 1 = 2 \times \frac{3}{2} + 1 = 4. \quad \text{por teorema 3.2.3}$$

(b) $$E(4X - 2) = 4E(X) - 2 = 4 \times \frac{3}{2} - 2 = 4 \quad \text{por teorema 3.2.3}$$

(c) Primero calculemos $E(X^2)$. Por la fórmula (i) del teorema 3.2.1. se obtiene

$$E(X^2) = 0^2 \times \frac{1}{8} + 1^2 \times \frac{3}{8} + 2^2 \times \frac{3}{8} + 3^2 \times \frac{1}{8} = \frac{24}{8} = 3 .$$

$$E(2X^2 + 3) = 2E(X^2) + 3 = 2 \times 3 + 3 = 9. \quad \text{por teorema 3.2.3}$$

(d) $$E(4X^2 + X+3) = 4E(X^2) + E(X) + 3 = 4 \times 3 + \frac{3}{2} + 3 = 16.5$$

(e) $$E(3X^2 + 4X-5) = 3E(X^2) + 4E(X) - 5 = 3 \times 3 + 4 \times \frac{3}{2} - 5 = 10 .$$

(f) Por la fórmula (i) del teorema 3.2.1 se obtiene

$$E(X^3) = 0^3 \times \frac{1}{8} + 1^3 \times \frac{3}{8} + 2^3 \times \frac{3}{8} + 3^3 \times \frac{1}{8} = \frac{54}{8} = \frac{27}{4}$$

EJEMPLO 13 Considere la variable aleatoria X definida en el ejemplo 2. Calcular :

(a) $E(2X + 3)$; (b) $E(5X^2 - 2X + 1)$

SOLUCION (a) $E(2X + 3) = 2E(X) + 3 = 2 \times 1 + 3 = 5$. por teorema 3.2.3

(b) Primero calculemos $E(X^2)$. Por la fórmula (ii) del teorema 3.2.1

$$E(X^2) = \int_0^2 \frac{3}{4} x^3 (2 - x)\, dx = \frac{3}{4} \left[\frac{2x^4}{4} - \frac{x^5}{5} \right]_0^2 = \frac{6}{5} .$$

$$E(5X^2 - 2X + 1) = 5E(X^2) - 2E(X) + 1$$

$$= 5 \times \frac{6}{5} - 2 \times 1 + 1 = 5 .$$

EJEMPLO 14 Se va rifar un automóvil cuyo precio es de \$ 3,000.00 dólares, se venden 10,000 boletos a 1 dólar cada uno. Si se compra 1 boleto, ¿cuál es el beneficio esperado?. Si se compran 100 boletos, ¿cuál es el beneficio esperado?

SOLUCION (a) Sea la variable aleatoria **X** definida por

$$X(\omega) \;=\; \text{beneficio neto al comprar 1 boleto}$$

$$R_X \;=\; \{-\,1,\;\; 2{,}999\}$$

Al comprar 1 boleto, se pierde 1 dólar o se gana el automóvil que vale - 3,000 dólares.

La distribución de probabilidad de **X** es,

x	- 1	2,999
$p(x)$	$\frac{9{,}999}{10{,}000}$	$\frac{1}{10{,}000}$

por lo tanto, el beneficio esperado es ,

$$E(X) \;=\; -\,1\left(\frac{9{,}999}{10{,}000}\right) + 2{,}999\left(\frac{1}{10{,}000}\right) \;=\; -\,\frac{7000}{10000} \;=\; -\,0.70$$

(b) Supongamos ahora que $Y = H(X) = 100X$ una función de la variable aleatoria **X**. $Y = 100X$, es el beneficio al comprar 100 boletos. Luego,

$$E(100X) \;=\; 100\,E(X) \;=\; 100(-\,0.70) \;=\; -\,70$$

EJEMPLO 15 En una lotería, se venden 1,000 boletos a 25 ¢ (centavos de dólar) cada uno. Hay 5 premios en efectivo de $ 25, de $20, $ 10, de $ 5, y de $ 1, primero, segundo, tercero, cuarto y quinto premio respectivamente - Calcular la ganancia esperada de un comprador de 2 boletos.

SOLUCION Definimos la variable aleatoria X tal que

$$X(\omega) \;=\; \text{es el beneficio neto al comprar un boleto.}$$

Entonces $Y = 2X$, es el beneficio neto al comprar 2 boletos y

$$E(Y) \;=\; E(2X) \;=\; 2E(X)$$

Debemos calcular entonces la distribución de probabilidad de **X**.

$$R_X \;=\; \{-\,0.25,\; 0.75,\; 4.75,\; 9.75,\; 19.75,\; 24.75\} \qquad \text{y}$$

x	- 0.25	0.75	4.75	9.75	19.75	24.75
$p(x)$	$\frac{995}{1{,}000}$	$\frac{1}{1{,}000}$	$\frac{1}{1{,}000}$	$\frac{1}{1{,}000}$	$\frac{1}{1{,}000}$	$\frac{1}{1{,}000}$

por lo tanto, el beneficio esperado al comprar 1 boleto es,

$$E(X) = (-0.25)\frac{995}{1{,}000} + (0.75)\frac{1}{1{,}000} + (4.75)(\frac{1}{1000}) + (9.75)(\frac{1}{1000}) +$$

$$+ (19.75)(\frac{1}{1000}) + (24.75)(\frac{1}{1{,}000})$$

$$= (-0.25)(\frac{995}{1000}) + \frac{1}{1000}(0.75 + 4.75 + 9.75 + 19.75 + 24.75)$$

$$= -0.24875 + 0.05975 = -0.189 .$$

Luego,

$E(2X) = 2(-0.189) = -0.378$, es el beneficio esperado al comprar dos boletos.

EJEMPLO 16 Si **X** representa los posibles valores que se obtiene al lanzar un dado balanceado. Hallar $E(Y)$, donde

$$Y = 2X^2 - 5$$

SOLUCION $X(\omega)$ = número obtenido al lanzar un dado

$$R_X = \{1,2,3,4,5,6\}$$

La función de probabilidad de **X** es

$$p(x) = \frac{1}{6} , \qquad x = 1,2,3,4,5,6.$$

Cálculo de $E(X^2)$. Por la fórmula (i) del teorema 3.2.1

$$E(X^2) = 1^2 \times \frac{1}{6} + 2^2 \times \frac{1}{6} + 3^2 \times \frac{1}{6} + 4^2 \times \frac{1}{6} + 5^2 \times \frac{1}{6} + 6^2 \times \frac{1}{6} = \frac{91}{6}$$

Luego,

$$E(2X^2 - 5) = 2E(X^2) - 5 = 2 \times \frac{91}{6} - 5 = \frac{76}{3}$$

EJEMPLO 17 Asumimos que un cierto tirador siempre acierta en un blanco circular de radio 1 dividido en 3 zonas A, B y C (como indica la figura); los puntajes al acertar en las zonas son 10,7 y 3 respectivamente y la probabilidad de acertar (en dichas zonas) están dadas por la función de cuantía de la variable aleatoria **Y**, donde

$$Y = [\![3 \,|\, X |]\!]$$

y **X** una variable aleatoria cuya función de densidad es,

$$f(x) = \begin{cases} kx^2 & , \quad -1 < x < 1 \\ 0 & , \quad \text{en otros casos} \end{cases}$$

X es la variable aleatoria que da la posición horizontal del disparo del tirador. Se pide :

(a) Hallar el valor de k y la función de cuantía de Y.

(b) El puntaje medio esperado.

NOTA $[\![\ ]\!]$ Función máximo entero

SOLUCION Sea Z la variable aleatoria definida por

$Z(\omega)$ = puntaje obtenido por el tirador al hacer un disparo.

$R_Z = \{3,7,10\}$

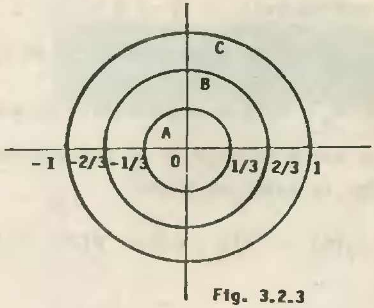


Fig. 3.2.3

La distribución de probabilidad de Z (función de cuantía) está dada por la distribución de probabilidad de

$$Y = H(X) = [\![3\,|X|\,]\!]$$

Obsérvese que X es una variable aleatoria contínua; pero $Y = [\![3|X|]\!]$ es una variable aleatoria discreta.

Cálculo de la distribución de probabilidad (función de cuantía) de Y (que es igual al de Z).

(a) (*i*) cálculo del valor de k.

$$\int_{-1}^{1} kx^2\,dx = k\,\frac{x^3}{3}\Bigg|_{-1}^{1} = K\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right] = 1;$$ por definición de función de densidad.

de donde, $k = \dfrac{3}{2}$

Luego, la funsión de densidad de X es, es,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{2}x^2 & , \quad -1 < x < 1 \\ 0 & , \quad \text{en otros casos} \end{cases}$$

(*ii*) Cálculo de la distribución de probabilidad (función de cuantía) de Y. como, $-1 < x < 1$, entonces, $0 < 3|x| < 3$, luego los valores posibles que toma la variable aleatoria Y es el conjunto $\{0,1,2\}$. Es decir, el -

rango de Y, ($y = [\![3|x|]\!]$), es el conjunto $\{0,1,2\}$.

1. $y = [\![3|x|]\!] = 0$, sí, sólo sí $0 \leq 3|x| < 1$ ó $0 \leq |x| < \frac{1}{3}$ esto implica que $-\frac{1}{3} < x < \frac{1}{3}$.

Es decir, el evento $(Y = 0)$ en R_Y es equivalente al evento $(-\frac{1}{3} < X < \frac{1}{3})$ en R_X y este es equivalente al evento $(Z = 10)$, acertar en la zona A; - ya que X representa la posición horizontal del disparo (ver fig. 3.2.3)

Por lo tanto se tiene,

$$p_Y(0) = P[Y = 0] = P[Z = 10] = \int_{-1/3}^{1/3} \frac{3}{2} x^2\, dx = \frac{x^3}{2}\Bigg|_{-\frac{1}{3}}^{1/3} =$$

$$= \frac{1}{2 \times 27} + \frac{1}{2 \times 27} = \frac{1}{27} .$$

2. $y = [\![3|x|]\!] = 1$. sí, sólo sí $1 \leqslant 3|x| < 2$ ó $\frac{1}{3} \leqslant |x| < \frac{2}{3}$ la cual es equivalente a

$$\frac{1}{3} \leqslant |x| \wedge |x| < \frac{2}{3} \Longleftrightarrow \begin{cases} x \leq -\frac{1}{3} \vee x \geq \frac{1}{3} \\ \wedge \\ -\frac{2}{3} < x < \frac{2}{3} \end{cases}$$

de donde, $-\frac{2}{3} < x \leq -\frac{1}{3} \vee \frac{1}{3} \leq x < \frac{2}{3}$ es el conjunto solución

Es decir,

El evento $(Y = 1)$ es equivalente al evento $(-\frac{2}{3} < X \leq -\frac{1}{3}$ ó $\frac{1}{3} \leqslant X < \frac{2}{3})$ en R_X lo que a su vez es equivalente al evento $(Z = 7)$, acertar en la - zona B; por la misma razón anterior (ver fig. 3.2.3). Por lo tanto,

$$p_Y(1) = P[Y = 1] = P[Z = 7] = \int_{-2/3}^{-1/3} \frac{3x^2}{2}\, dx + \int_{1/3}^{2/3} \frac{3}{2} x^2\, dx$$

$$= \frac{x^3}{2}\Bigg|_{-2/3}^{-1/3} + \frac{x^3}{2}\Bigg|_{1/3}^{2/3} = \frac{7}{27} .$$

3. $y = [\![3|x|]\!] = 2$, sí sólo sí $2 \leq 3|x| < 3$ ó $\frac{2}{3} \leq |x| < 1$ resolviendo la desigualdad obtenemos el conjunto solución

$$\{-1 < x \leq -\frac{2}{3} \quad \text{ó} \quad \frac{2}{3} \leq x < 1\}$$

Es decir, el evento $(Y = 2)$ es equivalente al evento,

$(-1 < X \leq -\frac{2}{3})$ ó $(\frac{2}{3} \leq x < 1)$ en R_X, la cual es - equivalente al evento $(Z = 3)$, acertar en la zona C. (ver fig. 3.2.3). por lo tanto,

$$p_Y(2) = P[Y = 2] = P[Z = 3] = \int_{-1}^{-2/3} \frac{3}{2} x^2 dx + \int_{2/3}^{1} \frac{3}{2} x^2 dx = \frac{19}{27}.$$

4. De (1), (2) y (3), la distribución de probabilidad de Y, es

y	0	1	2
$p_Y(y)$	$\frac{1}{27}$	$\frac{7}{27}$	$\frac{19}{27}$

(b) debemos calcular el puntaje medio esperado. En otras palabras E(Z). Sabemos que las probabilidades son las mismas que las de Y. Entonces,

z	3	7	10
$p_Z(z)$	$\frac{19}{27}$	$\frac{7}{27}$	$\frac{1}{27}$

$$E(Z) = 3(\frac{19}{27}) + 7(\frac{7}{27}) + 10(\frac{1}{27}) = \frac{57 + 49 + 10}{27} = 4.29$$

Luego, el puntaje medio esperado es 4.29 .

EJEMPLO 18 Una caja contiene 4 bolas rojas y 6 azules, se sacan 3 bolas sucesivamente y con restitución. Si usted gana I/. 20.00 por cada bola roja - y I/. 10.00 por cada bola azúl, ¿cuánto debería pagar por el derecho a jugar para que el juego fuese equitativo?

SOLUCION Definimos la variable aleatoria X por

$$X(\omega) = \text{ganancia total del jugador.}$$

Sea L cantidad que deposita por derecho a jugar. Entonces, para que el juego sea equitativo se debe tener,

$$E(X - L) = E(X) - L = 0$$

$$R_X = \{30, 40, 50, 60\}$$

X toma el valor 30 si las 3 bolas extraídas son azules

X toma el valor 40 si de las 3 bolas extraídas, 2 son azules y 1 roja

X toma el valor 60 si de las 3 bolas extraídas, 1 es azul y 2 rojas

X toma el valor 60 si las 3 bolas extraídas son rojas.

$$P[X = 30] = P[AAA] = P[A]\,P[A]\,P[A] = (\tfrac{6}{10})^3$$

por ser la extracción con restitución.

$$P[X = 40] = P[AAR \cup ARA \cup RAA] = \binom{3}{2}(\tfrac{6}{10})^2(\tfrac{4}{10})$$

pués, los eventos son mutuamente excluyentes.

$$P[X = 50] = P[ARR \cup RAR \cup RRA] = \binom{3}{2}(\tfrac{6}{10})(\tfrac{4}{10})^2$$

$$P[X = 60] = P[RRR] = (\tfrac{4}{10})^3$$

por lo tanto, la distribución de probabilidad de la variable aleatoria es,

x	30	40	50	60
$p(x)$	$(\frac{6}{10})^3$	$3(\frac{6}{10})^2(\frac{4}{10})$	$3(\frac{6}{10})(\frac{4}{10})^2$	$(\frac{4}{10})^3$

$$E(X - L) = E(X) - L = 30(\tfrac{6}{10})^3 + 40\,(3)(\tfrac{6}{10})^2(\tfrac{4}{10}) + 50\,(3)(\tfrac{6}{10})(\tfrac{4}{10})^2 +$$

$$+\ 60(\tfrac{4}{10})^3 - L = \frac{4200}{100} - L = 0$$

de donde $L = 42.00$.

Es decir, usted debe pagar I/. 42.00 por derecho a jugar para que el juego resulte equitativo.

EJEMPLO 19 En el problema anterior suponga que las bolas se sacan sin restitución, ¿cuánto debería pagarse por el derecho a jugar?

SOLUCION Sea X la variable aleatoria definida por

$X(\omega)$ = la ganancia total del jugador.

Sea L la cantidad que deposita por el derecho a jugar. Entonces, se debe tener que

$$E(X - L) = E(X) - L = 0$$

$$R_X = \{30,40,50,60\}$$

$$P[X = 30] = \frac{\binom{6}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{1}{6}$$

$$P[X = 40] = \frac{\binom{6}{2}\binom{4}{1}}{\binom{10}{3}} = \frac{1}{2}$$

$$P[X = 50] = \frac{\binom{6}{1}\binom{4}{2}}{\binom{10}{3}} = \frac{3}{10}$$

$$P[X = 60] = \frac{\binom{4}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{1}{30}$$

NOTA El lector puede calcular las probabilidades anteriores, usando probabilidad condicional.

Luego, la distribución de probabilidad de X, es

x	30	40	50	60
$p(x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{30}$

$$E(X - L) = E(X) - L$$

$$= 30\left(\frac{1}{6}\right) + 40\left(\frac{1}{2}\right) + 50\left(\frac{3}{10}\right) + 60\left(\frac{1}{30}\right) - L$$

$$= 42 - L = 0$$

de donde $L = 42.00$.

Es decir, ud. debe pagar I/. 42.00 por derecho a jugar.

EJEMPLO 20 Un jugador **A** lanza un dado. Si en el primer lanzamiento saca un número impar de puntos, gana 5 intis, y termina el juego. Si no es así, lanza nuevamente el dado y gana 18 intis si obtiene en el segundo lanzamiento el mismo número de puntos que obtuvo en el primer lanzamiento. Determine ud. la apuesta que debe colocar **A** para que el juego sea equitativo.

SOLUCION Sea X la variable aleatoria definida por

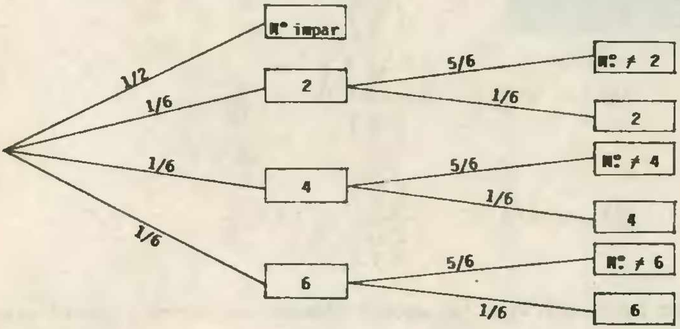
$X(\omega)$ = la ganancia del jugador A al lanzar el dado.

Sea **L** la apuesta que debe colocar A. Entonces, se debe tener,

$$E(X - L) = E(X) - L = 0$$

$$R_X = \{0,5,18\}$$

Para calcular las probabilidades respectivas, nos valemos del diagrama de probabilidades siguientes,



Por lo tanto,

$$p(0) = P[X = 0] = \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{12} .$$

$$p(5) = P[X = 5] = \frac{1}{2} = \frac{6}{12} .$$

$$p(18) = P[X = 18] = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{12} .$$

Luego, la distribución de probabilidad es,

x	0	5	18
p(x)	$\frac{5}{12}$	$\frac{6}{12}$	$\frac{1}{12}$

$$E(X - L) = E(X) - L$$

$$= 0 \left(\frac{5}{12}\right) + 5 \left(\frac{6}{12}\right) + 18 \left(\frac{1}{12}\right) - L = 0$$

de donde, $L = 4$.

EJEMPLO 21 Si **X** es una variable aleatoria, con función de probabilidad definida por ,

$$p(x) = 2(\frac{1}{3})^x \quad , \qquad x = 1,2,3, \ldots$$

Hallar $E(X)$.

SOLUCION 1 Por definición de valor esperado se tiene,

$$E(X) = \sum_{R_X} x(2\,(\frac{1}{3})^x) = \sum_{x=1}^{\infty} 2x(\frac{1}{3})^x$$

$$= 2\left[\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \frac{4}{3^4} + \ldots + \frac{n+1}{3^{n+1}} + \ldots\right]$$

2. Por otro lado $\frac{1}{3}$ E(X) es,

$$\frac{1}{3}E(X) = \frac{1}{3}\sum_{x=1}^{\infty} 2x(\frac{1}{3})^x$$

$$= \frac{2}{3}\left[\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \frac{4}{3^4} + \ldots + \frac{n}{3^n} + \ldots\right]$$

$$= 2\left[\frac{1}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \frac{3}{3^4} + \frac{4}{3^5} + \ldots + \frac{n}{3^{n+1}} + \ldots\right]$$

3. La expresión (1) se puede escribir así,

$$E(X) = 2\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{3}{3^4} + \frac{1}{3^4} + \ldots + \frac{n}{3^{n+1}} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{3^{n+1}} + \ldots\right]$$

4. Restando (2) de (3) obtenemos,

$$E(X) - \frac{1}{3}E(X) = 2\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \ldots + \frac{1}{3^{n+1}} + \ldots\right]$$

$$= \frac{2}{3}\left[1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \ldots + \frac{1}{3^n} + \ldots\right]$$

$$(1 - \frac{1}{3})E(X) = \frac{2}{3}\left[\frac{1}{1-\frac{1}{3}}\right] = 1$$

de donde, $E(X) = \frac{3}{2}$.

EJEMPLO 22 Se lanzan dos dados repetidas veces hasta obtener suma 7. Determinar el número esperado de lanzamientos.

SOLUCION Sea **X** la variable aleatoria definida por

$$X(\omega) = \text{número de lanzamientos hasta conseguir suma 7.}$$

$$R_X = \{1,2,3,4,\ .\ .\ .\}$$

Determinaremos ahora la función de probabilidad de **X**.

$$P[\text{suma } 7] = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$P[\text{suma diferente de } 7] = \frac{30}{36} = \frac{5}{6}$$

Luego,

$$p(1) = P[X = 1] = \frac{1}{6},$$

$$p(2) = P[X = 2] = \left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right),$$

$$p(3) = P[X = 3] = \left(\frac{5}{6}\right)^2 \frac{1}{6},$$

....

....

$$p(x) = P[X = x] = \left(\frac{5}{6}\right)^{x-1}\left(\frac{1}{6}\right)$$

por lo tanto,

$$p(x) = \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{x-1}, \qquad x = 1,2,3,4,\ .\ .\ .$$

es la función de probabilidad de **X**. El lector puede verificar fácilmente - que,

(*i*) $p(x) > 0 \quad ; \quad x = 1,2,3,\ .\ .\ .$ y

(*ii*) $\displaystyle\sum_{x=1}^{\infty} p(x) = \sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{x-1} = 1$

Cálculo de E(**X**). **1** por la definición de valor esperado

$$E(X) = \sum_{x=1}^{\infty} x\,\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{x-1} = \frac{1}{6}\sum_{x=1}^{\infty} x\left(\frac{5}{6}\right)^{x-1}$$

$$= \frac{1}{6}\left[1 + 2\left(\frac{5}{6}\right) + 3\left(\frac{5}{6}\right)^2 + \ldots + (n+1)\left(\frac{5}{6}\right)^n\right]$$

2. Consideremos ahora, $\frac{5}{6}$ E(X)

$$\frac{5}{6}\ E(X) = \frac{5}{6}\sum_{x=1}^{\infty}\left(\frac{1}{6}\right) x \left(\frac{5}{6}\right)^{x-1} = \frac{1}{6}\sum_{x=1}^{\infty} x\left(\frac{5}{6}\right)^{x}$$

$$= \frac{1}{6}\left[\frac{5}{6} + 2\left(\frac{5}{6}\right)^2 + \ . \ . \ . \ + n\left(\frac{5}{6}\right)^n + \ . \ . \ .\right]$$

3. La expresión (1) se escribe de la siguiente manera,

$$E(X) = \frac{1}{6}\left[\ 1 + \frac{5}{6} + \frac{5}{6} + 2\left(\frac{5}{6}\right)^2 + \left(\frac{5}{6}\right)^2 + \ldots + n\left(\frac{5}{6}\right)^n + \left(\frac{5}{6}\right)^n + \ldots\right]$$

4. Restando (2) de (3) obtenemos,

$$E(X) - \frac{5}{6}\ E(X) = \frac{1}{6}\left[\ 1 + \frac{5}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^2 + \ . \ . \ . + \left(\frac{5}{6}\right)^n + \ldots\right]$$

$$\left(1 - \frac{5}{6}\right) E(X) = \frac{1}{6}\left[\frac{1}{1-\frac{5}{6}}\right] = 1$$

de donde, $\frac{1}{6}E(X) = 1$, Por lo tanto, $E(X) = 6$

EJEMPLO 23 Sea $H(X) = (X - a)^2$ donde a es una constante y supóngase que $E[(X - a)^2]$, existe. Hallar el valor de a para el cual $E[(X - a)^2]$, sea mínimo.

SOLUCION Escribimos,

$$G(a) = E[(X - a)^2] = E[X^2 - 2aX + a^2]$$

$$= E(X^2) - 2aE(X) + a^2$$

derivando la función $G(a)$ con respecto a a e igualando a cero

$$G'(a) = \frac{d\,E\,[(X-a)]^2}{da} = -\ 2E(X) + 2a = 0$$

de donde, $a = E(X)$.

Es decir, la $E[(X - a)^2]$ es mínimo cuando $a = E(X)$.

3.2.3 VARIANZA DE UNA VARIABLE ALEATORIA

DEFINICION 3.2.2 La *varianza* de una variable aleatoria X, se denota por Var (X) o por la letra griega σ_X^2 (o simplemente σ^2) y se define como

$$Var(X) = \sigma^2 = E[(X - \mu)^2]$$

por lo tanto

$$\sigma^2 = E[(X - u)^2] = \sum_{x \in R_X} (x - u)^2 \, p(x) \quad , \quad \text{si } X \text{ es discreta}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (x - u)^2 f(x)\, dx \quad , \quad \text{si } X \text{ es continua.}$$

Observe que la varianza de una variable aleatoria X es un caso especial del teorema 3.2.1. Pués $H(X) = (X - u)^2$.
Observe también que si la unidad de la variable aleatoria es u, entonces la unidad de la media es la misma, en cambio la unidad de la varianza sería u^2.
Otra medida de dispersión *llamada desviación típica* de la variable aleatoria se define como la raíz cuadrada de la varianza y se denota por "σ", es decir,

$$\sigma = + \sqrt{\sigma^2}$$

Note que la unidad de σ es la misma que de la variable aleatoria; y un valor pequeño de σ indica poca dispersión, mientras que un valor grande indica gran dispersión.

NOTA En el desarrollo de la media y la varianza, hemos usado la terminología "media de la variable aleatoria" y varianza de la variable aleatoria". algunos autores usan la terminología "media de la distribución" y "varianza - de la distribución" ambas terminologías son aceptables.

EJEMPLO 24 La variable aleatoria X tiene la siguiente función de distribución

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ 1/8 & , \quad 0 \le x < 1 \\ 1/2 & , \quad 1 \le x < 2 \\ 5/8 & , \quad 2 \le x < 3 \\ 1 & , \quad x \ge 3 \end{cases}$$

Calcular la varianza de la variable aleatoria.

SOLUCION En el problema 23 de 2.2 hemos visto que la distribución de probabilidad, X está dado en la tabla siguiente

x	0	1	2	3	Total
$p(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	
$xp(x)$	0	$\frac{3}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{14}{8}$

de la tabla, $E(X) = \mu = \frac{14}{8} = \frac{7}{4}$.

La varianza de la variable aleatoria X es,

$$\sigma^2 = \sum_{x \in R_X} (x - \mu)^2 p(x)$$

$$= (0 - \tfrac{7}{4})^2 (\tfrac{1}{8}) + (1 - \tfrac{7}{4})^2 (\tfrac{3}{8}) + (2 - \tfrac{7}{4})^2 (\tfrac{1}{8}) + (3 - \tfrac{7}{4})^2 (\tfrac{3}{8})$$

$$= \frac{49}{16 \times 8} + \frac{27}{16 \times 8} + \frac{1}{16 \times 8} + \frac{75}{16 \times 8} = \frac{19}{16} .$$

EJEMPLO 25 Calcular la varianza de la variable aleatoria X definida en el ejemplo 2.

SOLUCION $\mu = E(X) = 1$. Entonces

$$\sigma^2 = E[(X - 1)^2] = \int_0^2 (x - 1)^2 \frac{3}{4} x(2 - x)\,dx = \frac{1}{5} .$$

3.2.4 PROPIEDADES DE LA VARIANZA Y DESVIACION TIPICA

TEOREMA 3.2.5 Si X es una variable aleatoria con media μ, la varianza de X está dado por ,

$$\mathrm{Var}(X) = \sigma^2 = E(X^2) - [E(X)]^2 = E(X^2) - \mu^2$$

DEMOSTRACION

$$\mathrm{Var}(X) = \sigma^2 = E[(X - \mu)^2]$$

$$= E(X^2 - 2X\mu + \mu^2)$$

$$= E(X^2) - 2\mu E(X) + E(\mu^2) \quad \text{teorema 3.2.3}$$

$$= E(X^2) - \mu^2$$

pués $E(X) = \mu$, por definición y $E(\mu^2) = \mu^2$ por ser μ^2 constante.

TEOREMA 3.2.6 Si X es una variable aleatoria, a y b constantes, entonces

$$\mathrm{Var}(aX \pm b) = a^2\,\mathrm{Var}(X)$$

DEMOSTRACION

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(aX+b) &= E[(aX+b)^2] - [E(aX+b)]^2 && \text{teorema 3.2.5}\\
&= E[a^2X^2 + 2abX + b^2] - [aE(X)+b]^2 && \text{teorema 3.2.3}\\
&= a^2E(X^2) + 2abE(X) + b^2 - [a^2[E(X)]^2 + 2abE(X) + b^2]\\
&= a^2[E(X^2) - [E(X)]^2]\\
&= a^2\,\mathrm{Var}(X).
\end{aligned}$$

CONSECUENCIA DEL TEOREMA 3.2.6 .

1. Si $a = 0$, $\mathrm{Var}(b) = 0$, la varianza de una constante es cero
2. Si $b = 0$, $\mathrm{Var}(aX) = a^2\,\mathrm{Var}(X)$.

TEOREMA 3.2.7 Si X es una variable aleatoria y c una constante, entonces

(i) $\sigma_{cX} = |c|\sigma_X$ (ii) $\sigma_{X+c} = \sigma_X$

EJEMPLO 26 Para la variable aleatoria definida en el ejemplo 1. Hallar
(a) $\mathrm{Var}(X)$, (b) $\mathrm{Var}(-2X+3)$

SOLUCION (a) Por el teorema 3.2.5

$$\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$E(X) = 1.32 \text{ , ejemplo 1.}$$

Cálculo de $E(X^2)$. Por la fórmula (i) del teorema 3.2.1

$$E(X^2) = 0^2(0.2)\,1^2(0.4) + 2^2(0.3) + 3^2(0.08) + 4^2(0.02)$$

$$= 2.64.$$

Ahora hallamos

$$\mathrm{Var}(X) = 2.64 - (1.32)^2 = 2.64 - 1.7424 = 0.8976.$$

(b) $\mathrm{Var}(-2X) = 4\,\mathrm{Var}(X)$ teorema 3.2.6

$= 4(0.8976) = 3.5904.$

EJEMPLO 27 Hallar (a) $\mathrm{Var}(X)$, (b) $\mathrm{Var}(-5X-3)$ de la variable aleatoria definida en el ejemplo 3.

SOLUCION (a) Por el teorema 3.2.5 es

$$\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2$$
$$E(X) = 0 \quad , \quad \text{ejemplo 3.}$$

Cálculo de $E(X^2)$. Por la fórmula (*ii*) del teorema 3.2.1

$$E(X^2) = \int_{-1}^{1} \frac{3}{2} x^4\, dx = \frac{3}{2}\, \frac{x^5}{5} \Bigg|_{-1}^{1} = \frac{3}{5}$$

Entonces,

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{3}{5} - 0 = \frac{3}{5} .$$

(b) $\mathrm{Var}(-5X - 3) = 25\, \mathrm{Var}(X)$ teorema 3.2.6

$$= 25\left(\frac{3}{5}\right) = 15 .$$

EJEMPLO 28 Sea X una variable aleatoria con función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} kx^3 & , \quad 0 < x < 1 \\ 0 & , \quad \text{en otro caso} \end{cases}$$

(a) Calcular la función de distribución y el valor de la constante k.

(b) Calcular $P\left[\frac{X}{X+1} \geq \frac{1}{3}\right]$

(c) Calcular la esperanza matemática y la varianza.

SOLUCION (a) Queda como ejercicio para el lector; verificar que $k = 4$,

y
$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ x^4 & , \quad 0 < x < 1 \\ 1 & , \quad x > 1 \end{cases}$$

La función de densidad es,

$$f(x) = \begin{cases} 4x^3 & , \quad 0 < x < 1 \\ 0 & , \quad \text{en otro caso} \end{cases}$$

(b) $P\left[\frac{X}{X+1} > \frac{1}{3}\right] = P[3X \geq X + 1] = P\left[X \geq \frac{1}{2}\right]$ pues $P(X > 0) = 1$

$$= 1 - P\left[X < \frac{1}{2}\right] = 1 - P\left[X \leq \frac{1}{2}\right]$$
$$= 1 - F(1/2) = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16} .$$

(c) $E(X) = \int_0^1 x(4x^3)dx = \int_0^1 4x^4\,dx = \frac{4x^5}{5}\Big|_0^1 = \frac{4}{5}$.

Cálculo de Var(X). Por el teorema 3.2.5

$$E(X^2) = \int_0^1 x^2(4x^3)\,dx = \frac{4x^6}{6}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}.$$

Luego, $\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2$

$$= \frac{2}{3} - \frac{16}{25} = \frac{2}{75}.$$

EJEMPLO 29 Sea **X** una variable aleatoria contínua con función de distribución,

$$F(x) = P[X < x] = \begin{cases} 0 & , \quad x \leq 0 \\ \frac{x}{2\pi} & , \quad 0 < x \leq 2\pi \\ 1 & , \quad x > 2\pi \end{cases}$$

Si $E(X) = \mu$ y $var(X) = \sigma^2$. Hallar $P[\mu - \sigma < X < \mu + \frac{\sigma}{2}]$

SOLUCION La función de densidad de la variable aleatoria es,

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} & , \quad 0 < x < 2\pi \\ 0 & , \quad \text{en otros casos} \end{cases}$$

Cálculo de E(X).

$$\mu = E(X) = \int_0^{2\pi} \frac{x}{2\pi}\,dx = \frac{x^2}{4\pi}\Big|_0^{2\pi} = \pi.$$

Cálculo de Var(X).

$$E(X^2) = \int_0^{2\pi} \frac{x^2}{2\pi}\,dx = \frac{x^3}{6\pi}\Big|_0^{2\pi} = \frac{4}{3}\pi^2.$$

Luego, $\sigma^2 = \frac{4}{3}\pi^2 - \pi^2 = \frac{\pi^2}{3}$, de donde $\sigma = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$.

Entonces,

$$P[\mu - \sigma < X < \mu + \frac{\sigma}{2}] = F(\mu + \frac{\sigma}{2}) - F(\mu - \sigma)$$

Puesto que $\mu + \frac{\sigma}{2}$ y $\mu - \sigma$ están entre 0 y 2π, tenemos

$$F(\mu + \frac{\sigma}{2}) - F(\mu - \sigma) = \frac{\mu + \frac{\sigma}{2}}{2\pi} - \frac{\mu - \sigma}{2\pi} = \frac{3\sigma}{4\pi} = \frac{\sqrt{3}}{4} = 0.433$$

Es decir,

$$P[\mu - \sigma < X < \mu + \frac{\sigma}{2}] = 0.433.$$

3.2.5 MODA, MEDIANA Y PERCENTILES DE UNA VARIABLE ALEATORIA

DEFINICION 3.2.3 MODA Se llama moda de una variable aleatoria discreta **X** a su valor más probable.

Se llama moda de una variable continua **X** a su valor con función de densidad máxima. En otras palabras, el valor x_o de la variable aleatoria X es una moda de **X**, si

$$p(x_o) \geq p(x), \quad \forall x \in R_X \qquad \text{Si X es discreta}$$

$$f(x_o) \geq f(x), \quad \forall x \in R_X \qquad \text{si X es continua.}$$

NOTACION La moda de una variable aleatoria denotaremos por x_{md} .

INTERPRETACION GEOMETRICA La moda es la abscisa de aquel punto de la curva o polígono de distribución de probabilidad con ordenada máxima.

DEFINICION 3.2.4 MEDIANA La *mediana* de una variable aleatoria **X** es un número x_o, tal que

$$F(x_o) = P[X \leq x_o] \geq \frac{1}{2} \quad \wedge \quad P[X \geq x_o] \geq \frac{1}{2}$$

o equivalentemente, $P[X \leq x_o] = P[X \geq x_o] = \frac{1}{2}$, para X continua.

Es decir, la mediana tiene la propiedad de que la variable aleatoria tiene la misma posibilidad de estar a cualquiera de los dos lados de este.

NOTACION Denotaremos por x_{me} a la mediana de una variable aleatoria.

INTERPRETACION GEOMETRICA La ordenada trazada por el punto con abscisa $x = x_{me}$ divide por la mitad el area acotada por la curva o polígono de distribución de probabilidad

NOTA 1 Una variable aleatoria **X** es simétrica si su función de probabilidad (o función de densidad de probabilidad) es simétrica*

*** Una función f es simétrica alrededor de $x = a$ si $f(x + a) = f(x - a)$. En particular, f es simétrica alrededor del origen ($a = 0$) si $f(x) = f(-x)$**

NOTA 2 Si la recta $x = a$ es el eje de simetría de la curva de distribución de probabilidad $f(x)$, entonces $x_{md} = x_{me} = E(X) = a$.

EJEMPLO 30 Hallar la moda y la mediana de la variable aleatoria **X**, cuya distribución de probabilidad está definida por,

x	- 2	- 1	1	2
$p(x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$

SOLUCION (a) Desde que $p(x)$ es mayor, cuando $x = -2$, y $x = 2$, entonces $x_o = 2$ y -2 son dos modas de la variable aleatoria **X**.

(b) La mediana calculamos usando la definición, $F(x_o) = P[X < x_o] = \frac{1}{2}$ se cumple para $x_o = -1$, también para cualquier $x \in [-1, 1\rangle$. En particular podemos tomar $x_{me} = 0$.

EJEMPLO 31 Se da la función de densidad de probabilidad de la variable aleatoria **X**,

$$f(x) = \begin{cases} x - x^3/4 & , \quad 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & , \quad \text{en otros casos} \end{cases}$$

Hallar: (a) la moda (b) la mediana de esta variable aleatoria.

SOLUCION (a) Hallamos el máximo de la función $f(x)$. Para esto encontramos la primera y segunda derivada.

$$f'(x) = 1 - \frac{3}{4}x^2 \quad ; \quad f''(x) = -\frac{3}{2}x$$

De la ecuación $f'(x) = 1 - \frac{3}{4}x^2 = 0$, obtenemos $x = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$

Entre las dos raices de esta ecuación escogemos sólo la que está comprendida en $[0,2]$. Por lo tanto, $x = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Puesto que $f''\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{3}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = -\sqrt{3} < 0$, entonces en $x = \frac{2}{\sqrt{3}}$ la función $f(x)$ presenta su máximo, o sea $M_d = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

(b) Por la definición de mediana tenemos

$$P[X < x_o] = \int_0^{x_o} \left(x - \frac{x^3}{4}\right)dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{16}\right)\Bigg|_0^{x_o} = \frac{x_o^2}{2} - \frac{x_o^4}{16} = \frac{1}{2}$$

Así, de la ecuación $\frac{x_o^2}{2} - \frac{x_o^4}{16} = \frac{1}{2}$ ó $x_o^4 - 8x_o^2 + 8 = 0$,

obtenemos $x_o = \pm\sqrt{4 \pm \sqrt{8}}$.

Entre las cuatro raices de esta ecuación escogemos la que está comprendido en el intervalo $[0,2]$. Por lo tanto, $x_{me} = \sqrt{4 - \sqrt{8}} \simeq 1.09$.

EJEMPLO 32 Sea **X** una variable aleatoria, cuya función de densidad es,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{9}x & , \quad 0 \leq x \leq 3 \\ 0 & , \quad \text{en otro caso} \end{cases}$$

Calcular : (a) la mediana ; (b) la moda de **X**

SOLUCION (a) por la definición de mediana se tiene

$$P[X \leq x_o] = \int_0^{x_o} \frac{2}{9}x\,dx = \frac{x^2}{9}\Bigg|_0^{x_o} = \frac{x_o^2}{9} = \frac{1}{2}$$

de donde obtenemos $x_o = \pm\frac{3}{\sqrt{2}}$. De estas dos soluciones escogemos la que está comprendida en el intervalo $[0,3]$. Por lo tanto, $x_o = \frac{3}{\sqrt{2}}$

(b) Los únicos puntos críticos de la función de densidad en el intervalo $[0,3]$ son 0 y 3. Los valores de f en estos puntos críticos son

$$f(0) = \frac{2}{9}(0) = 0 \quad ; \quad f(3) = \frac{2}{9}(3) = \frac{2}{3}$$

Por lo tanto, la función de densidad toma su máximo en $x_o = 3$. Es decir la moda es 3. El gráfico de la función de densidad de **X** está dado en la fig. 4.2.4. En esta figura se observa que la función toma su máximo en el punto $x = 3$

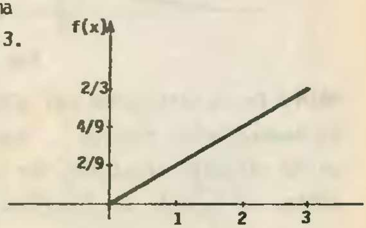


Fig. 3.2.4

DEFINICION 3.2.5 PERCENTILES Se llama el 100 k-ésimo percentil de la variable aleatoria X (denotado por x_k) al número más pequeño posible tal que la probabilidad de no excederlo es cuando menos k, con $0 < k < 1$. Es decir x_k es el valor más pequeño tal que

$$F(x_k) = P[X \leq x_k] \geq k$$

$$\wedge \qquad P[X \geq x_k] \geq 1 - k$$

Como se muestra en la fig. 3.2.5, el 30-ésimo percentil, $x_{0.30}$, es el número tal que $F(x_{0.30}) = 0.30$; el 70-ésimo percentil, $x_{0.70}$ satisface $F(x_{0.70}) = 0.70$. Por lo tanto, x_k es el número más pequeño tal que $P[X \leq x_k] = k$. Algunos percentiles reciben nombres especiales se llaman ***cuartiles*** de la distribución $x_{0.25}$, $x_{0.50}$ y $x_{0.75}$ debido a que cortan la función de probabilidad o función de densidad en cuatro probabilidades iguales. El 50-ésimo percentil, $x_{0.50}$ se llama también ***mediana*** de la variable aleatoria. A la diferencia $x_{0.75} - x_{0.25}$, se le conoce como el ***rango intercuartil***, y a veces se usa como medida de la variabilidad. Se nota que el rango intercuartil esla longitud de un intervalo que encierra el 50% de la distribución de probabilidad de X.

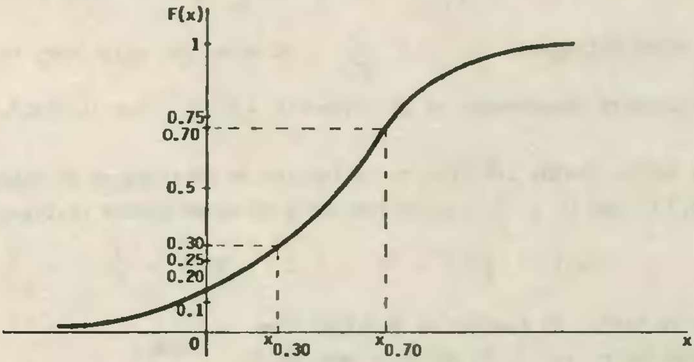


Fig. 3.2.5 Percentiles de X.

NOTA 3 En la definición del 100k-ésimo percentil se usa la desigualdad de esta manera estan seguros que se definan los percentiles para cualquier tipo de variable aleatoria. En particular, si X es una variable aleatoria discreta, su función de distribución F(x) tiene saltos y puede no existir un -

número tal que $F(x_k) = k$. Al usar la definición dada, se define el 100k-ésimo percentil como el número x_k en el cuál saltó la función de distribución más allá de k. (Ver ejemplo 34. Fig. 3.2.6)

EJEMPLO 33 Si **X** es una variable aleatoria tal que

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ \dfrac{x}{100} & , \quad 0 \le x \le 100 \\ 1 & , \quad x > 100 \end{cases}$$

Halla : (a) $x_{0.10}$, (b) $x_{0.20}$, (c) $x_{0.55}$, (d) $x_{0.80}$, (e) la mediana y (f) el rango intercuartil

SOLUCION (a) $F(x_{0.10}) = \dfrac{x_{0.10}}{100} = 0.10$; es decir $x_{0.10} = 10.$

(b) $F(x_{0.20}) = \dfrac{x_{0.20}}{100} = 0.2$, por lo tanto $x_{0.20} = 20$

(c) $F(x_{0.55}) = \dfrac{x_{0.55}}{100} = 0.55$, se obtiene que $x_{0.55} = 55$

(d) $F(x_{0.80}) = \dfrac{x_{0.80}}{100} = 0.80$, se tiene que $x_{0.80} = 80.$

(e) La mediana está definida por

$F(x_{0.50}) = \dfrac{x_{0.50}}{100} = 0.50$, de donde $x_{0.50} = 50.$

(f) En forma análoga obtenemos

$$x_{0.25} = 100(0.25) = 25$$

$$x_{0.75} = 100(0.75) = 75$$

El rango intercuartil es $x_{0.75} - x_{0.25} = 50$.

EJEMPLO 34 Si **X** es una variable aleatoria tal que

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ 1/6 & , \quad 0 \le x < 1 \\ 1/3 & , \quad 1 \le x < 2 \\ 1/2 & , \quad 2 \le x < 3 \\ 1 & , \quad x \ge 3 \end{cases}$$

Hallar : (a) $x_{0.34}$, (b) $x_{0.51}$, (c) $x_{0.16}$, (d) $x_{0.17}$, (e) la mediana, (f) el recorrido intercuartil

SOLUCION Construimos la gráfica de F(x).

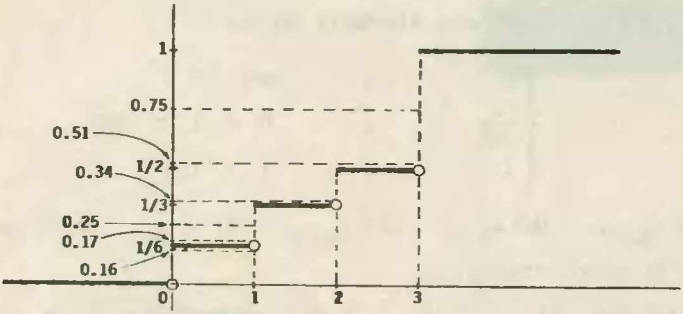


Fig. 3.2.6

(a) $x_{0.34} = 2$, (b) $x_{0.51} = 2$, (c) $x_{0.16} = 0$, (d) $x_{0.17} = 1$

(e) La mediana es $x_{0.50} = 2$, (f) $x_{0.25} = 1$, $x_{0.75} = 3$, luego, el rango intercuartil es $x_{0.75} - x_{0.25} = 2$.

3.2.6 MOMENTOS DE ORDEN SUPERIOR Y ASIMETRIA DE UNA VARIABLE ALEATORIA

DEFINICION 3.2.6 MOMENTOS Se llama ***momento de orden k*** alrededor del punto a de la variable aleatoria **X** a la esperanza matemática de $(X - a)^k$, y se denota por $\mu_{k,a}$. Entonces,

$$\mu_{k,a} = E[(X - a)^k] = \sum_{x \in R_X} (x - a)^k\, p(x)\ , \quad \text{si } X \text{ es discreta.}$$

$$= \int_{R_X} (x - a)^k f(x)\, dx\ , \quad \text{si } X \text{ es continua}$$

Si $a = 0$, se llaman ***momentos*** iniciales o ***momentos al rededor del origen*** de orden k de una variable aleatoria a $E(X^k)$. Es decir,

$$\mu_{k,0} = \mu'_k = E(X^k) = \sum_{x \in R_X} x^k\, p(x)\ , \quad \text{si } X \text{ es discreta.}$$

$$= \int_{R_X} x^k f(x)\,dx \quad , \text{ si } X \text{ es continua} .$$

al primer momento inicial , $\mu'_1 = \mu = E(X)$ hemos llamado la *media de* X.

Si $a = E(X) = \mu$, se llaman *momentos al rededor de la* media o momento central de orden k de una variable aleatoria a

$E[(X - \mu)^k]$. Es decir

$$\mu_{k,\mu} = \mu_k = E[(X - \mu)^k] = \sum_{x \in R_X} (x - \mu)^k p(x) \text{ , si } X \text{ es discreta} .$$

$$= \int_{R_X} (x - \mu)^k f(x)\,dx \text{ , si } X \text{ es continua}$$

al segundo momento alrededor de la media de una variable aleatoria X hemos llamado varianza de la variable aleatoria, o sea $\sigma^2 = \mu_{2,\mu}$.
El primer momento central (o alrededor de la media) para cualquier variable aleatoria es igual a cero, es decir $\mu_1 = 0$.
Los momentos iniciales y centrales de primer, segundo, tercer y cuarto orden están vinculados por las relaciones

$$\mu_1 = 0 \quad , \quad \mu_1 = \mu'_2 - \mu'^2_1$$

$$\mu_3 = \mu'_3 - 3\mu'_1\mu'_2 + 2\mu'^3_1 \quad , \quad \mu_4 = \mu'_4 - 4\mu'_1\mu'_3 + 6\mu'^2_1\mu'_2 - 3\mu'^4_1$$

Si la distribución de probabilidad es simétrica respecto a la media, entonces todos los momentos centrales de orden impar son iguales a cero, o sea $\mu_1 = \mu_3 = \mu_5 = \ldots = 0$.

DEFINICION 3.2.7 . ASIMETRIA Se llama *asimetría o sesgo* a la relación

$$S_k = \frac{E[(X - \mu)^3]}{\sigma^3} = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$$

La medida S_k es positiva , negativa o cero. Si $S_k > 0$ la distribución está sesgada a la derecha (asimétrica positiva). Si $S_k < 0$ la distribución está sesgada a la izquierda (asimétrica negativa). Si $S_k = 0$ la distribución es simétrica con respecto a la media.
En las fig. 3.2.7 y 3.2.8 se muestran las gráficas de la distribución para $S_k > 0$ y $S_k < 0$ respectivamente.

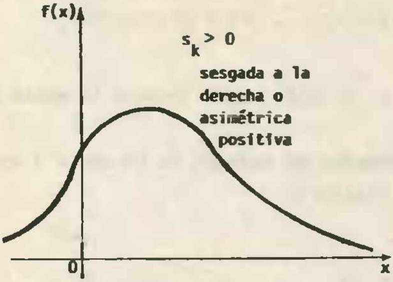


Fig. 3.2.7

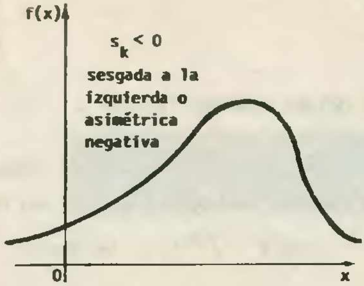


Fig. 3.2.8

DEFINICION 3.2.8. CURTIOSIS Se llama curtiosis o coeficiente de curtiosis - de una variable aleatoria X a la relación

$$C_X = \frac{E[(X - \mu)^4]}{\sigma^4} = \frac{\mu_4}{\sigma^4}$$

Frecuentemente se compara con la curva normal o de Gauss (Ver cap. 6) que - tiene un coeficiente de curtiosis igual a 3 y se denomina el *exceso* o sea

$$E_X = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$$

para la curva normal o de Gauss, $E_X = 0$

EJEMPLO 35 Sea **X** una variable aleatoria con distribución de probabilidad

x	2	4	6	8
$p(x)$	0.4	0.3	0.2	0.1

Hallar : (**a**) Los cuatro primeros momentos iniciales .

(**b**) Los cuatro primeros momentos centrales.

(**c**) La asimétrica .

SOLUCION (a_1) El momento inicial de primer orden

$$\mu_1' = 2(0.4) + 4(0.3) + 6(0.2) + 8(0.1) = 4.$$

(a_2) El momento inicial de segundo orden

$$\mu_2' = 4(0.4) + 16(0.3) + 36(0.2) + 64(0.1) = 20$$

(a_3) El momento inicial de tercer orden

$$\mu_3' = 8(0.4) + 64(0.3) + 216(0.2) + 512(0.1) = 116.8.$$

(a_4) El momento inicial de cuarto orden

$$\mu'_4 = 16(0.4) + 256(0.3) + 1296(0.2) + 4096(0.1) = 752.$$

(b_1) Determinar de los momentos centrales. El primer momento central

$$\mu_1 = 0 .$$

(b_2) El segundo momento central se encuentra por la relación

$$\mu_2 = \mu_2 - \mu_1{}^2 = 20 - 4^2 = 20 - 16 = 4 .$$

(b_3) El tercer momento central se determina por la fórmula

$$\mu_3 = \mu'_3 - 3\mu'_1\mu'_2 + 2\mu_1{}^3 = 116.8 - 3 \times 4 \times 20 + 2 \times 4^3 = 4.8$$

(b_4) El cuarto momento central se utiliza la fórmula

$$\mu_4 = \mu'_4 - 4\mu'_1\mu'_3 + 6\mu'^2_1\mu'_2 - 3\mu'^4_1$$

$$= 752 - 4 \times 4(116.8) + 6 \times 4^2 \times 20 - 3 \times 4^4 = 35.2$$

(c) $\sigma^2 = \mu_2 = 4$, luego $\sigma = 2$. La asimetría es

$$S_k = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{4.8}{2^3} = \frac{4.8}{8} = 0.60$$

3.2.7 DESIGUALDAD DE CHEBYSHEV

Si conocemos la distribución de probabilidad de una variable aleatoria X (la función de densidad en el caso contínuo, la función de probabilidad - en el caso discreto) hemos visto que podemos determinar μ y σ^2, si existen. Pero lo recíproco no es cierto. Es decir, conociendo μ y σ^2 no podemos determinar la distribución de probabilidad de X. Sin embargo se puede - dar una cuota superior (o inferior) para probabilidad del tipo - $P[|X - \mu| \geq k\sigma]$, este resultado, se conoce como la *desigualdad* de - CHEBYSHEV.

TEOREMA 3.2.8 (DE CHEBYSHEV) Si la variable aleatoria X tiene μ y σ^2 finita, entonces, para cualquier $k > 1$, se cumple

$$P[|X - \mu| \geq k\sigma] \leq \frac{1}{k^2}$$

la cual indica que la probabilidad que X tome algún valor fuera del intervalo $\langle \mu - k\sigma , \mu + k\sigma \rangle$ es a lo más $1/k^2$

DEMOSTRACION El teorema es válido tanto para variables aleatorias discretas como para contínuas. Daremos aquí la demostración para el caso discreto. La demostración para el caso contínuo queda como ejercicio para el lector.
Sea $p(x)$ la función de probabilidad de X. y sea el evento,

$$A = \{x \;/\; |x - \mu| \geq k\sigma\}$$

Entonces, $$\sigma^2 = E[(X - \mu)^2] = \sum_{x \in R_X} (x - \mu)^2 p(x)$$

$$= \sum_{x \in A} (x - \mu)^2 p(x) + \sum_{x \notin A} (x - \mu)^2 p(x) \qquad (1)$$

Note que $$|x - \mu|^2 = (x - \mu)^2$$

El segundo sumando de (1) es un número no negativo,entonces es mayor o igual a cero. Luego,

$$\sigma^2 \geq \sum_{x \in A} (x - \mu)^2 p(x) \qquad (2)$$

Y como el evento A, es $|x - \mu| \geq k\sigma$, se tiene $(x - \mu)^2 \geq k^2\sigma^2$ - entonces, reemplazando esta última expresión en (2),

$$\sigma^2 \geq \sum_{x \in A} k^2\sigma^2 p(x) = k^2\sigma^2 \sum_{x \in A} p(x)$$

pero, $$\sum_{x \in A} p(x) = P[X \in A] = P[|X - \mu| \geq k\sigma]$$

Luego, $$\sigma^2 \geq k^2\sigma^2 P[|X - \mu| \geq k\sigma] \qquad \text{ó}$$

$$P[|X - \mu| \geq k\sigma] \leq \frac{1}{k^2}$$

CONSECUENCIAS

(a) Si $\varepsilon = k\sigma$, se tiene $P[|X - \mu| > \varepsilon] \leq \dfrac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$

(b) Puesto que $\{|X - \mu| \geq k\sigma\}$ y $\{|X - \mu| < k\sigma\}$ son eventos complementarios, entonces

$$P[|X - \mu| < k\sigma] \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

indica que la probabilidad de que X tome valores dentro del intervalo - $\langle \mu - k\sigma , \mu + k\sigma \rangle$ es por lo menos $1 - 1/k^2$

EJEMPLO 36 Sea X una variable aleatoria con media 33 y varianza 16. Hallar una cota inferior para $P[23 < X < 43]$.

SOLUCION

$$P[23 < X < 43] = P[23 - 33 < X - 33 < 43 - 33]$$

$$= P[-10 < X - 33 < 10] = P[|X - \mu| < 10]$$

Observe que $10 = K\sigma$, y $\sigma = 4$, entonces $k = \frac{5}{2}$. Luego,

$$P[23 < X < 43] = P[|X - \mu| < \frac{5}{2} \times 4] \geq 1 - \frac{1}{(\frac{5}{2})^2}$$

por lo tanto, $P[23 < X < 43] \geq \frac{21}{25}$.

PROBLEMAS 3.2

1. Para participar en un juego ud. debe pagar I/. 2.00. El juego consiste en lo siguiente: lanzar dos dados y si la suma es al menos 8, se le permitirá lanzar un dado y recibirá I/. 1.00, por cada punto que obtenga en el dado (por ejemplo, si saca 4 recibe I/.4.). ¿Qué cantidad de dinero espera ud. ganar o perder en este juego?.

2. Considere a una persona que compra un billete de una lotería que vende 1000 billetes y que dá cuatro premios de I/. 200. , 10 premios de I/. 100. y 20 premios de I/. 10. ¿Cuanto debería estar dispuesto a pagar la persona por un billete de esta loteria?

3. Ud. le hace una apuesta a un jugador por I/. 100. Si él pienza que su ganancia esperada es I/. 50. ¿cuál es la probabilidad de que gane la apuesta?

4. Un tirador hace tres disparos a un blanco. En cada uno de estos disparos la probabilidad de acertar es igual a 3/4. Si acierta una vez recibe 12.8 Intis, si acierta dos veces recibe 32 intis, si acierta tres veces recibe 64 intis y si ninguno de los disparos da en el blanco, tiene que pagar 320 intis. Calcular su ganancia esperada.

5. Lotes de 40 artículos de cierto producto son aceptados si ellos contienen no más de tres defectuosos. El plan de aceptación consiste en extraer una muestra al azar de 5 artículos y si se encuentra un artículo defectuoso se rechaza el lote.

(a) Hallar la probabilidad de que se encuentre exactamente un defectuoso en la muestra, si el lote se considera en su calidad mínima. (un lote es de calidad máxima si no tiene defectuoso).

(b) ¿Cuántos defectuosos espera encontrar en la muestra?

6. Un radio técnico debe reemplazar una válvula defectuosa. En un maletín tiene cuatro válvulas de las cuales sólo sirve una de ellas. Si las selecciona al azar, una después de otra sin reposición, ¿cuál es el número esperado de válvulas que ha de probar para que pueda arreglar el receptor?

7. Ud. lanza una moneda tres veces. Si obtiene al menos dos caras se le permitirá lanzar un dado y recibirá tantos intis como puntos obtenga en el dado. ¿Qué cantidad de dinero espera ud. ganar en este juego?

8. En una feria se deben pagar 25 ¢. para participar en un juego que consiste en tirar anillos. Se dan tres anillos a una persona, la cual trata de lanzarlos uno por uno hacia una clavija. Se da un premio de 50 ¢, si se logra ensartar un anillo en la clavija; si se logra ensartar dos anillos, el premio es de $ 1; si se ensartan los tres, entonces se otorga un premio de $ 5. Suponiendo que la probabilidad de ensartar en la clavija sea de 0.10 en cada tirada, ¿cuál es la ganancia esperada si se juega una vez? ¿Diez veces?.

9. Un jugador A paga I/. 1.00 a otro jugador B y lanza 3 dados. El jugador A recibe I/. 2.00 si aparece 1 as; I/. 4.00 si aparece 2 ases y I/. 8.00 si aparecen 3 ases en los otros casos no recibe nada. Se pregunta:

(a) ¿Es equitativo el juego? Justifique su respuesta.

(b) Si no lo fuese, ¿Cuánto debería recibir A por sacar 3 ases?.

10. Un amigo A, le hace a otro B, la siguiente apuesta: "Te doy 3 bolitas que debes lanzarla sobre cuatro casilleros, de tal suerte que, al lanzar las tres bolitas ganas, si dos de ellas (solamente dos) caen en el mismo casillero". Se sabe que:

(1°) Al ejecutar el lanzamiento las bolitas caerán, siempre, en cualquiera de los 4 casilleros, en consecuencia,la probabilidad de que una bolita caiga en un casillero, es la misma para cualquiera de los casilleros.

(2°) A, le da a B, tres oportunidades; ganando B en la primera oportunidad que logre colocar 2 bolitas en algún casillero.

Si B gana, recibira de A, $ 219.70, determinar la cantidad que debe darle B, si pierde en el juego, debiendo ser este equitativo.

11. Un borracho llega a su casa y quiere abrir la puerta de entrada. En el llavero lleva cinco llaves y prueba una tras otra al azar. Suponga que se encuentra suficientemente despierto para eliminar de tentavias posteriores las llaves probadas sin exito. Se representa por X el número de llaves que prueba hasta que abre la puerta. Hallar el número esperado de llaves que se prueba.

12. En el juego de carnaval llamado Chuck-a-Luck, un jugador paga una cantidad c como derecho de entrada al juego. Elige después uno de los números 1,2,. . ., 6 y tira tres dados. Si en los tres dados sale el número elegido por el jugador éste cobra cuatro veces su entrada; si el número sale en dos de los dados, cobra tres veces la entrada, y si sale sólo en uno de los dados cobra el doble de la entrada. Si no sale el número elegido no cobra nada. Sea X el beneficio neto del jugador en una tirada de este juego. Suponiendo que los dados son buenos. Determinar E(X).

13. Se lanza una moneda hasta que salga cara. Hallar el número esperado de tiradas.

14. Se lanza un dado hasta que aparezca el 4 ó 5. Calcular el número de lanzamientos.

15. La compañía "ELECTRON-PERU" fabrica radios y televisores. Dicha compañía recibe los transistores en cajas de 100 transistores cada una. El departamento de recepción utiliza la siguiente regla de inspección. Se prueban cuatro transistores de cada caja. Si ninguno resulta defectuoso no se continúan examinando transistores de la caja. En caso contrario se prueban todos los transistores restantes. Determine el número esperado de transistores examinados por caja, si cada caja contiene exactamente el 10% de defectuosos.

16. Una empresa que lanzará al mercado un nuevo producto ha considerado la contratación de una póliza de seguro para cubrir posibles pérdidas en la operación. Consideran que si el lanzamiento es un fracaso total, las pérdidas serán de I/. 180,000.00; y si el lanzamiento del producto es sólo modestamente satisfactorio las pérdidas serán de sólo I/. 50,000.00. Los actuarios de la empresa aseguradora, basados en encuestas del mercado han determinado que las probabilidades de un fracaso total y de un lanzamiento modestamente satisfactorio son respectivamente, 0.01 y 0.05. Si se -

ignoran otras pérdidas asociadas, ¿qué monto de primas debe cobrarse para salir sin ganar ni perder?

17. Un actuario, que es un estadístico empleado por una companía de seguros, determina las primas de seguro que la compañía debe cobrar por determinada protección. Considere el problema de determinar la prima anual para un seguro de daños de automóvil de 200,000.00 intis. La poliza cubre un tipo de eventos (siniestros) que por experiencia pasada se sabe que ocurren a 3 de cada 5000 automovilistas cada año .

18. Los dos finalistas en un torneo de tenis juegan una serie de 3 juegos, donde el ganador recibe I/. 100,000 y el segundo recibe I/. 60,000. ¿Cuáles son las esperanzas matemáticas de los dos jugadores si,
(a) tienen las mismas posibilidades;
(b) el mejor jugador es favorito 3 a 1?

19. Como parte de un programa promocional, un fabricante de detergente ofrece un primer premio de I/. 90,000 y un segundo de I/. 30,000 para aquellas que aceptan en usar el nuevo producto (distribuido gratuito) y enviar su nombre en la etiqueta. Los ganadores serán seleccionados al azar en un programa de T.V.
(a) ¿Cuál sería la esperanza matemática de cada concursante si enviaran sus nombres 1'500,00 personas?
(b) ¿Vale la pena entonces gastar un inti en estampillas para enviar una etiqueta?

20. Una compañía de seguros acepta pagar al promotor de una fiesta campestre I/. 50,000 en caso que el evento tenga que ser cancelado por lluvia. Si el actuario de la compañía cree que una prima justa a pagar por este seguro sería I/. 2,000, ¿qué probabilidad asigna a la eventualidad de que la fiesta campestre tenga que ser cancelada por lluvia?

21. Un fabricante de televisores utiliza un cierto tipo de componente electrónico en el montaje de televisores a color. Cada televisor requiere 6 de estos componentes. Un componente defectuoso no puede ser detectado hasta que el televisor ha sido totalmente montado. El costo de detección, reparación y reposición de un componente defectuoso es $ 15. El fabricante ha estado comprando estos componentes en lotes de 100 a dos diferentes proveedores. El costo de compra por lote al proveedor **A** es de $ 100, en tanto que el costo de compra por lote al proveedor **B** es $ 120. Basadas en expe-

riencias anteriores, las calidades comparadas de los lotes comprados a los dos proveedores son las siguientes:

PROVEEDOR A

Número estimado de componentes defectuosos por lote	Probabilidad
1	0.30
2	0.25
3	0.20
4	0.15
5	0.10

PROVEEDOR B

Número estimado de componentes defectuosos por lote	Probabidad
1	0.60
2	0.30
3	0.10

¿A qué proveedor debe comprar los componentes electrónicos?

22. Un comerciante estima las ventas diarias de un cierto tipo de pan especial en la forma siguiente:

Venta diaria estimada unidades	Probabilidad
4	0.50
5	0.40
6	0.10

El costo por unidad de hogaza de pan es de 25 ¢ y el precio de venta es de 50 ¢. El pan debe ser ordenado con un día de anticipación y cada unidad no vendida en el día se entrega a una institución de beneficiencia al precio de 10 ¢ por unidad. ¿Cuántas unidades debe ordenar el comerciante para maximizar su utilidad esperada diaria?

23. Un fabricante está planeando la producción de una novedad de temporada. El fabricante estima que la demanda de este artículo está dada en la forma siguiente:

Número Unidades (X)	Probabilidades
1,000	1/4
2,000	1/2
3,000	1/4

El costo de producción y comercialización del artículo consiste en un cos to base fijo de \$ 5,000 y un costo variable de \$ 1 por unidad. Si el precio de venta es de \$ 5 por unidad. ¿Cuál es la ganancia esperada para el fabricante?

24. La demanda para cierto artículo particular está caracterizado por la distribución de probabilidad siguiente :

$$p(d) = \begin{cases} k\,\dfrac{d^2}{16} & , \quad d = 1,2,3,4,5 \\ 0 & , \quad \text{en otros casos} \end{cases}$$

(a) Hallar el valor apropiado de k; (b) Calcular la media de la demanda; (c) la varianza de la demanda.

25. A, B y C cortan una baraja de 52 naipes sucesivamente en ese orden. El primero que saque corazón gana I/. 74. Las extracciones se hacen con reposición. Determinar la esperanza de cada jugador.

26. Un jugador lanza una moneda al aire, frente a otro jugador, gana 1 sol si sale sello y pierde 1 sol si sale cara. Supongamos que lanza una vez y si gana abandona el juego; en caso contrario tira otra vez. ¿Cuál es la ganancia esperada?

27. En el problema 7 de 2.2.Hallar la utilidad esperada diaria y la varianza.

28. En el problema 3 de 3.1. Determinar la utilidad esperada por noche y la varianza.

29. Determinar la media y la varianza de la variable aleatoria Y definida en en el problema 6 de 3.1.

30. Determinar la media y la varianza de la variable aleatoria definida en el problema 7 de 3.1.

31. Una casa de suministros eléctricos está rematando cierto número de artículos, entre ellos un lote de cuatro artículos de cierto tipo al precio de I/. 40.00 por todo el lote. Un comerciante puede vender los artículos en buen estado a I/. 20.00 cada uno, pero todo artículo defectuoso representa una pérdida completa de I/. 10.00. Basada en su amplia experiencia, el comerciante asigna probabilidades de 0.1, 0.5, 0.2, 0.1 y 0.1 a los eventos que haya 0.1,2,3. y 4 artículos defectuosos en el lote, respectivamente. Si no es posible ninguna inspección. ¿Deberá comprar el lote?

32. Tres jugadores A, B y C de igual habilidad juegan de la siguiente manera: A y B juegan la primera partida mientras que C descansa, el ganador sigue

jugando y el que pierde es reemplazado por el que no jugó, haciendo lo mismo después de cada partida. El juego continúa hasta que un jugador gane dos veces seguidas. Si el premio es de I/. 210. ¿Cuál es la ganancia esperada de cada jugador.

(a) después de la primera partida? (suponga que la primera partida gana A)

(b) al principio del juego?

33. En un sector de Lima metropolitana, hay una playa de estacionamiento que tiene una capacidad de acomodar 8 automóviles. Las tarifas de la playa de estacionamiento producen una utilidad de I/. 4. (4 intis) cada hora por automóvil estacionado. Sea X la variable aleatoria que representa el número de automóviles buscando estacionamiento por hora. Suponga que la función de probabilidad de X está dada por

$$p(x) = \frac{1}{2^{x+1}} \quad , \quad x = 0,1,2,\ldots$$

Hallar la utilidad esperada de la playa por hora.

34. Sea X una variable aleatoria cuya distribución de probabilidad es la siguiente:

x	0	1	2	3	4
p(x)	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

Calcular: (a) $E(2X + 1)$, $V(X)$, $V(2X + 1)$, $E(X^2 + 2X + 1)$

(b) La moda y la mediana de X;

(c) El tercer momento alrededor de la media.

35. La siguiente tabla representa el número de televisores vendidos en cierta semana de una tienda.

x	0	1	2	3	4	5
P[X = x]	0.05	0.1	0.35	0.25	0.2	0.05

Hallar: (a) $E(3X - 2)$; (b) $E(-6X + 10)$; (c) $E(2X^2 + 3X - 5)$

(d) La media, la varianza y la desviación estandar de X;

(e) La moda y el tercer momento alrededor de la media de X;

(f) Var $(X^2 + 2)$; Var$(-2X^2 + 5X - 1)$; (g) el 60-ésimo percentil ;

(h) el rango intercuartil.

36. Sea X una variable aleatoria cuya distribución de probabilidad está dado por

x	1	3	5	7	9
$p(x)$	0.1	0.4	0.2	0.2	0.1

Hallar: (a) 20-ésimo percentil; (b) 50-ésimo percentil ;
(c) el recorrido intercuartil;
(d) los primeros cuatro momentos iniciales (o al rededor del origen)
(e) los primeros cuatro momentos centrales (o al rededor de la media)
(f) la asimetría.

37. La variable aleatoria X con media μ y varianza σ^2 tiene función de densidad,

$$f(x) = kx^2 \ , \quad 0 \leq x \leq 5$$

Calcular (a) el valor de k; (b) $F(2)$; (c) $P[|X - \mu| < \sigma^2]$.

38. La función de distribución de una variable aleatoria contínua X tiene la forma;

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \leq -1 \\ a + b \ \text{arcsen}x & , \quad -1 < x \leq 1 \\ 1 & , \quad x > 1 \end{cases}$$

(a) Hallar las constantes a y b ; (b) Calcular μ y σ^2.

39. Sea X una variable aleatoria con función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} x & , \quad 0 \leq x < 1/2 \\ 5x - 2 & , \quad 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Hallar $E(X)$, $E[(X - 4)^2]$

40. La media y la varianza de una variable aleatoria X son 50 y 4, respectivamente. Calcular:
(a) La media de X^2 ; (b) La varianza de $2X + 3$;
(c) la desviación estandar de $2X + 3$;
(d) La varianza de $-X$.

41. Sea X una variable aleatoria con función de densidad definida por,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{18} & , \quad 0 \leq x \leq 6 \\ 0 & , \quad \text{en otro caso} \end{cases}$$

Si $Y = 10 + 2X$. Hallar la esperanza y la varianza de Y.

42. Una variable aleatoria X, que representa el peso (en onzas) de un artículo, tiene la función de densidad dada por,

$$f(x) = \begin{cases} x - 8 & , \quad 8 \leq x \leq 9 \\ 10 - x & , \quad 9 < x < 10 \\ 0 & , \quad \text{en otro caso} \end{cases}$$

(a) Determine la media y la varianza de la variable aleatoria X.

(b) El fabricante vende un artículo por un precio fijo de \$ 2,000.00. El garantiza el reintegro del precio de venta a cualquier cliente que encuentra que el peso de su artículo es inferior a 8.25 onzas. El costo de producción está relacionado al peso de artículos de acuerdo a la expresión $(0.05)X + 0.30$. Exprese la variable aleatoria utilidad P, en términos de la variable aleatoria X, es decir, encuentre la función $H(X)$ tal que $P = H(X)$.

(c) Determine la utilidad esperada por artículo.

43. Una máquina produce un artículo que es revisado (inspección de 100 %) antes de ser despachado. El instrumento de medición es tal que es difícil leer entre 1 y $1\frac{1}{3}$ (datos codificados). Después que se realiza el proceso de revisión, la división medida tiene la siguiente densidad.

$$f(x) = \begin{cases} kx^2 & , \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & , \quad 1 < x \leq 1\frac{1}{3} \\ 0 & , \quad \text{en otro caso} \end{cases}$$

(a) Determine el valor de K;

(b) Qué fracción de los artículos estará fuera de la zona confusa? (estará entre 0 y 1?)

(c) Calcular la media y la varianza de esta variable aleatoria.

44. Sea X una variable aleatoria con función de densidad

$$f(x) = \frac{3x^2}{2} \quad , \quad -1 \leq x \leq 1$$

Calcular :

(a) La mediana

(b) la moda

(c) el momento de orden 3 alrededor de la media.

45. Sea X una variable aleatoria con función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} c(a - x) & , \quad 0 \leq x \leq a \\ 0 & , \quad \text{en otro caso} \end{cases}$$

Hallar: (a) La constante c ; (b) la moda

(c) la mediana ; (d) la desviación típica.

46. La estatura de adulto de un niño de 3 años tiene la misma posibilidad de estar comprendida en el intervalo de 5 pies 6 pulgadas y 5 pies 11 pulgadas. ¿Cuál es su estatura esperada de adulto? ¿Cuál es su varianza?

47. Una estación de gasolina recibe semanalmente gasolina. Las estadísticas anteriores sugieren que la distribución de probabilidad de las ventas semanales **X**, medidas en miles de galones está dada por:

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & , \quad 1 < x < 2 \\ 3 - x & , \quad 2 \leq x < 3 \\ 0 & , \quad \text{en otro caso.} \end{cases}$$

(a) Calcular la probabilidad de que las ventas semanales superen a 1,500 galones.

(b) Si la provisión semanal es siempre de 500 galones más que la venta de la semana anterior. Calcular la probabilidad de una provisión menor a 3 mil galones.

(c) Calcular los límites del intervalo. $\langle \mu - k\sigma, \ \mu + k\sigma \rangle$ que ocurre con una probabilidad 0.95.

48. Cierta aleación se forma al combinar la mezcla fundida de dos metales. La aleación que resulta contiene cierto porcentaje de plomo **X**, que puede considerarse como una variable aleatoria. Supongamos que **X** tiene la siguiente función de densidad

$$f(x) = \frac{3}{5} 10^{-5} x \ (100 - x) \ , \quad 0 \leq x \leq 100$$

Suponga que **P**, la utilidad neta obtenida al vender esta aleación (por libra), es la siguiente función del porcentaje del contenido de plomo.

$P = C_1 + C_2X$. Calcular la utilidad esperada (por libra)

49. Suponga que **X** es una variable aleatoria con función de densidad de probabilidad

$$f(x) = \begin{cases} a(x - 2)(4 - x) & , \quad 2 \leq x \leq 4 \\ 0 & , \quad \text{en otros casos} \end{cases}$$

Determinar: (a) el valor de a ; (b) la moda ; (c) la mediana de X; (d) el rango intercuartil

50. Suponga que **X** es una variable aleatoria con función de distribución

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ \sqrt{x} & , \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & , \quad x > 1 \end{cases}$$

Determinar: (a) la mediana ; (b) el rango intercuartil ; (c) el 40-ésimo percentil ; (d) el 60-ésimo percentil ; (e) el 90-ésimo percentil.

51. Suponga que **X** es una variable aleatoria con función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} a x^2 & , \quad 0 \leq x < 1 \\ a(2 - x)^2 & , \quad 1 \leq x < 2 \\ 0 & , \quad \text{en otros casos} \end{cases}$$

Determinar: (a) el valor de a ; (b) los primeros cuatro momentos iniciales ; (c) los primeros cuatro momentos centrales ; (d) la asimetría.

52. Si $E(X) = 17$ y $E(X^2) = 298$, use la desigualdad de **CHEBYSHEV** para determinar la cota inferior para: $P[10 < X < 24]$

53. Sea **X** una variable aleatoria con media $\mu = 2$ y varianza $\sigma^2 = 1$. Use la desigualdad de **CHEBYSHEV** para hallar una cota inferior para:

(a) $P[|X - 2| < 4]$ (b) $P[-3 < X < 7]$

54. Sea **X** una variable aleatoria con media $\mu = 10$ y varianza $\sigma^2 = 4$. - Hallar :

(a) $P[|X - 10| \geq 3]$; (b) $P[|X - 10| < 3]$; (c) $P[5 < X < 15]$

(d) Hallar el valor de **c**, tal que

$$P[|X - 10| \geq c] \leq 0.04$$

55. (a) Calcule el peso medio de un melón cosechado por el agricultor del problema 8 de 2.3.

(b) Estime el peso total de la cosecha del agricultor.

56. (a) Calcule el peso medio de una piña cosechado por el agricultor del problema 13 de 2.3.

(b) Estime el peso total de la cosecha del agricultor.

57. Una empresa que lanzará al mercado un nuevo producto ha considerado la contratación de una póliza de seguro para cubrir posibles pérdidas en la operación. Consideran que si el lanzamiento es un fracaso total, las pérdidas serán de 80,000.00 dólares; y si el lanzamiento del producto es sólo modestamente satisfactorio las pérdidas serán de sólo 25,000.00 dólares. Los actuarios de la compañía aseguradora, basados en encuestas del mercado han determinado que las probabilidades de un fracaso total y de un lanzamiento modestamente satisfactorio son, 0.1 y 0.5 respectivamente. Si se ignoran otras pérdidas asociadas, ¿qué monto debe cobrarse como prima para salir sin ganar ni perder?.

58. Calcular $P[\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma]$

donde **X** es una variable aleatoria, con función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} 6x(1-x) & , \quad 0 < x < 1 \\ 0 & , \quad \text{en otros casos} \end{cases}$$

59. Sea **X** una variable aleatoria del tipo mixto que tiene la siguiente función de distribución

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ x^2/4 & , \quad 0 \leq x < 1 \\ \dfrac{x+1}{4} & , \quad 1 \leq x < 2 \\ 1 & , \quad x \geq 2 \end{cases}$$

Hallar : **(a)** E(**X**) ; **(b)** Var(**X**)

4

VARIABLES ALEATORIAS BIDIMENCIONALES

4.1 INTRODUCCION

Hasta aquí sólo hemos considerado variables aleatorias unidimensionales. Es decir, el resultado de un experimento hemos representado por un sólo número real x. Sin embargo, un experimento aleatorio puede generar dos o más variables aleatorias de importancia. Un investigador puede estar interesado en el comportamiento simultáneo de dos o más características numéricas de un experimento aleatorio. Por ejemplo, se extrae aleatoriamente un estudiante de cierta universidad, y se anota su estatura x y su peso y; consideremos el par (x,y) como un sólo resultado del experimento. Por lo tanto, es importante estudiar la *distribución de probabilidad conjunta* de las variables aleatorias bidimensionales denotado (X, Y) que se genera al cuantificar a cada estudiante por el par (x,y); así, por ejemplo X(Juan) = x, Y(Juan) = y; donde **X** representa la estatura e **Y** el peso. Estudiaremos también las *distribuciones marginales*, es decir, la distribución de cada una de las variables aleatorias **X** e **Y**. Daremos luego las *distribución condicional*. Previamente vamos a definir el concepto de variable aleatoria *bidimensional o vector aleatorio bidimensional*

4.2 VARIABLE ALEATORIA BIDIMENSIONAL

DEFINICION 4.2.1 Si Ω es el espacio muestral asociado a un experimento aleatorio ε, y X e Y dos funciones, que asigna un número real $x = X(\omega)$, $y = Y(\omega)$ a cada uno de los elementos $\omega \in \Omega$; el par (X,Y) se llama *Variable aleatoria bidimensional o vector bidimensional* (Ver fig. 4.2.1).

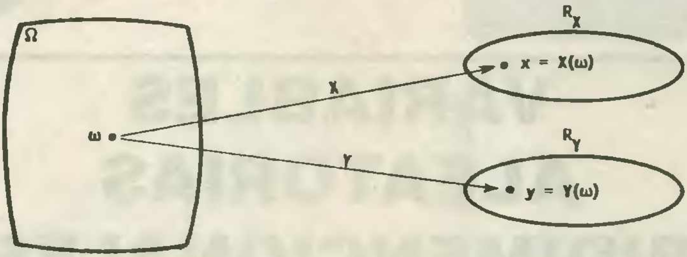


Fig. 4.2.1. Una variable aleatoria bidimencional.

La extensión de una variable aleatoria bidimensional a *n-dimensional* es directa, siguiendo los usos habituales del cálculo.

El rango de la variable aleatoria bidimensional (X,Y) es el conjunto de todos los valores posibles del vector aleatorio (X, Y), denota por $R_{X \times Y}$, - donde

$$R_{X \times Y} = \{(x,y) \mid x \in R_X, \quad y \in R_Y\}$$

Es decir, es el producto cartesiano de los rangos de las variables aleatorias X e Y. La cual es un subconjunto del plano Euclidiano.

Extendiendo de manera natural las notaciones de eventos usados en el capítulo 2, tenemos, por ejemplo el evento $(X = a, \quad Y = b)$, que se lee: "la variable aleatoria X toma el valor a y la variable aleatoria Y toma el valor b" similarmente $(X \leq a, \quad Y \leq b)$, $(X \geq a, \quad Y = b)$, etc. Las probabilidades de estos eventos se escribirá

$$P[X = a, \quad Y = b], \qquad P[X \geq a, \quad Y = b] \quad \text{etc.}$$

EJEMPLO 1 Una tienda comercial tiene dos vendedores A y B. Sea X el número de televisores vendidos en un día por A, e Y el número de televisores vendidos en un día por B.

Entonces, el par (X, Y) es una variable aleatoria bidimensional, donde el - rango de X, es, por ejemplo, $R_X = \{0,1,2, \ldots, n\}$, y el rango de Y es - $R_Y = \{0,1,2, \ldots, m\}$. Por lo tanto, el rango de la variable aleatoria bidimensional (X, Y) es $R_{X \times Y} = \{(x,y) \mid x \in R_X, \ y \in R_Y\}$

Se tiene también, por ejemplo, que $(X = 2,\ Y = 4)$ es el evento: "A vende 2 y B vende 4 televisores". $(X \geq 2,\ Y = 3)$ es el evento "A vende por lo menos 2 televisores y B vende 3".

EJEMPLO 2 Una urna contiene 3 bolas numeradas 1,2,3 respectivamente. De la urna se extraen 2 bolas al azar una a una con reposición. Sea **X** el número de la primera bola que se extrae, e **Y** el número de la segunda bola que se extrae Se tiene que el par (X,Y) es una variable aleatoria bidimensional con rango

$$R_{X \times Y} = \{(x,y) \ / \ x,y \in \{1,2,3\}\} \quad \text{pués,}$$

$$R_X = R_Y = \{1,2,3\}$$

Como en el caso unidimensional, distinguiremos, dos tipos de variables aleatorias bidimensionales; discretas y contínuas. Puesto que en el par (X,Y) cada uno de ellas es una variable aleatoria, entonces es posible que : ambas sean discretas, ambas contínuas o que una sea discreta y la otra contínua; en este trabajo sólo se consideran los dos primeros. Si ambas son discretas, se dice que el par (X,Y) es una variable aleatoria bidimensional discreta; y si ambas son contínuas, se dice que (X,Y) es una variable aleatoria bidimensional contínua, formalizaremos esto en las definiciones siguientes.

DEFINICION 4.2.2 Si los posibles valores de (X,Y) son finitas o infinito numerable, entonces (X,Y) se llama ***variable aleatoria bidimensional discreta*** . Es decir, los posibles valores de (X,Y) se puede representar por,

$$(x_i, y_j), \quad i = 1,2,\ldots,n \qquad j = 1,2,\ldots,m.$$

Los dos ejemplos anteriores son variables aleatorias bidimensionales discretas.

DEFINICION 4.2.3 Si los posibles valores de (X,Y) son todos los valores de un conjunto no numerable del plano Euclideano, entonces (X,Y) se llama ***variable aleatoria bidimensional contínua.***

Por ejemplo, si $a \leq x \leq b$ y $c \leq y \leq d$, se tiene que, $R_{X \times Y} = \{(x,y) \ / \ a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d\}$, son todos los valores de un rectángulo

EJEMPLO 3 Considere la extracción de un tornillo aleatoriamente de la producción de un día. Anotemos su diámetro y su peso. Si **X** representa el diámetro en pulgadas e Y representa el peso en libras, y si sabemos que $2.0 \leq x \leq 2.08$ pulgadas y $0.75 \leq y \leq 0.8$ libras; entonces el rango de (X,Y) es el conjunto ,

$$R_{X \times Y} = \{(x,y) \ / \ 2.0 \leq x \leq 2.08,\ 0.76 \leq y \leq 0.8\}$$

Esto se muestra en la figura 4.2.2

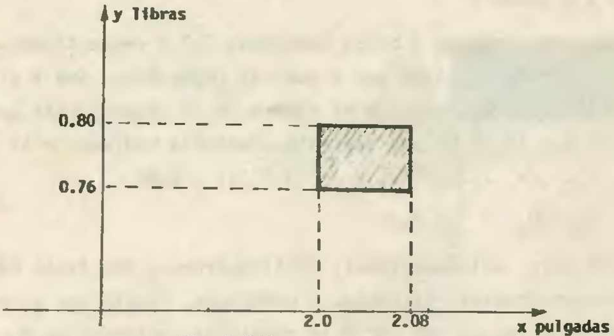


Fig. 4.2.2.

4.3 DISTRIBUCION BIDIMENSIONAL DISCRETA

DEFINICION 4.3.1 Sea (X,Y) una variable aleatoria bidimensional discreta - con rango $R_{X\times Y}$. A cada posible resultado (x,y) de (X,Y), asociamos un número,

$$p(x,y) = P[X = x, \ Y = y]$$

llamado la *función de probabilidad conjunta*, que cumple las siguientes condiciones,

(1) $p(x,y) \geq 0 \ \forall \ (x,y)$;

(2) $$\sum_{(x,y)\in R_{X\times Y}} \sum p(x,y) = 1$$

Los valores $[(x,y), \ p(x,y)]$ para todo $(x,y) \in R_{X\times Y}$, se llama la *distribución de probabilidad conjunta.*

La probabilidad de un evento cualquiera A en $R_{X\times Y}$ $(A \subset R_{X\times Y})$, está definido por,

$$\boxed{P[(X,Y) \in A] = \sum_{(x,y)\in A} p(x,y)}$$

Como en el caso unidimensional, la distribución de probabilidad conjunta de (X,Y) es inducida por la probabilidad de los sucesos del espacio muestral - original Ω. Si la variable aleatoria bidimensional es finita, la distribución de probabilidad conjunta se representa en una tabla con dos entradas como se muestra en tabla 4.3.1.

Tabla 4.3.1. Representación Tabular

y \ x	x_1	x_2	.	.	.	x_{n-1}	x_n
y_1	$p(x_1, y_1)$	$p(x_2, y_1)$	.	.	.	.	$p(x_n, y_1)$
y_2	$p(x_1, y_2)$	$p(x_2, y_2)$	.	.	.	.	$p(x_n, y_2)$
.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.
y_m	$p(x_1, y_m)$	$p(x_2, y_m)$	.	.	.	.	$p(x_n, y_m)$

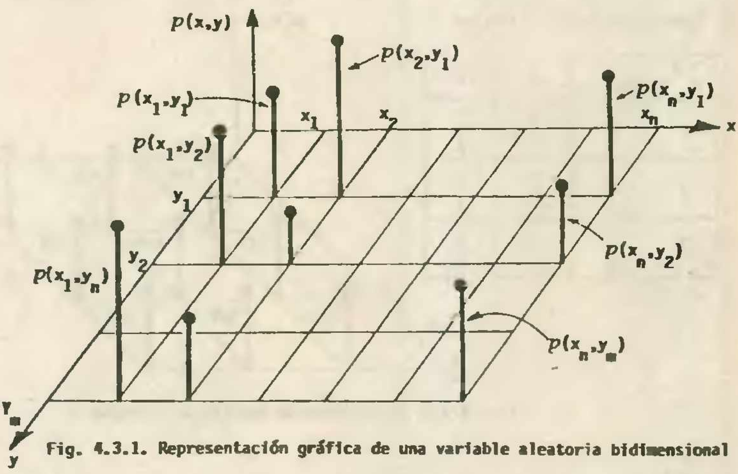


Fig. 4.3.1. Representación gráfica de una variable aleatoria bidimensional

DEFINICION 4.3.2 *La función de distribución acumulada* de la variable aleatoria bidimensional está definida por,

$$F(x,y) = P[X \leq x,\ Y \leq y] = \sum_{u=-\infty}^{x} \sum_{v=-\infty}^{y} p(u,v)$$

EJEMPLO 1 Hallar la distribución de probabilidad conjunta y su gráfica de la variable aleatoria bidimensional definida en el ejemplo 2 de 4.2.

SOLUCION Hemos visto que el rango de la variable aleatoria (X,Y) es,

$$R_{X \times Y} = \{(x,y) \ / \ x,y \in \{1,2,3\}\}$$
$$= \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3)\}.$$

Luego,

$$p(1,1) = P[X = 1, \quad Y = 1] = \frac{1}{9}$$
$$p(1,2) = P[X = 1, \quad Y = 2] = \frac{1}{9}$$
$$p(1,3) = P[X = 1, \quad Y = 3] = \frac{1}{9} \text{ , etc.}$$

Luego,

$$p(x,y) = \frac{1}{9} \quad , \quad x = 1,2,3; \quad y = 1,2,3$$

es la función de probabilidad conjunta de X e Y.

Representación Tabular

$y \backslash x$	1	2	3
1	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$
2	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$
3	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$

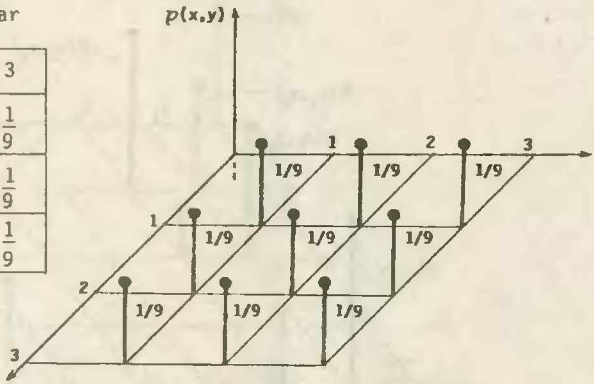


Fig. 4.3.2. Representación Gráfica del ejemplo 1 .

EJEMPLO 2 Sea (X,Y), la variable aleatoria bidimensional definida en el ejemplo 1 de 4.2. Suponga que de experiencias pasadas se sabe que la distribución de probabilidad conjunta de X e Y está dado por la siguiente tabla

$y \backslash x$	0	1	2
0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$
2	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$

(a) ¿Cuál es la probabilidad que cada vendedor vende a lo más 1 televisor?

(b) ¿Cuál es la probabilidad que B venda más televisores que A?

SOLUCION (a) Debemos calcular la probabilidad del evento. $(X \leq 1, \ Y \leq 1)$

$$P[X \leq 1,\ Y \leq 1] = F(1,1) = P[X = 0,\ Y = 0] + P[X = 0,\ Y = 1] + P[X = 1,\ Y = 0] + P[X = 1,\ Y = 1]$$

$$= \frac{1}{16} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}.$$

(b) Se debe calcular la probabilidad del evento $(X < Y)$

$$P[X < Y] = P[X = 0,\ Y = 1,2] + P[X = 1,\ Y = 2]$$

$$= P[X = 0,\ Y = 1] + P[X = 0,\ Y = 2] + P[X = 1,\ Y = 2]$$

$$= \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{5}{16}.$$

4.3.1 DISTRIBUCIONES MARGINALES

En algunos casos se puede estar interesado sólo en las distribuciones de X o de Y. Antes de dar la definición consideremos el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 3 En el ejemplo anterior supongamos que estamos interesados, sólo en las ventas que hace el vendedor A. La distribución de probabilidad de X se obtiene de la tabla de distribución conjunta así,

$$p_X(0) = P[X = 0,\ Y = 0] + P[X = 0,\ Y = 1] + P[X = 0,\ Y = 2]$$

$$= \frac{1}{16} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{5}{16};$$

$$p_X(1) = P[X = 1,\ Y = 0] + P[X = 1,\ Y = 1] + P[X = 1,\ Y = 2]$$

$$= \frac{1}{16} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{4}{16};$$

$$p_X(2) = P[X = 2,\ Y = 0] + P[X = 2,\ Y = 1] + P[X = 2,\ Y = 2]$$

$$= \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{7}{16};$$

En otras palabras, la probabilidad que la variable aleatoria X toma el valor 0 es 5/16, que toma el valor 1 es 4/16, y que toma el valor 2 es 7/16. Y se obtiene sumando las columnas de la tabla de distribución de probabilidad del ejemplo anterior. Luego la distribución de probabilidad de X ($p_X(x) = P[X = x]$) es,

x	0	1	2
$p_X(x)$	$\frac{5}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{7}{16}$

Similarmente sumando las filas de la tabla de distribución conjunta de **X** e **Y**, se obtiene la distribución de **Y**,

$$(p_Y(y) = P[Y = y])$$

y	0	1	2
$p_Y(y)$	$\frac{4}{16}$	$\frac{8}{16}$	$\frac{4}{16}$

Las distribuciones de X e Y así calculadas, se llaman ***distribución de probabilidad marginal.***

Es, muchas veces, conveniente escribir estas sumas en los márgenes de la tabla de distribución conjunta de (**X**,**Y**), como se observa en la tabla siguiente

y \ x	0	1	2	Suma $P[Y = y]$
0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{4}{16}$
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{8}{16}$
2	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$
Suma $P[X = x]$	$\frac{5}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{7}{16}$	1

Distribución marginal de Y.

Distribución marginal de X.

DEFINICION 4.3.3 La función de probabilidad individual para X e **Y** se llaman ***distribuciones de probabilidad marginal o funciones de probabilidad marginal.*** ***La Distribucion Marginal para*** X, está dado por,

$$\boxed{p_X(x) = P[X = x] = \sum_{y \in R_Y | X=x} P[X = x,\ Y = y] = \sum_{y \in R_Y | X=x} p(x,y)} \quad \ldots. (1)$$

donde $y \in R_Y | X = x$ es el rango de valores para **Y**, dado que **X** = x. Note que este rango puede ser diferente para valores diferentes de x.

La Distribución Marginal para Y, está dado por,

$$\boxed{p_Y(y) = P[Y = y] = \sum_{x \in R_X | Y=y} p(x,y)} \qquad (2)$$

El nombre de marginal se debe a que los valores de estas distribuciones están dadas por la suma total en los márgenes de las filas y columnas de la representación tabular de $p(x,y)$.

EJEMPLO 4 La función de probabilidad conjunta de la variable aleatoria - (X,Y) está definido por,

$$p(x,y) = \frac{x + y}{32}, \qquad x = 1,2; \qquad y = 1,2,3,4.$$

Hallar la distribución de probabilidad marginal de X y de Y

SOLUCION

(a) $$p_X(x) = P[X = x] = \sum_{y \in R_Y | X=x} p(x,y) = \sum_{y=1}^{4} \frac{x + y}{32}$$

$$= \frac{x + 1}{32} + \frac{x + 2}{32} + \frac{x + 3}{32} + \frac{x + 4}{32}$$

Luego, $$p_X(x) = P[X = x] = \frac{2x + 5}{16}, \qquad x = 1,2$$

es la función de probabilidad marginal para X.

(b) $$p_Y(y) = P[Y = y] = \sum_{x \in R_X | Y=y} p(x,y) = \sum_{x=1}^{2} \frac{x + y}{32}$$

$$= \frac{1 + y}{32} + \frac{2 + y}{32}$$

Luego, $$p_Y(y) = P[Y = y] = \frac{2y + 3}{32}, \qquad y = 1,2,3,4$$

es la probabilidad marginal de Y.

4.3.2 VARIABLES ALEATORIAS INDEPENDIENTES

El concepto de independencia de variables aleatorias es muy importante en estadística. Como en el caso de independencia de eventos, dado en el capítulo 1; intuitivamente diremos que las variables aleatorias X e Y son *independientes* si el resultado de una de las variables, digamos X no influye en el resultado de Y, y viceversa.

DEFINICION 4.3.4 Sea (X,Y) una variable aleatoria bidimensional discreta con función de probabilidad marginal $p_X(x)$ y $p_Y(y)$. Se dice que X e Y son independientes si, sólo, sí

$$p(x,y) = p_X(x)\ p_Y(y) \quad , \quad \forall\ (x,y)$$

o que $\quad P[X = x,\ Y = y] = P[X = x]P[Y = y] \ ,\ \forall\ (x,y)$

En otras palabras, X e Y son independientes si, $P[X = x]$ no afecta a la $P[Y = y]$.

EJEMPLO 5 Las variables aleatorias definidas en el ejemplo 2 . no son independientes, puesto que por un lado se tiene,

$$p(0,0) = \frac{1}{16}$$

por otro lado se obtiene,

$$p_X(0)\ p_Y(0) = \frac{5}{16} \times \frac{4}{16} = \frac{5}{64}$$

de donde, $\quad p(0,0) \neq p_X(0)p_Y(0)$

EJEMPLO 6 Suponga que X e Y tienen la siguiente distribución de probabilidad conjunta,

Determine si las variables aleatorias X e Y son independientes.

y \ x	2	4
1	0.10	0.15
3	0.20	0.30
5	0.10	0.15

SOLUCION La distribución marginal de cada variable está dada en la tabla siguiente,

y \ x	2	4	P[Y = y]
1	0.10	0.15	0.25
3	0.20	0.30	0.50
5	0.10	0.15	0.25
P[X = x]	0.40	0.60	1

$p_X(2)p_Y(1) = (0.40)(0.25) = 0.10$, Luego, $p(2,1) = p_X(2)p_Y(1)$

$p_X(2)p_Y(3) = (0.40)(0.50) = 0.20$, Luego, $p(2,3) = p_X(2)p_Y(3)$

$p_X(2)p_Y(5) = (0.40)(0.25) = 0.10$, Luego, $p(2,5) = p_X(2)p_Y(5)$

$p_X(4)p_Y(1) = (0.60)(0.25) = 0.15$, Luego, $p(4,1) = p_X(4)p_Y(1)$

$p_X(4)p_Y(3) = (0.60)(0.50) = 0.30$, Luego, $p(4,3) = p_X(4)p_Y(3)$

$p_X(4)p_Y(5) = (0.60)(0.25) = 0.15$; Luego, $p(4,5) = p_X(4)p_Y(5)$

Por lo tanto, concluimos que X e Y son independientes.

4.3.3 DISTRIBUCION DE PROBABILIDAD CONDICIONAL

Dado dos eventos A y B, en el capítulo I hemos presentado, la probabilidad - condicional de que ocurra el evento A dado que ha ocurrido el evento B. Extenderemos este concepto a la distribución condicional de una variable aleatoria X, dado que la variable aleatoria Y haya tomado un valor determinado , por, ejemplo y_o.

Sea (X,Y) una variable aleatoria bidimencional con función de probabilidad - $p(x,y)$ de rango $R_{X\times Y}$, y probabilidades marginales $p_X(x)$, $p_Y(y)$. R_X y R_Y - los rangos de las variables aleatorias X e Y respectivamente.

Sean los eventos $A = (X = x)$, $B = (Y = y)$, $(x,y) \in R_{X\times Y}$, entonces , por la definición de probabilidad condicional se tiene.

$$P[A|B] = \frac{P[A \cap B]}{P[B]}$$

Pero, $A \cap B = (X = x,\ Y = y)$, por lo tanto

$P[A \cap B] = P[X = x,\ Y = y] = p(x,y)$ y

$P[B] = P[Y = y] = p_Y(y) > 0$, pues $y \in R_Y$.

Luego, la probabilidad condicional del evento A, dado B es

$$P[A|B] = \frac{P[A \cap B]}{P[B]} = \frac{P[X = x,\ Y = y]}{P[Y = y]} = \frac{p(x,y)}{p_Y(y)}$$

Es decir,

$$\boxed{P[X = x|Y = y] = \frac{P[X = x,\ Y = y]}{P[Y = y]} = \frac{p(x,y)}{p_Y(y)}}$$

La razón $\dfrac{p(x,y)}{p_Y(y)}$, se llama la función de ***probabilidad condicional de* X,** ***dado*** Y = y. La siguiente definición formaliza lo expuesto en el párrafo anterior.

DEFINICION 4.3.5 Si (X,Y) es una variable aleatoria bidimensional discreta, la ***función de probabilidad condicional de*** X ***dado*** $Y = y$, se denota por "$p_{X|Y}(x|y)$" y se define por,

$$p_{X|Y}(x|y) = \frac{p(x,y)}{p_Y(y)}, \quad p_Y(y) > 0$$

Similarmente, la ***función de probabilidad condicional de*** Y ***dado*** X = x, se define por,

$$p_{Y|X}(y|x) = \frac{p(x,y)}{p_X(x)}, \quad p_X(x) > 0$$

EJEMPLO 7 Sean X e Y dos variables aleatorias cuya función de probabilidad conjunta esta definida por,

$$p(x,y) = \frac{x + y}{32}, \quad x = 1,2; \quad y = 1,2,3,4.$$

Hallar :

(a) la función de probabilidad condicional de X, dado $Y = y$.

(b) la función de probabilidad condicional de Y, dado $X = x$.

SOLUCION En el ejemplo 4 hemos calculado las respectivas funciones de probabilidad marginal,

$$p_X(x) = \frac{2x + 5}{16}, \quad x = 1,2$$

$$p_Y(y) = \frac{2y + 3}{32}, \quad y = 1,2,3,4.$$

Entonces:

(a) La función de probabilidad condicional de X, dado $Y = y$ es,

$$p_{X|Y}(x|y) = \frac{\frac{x + y}{32}}{\frac{2y + 3}{32}} = \frac{x + y}{2y + 3}, \quad x = 1,2;$$

cuando $y = 1$ ó 2 ó 3 ó 4.

por ejemplo,

$$P[X = 2|Y = 2] = p_{X|2}(2|2) = \frac{4}{7}.$$

(b) La función de probabilidad condicional de Y, dado $X = x$, es

$$p_{Y|X}(y|x) = \frac{\frac{x + y}{32}}{\frac{2x + 5}{16}} = \frac{x + y}{4x + 10}, \quad \text{para, } x = 1,2,3,4,$$

cuando $x = 1$ ó 2.

por ejemplo, $P[Y = 3|X = 1] = p_{Y|1}(3|1) = \frac{4}{14} = \frac{2}{7}$

EJEMPLO 8 La distribución de probabilidad conjunta de la variable aleatoria (X, Y) está dado por.

Hallar:

(a) $P[X = 1|Y = 0]$

(b) $P[Y = 2|X = -1]$

y \ x	-1	1
0	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{12}$
1	0	$\frac{4}{12}$
2	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$

SOLUCION La distribución de probabilidad marginal,

$p_X(x) = P[X = x]$ y $p_Y(y) = P[Y = y]$, están - dadas por la suma de las columnas y filas de la tabla de distribución de probabilidad conjunta.

y \ x	-1	1	$P[Y = y]$
0	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{5}{12}$
1	0	$\frac{4}{12}$	$\frac{4}{12}$
2	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{3}{12}$
$P[X = x]$	$\frac{3}{12}$	$\frac{9}{12}$	1

(a) $$P[X = 1|Y = 0] = \frac{P[X = 1,\ Y = 0]}{P[Y = 0]} = \frac{3/12}{5/12} = \frac{3}{5}.$$

(b) $$P[Y = 2|X = -1] = \frac{P[X = -1,\ Y = 2]}{P[X = -1]} = \frac{1/12}{3/12} = \frac{1}{3}.$$

El lector habrá notado que, $p_{X|Y}(x|y) > 0$, y

$$\sum_{x\in R_X|Y=y} p_{X|Y}(x|y) = \sum_{x\in R_X|Y=y} \frac{p(x,y)}{p_Y(y)} = \frac{\sum_{x\in R_X|Y=y} p(x,y)}{p_Y(y)}$$

$$= \frac{p_Y(y)}{p_Y(y)} = 1.$$

Es decir, $p_{X|Y}(x|y)$ cumple las condiciones de una función de probabilidad , entonces se puede calcular probabilidades tales como,

$$\boxed{P[a \leq X \leq b|Y = y] = \sum_{x\in R_X|a \leq x \leq b} p_{X|Y}(x|y)}$$

$$\boxed{P[X < a|Y = y] = \sum_{x\in R_X|x < a} p_{X|Y}(x|y)}\ \text{, etc.}$$

por ejemplo, en el problema anterior, la probabilidad condicional del evento $(0 < x < 3/2)$, dado que $Y = 2$, es

$$P[0 < X < \frac{3}{2}|Y = 2] = P[X = 1|Y = 2]$$

$$= \frac{P[X = 1,\ Y = 2]}{P[Y = 2]} = \frac{2/12}{3/12} = \frac{2}{3}\ .$$

TEOREMA 4.3.1 Sea (X,Y) una variable aleatoria bidimensional, entonces,

$$p_{X|Y}(x|y) = p_X(x) \quad , \quad \forall\ (x,y)$$

$$p_{Y|X}(y|x) \quad p_Y(y) \quad , \quad \forall\ (x,y)$$

sí, sólo si X e Y son variables aleatorias independientes .

4.3.4 ESPERANZA Y VARIANZA

En el capítulo 3 , hemos calculado, la media o valor esperado de una variable aleatoria X, la media de funciones de X, como por, ejemplo: X^2; $aX + b$; etc. En algunos problemas, se requiere calcular, el valor esperado de una función de dos o más variables aleatorias X e Y, por ejemplo, las mas simples: X + Y, XY, $X^2Y + X$, etc. La técnica para obtener el valor esperado de una función de dos variables aleatorias es la misma que en el caso de una variable, como indica la definición siguiente.

DEFINICION 4.3.6 Sea (X,Y) una variable aleatoria bidimensional discreta, - y H(X,Y) una función de dos variables aleatorias X e Y. El ***valor esperado de*** H(X,Y), se define por,

$$E\,H(X,Y) = \sum_{R_{X\times Y}}\sum H(x,y)\ p(x,y)$$

Siempre que la suma sea absolutamente convergente.
En el caso particular de que H(X,Y) = X, se tiene

$$\mu_X = E(X) = \sum_{R_{X\times Y}}\sum xp(x,y) = \sum_{x\in R_X} x \sum_{y\in R_Y} p(x,y)$$

$$= \sum_{x\in R_X} xp_X(x)$$

Similarmente, si H(X,Y) = Y, $\mu_Y = E(Y) = \sum_{y\in R_Y} yp_Y(y)$. Es decir, la media de X(Y), se determina, de la función de probabilidad marginal de X(Y). El lector, siguiendo un proceso similar, puede encontrar que la varianza de

X y de Y estan dados por

$$\sigma_X^2 = E(X - \mu_X)^2 = \sum_{x \in R_X} (x - \mu_X)^2 p_X(x) = E(X^2) - (\mu_X)^2$$

$$\sigma_Y^2 = E(Y - \mu_Y) = \sum_{y \in R_Y} (y - \mu_Y)^2 p_Y(y) = E(Y^2) - (\mu_Y)^2$$

observe que, aquí es,

$$H(X,Y) = (X - \mu_X)^2 \; ; \quad H(X,Y) = (Y - \mu_Y)^2$$

TEOREMA 4.3.2 Si (X,Y) es una variable aleatoria bidimensional, entonces,

$$E[aH(X) \pm bG(Y)] = aE[H(X)] \pm bE[G(Y)]$$

una consecuencia inmediata de este teorema, cuando,

$$H(X) = X, \quad y \quad G(Y) = Y, \quad es,$$

$$E(X \pm Y) = E(X) \pm E(Y)$$

TEOREMA 4.3.3 Si X e Y son dos variables aleatorias independientes, entonces

(a) $E(XY) = E(X)\,E(Y)$

(b) $Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y)$

Una generalización de la parte (a) de este teorema es la siguiente
Si X e Y son variables aleatorias independientes y H(X), G(Y) son funciones de X e Y respectivamente, entonces,

$$E[H(X)\,G(Y)] = E[H(X)]\,E[G(Y)]$$

También la parte (b) se puede generalizar a n variables aleatorias.

EJEMPLO 9 La variable aleatoria bidimensional (X,Y), tiene la siguiente distribución de probabilidad conjunta.

Calcular:

(a) $E(X + Y)$;

(b) $E(XY)$;

(c) $E(XY^2)$, $E(2XY + XY^2)$.

y \ x	0	1
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$
2	$\frac{2}{6}$	$\frac{5}{12}$

SOLUCION Cálculo de la distribución de probabilidad marginal.

y \ x	0	1	P[Y = y]
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{12}$
2	$\frac{2}{6}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{9}{12}$
P[X = x]	$\frac{3}{6}$	$\frac{6}{12}$	1

(a) $$\mu_X = E(X) = \sum_{x \in R_X} x p_X(x) = 0(\tfrac{3}{6}) + 1(\tfrac{6}{12}) = \frac{6}{12} \ ;$$

$$\mu_Y = E(Y) = \sum_{x \in R_Y} y p_Y(y) = 1(\tfrac{3}{12}) + 2(\tfrac{9}{12}) = \frac{21}{12} \ ;$$

y por el teorema 1, se tiene,

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y) = \frac{6}{12} + \frac{21}{12} = \frac{9}{4} \ .$$

(b) Puesto que X e Y no son independientes y por lo tanto no podemos aplicar el teorema 3, aplicaremos la definición. Entonces,

$$E(XY) = \sum_{R_{X \times Y}} \sum xyp(xy) = 0.1.(\tfrac{1}{6}) + 0.2.(\tfrac{2}{6}) + 1.1.(\tfrac{1}{12}) + 1.2.(\tfrac{5}{12}) = \frac{11}{12} \ .$$

(c) $$E(XY^2) = \sum_{R_{X \times Y}} \sum xy^2 p(x,y) = 0.1.(\tfrac{1}{6}) + 0.4.(\tfrac{2}{6}) + 1.1.(\tfrac{1}{12}) + 1.4.(\tfrac{5}{12}) = \frac{21}{12} \ .$$

(d) aplicando el teorena 2 y (c) se tiene,

$$E(2XY + XY^2) = 2E(XY) + E(XY^2) = 2 \cdot \frac{11}{12} + \frac{21}{12} = \frac{43}{12} \ .$$

EJEMPLO 10 Sean X e Y dos variables aleatorias, con función de probabilidad conjunta,

$$p(x,y) = \frac{x + 2y}{18} \ , \quad x = 1,2, \quad y = 1,2$$

Calcular:

(a) μ_X ; (b) σ_X^2 ; (c) μ_Y ; (d) σ_Y^2

SOLUCION Las funciones de probabilidad marginal son, respectivamente

$$p_X(x) = \sum_{y=1}^{2} \frac{x + 2y}{18} = \frac{2x + 6}{18} \ , \quad x = 1,2$$

$$p_Y(y) = \sum_{x=1}^{2} \frac{x + 2y}{18} = \frac{3 + 4y}{18} \quad , \quad y = 1,2$$

Observe que $p(x,y) \neq p_x(x)\, p_y(y)$, por lo tanto **X** e **Y** son dependientes.

(a) $$\mu_X = E(X) = \sum_{x=1}^{2} x\left(\frac{2x + 6}{18}\right) = 1\left(\frac{8}{18}\right) + 2\left(\frac{10}{18}\right) = \frac{14}{9} \ .$$

(b) También $$E(X^2) = \sum_{x=1}^{2} x^2\left(\frac{2x + 6}{18}\right) = 1\cdot\left(\frac{8}{18}\right) + 4\left(\frac{10}{18}\right) = \frac{24}{9} \ .$$

Luego, $$\sigma_X^2 = \frac{24}{9} - \left(\frac{14}{9}\right)^2 = \frac{20}{81} \ .$$

(c) $$\mu_Y = E(Y) = \sum_{y=1}^{2} y \left(\frac{3 + 4y}{18}\right) = 1\left(\frac{7}{18}\right) + 2\left(\frac{11}{18}\right) = \frac{29}{18} \ .$$

(d) $$E(Y^2) = \sum_{y=1}^{2} y^2\left(\frac{3 + 4y}{18}\right) = 1\left(\frac{7}{18}\right) + 4\left(\frac{11}{18}\right) = \frac{51}{18} \ .$$

Luego, $$\sigma_Y^2 = \frac{51}{18} - \left(\frac{29}{18}\right)^2 = \frac{77}{324} \ .$$

4.3.5 ESPERANZA CONDICIONAL

La esperanza condicional (o media condicional), se define de la misma forma que una esperanza ordinaria, excepto que se usa la probabilidad condicional en vez de la probabilidad ordinaria. Esto se justifica debido a que la probabilidad condicional, cumple las condiciones de una función de probabilidad, como hemos visto anteriormente en el capítulo I.

DEFINICION 4.3.7 Sea (X,Y) una variable aleatoria bidimensional y sea y un número real, tal que $P[Y = y] > 0$. El ***valor esperado condicional de X dado Y = y***, se denota por,

$\mu_{X|y}$ y se define por,

$$\boxed{\mu_{X|y} = E(X|Y = y) = \sum_{x \in R_X} xP[X = x|Y = y] = \sum_{x \in R_X} x p_{X|y}(x|y)}$$

Similarmente,

$$\mu_{Y|x} = E(Y|X = x) = \sum_{y \in R_y} yP[Y = y|X = x] = \sum_{y \in R_y} y p_{Y|x}(y|x)$$

En particular, si $P[X = x_0] > 0$, se tiene,

$$\mu_{X|x_0} = E(X|X = x_0) \quad \sum_{x \in R_X} xP[X = x|X = x_0]$$

$$\sum_{x \in R_X} x \frac{P[X = x, X = x_0]}{P[X = x_0]}$$

$$= x_0 \frac{P[X = x_0]}{P[X = x_0]} = x_0$$

Observe que habrá una $E(X|y)$ para cada valor de y en el rango de R_Y, y el valor de cada $E(X|y)$ dependerá del valor de y, que se reemplace en la - función de probabilidad condicional. Similarmente, habrá muchos valores de - $E(Y|x)$ como valores tiene x (rango de X), y el valor de $E(Y|x)$ dependerá de los valores de x, determinado por la función de probabilidad.

DEFINICION 4.3.8 La *varianza condicional de X dado* $Y = y$, se define por,

$$\sigma^2_{X|y} = E[(X - E(X|y))^2|y] = \sum_{x \in R_X} (x - E(X|y))^2 p(x|y)$$

Como en el caso de varianza ordinaria, puede usarse la propiedad,

$$\sigma^2_{X|y} = E(X^2|y) - (E(X|y))^2$$

La varianza $\sigma^2_{Y|x}$, se define de manera similar.

Las propiedades de la esperanza condicional son completamente similares a las de esperanza ordinaria.

TEOREMA 4.3.4 Sea (X,Y) una variable aleatoria bidimensional, y sean a, b e y números reales. H(X,Y) una función de dos variables. Entonces:

(a) $E(aX + b|Y = y) = aE(X|Y = y) + b \quad \forall\ y$ tal que $p_Y(y) > 0$

(b) $E[H(X,Y)|Y = y] = \sum_{x \in R_X} H(x,y)P[X = x|Y = y] = E[H(X,Y)|Y = u]$

En (a) Si $b = 0$, se tiene que $E(aX|Y = y) = aE(X|Y = y)$

TEOREMA 4.3.5 Si X e Y son variables aleatorias independientes, entonces,

$$E(X|Y = y) = E(X), \quad \forall\, y \text{ , que cumple } p_Y(y) > 0$$

EJEMPLO 11 La distribución de probabilidad conjunta de (X,Y) está definida por la siguiente tabla. Calcular :

(a) $E(X|Y = 1)$;

(b) $E(2X|Y = 1)$;

(c) $E(3X + 4|Y = 1)$;

(d) $E(XY|Y = 1)$;

(e) $E(2X + 3Y|Y = 1)$;

y \ x	-1	1
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$
2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$

SOLUCION

(a) $E(X|Y = 1) = \sum_{x \in R_X} xP[X = x|Y = 1]$

$= (-1)P[X = -1|Y = 1] + 1.\ P[X = 1|Y = 1]$

$= (-1)(\frac{1}{3}) + 1\ .\ (\frac{2}{3}) = \frac{1}{3}$.

Ya que, $P[X = -1|Y = 1] = \dfrac{P[X = -1,\ Y = 1]}{P[Y = 1]} = \dfrac{1/8}{3/8} = \dfrac{1}{3}$

y $\quad P[X = 1|Y = 1] = \dfrac{P[X = 1,\ Y = 1]}{P[Y = 1]} = \dfrac{1/4}{3/8} = \dfrac{2}{3}$

(b) $E(2X|Y = 1) = 2E(X|Y = 1)$ por teor 4.3.4*a*,

$= 2(\frac{1}{3}) = \frac{2}{3}$.

(c) $E(3X + 4|Y = 1) = 3E(X|Y = 1) + 4$ por teor. 4.3.4*a*,

$= 3(\frac{1}{3}) + 4 = 5$.

(d) $E(XY|Y = 1) = E(X.\ 1|Y = 1)$ por teor. 4.3.4*b*,

$= E(X|Y = 1) = \frac{1}{3}$.

(e) $E(2X + 3Y\ Y = 1) = E(2X + 3.1|Y = 1)$ por teor. 4*b*,

$= E(2X + 3|Y = 1)$

$$= 2E(X|Y = 1) + 3$$

$$= 2(\frac{1}{3}) + 3 = \frac{11}{3} .$$

4.3.6 COVARIANZA Y COEFICIENTE DE CORRELACION

Daremos aquí la definición de unos números que miden como, estan relacionados los valores posibles de **X** con los valores posibles de **Y**; estos números dependen de la función de probabilidad conjunto de **X** e **Y**.

DEFINICION 4.3.9 Sean **X** e **Y** dos variables aleatorias con media μ_X y μ_Y, respectivamente. La *covarianza de* **X** e **Y**, denotado por "Cov(X,Y)", "σ_{XY}", se define por

$$\text{Cov}(X,Y) = \sigma_{XY} = E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)] =$$

$$= \sum_{(x,y)\in R_{X\times Y}} (x - \mu_X)(y - \mu_Y)p(x,y)$$

A diferencia de la varianza que siempre es no negativa, la covarianza - puede ser negativa, cero o positiva. Si los valores más pequeños de **X** son - asociados con valores grandes **Y**, y viceversa, entonces la covarianza es negativa. Es decir, si $X - \mu_x$ e $Y - \mu_y$ tienen signos opuestos. En cambio la covarianza será positiva cuando los valores grandes de **X**, se asocian con valores grandes de **Y**, y valores pequeños de **X** son asociados con valores pequeños de **Y**. Si la covarianza es cero, se dice que **X** e **Y** no están correlacionadas, aunque pueden ser dependientes o independientes. Una fórmula alternativa para calcular covarianzas, da el siguiente teorema.

TEOREMA 4.3.6 La *Covarianza* de dos variables aleatorias **X** e **Y**, con media - μ_X y μ_Y respectivamente, está dado por,

$$\text{Cov}(X,Y) = E(XY) - \mu_X\mu_Y$$

TEOREMA 4.3.7 Si **X** e **Y** son variables aleatorias independientes, entonces,

$$\text{Cov}(X,Y) = 0$$

TEOREMA 4.3.8 Si **X** e **Y** son variables aleatorias con función de probabilidad conjunta y varianzas finitas, entonces,

$$\text{Var}(aX \pm bY) = a^2\text{Var}(X) + b^2\text{Var}(Y) \pm 2ab\text{Cov}(X,Y)$$

En particular, si X e Y son independientes, entonces Cov(X,Y) = 0, por lo tanto se cumple el teorema 3b.

DEFINICION 4.3.10 Sean X e Y variables aleatorias con desviación estandar σ_X y σ_Y respectivamente. *El coeficiente de correlación de* X e Y, denotado $\rho(X,Y)$, se define por,

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X\ \sigma_Y}.$$

TEOREMA 4.3.9 PROPIEDADES DEL COEFICIENTE DE CORRELACION ρ

(a) $-1 \leq \rho \leq 1$

(b) $\rho(X,Y) = \rho(Y,X)$

(c) Si X e Y son independientes, entonces $\rho = 0$

(d) Si $\rho = \pm 1$, entonces entre X e Y existe una dependencia funcional lineal.

(e) Suponga que $Y = aX + b$, donde a y b son constantes.

Si $a > 0$, entonces $\rho(X,Y) = 1$; Si $a < 0$, entonces

$$\rho(X,Y) = -1$$

(f) Si a, b, c, d son constantes, $a > 0$ y $b > 0$, entonces,

$$\rho(aX + c,\ bY + d) = \rho(X,Y).$$

EJEMPLO 12 La función de probabilidad conjunta de (X,Y) está dado en la tabla. Calcular :

(a) Cov(X,Y) ;

(b) σ^2_X ;

(c) σ^2_Y ;

(d) $\rho(X,Y)$;

(e) σ^2_{X+Y} ;

(f) $\rho(2X, 3Y + 4)$.

y \ x	0	1	$P[Y = y]$
0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$
1	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$
2	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$
$P[X = x]$	$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{8}$	1

SOLUCION

(a) $E(X) = 0(\frac{5}{8}) + 1(\frac{3}{8}) = \frac{3}{8}$;

$E(Y) = 0(\frac{2}{8}) + 1(\frac{3}{8}) + 2(\frac{3}{8}) = \frac{9}{8}$;

$$E(XY) = 0(\frac{1}{8} + \frac{2}{8} + \frac{2}{8} + \frac{1}{8}) + 1(\frac{1}{8}) + 2(\frac{1}{8}) = \frac{3}{8} ;$$

Por lo tanto, $Cov(X,Y) = E(XY) - \mu_X \mu_Y = \frac{3}{8} - \frac{9}{8} \times \frac{3}{8} = -\frac{3}{64}$.

(b) $E(X^2) = 0(\frac{5}{8}) + 1(\frac{3}{8}) = \frac{3}{8}$;

Luego, $\sigma_X^2 = \frac{3}{8} - \frac{9}{64} = \frac{15}{64}$.

(c) $E(Y^2) = 0(\frac{2}{8}) + 1(\frac{3}{8}) + 4(\frac{3}{8}) = \frac{15}{8}$;

Luego, $\sigma_Y^2 = E(Y^2) - (\mu_Y)^2 = \frac{15}{8} - (\frac{9}{8})^2 = \frac{39}{64}$.

(d) Se tiene, $\sigma_X = \sqrt{\sigma_X^2} = \sqrt{15/64} = \frac{\sqrt{15}}{8}$

$$\sigma_Y = \sqrt{\sigma_Y^2} = \sqrt{39/64} = \frac{\sqrt{39}}{8}$$

Por lo tanto, $\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{-3/64}{\frac{\sqrt{15 \times 39}}{64}} = -\frac{1}{\sqrt{65}}$.

(e) $\sigma^2_{X+Y} = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 + 2Cov(X,Y)$

$$= \frac{15}{64} + \frac{39}{64} + 2(-\frac{3}{64}) = \frac{3}{4} .$$

(f) por el teorema 9f, $\rho(2X, 3Y + 4) = \rho(X,Y) = -\frac{1}{\sqrt{65}}$.

PROBLEMAS 4.3

1. Una urna contiene 3 bolas numeradas 1,2,3 respectivamente. De la urna se extraen 2 bolas una a una sin reemplazo, y sea **X** el número de la primera bola extraída, **Y** el número de la segunda bola. Hallar la distribución de probabilidad conjunta de la variable aleatoria (**X**,**Y**) y su gráfica.

2. Suponga que tres objetos no diferenciables se distribuyen al azar en tres celdas numeradas. Sea **X** el número de celdas vacías e **Y** el número de objetos colocados en la primera celda. Construya la tabla de distribución de probabilidad conjunta de **X** e **Y**. ¿Son independientes dichas variables aleatorias?

3. Se elige uno de los números enteros: 1,2,3,4,5. Después de eliminar to-

dos los enteros (si los hay) menores que el elegido, se elige uno de los restantes (por ejemplo, si el primer número es el 3, la segunda elección se hace de entre los números 3,4,5). Sean **X** e **Y** los números obtenidos en la primera y segunda elección respectivamente.

(a) Hallar la distribución de probabilidad conjunta de **X** e **Y**.

(b) Determine las distribuciones de probabilidad marginal de **X** e **Y**.

(c) Determine la función de probabilidad condicional de **Y**, dado $X = 3$.

(d) Determine la función de probabilidad condicional de **X**, dado $Y = 3$.

(e) Calcular $P[X + Y > 7]$ y $P[Y - X > 0]$

4. La función de probabilidad conjunta de **X** e **Y** está dado por:

$$p(x,y) = \frac{x^2 + y^2}{32}, \quad x = 0,1,2,3; \quad y = 0,1$$

(a) Hallar las funciones de probabilidad marginal de **X** e **Y**.

(b) Hallar la función de probabilidad condicional de **X**, dado $Y = y$.

(c) Hallar la función de probabilidad condicional de **Y**, dado $X = x$.

5. Se extraen al azar 2 naipes sin reemplazo de una baraja de 52 naipes. Sea **X** el número de ases que aparece e **Y** el número de espadas que aparecen. Obtener $p(x,y)$ y Calcular $P[X > Y]$.

6. En una urna hay 3 bolas negras y 7 blancas. Se seleccionan al azar 2 bolas sin reemplazo. Sea **X** el número de bolas negras sacadas, e **Y** el número de blancas. Obtener $p(x,y)$ y calcular $P[X \le Y]$.

7. El espacio muestral Ω consiste de tres puntos ω_1, ω_2, ω_3. Las probabilidades asignadas a estos puntos son $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, respectivamente. Las variables aleatorias **X** e **Y** se define como :

$$X(\omega_1) = 0, \quad X(\omega_2) = 0, \quad X(\omega_3) = 1$$

$$Y(\omega_1) = 1, \quad Y(\omega_2) = 2, \quad Y(\omega_3) = 3$$

(a) Hallar la distribución de probabilidad conjunta de **X** e **Y**.

(b) Encuentre, la distribución de probabilidad marginal de **Y**.

(c) ¿Son independientes **X** e **Y**?

(d) Calcular la distribución de probabilidad condicional de **X**, dado $Y = 1$.

(e) Determine $E(Y)$.

8. Sean **X** e **Y** dos variables aleatorias que representan el número de bicicletas producidas por las líneas ensambladoras A, B respectivamente en un

día. La distribución de probabilidad conjunta $p(x,y)$ de las variables aleatorias **X** e **Y**, está dado en la siguiente tabla.

x \ y	0	1	2	3	4	5
0	0.00	0.01	0.03	0.06	0.07	0.08
1	0.01	0.02	0.04	0.07	0.07	0.09
2	0.01	0.02	0.04	0.06	0.06	0.06
3	0.00	0.01	0.05	0.05	0.05	0.04

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que la línea B produce tres artículos, si se sabe que la linea A ha producido 1?

(b) ¿Cuál es la probabilidad de que la línea B produce más bicicletas que la línea A?

(c) ¿Son las variables aleatorias X e Y independientes?

(d) Hallar Cov(X,Y) y ρ(X,Y).

9. Una moneda se lanza cuatro veces. Sea X, el número de caras que aparece y sea Y, tal que toma el valor i, si la primera cara aparece en el i-ésimo lanzamiento y es 0, si no aparece cara. Calcular:

(a) La distribución de probabilidad conjunta de X e Y.

(b) $P[X = 2, \quad Y = 3]$; (c) $F(2,4)$; (d) $F(2,1)$; (e) $P[X = 3]$

(f) $P[X = 3|Y = 0]$; (g) $P[X = 3|Y = 1]$

(h) $E(2X + Y|Y = 1)$

10. La distribución de probabilidad conjunta de X e Y se define como :

$$p(x,y) = \frac{3x + 2y - 4}{54} \quad ; \quad x,y = 1,2,3.$$

(a) Hallar las distribuciones marginales de X e Y respectivamente.

(b) Calcular : $p(x|1)$; $p(x|2)$; $p(x|3)$

(c) Calcular : $p(y|1)$; $p(y|2)$; $p(y|3)$

(d) Verifique que X e Y son dependientes.

11. Dos firmas comerciales principales, A y B, controlan 50 y 30 por ciento del mercado respectivamente. Si se escoge al azar una muestra de dos compradores para una observación. ¿Cuál es la distribución de probabilidad conjunta del número de compradores que favorecen a cada firma de la mues-

tra?, Calcular, $E(X)$, $E(Y)$, $E(X + Y)$ y $E(XY)$.

12. Un puerto tiene capacidad de acomodar 4 naves de cierto tipo durante la noche. Las tarifas del puerto producen una utilidad de $ 1,000 por nave atracada. Si **X** es la variable aleatoria que representa el número de naves buscando atracadero por noche y suponiendo que $P[X = k] = \frac{1}{6}$ para $k = 1,2,3,4,5$. Un segundo puerto está disponible para manejar el exceso de naves, si existen. Sea **Y** el número de barcos solicitando atracadero en el segundo puerto (lo cual sólo ocurrirá, si el primer puerto, está lleno) Calcular:

(a) La distribución de probabilidad conjunta de **X** e **Y**.

(b) La distribución de probabilidad marginal de **Y**.

(c) $E(Y)$

(d) La distribución de probabilidad de Y, dado $X = 4$.

(e) ¿Son las variables aleatorias **X** e **Y** independientes?

(f) σ_X^2 , σ_Y^2 ; (g) $Cov(X,Y)$; (h) $\rho(X,Y)$

13. Considere las variables aleatorias independientes **X** e **Y**, las cuales sólo pueden tomar los valores $-1,0,1$. Suponga que $P[X = -1] = P[X = 1] = \frac{1}{4}$ y $P[Y = -1] = P[Y = 0] = \frac{1}{3}$.

(a) Calcular $E(X)$, $E(Y)$;

(b) Si $Z = 4X + 3Y$, calcular $E(Z)$;

(c) Determine la distribución de probabilidad conjunta de **X** e **Y**.

14. La distribución de probabilidad conjunta de la variable aleatoria **(X,Y)** está dado por la siguiente tabla.

Calcular:

(a) $E(X)$;

(b) $E(Y)$;

(c) $E(3X + 4Y)$;

(d) $E(Y^2)$; (e) σ_Y^2 ;

(f) $E(XY)$;

(g) $P[X = 1|Y = 1]$;

(h) $E(X|Y = 1)$;

(i) $E(2X + 1|Y = 1)$; (j) $E(2X + Y|Y = 1)$; (k) $E(XY|Y = 1)$

y \ x	0	1
0	0.1	0.05
1	0.2	0.1
2	0.3	0.25

15. La distribución de probabilidad conjunta de (X,Y) está dado por la tabla adjunta. Calcular :

(a) $E(X + Y)$;
(b) $E(XY)$;
(c) $E(2X + 3|Y = 2)$;
(d) $E(XY|Y = 2)$;
(e) $E(X + Y|Y = 2)$;

y \ x	0	1
1	0.1	0.4
2	0.2	0.3

(f) $Cov(X,Y)$; (g) $Cov(X, -Y)$; (h) $\rho(X,Y)$; (i) $\rho(X, -Y)$

16. Un producto se clasifica de acuerdo al número de defectos que contiene y a la fábrica que lo produce. Sean X e Y las variables aleatorias que representan el número de defectos por unidad (con posible valores 0,1,2 ó 3) y el número de fábricas (con posibles valores 1 ó 2), respectivamente. Los valores de la tabla representa la distribución de probabilidad conjunta - de X e Y. Determinar:

(a) La distribución de probabilidad marginal de X e Y ;
(b) $E(X + Y)$
(c) σ_X^2 ; σ_Y^2 ;
(d) $E(2Y + 3|X = 2)$

y \ x	0	1	2	3
1	1/8	1/16	3/16	1/8
2	1/16	1/16	1/8	1/4

17. Sean X e Y dos variables aleatorias que representa las producciones diarias de dos líneas ensambladoras A y B de automoviles respectivamente. La distribución conjunto $p(x,y)$ de las variables aleatorias esta dado en el cuadro adjunto. Calcular :

(a) Las distribuciones marginales $p_X(x)$ y $p_Y(x)$
(b) $P[X = 3|Y = 2]$; $P[Y = 3|X = 2]$
(c) $E(X)$ y $E(Y)$

y \ x	1	2	3
1	0	1/6	1/12
2	1/5	1/9	0
3	2/15	1/4	1/18

(d) $E(X|Y = 2)$; $E(Y|X = 3)$; $E(2X + 3|Y = 1)$; $E(2X + Y|Y = 2)$
(e) $P[X < Y]$; $Var(X)$; $Var(Y)$; $Cov(X,Y)$; $Cov(3X + 2, 2Y + 4)$

4.4 DISTRIBUCIONES BIDIMENSIONALES CONTINUAS

Extenderemos aquí la idea de la función de densidad de probabilidad de una variable aleatoria contínua a la de una variable aleatoria bidimensional contínua. Como en el caso de una variable aleatoria, las definiciones son las mismas que en el caso discreto, excepto que las integrales reemplazan a la sumatoria. Para la mayor parte, aceptaremos esta sustitución, y por lo tanto esta sección consiste principalmente de un resumen, ejemplos y problemas.

DEFINICION 4.4.1 Si (X,Y) es una variable bidimensional contínua. *La función de densidad de probabilidad conjunta*, es una función integrable $f(x,y)$ que cumple las siguientes propiedades:

(a) $f(x,y) > 0$, $\forall\ (x,y)$

(b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy = 1$, $\left(\text{o } \displaystyle\iint_{R_{X\times Y}} f(x,y)dxdy = 1\right)$

La probabilidad de un evento A definido en un plano euclideano, está dado por,

$$P[(X,Y) \in A] = \iint_A f(x,y)dxdy$$

Y por lo tanto $P[(X,Y) \in A]$ es el volumen del sólido sobre la región **A** en el plano XY y acotado por la superficie $f(x,y)$.

Las Funciones de Densidad Marginal son :

(a) $f_X(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy$, función densidad marginal para X.

(b) $f_Y(y) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx$, función de densidad marginal para Y.

El valor esperado de X (media de X), el valor esperado de Y (o media Y) están dados por :

$$E(X) = \mu_X = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x f(x,y)dydx$$

$$E(Y) = \mu_Y = \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} y f(x,y)dxdy$$

En general, el valor esperado de una función H(X,Y) se define por,

$$E[H(X,Y)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} H(x,y)f(x,y)dxdy$$

Las propiedades son las mismas que en el caso discreto. Así,

$$E[H(X,Y) \pm G(X,Y)] = E[H(X,Y)] \pm E[G(X,Y)]$$

La varianza de **X** e **Y** están definidos como sigue :

$$\mathrm{Var}(X) = \sigma_X^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_X)^2 f_X(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_X)^2 f(x,y)dydx$$

$$\mathrm{Var}(Y) = \sigma_Y^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (y - \mu_Y)^2 f_Y(y)dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (y - \mu_Y)^2 f(x,y)dxdy$$

Las propiedades también son las mismas que el caso discreto. Así,

$$\sigma_X^2 = E(X^2) - (\mu_X)^2$$

EJEMPLO 1 Sea (X,Y) una variable bidimensional, con función de densidad conjunta,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{500} & ; \quad 0 \le x \le 2.5 \;, \; 0 \le y \le 200 \\ 0 & ; \quad \text{en otros casos} \end{cases}$$

(a) Calcular $P[1.0 \le X \le 2.0, \; 100 \le Y \le 200]$

(b) Hallar la función de densidad marginal de **X** e **Y** ;

(c) Calcular $E(X)$;

(d) σ_X^2 .

SOLUCION

(a) Esta probabilidad se calcula integrando la función $f(x,y)$ sobre la región $1.0 \le x \le 2.0$ y $100 \le y \le 200$. Es decir,

$$P[1.0 \le X \le 2.0, \; 100 \le Y \le 200] = \int_{100}^{200}\int_{1.0}^{2.0} \frac{1}{500}\, dxdy = \frac{1}{5} .$$

(b) $f_X(x) = \int_0^{200} \frac{1}{500}\,dy = \frac{2}{5}$, $0 \leq x < 2.5$

Por lo tanto,

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{2}{5} , & 0 \leq x \leq 2.5 \\ 0 , & \text{en otros casos} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \int_0^{2.5} \frac{1}{500}\,dx = \frac{1}{200} , \quad 0 \leq y \leq 200$$

Esto es,

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{200} , & 0 \leq y \leq 200 \\ 0 , & \text{en otro caso} \end{cases}$$

(c) $E(X) = \mu_X = \int_0^{2.5} x \cdot \frac{2}{5}\,dx = \frac{1}{5}(2.5)^2 = 1.25$.

(d) $\sigma_X^2 = \int_0^{2.5} x^2 \cdot \frac{2}{5}\,dx - (1.25)^2 = \frac{2}{3 \times 5}(0.5)^3 - (1.25)^2 = 1.56$.

Si (X,Y) es una variable bidimensional contínua, ***la densidad condicional de* X, *dado* Y = y,** es,

$$f_{X|y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} , \quad \text{siempre que } f_X(x) > 0$$

Similarmente, $f_{Y|x}(y|x) = \dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}$; $f_Y(y) > 0$

La ***Esperanza Condicional*** para la variable aleatoria (X,Y) contínua está dado por:

$$\mu_{X|y} = E(X|Y = y) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|y}(x|y)dx , \quad y$$

$$\mu_{Y|x} = E(Y|X = x) = \int_{-\infty}^{\infty} y f_{Y|x}(y|x)dy$$

EJEMPLO 2 Sea (X,Y) una variable bidimensional cuya función de densidad está dado por,

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 + \dfrac{2y}{3} & , \quad 0 \le x \le 1 \,, \quad 0 \le y \le 2 \\ 0 & , \quad \text{en otro caso} \end{cases}$$

Hallar :

(a) $f_{X|y}(x|y)$; (b) $f_{Y|x}(y|x)$; (c) $E(Y|X = x)$

SOLUCION Las respectivas densidades marginales son,

$$f_X(x) = \int_0^2 (x^2 + \frac{xy}{3})dy = 2x^2 + \frac{2x}{3} \quad , \quad 0 \le x \le 1$$

Es decir, $$f_X(x) = \begin{cases} 2x^2 + \dfrac{2x}{3} & , \quad 0 \le x \le 1 \\ 0 & , \quad \text{de otra forma} \end{cases}$$

$$f_y(y) = \int_0^1 (x^2 + \frac{xy}{3})dx = \frac{1}{3} + \frac{y}{6} \quad , \quad 0 \le y \le 2$$

Luego , $$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{y}{6} + \dfrac{1}{3} & , \quad 0 \le y \le 2 \\ 0 & , \quad \text{en otro caso} \end{cases}$$

Por lo tanto las respectivas densidades condicionales son:

(a) $$f_{Y|x}(y|x) = \frac{x^2 + \frac{xy}{3}}{2x^2 + \frac{2x}{3}} = \frac{1}{2}\left[\frac{x + \frac{y}{3}}{x + \frac{1}{3}}\right] \quad , \quad 0 \le y \le 2 \,, \quad 0 < x \le 1$$

$$= 0 \quad , \quad \text{en otro caso.}$$

(b) $$f_{X|y}(x|y) = \frac{x^2 + \frac{xy}{3}}{\frac{1}{3} + \frac{y}{6}} = \frac{x(3x + y)}{1 + \frac{y}{2}} \quad , \quad 0 < x \le 1 \,, \quad 0 \le y \le$$

$$= 0 \quad , \quad \text{en otro caso}$$

(c) $$\mu_{Y|x} = E(Y|X = x) = \int_0^2 \frac{1}{2}\, \frac{x + y/3}{x + 1/3}\, dy$$

$$= \frac{9x + 4}{9x + 3} \;.$$

PROBLEMAS 4.4

1. Hallar el valor de k, de tal manera que la función :

$$f(x,y) = \begin{cases} k\,\dfrac{x}{y} & , \quad 0 < x < 1 \,, \quad 1 < y < 2 \\ 0 & , \quad \text{en otros casos.} \end{cases}$$

Sea una función de densidad de una variable aleatoria (X,Y).

2. Sea (X,Y) una variable aleatoria contínua bidimensional con densidad.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & , \quad 0 < y < x \,, \quad 0 < x < 1 \\ 0 & , \quad \text{en otros casos.} \end{cases}$$

Hallar las densidades marginales para X,y para Y.

3. Sea X e Y los puntajes sobre un test de inteligencia y un test de preferencias ocupacionales, respectivamente. La función de densidad de probabilidad, de la variable aleatoria (X,Y) está dado por :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{k}{1000} & , \quad 0 \le x \le 100 \,, \quad 0 \le y \le 10 \\ 0 & , \quad \text{en otros casos} \end{cases}$$

(a) Hallar el valor de K.
(b) Hallar la función de densidad marginal de X e Y .
(c) Hallar una expresión de la función de distribución acumulativa $F(x,y)$.

4. Consideremos, una situación en la cual se miden la tensión superficial y la acidez de un producto químico. Estas variables son codificadas tal que la tensión superficial se mide en una escala de $0 \le x \le 2$ y la acidez se mide en una escala de $2 \le y \le 4$. La función de densidad de (X,Y) es,

$$f(x,y) = \begin{cases} k(6 - x - y), & 0 \le x \le 2 \,, \quad 2 \le y \le 4 \\ 0 & , \quad \text{en otros casos} \end{cases}$$

(a) Hallar el valor de k.
(b) Calcular la probabilidad de que $X < 1$, $X < 3$
(c) Calcular la probabilidad de que $X + Y \le 4$
(d) Hallar la probabilidad de que $X < 1.5$
(e) Hallar la densidades marginales de X e Y .

5. En el examen de admisión a cierta universidad se califica en base a 100 - puntos. Sea **X** la calificación que obtiene uno de los estudientes (que continua sus estudios hasta graduarse) y sea **Y** su razón del punto de calidad al graduarse (4 puntos = A). La función de densidad conjunta de **X** e **Y** es,

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{50} & , \quad 2 < y < 4 \quad , \quad 25(y-1) < x < 25y \\ 0 & , \quad \text{en otros casos} \end{cases}$$

(a) Hallar μ_X, μ_Y, $E(XY)$

(b) σ^2_X , σ^2_Y , σ_{XY} y ρ_{XY}

6. Sean **X** e **Y** variables aleatorias contínuas, cuya función de densidad conjunta es,

$$f(x,y) = \begin{cases} 4 & , \quad 0 < x < 1 \quad , \quad 0 < y < \dfrac{1}{4} \\ 0 & , \quad \text{en otros casos} \end{cases}$$

¿Son independientes las variables aleatorias **X** e **Y** ?

7. La función de densidad de conjunta de la variable aleatoria bidimensional **(X,Y)** es,

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{8}(6 - x - y) \ , & 0 \leq x \leq 2 \ , \quad 2 \leq y \leq 4 \\ 0 & , \quad \text{en otros casos} \end{cases}$$

Hallar las densidades condicionales $f_{X|y}(x|y)$, y $f_{Y|x}(y|x)$.

8. Se ensayan dos tubos de vacío hasta que fallan. Sea **X** el tiempo de falla menor y sea **Y** el tiempo de falla máxima. La función de densidad conjunta está dada por,

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{(100)^2}\, e^{-(2/100 \, + \, y/100)} & , \quad 0 < x < y \\ 0 & , \quad \text{en otros casos} \end{cases}$$

(a) Hallar las densidades marginales de **X** e **Y**

(b) ¿Son **X** e **Y** independientes?

(c) Hallar la densidad condicional de Y, dado **X** = 60

9. Un elemento combustible de diámetro D va a ser colocado en un tubo de diámetro T. La densidad conjunta está dada por,

$$f(d,t) = \begin{cases} 100 & , \quad \text{para} \quad 1.95 \leq d \leq 2.05 \\ & \qquad\qquad\quad 2.00 \leq t \leq 2.10 \\ 0 & , \quad \text{en otros casos} \end{cases}$$

(a) Hallar las densidades marginales de D y T.

(b) Determine E(D), E(T),

(c) Calcular σ_D^2 , σ_T^2 .

10. Un equipo que consta de dos componentes electrónicos independientes permanecerá en uso tanto tiempo como uno de sus componentes esté aún en operación. El equipo tiene una garantía del fabricante que cubre la sustitución si el aparato se vuelve inutilizable en menos de un año desde la fecha de compra. La vida X (en años) del primer componente e Y la vida (en años) del segundo, son variables aleatorias con función de densidad de probabilidad conjunta

$$f(x,y) = \frac{1}{4} e^{-x/2} e^{-y/2} \quad , \quad x \geq 0 \quad , \quad y \geq 0$$

Usted compra uno de esos equipos, seleccionado aleatoriamente entre las existencias del fabricante. ¿Cuál es la probabilidad de que la garantía expire antes de que su equipo se vuelva inutilizable?

11. Suponga que X, el tiempo (en minutos) que una persona pasa con un agente eligiendo una póliza de seguro de vida e Y el tiempo (en minutos) que el agente emplea en hacer el papeleo una vez que el cliente se ha decidido son variables aleatorias con función de densidad de probabilidad conjunta

$$f(x,y) = \frac{1}{300} e^{-x/30} e^{-y/10} \quad ; \quad x \geq 0 \ , \quad y \geq 0$$

Usted se dispone a encontrarse con un agente de seguros para suscribir una póliza de seguro de vida. ¿Cuál es la probabilidad de que toda la transacción dure más de media hora?

12. Suponga que X, el tiempo (en minutos) que una persona pasa en la sala de espera de cierto médico e Y la duración (en minutos)de un examen físico completo, son variables aleatorias con función de densidad de probabilidad conjunta

$$f(x,y) = \frac{1}{500} e^{-x/10} e^{-y/50} \quad ; \quad x \geq 0 \ , \quad y \geq 0$$

Usted llega a la consulta del médico para un examen físico 50 minutos antes de tener que partir a una reunión. ¿Cuál es la probabilidad de salir tarde para la reunión?

5

DISTRIBUCIONES DISCRETAS IMPORTANTES

En este capítulo presentaremos algunas distribuciones de probabilidad discreta, desarrollando en forma analítica ciertas suposiciones básicas de un fenómeno real. Estas distribuciones tienen aplicaciones en ingeniería administración etc. La distribución ***geométrica, la binomial y la binimial negativa*** se basan en una sucesión de ***ensayos de Bernoulli***. Presentaremos también la ***distribución Hiper geométrica y la distribución de Poisson***.

5.1 ENSAYOS Y DISTRIBUCION DE BERNOULLI

Hay muchos experimentos que tienen sólo dos resultados posibles, llamados *exito* "E" y *fracaso* "F". Luego, el espacio muestral para este tipo de ensayo es $\Omega = \{E,F\}$. Por ejemplo, al lanzar una moneda se obtendrá sólo dos resultados posibles C ó S. Llamaremos éxito al evento de nuestro interés. En el ejemplo, si estamos interesados en "cara", diremos que hemos obtenido un éxito cuando en el ensayo ocurre cara, en caso contrario, diremos que hemos obtenido un fracaso.

Un experimento con esta característica se ll[illegible] *ensayo de Bernoulli*.

Definimos ahora la variable aleatoria X de tal manera que $X(\omega)$ = número de exitos en un ensayo de Bernoulli.

$$R_X = \{0,1\}.$$

Es decir: $X(F) = 0$, "si el resultado del ensayo es una F" y $X(E) = 1$, "si el resultado del ensayo es una E".

La variable aleatoria X, así definida se llama, *variable aleatoria de Bernoulli*

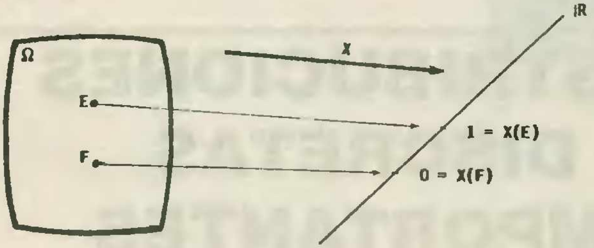


Fig. 5.1.1 Ensayo de Bernoulli.

denotemos por $p = P[E]$ y $q = 1 - p = P[F]$.

La distribución de probabilidad de la variable aleatoria X de Bernoulli, es llamada *distribución de Bernoulli* y su gráfica se muestra en la tabla 5.1.1 y la fig. 5.1.2 respectivamente.

x	0	1
$p(x)$	$1 - p = q$	p

Tabla 5.1.1

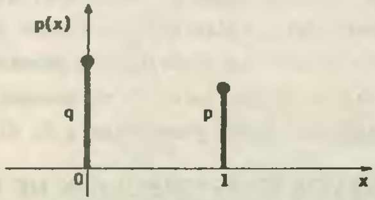


Fig. 5.1.2 Distribución de Bernoulli.

La distribución de Bernoulli se escribe también como una función así,

$$p(x) = P[X = x] = p^x(1 - p)^{1 - x} \quad , \quad x = 0 \text{ ó } 1 .$$

La media y la varianza de la variable aleatoria X, se calcula como sigue :

$$\mu = E(X) = 0.q + 1.p = p \quad .$$

$$\sigma_X^2 = \text{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$= 0^2.q + 1^2.p - p^2 = p - p^2 = p(1 - p)$$

$$= pq.$$

Hay muchos problemas en la cual el experimento consiste de n ensayos (o sub experimentos) de Bernoulli $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$. Se dice que una secuencia de n ensayos iguales de Bernoulli, forman un *proceso de Bernoulli o experimento binomial* si se cumple:

(a) Cada ensayo tiene sólo dos resultados posibles E ó F.

(b) Los ensayos son independientes. Es decir, el resultado (exito o fracaso) de cualquier ensayo es independiente del resultado de cualquier otro ensayo.

(c) La probabilidad de éxito "p" permanece constante de ensayo a ensayo. Luego, la probabilidad de fracaso $q = 1 - p$ también es constante.

EJEMPLO 1 Suponga un experimento que consta de tres ensayos de Bernoulli y p la probabilidad de éxito en cada ensayo. **X** la variable aleatoria que representa el número de éxitos en los tres ensayos. Hallar la distribución de probabilidad de **X**.

SOLUCION Sea $X_i (i = 1,2,3)$ la variable aleatoria de Bernoulli que representa el número de éxitos en el ensayo i.

La variable aleatoria X se escribe, $X = \sum_{i=1}^{3} X_i$. El dominio es

Ω = {FFF, FFE, FEF, EFF, FEE, EFE, EEF, EEE} y

$R_X = \{0,1,2,3\}$

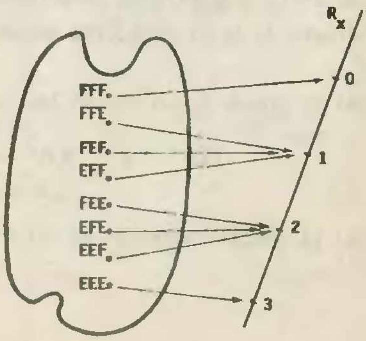
$$P[X = 0] = P[\{FFF\}] = (1 - p)(1 - p)(1 - p) = (1 - p)^3$$

$$P[X = 1] = P[\{FFE\}] + P[\{FEF\}] + P[\{EFF\}] = 3p(1 - p)^2$$

$$P[X = 2] = P[\{FEE\}] + P[\{EFE\}] + P[\{EEF\}] = 3p^2(1 - p)$$

$$P[X = 3] = P[\{EEE\}] = p^3$$

x	0	1	2	3
$p\ x$	$(1 - p)^3$	$3p(1-p)^2$	$3p^2(1-p)$	p^3



5.2 DISTRIBUCION BINOMIAL

A menudo estaremos interesados solamente en el ***número total de exitos*** - "E" obtenidos en un proceso de n ensayos de Bernoulli, al margen del orden - en que se presentan. El espacio muestral de los n ensayos, tiene 2^n elementos o sucesos los cuales son, una sucesión de n símbolos E y F.

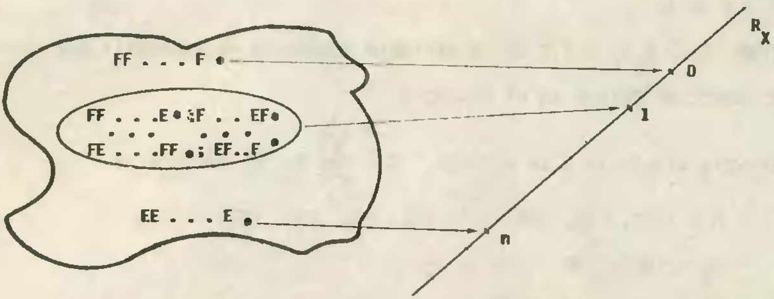
$$\Omega = \{\underbrace{EEFFEF\ldots EFE}_{n \text{ letras}}, \ldots\}$$

Definimos ahora una variable aleatoria X de la siguiente forma,

$X(\omega)$ = números de éxitos obtenidos en los n ensayos de Bernoulli.

$$R_X = \{0,1,2,3,\ldots,n\}$$

La variable aleatoria **X** así definida se llama una ***variable aleatoria binomial.***



La distribución de probabilidad de la variable aleatoria binomial X, se llama ***distribución binomial*** y se denota por $P[X = x|B; n,p]$ ó $b(x;n,p)$ que se lee : "la probabilidad de obtener exactamente x éxitos y $n - x$ fracasos". Cálculo de la distribución de probabilidad de la variable aleatoria binomial **X** :

(a) La probabilidad que en los n ensayos no ocurre ningún exito es q^n. Es decir

$$P[X = 0] = P[\{\underbrace{F\ F\ldots F}_{n\text{-veces } F}\}] = q^n, \text{ por ser independientes}$$

(b) La probabilidad que en los n ensayos ocurre un éxito, es

$$P[X = 1] = P[\underbrace{\{\overbrace{FFF...F}^{n-1}\overbrace{E}^{1},...\}}_{P_n^{n-1,1}}] = P_n^{n-1,1}\, q^{n-1}p = \binom{n}{1} q^{n-1}p$$

Ya que una E y $n-1$ efes pueden ocurrir en los n ensayos de $P_n^{n-1} = \binom{n}{1}$ - formas diferentes.

(c) La probabilidad que en los n ensayos ocurre 2 éxitos es,

$$P[X = 2] = P[\underbrace{\{\overbrace{FF....F}^{n-2}\overbrace{EE}^{2},...\}}_{P_n^{n-2,2}}] = \binom{n}{2} q^{n-2}p^2$$

ya que en los n ensayos los dos ees y $n-2$ efes ocurren de $P_n^{n-2,2} = \binom{n}{2}$ formas diferentes.

(d) En general la probabilidad que en los n ensayos ocurre x éxitos es,

$$P[X = x] = P[\underbrace{\{\overbrace{FFF...F}^{n-x}\ \overbrace{EE...E}^{x},...\}}_{P_n^{x,n-x}}] = \binom{n}{x} q^{n-x}p^x$$

ya que las x ees ocurren en los n ensayos de $P_n^{n-x,x} = \binom{n}{x}$ formas diferentes.

Por lo tanto, la ***distribución binomial*** de la variable aleatoria **X** es

$$\boxed{P[X = x|B;n,p] = P[X = x] = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}, \quad x = 0,1,2,...,n.}$$

Algunas veces, escribiremos simplemente

$$b(x;n,p) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}, \quad x = 0,1,2,...,n.$$

Observe que :

(1) $p(x) = P[X = x] > 0 \quad , \quad x = 0,1,2,...,n$

(2) $$\sum_{x=0}^{n} p(x) = \sum_{x=0}^{n} P[X = x] = \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

$$= (p+q)^n = 1^n = 1, \quad \text{ya que } p + q = 1.$$

La función de distribución acumulada está dada por,

$$F(x) = P[X \leq x] = P[X \leq x|B;n,p] = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{[\![x]\!]} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} & , 0 \leq x < n \\ 1 & , x \geq n \end{cases}$$

CARACTERISTICAS DE LA DISTRIBUCION BINOMIAL

La media de la variable aleatoria binomial se puede calcular utilizando directamente la definición,

$$\mu = E(X) = \sum_{x=0}^{n} x \binom{n}{x} p^x q^{n-x} = \sum_{x=0}^{n} x \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x q^{n-x}$$

$$= \sum_{x=0}^{n} \frac{n(n-1)!}{(x-1)!(n-x)!} p^x q^{n-x}$$

$$= np \sum_{x=0}^{n} \frac{(n-1)!}{(x-1)!(n-x)!} p^{x-1} q^{n-x}$$

Cambiando el índice de la suma, $\ell = x - 1$, se tiene,

$$\mu = E(X) = np \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{\ell!(n-1-\ell)!} p^{\ell} q^{n-1-\ell}$$

$$= np(p + q)^{n-1}$$

y como $p + q = 1$, se tiene,

$$\boxed{\mu = E(X) = np}$$

Una demostración alternativa de la media usando el Teorema 3.2.4 de esperanza matemática es la siguiente:

Puesto que la variable aleatoria X, está definida como el número de exitos - obtenidos en los n ensayos de Bernoulli, entonces,

$$X = X_1 + X_2 + X_3 + \ldots + X_n$$

donde X_i , $i = 1,2,\ldots,n$, es una variable aleatoria con una distribución de de probabilidad de Bernoulli. Es decir, X_i está definido por, 1, si el resul tado del ensayo ε_i es un éxito y 0 si el resultado del experimento ε_i es un fracaso. Hemos visto que,

$$E(X_i) = p \quad , \quad i = 1,2,\ldots,n$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\mu = E(X) &= E(X_1) + E(X_2) + \ldots + E(X_n)\\ &= p + p + \ldots + p = np.\end{aligned}$$

La varianza, se puede determinar aplicando, la propiedad

$$\sigma_X^2 = E(X^2) - (E(X))^2 .$$

$$\begin{aligned}E(X^2) &= \sum_{x=0}^{n} x^2\binom{n}{x}p^x q^{n-x}\\ &= \sum_{x=0}^{n} x^2\binom{n}{x}p^x q^{n-x} - \sum_{x=0}^{n} x\binom{n}{x}p^x q^{n-x} + \sum_{x=0}^{n} x\binom{n}{x}p^x q^{n-x}\\ &= \sum_{x=0}^{n} x(x-1)\binom{n}{x}p^x q^{n-x} + \sum_{x=0}^{n} x\binom{n}{x}p^x q^{n-x}\\ &= \sum_{x=0}^{n} x(x-1)\binom{n}{x}p^x q^{n-x} + np\end{aligned}$$

pero $x(x-1)\binom{n}{x} = x(x-1)\dfrac{n!}{x!(n-x)!} = \dfrac{n!}{(x-2)!(n-x)!}$

$$= n(n-1)\frac{(n-2)!}{(x-2)!(n-x)!} = n(n-1)\binom{n-2}{x-2}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}E(X^2) &= \sum_{x=2}^{n} n(n-1)\binom{n-2}{x-2} p^{x-2}q^{n-x}p^2 + np\\ &= n(n-1)p^2\sum_{n=2}^{n}\binom{n-2}{x-2} p^{x-2}q^{n-x} + np\\ &= n(n-1)p^2\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k} p^k q^{n-2-k} + np\end{aligned}$$

$$= n(n-1)p^2(p+q)^{n-2} + np$$

$$= n(n-1)p^2 + np\ .$$

Luego, $\sigma_X^2 = \text{Var}(X) = n(n-1)p^2 + np - n^2p^2$

$$= np^2(n - 1 - n) + np$$

$$= np\,(1-p) = npq$$

$$\boxed{\sigma_X^2 = \text{Var}(X) = npq}$$

de donde, $\boxed{\sigma = \sqrt{npq}}$ la desviación estándar de X.

Para la varianza también una demostración alternativa para el lector que conoce el capítulo 4 es la siguiente:

Hemos visto que $\sigma_{X_i}^2 = pq$. Además sabemos que las variablea aleatorias X_i son independientes. Entonces,

$$\sigma_X^2 = \text{Var}(X) = \text{Var}(X_1) + \text{Var}(X_2) + \ldots + \text{Var}(X_n)$$

$$= pq + pq + \ldots + pq = npq.$$

EJEMPLO 1 Se lanza un dado 10 veces. Calcular la probabilidad de obtener 4 veces seis.

SOLUCION 1 La variable aleatoria X está definida así,

$X(\omega)$ = número de veces que aparece el número 6 en los 10 lanzamientos del dado .

$$R_X = \{0,1,2, \ldots, 10\}$$

2. El evento que nos interesa es "obtener un seis". Entonces definimos

E = "obtener un seis al lanzar un dado".

F = "obtener un número diferente de 6".

$$P[E] = \frac{1}{6} \quad \text{y} \quad P[F] = \frac{5}{6}$$

3. Se lanza el dado 10 veces $n = 10$. Cada lanzamiento puede considerarse con sólo dos resultados posibles E y F. Las probabilidades de E y F permanecen constante en cada ensayo. El resultado de cualquier ensayo es independiente de los otros. Por lo tanto, X es una variable aleatoria binomial y su distribución de probabilidad es,

$$P[X = x|B;\ 10,\ \frac{1}{6}\ ] = \binom{10}{x}(\frac{1}{6})^x(\frac{5}{6})^{10-x} \quad , \quad x = 0,1,2,...,10\ .$$

4. Debemos calcular

$$P[X = 4\ ] = \binom{10}{4}(\frac{1}{6})^4(\frac{5}{6})^6 = \frac{7.5^7}{6^9}\ .$$

EJEMPLO 2 En Huancayo en el mes de Octubre, la lluvia cae con un promedio - de uno cada cuatro días durante los que el cielo está nublado. Determine la distribución de probabilidad del número de días con lluvia entre los cuatro proximos días nublados, suponiendo se cumple independencia. Encuentre la media y la varianza del número de días lluviosos. Presente también la gráfica de la distribución de probabilidad.

SOLUCION 1 La variable aleatoria X está definida por

X(ω) = número de días con lluvia durante los 4 días nublados

$$R_X = \{0,1,2,3,4\}$$

2. El experimento es observar, si llueve o no cada uno de los cuatro días nublados. Obviamente cada experimento tiene sólo dos resultados posibles,

E = "día con lluvia" y F = "día sin lluvia".

$$p = P[E] = \frac{1}{4} \quad , \quad q = P[F] = \frac{3}{4}\ .$$

3. Suponiendo, que llueva o no un día determinado es independiente de que - llueva o no los otros días, se tiene que X es una variable aleatoria binomial cuya distribución de probabilidad, con parámetros $n = 4$ y $p = \frac{1}{4}$ es

$$P[X = x|4,\ \frac{1}{4}\ ] = \binom{4}{x}(\frac{1}{4})^x(\frac{3}{4})^{4-x} \quad , \quad x = 0,1,2,3,4.$$

4. La media y la varianza de X están dados por,

$$\mu = E(X) = np = 4(\frac{1}{4}) = 1.$$

$$\sigma^2 = npq = 4\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4} = \frac{3}{4}\ .$$

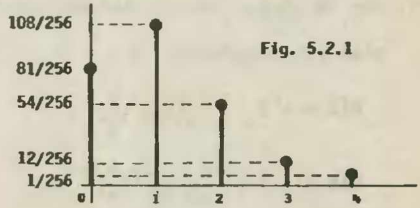


Fig. 5.2.1

EJEMPLO 3 El departamento de contabilidad de una firma comercial, tiene dos empleados a tiempo parcial: Juan y Juana, Juan trabaja los lunes, miercoles y viernes en tanto que Juana lo hace los martes y jueves. Juan archiva erróneamente uno de cada cuatro documentos, mientras que Juana lo hace uno de ca da cinco. Se selecciona un día de la semana al azar y en ese día se toma una muestra aleatoria de cuatro documentos de entre los documento archivados ese día.

(a) ¿Cuál es la probabilidad que la muestra contenga exactamente dos documentos mal archivados?

(b) Suponiendo que la muestra contenga dos documentos mal archivados. ¿Cuál es la probabilidad que ambos hayan sido archivados por Juan ?

SOLUCION 1 Elegir al azar un día de la semana. La semana se divide, en los días trabajados por Juan y en los trabajados por Juana. Se tiene así,

$$P[\text{Juan}] = 3/5 \quad , \quad P[\text{Juana}] = 2/5 \quad \text{(ver diagrama)}.$$

2. De todos los documentos archivados el día elegido, se extrae una muestra de 4 documentos.

3. Teniendo en cuenta que los documentos pueden ser archivados por Juan ó - Juana (o, en el sentido de exclusión),

   Definimos :

   $X(\omega)$ = número de documentos mal archivados por Juan, en la muestra de 4 .

   $Y(\omega)$ = número de documentos mal archivados por Juana en la muestra de 4

   $$R_X = \{0,1,2,3,4\} \quad , \quad R_Y = \{0,1,2,3,4\}$$

4. (*i*) La verificación de cada documento, son ensayos con sólo dos resultados posibles: mal archivados (E) o bien archivados (F).

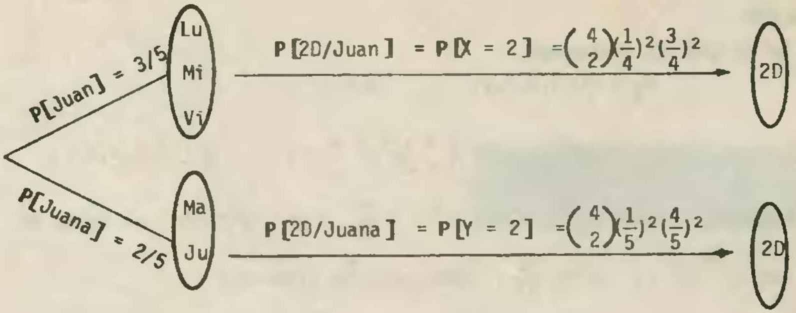
   (*ii*) Los resultados de cada ensayo son independientes debido a que la población es muy grande con respecto a la muestra (ver 5.2.1). Es decir

   $p = P[E]$ es constante en cada ensayo.

5. Por lo tanto, las variables aleatorias **X** e **Y** tienen una distribución binomial con parámetros $n = 4$, $p = \frac{1}{4}$ y $n = 4$, $p = \frac{1}{5}$ respectivamente.

$$P[X = x] = \binom{4}{x}\left(\frac{1}{4}\right)^x\left(\frac{3}{4}\right)^{4-x} \quad , \quad x = 0,1,2,3,4 \; ;$$

$$P[Y = y] = \binom{4}{y}\left(\frac{1}{5}\right)^y\left(\frac{4}{5}\right)^{5-y} \quad , \quad y = 0,1,2,3,4 \; .$$



Del diagrama se obtiene

(a) $$P[2D] = \frac{3}{5}P[X = 2] + \frac{2}{5}P[Y = 2]$$

$$= \frac{3}{5}\ \frac{4!}{2!2!}\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{2}{5}\ \frac{4!}{2!2!}\left(\frac{1}{5}\right)^2\left(\frac{4}{5}\right)^2$$

$$= \frac{81}{5 \times 128} + \frac{192}{5 \times 625} = \frac{75201}{400000} \simeq 0.188 .$$

(b) Según el teorema de Bayes, se tiene ,

$$P[Juan|2D] = \frac{81/649}{75201/400000} = \frac{810000}{1203216} = 0.6732 .$$

EJEMPLO 4 La figura 5.2.2 representa la gráfica de la función de distribución acumulada de una variable aleatoria X, que tiene una distribución binomial.

(a) Determinar n y p, μ y σ_X^2

(b) Calcular $P[X \geq 1]$

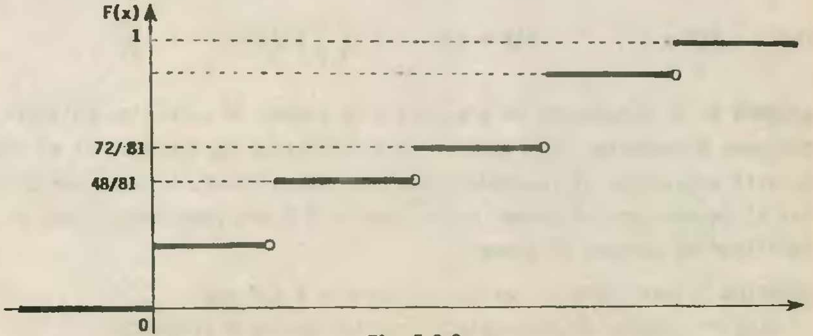


Fig. 5.2.2

SOLUCION

(a) De la gráfica obtenemos,

$$R_X = \{0,1,2,3,4\} \quad , \quad n = 4$$

Luego; $p(x) = P[X = x] = \binom{4}{x} p^x q^{4-x} \quad , \quad x = 0,1,2,3,4$

Además $F(1) = \frac{48}{81}$ y $F(2) = \frac{72}{81}$, por lo tanto, el salto en el punto $x = 2$, vale $\frac{24}{81}$, entonces, se tiene que

$$P[X = 2] = \binom{4}{2} p^2 q^2 = \frac{24}{81}$$

$$6p^2q^2 = \frac{24}{81} \quad , \quad \text{luego} \quad pq = \frac{2}{9}$$

ó $p(1 - p) = \frac{2}{9}$, ó $p^2 - p + \frac{2}{9} = 0$, de donde

$$p = \frac{1}{3} \;,\; y \quad q = \frac{2}{3} \quad ó \quad p = \frac{2}{3} \quad y \quad q = \frac{1}{3}$$

Entonces, la función de probabilidad de **X** en el primer caso es,

$$p(x) = P[X = x] = \binom{4}{x} (\tfrac{1}{3})^x (\tfrac{2}{3})^{4-x} \quad , \quad x = 0,1,2,3,4 \; .$$

La media μ es igual a,

$$\mu = np = 4(\tfrac{1}{3}) = \frac{4}{3} \; .$$

La varianza, $\sigma^2 = npq = 4 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{9}$.

(b) $P[X > 1] = 1 - P[X = 0] = 1 - \binom{4}{0} (\frac{1}{3})^0 (\frac{2}{3})^4 = \frac{65}{81}$.

EJEMPLO 5 Un estudiante se presenta a un examen de seleccion múltiple que contiene 8 preguntas cada una con tres respuestas opcionales. Si el estudiante está adivinando al responder cada pregunta y además se sabe que para aprobar el examen debe responder correctamente 6 ó más preguntas. ¿Cuál es la probabilidad de aprobar el examen?

SOLUCION 1 Definimos la variable aleatoria **X** tal que

X(ω) = número de respuestas correctas en las 8 preguntas.

$$R_X = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$$

2. Puesto que cada pregunta consta de una respuesta correcta y 2 respuestas no correctas, $P[E] = \frac{1}{3} = p$ y $P[F] = q = \frac{2}{3}$ (por estar adivinando)
3. Luego, la distribución de probabilidad de **X** es,

$$p(x) = P[X = x] = \binom{8}{x}\left(\frac{1}{3}\right)^x\left(\frac{2}{3}\right)^{8-x}, \qquad x = 0,1,\ldots,8$$

4. Sea **A**, el evento: "aprobar el examen", entonces

$$P[A] = P[X \geq 6] = \sum_{x=6}^{8}\binom{8}{x}\left(\frac{1}{3}\right)^x\left(\frac{2}{3}\right)^{8-x}$$

$$= \binom{8}{6}\left(\frac{1}{3}\right)^6\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \binom{8}{7}\left(\frac{1}{3}\right)^7\left(\frac{2}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)^8 = \frac{43}{2187} = 0.02.$$

5.2.1 APLICACION DE LA DISTRIBUCION BINOMIAL EN UNA MUESTRA.

La extracción de una muestra de n elementos de una población puede considerarse como un experimento que consiste de n ensayos repetidos. Los n ensayos o selecciones serán independientes en los siguientes casos :

(a) Cuando los elementos de la muestra se extraen con o sin reemplazo de una población infinita. Obviamente el resultado de una extracción cualquiera es independiente de otra extracción y la proporción p de exitos ($p = P[\text{Exito}]$) permanece constante en cada extracción. Entonces, es aplicable la distribución binomial.

(b) Cuando los elementos de la muestra se extraen con reemplazamiento de una población finita. Suponga que la población tiene N elementos, k de los cuales son de cierta clase en las que estamos interesados. Definimos la variable aleatoria **X** tal que

$X(\omega)$ = número de elementos de la clase de nuestro interés en la muestra de tamaño n.

Las extracciones individuales son ensayos de Bernoulli, donde "elemento de clase de nuestro interés" corresponde a "exito" y el experimento de tomar una muestra de tamaño n con reeplazamiento consiste de n ensayos independientes de Bernoulli donde $p = P[\text{Exito}] = \frac{k}{N}$; es decir **X** tiene una distribución binomial

$$p(x) = P[X = x|B;n, \frac{k}{N}] = \binom{n}{x}\left[\frac{k}{N}\right]^{x}\left[1 - \frac{k}{N}\right]^{n-x}, \quad x = 0,1,2,\ldots,n$$

Frecuentemente, en la práctica se extrae una muestra sin reemplazamiento de una población finita, situación en la cual no se puede aplicar la distribución binomial, ya que los ensayos claramente no son independientes. En este caso la distribución es una hipergeométrica (ver 5.5)

EJEMPLO 6 En una población grande de drosophila, el 25% de las moscas tienen una mutación de alas. Se seleccionan aleatoriamente 300 moscas de la población para un examen de mutación de alas. Defina **X** como el número de moscas que tienen mutación en la muestra. Determinar el valor esperado, la varianza y la desviación estandar de X.

SOLUCION 1 $X(\omega)$ = número de moscas que tienen mutación de alas en la muestra de 300 moscas.

2. Puesto que la población es grande (infinita), no interesa como se ha extraído la muestra (con o sin reemplazamiento), se aplica la distribución binomial, con $n = 300$, $p = 0.25$, $q = 0.75$.

3. La función de probabilidad de X es

$$p(x) = P[X = x] = \binom{300}{x}\left(\frac{1}{4}\right)^{x}\left(\frac{3}{4}\right)^{300-x}, \quad x = 0,1,2,\ldots,300.$$

4. La media, varianza y desviación estándar de X son :

$$\mu = np = 300\left(\frac{1}{4}\right) = 75 .$$

$$\sigma^2 = npq = 75 \times \frac{3}{4} = \frac{225}{4} .$$

de donde, $$\sigma_X = \sqrt{\frac{225}{4}} = \frac{15}{2} .$$

EJEMPLO 7 Las máquinas A y B producen, en promedio, 5% y 10% de piezas defectuosas, respectivamente. Se extrae una muestra aleatoria de 4 piezas de la producción de cada una. ¿Cuál es la probabilidad que la muestra obtenida de la producción A tenga exactamente una pieza defectuosa y la muestra correspondiente a B contenga exactamente dos piezas defectuosas?

SOLUCION 1 Sean **X** e **Y** variables aleatorias definidas por

X(ω) = números de piezas defectuosas extraídas de la producción de **A** en la muestra de 4.

$Y(\omega)$ = número de piezas defectuosas extraídas de la producción de B en la muestra de 4

$R_X = \{0,1,2,3,4\}$, R_Y $\{0,1,2,3,4\}$

$n = 4$, $p_X = 0{,}05$, $p_Y = 0.10$.

2. X e Y así definidas son variables aleatorias binomiales y sus respectivas funciones de probabilidad son :

$$P[X = x] = \binom{4}{x}(0.05)^x(0.95)^{4-x} \quad , \quad x = 0,1,\ldots,4 .$$

$$P[Y = y] = \binom{4}{y}(0.10)^y(0.90)^{4-y} \quad , \quad y = 0,1,\ldots,4 .$$

3. Se pide calcular ,

$$P[X = 1,\ Y = 2] = P[X = 1]\,P[Y = 2] , \quad X \text{ e } Y \text{ independientes}$$

$$= \left[\frac{4!}{1!\,3!}(0.05)(0.95)^3\right]\left[\frac{4!}{2!\,2!}(0.10)^2(0.90)^2\right]$$

$$= (0.20)\left(\frac{95}{100}\right)^3 .6.\frac{1}{100}\cdot\frac{81}{100} = (0.171475)(0.0486)$$

$$= 0.0083 .$$

EJEMPLO 8 El daltonismo afecta al 1% de una población grande. Suponga que se escogen n personas aleatoriamente de ésta población. ¿Cuál es la probabilidad de que ninguna de las n personas sean daltonianos? ¿Qué tamaño debe tener n para que ésta probabilidad sea menor que el 10% ?

SOLUCION 1 Sea X la variable aleatoria definida por

$X(\omega)$ = número de personas daltonianos en las n personas seleccionadas.

$R_X = \{0,1,2,\ldots,n\}$, $p = 0.01$ y $n = ?$

2. Luego, X tiene una distribución binomial con $p = 0.01$, $q = 0.99$. O sea

$$P[X = x] = \binom{n}{x}(0.01)^x(0.99)^{n-x} \quad , \quad x = 0,1,2,\ldots, n$$

(a) $P[X = 0] = \binom{n}{0}(0.01)^0(0.99)^n = (0.99)^n$

(b) Se quiere determinar n tal que,

$$P[X = 0] = (0.99)^n < 0.10$$

Resolveremos la ecuación $(0.99)^n = 0.1$

Tomando logaritmos a ambos miembros, se tiene,

$$n \log(0.99) = \log(0.1)$$

$$n \log\left(\frac{99}{100}\right) = \log\left(\frac{1}{10}\right)$$

de donde, $n = \dfrac{1}{2 - \log 99} = \dfrac{1}{2 - 1.9956}$

Luego, $n \simeq 227.$

EJEMPLO 9 Un dado cargado es lanzado 10 veces. Se sabe que la probabilidad de que aparezca 5 veces un número par es el doble de la probabilidad que aparezca 4 veces un número par. Si se lanza el dado una vez. ¿Cuál es la probabilidad que aparezca un número par?

SOLUCION 1 Sea X la variable aleatoria tal que

$X(\omega)$ = número de veces que aparece un número par en los 10 lanzamientos del dado cargado

$$R_X = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$$

$$n = 10 \quad , \quad p = ?$$

2. La función de probabilidad de X es,

$$p(x) = P[X = x] = \binom{10}{x} p^x (1 - p)^{10-x} \quad , \quad x = 0,1,\ldots,10$$

3. Además, del enunciado se tiene

$$P[X = 5] = 2P[X = 4]$$

$$\binom{10}{5} p^5(1 - p)^5 = 2\binom{10}{4} p^4(1 - p)^6$$

$$\frac{10!}{5!5!}\, p = \frac{2 \times 10!}{4!6!}\,(1 - p)$$

$$\frac{6}{5}\, p = 2(1 - p)$$

de donde $p = \dfrac{5}{8}$, $q = \dfrac{3}{8}$.

4. Por lo tanto, la probabilidad de obtener un número par en un lanzamiento de éste dado es $\frac{5}{8}$.

EJEMPLO 10 Una máquina produce artículos en los que hay una proporción p de defectuosos. El ingeniero a cargo de la producción acostumbra inspeccionar la máquina cada hora, mediante una muestra. Si la muestra no contiene artículos defectuosos, permite que la máquina siga trabajando. Admitiendo que $p = 0.10$, determinar el tamaño máximo de la muestra, de modo que la probabilidad que la máquina no sea detenida en una inspección determinada sea menor o igual que 0.01.

SOLUCION 1 Sea n el tamaño de la muestra, que queremos determinar.

2. $X(\omega)$ = número de artículos defectuosos en la muestra de tamaño n .

$$P[E] = p = 0.10, \qquad q = 0.90$$

3. La distribución de probabilidad de X es,

$$P[X = x] = \binom{n}{x}(0.10)^x(0.90)^{n-x} \quad , \qquad x = 0,1,2,\ldots,n$$

4. La máquina no se detiene, si la variable aleatoria X toma el valor, 0, entonces,

$$P[X = 0] = \binom{n}{0}(0.10)^0(0.90)^n \leq 0.01$$

Resolveremos la ecuación,

$$(0.90)^n = 0.01$$

$$n \log(0.90) = \log(0.01)$$

$$n = \frac{-2}{-0.0458} = 43.6$$

Luego, $n = 44.$

EJEMPLO 11 Fabricante de piezas de carro, envía en lotes de 20 a sus clientes. Suponer que cada pieza está defectuosa o no lo está, y que la probabilidad de que cualquiera de ellas está defectuosa es de 0.05.

(a) ¿Cuál es el número esperado de piezas defectuosas por lote?

(b) Si un cliente determinado del proveedor mencionado recibe 10 lotes. ¿Cuál es el número esperado de lotes que no tienen piezas defectuosas?.

SOLUCION 1 Definimos la variable aleatoria X, tal que

$X(\omega)$ = número de piezas defectuosas en un lote de 20.

$$R_X = \{0,1,2,\ldots,20\}$$

2. La variable aleatoria, X, tiene una distribución binomial con $n = 20$ -

y $p = 0.05$. Entonces,

(a) $\mu = E(X) = 20(0.05) = 1$.

(b) Sea Y la variable aleatoria tal que

$Y(\omega)$ = número de lotes que no tienen piezas defectuosas en 10 lotes.

$$R_Y = \{0,1,2,\ldots,10\}$$

La probabilidad que un lote no tiene piezas defectuosas se obtiene así,

$$P[X = 0] = \binom{20}{0}(0.05)^0(0.95)^{20} = 0.3585$$

La variable aleatoria Y tiene una distribución binomial con $n = 10$ y $p = 0.3585$. Entonces,

$$\mu = E(Y) = 10(0.3585) = 3.585.$$

aproximadamente hay 4 lotes que no contienen piezas defectuosas.

5.2.2 USO DE LA TABLA DE PROBABILIDAD BINOMIAL

Los valores de la función de distribución acumulada de la variable aleatoria X que tiene una distribución binomial, están dadas en tablas y el uso de éstas simplifica enormemente el cálculo de todo tipo de probabilidades binomiales.

Sea $X(\omega)$ = número de éxitos en los n ensayos de Bernoulli

La probabilidad acumulada binomial dado en la tabla I. es $P[X \geq r]$, que designaremos por

$$P[X \geq r|B;\, n,p] \quad \text{o} \quad P[X \geq r|n,p]$$

En otras palabras, la tabla da, la probabilidad que variable aleatoria binomial toma valores mayores o iguales a r. Estas probabilidades se muestra en la figura 5.2.3. El diagrama muestra los posibles valores que toma la variable aleatoria, asociado con sus respectivas probabilidades y se ve también que cada probabilidad en la tabla de probabilidad acumulada es la suma de las probabilidades individuales.

$$P[X \geq r] = P[X = r] + P[X = r+1] + \ldots + P[X = n]$$

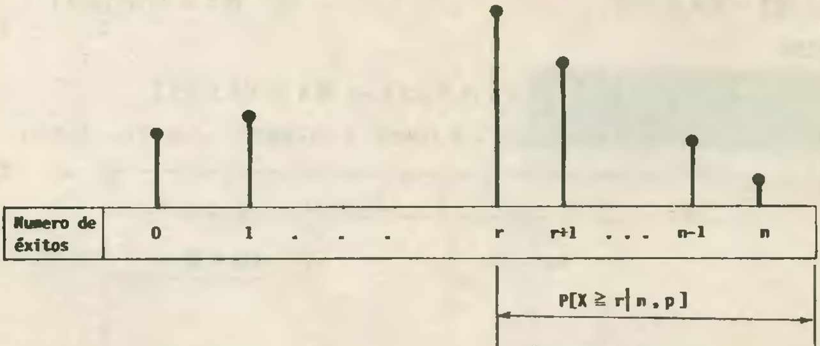


Fig. 5.2.3

Algunas de la probabilidades más simples que se presentan, se da en el siguiente cuadro

Probabilidades que queremos calcular		Probabilidades dadas en la tabla
$P[X \geq r \mid n,p]$	=	$P[X \geq r \mid n,p]$
$P[X > r \mid n,p]$	=	$P[X \geq r + 1 \mid n,p]$
$P[X = r \mid n,p]$	=	$P[X \geq r \mid n,p] - P[X \geq r + 1 \mid n,p]$
$P[X < r \mid n,p]$	=	$1 - P[X \geq r \mid n,p]$
$P[X \leq r \mid n,p]$	=	$1 - P[X \geq r + 1 \mid n,p]$

Utilizando un diagrama similar a la figura 5.2.3, se tendrá :

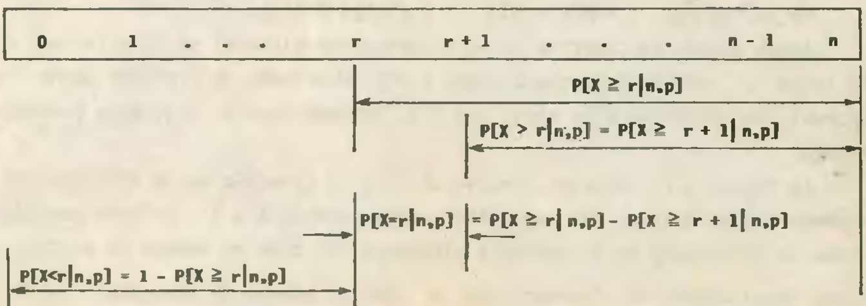


Fig. 5.2.4

EJEMPLO 12 Calcular :

(a) $P[X = 2|4,0.23]$, (b) $P[X < 10|20,0.3]$

SOLUCION

(a) $P[X = 2|4,0.23] = P[X \geq 2|4,0.23] - P[X \geq 3|4,0.23]$

$= 0.2285 - 0.00403 = 0.1882.$ (ver fig. 5.2.5)

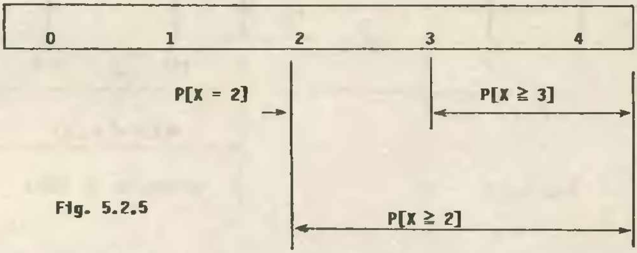


Fig. 5.2.5

De la gráfica se observa, $P[X = 2] = P[X \geq 2] - P[X \geq 3]$

(b) $P[X < 10|20,0.3] = 1 - P[X \geq 10|20,0.3] = 1 - 0.0480 = 0.9520$

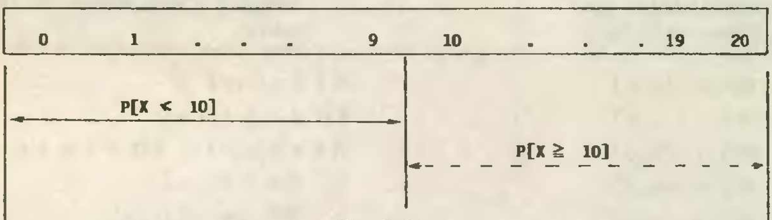


Fig. 5.2.6

de la figura: $P[X < 10] = 1 - P[X \geq 10]$

Ahora usando la simetría de la distribución binomial se ha eliminado en la tabla los valores de p que exceden a 0.5. Si setiene un problema donde la probabilidad de éxito p es mayor que 0.5, debemos usar el siguiente procedimiento.

La figura 5.2.7 muestra como se utiliza la simetría de la distribución binomial. Consideremos las variables aleatoriamente X y X'. Primero consideremos la ocurrencia de la variable aleatoria X como el número de éxitos. Luego sonsideremos la ocurrencia de X' como el número de fracasos.

Número de éxitos, X	n $n-1$ . . . . r 1 0	éxitos con probabilidad $p > 0.5$

Números de fracasos X'	0 1 . . . . $n-r$ . . . . $n-1$ n	Fracaso con probabilidad $1-p < 0.5$

Fig. 5.2.7

Luego, si $p > 0.5$, se hace las siguientes sustituciones

(1) Se sustituye r por $n - r$

(2) Se sustituye p por $1 - p$

(3) Se invierte las desigualdades ($\geq$ se cambia por $\leq$; $<$ por $>$, así sucesivamente)

(4) Use el procedimiento descrito para calcular probabilidades con $p < 0.5$.

EJEMPLO 13 Calcular las siguientes probabilidades :

(a) $P[X < 4|10,0.8]$ (b) $P[X > 4|10,0.8]$

(c) $P[X \geq 4|10,0.8]$ (d) $P[X = 4|10,0.8]$

(e) $P[X \leq 4|10,0.8]$

SOLUCION

(a) Debemos determinar $P[X < 4|10, 0.8]$, entonces

$n = 10$, $r = 4$, $p = 0.8$.

Luego, $n - r = 6$, $1 - p = 0.2$

Por lo tanto, se tiene,

$$P[X < 4|10, 0.8] = P[X' > 6|10,0.2]$$
$$= P[X' \geq 7|10,0.2] = 0.0009$$

esta relación puede verse en la figura 5.2.8 .

Número de éxitos X	10 9 8 7 ...4 3 2 1 0	$P[E] = 0.80$

$P[X < 4|10,0.8]$

$P[X' \geq 7|10,0.2]$

Números de fracasos X'	0	1	2	3	4 ...	7	8	9	10	$P[F] = 0.20$

Fig. 5.2.8

Siguiendo un procedimiento similar obtenemos,

(b) $P[X > 4|10,0.8]$, aquí $n = 10$, $r = 4$, $p = 0.8$

Luego, $n - r = 6$, $1 - p = 0.2$, por lo tanto,

$$P[X > 4|10,0.8] = P[X' < 6|10,0.2]$$
$$= 1 - P[X' \geq 6|10,0.2]$$
$$= 1 - 0.0064 = 0.9936 .$$

(c) $$P[X \geq 4|10,0.8] = P[X' \leq 6|10,0.2]$$
$$= 1 - P[X' \geq 7|10,0.2]$$
$$= 1 - 0.0009 = 0.9991 .$$

(d) $$P[X = 4|10,0.8] = P[X' = 6|10,0.2]$$
$$= P[X' \geq 6|10,0.2] - P[X' \geq 7|10,0.2]$$
$$= 0.0064 - 0.0009 = 0.0055 .$$

(e) $$P[X \leq 4|10,0.8] = P[X' \geq 6|10,0.2] = 0.0064 .$$

EJEMPLO 14 Se ha elaborado un examen de selección múltiple consistente en 10 preguntas. Hay cuatro respuestas posibles para cada pregunta. Suponga que ninguno de los estudiantes que van a rendir el test concurrió a clase o que no estudió para el examen (cosa muy frecuente). El profesor que toma la prueba ha establecido que para aprobar debe contestar correctamente al menos 6 preguntas. Si hubiese 100 alumnos en la clase, ¿cuántos alumnos teóricamente aprobarían?

SOLUCION 1 Puesto que ninguno de los alumnos asistió a clase o no estudió para el examen, la elección de la respuesta en cada una de las 10 preguntas se hará al azar; Por lo tanto la elección de la respuesta en cada pregunta se considera como un ensayo de Bernoulli, con

p = Probabilidad de acertar la respuesta correcta = $\frac{1}{4}$ y $q = \frac{3}{4}$

2. El experimento se repite 10 veces. Es decir $n = 10$

3. Definimos la variable aleatoria X por

$X(\omega)$ = número de preguntas correctas en las 10 preguntas

$$R_X = \{0, 1, 2, 3, \ldots, 10\}$$

4. La variable aleatoria X, así definida es una variable aleatoria binomial, por lo tanto su distribución es,

$$P[X = x] = \binom{10}{x}\left(\frac{3}{4}\right)^{10-x}\left(\frac{1}{4}\right)^{x}, \quad x = 0,1, \ldots, 10 .$$

5. Para aprobar el examen debe contestar al menos 6 preguntas correctas. Es decir, la probabilidad de aprobar el examen es,

$$P[X \geq 6] = \sum_{x=6}^{10}\binom{10}{x}\left(\frac{3}{4}\right)^{10-x}\left(\frac{1}{4}\right)^{x}$$

buscando en la tabla I obtenemos

$$P[X \geq 6] = 0.0197$$

Por lo tanto, aprobarían teóricamente el examen,

$$100\ (0.0197) = 1.97 \approx 2, \text{ alumnos}$$

EJEMPLO 15 El tiempo de llegada en minutos X de camiones, a un depósito, se comporta de acuerdo a la siguiente función de densidad,

$$f(x) = \begin{cases} 1/x^2 & , \quad 1 < x < \infty \\ 0 & , \quad \text{en otro lugar} \end{cases}$$

Se desea alegir una muestra aleatoria de 8 camiones. Determinar la probabilidad que al menos dos de los camiones por elegir tengan un tiempo de llegada menor de 3 minutos.

SOLUCION 1 Calcularemos primero la probabilidad que un camión tenga un tiempo de llegada menor de 3 minutos. Para esto definimos la variable aleatoria X de la siguiente manera

$X(\omega)$ = tiempo de llegada de cada camión en minutos.

Entonces, $$P[X < 3] = \int_1^3 \frac{1}{x^2}\, dx = \frac{2}{3}$$

2. Definimos ahora la variable aleatoria Y de la siguiente manera,

$Y(\omega)$ = número de camiones que tienen un tiempo de llegada menor de 3 minutos, en la muestra de 8.

$R_Y = \{0, 1, 2, 3, \ldots, 8\}$

3. Y es una variable aleatoria binomial, con $n = 8$, $p = \frac{2}{3}$ y $q = \frac{1}{3}$

$$P[Y = y] = \binom{8}{y}\left(\frac{1}{3}\right)^{8-y}\left(\frac{2}{3}\right)^{y}, \qquad y = 0, 1, 2, \ldots, 8$$

4. Se pide calcular $P[Y \geq 2]$

$$P[Y \geq 2|8, 2/3] = P[Y' \leq 6|8, 1/3] = 1 - P[Y' \geq 7|8, 1/3]$$

$$= 1 - 0.0026 = 0.9976 . \qquad \text{(Tabla I)}$$

EJEMPLO 16 Dos personas juegan a cara o sello y han convenido en continuar la partida hasta que tanto cara como sello hayan aparecido por lo menos tres veces. Hallar la probabilidad que el juego no se acabe cuando se han realizado 10 tiradas.

SOLUCION 1 Definimos la variable aleatoria X como sigue

$X(\omega)$ = número de caras obtenidas en diez tiradas.

$$R_X = \{0,1,2,3, \ldots, 10\}$$

2. X tiene una distribución binomial con parámetros $n = 10$ y $p = \frac{1}{2}$

$$P[X = x|10, 0.5] = \binom{10}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^{10}, \qquad x = 0,1, \ldots, 10.$$

3. Para que el juego no termine en 10 tiradas, debe ocurrir que :

$X \leq 2$, número de caras menores que 3 .

ó $X \geq 8$, número de sellos menores que 3 .

Es decir, la probabilidad pedida es

$$P[\{X \leq 2\} \cup \{X \geq 8\}] = P[X \leq 2] + P[X \geq 8] \quad \text{(Eventos excluyentes)}$$

$$= 1 - P[X \geq 3|10,0.5] + P[X \geq 8|10,0.5]$$

$$= 1 - 0.9453 + 0.0547 \quad \text{(tabla I)}$$

$$= 0.1094 .$$

EJEMPLO 17 Un cuerpo se encuentra en reposo, en el punto (0,0). Se lanza un dado y por cada número primo que aparece el cuerpo se desplaza 1 unidad de - longitud hacia la derecha, en caso contrario se desplaza una unidad a la izquierda. Calcular la probabilidad que después de 10 lanzamientos el cuerpo se encuentre :

(a) a 8 unidades de longitud a la derecha del origen;

(b) a 3 unidades de longitud a la derecha del origen;

(c) a 2 unidades de longitud a la izquierda del origen;

(d) a más de una unidad a la derecha del origen.

SOLUCION 1 El experimento es lanzar un dado 10 veces.

2. Definimos la variable aleatoria X de siguiente manera;

$X(\omega)$ = número de veces que aparece un número primo en los 10 lanzamientos del dado.

$R_X = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$

$p = P[E] = P[\{N° \text{ primo}\}] = P[\{1,2,3,5\}] = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

$q = P[F] = P[\{N° \text{ no primo}\}] = P[\{4,6\}] = \frac{1}{3}$.

3. La variable aleatoria X tiene una distribución binomial con parámetros

$n = 10$ y $p = \frac{2}{3}$. O sea

$$P[X = x | 10, \tfrac{2}{3}] = \binom{10}{x} (\tfrac{2}{3})^x (\tfrac{1}{3})^{10-x} \quad , \quad x = 0,1,\ldots,10 .$$

4. Definimos ahora una nueva variable aleatoria Y, así

$Y(\omega)$ = posición del cuerpo con respecto al origen (0,0) .

$R_Y = \{-10, -8, -6, -2, 0, 2, 4, 6, 8, 10\}$

5. Observe que la variable aleatoria Y puede escribirse como una función de X,

$$y = 2X - 10$$

Por lo tanto, la distribución de probabilidad de Y se obtiene de la distribución de probabilidad de X.

(a) $P[Y = 8] = P[X = 9] = \binom{10}{9} (\frac{2}{9})^9 (\frac{1}{3}) = 0.0898$

(b) $P[Y = 3] = 0$, pués $3 \notin R_Y$.

(c) $P[Y = -2] = P[X = 4] = \binom{10}{4} (\frac{2}{3})^4 (\frac{1}{3})^6 = 0.2252$.

(d) $P[Y \geq 2] = P[X \geq 6] = \sum_{x=6}^{10} \binom{10}{x} (\frac{2}{3})^x (\frac{1}{3})^{10-x} = 0.7936$.

5.2.3 NUMERO MAS PROBABLE DE REPETICIONES DE SUCESOS

Expondremos aquí dos problemas importantes con respecto a la distribución binomial. La primera es que cuando los valores de x crecen, las probabilidades