Лабораторная работа 6

Борис Шапошников

Виктор Шарепо

Рамазан Рахматуллин

Обратная связь: bshaposhnikov01@gmail.com

Формулировка задачи

1. Для указанного распределения построить ОМП указанного параметра.
2. Найти квадратичный риск полученной оценки одномерного параметра (проверить несмещенность оценки или найти смещение).
3. Для указанного распределения вычислить информацию Фишера для указанного параметра указанного распределения.
4. Выяснить достигается ли в рассмотренном случае минимум квадратичного риска. Для несмещенной оценки параметра минимум определяется правой частью неравенства Рао-Крамера. Определить является ли оценка эффективной.

Вариант задачи 2

Неизвестное среднее a нормального распределения $N(a, \sigma^2)$ с известной дисперсией σ^2.

1 Построение ОМП

Используем метод максимального правдоподобия.

$L(a, x_1, ..., x_n) = \prod\limits_{i=1}^{n} f(x_i, a) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{n}{2}}} exp(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - a)^2)$.

$l(a, x_1, ..., x_n) = \ln(L(a, x_1, ..., x_n)) = -\frac{n}{2}\ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - a)^2$.

Найдём значение a_n^* — стационарную точку $l(a, x_1, ..., x_n)$ как функцию от "a":

$\frac{dl}{da} = \frac{1}{\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - a)$.

Необходимое условие максимума: $\frac{dl}{da} = 0 \Rightarrow \frac{1}{\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - a) = 0 \Longleftrightarrow \sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - a) = 0 \Longleftrightarrow \sum\limits_{i=1}^{n} x_i - na = 0 \Longleftrightarrow a_n^* = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \overline{x_n}$.

Достаточное условие максимума: $\frac{d^2l}{da^2}(a_n^*) < 0 \Rightarrow \frac{d^2l}{da^2}(a_n^*) = \sum\limits_{i=1}^{n}(-1) = -n < 0$ и не зависит от $a_n^* \Rightarrow \frac{d^2l}{da^2}(a_n^*) < 0$ и a_n^* — точка максимума $l(a, x_1, ..., x_n)$ и $L(a, x_1, ..., x_n)$.

ОМП параметра $\theta = a$ имеет вид $\hat{a_n} = \overline{x_n}$.

2 Нахождение квадратичного риска $\hat{a_n} = \overline{x_n}$ — оценки $\theta = a$ для $X \sim N(a, \sigma^2)$

$E_x\overline{x_n} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} Ex_i = \frac{1}{n}na = a$, то есть $\hat{a_n} = \overline{x_n}$ является несмещённой оценкой одномерного параметра $\theta = a \in R$. Следовательно, $R_2(\hat{a_n}, a)$ — квадратичный риск оценки равен её дисперсии: $R_2(\hat{a_n}, a) = D_x\hat{a_n} = D_x(\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i) = \frac{1}{n^2}\sum\limits_{i=1}^{n} Dx_i = \frac{1}{n^2}n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$ (воспользовались независимостью $\{x_i\}_{i=1}^{n}$).

3 Вычисление информации Фишера для выборки $x_1, ..., x_n$ из $X \sim N(a, \sigma^2)$

$I_1(a) = E_x(l'_a(a, x))^2$ — информация Фишера по одному выборочному значению $\Rightarrow I_n(a) = E_x(l'_a(a, x_1, ..., x_n))^2 = nI_1(a)$.

$l(a,x) = \ln{(f(x,a))} = \ln{(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}exp(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}))} = -\frac{1}{2}\ln{(2\pi\sigma^2)} - \frac{1}{2\sigma^2}(x-a)^2.$

$l'_a(a,x) = \frac{1}{\sigma^2}(x-a).$

$I_1(a) = E_x(\frac{1}{\sigma^2}(x-a))^2 = \frac{1}{\sigma^4}E_x(x-a)^2 = \frac{1}{\sigma^4}Dx = \frac{1}{\sigma^2}.$

$I_n(a) = nI_1(a) = \frac{n}{\sigma^2}.$

$I_n(a)$ — информация Фишера, полученная по выборке $x_1, ..., x_n$.

4 Вывод

$R_2(\hat{a_n}, a) = D_x(\hat{a_n}) = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{1}{I_n(a)}$. Таким образом неравенство Рао-Крамера в данном случае превращается в равенство. Для $X \sim N(a,\sigma^2)$ оценка $\hat{a_n} = \overline{x_n}$ имеет наименьший возможный квадратичный риск. Следовательно, $\hat{a_n} = \overline{x_n}$ является эффективной оценкой параметра a, если генеральная совокупность X имеет распределение $X \sim N(a,\sigma^2)$.